

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи

Митин Андрей Юрьевич



**НЕСТАЦИОНАРНЫЙ КОНТАКТ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО
ТЕЛА И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук,
доцент Г.В. Федотенков

Москва – 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
Глава 1. ПОСТАНОВКА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫХ УДАРНИКОВ И ТОНКОЙ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ТИМОШЕНКО	9
§ 1.1. Современное состояние исследований	9
§ 1.2 Уравнения движения оболочки и ударника	32
§ 1.3 Условия контакта	37
§ 1.4 Разрешающая система функциональных уравнений.....	42
Глава 2. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ ВЛИЯНИЯ ДЛЯ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ТИМОШЕНКО	44
§ 2.1 Постановка задачи.....	44
§ 2.2 Численно-аналитический метод построения пространственной функции влияния для цилиндрической оболочки Тимошенко	48
§ 2.3 Решения тестовых задач о воздействии на оболочку внешнего нестационарного давления, примеры расчетов.....	55
§ 2.4 Сравнение предложенного метода обращения с другими численными методами	64
Глава 3. МЕТОД И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫХ УДАРНИКОВ И ТОНКОЙ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ТИМОШЕНКО	70
§ 3.1 Численный аналог системы разрешающих уравнений	70
§ 3.2 Алгоритм решения	77
§ 3.3. Примеры расчета.....	80

ЗАКЛЮЧЕНИЕ	95
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	96

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время, задачи механики деформируемого твердого тела приобретают все большую актуальность как в теоретическом, так и прикладном отношении. Это связано с возрастающими требованиями к точности расчетов на прочность и несущую способность основных элементов инженерных конструкций, работающих под воздействием нагрузок. Исследование процессов в тонких оболочках является актуальным для современной космической и авиационной техники, судостроения, строительства инженерных сооружений и т.д. В этой связи контактные задачи для оболочек являются одним из наиболее бурно развивающихся научных направлений.

Актуальность работы. Несмотря на наличие большого количества научных публикаций, все еще малоисследованными остаются нестационарные задачи механики, в частности нестационарные контактные задачи для пластин и оболочек. Однако, развитие современных методов и подходов к решению нестационарных задач дает возможность понять обоснованности протекания процессов нестационарного контактного взаимодействия.

Данная работа посвящена исследованию нестационарного контактного взаимодействия между абсолютно твердыми ударниками и круговой цилиндрической оболочкой типа Тимошенко. Задача осложняется тем, что область контакта зависит от времени и заранее неизвестна. Классические методы решения, применяемые в задачах с известной областью контакта, в этих случаях не подходят, поэтому существует необходимость разработки оригинальных численно–аналитических алгоритмов.

Цель работы. Целью работы является решение новых нестационарных контактных задач для гладкого абсолютно жесткого ударника и бесконечной круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко на основе оригинального разработанного численно-аналитического метода.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие основные результаты и выводы:

1. Разработана постановка и метод решения новой пространственной нестационарной контактной задачи с подвижными границами о взаимодействии абсолютно твёрдого ударника с тонкой круговой цилиндрической оболочкой типа Тимошенко.

2. Построена пространственная нестационарная функция влияния для тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко.

3. Получены решения пространственных нестационарных задач для круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко, находящейся под воздействием заданного внешнего давления.

4. Построено решение пространственной нестационарной контактной задачи для абсолютно твердых ударников и круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко.

Научная новизна.

1. Дана постановка и разрешающие соотношения пространственной нестационарной контактной задачи для круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко и абсолютно твёрдого ударника.

2. Аналитическими методами построена пространственная нестационарная функция влияния круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко.

3. Построены решения нестационарных задач о пространственном движении круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко под действие внешнего давления.

4. Построено решение пространственной нестационарной контактной задачи для круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко и абсолютно твердого ударника.

Достоверность результатов. Достоверность полученных результатов обеспечивается математически строгой и физически корректной постановкой задачи, применением апробированных математических методов,

классических постановок задач теории пластин и оболочек и механики твердого тела, а также совпадением полученных результатов в частных случаях с известными аналитическими решениями.

Практическая значимость. Состоит в разработке методов исследования напряженно-деформированного состояния элементов конструкций, работающих в условиях нестационарных контактных внешних воздействий, а также в возможности использования полученных решений в качестве тестовых при использовании различных пакетов программ.

Апробация основных результатов работы.

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на Российских и Международных конференциях и симпозиумах:

- Международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при взаимодействии полей различной физической природы». (Москва, МАИ, 2014 – 2016 г.г.);

- Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Московская обл., 2015 – 2019 г.г.);

- Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, МГУ, 2016 – 2018 г.г.).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 10 печатных работах, из них 2 статьи в журналах из перечня, рекомендуемого ВАК РФ и 1 статья, входящая в базу данных SCOPUS.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором и при его непосредственном участии.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Общий объём диссертации

составляет 109 страниц, включая 41 рисунок. Список литературы включает 102 наименования.

В главе 1 приводится обзор исследований, посвященных изучению нестационарных задач механики, в частности нестационарных контактных задач, он показывает, что нестационарные контактные задачи для абсолютно твердых ударников и тонких упругих цилиндрических оболочек исследованы недостаточно. Приводится общая постановка пространственной нестационарной контактной задачи для абсолютно твердых ударников и круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко, даются уравнения движения абсолютно твердого ударника, а так же круговой цилиндрической оболочки в форме С.П. Тимошенко. Приводится постановка начальных и граничных условий, а так же условий контакта, приводится система разрешающих функциональных уравнений.

Глава 2 посвящена исследованию нестационарного движения круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко под воздействием внешнего давления. Приведена постановка задачи о пространственном движении круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко под воздействием внешнего нестационарного давления, постановка начальных и граничных условий задачи. Разработана численно–аналитическая методика решения пространственной нестационарной задачи о движении круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко, которая основана на применении метода функций влияния, согласно которому, сначала, аналитическими методами строятся фундаментальные решения (функции влияния) для оболочки. Затем, основываясь на принципе суперпозиции, задача сводится к разрешающему интегральному соотношению. Приводятся результаты тестовых задач о воздействии нестационарного внешнего давления на круговую цилиндрическую оболочку типа Тимошенко.

В главе 3 описаны метод и алгоритм решения пространственной нестационарной контактной задачи для абсолютно твердых ударников и тонкой круговой цилиндрической оболочки в форме С.П. Тимошенко.

Построенные алгоритмы реализованы на ЭВМ. Приведен пример расчета процесса нестационарного контактного взаимодействия абсолютно твердого ударника в форме параболоида вращения и цилиндрической оболочки Тимошенко. Рассмотрен наиболее опасный для практических приложений случай нормального бокового удара. Проанализировано влияние начальной скорости движения ударника на процесс нестационарного контакта.

Глава 1. ПОСТАНОВКА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫХ УДАРНИКОВ И ТОНКОЙ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ТИМОШЕНКО

§ 1.1. Современное состояние исследований

Основы теории пластин и оболочек, в том числе с учётом геометрической и физической нелинейности, изложены в фундаментальных трудах Новожилова В.В., Черных К.Ф., Михайловского Е.И. [70], Гольденвейзера А.Л. [22], Галимова К.З., Паймушина В.Н., Терегулова И.Г. [21]. В работе Розина Л.А. [75] рассматриваются различные численные методы решения задач теории упругости. Основное внимание уделяется методам конечных и граничных элементов. Выясняются их специфические особенности при решении задач теории упругости, теории пластин и оболочек. Рассматриваются способы рационального сочетания численных и аналитических методов. В работе Вестяка В.А., Федотенкова Г.В. [16] предложена методика получения решений нестационарных задач механики с использованием численного обращения интегрального преобразования Лапласа, метода малого параметра и специальных квадратурных формул для вычисления интегралов типа свертки. Данный подход применен к решению новых актуальных нестационарных задач, возникающих при учете связности полей различной природы при электромагнитоупругих и механодиффузионных процессах, а также нестационарных связанных задач для тел и элементов конструкций, обладающих неклассическими свойствами.

В работе Сеницкого Ю.Э., Сеницкого А.Ю. [80] показана принципиальная возможность применения метода разложения по собственным вектор–функциям (в форме конечных интегральных преобразований) в нестационарных осесимметричных задачах динамики оболочек вращения с произвольным меридианом при наиболее общих условиях нагружения и закрепления на контуре. Исследование основано на

гиперболических системах дифференциальных уравнений уточненной теории, учитывающей деформации сдвига и инерцию поворота поперечных сечений. Получающаяся при этом начально–краевая задача является несамосопряженной, что не дает возможности воспользоваться обычной процедурой разложения по собственным функциям, основанной на известных соотношениях ортогональности. В исследовании Сеницкого Ю.Э [79] сформулировано конечное интегральное преобразование в классе вектор–функций с интегрируемым квадратом, представляющее m –компонентный обобщенный аналог обычной формулы обращения. Построен алгоритм решения начально–краевых задач, описываемых системами линейных дифференциальных уравнений в частных производных. В процедуре алгоритма определяются все компоненты его структуры. В качестве примеров приведены замкнутые решения ряда задач динамики для круглых пластин и пологих сферических оболочек в постановке теории С. П. Тимошенко, для толстостенных анизотропных, неоднородных цилиндров и сфер, а также динамических задач связанной термоупругости.

Решение краевой задачи в цилиндрических координатах рассматривается в работе Танькова Г.В., Селиванова В.Ф., Трусова В.А. [82]. Для решения задачи используются дифференциальные уравнения равновесия теории упругости в цилиндрической системе координат. При решении задачи в перемещениях можно привести эти уравнения к виду уравнений Ламэ для цилиндрических координат. Однако простое представление уравнений Ламэ в конечных разностях приводит к появлению погрешностей, вызванных отбрасыванием членов высшего порядка малости при переходе от разностных уравнений к дифференциальным. Поэтому расчетные соотношения следует получать непосредственно из физических представлений.

В работе Волкова И.А., Коротких Ю.Г. [17] рассматриваются основные закономерности процессов деформирования и накопления повреждений в конструкционных материалах (металлах и их сплавах) при различных

(квазистатических и динамических) режимах термосилового нагружения и математические модели указанных процессов. Приводится экспериментально–теоретическая методика определения материальных параметров и функций данных математических моделей. Даются результаты численного моделирования процессов деформирования и накопления повреждений металлов и ряда конструкционных сталей при квазистатических и динамических термосиловых воздействиях. Особое внимание уделяется вопросам моделирования процессов упругопластического деформирования и накопления усталостных повреждений для сложных процессов деформирования конструкционных сталей, сопровождающихся вращением главных площадок тензоров напряжений и деформаций.

В работе Зеленцова В.Б. [40] рассматривается нестационарная динамическая контактная задача об ударе жесткого параболического штампа в упругую полуплоскость сведена к решению задачи Коши для интегрально–дифференциального уравнения движения штампа совместно с дополнительным нелинейным уравнением относительного закона движения штампа и полуширины зоны контакта. При численном решении задачи Коши на каждом шаге интегрирования используется приближенное аналитическое решение вспомогательной нестационарной динамической контактной задачи о внедрении жесткого параболического штампа с временно фиксированной шириной зоны контакта, построенное на основе.

Шпeneвым А.Г. [94] была предложена модель для исследования совместного влияния шероховатости жёсткого штампа и вязких свойств основания, разделённых тонким слоем смазки, на характеристики контактного взаимодействия и силу трения скольжения. Была рассмотрена задача о движении тонкого слоя смазочного материала между неподвижным жёстким цилиндром с регулярным рельефом и поверхностью движущегося вязкоупругого полупространства, реологические свойства которого описываются интегральным оператором с экспоненциальным ядром

ползучести. Был дан анализ зависимости давления и толщины смазочного слоя, а также деформационной составляющей силы трения от скорости скольжения. Приведено сопоставление результатов решения контактных задач для вязкоупругих и упругих шероховатых тел при наличии смазки.

В работе Пожарского Д.А., Пожарской Е.Д. [73] была исследована осесимметричная контактная задача о взаимодействии упругого составного цилиндра с жестким биндажом. Цилиндр состоял из сплошного цилиндра и соединенного с ним скользящей заделкой цилиндрического слоя из другого материала. Задача была сведена к интегральному уравнению, для решения которого был применен сингулярный асимптотический метод. Также изучалась трехмерная контактная задача теории упругости о взаимодействии трансформного и ортотропного тел, моделируемых согласно теории Герца двумя полупространствами. При эллиптической области контакта было получено точное решение, при заранее неизвестной области контакта для решения использовался численный метод нелинейных граничных интегральных уравнений.

Григорьяном А.Ж. [38] была рассмотрена плоская контактная задача для составной упругой полуплоскости, состоящей из бесконечной полосы и полуплоскости из различных ортотропных материалов. На линии соединения полосы и полуплоскости составная полуплоскость была ослаблена трещиной конечной длины. На свободной границе полосы и на краях трещины были заданы напряжения. На линии соединения полосы и полуплоскости, вне трещины, имели место условия полного контакта. Решение задачи было сведено к решению сингулярных интегральных уравнений.

В условиях осевой симметрии Золотовым Н.Б., Пожарской Е.Д., Пожарским Д.А. [42] была изучена контактная задача линейной теории упругости о действии жесткого кольцевого биндажа конечной длины на бесконечный полый круговой цилиндр. Интегральное уравнение этой задачи было получено при помощи преобразования Фурье. Для символа ядра интегрального уравнения контактной задачи была предложена новая

аппроксимация, которая эффективна при любой толщине стенок полого цилиндра. На основе этой аппроксимации было получено сингулярное асимптотическое решение, а также сделаны расчеты контактного давления и его интегральной характеристики для цилиндров с тонкими стенками. Важно, что параметры аппроксимации находились при помощи численного метода Монте–Карло. Данный метод особо эффективен при большом числе неизвестных параметров, возникающих именно для тонкостенных цилиндров. Ранее для аналогичных задач использовалась аппроксимация суммой двух разных функций, что приводило лишь к приближенному решению функционального уравнения, которое возникает в методе Винера – Хопфа. Более простая аппроксимация ранее применялась для сплошного цилиндра. Также изучался случай конечного полого цилиндра при скользящей заделке его торцов. Найденное решение может быть применено для анализа прочности трубопроводов при укреплении их бандажами.

В работе Айзиковича С.М., Васильева А.С., Волкова С.С. [1] было получено полуаналитическое решение контактной задачи о внедрении конического штампа в полупространство с неоднородным по глубине покрытием. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона в покрытии изменялись с глубиной по произвольному закону. Решение являлось асимптотически точным для больших и малых значений геометрического параметра задачи (отношение толщины покрытия к радиусу зоны контакта). Были построены численные значения контактных напряжений на примере линейного изменения модуля Юнга в покрытии.

Задача о трещине и контактная задача для упругого слоя, который в начальном состоянии находился в условиях большой деформации были рассмотрены в работе Костыревой Л.А. [44]. Материал слоя определялся потенциалом гармонического типа. Дополнительные напряжения предполагались малыми, поэтому можно было линеаризовать задачи. Последние сводились к решению похожих интегральных уравнений первого рода с разностными ядрами. Были построены асимптотическое и численное

решения для широкого интервала значений параметра, который задавал относительную толщину слоя.

В работе Горшкова А.Г., Дергачева А.А., Егоровой О.В., Зайцева В.Н., Медведского А.Л., Рабинского Л.Н., Тарлаковского Д.В. [36] был рассмотрен комплекс вопросов, связанных с нестационарными контактными задачами с подвижными границами для линейно упругих однородных изотропных сред. В качестве первого этапа исследования динамических характеристик двусвязного основания была решена задача о распространении упругих или акустических волн в пространстве, содержащем два сферических включения, одно из которых могло быть абсолютно жестким телом, а другое (или оба) – полостью. Для решения было использовано преобразование Лапласа по времени, разложения в ряды по полиномам Лежандра и переход от одной сферической системы координат к другой. Была построена разрешающая бесконечная система алгебраических уравнений относительно функций параметра преобразования. Ее решение строилось в виде рядов по экспонентам, что позволяло избежать использования редукции и точно найти оригиналы. Было проведено исследование начального этапа взаимодействия в осесимметричной и плоской задачах о вертикальном ударе соответственно упругих шара и цилиндра по недеформируемому полупространству. Решение строилось с использованием разложений в ряды по полиномам Лежандра или Фурье по угловой координате и асимптотик в окрестности начального момента времени. Вопрос об определении кинематических параметров ударника был сведен к интегрированию задачи Коши для обыкновенного интегро–дифференциального уравнения без предварительного нахождения контактных напряжений. Были рассмотрены также плоская и осесимметричная нестационарные контактные задачи для упругого полупространства и абсолютно жесткого выпуклого ударника. Во втором варианте предлагался алгоритм численного решения разрешающего интегрального уравнения типа Вольтерра с сингулярным ядром в виде поверхностной функции влияния для полупространства. Были выделены

особенности этого ядра и построены соответствующие специальные квадратурные формулы. На основе аналогичного интегрального соотношения для плоской задачи был предложен подход для исследования особенностей контактных напряжений. Для случая термоупругого полупространства с использованием преобразования Лапласа по времени и метода малого параметра был построен и реализован алгоритм вычисления поверхностных функций влияния.

В рамках плоской постановки в работе Ломунова А.К., Пряжевского Р.Д., Федотенкова Г.В. [56] была рассмотрена нестационарная задача о контактном взаимодействии абсолютно твердого штампа, ограниченного гладкой выпуклой кривой, с упругой полуплоскостью. Закон движения штампа предполагался известным. Постановка задачи включала уравнения движения плоской теории упругости в потенциалах упругих смещений, связи потенциалов с перемещениями и напряжениями, начальные условия и граничные условия смешанного типа. Полагалось, что контакт происходил в условиях свободного проскальзывания. На основании принципа суперпозиции нормальные перемещения границы полуплоскости представлялись сверткой нормальных напряжений с функцией влияния. Функция влияния является решением задачи Лэмба. Метод решения был основан на введении аналитических представлений для искомых функций и применении аналитического алгоритма совместного обращения интегральных преобразований Фурье – Лапласа. При этом было существенно, чтобы функция, описывающая закон движения штампа, являлась однородной. Для случая движения границ области контакта со скоростями, не превышающими скорость распространения волн Рэлея, были получены аналитические соотношения, разрешающие задачу. Так же в рамках плоской постановки в работе Арутюняна А.М., Федотенкова Г.В., Тарлаковского Д.В. [2] была рассмотрена плоская нестационарная задача о распространении объемных возмущений в однородном линейно упругом полупространстве, имеющем заглубленную полость произвольной геометрии

и расположения с гладкой границей. Предполагалось, что массовые силы в полупространстве отсутствуют. Метод решения базировался на динамической теореме взаимности и прямом методе граничных интегралов. С помощью метода граничных элементов задача была сведена к решению системы алгебраических уравнений на каждом шаге по времени.

В работе Белянковой Т.И., Калинин В.В. [8] исследовались радиальные гармонические колебания жесткого банджа на поверхности упругой тонкостенной цилиндрической трубы, заполненной находящейся под большим статическим давлением идеальной сжимаемой жидкостью. Задача была сведена к интегральному уравнению, символ ядра которого строился численным образом. Были исследованы свойства интегрального уравнения, предложен метод его решения, изучены закономерности влияния наличия жидкости и начальных напряжений трубопровода на напряженное состояние в зоне контакта при динамических воздействиях. Было показано, что при контроле начальных напряжений на высоких частотах учет наличия жидкости является существенным.

Сверхзвуковой этап взаимодействия абсолютно твердого ударника и упругого изотропного однородного полупространства в рамках плоской задачи теории упругости в условиях жесткого сцепления контактирующих поверхностей был рассмотрен в работе Медведского А.Л., Тарлаковского Д.В. [64]. Задача динамики ударника была сведена к начальной задаче Коши для системы квазилинейных дифференциальных уравнений. Приводились результаты решения задачи о внедрении в упругое полупространства ударника, имеющего начальные несовершенства, и, как следствие, многосвязную область контакта.

Плоская нестационарная контактная задача о взаимодействии симметричного абсолютно твердого ударника и вязкоупругой полуплоскости на сверхзвуковом этапе была рассмотрена в работе Коровайцевой Е.А., Тарлаковского Д.В. [43]. Движение полуплоскости описывалось двумерными интегро-дифференциальными уравнениями, наследственные свойства

материала полуплоскости моделируются ядром релаксации Колтунова. Движение ударника предполагается вертикальным. Рассмотрены два предельных условия контакта: абсолютно жесткое сцепление и свободное проскальзывание. Показано, что выражение для контактной силы для обоих условий одинаковое. Решение уравнения движения ударника получено численно методом Рунге – Кутты для трех типов поверхностей, ограничивающих ударник: параболического, кругового и гиперболического цилиндров. Для вычисления свертки в правой части уравнения используется метод прямоугольников, при наличии особенности подынтегральной функции применяется прием мультипликативного выделения особенности. Показано, что на сверхзвуковом этапе взаимодействия временные зависимости перемещения и скорости ударника, а также изменения радиуса области контакта и скорости расширения области контакта не зависят от значений параметров ядра релаксации в рассматриваемом диапазоне их изменения. Кроме того, при отсутствии внешней силы, действующей на ударник, указанные зависимости практически совпадают. С использованием метода малого параметра выполнена оценка влияния вязкости на характеристики контактного взаимодействия для случая ограничения поверхности ударника параболическим цилиндром. Показано, что на сверхзвуковом этапе величины, характеризующие контактное взаимодействие, не зависят от параметров вязкости материала, порядка алгебраической поверхности, ограничивающей ударник, а также от типа ограничивающей поверхности при отсутствии воздействия внешней силы на ударник.

В работе Шептунова В.В., Горячевой И.Г., Ноздрина М.А. [93] была построена численно–аналитическая модель для расчёта деформационной составляющей силы трения при скольжении штампа с регулярным рельефом по вязкоупругому основанию, которое моделируется телом Кельвина со спектром времён релаксации. Разработанная модель трения применима как для дискретного, так и для полного контакта взаимодействующих

поверхностей. Регулярный рельеф штампа моделируется набором поверхностных точек. Выполнено сравнение результатов, полученных с применением разработанной модели для случая полного контакта, с аналитическим расчётом. Изучено влияние скорости скольжения и формы регулярного рельефа штампа на контактные характеристики и деформационную составляющую коэффициента трения.

В работе Миронова В.В., Михайловского Е.И. [65] на примере контактной задачи со свободной границей для системы "тяжелая цилиндрическая оболочка – надпорное кольцо жесткости" исследуется влияние учета поперечных сдвигов на напряженное состояние в оболочке. Для получения уравнений равновесия оболочки и кольца жесткости применяется разработанный одним из авторов экспресс–алгоритм учета трансверсальных деформаций в кирхгофовских вариантах теории оболочек. Контактная задача со свободной границей решается предложенным ранее методом обобщенной реакции. На численных примерах показано, что поправки, вносимые в напряженное состояние за счет учета поперечных сдвигов, на порядок выше традиционной оценки погрешности гипотез Кирхгофа.

Контактная задача для полого и сплошного круговых цилиндров с симметрично посаженным бандажом и свободными от нагрузки торцами рассматривается в работе Базаренко Н.А. [6]. Были найдены однородные решения, соответствующие нулевым напряжениям на торцах цилиндров. При удовлетворении модифицированным граничным условиям используется обобщенная ортогональность однородных решений. В итоге задача сводится к системе интегральных уравнений относительно функций, описывающих смещение внешней и внутренней поверхностей цилиндров. Эти функции ищутся в виде суммы тригонометрического ряда и степенной функции с корневой особенностью. Полученные в результате плохо обусловленные бесконечные системы алгебраических уравнений введением малых положительных параметров регуляризуются и после урезания имеют

устойчивые регуляризованные решения. Поскольку элементы матриц систем определяются плохо сходящимися числовыми рядами, разработан эффективный метод вычисления остатков упомянутых рядов. Найдены формулы для функции распределения контактного давления и интегральной характеристики. Так как первая формула содержит производную третьего порядка от функционального ряда, то при ее использовании применяется методика численного дифференцирования. Даются примеры расчета цилиндрического бандажа.

В работе Кравчука А.С. [47] рассматривается вариационный метод решения контактных задач с трением, подчиняющегося закону трения Кулона в скоростях, и строятся численные решения пространственных задач о контакте шара, цилиндра конечной длины и куба с упругим полупространством. Установлено, что максимум сил трения соответствует точке раздела областей сцепления и скольжения. С увеличением числа шагов этот максимум уменьшается, а распределение сил трения становится более гладким. Дается описание некоторых нежелательных эффектов, которые могут возникать при численной реализации метода – численных артефактов. Эти эффекты могут иметь место при численном решении задач с иным физическим содержанием, математическая структура которых сходна со структурой исследованных контактных задач, поскольку причина артефактов – наличие односторонних ограничений и зависимость области, в которой имеют место односторонние ограничения со знаком равенства, от внешних воздействий. Эта проблема решается путем надлежащего выбора нулевых приближений на шаге нагружения.

Пожарский Д.А. [72] приводит решения пространственных краевых задач теории упругости для клина, на одной грани которого приложена параллельная его ребру касательная сосредоточенная сила, другая грань свободна от напряжений либо находится в условиях жесткой или скользящей заделки. Решения получены при помощи метода интегральных преобразований и техники сведения краевой задачи теории упругости к

обобщённой по И.Н. Векуа задаче Гильберта (функциональные уравнения со сдвигом аргумента при наличии интегральных членов). На основе этих и ранее полученных решений рассматриваются квазистатические контактные задачи о движении штампа с трением под произвольным углом к ребру клина. Подобным образом пятно контакта может приближаться к кромке зуба в зубчатых передачах Новикова. Для исследования контактных задач с неизвестной областью контакта применен метод нелинейных граничных интегральных уравнений.

Неустроева Н.В. в своей работе [69] исследует вариационную задачу, описывающую контакт упругой пластины с тонкой упругой балкой. Предполагается, что область контакта заранее неизвестна и подлежит определению. Данная модель описывается задачей минимизации функционала энергии на множестве допустимых перемещений или эквивалентным ей вариационным неравенством для оператора четвертого порядка. При этом ограничение на перемещение задано на множестве, размерность которого меньше размерности области решения. Исследованы различные формулировки задачи и их эквивалентность, найдены краевые условия, выполняющиеся на множестве возможного контакта, и их точная интерпретация.

В работе Кравчука А.С., Нейтгаанмяки П. [48] рассматривается квазистатическая контактная задача для подвижного жесткого шероховатого штампа и одного линейно деформируемого тела. Для решения контактных задач с учетом трения в области контакта предлагается новый итерационный процесс и доказывается его сходимости. Развивается алгоритм решения, основанный на методе граничных элементов. Даются решения конкретных задач и проводится их анализ. Находятся оценки разности решений, обусловленные различием в условиях непроникания и различием шагов по параметру нагружения.

В работе Белова А.А., Игумнова Л.А., Литвинчук С.Ю. [7] представлены два подхода метода граничных элементов (МГЭ) к решению трехмерных динамических задач теории упругости. Описан и продемонстрирован МГЭ–подход с использованием интегрального преобразования Лапласа и метода Дурбина, который позволяет строить искомую функцию с помощью известного изображения. Применен метод Дурбина с неравномерной кусочно–квадратичной аппроксимацией изображения. Кроме того, представлен МГЭ–подход с явным учетом переменной времени. Использована гранично–элементная техника построения дискретного аналога в сочетании с методом квадратур для сверток. Предложена оригинальная схема метода квадратур для сверток. Приведены результаты МГЭ–расчетов. Демонстрирована высокая точность разработанных МГЭ–схем.

В работе Буланова Э.А. [12] решена контактная осесимметричная задача с использованием функции напряжений при вдавлении упругой сферы в абсолютно жесткое полупространство. Приведены результаты расчетов, дано сравнение с теорией Герца.

Чебаковым М.И. [90] рассматривается пространственная контактная задача теории упругости о действии штампа в форме эллиптического параболоида на поверхность основания, состоящего из двух склеенных слоев различной толщины и с различными упругими постоянными, жестко закрепленного по противоположной грани. Штамп находится под действием нормальной силы, прижимающей его к поверхности слоя, и тангенциальной силы, действующей на него в перпендикулярном направлении, между штампом и слоем имеют место силы кулоновского трения. Предполагается, что силы трения параллельны направлению действия тангенциальной силы. Получено интегральное уравнение, для решения которого использован метод нелинейных граничных уравнений. Исследовано влияние упругих констант и толщины слоя на величину контактных напряжений, на зависимость

вертикального перемещения штампа от вдавливающей силы, на величину и форму области.

Петровым В.А. [71] была усовершенствована методика расчета сейсмической реакции подземного трубопровода с учетом его контактного взаимодействия с окружающим однородным грунтовым массивом. Предложены новые подходы к моделированию системы сооружение – основание, которые включают использование специальных элементов вязкого демпфирования, учитывающих локальное рассеяние энергии при динамическом контактном взаимодействии, а также учет упругопластических свойств грунтового массива при распространении сейсмической волны. Выполнен анализ влияния конструктивной и физической нелинейностей на кинематические характеристики и напряженное состояние подземного трубопровода при сейсмическом воздействии. Развитие методики позволило в значительной степени приблизить динамические свойства модели системы трубопровод – основание к свойствам реального сооружения. Предложенная методика может применяться для решения реальных динамических контактных задач, в частности, для анализа сейсмической реакции подземных и наземных сооружений, работающих совместно с грунтовыми основаниями.

Зеленцовым В.Б. [41] рассматриваются две нестационарные динамические контактные задачи о внедрении жесткого штампа в упругую полуплоскость. В первой задаче штамп клиновидной формы, во второй – параболической. Для решения задач применяется метод, разработанный ранее. Требования, накладываемые на гладкость решения рассматриваемых задач, приводят к дополнительным условиям, благодаря которым определяется изменяющаяся во времени ширина зоны контакта между штампом и упругой полуплоскостью как функция времени и закона внедрения штампа в упругую полуплоскость, определяемого из дифференциального уравнения движения массивного штампа на упругой полуплоскости.

Куликов Г.М., Плотникова С.В. [54] разработали алгоритм численного решения контактной задачи для упругой оболочки типа Тимошенко, подверженной произвольно большим перемещениям и поворотам, с использованием смешанных конечно–элементных аппроксимаций. Существенно, что в качестве искомых функций выбираются 6 перемещений лицевых поверхностей оболочки. Это позволяет, во–первых, упростить формулировку контактных задач механики тонкостенных конструкций, поскольку в качестве искомых функций выбираются функции, с помощью которых формулируются условия непроникания контактирующих тел, и во–вторых, получить соотношения для компонент тензора деформаций Грина–Лагранжа в криволинейных ортогональных координатах, точно представляющие произвольно большие перемещения оболочки как жесткого тела.

Горшков А.Г. в своей работе [35] рассматривал нестационарные контактные задачи для деформируемого ударника и полупространства. Ударник ограничен гладкой выпуклой поверхностью и рассматривается как абсолютно твёрдое тело (с упругим или акустическим заполнителем либо без него) или как упругая тонкая оболочка. Полупространство заполнено упругой (термоупругой) анизотропной или акустической средой (может быть абсолютно недеформируемым). Исследуются условия контакта свободного проскальзывания и жесткого сцепления, односторонний и дозвуковой контакт, а также влияние учета деформации граничных поверхностей. В основу исследований нестационарных контактных задач с подвижными границами положено построение и использование поверхностных функций влияния для упругого анизотропного (или изотропного) полупространства или упругих шара и цилиндра. Эти функции являются ядрами разрешающих интегральных соотношений. Последние позволили на начальном этапе контакта впервые провести аналитические исследования контактных напряжений и получить явные формулы для результирующих контактных сил и моментов. На произвольном интервале взаимодействия указанные

интегральные соотношения рассматриваются как интегральные уравнения относительно контактных напряжений. Причем их размерность меньше, чем у исходной задачи. Разработанный численно–аналитический метод решения функциональных уравнений, включающих интегральные уравнения, основан на специальных квадратурных формулах, учитывающих сингулярность ядер. Численные расчеты выполнены, в основном, для начальных этапов взаимодействия тел и оболочек цилиндрической (сферической) формы с упругим полупространством. На основании метода интегральных преобразований Лапласа – Фурье: исследовано поведение упругой и анизотропной полуплоскости под действием подвижной нормальной нагрузки при различных законах изменения границ носителя, и построена функция влияния для термоупругого полупространства с учетом связности модели среды.

Садовский В.М., Блинов А.Н., Богульский И.О., Бычек О.В. в своей работе [78] при помощи формулировки граничных условий контактного взаимодействия деформируемых тел с учетом трения Кулона в виде квазивариационного неравенства разработали оригинальные алгоритмы численного решения динамических контактных задач, обладающие вычислительной устойчивостью и гарантирующие выполнение геометрических ограничений в заранее неизвестной зоне контакта, условия неотрицательности нормального давления и противоположную направленность векторов касательной скорости и касательного напряжения при проскальзывании. Проведено тестирование алгоритмов в задаче об отражении упругопластического слоя от жесткой плоскости. Предложен алгоритм расщепления по пространственным переменным для численного решения динамических задач сопряжения упругих тел, обладающий повышенной точностью при расчете разрывных решений.

Достаточно много исследований связаны с нестационарными задачами об ударе деформируемых тонких оболочек по деформируемому полупространству.

Одной из простейших моделей учета деформируемости ударника является абсолютно жесткая оболочка, заполненная упругой средой. Она позволяет использовать многие результаты, полученные для абсолютно жестких тел. В работах А. Г. Горшкова и Д. В. Тарлаковского [28], Д. В. Тарлаковского [83, 95] рассмотрены осесимметричная и плоская задачи о вертикальном ударе абсолютно жестких сферы и кругового цилиндра с упругим наполнителем по упругому полупространству. Найдено выражение для реакции наполнителя на поступательное движение ударника.

Следующим этапом усложнения контактной задачи является модель ударника в виде тонкой оболочки. В работах А. Г. Горшкова и Д. В. Тарлаковского [29, 32], Д. В. Тарлаковского [85] рассмотрена плоская задача об ударе по упругой полуплоскости тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки. Для последней использованы уравнения типа С. П. Тимошенко. С помощью функций влияния для полупространства и оболочки из условий контакта построено интегральное уравнение относительно контактного давления. Указан алгоритм его численного решения.

Эта же задача рассмотрена Д. В. Тарлаковским и Г. В. Федотенковым [86], А. Г. Горшковым, Д. В. Тарлаковским и Г. В. Федотенковым [33]. В первой из этих работ исследован начальный этап взаимодействия с использованием интегральной связи контактного давления и вертикального перемещения, полученного в монографии А. Г. Горшкова и Д. В. Тарлаковского [30], а во второй с использованием указанного выше интегрального уравнения дано решение для произвольных моментов взаимодействия. Также основные аспекты этой проблемы можно найти в работах А. Г. Горшкова, Д. В. Тарлаковского и Г. В. Федотенкова [34], А. В. Вестяка, Д. В. Тарлаковского и Г. В. Федотенкова [14, 15], А. Г. Горшкова, А. Л. Медведского, Д. В. Тарлаковского и Г. В. Федотенкова [27], Д. В. Тарлаковского и Г. В. Федотенкова [87, 88], Г. В. Федотенкова [89].

Эта же задача рассмотрена С. Н. Поповым и В. Р. Богдановым [74],

В. Д. Кубенко и В. Р. Богдановым [50]. Однако в этих работах предлагаемая методика позволяет рассчитать контактное давление только в лобовой точке. Аналогичная осесимметричная задача для ударника в виде сферической оболочки решена В. Р. Богдановым и С. Н. Поповым [9]. В работах Д. В. Тарлаковского [83, 84, 85] дополнительно рассмотрено влияние акустического заполнителя в круговой цилиндрической оболочке.

Задачам о погружении оболочек вращения в жидкость посвящено значительное количество публикаций. Однако, эти проблемы в настоящее время исследованы не достаточно. В последнее время прогресс в этой области связан с применением численных методов для решения конкретных задач.

Методика численного исследования процесса вертикального входа тонкостенных упругих сферических и конических оболочек, связанных с жестким телом в полупространство, занятое идеальной сжимаемой жидкостью разработана А. Г. Горшковым и Н. И. Дробышевским [25] (см. также книгу А. Г. Горшкова и Д. В. Тарлаковского [31]). Для описания поведения жидкости используются переменные Лагранжа, которые позволяют непосредственно в процессе решения определять перемещения свободной поверхности жидкости и точно поставить граничное условие на смоченной поверхности оболочки.

Решение задачи гидроупругого взаимодействия проводится конечно-разностным методом. Расчетная область жидкости покрывается сеткой, ячейки которой представляют собой четырехугольные лагранжевы элементы, движущиеся вместе с жидкостью. На основании данного подхода изучены характеристики реакции при внедрении в сжимаемую жидкость сферических, конических, а также цилиндрических (наклонный вход) оболочек (А. Г. Горшков и Н. И. Дробышевский [24, 25]).

Применение метода конечных элементов для решения задач удара и проникания деформируемых (жестких) тел в жидкость дано в монографии Н. Ф. Ершова и Г. Г. Шахверди [39]. В рамках данного подхода Г. Г. Шахверди

[92] решена задача удара о свободную поверхность жидкости упругих и упругопластических сферических оболочек. Эти вопросы рассматривались также Г. Г. Шахверди [91], Е. А. Максимовой, В. И. Петуховой и Г. Г. Шахверди [57].

При скоростях удара порядка сотен метров в секунду процесс взаимодействия тонкостенных конструкций с жидкостью сопровождается возникновением волн сильного разрыва и зон кавитации в жидкости, появлением и развитием упругопластических деформаций в материале конструкции, существенным формоизменением контактных и свободных поверхностей. Исследованию указанных нелинейных эффектов посвящены работы А. В. Кочеткова и С. В. Крылова [45], В. Г. Баженова, А. В. Кочеткова, С. В. Крылова и А. Г. Угодчикова [5], В. Г. Баженова, А. В. Кочеткова и С. В. Крылова [3, 4], в которых развита численная методика решения осесимметричных задач удара деформируемых тел о поверхность сжимаемой жидкости. В качестве примера рассмотрены задачи о внедрении жестких тел и сферических оболочек с присоединенными массами в идеальную сжимаемую среду.

Предлагаемая методика основана на синтезе двух явных схем: сквозного счета С. К. Годунова на подвижной сетке для жидкости и типа «крест» для интегрирования нелинейных уравнений движения тонких оболочек. Анализ кавитационных явлений при проникании в рамках простейшей модели показал, что они носят локальный характер по времени и пространству и приводят к заметному увеличению прогибов лишь для очень тонких оболочек.

Ранний этап процесса проникания тонких упругих сферических оболочек в сжимаемую жидкость исследован также в работах В. В. Гавриленко [18, 19], В. Д. Кубенко [49], В. Д. Кубенко и В. В. Гавриленко [51], В. В. Гавриленко, В. Н. Гавриленко и В. Д. Кубенко [20], А. Я. Сагомояна [76, 77]. При небольших скоростях погружения ($V'_0 \leq c_0$)

деформируемых тел (оболочек) в жидкость через ее свободную поверхность влияние сжимаемости жидкости сказывается только в самый начальный момент времени (пока волна сжатия не вышла за пределы тела). Для тел вращения, которые не имеют плоских границ, этот период очень мал. В этом случае движение жидкости будет описываться уравнением Лапласа $\Delta\Phi = 0$, и для гидродинамических нагрузок, действующих на тело (оболочку), можно получить аналитические выражения. Подставляя их в уравнения движения оболочек и интегрируя последние каким-либо методом, определяют характеристики реакции. Полученные таким образом результаты в случае погружения в жидкость сферических и цилиндрических оболочек достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными и численными решениями для сжимаемой жидкости (А. Г. Горшков и Н. И. Дробышевский [25], Э. И. Григолюк и А. Г. Горшков и Д. В. Тарлаковский [30, 31], В. Г. Баженов, А. В. Кочетков и С. В. Крылов [5], А. И. Лобода [55]).

Теоретические результаты для несжимаемой жидкости в большинстве получены с использованием теории погружения Г. Вагнера, в основу которой положены следующие допущения: относительное движение жидкости при очень быстром погружении тела совпадает с ее движением при обтекании непрерывно расширяющегося плоского диска (пластины); скорость расширения диска (пластины) равна скорости увеличения смоченной поверхности тела; скорость обтекания равна скорости погружения. Эти гипотезы, справедливые для тел тупой формы, позволяют определить как силу удара, так и распределение давления по смоченной поверхности тела. Теория Г. Вагнера позволяет учитывать эффект встречного движения вытесняемой погружающимся телом жидкости, которое увеличивает смоченную поверхность и изменяет скорость изменения поверхности удара.

В случае быстрого вертикального погружения упругих цилиндрических, конических и сферических оболочек в жидкость,

гидродинамические нагрузки достигают своего максимального значения при небольших глубинах погружения. Поэтому можно, воспользоваться теми же вагнеровскими соображениями, что и для жестких тел (Э. И. Григолюк и А. Г. Горшков и Д.В. Тарлаковский [30]). При таком подходе после определения гидродинамического давления $p = p_1 + p_2$ (p_1 соответствует давлению на жесткой оболочке, а p_2 учитывает давление, обусловленное деформацией оболочки) используется комбинированный метод. Он основан на преобразовании с помощью процедуры Бубнова или метода прямых систем уравнений в частных производных, описывающих поведение оболочек, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и последующем их решении методом Рунге–Кутты (или каким–либо другим численным методом).

На основании данного подхода решен большой класс задач о вертикальном входе в жидкость оболочек: двухслойных сферических и конических (Г. Н. Вакалов и А. Г. Горшков [13]), двухслойных цилиндрических (А. Г. Горшков и В. Г. Богомолов [23]), ортотропных и слоистых цилиндрических (Ю. В. Кочеулов и А. И. Шуршалов [46], М. И. Мартиросов и А. И. Шуршалов [61], А. И. Шуршалов [95]), трехслойных сферических (М. И. Мартиросов и А. И. Шуршалов [61], Ю.В. Кочеулов и А. И. Шуршалов [46]).

Описанный выше прием определения гидродинамических нагрузок используется и в случае несимметричного входа упругих цилиндрических оболочек в несжимаемую жидкость (В. Г. Богомолов [10, 11]). В первой из этих работ в случае плоской задачи давление представляется в виде суперпозиций давлений от вертикального проникания и горизонтального движения меняющейся во времени погруженной части. Во второй же образующая оболочки составляет малый угол со свободной поверхностью, и смоченная поверхность аппроксимируется частью эллипса, полуоси

которого есть функции времени, а ширина смоченной поверхности зависит от продольной координаты.

В работах А. Г. Горшкова и М. И. Мартиросова [26], М. И. Мартиросова [58–60], М. И. Мартиросова и А.И. Шуршалова [61–63] проведен численный анализ динамического поведения упругих сферических оболочек, связанных с твердым телом, при несимметричном входе в полупространство, занятое идеальной несжимаемой жидкостью. Гидродинамические нагрузки, действующие на оболочку со стороны жидкости, определяются как суперпозиция нагрузок от вертикального проникания оболочки и горизонтального движения изменяющейся во времени ее погруженной части. Для исследования напряженно–деформированного состояния тонкой упругой оболочки используется один из вариантов геометрически нелинейных уравнений движения, учитывающих инерцию вращения и деформацию поперечного сдвига. К ним добавляются уравнения движения всей конструкции как твердого тела. Задача решается методом конечных разностей с применением явной схемы типа «крест». Анализируется влияние на динамическое поведение конструкции начальной скорости и угла входа, начальной угловой скорости вращения, сжимаемости жидкости, подъема ее свободной поверхности (эффект Г. Вагнера), толщины оболочки, массы твердого тела и ряда других факторов. Исследуется также влияние гидроупругого взаимодействия между оболочкой и жидкостью на динамику входа. Показано, что при углах тангажа $\vartheta \geq 60^\circ$ задачу о наклонном входе конструкции в жидкость можно заменить задачей о вертикальном входе с начальной скоростью, равной вертикальной составляющей при несимметричном погружении. Кроме того, установлено, что до скоростей $V_0 \leq 100$ м/с сжимаемость жидкости (воды) практически не влияет на напряженно–деформированное состояние сферической оболочки.

Таким образом, рассматриваемая в работе нестационарная контактная задача для абсолютно твердых ударников и тонкой упругой цилиндрической оболочки Тимошенко исследована недостаточно, и ее решение является актуальным вопросом.

§ 1.2 Уравнения движения оболочки и ударника

Для тонкой линейно–упругой изотропной цилиндрической оболочки используется ортогональная криволинейная система координат, связанная с линиями главных кривизн. При этом координатная поверхность Π совпадает со срединной поверхностью оболочки и определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi: x = R \cos \alpha, \quad y = R \sin \alpha, \quad z = z; \\ \xi_1 = \alpha, \quad \xi_2 = z, \quad (\alpha, z) \in D_{\alpha z} \subset (-\pi, \pi] \times (-\infty, \infty), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где R – радиус оболочки, ξ_1, ξ_2 – главные ортогональные криволинейные координаты, связанные с линиями главных кривизн срединной поверхности оболочки. Угловая координата α совпадает с соответствующим углом цилиндрической системы координат (рис. 1.2.1). Оболочка предполагается неограниченной по длине.

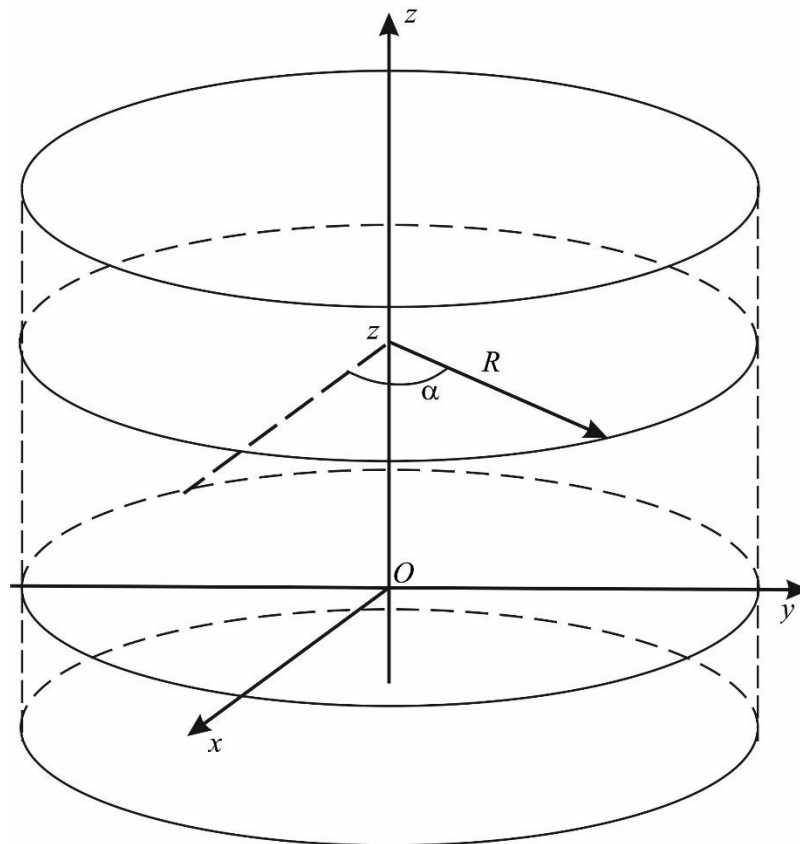


Рис. 1.2.1. Система координат, связанная с оболочкой

Для описания движения оболочки используются уравнения движения модели С.П. Тимошенко [36]:

$$\begin{aligned}
 \rho h \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_{z\alpha}}{\partial z} + \frac{Q_\alpha}{R} + q_\alpha, \\
 \rho h \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\alpha z}}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + q_z, \\
 \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -\frac{T_{\alpha\alpha}}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} + p, \\
 \rho I \frac{\partial^2 \chi_\alpha}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_{\alpha z}}{\partial z} - Q_\alpha, \\
 \rho I \frac{\partial^2 \chi_z}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\alpha z}}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_{zz}}{\partial z} - Q_z.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь ρ – плотность материала оболочки, I – погонный момент инерции поперечного сечения, h – толщина оболочки, u_α , u_z – тангенциальные перемещения в направлении координатных линий α и z соответственно, w – нормальное перемещение, χ_α , χ_z – углы поворота нормального к срединной поверхности до деформации волокна за счет сдвиговых деформаций; q_α , q_z , p – тангенциальные и нормальная составляющие вектора давления; $T_{\alpha\alpha}$, $T_{z\alpha}$, $T_{\alpha z}$, T_{zz} – компоненты тензора тангенциальных усилий; $M_{\alpha\alpha}$, M_{zz} , $M_{\alpha z}$ – компоненты тензора моментов; Q_α , Q_z – перерезывающие усилия, t – время.

Физические соотношения имеют вид [36]:

$$T_{\alpha\alpha} = \tilde{T}_{\alpha\alpha} - \frac{M_{\alpha\alpha}}{R}, T_{\alpha z} = \tilde{T}_{\alpha z} - \frac{M_{\alpha z}}{R}, T_{z\alpha} = \tilde{T}_{z\alpha}, T_{zz} = \tilde{T}_{zz},$$

$$\tilde{T}_{\alpha\alpha} = h[(\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\alpha\alpha} + \lambda\varepsilon_{zz}], \tilde{T}_{\alpha z} = 2\mu h\varepsilon_{\alpha z},$$

$$\tilde{T}_{zz} = h[(\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} + \lambda\varepsilon_{\alpha\alpha}], \quad (1.3)$$

$$M_{\alpha\alpha} = I[(\lambda + 2\mu)\chi_{\alpha\alpha} + \lambda\chi_{zz}], M_{\alpha z} = 2\mu I\chi_{\alpha z},$$

$$M_{zz} = I[(\lambda + 2\mu)\chi_{zz} + \lambda\chi_{\alpha\alpha}], Q_{\alpha} = \mu h k^2 \theta_{\alpha}, Q_z = \mu h k^2 \theta_z,$$

где λ, μ – упругие параметры Ламе материала оболочки; $\varepsilon_{\alpha\alpha}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\alpha z}$ – компоненты тензора деформаций; $\chi_{\alpha\alpha}, \chi_{zz}, \chi_{\alpha z}$ – компоненты тензора изменения кривизны срединной поверхности оболочки; $\theta_{\alpha}, \theta_z$ – углы отклонения материального волокна, нормального к срединной поверхности, от вектора нормали за счёт сдвиговых деформаций, $k^2 = \frac{5}{6}$ – коэффициент сдвига.

Кинематические соотношения запишутся следующим образом [36]:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \alpha} + w \right), \varepsilon_{\alpha z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial z} \right), \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\chi_{\alpha\alpha} = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\chi_{\alpha} - \frac{u_{\alpha}}{R} \right) - \frac{w}{R} \right],$$

$$\chi_{\alpha z} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\chi_z - \frac{u_z}{R} \right) - \frac{w}{R} \right], \chi_{zz} = \frac{\partial \chi_z}{\partial z}, \quad (1.4)$$

$$\theta_{\alpha} = \chi_{\alpha} - \nu_{\alpha}, \theta_z = \chi_z - \nu_z, -\nu_{\alpha} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} - u_{\alpha} \right), -\nu_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

где ν_{α}, ν_z – углы отклонения вектора единичной нормали к срединной поверхности оболочки.

Из (1.2) – (1.4) вытекают уравнения движения круговой цилиндрической оболочки в перемещениях:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2} = \mathbf{L} \mathbf{W} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{L} = (L_{ij})_{5 \times 5}, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{W} = (u_\alpha, u_z, w, \chi_\alpha, \chi_z)^\top, \quad \mathbf{P} = \frac{1}{\rho h} (0, 0, p, 0, 0)^\top.$$

Здесь L_{ij} – дифференциальные операторы следующего вида:

$$\begin{aligned} L_{11}(u_\alpha) &= \frac{c_1^2}{R^2} \left(1 + \frac{I}{hR^2} \right) \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha^2} + c_2^2 \left(\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial z^2} - \frac{k^2}{R^2} u_\alpha \right), \\ L_{12}(u_z) &= \frac{\lambda + \mu}{\rho R} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha \partial z}, \quad L_{13}(w) = \frac{1}{R^2} \left[c_1^2 \left(1 + \frac{I}{hR^2} \right) + c_2^2 k^2 \right] \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \\ L_{14}(\chi_\alpha) &= \frac{1}{R} \left(-\frac{Ic_1^2}{hR^2} \frac{\partial^2 \chi_\alpha}{\partial \alpha^2} + c_2^2 k^2 \chi_\alpha \right), \quad L_{15}(\chi_z) = -\frac{\lambda I}{\rho h R^2} \frac{\partial^2 \chi_z}{\partial \alpha \partial z}, \\ L_{21}(u_\alpha) &= L_{12}(u_\alpha), \quad L_{22}(u_z) = \frac{c_2^2}{R^2} \left(1 + \frac{I}{hR^2} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha^2} + c_1^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}, \\ L_{23}(w) &= \frac{\lambda}{\rho R^2} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad L_{24}(\chi_\alpha) = -\frac{Ic_2^2}{hR^2} \frac{\partial^2 \chi_\alpha}{\partial \alpha \partial z}, \quad L_{25}(\chi_z) = -\frac{Ic_2^2}{hR^3} \frac{\partial^2 \chi_z}{\partial \alpha^2}, \\ L_{31}(u_\alpha) &= -L_{13}(u_\alpha), \quad L_{32}(u_z) = -L_{23}(u_z), \\ L_{33}(w) &= c_2^2 k^2 \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - c_1^2 \left(1 + \frac{I}{hR^2} \right) w, \\ L_{34}(\chi_\alpha) &= \frac{1}{R} \left(\frac{Ic_1^2}{hR^2} + c_2^2 k^2 \right) \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial \alpha}, \quad L_{35}(\chi_z) = \left(\frac{I\lambda}{\rho h R^2} + c_2^2 k^2 \right) \frac{\partial \chi_z}{\partial z}, \\ L_{41}(u_\alpha) &= \frac{1}{R} \left(-\frac{c_1^2}{R^2} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{c_2^2 k^2 h}{I} u_\alpha \right), \quad L_{42}(u_z) = -\frac{c_2^2}{R^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha \partial z}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

Полагаем, что в начальный момент времени $t=0$ с покоящейся оболочкой входит в контакт абсолютно жесткий ударник, ограниченный гладкой выпуклой поверхностью. Полагаем, что вектор начальной скорости ударника V_0 коллинеарен оси Ox (рис. 1.2.1) и направлен к центральной оси оболочки. Таким образом, рассматривается случай бокового удара, при этом уравнение движения ударника как абсолютно твёрдого тела имеет следующий вид:

$$m_u \ddot{u}_c(t) = R(t) = \iint_{D(t)} p(\xi, \zeta, t) d\xi d\zeta, \quad (\xi, \zeta) \in D(t) \quad (1.7)$$

$$u_c(0) = 0, \quad \dot{u}_c(0) = V_0,$$

где R – результирующая контактного давления p , $u_c(t)$ – перемещение центра масс ударника по оси Ox , $D(t)$ – область контакта, граница которой зависит от времени. Здесь и далее точка над функцией означает её производную по времени.

Область контакта $D(t)$ зависит от времени. Методика определения положения её границ в линейной постановке задачи описана в следующем параграфе.

Первоначально оболочка находится в недеформированном состоянии, что соответствует нулевым начальным условиям:

$$\mathbf{W}|_{t=0} = \dot{\mathbf{W}}|_{t=0} = \mathbf{0}. \quad (1.8)$$

§ 1.3 Условия контакта

В нестационарных контактных задачах для получения замкнутой математической постановки необходимо привлекать условия контакта деформируемых тел. Кроме того, в задачах с подвижными границами области взаимодействия нужны дополнительные соотношения для определения положения границ контактной области в каждый момент времени.

В общем случае положим, что контакт происходит между двумя телами, занимающими геометрические области G_1 (оболочка) и G_2 (ударник), ограниченные поверхностями Π_{10} и Π_{20} , соответствующими недеформированному состоянию тел в начальный момент времени $t = 0$. Рассмотрим задачу о контактном взаимодействии, в которой в начальный момент времени тела находятся в недеформированном состоянии. Поверхности Π_{10} и Π_{20} в этот момент соприкасаются в некоторой точке O . Проведём через точку O плоскость Π , являющуюся касательной к поверхностям Π_{10} , Π_{20} .

Поверхности Π_1 и Π_2 , ограничивающие тела G_1 и G_2 в момент времени $t > 0$, в инерциальной системе координат задаются уравнениями [30]:

$$\Pi_k : y = f_k(y, z, t), \quad (y, z) \in \Omega_k, \quad k = 1, 2; \quad (1.9)$$

где Ω_k – проекция Π_k на плоскость Oyz . Тогда область контакта Π_* определяется следующими условиями:

$$\begin{aligned} \Pi_* : \Delta(y, z, t) = f_1(y, z, t) - f_2(y, z, t) = 0, \\ \sigma_n^{(k)}(y, z, t) < 0, \quad (y, z) \in \Omega_k; \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь Δ – зазор между поверхностями Π_1 и Π_2 , $\sigma_n^{(k)}$ – проекция вектора напряжений на нормаль к поверхности контакта Π_* .

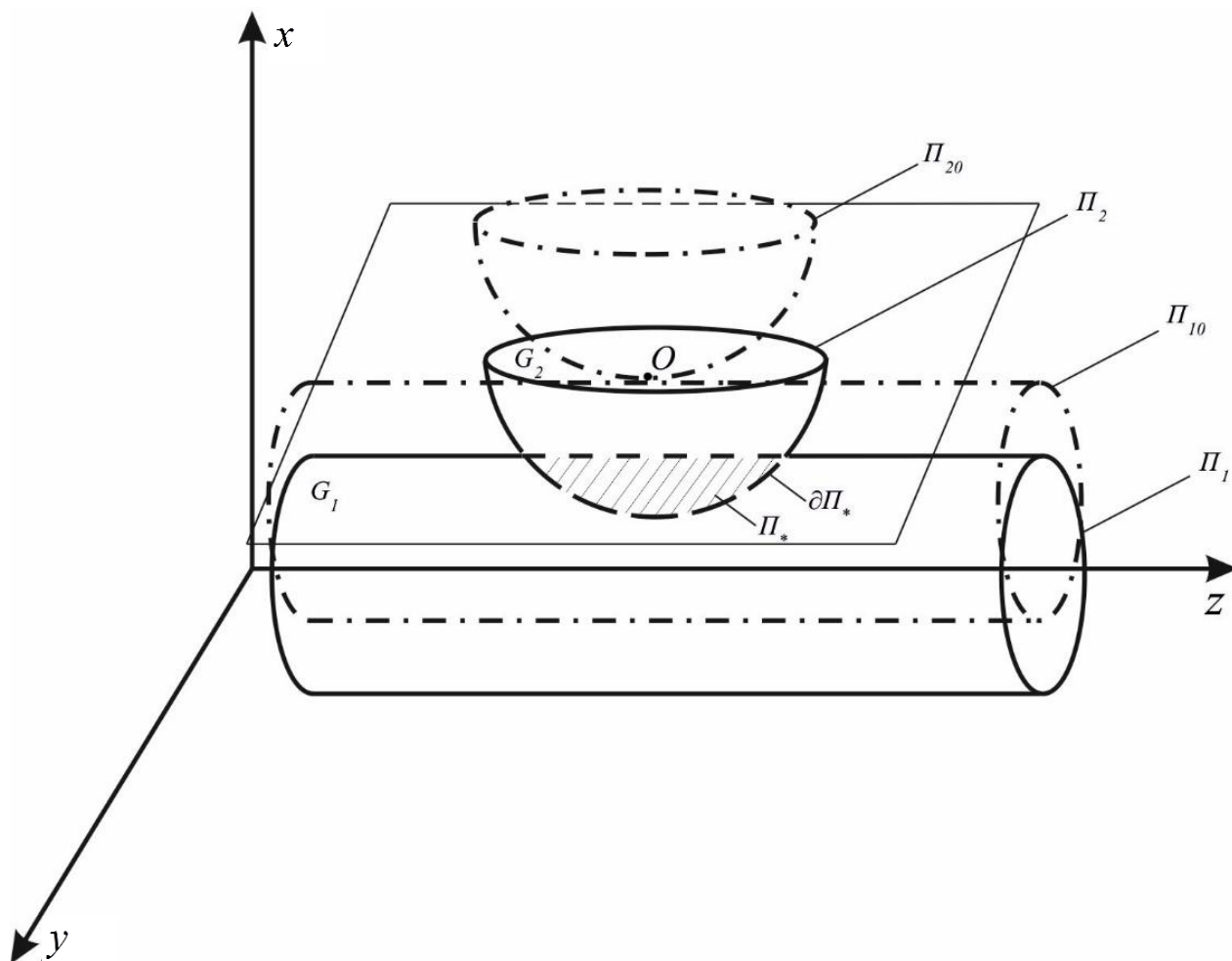


Рис. 1.3.1.

Из (1.10) следуют уравнения, неявно определяющие границу области контакта $\partial\Pi_*$:

$$\partial\Pi_* : \Delta(y, z, t) = 0, \quad \sigma_n^{(k)}(y, z, t) = 0. \quad (1.11)$$

Однако для внутренних точек Π_* требуется дополнительная проверка неравенства $\sigma_n^{(k)}(y, z, t) < 0$.

В случае когда контакт происходит в условиях свободного проскальзывания (трение отсутствует), область контакта Π_* можно представить в следующем виде:

$$\Pi_* = \Pi_\sigma \quad (1.12)$$

где Π_σ соответствует области проскальзывания. На поверхности Π_σ должны выполняться условия непроникания тел по нормали к поверхности контакта, непрерывность нормальных напряжений:

$$\begin{aligned} u_n^{(1)}|_{\Pi_\sigma} &= u_n^{(2)}|_{\Pi_\sigma}, \quad \sigma_n^{(1)}|_{\Pi_\sigma} = \sigma_n^{(2)}|_{\Pi_\sigma}, \\ \sigma_\tau^{(1)}|_{\Pi_\sigma} &= \sigma_\tau^{(2)}|_{\Pi_\sigma} = 0, \quad \sigma_n^{(k)}|_{\Pi_\sigma} = 0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$e_v = \frac{v_\Pi}{|v_\Pi|}, \quad v_\Pi = v_\Pi^{(1)} - v_\Pi^{(2)}, \quad v_\Pi^{(k)} = \dot{w}_\Pi^{(k)}|_{\Pi_\sigma}$$

где $u_n^{(k)}|_{\Pi_\sigma}$ – перемещения k -го тела по нормали к поверхности Π_σ , $\sigma_\tau^{(k)}$ – касательная составляющая вектора напряжений k -го тела на поверхности Π_σ , v_Π – относительная скорость смещения контактирующих поверхностей, точка обозначает дифференцирование по времени.

Граничные условия (1.13) совместно с геометрическими условиями (1.10) определяют начально–краевую задачу для обоих тел. Так как ударник является абсолютно твердым телом, то для их замыкания необходимо иметь

выражения для результирующих контактной силы $R^{(k)}$ и момента $M_0^{(k)}$ относительно точки O .

$$R^{(k)} = \iint_{\Pi_*} \sigma_\tau^{(k)} dS, \quad M_0^{(k)} = \iint_{\Pi_*} [u_n^{(k)}, \sigma_\tau^{(k)}] dS \quad (1.14)$$

Приведенные условия контакта носят существенно нелинейный характер по следующим причинам: во все соотношения входит неизвестная деформированная поверхность Π_* , в формулах (1.10) и (1.13) присутствуют неравенства для искомых напряжений, выражение для касательной составляющей напряжений в (1.13) нелинейное. Контактная задача в такой постановке может быть решена только с помощью численных методов или с использованием вариационных подходов. Для построения аналитических решений необходима линеаризация условий контакта. Она проводится по следующему принципу: снесение граничных условий на недеформированные граничные поверхности и линеаризация соотношения (1.13), при этом выражения для результирующих контактных усилий (1.14) могут носить нелинейный характер.

В качестве поверхности, на которой ставятся граничные условия в линейных задачах, выбираем поверхность Π_{kT} , являющуюся границей k -того тела, перемещающегося под действием внешних и контактных сил. Основным вопросом при снесении граничных условий (1.13) на недеформированную поверхность Π_{kT} является приближенное определение фиктивной смоченной поверхности $\Pi_{k*} \approx \Pi_*$, $\Pi_{k*} \subset \Pi_{kT}$. В случае малых перемещений $u_{\Pi}^{(k)}$ в нулевом приближении границу $\partial\Pi_{k*}$ области Π_{k*} можно определить как линию пересечения поверхностей Π_{kT} :

$$\partial\Pi_{T*} = \partial\Pi_{k*} = \Pi_{1T} \cap \Pi_{2T} \quad (1.15)$$

Реализация геометрического соотношения, как и учет неравенства для нормальных напряжений, в рамках линейной постановки задачи, возможна с использованием последовательных приближений.

В нулевом приближении область контакта приближенно заменяется плоской областью Ω_T , которая может быть многосвязной. Ее границы с учетом деформируемости граничных поверхностей взаимодействующих тел могут быть вычислены с помощью метода последовательных приближений. Полагая, что $\Omega_T = \Omega_\sigma$ на которой реализуется условия проскальзывания, получим следующие условия контакта:

$$\begin{aligned} u_n^{(1)} \Big|_{\Omega_\sigma} &= u_n^{(2)} \Big|_{\Omega_\sigma}, \quad \sigma_n^{(1)} \Big|_{\Omega_\sigma} = \sigma_n^{(2)} \Big|_{\Omega_\sigma}, \\ \sigma_\tau^{(1)} \Big|_{\Omega_\sigma} &= \sigma_\tau^{(2)} \Big|_{\Omega_\sigma} = 0, \quad \sigma_n^{(k)} \Big|_{\Omega_\sigma} < 0; \end{aligned} \tag{1.16}$$

При этом условие (1.16) связанное с неравенством, проверяется после получения решения.

§ 1.4 Разрешающая система функциональных уравнений

Основой для построения разрешающей системы уравнений являются интегральные представления перемещений и дополнительные соотношения, определяющие параметры движения ударника и области контакта. Для построения систем разрешающих уравнений нестационарных контактных задач ключевую роль играют функции влияния для деформируемых тел. В настоящей работе для этих целей будет использована пространственная нестационарная функция влияния для тонкой упругой цилиндрической круговой оболочки Тимошенко.

Далее всем переменным, и параметрам придадим безразмерную форму. Соответствующая система безразмерных величин имеет вид (штрихом обозначены размерные величины)

$$u = \frac{u_\alpha}{R}, v = \frac{u_z}{R}, w = \frac{w'}{R}, u_c = \frac{u'_c}{R}, z = \frac{z'}{R}, \tau = \frac{c_1 t}{R}, \eta^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2}, \quad (1.17)$$

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \gamma^2 = \frac{h^2}{12R^2}, p = \frac{p'R}{h(\lambda + 2\mu)}.$$

где τ – безразмерное время, c_1, c_2 – скорости волн растяжения–сжатия и сдвига в материале оболочки.

С использованием принципа суперпозиции и функции влияния интегральное уравнение пространственной контактной задачи для цилиндрической оболочки и абсолютно твёрдого ударника запишется в следующем виде [100-102]:

$$w(\alpha, z, \tau) = \int_0^\tau dt \iint_{\Omega(t)} G_w(\alpha - \xi, z - \zeta, \tau - t) p(\xi, \zeta, t) d\xi d\zeta, \quad (1.18)$$

где $G_w(\alpha, z, \tau)$ –пространственная нестационарная функция влияния для оболочки, $p(\xi, \zeta, t)$ – контактное давление.

Для получения замкнутой системы разрешающих уравнений к (1.18) следует добавить уравнение движения ударника как абсолютно твёрдого тела (1.7) и кинематическое соотношение для определения положения границ области контакта. В нулевом приближении это соотношение определим из условия пересечения недеформированной поверхности оболочки с поверхностью ударника [29].

Положим, что в начальный момент времени $\tau = 0$ уравнение поверхности ударника задано явно в системе координат $Oxuz$:

$$\Pi_{20} : x = f(y, z), \quad (1.19)$$

а вектор начальной скорости V_0 коллинеарен Ox и направлен к центральной оси оболочки. Тогда положение поверхности Π_2 в любой момент времени $\tau > 0$ в цилиндрической системе координат $Ora\alpha z$ будет задаваться неявным уравнением

$$\Pi_2 : r \cos \alpha = f(r \sin \alpha, z) - u_c(\tau) \quad (1.20)$$

Из условия пересечения этой поверхности с недеформированной поверхностью оболочки Π_{10} и вытекает искомое соотношение, неявно определяющее положение границу области контакта в нулевом приближении

$$f(\sin \alpha, z) - u_c(\tau) = \cos \alpha. \quad (1.21)$$

Соотношения (1.7), (1.18) и (1.21) составляют замкнутую систему разрешающих уравнений пространственной нестационарной контактной задачи для абсолютно твёрдого ударника и круговой цилиндрической оболочки Тимошенко.

Глава 2. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ ВЛИЯНИЯ ДЛЯ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ТИМОШЕНКО

§ 2.1 Постановка задачи

Как следует из предыдущего параграфа, для решения контактной задачи нам необходимо построить нестационарную пространственную функцию влияния для тонкой упругой цилиндрической круговой оболочки Тимошенко. Фактически она представляет собой нормальные перемещения как решение задачи о воздействии на оболочку внешнего нестационарного давления, сосредоточенного по пространственным координатам и по времени.

Дабы не умалять общности, рассмотрим задачу о движении бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко под влиянием нестационарного внешнего давления $P(\alpha, z, \tau)$, распределённого по произвольной области D , принадлежащей боковой поверхности оболочки (рисунок 2.1). $P(\alpha, z, \tau) = p(\alpha, z, \tau)H(\tau)\theta(D)$, где $H(\tau)$ – функция Хевисайда, а $\theta(D)$ – характеристическая функция множества D :

$$\theta(D) = \begin{cases} 1, M \in D; \\ 0, M \notin D, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $M(\alpha, z)$ – точка боковой поверхности оболочки.

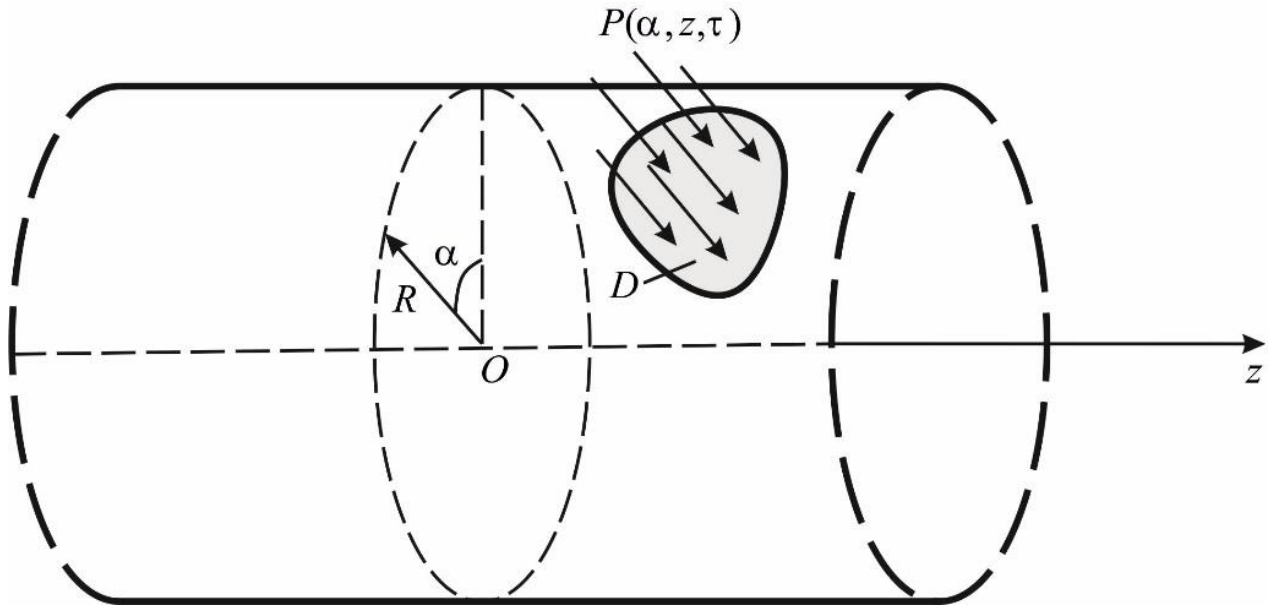


Рис. 2.1.1. Постановка задачи о пространственном движении оболочки под действием внешнего давления.

Для описания движения оболочки используем пространственные уравнения движения в перемещениях модели Тимошенко (1.5), записанные в безразмерной форме:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial \tau^2} = L \cdot \mathbf{W} + \mathbf{P}, \quad L = (L_{ij})_{5 \times 5}, \quad \mathbf{W} = (u, v, w, \chi_\alpha, \chi_z)^T, \quad \mathbf{P} = (0, 0, P, 0, 0)^T, \quad (2.2)$$

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right), \quad L_{12} = (1 - \eta^2) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial z}, \quad L_{13} = (1 + k\eta^2) \frac{\partial}{\partial \alpha},$$

$$L_{14} = -\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta^2 k^2, \quad L_{15} = -\gamma^2 (1 - 2\eta^2) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial z}, \quad L_{21} = L_{12}, \quad L_{22} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2},$$

$$L_{23} = (1 - 2\eta^2) \frac{\partial}{\partial z}, \quad L_{24} = -\gamma^2 \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial z}, \quad L_{25} = -\gamma^2 \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}, \quad L_{31} = -L_{13},$$

$$L_{32} = -L_{23}, \quad L_{33} = \eta^2 k^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - 1, \quad L_{34} = \eta^2 k^2 \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad L_{35} = \eta^2 k^2 \frac{\partial}{\partial z},$$

$$L_{41} = \gamma^{-2}L_{14}, L_{42} = \gamma^{-2}L_{24}, L_{43} = -\gamma^{-2}L_{34}, L_{44} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \gamma^{-2} \right),$$

$$L_{45} = L_{12}, L_{51} = \gamma^{-2}L_{15}, L_{52} = \gamma^{-2}L_{25}, L_{53} = -\gamma^{-2}L_{35},$$

$$L_{54} = L_{12}, L_{55} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \eta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - k^2 \gamma^{-2} \right),$$

Полагаем, что в начальный момент времени оболочка находится в состоянии покоя, что соответствует нулевым начальным условиям:

$$\begin{aligned} u|_{\tau=0} = v|_{\tau=0} = w|_{\tau=0} = \chi_\alpha|_{\tau=0} = \chi_z|_{\tau=0} = 0, \\ \dot{u}|_{\tau=0} = \dot{v}|_{\tau=0} = \dot{w}|_{\tau=0} = \dot{\chi}_\alpha|_{\tau=0} = \dot{\chi}_z|_{\tau=0} = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Поставим задачу: определить нормальные перемещения оболочки $w(\alpha, z, \tau)$ при воздействии нестационарного нормального давления, распределённого произвольным образом по произвольной области, принадлежащей боковой поверхности оболочки.

Искомые нормальные перемещения $w(\alpha, z, \tau)$, согласно принципу суперпозиции [101], связаны с давлением $p(\xi, \zeta, t)$ посредством интегрального оператора свертки по пространственным переменным и времени:

$$w(\alpha, z, \tau) = \int_0^\tau dt \iint_D G_w(\alpha - \xi, z - \zeta, \tau - t) p(\xi, \zeta, t) dS \quad (2.4)$$

где $G_w(\alpha, z, \tau)$ – нестационарная пространственная функция влияния для оболочки.

Она, как указано в начале параграфа, есть решение следующей задачи (рис. 2.1.2)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial \tau^2} = L \cdot \mathbf{G} + \boldsymbol{\delta}, \quad \mathbf{G} = (G_u, G_v, G_w, G_{\chi_1}, G_{\chi_2})^T, \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\delta} = [0, 0, \delta(\alpha) \delta(z) \delta(\tau), 0, 0]^T, \quad \mathbf{G}|_{\tau=0} = \dot{\mathbf{G}}|_{\tau=0} = \mathbf{0},$$

где $\delta(\alpha)$, $\delta(z)$, $\delta(\tau)$ – дельта-функции Дирака.

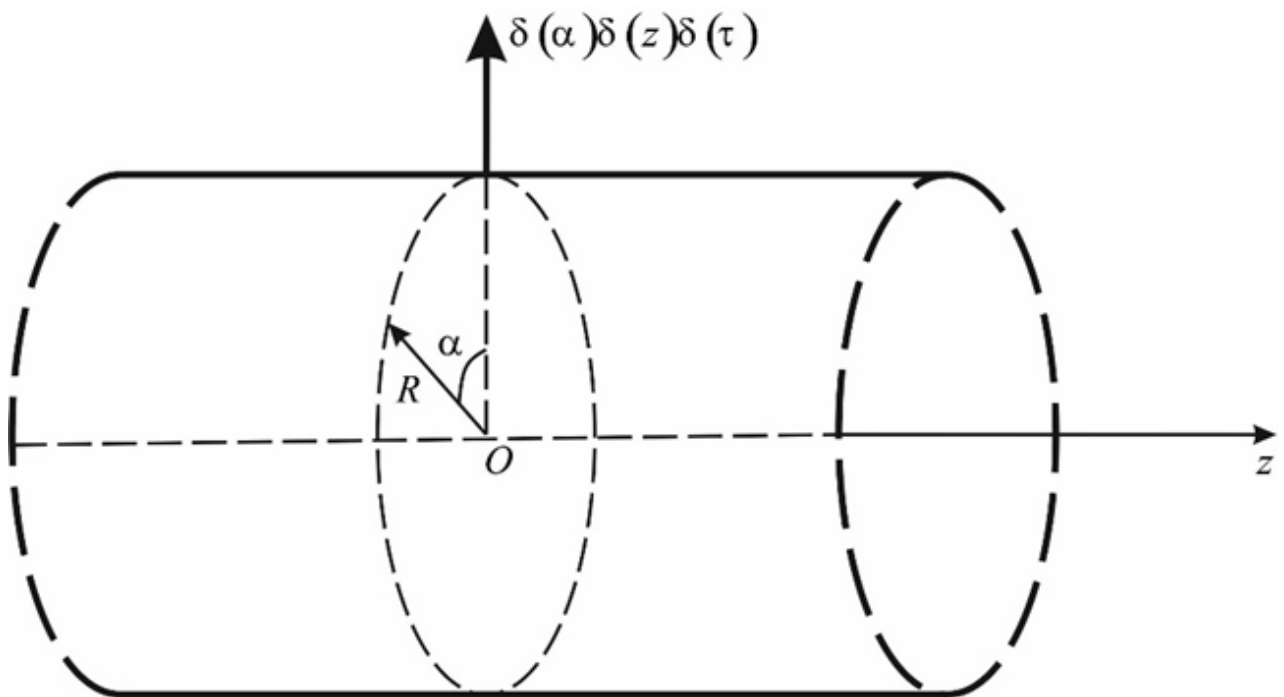


Рис. 2.1.2. Постановка задачи о функции влияния для оболочки

§ 2.2 Численно-аналитический метод построения пространственной функции влияния для цилиндрической оболочки Тимошенко

Функция влияния представляет собой нормальные перемещения и является решением задачи (2.5) о воздействии на поверхность упругой оболочки нормального давления, заданного в виде произведения дельта-функций Дирака по пространственным координатам и времени.

Для решения задачи (2.5) разложим искомые и заданные функции в тригонометрические ряды Фурье по угловой координате α [52, 53].

$$\begin{aligned}
 G_u(\alpha, z, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{u,n}(z, \tau) \sin n\alpha, \quad G_v(\alpha, z, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{v,n}(z, \tau) \cos n\alpha, \\
 G_w(\alpha, z, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_{w,n}(z, \tau) \cos n\alpha, \quad G_{\chi_1}(\alpha, z, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{\chi_1,n}(z, \tau) \sin n\alpha, \quad (2.6) \\
 G_{\chi_2}(\alpha, z, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_{\chi_2,n}(z, \tau) \cos n\alpha, \quad \delta(\alpha) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\alpha,
 \end{aligned}$$

Подставляя разложения (2.6) в (2.5) и приравнивая коэффициенты получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \mathbf{G}_n}{\partial \tau^2} &= L_n \cdot \mathbf{G}_n + \boldsymbol{\delta}_n, \quad L_n = (L_{nij})_{5 \times 5}, \quad \mathbf{G}_n = (G_{u,n}, G_{v,n}, G_{w,n}, G_{\chi_1,n}, G_{\chi_2,n})^T, \\
 \boldsymbol{\delta}_0 &= \left[0, 0, \frac{\delta(z)\delta(\tau)}{2\pi}, 0, 0 \right]^T, \quad \boldsymbol{\delta}_n = \left[0, 0, \frac{\delta(z)\delta(\tau)}{\pi}, 0, 0 \right]^T \quad (n > 0), \quad (2.7) \\
 \mathbf{G}_n|_{\tau=0} &= \dot{\mathbf{G}}_n|_{\tau=0} = \mathbf{0},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{n11} &= -n^2 + \eta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right), L_{n12} = -n(1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial z}, L_{n13} = -n(1 + k\eta^2), \\
L_{n14} &= n^2 \gamma^2 + \eta^2 k^2, L_{n15} = n\gamma^2 (1 - 2\eta^2) \frac{\partial}{\partial z}, L_{n21} = -L_{n12}, \\
L_{n22} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} - n^2 \eta^2, L_{n23} = (1 - 2\eta^2) \frac{\partial}{\partial z}, L_{n24} = -n\gamma^2 \eta^2 \frac{\partial}{\partial z}, \\
L_{n25} &= n^2 \gamma^2 \eta^2, L_{n31} = L_{n13}, L_{n32} = -L_{n23}, L_{n33} = \eta^2 k^2 \left(-n^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - 1, \quad (2.8) \\
L_{n34} &= n\eta^2 k^2, L_{n35} = \eta^2 k^2 \frac{\partial}{\partial z}, L_{n41} = \gamma^{-2} L_{n14}, L_{n42} = -\gamma^{-2} L_{n24}, L_{n43} = \gamma^{-2} L_{n34}, \\
L_{n44} &= -n^2 + \eta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \gamma^{-2} \right), L_{n45} = L_{n12}, L_{n51} = -\gamma^{-2} L_{n15}, \\
L_{n52} &= \gamma^{-2} L_{n25}, L_{n53} = -\gamma^{-2} L_{n35}, L_{n54} = -L_{n12}, L_{n55} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \eta^2 (n^2 + k^2 \gamma^{-2}).
\end{aligned}$$

причём при $n=0$ в системе (2.7) из пяти уравнений нетривиальными являются только второе, третье и пятое.

Применим к полученным уравнениям интегральное преобразование Фурье по координате z и интегральное преобразование Лапласа по времени (значок « F » у функции обозначает ее трансформанту по Фурье, « L » – трансформанту по Лапласу, q и s – параметры преобразования Фурье и Лапласа):

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_n^{FL}(q, s) &= \int_0^\infty e^{-s\tau} d\tau \int_{-\infty}^\infty \mathbf{G}_n(z, \tau) e^{iqz} dz, \\
\mathbf{G}_n &= (G_{u,n}, G_{v,n}, G_{w,n}, G_{\chi 1,n}, G_{\chi 2,n})^T.
\end{aligned} \quad (2.9)$$

После преобразования приходим к системе алгебраических уравнений относительно изображений по Фурье и Лапласу коэффициентов разложений (2.7):

$$\mathbf{A}_n \cdot \mathbf{G}_n^{FL} + \boldsymbol{\delta}_n^{FL} = 0, \mathbf{A}_n = (A_{nij})_{5 \times 5}, \quad (2.10)$$

$$\boldsymbol{\delta}_0 = \left[0, 0, \frac{1}{2\pi}, 0, 0 \right]^T, \quad \boldsymbol{\delta}_n = \left[0, 0, \frac{1}{\pi}, 0, 0 \right]^T \quad (n > 0),$$

$$A_{n11} = -n^2 - \eta^2 (q^2 - k^2) - s^2, \quad A_{n12} = iqn(1 - \eta^2), \quad A_{n13} = -n(1 + k^2\eta^2),$$

$$A_{n14} = n^2\gamma^2 + \eta^2k^2, \quad A_{n15} = -iqn\gamma^2(1 - 2\eta^2), \quad A_{n21} = -A_{n12},$$

$$A_{n22} = -q^2 - n^2\eta^2 - s^2, \quad A_{n23} = -iq(1 - 2\eta^2), \quad A_{n24} = -iqn\gamma^2\eta^2,$$

$$A_{n25} = n^2\gamma^2\eta^2, \quad A_{n31} = A_{n13}, \quad A_{n32} = -A_{n23}, \quad A_{n33} = -\eta^2k^2(n^2 + q^2) - 1 - s^2,$$

$$A_{n34} = n\eta^2k^2, \quad A_{n35} = -iq\eta^2k^2, \quad A_{n41} = \gamma^{-2}A_{n14}, \quad A_{n42} = -\gamma^{-2}A_{n24}, \quad A_{n43} = \gamma^{-2}A_{n34},$$

$$A_{n44} = -n^2 - \eta^2(q^2 + k^2\gamma^{-2}) - s^2, \quad A_{n45} = A_{n12}, \quad A_{n51} = -\gamma^{-2}A_{n15}, \quad A_{n52} = \gamma^{-2}A_{n25},$$

$$A_{n53} = -\gamma^{-2}A_{n35}, \quad A_{n54} = -A_{n12}, \quad A_{n55} = -q^2 - \eta^2(n^2 + k^2\gamma^{-2}) - s^2.$$

При $n=0$ в системе (2.10) нетривиальными являются только второе, третье и пятое уравнения.

Изображения коэффициентов разложений искомой функции влияния $G_{w,n}^{FL}$, как решения (2.10) обладают следующей структурой

$$G_{w,n}^{FL}(q,s) = \frac{\sum_{j=1}^4 P_j(q^2, s^2, n^2)}{\sum_{l=1}^5 R_l(q^2, s^2, n^2)}, \quad (2.11)$$

где $P_j(q, s, n)$ и $R_l(q, s, n)$ – однородные многочлены степени j и l соответственно с коэффициентами, зависящими от безразмерных параметров η , γ , k и номера члена ряда n . Их конкретный вид не приводится ввиду их громоздкости.

Определение оригиналов коэффициентов (2.11) представляет собой сложную математическую задачу, решить которую аналитически не представляются возможным. Одним из вариантов численно–аналитического построения оригиналов является численное обращение преобразования Фурье совместно с аналитическим обращением преобразования Лапласа [97, 99–101]. Однако, этот метод обладает существенными трудностями, связанными с численным вычислением несобственных интегралов быстро осциллирующих функций. Несмотря на очевидные сложности совместного обращения изображений Фурье и Лапласа вида (2.11), все же можно предложить аналитический способ построения оригиналов, основанный на связи интеграла обращения преобразования Фурье с рядом Фурье на переменном интервале.

Уравнения движения оболочки типа Тимошенко (1.5) имеют гиперболический тип, поэтому возмущения в оболочке распространяются с конечными скоростями. Из уравнений (1.5) следует, что нормальные перемещения $w(\alpha, z, \tau)$ распространяются в продольном и угловом направлениях со скоростью $c_w = \eta k$. Следовательно, нам известно, что при $|z| > \eta k \tau = l(\tau)$ оболочка свободна от нормальных перемещений. Установим связь между интегралом и рядом Фурье из рассуждений, приводящих к построению интеграла Фурье из ряда [81].

Рассмотрим разложение функции $G_{w,n}(z, \tau)$ в ряд Фурье на интервале $|z| < L$ полагая, что $L > l(\tau)$:

$$G_{w,n}(z, \tau) = \frac{1}{2L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[e^{-i\frac{\pi mz}{L}} \int_{-L}^L G_{w,n}(z, \tau) e^{i\frac{\pi mz}{L}} dz \right]. \quad (2.12)$$

Вспоминая, что $G_{w,n}(z, \tau)$ имеет ограниченный носитель $|z| < l(\tau) \leq L$, коэффициенты ряда (2.12) можно записать в следующей форме:

$$\int_{-L}^L G_{w,n}(z, \tau) e^{i\frac{\pi mz}{L}} dz = \int_{-\infty}^{\infty} G_{w,n}(z, \tau) e^{i\frac{\pi mz}{L}} dz = G_{w,n}^F\left(\frac{\pi m}{L}, \tau\right). \quad (2.13)$$

Устремляя теперь L к бесконечности на интервале $|z| < l(\tau) \leq L$ и полагая $q = \frac{\pi m}{L}$ получим:

$$G_{w,n}(z, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{w,n}^F(q, \tau) e^{-iqz} dq. \quad (2.14)$$

Сумма ряда (2.12) в любой определённый момент времени τ и при $|z| \leq l(\tau)$ остаётся постоянной при любом L из интервала $l(\tau) < L < \infty$. Это и приводит к искомой связи между рядом и интегралом Фурье.

$$\begin{aligned} G_{w,n}(z, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{w,n}^F(q, \tau) e^{-iqz} dq = \\ &= \frac{1}{2L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_{w,n}^F\left(\frac{\pi m}{L}, \tau\right) e^{-i\frac{\pi mz}{L}} H(L - |z|). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Правая часть соотношения (2.15) может служить для вычисления обратного преобразования Фурье. Величина интервала разложения $2L$ может быть выбрана произвольно, но с учётом ограничения $l(\tau) \leq L$. Для

убыстрения сходимости целесообразно положить $L = l(\tau)$, что приводит к ряду с переменным интервалом разложения:

$$G_{w,n}(z, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{w,n}^F(q, \tau) e^{-iqz} dq =$$

$$= \frac{1}{2l(\tau)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_{w,n}^F \left[\frac{\pi m}{l(\tau)}, \tau \right] e^{-i \frac{\pi m z}{l(\tau)}} H[l(\tau) - |z|]. \quad (2.16)$$

Отметим, что сумма ряда (2.15) не зависит от замены $L = l(\tau)$, следовательно, при почленном дифференцировании или интегрировании ряда (2.16) можно положить $l(\tau) = \text{const}$.

Соотношение (2.16) может служить и для обращения интегрального преобразования Фурье и Лапласа. Выполняя прямое и обратное преобразование Лапласа над формулой (2.16) и полагая при этом, что $l(\tau) = \text{const}$, получаем:

$$G_{w,n}(z, \tau) = \frac{1}{2l(\tau)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_{w,n}^{FL^{-1}} \left[\frac{\pi m}{l(\tau)}, s \right] e^{-i \frac{\pi m z}{l(\tau)}} H[l(\tau) - |z|], \quad (2.17)$$

где L^{-1} означает обратное преобразование Лапласа.

Мы получили формулу (2.17), которая может служить для вычисления обратного преобразования Фурье–Лапласа в данный момент времени τ , исключая момент времени $\tau = 0$, с любой наперёд заданной точностью.

Отметим, что $G_{w,n}(z, \tau)$ – чётная функция по переменной z : $G_{w,n}(-z, \tau) = G_{w,n}(z, \tau)$. Следовательно, её экспоненциальное преобразование Фурье по z совпадает с косинус–преобразованием Фурье и вместо формулы (2.17) можно использовать следующую формулу:

$$G_{w,n}(z, \tau) = \frac{1}{2l(\tau)} G_{w,n}^{FL^{-1}}(0, s) H[l(\tau) - |z|] +$$

$$+ \frac{1}{l(\tau)} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ G_{w,n}^{FL^{-1}} \left[\frac{\pi m}{l(\tau)}, s \right] \cos \left[\frac{\pi m z}{l(\tau)} \right] \right\} H[l(\tau) - |z|],$$
(2.18)

Опишем алгоритм построения оригиналов коэффициентов $G_{w,n}(z, \tau)$ с помощью предложенного метода [66, 67, 98].

1. Задаём конечное значение временного интервала $T : \tau \in [0, T]$;
2. разбиваем временно й интервал $[0, T]$ равномерно на K шагов точками $\tau_k = k\Delta\tau$, $k = 0, 1, \dots, K$, $\Delta\tau = \frac{T}{K}$;

3. Используя формулу (2.18) , строим оригинал $G_{w,n}(z, \tau_k)$ в каждый момент времени τ_k , за исключением $\tau_0 = 0$, ограничиваясь конечным числом членов $M : m = 1, 2, \dots, M$. Обратное преобразование Лапласа $G_{w,n}^{FL^{-1}} \left[\frac{\pi m}{l(\tau_k)}, s \right]$ вычисляем аналитически с помощью второй теоремы разложения для преобразования Лапласа [37].

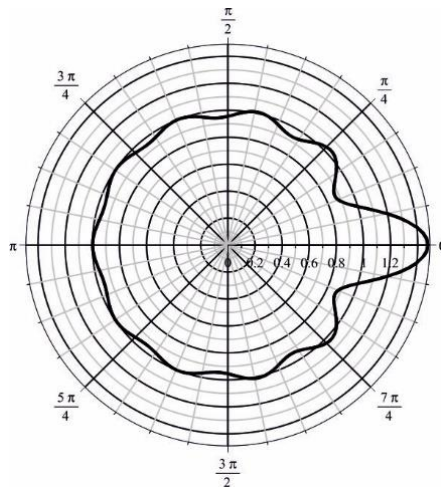
§ 2.3 Решения тестовых задач о воздействии на оболочку внешнего нестационарного давления, примеры расчетов

На первом этапе рассмотрим вопрос построения функций влияния с использованием разработанного численно-аналитического метода для конкретной оболочки, выполненной из стали, со следующими безразмерными параметрами: $\eta = 0.53$, $\gamma = 0.005$. Соответствующие размерные параметры: $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 1.15 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $\mu = 7.69 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $R = 1 \text{ м}$, $h = 5 \text{ мм}$.

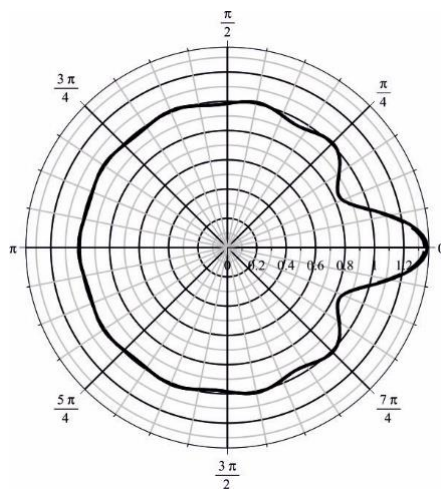
Оригиналы коэффициентов ряда разложения функции влияния определяются формулой (2.18). Коэффициенты этого ряда убывают как $\frac{1}{n^2}$, поэтому можно ожидать довольно быструю сходимость. Для практической оценки сходимости ряда необходимо исследовать функцию влияния вида $G_w(\alpha, z, \tau)$, ограничиваясь первыми десятью и двадцатью членами ряда (2.18) и с учетом первых одиннадцати членов ряда (2.6):

$$G_{w,10,10}(\alpha, z, \tau) = \sum_{n=0}^{10} G_{w,n}^{(10)}(z, \tau) \cos n\alpha, \quad G_{w,10,20}^{(20)}(\alpha, z, \tau) = \sum_{n=0}^{10} G_{w,n}^{(20)}(z, \tau) \cos n\alpha.$$

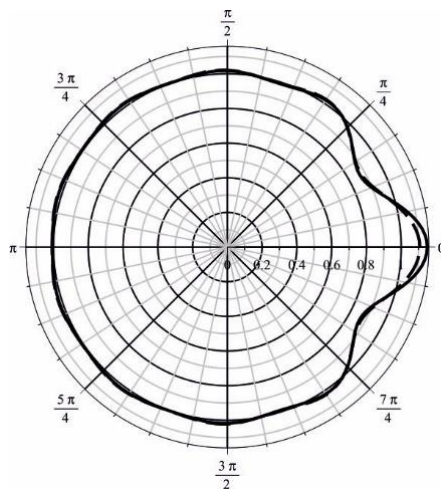
На рисунках 2.3.1 изображены графики функций $1 + 10^{-2} G_{w,10,10}$ и $1 + 10^{-2} G_{w,10,20}$ в моменты времени $\tau = 1, \tau = 3$ и $\tau = 5$. Штриховые кривые соответствуют функции $1 + 10^{-2} G_{w,10,10}$, а сплошные кривые соответствуют функции $1 + 10^{-2} G_{w,10,20}$. Графики построены в полярной системе координат, связанной с сечением оболочки $z = 0$. На графиках заметно небольшое отличие лишь в момент времени $\tau = 5$.



a) $\tau = 1$



б) $\tau = 3$



в) $\tau = 5$

Рис. 2.3.1.

Ограничиваясь первыми десятью членами ряда (2.18), исследуем поведение построенной функции влияния при учете различного числа членов ряда (2.6). Рассмотрим функции $G_{w,30,10}(\alpha, z, \tau) = \sum_0^{30} G_{w,n}^{(10)}(z, \tau) \cos n\alpha$ и $G_{w,40,10}(\alpha, z, \tau) = \sum_0^{40} G_{w,n}^{(10)}(z, \tau) \cos n\alpha$ которые соответствуют учету первых 31 и 41 первых членов ряда (2.6) с учетом первых десяти членов ряда (2.18) [96, 98].

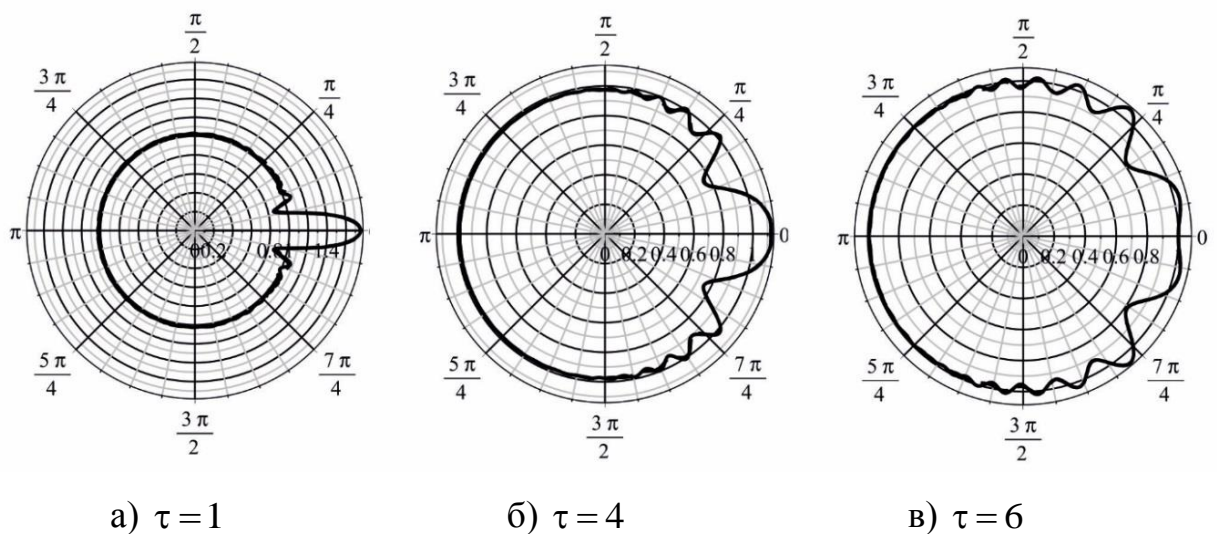
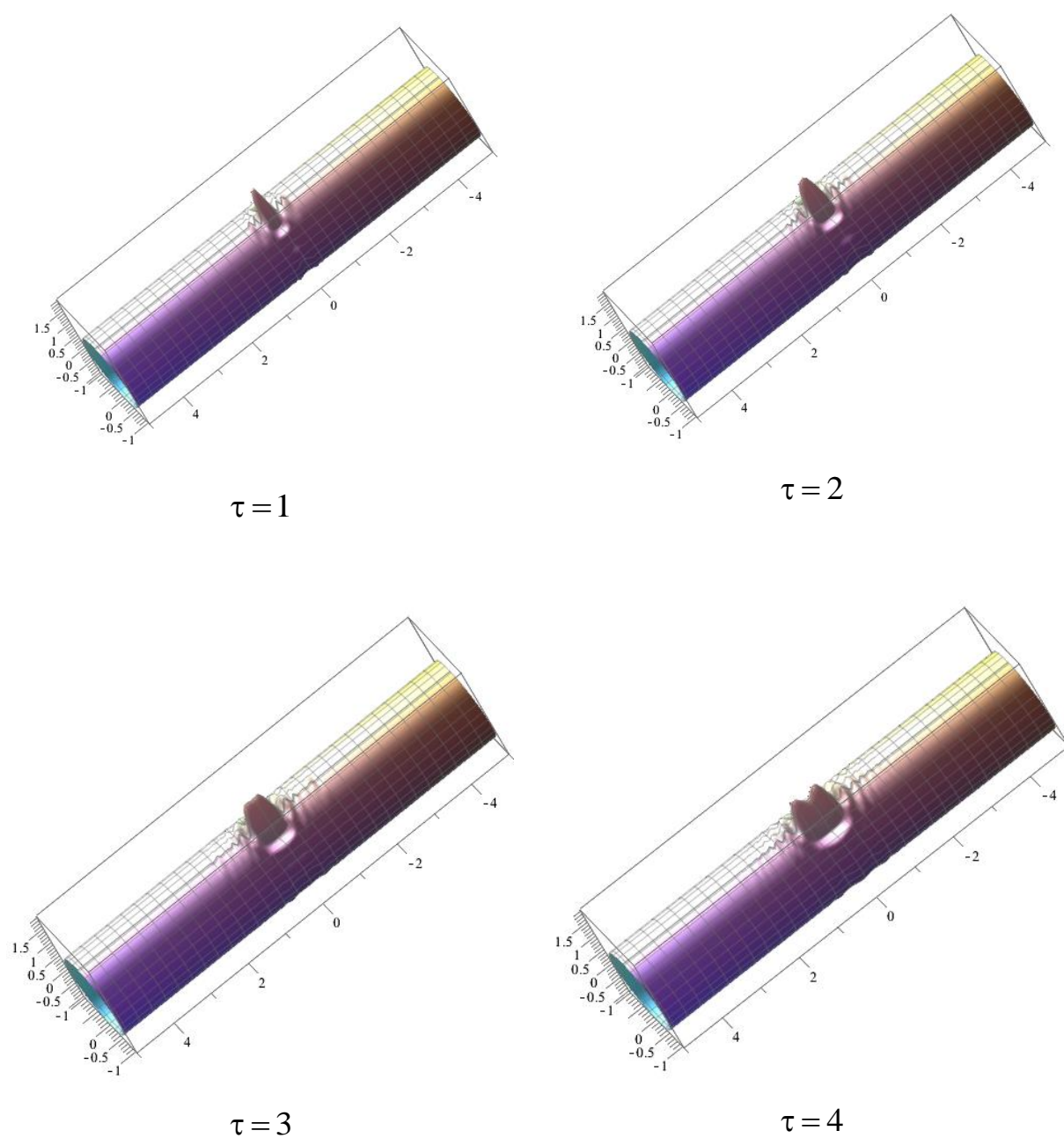


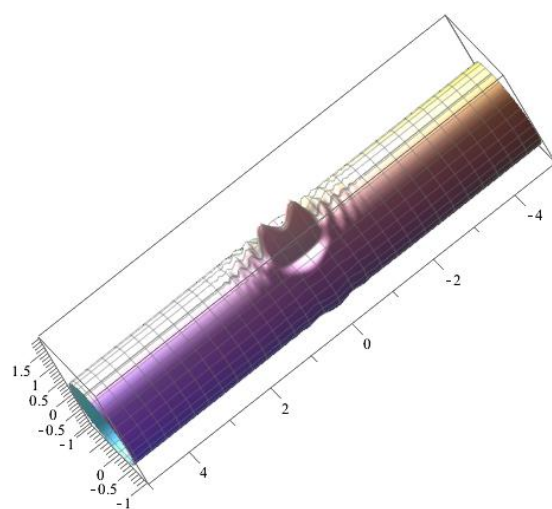
Рис. 2.3.2.

На рисунке 2.3.2 отображены графики функций $1+10^{-2}G_{w,30,10}(\alpha, z, \tau)$ и $1+10^{-2}G_{w,40,10}(\alpha, z, \tau)$ в моменты времени $\tau = 1, \tau = 4, \tau = 6$ в полярной системе координат, связанной с сечением оболочки $z = 0$. Штриховые кривые соответствуют функции $1+10^{-2}G_{w,30,10}(\alpha, z, \tau)$, а сплошные кривые функции $1+10^{-2}G_{w,40,10}(\alpha, z, \tau)$. Видно, что различий в результатах практически не наблюдается. Относительная погрешность при вычислениях функций $1+10^{-2}G_{w,30,10}(\alpha, z, \tau)$ и $1+10^{-2}G_{w,40,10}(\alpha, z, \tau)$ была равна 0,08%. Аналогичные результаты получаются и при построении двумерных пространственно–временных графиков функции влияния.

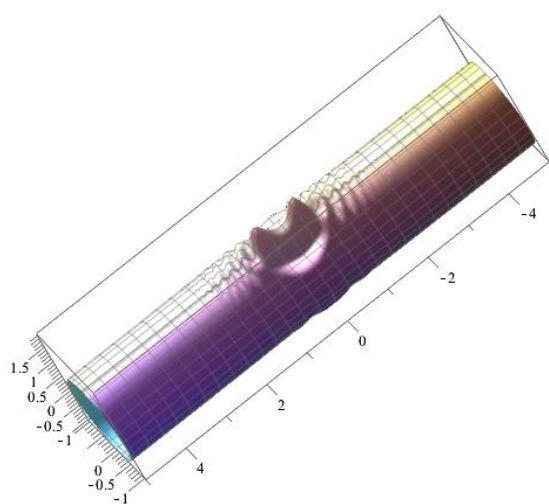
Исходя из проведенного анализа сходимости, в дальнейших расчетах в качестве функции влияния для оболочки примем функцию $G_{w,30,10}(\alpha, z, \tau)$. В дальнейшем числовые индексы для сокращения записи опускаем, считая что $G_w(\alpha, z, \tau) = G_{w,30,10}(\alpha, z, \tau)$.

На рисунке 2.3.3 приведены пространственно-временные графики для функции влияния $G_w(\alpha, z, \tau)$ в различные моменты времени.

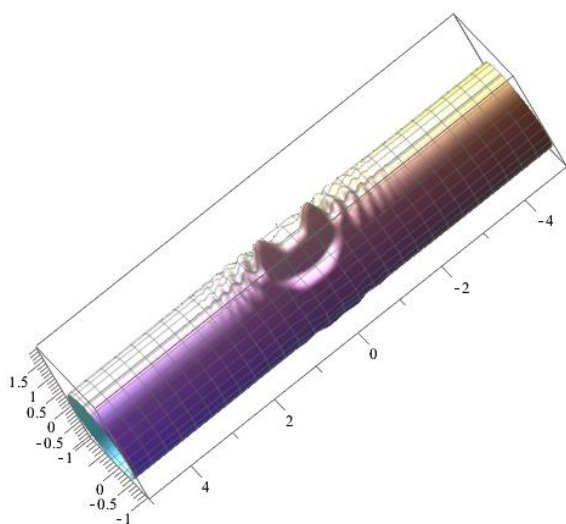




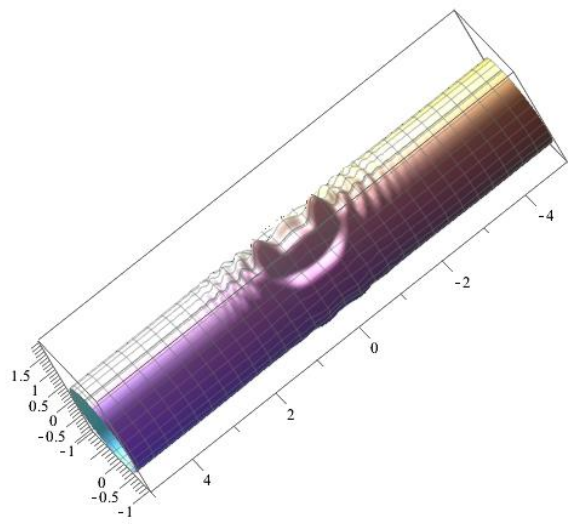
$\tau = 5$



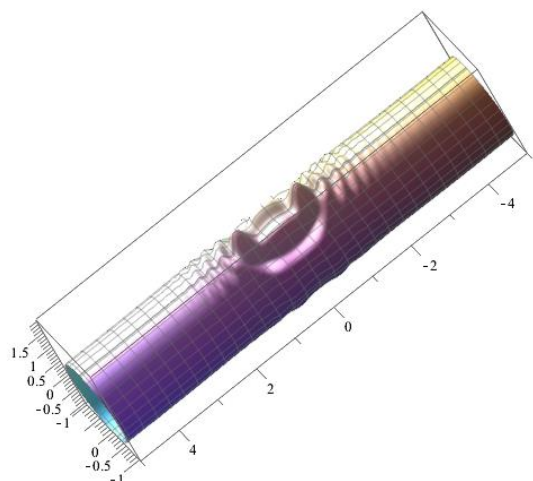
$\tau = 6$



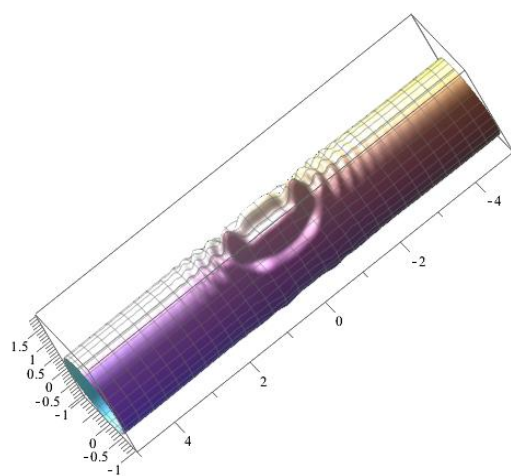
$\tau = 7$



$\tau = 8$



$\tau = 9$



$\tau = 10$

Рис. 2.3.3. Пространственно-временные распределения функции
ВЛИЯНИЯ.

Теперь рассмотрим пример решения конкретной нестационарной задачи о воздействии распределённого давления на боковую поверхность оболочки.

Пусть на покоящуюся оболочку в начальный момент времени начинает воздействовать нестационарное давление вида:

$$\begin{aligned}
 P(\alpha, z, \tau) = & \\
 = \sin\left(\frac{\pi\alpha}{\alpha_*}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{z_*}\right) \cdot [H(z) - H(z - z_*)] \times & \quad (2.19) \\
 \times [H(\alpha) - H(\alpha - \alpha_*)] \cdot H(\tau) &
 \end{aligned}$$

что соответствует внезапному приложению к оболочке давления, распределенного по области $D = \{(\alpha, z) : 0 \leq \alpha \leq \alpha_*, 0 \leq z \leq z_*\}$ по закону

$$\sin\left(\frac{\pi\alpha}{\alpha_*}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{z_*}\right).$$

Нормальные перемещения оболочки определяются по формуле (2.4), в которой поверхностный интеграл с учетом геометрии области D заменяется повторным интегралом:

$$w(\alpha, z, \tau) = \int_0^\tau dt \int_0^{\alpha_*} d\beta \int_0^{z_*} G_w(z - \xi, \alpha - \beta, \tau - t) P(\xi, \beta, t) d\xi. \quad (2.20)$$

Для вычисления интеграла (2.20) используем квадратурную формулу метода прямоугольников:

$$w(\alpha, z, \tau) \approx \Delta t \Delta \xi \Delta \beta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^K G_{ijk}(\alpha, z, \tau) P_{ijk},$$

$$K = \left[\frac{\tau}{\Delta t} \right], \quad \Delta \xi = \frac{z_*}{M}, \quad \Delta \beta = \frac{\alpha_*}{N}, \quad (2.21)$$

$$G_{ijk}(\alpha, z, \tau) = G_w(\alpha - i\Delta\beta, z - j\Delta\xi, \tau - k\Delta t), \quad P_{ijk} = (i\Delta\beta, j\Delta\xi, k\Delta t),$$

где $\left[\frac{\tau}{\Delta t} \right]$ – обозначает целую часть числа.

В расчетах примем $\alpha_* = \frac{\pi}{6}$, $z = 1$, $t = 0.05$. На рисунке 2.3.4а показаны графики распределений нормальных перемещений по угловой координате α в момент времени $\tau = 2$ при различных значениях N и M . Сплошная кривая соответствует случаю $N = 10$, $M = 10$; штриховая – $N = 20$, $M = 20$; штрих–пунктирная – $N = 30$, $M = 30$. Графики построены в полярной системе координат, связанной с сечением оболочки $z = 0.5$. На рисунке 2.3.4б представлены аналогичные распределения нормальных перемещений по координате z при $\alpha = 0$. Из анализа результатов видно, что во втором и третьем случаях результаты практически идентичны, поэтому в дальнейших расчетах по формуле (2.21) принимается $N = 20$, $M = 20$.

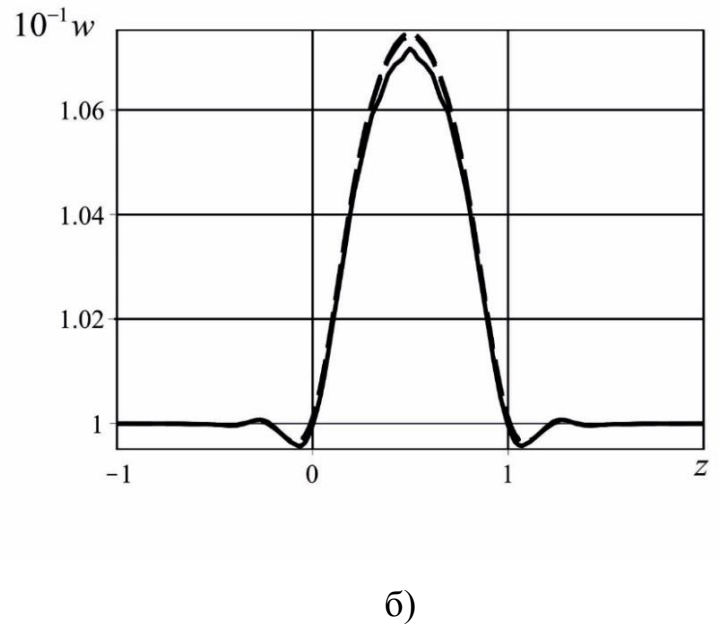
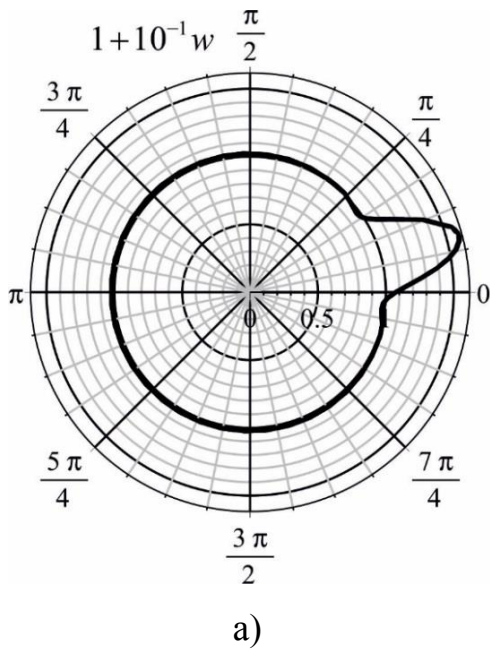


Рис. 2.3.4.

На рисунке 2.3.5а представлены распределения нормальных перемещений оболочки в сечении $z=0.5$ в различные моменты времени. Сплошная кривая соответствует моменту времени $\tau=1$, штриховая – $\tau=1.5$, штрих–пунктирная – $\tau=2$. Распределения нормальных перемещений по координате z при $\alpha=0$ приведено на рисунке 2.3.5б.

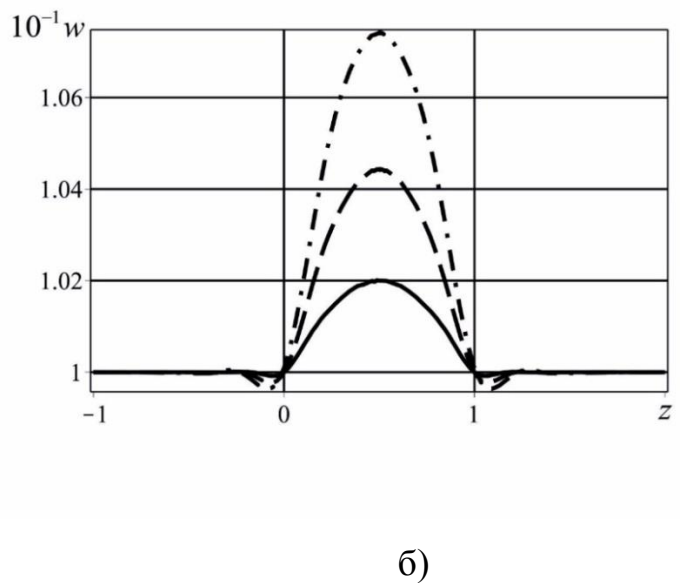
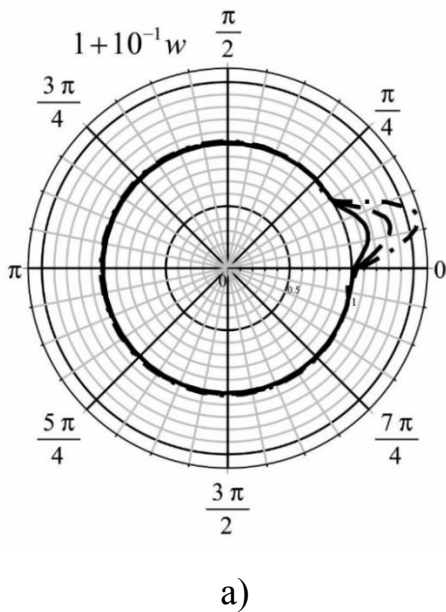
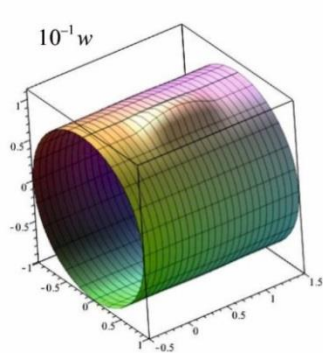
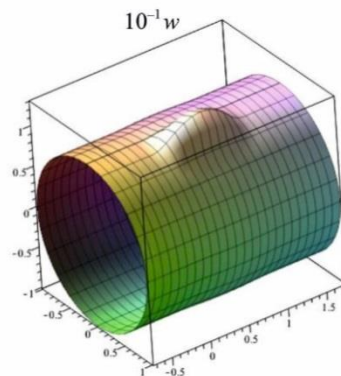


Рис. 2.3.5.

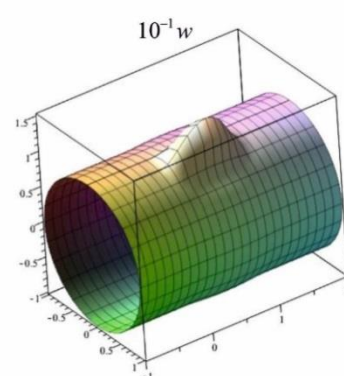
Пространственные распределения нормальных перемещений по поверхности оболочки в различные моменты времени представлены на рисунках 2.3.6а, 2.3.6б, 2.3.6в. Рисунок 2.3.6а соответствует моменту времени $\tau = 1$, 2.3.6б – $\tau = 1.5$, 2.3.6в – $\tau = 2$.



а)



б)



в)

Рис. 2.3.6.

§ 2.4 Сравнение предложенного метода обращения с другими численными методами

Наряду с предложенным методом проведем сравнение результатов расчета с результатами, полученными с помощью других методов. [97]

1. Метод численного обращения преобразования Фурье, основанный на квадратурной формуле средних прямоугольников, в сочетании с аналитическим обращением преобразования Лапласа.

Пусть $f^{FL}(q, s)$ – изображение вида (2.11) (зависимость от n опущена).

При заданном значении $q = q_*$ обратное преобразование Лапласа $f^{FL^{-1}}(q_*, \tau)$ строится аналитически с помощью второй теоремы разложения.

Таким образом, стоит задача о вычислении интеграла обратного косинус–преобразования Фурье:

$$f(z, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f^{FL^{-1}}(q, \tau) \cos qz dq \quad (2.22)$$

Представим интеграл (2.22) в виде суммы

$$f(z, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 f^{FL^{-1}}(q, \tau) \cos qz dq + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} f^{FL^{-1}}(q, \tau) \cos qz dq \quad (2.23)$$

Во втором интеграле сделаем замену $p = 1 - \frac{1}{q}$, $q = \frac{1}{1-p}$. Получим:

$$f(z, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 F(q, \tau) dq, \quad (2.24)$$

$$F(q, \tau) = f^{FL^{-1}}(q, \tau) \cos qz + \frac{1}{(1-q)^2} f^{FL^{-1}}\left(\frac{1}{1-q}, \tau\right) \cos \frac{1}{1-q} z.$$

Интеграл (2.24) заменим квадратурной формулой метода средних прямоугольников

$$f(z, \tau) \approx \frac{h}{\pi} \sum_{k=1}^K F(q_{k-1/2}, \tau), \quad h = \frac{1}{K}, \quad q_{k-1/2} = h\left(k - \frac{1}{2}\right). \quad (2.25)$$

2. Метод численного обращения преобразования Фурье, основанный на квадратурной формуле Филона, в сочетании с аналитическим обращением преобразования Лапласа.

Зададимся некоторым большим положительным числом Q . Несобственный интеграл (15) приближено заменим определенным интегралом

$$f(z, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f^{FL^{-1}}(q, \tau) \cos qz dq \approx \frac{1}{\pi} \int_0^Q f^{FL^{-1}}(q, \tau) \cos qz dq. \quad (2.26)$$

Представим определённый интеграл (2.26) в виде суммы интегралов по отрезкам действительной полуоси q

$$\frac{1}{\pi} \int_0^Q f^{FL^{-1}}(q, \tau) \cos qz dq = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^K \int_{q_{k-1}}^{q_k} f^{FL^{-1}}(q, \tau) \cos qz dq, \quad q_k = kh, \quad h = \frac{Q}{K}. \quad (2.27)$$

На каждом отрезке функцию $f^{FL^{-1}}(q, \tau)$ заменим линейной аппроксимацией

$$f^{FL^{-1}}(q, \tau) \approx f_{k-1} + \frac{f_k - f_{k-1}}{q_k - q_{k-1}}(q - q_{k-1}), f_k = f^{FL^{-1}}(q_k, \tau). \quad (2.28)$$

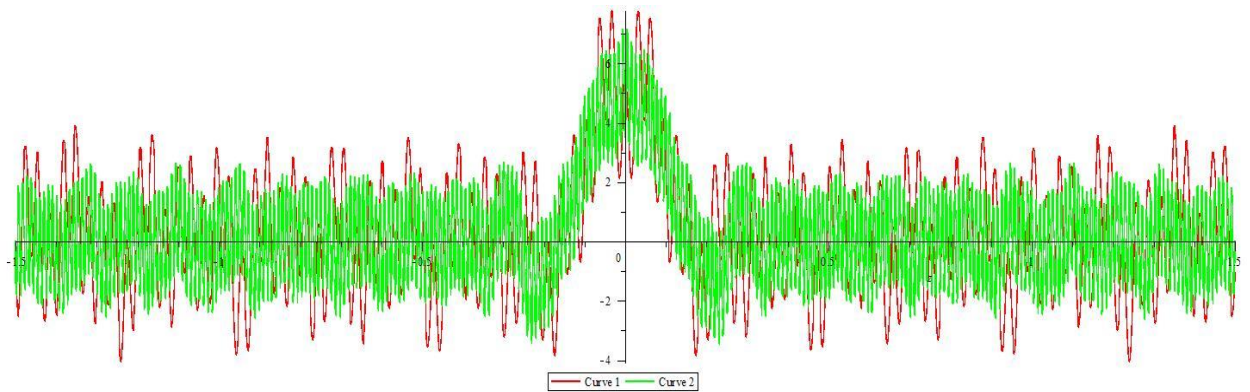
Подставляя (2.28) в (2.27) и выполняя интегрирование, приходим к приближенной формуле

$$f(z, \tau) \approx \frac{1}{\pi} \frac{f^{FL^{-1}}(Q, \tau) \sin Qz}{z} + \frac{1}{\pi h z^2} \sum_{k=1}^K \Delta f_k (\cos q_k x - \cos q_{k-1} x), \quad (2.29)$$

$$\Delta f_k = f_k - f_{k-1}.$$

Приведем сравнение результатов построения оригиналов коэффициентов ряда (2.6), полученных с помощью трёх предложенных методов на примере $G_{w,3}(z, \tau)$

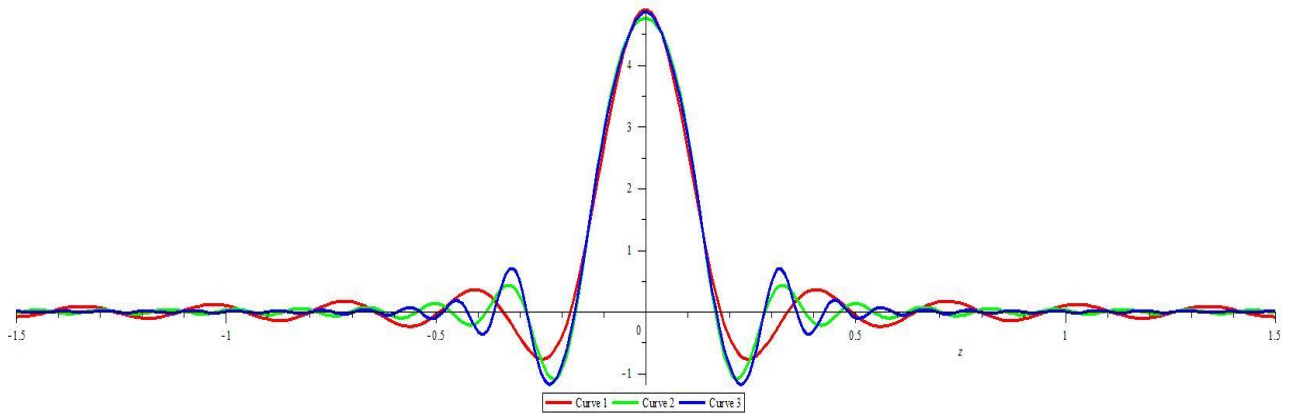
Результат применения метода численного обращения преобразования Фурье, основанный на квадратурной формуле средних прямоугольников, в сочетании с аналитическим обращением преобразования Лапласа представлен на рисунке 2.4.1.



Красная кривая – 100 шагов, зелёная – 300 шагов разбиения отрезка интегрирования.

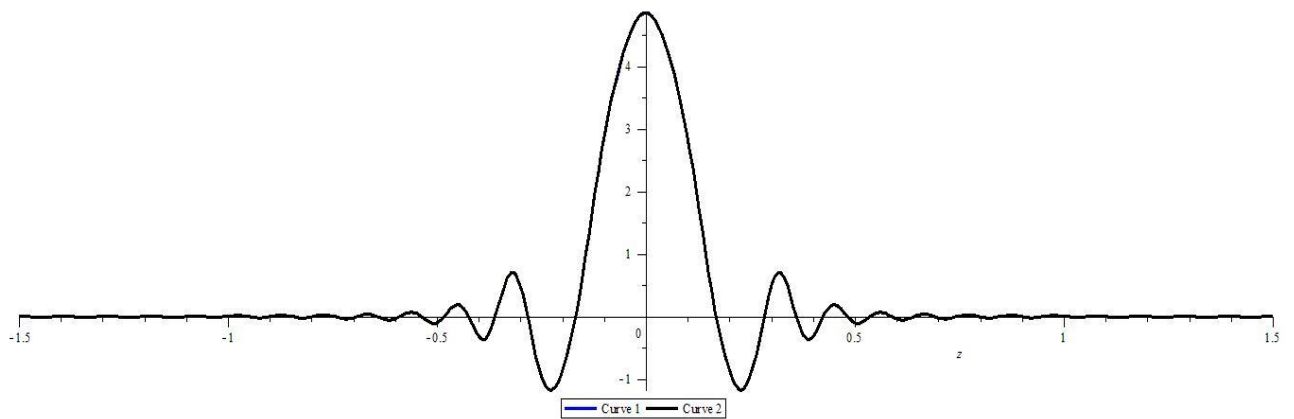
Рис. 2.4.1.

Результат применения метода численного обращения преобразования Фурье, основанный на квадратурной формуле Филона, в сочетании с аналитическим обращением преобразования Лапласа представлен на рисунках 2.4.2, 2.4.3.



Красная кривая – $Q = 20$, 40 шагов; зелёная – $Q = 40$, 80 шагов; синяя – $Q = 60$, 120 шагов

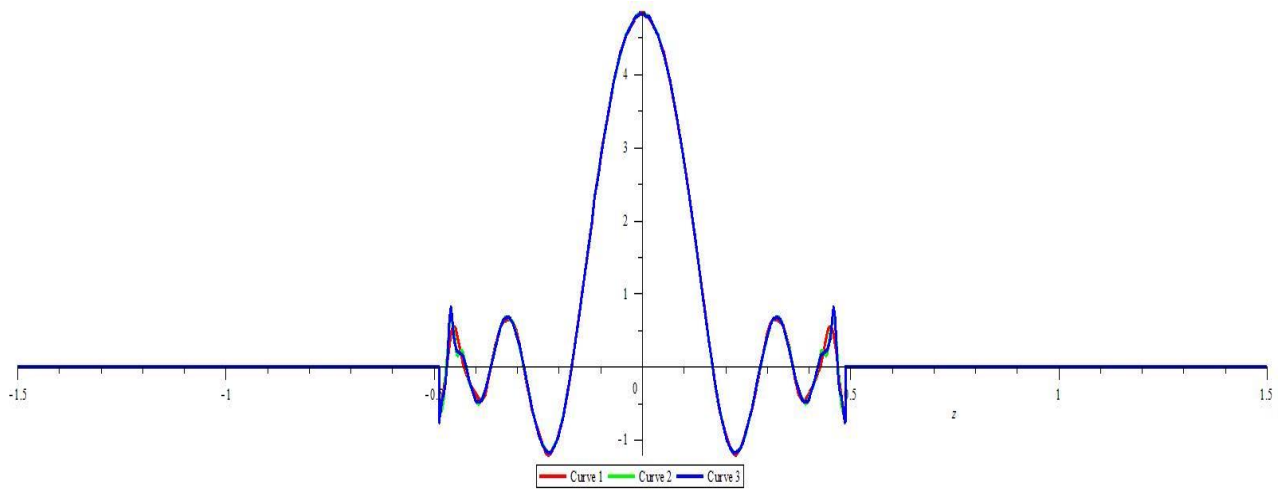
Рис. 2.4.2.



Синяя кривая – $Q = 60$, 120 шагов; черная кривая – $Q = 60$, 240 шагов.

Рис. 2.4.3.

Аналитический метод обращения, основанный на разложении в ряд Фурье на переменном интервале представлен на рисунке 2.4.4.



Красная кривая – 20 членов ряда (2.18); зеленая – 40; синяя 60.

Рис. 2.4.4

Сравнение результатов построения оригиналов коэффициентов ряда (2.6) представлено на рисунке 2.4.5.

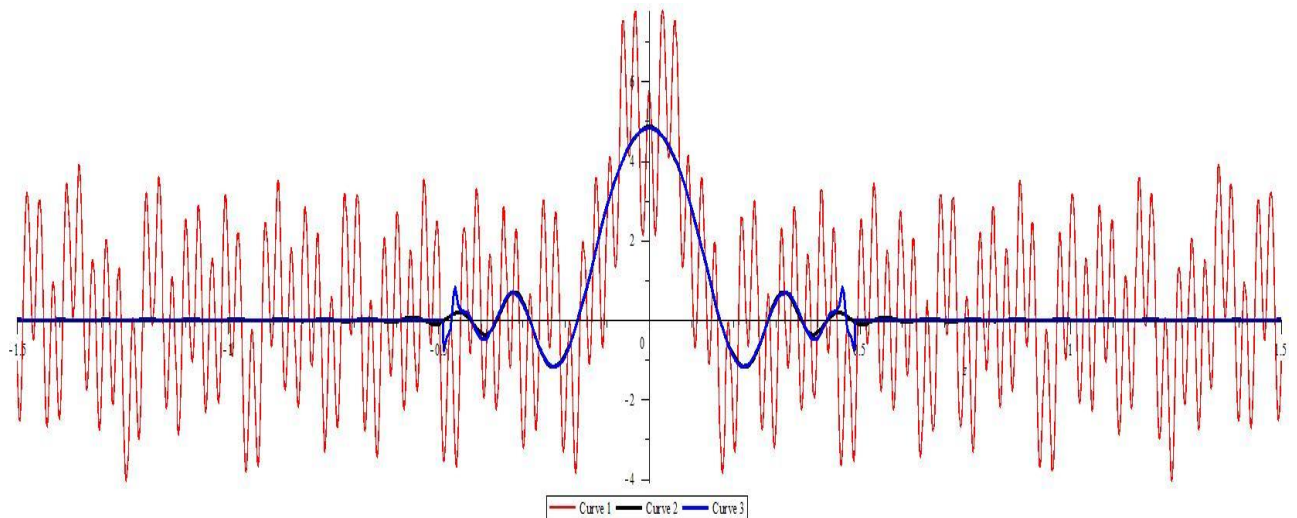


Рис. 2.4.5.

Красная кривая – численное интегрирование методом прямоугольников ($N = 100$), зеленая – формула Филона ($Q = 60, K = 240$); синяя – аналитический метод на основе разложения в ряд Фурье на переменном интервале ($N = 40$).

Различие результатов метода Филона и метода разложения в ряд Фурье в окрестности фронта объясняется по-видимому тем, что при использовании метода Филона перемещения выходят за фронт волны, унося с собой и часть её энергии (фронта как такового в этом методе наблюдать невозможно).

На основании приведенных результатов можно вынести такие суждения:

1. Для данного типа изображений метод прямоугольников не пригоден (однако можно показать его удовлетворительную работу, в случае если давление является гладкой функцией от координат и времени).

2. Метод Филона даёт удовлетворительный результат, однако является слишком ресурсоёмким.

3. Аналитический метод на основе разложения в ряд Фурье на переменном интервале наименее ресурсоёмкий и наиболее точный и быстро сходящийся.

Глава 3. МЕТОД И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫХ УДАРНИКОВ И ТОНКОЙ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ТИМОШЕНКО

§ 3.1 Численный аналог системы разрешающих уравнений

Основой для построения системы разрешающих уравнений нестационарной контактной задачи для абсолютно твёрдого ударника и тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки является интегральное соотношение (2.4), в котором двумерная область D распределения искомого контактного $p(\alpha, z, \tau)$ заранее неизвестна и зависит от времени [68]

$$w(\alpha, z, \tau) = \int_0^{\tau} dt \iint_{D(t)} G_w(\alpha - \xi, z - \zeta, \tau - t) p(\xi, \zeta, t) dS. \quad (3.1)$$

В линейной постановке задачи условия контакта ставим на фиктивной смоченной поверхности, в качестве которой используем плоскую область $\Omega(\tau)$, принадлежащую плоскости Π , касательной к поверхностям оболочки и ударника в начальный момент времени (рис. 3.1.1).

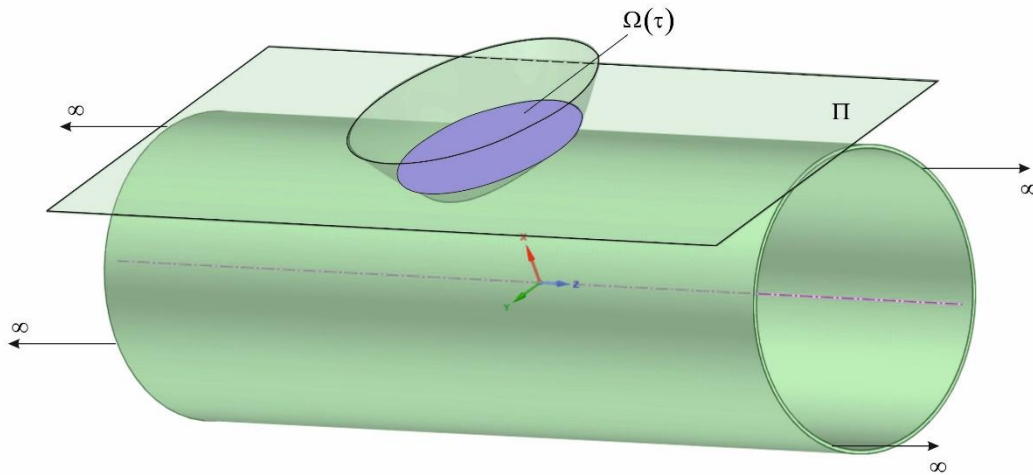


Рис. 3.1.1. Область контакта.

В предположении о малости размера пятна контакта ($\Omega(\tau) \ll 1$) можно положить

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx y, \quad (y, z) \in \Omega(\tau). \quad (3.2)$$

Условия контакта с учётом свободного проскальзывания

$$w(y, z, \tau)|_{(y, z) \in \Omega(\tau)} = u(y, z, \tau)|_{(y, z) \in \Omega(\tau)}, \quad p(y, z, \tau)|_{(y, z) \in \Omega(\tau)} < 0, \quad (3.3)$$

где $u(y, z, \tau)$ – перемещение граничной поверхности ударника.

Положим, что положение поверхности, ограничивающей ударник, в текущий момент времени τ задаётся явным уравнением в системе координат $Oxyz$:

$$\begin{aligned} x = u(y, z, \tau) &= f(y, z) + u_c(\tau), \\ u_c(0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $u_c(\tau)$ – перемещение центра масс ударника, а функция $f(y, z)$ определяет положение поверхности, ограничивающей ударник, в нулевой момент времени $\tau = 0$.

Принимая во внимание граничные условия (3.3) выражение (3.4) и интегральное соотношение (3.1), приходим к основному разрешающему интегральному уравнению относительно искомого контактного давления $p(y, z, \tau)$:

$$\int_0^{\tau} dt \iint_{\Omega(t)} G_w(y - \xi, z - \zeta, \tau - t) p(\xi, \zeta, t) dS = f(y, z) + u_c(\tau). \quad (3.5)$$

В уравнении (3.5) кроме контактного давления неизвестными являются также область контакта $\Omega(\tau)$ и перемещение центра масс ударника $u_c(\tau)$.

Для получения замкнутой системы сначала определим соотношение для определения положения границы области контакта $\Omega(\tau)$. Она определяется из условия пересечения поверхности ударника с плоскостью Π :

$$f(y, z) + u_c(\tau) = 1. \quad (3.6)$$

Перемещение центра масс ударника определяется уравнением его движения (1.7), записанным в интегральной форме

$$u_c(\tau) = V_0 \tau + \frac{1}{m_u} \int_0^{\tau} (\tau - t) dt \iint_{\Omega(t)} p(y, z, t) dS. \quad (3.7)$$

Уравнения (3.5)-(3.7) составляют замкнутую систему. Для её решения используем численно-аналитический алгоритм, основанный на методе механических квадратур.

Временной интервал $[0, \tau]$ разделим на M равномерных шагов

$$\Delta_t = \frac{\tau}{M} :$$

$$t_m = m\Delta_t, \quad m = \overline{1, M}, \quad t_M = M\Delta_t = \tau. \quad (3.8)$$

Интегралы по времени в уравнениях (3.5) и (3.7) заменим суммой интегралов по интервалам $[\tau_{m-1}, \tau_m]$ и положим, что в пределах каждого временного интервала контактное давление остаётся постоянным:

$$\sum_{m=1}^M \int_{t_{m-1}}^{t_m} dt \iint_{\Omega(t)} G_w(y - \xi, z - \zeta, \tau - t) p_m(\xi, \zeta) dS = f(y, z) + u_{cM}, \quad (3.9)$$

$$u_{cM} = V_0 \tau + \frac{1}{m_u} \sum_{m=1}^M \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} (\tau - t) dt \iint_{\Omega(t)} p_m(\xi, \zeta) dS,$$

$$u_{cM} = u_c(\tau), \quad p_m(\xi, \zeta) = p(\xi, \zeta, t_m), \quad t_m = m\Delta_t.$$

Область контакта $\Omega(t) \in \Pi$ приближенно заменим объединением прямоугольных подобластей K_{mij} (рис. 3.1.2):

$$\begin{aligned} \Omega(t) &\approx \Omega_m \in \Pi, \quad \Omega_m = \bigcup_{i,j} K_{mij}, \\ K_{mij} &= \{(\xi, \zeta) : \xi_{i-1} \leq \xi \leq \xi_i, \zeta_{j-1} \leq \zeta \leq \zeta_j, t = t_m\}, \\ \xi_i - \xi_{i-1} &= \zeta_j - \zeta_{j-1} = \Delta, \quad \xi_i = b_{m1} + i\Delta, \quad \zeta_j = d_{i1} + j\Delta, \\ i \in [1, I], I &= \left[\frac{b_{m2} - b_{m1}}{\Delta} \right]; \quad j \in [1, J_i], J_i = \left[\frac{d_{i2} - d_{i1}}{\Delta} \right], \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $\left[\frac{b_{m2} - b_{m1}}{\Delta} \right], \left[\frac{d_{i2} - d_{i1}}{\Delta} \right]$ – целые части чисел $\frac{b_{m2} - b_{m1}}{\Delta}$ и $\frac{d_{i2} - d_{i1}}{\Delta}$.

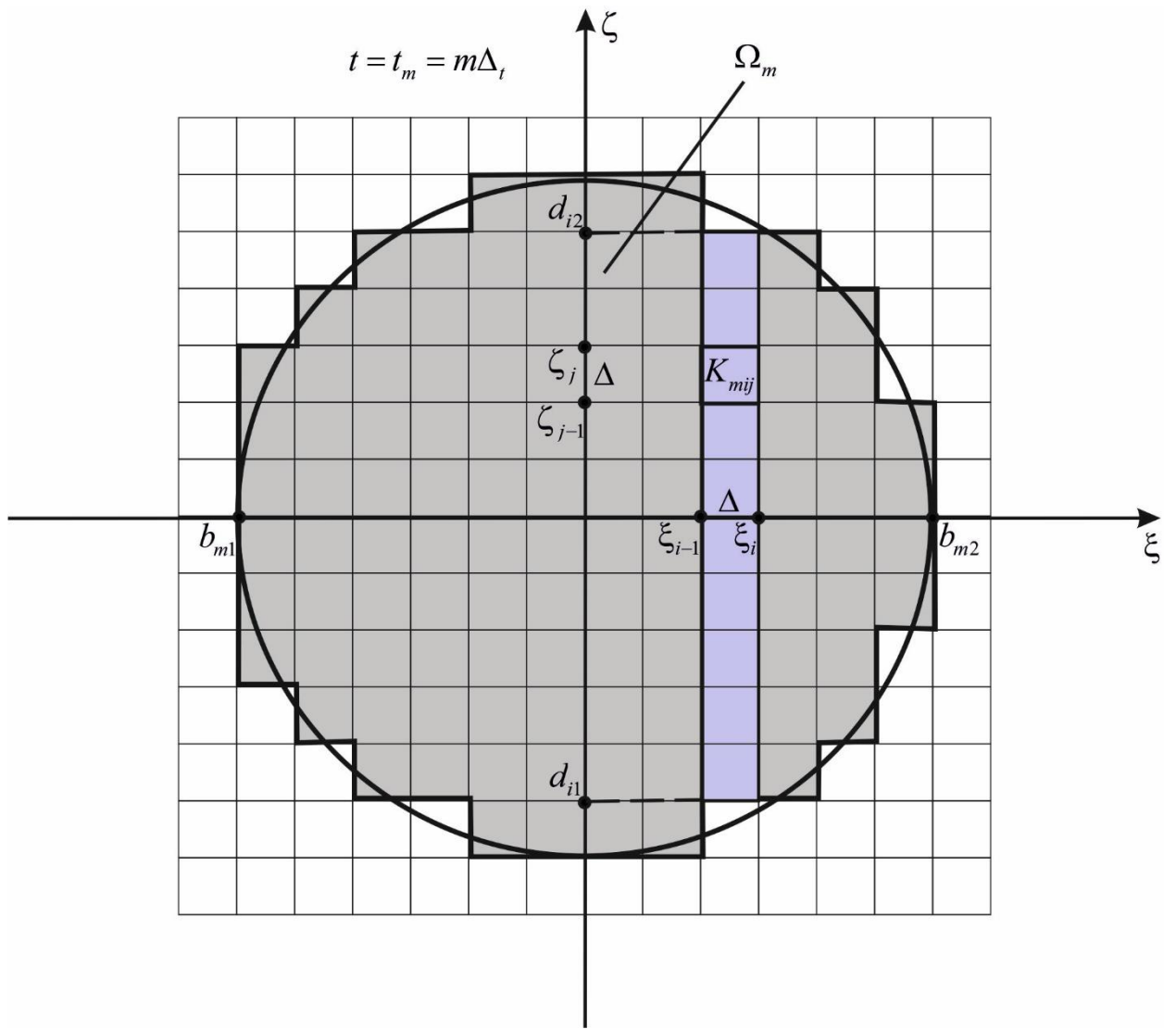


Рис. 3.1.2. Дискретная аппроксимация области контакта.

Из соображений, касающихся устойчивости численной схемы, шаг Δ по пространственным переменным выбирается из условия $\Delta > \Delta_t$, [30]. В частности, можно положить $\Delta = 2\Delta_t$. Границы b_{m1} , b_{m2} , d_{i1} , d_{i2} изменения дискретных значений пространственных переменных ξ_i и ζ_j являются решениями уравнений

$$\begin{aligned}
 f(b_m, 0) + u_{cm} &= 1 \Rightarrow b_{m1}, b_{m2}, \\
 f(\xi_i, d_i) + u_{cm} &= 1 \Rightarrow d_{i1}, d_{i2}, \\
 u_{cm} &= u(t_m)
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

С применением аппроксимации (3.10), получим численные аналоги уравнений (3.9). Для этого положим, что в пределах элементарного квадрата K_{mij} контактное давление остаётся постоянным:

$$p_m(\xi, \zeta) \Big|_{(\xi, \zeta) \in K_{ij}} = p_{mij} = \text{const.} \quad (3.12)$$

Тогда из (3.9)-(3.12) следует

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} p_{mij} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \int_{\zeta_{j-i}}^{\zeta_j} G_w(y_k - \xi, z_l - \zeta, \tau - t) d\xi d\zeta dt = f_{kl} + u_{cM}, \\ u_{cM} = V_0 \tau + \frac{\Delta_i^2 \Delta^2}{m_u} \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} p_{mij} \left(M - m + \frac{1}{2} \right), \\ f(b_m, 0) + u_{cm} = 1 \Rightarrow b_{m1}, b_{m2}, \\ f(\xi_i, d_i) + u_{cm} = 1 \Rightarrow d_{i1}, d_{i2}, \\ k, i \in [1, I], I = \left[\frac{b_{m2} - b_{m1}}{\Delta} \right]; l, j \in [1, J_i], J_i = \left[\frac{d_{i2} - d_{i1}}{\Delta} \right], \\ f_{kl} = f(y_k, z_l). \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} G_{mijkl} p_{mij} = f_{kl} + u_{cM}, \\ u_{cM} = V_0 \tau + \frac{\Delta_i^2 \Delta^2}{m_u} \sum_{m=1}^M A_m \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} p_{mij}, \\ f(b_m, 0) + u_{cm} = 1 \Rightarrow b_{m1}, b_{m2}, \\ f(\xi_i, d_i) + u_{cm} = 1 \Rightarrow d_{i1}, d_{i2}, \\ k, i \in [1, I], I = \left[\frac{b_{m2} - b_{m1}}{\Delta} \right]; l, j \in [1, J_i], J_i = \left[\frac{d_{i2} - d_{i1}}{\Delta} \right], \\ G_{mijkl} = \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \int_{\zeta_{j-i}}^{\zeta_j} G_w(y_k - \xi, z_l - \zeta, M \Delta_i - t) d\xi d\zeta dt, \\ A_m = M - m + \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Уравнения (3.13) составляют численный аналог системы разрешающих уравнений пространственной нестационарной контактной задачи для

абсолютно твёрдого ударника и тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко.

§ 3.2 Алгоритм решения

Построения решений системы (3.13) проводится пошагово по времени. Отметим, что система уравнений (3.13) является нелинейной, так как четвертое и пятое уравнения содержат искомые значения контактного давления p_{Mij} на M -ном шаге по времени. Для линеаризации системы уравнений (3.13) предлагается использовать итерационную процедуру. На нулевой итерации второе уравнение системы (3.13) заменяется следующим аналогом

$$u_{cM} = V_0 \tau + \frac{\Delta_t^2 \Delta^2}{m_u} \sum_{m=0}^{M-1} (M - m) \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} p_{mij}, p_{0ij} = 0. \quad (3.14)$$

Это позволяет определить перемещение u_{cM} без учета поля давления на шаге с номером M . Затем из третьего и четвертого уравнения определяются границы области интегрирования, а затем верхние значения I и J_i сумм в первом уравнении. После этого из первого уравнения вытекает система $I \times J$ линейных алгебраических уравнений, где $J = \sum_{i=1}^I J_i$, относительно $I \times J$ искомых значений контактного давления на M -ном шаге по времени. После их определения перемещение ударника u_{cM} уточняется с использованием второго уравнения системы (3.13). Затем уточняются границы области интегрирования, а также пределы верхние значения сумм I и J_i . После этого происходит пересчет поля значений контактного давления как решений первого уравнения в системе (3.13), эквивалентного системе $I \times J$ линейных алгебраических уравнений.

Таким образом, алгоритм решения системы (3.13) включает следующие операции.

1. На первом шаге определяется поле дискретных значений контактного давления p_{1ij} на элементарных квадратах K_{1ij} .

2. На втором и последующих шагах по времени первое уравнение системы (3.13) записывается в виде

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} G_{Mijkl} p_{Mij} = f_{kl} + u_{cM} - F_M, \quad (3.15)$$

$$F_M = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} G_{mijkl} p_{mij},$$

где F_M – известная величина, так как её выражение содержит лишь значения контактного давления на предыдущих шагах по времени.

Уравнение (3.15) эквивалентно системе $I \times J$ линейных алгебраических уравнений, из которых определяются значения контактного давления p_{Mij} на элементарных квадратах K_{Mij} .

3. На каждом шаге по времени перемещение ударника и положение границ области интегрирования уточняется с помощью описанной выше итерационной процедуры.

4. Коэффициенты G_{mijkl} вычисляются численно-аналитически по формуле

$$G_{mijkl} \approx \tilde{G}_{mijkl} = \Delta_t \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \int_{\zeta_{j-1}}^{\zeta_j} G_w \left[y_k - \xi, z_l - \zeta, \left(M - \frac{2m-1}{2} \right) \Delta_t \right] d\xi d\zeta, \quad (3.16)$$

При этом структура функции влияния и методы для её получения, описанные в § 2.2, позволяют аналитически вычислить интегралы в правой части (3.16). Действительно, из (2.6) и (2.18)

$$G_w(y, z, \tau) = \sum_{n=0}^N G_{w,n}(z, \tau) \cos ny,$$

$$G_{w,n}(z, \tau) = \frac{1}{2\eta k \tau} G_{w,n}^{FL^{-1}}(0, s) H(\eta k \tau - |z|) +$$

$$+ \frac{1}{\eta k \tau} \sum_{h=1}^H \left\{ G_{w,n}^{FL^{-1}} \left[\frac{\pi h}{\eta k \tau}, s \right] \cos \left[\frac{\pi h z}{\eta k \tau} \right] \right\} H(\eta k \tau - |z|), \quad (3.17)$$

где, следуя § 2.3, можно принять $N = 30$, $H = 10$.

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{mijkl} &= \Delta_t \Delta G_{0,mijl}(z, \tau_{Mm}) + \\ &+ 2\Delta_t \sum_{n=1}^{30} \frac{1}{n} G_{n,mijl}(z, \tau_{Mm}) \sin(n\Delta/2) \cos n(y_k - i\Delta + \Delta/2), \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} G_{n,mijl} &= \frac{\Delta}{2\eta k \tau_{Mm}} G_{w,n}^{FL^{-1}}(0, s) H(\eta k \tau_{Mm} - |z_l - \zeta_j|) + \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{h=1}^{10} \frac{1}{h} \left[G_{w,n}^{FL^{-1}}\left(\frac{\pi h}{\eta k \tau_{Mm}}, s\right) \sin\left(\frac{\Delta}{2} \frac{\pi h}{\eta k \tau_{Mm}}\right) \cos\left(\frac{\pi h}{\eta k \tau_{Mm}}(z_l - j\Delta + \Delta/2)\right) \right] \times \\ &\quad \times H(\eta k \tau_{Mm} - |z_l - \zeta_j|), \\ \tau_{Mm} &= \left(M - \frac{2m-1}{2}\right) \Delta_t. \end{aligned}$$

5. После определения положения границы области контакта и поля контактного давления в дискретные моменты времени, истинные нормальные перемещения оболочки снова определяются интегральным соотношением (3.1). Его дискретный аналог имеет вид

$$w(\alpha, z, \tau) = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} p_{mij} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \int_{\zeta_{j-i}}^{\zeta_j} G_w(\alpha - \xi, z - \zeta, \tau - t) d\xi d\zeta dt. \quad (3.19)$$

§ 3.3. Примеры расчета

В качестве примера рассмотрим нестационарное контактное взаимодействие круговой цилиндрической оболочки, радиуса $R=1$ и толщиной $h=0.025$ с абсолютно твердым ударником, ограниченным поверхностью, имеющей форму параболоида вращения:

$$f(y, z) = y^2 + z^2 + 1. \quad (3.20)$$

В качестве материала оболочки примем сталь со следующими характеристиками: $\rho = 7850$ кг/м³, $\lambda = 1.15 \times 10^{11}$ Па, $\mu = 7.69 \times 10^{10}$ Па, чему соответствуют безразмерные параметры: $\eta = 0.53$, $\gamma = 1.3 \times 10^{-6}$.

Рассмотрим влияние начальной скорости ударника на процесс нестационарного контактного взаимодействия. Примем к анализу три её возможных значения $V_0 = 0.01$, $V_0 = 0.05$ и $V_0 = 0.1$.

На рис. 3.3.1 представлены зависимости перемещения центра масс ударника $u_c(\tau)$ от времени. Здесь и далее сплошная кривая соответствует $V_0 = 0.01$, штриховая – $V_0 = 0.05$, штрихпунктирная – $V_0 = 0.1$.

Поверхность контакта в данном случае представляет собой круг, граница которого совпадает с сечением поверхности $x = y^2 + z^2 + 1 - u_c(\tau)$ плоскостью $x=1$ в текущий момент времени τ . Зависимости радиуса области контакта от времени для выбранных значений начальной скорости движения ударника представлены на рис. 3.3.2.

Кривые на рис. 3.3.3 иллюстрируют зависимости результирующей контактной силы $R(\tau)$ от времени.

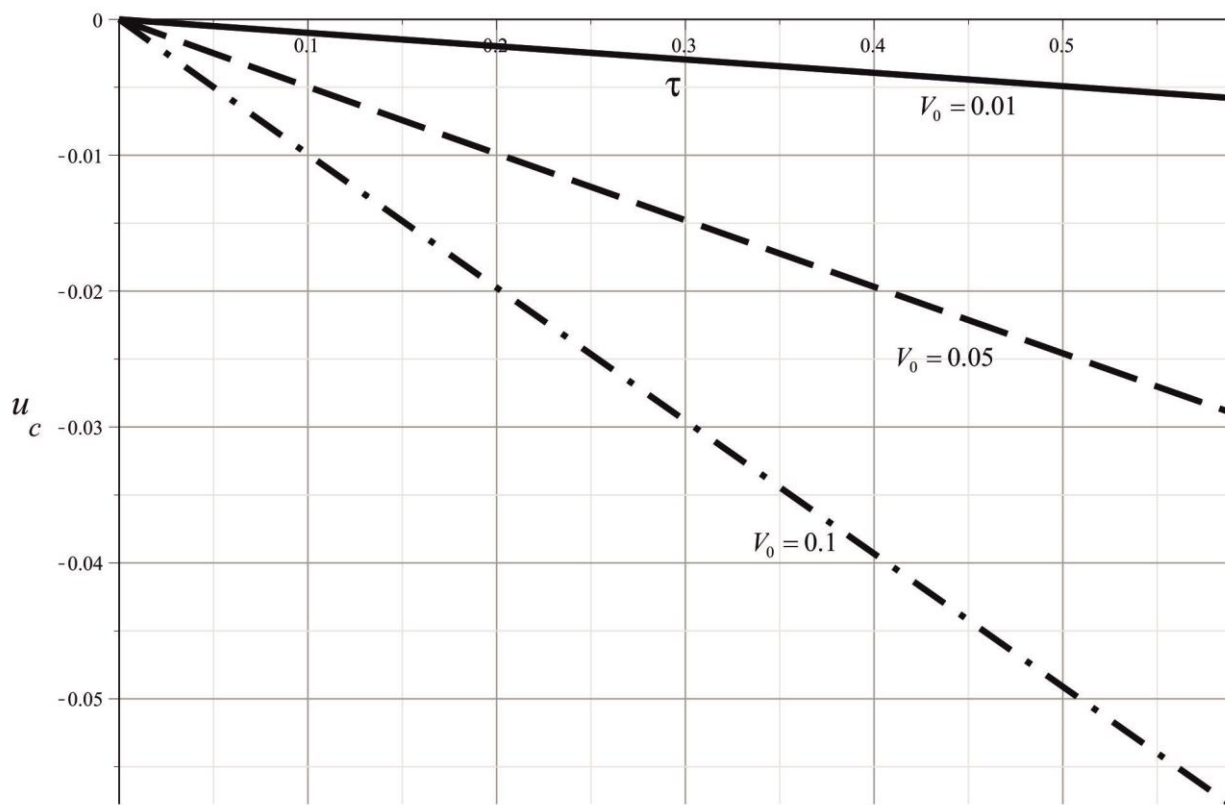


Рис. 3.3.1. Перемещение центра масс ударника

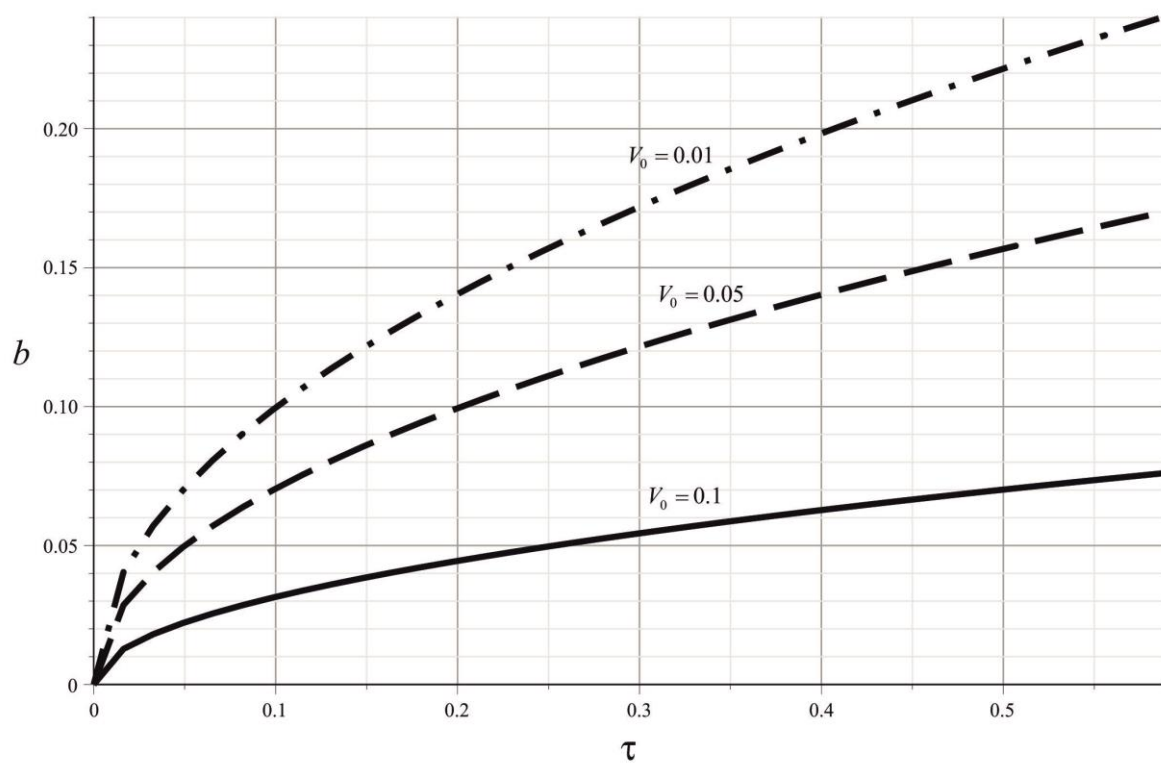


Рис. 3.3.2. Зависимость радиуса области контакта от времени

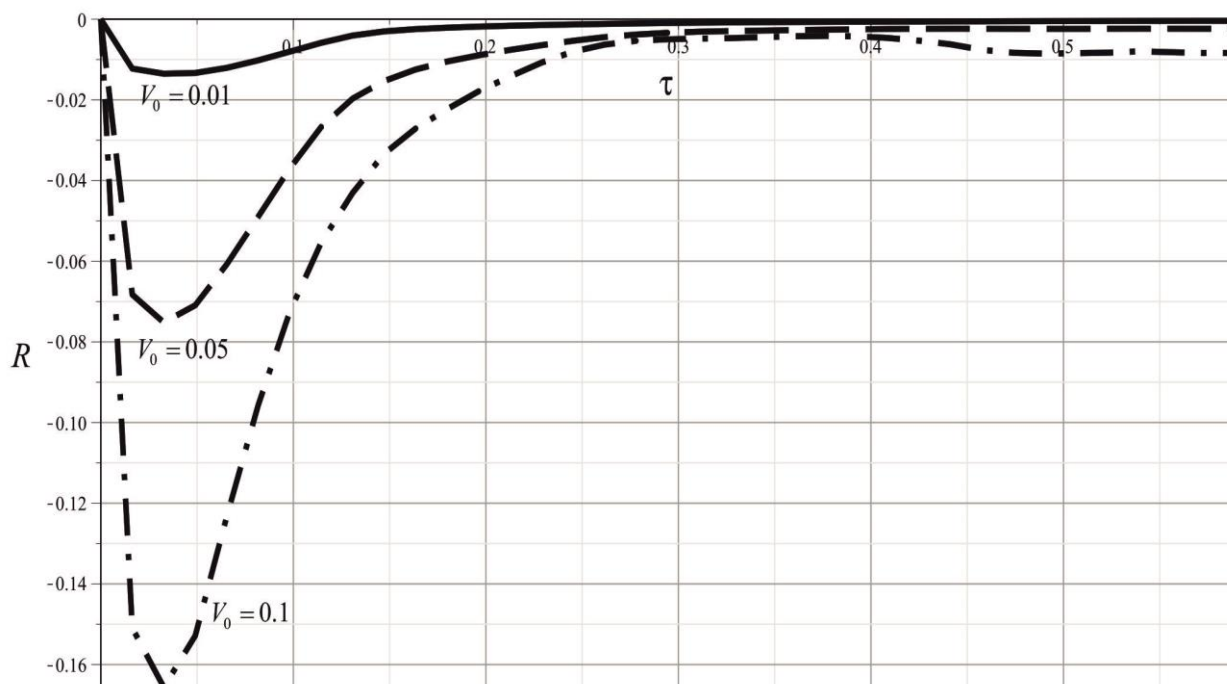


Рис. 3.3.3. Зависимости результирующей контактной силы от времени.

На рис. 3.3.4 изображены распределения контактного давления по координате α (с учётом предположения о том, что $y \approx \alpha$) в момент времени $\tau = 0.3$ при начальной скорости ударника $V_0 = 0.01$. Сплошная кривая соответствует координате $z = 0$, штриховая – $z = 0.15$, штрихпунктирная – $z = 0.3$.

Аналогичные графики представлены на рис. 3.3.5 для момента времени $\tau = 0.6$.

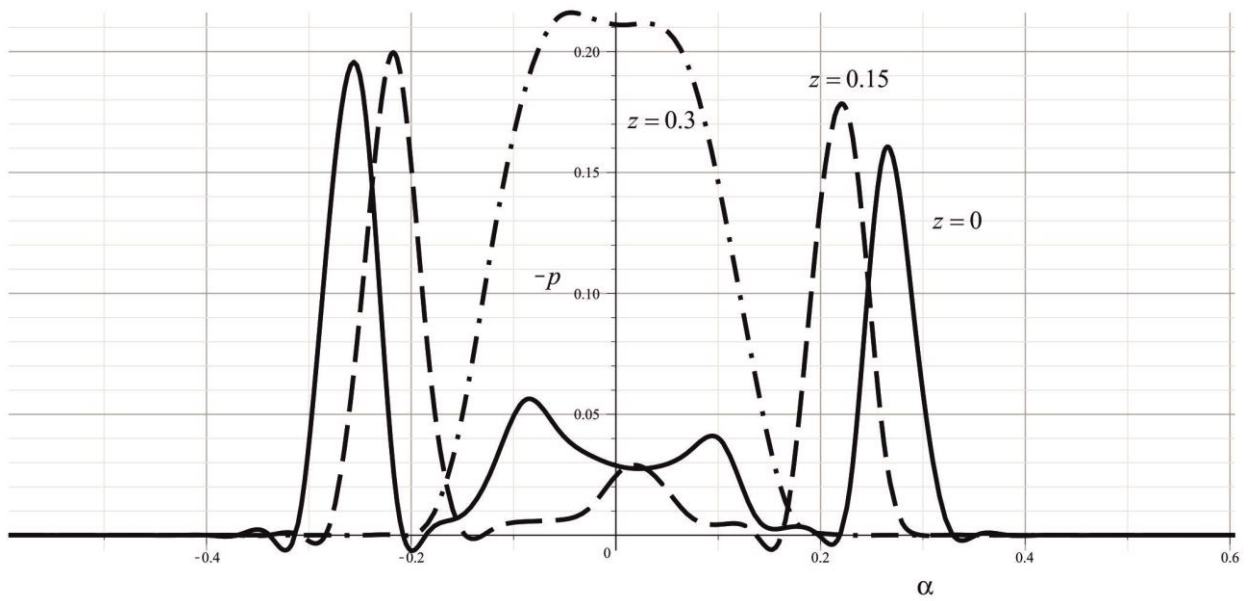


Рис. 3.3.4. Распределение контактного давления по угловой координате,
 $\tau = 0.3, V_0 = 0.01$.

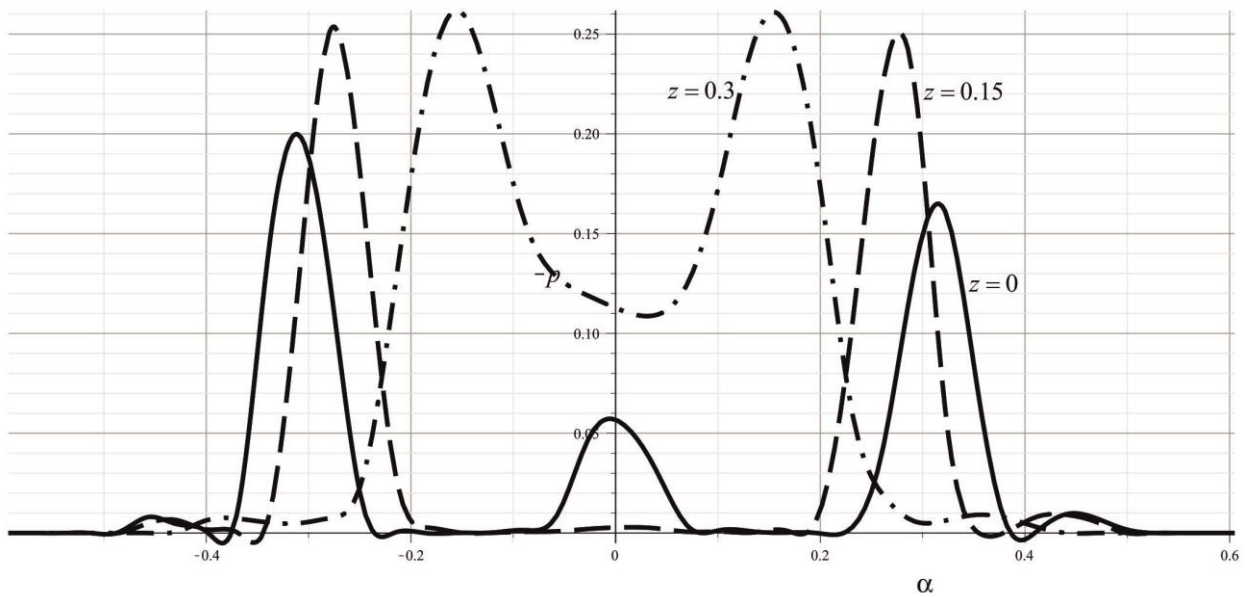


Рис. 3.3.5. Распределение контактного давления по угловой координате,
 $\tau = 0.6, V_0 = 0.01$.

Рис. 3.3.6 и 3.3.7 иллюстрируют распределения контактного давления по координате α в моменты времени $\tau=0.3$ и $\tau=0.6$ при начальной скорости ударника $V_0=0.05$. Сплошная кривая соответствует координате $z=0$, штриховая – $z=0.15$, штрихпунктирная – $z=0.3$.

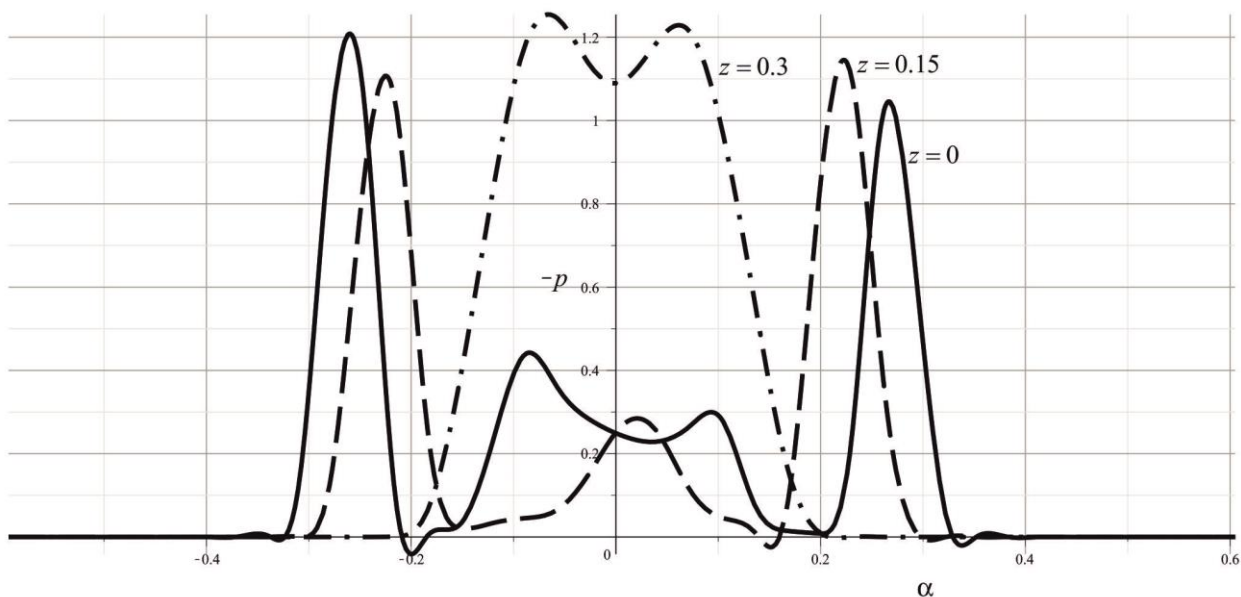


Рис. 3.3.6. Распределение контактного давления по угловой координате, $\tau=0.3$, $V_0=0.05$.

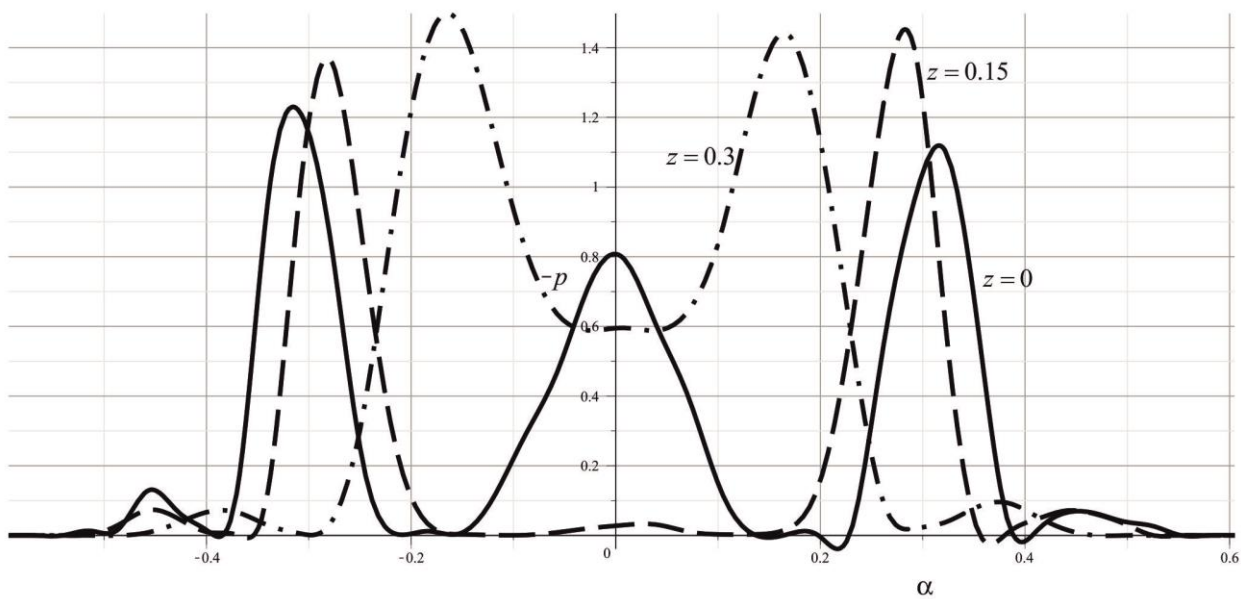


Рис. 3.3.7. Распределение контактного давления по угловой координате, $\tau=0.6$, $V_0=0.05$.

Распределения контактного давления по координате α в моменты времени $\tau=0.3$ и $\tau=0.6$ при начальной скорости ударника $V_0=0.1$ представлено на рис. 3.3.8 и 3.3.9. Здесь, как и ранее, сплошная кривая соответствует координате $z=0$, штриховая – $z=0.15$, штрихпунктирная – $z=0.3$.

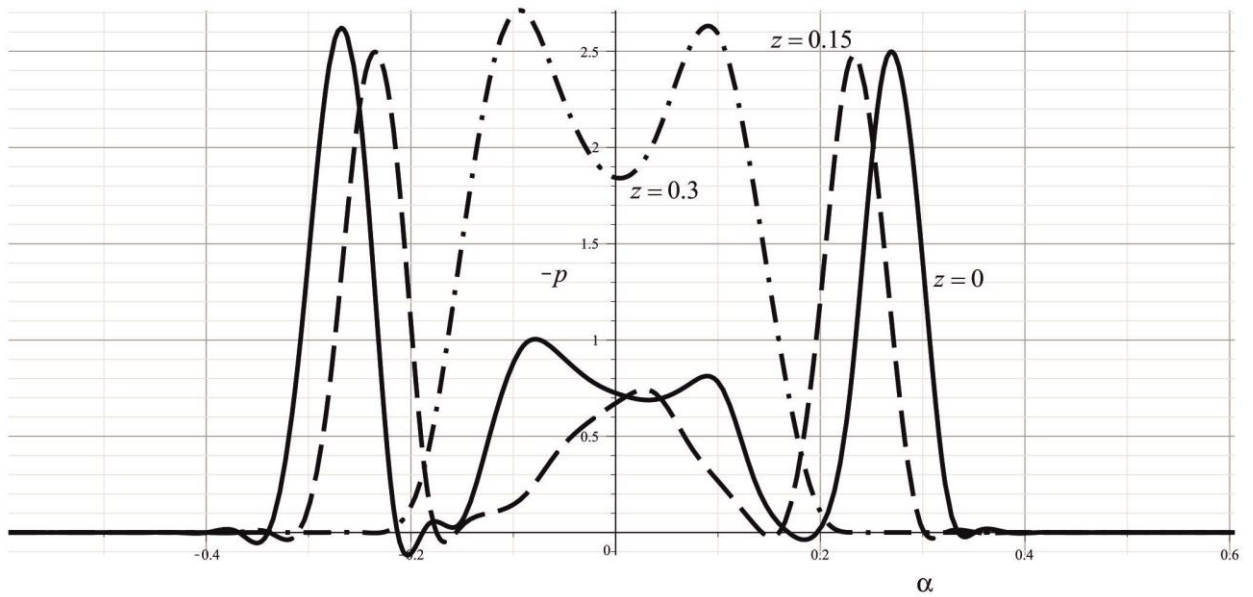


Рис. 3.3.8. Распределение контактного давления по угловой координате, $\tau=0.3$, $V_0=0.1$.

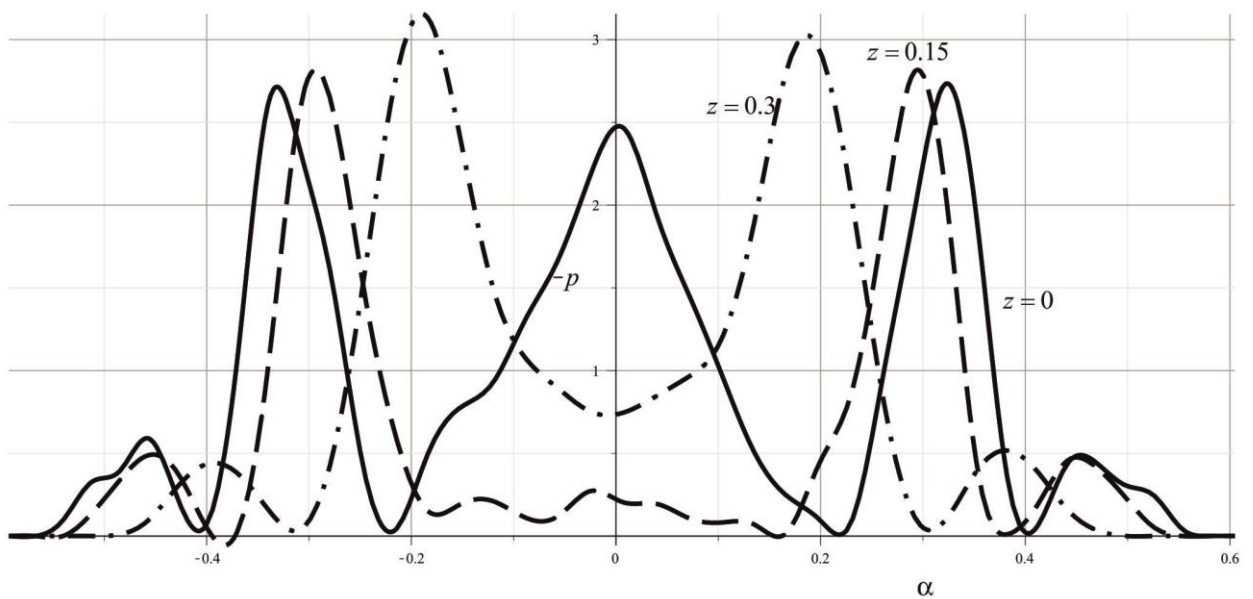


Рис. 3.3.9. Распределение контактного давления по угловой координате, $\tau=0.6$, $V_0=0.1$.

Распределения контактных напряжений по координате z в моменты времени $\tau=0.3$ и $\tau=0.6$ при различных значениях начальной скорости движения ударника иллюстрируют рис. 3.3.10-3.3.15. Здесь сплошная кривая соответствует координате $\alpha=0$, штриховая – $\alpha=0.15$, штрихпунктирная – $\alpha=0.3$.

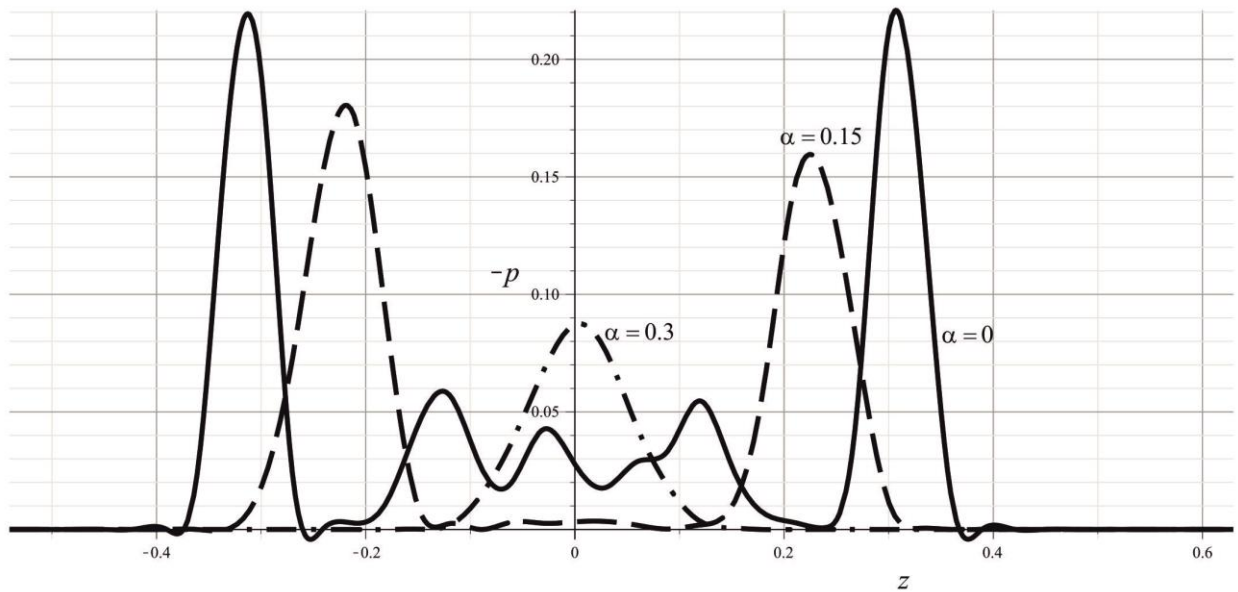


Рис. 3.3.10. Распределение контактного давления по координате z ,
 $\tau=0.3, V_0=0.01$.

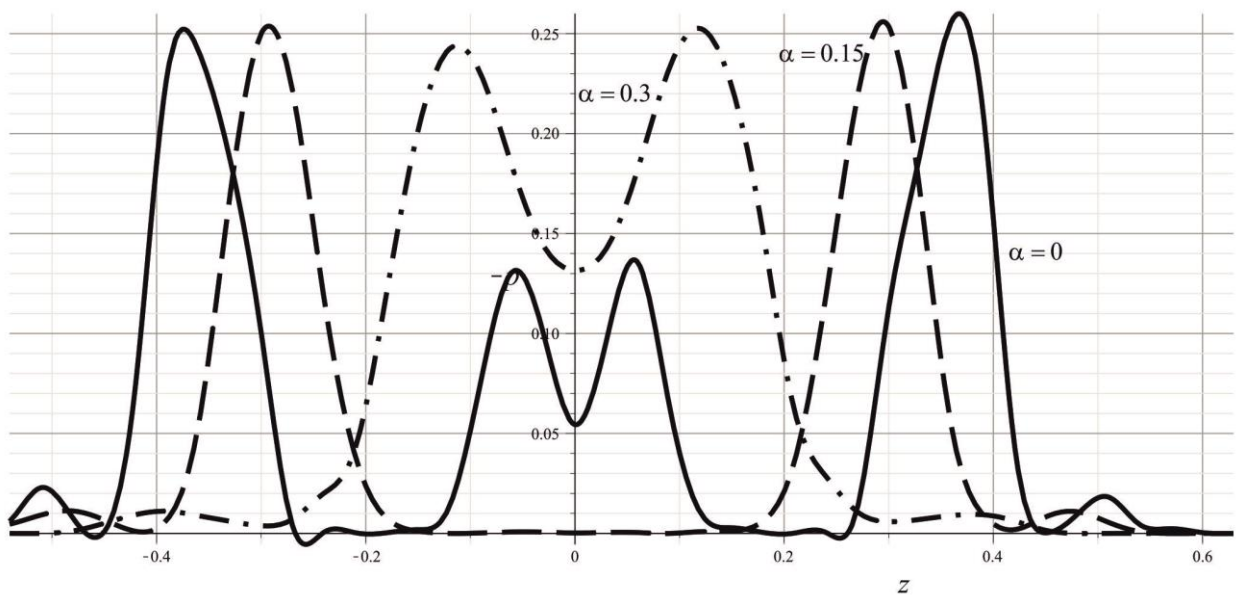


Рис. 3.3.11. Распределение контактного давления по координате z ,
 $\tau=0.6, V_0=0.01$.

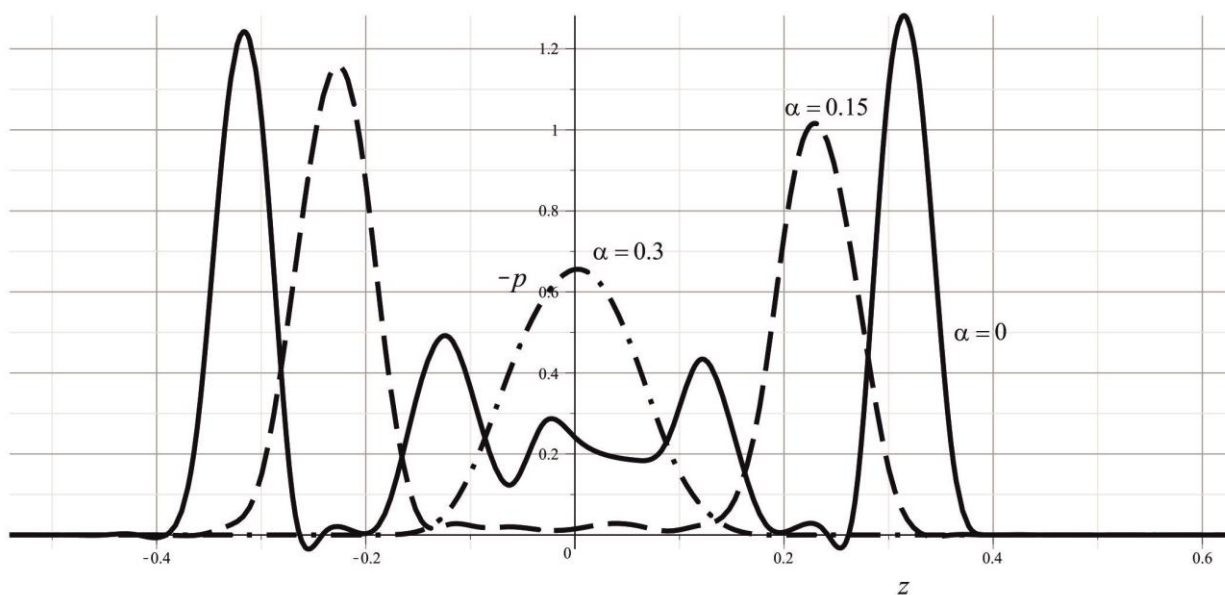


Рис. 3.3.12. Распределение контактного давления по координате z ,
 $\tau = 0.3, V_0 = 0.05$.

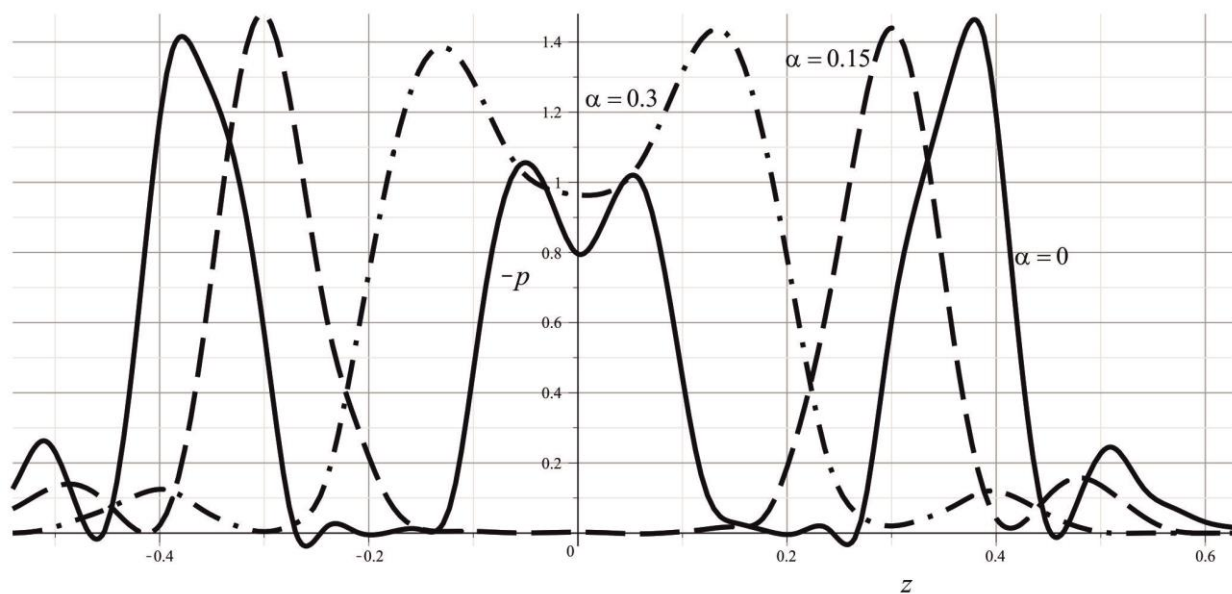


Рис. 3.3.13. Распределение контактного давления по координате z ,
 $\tau = 0.6, V_0 = 0.05$.

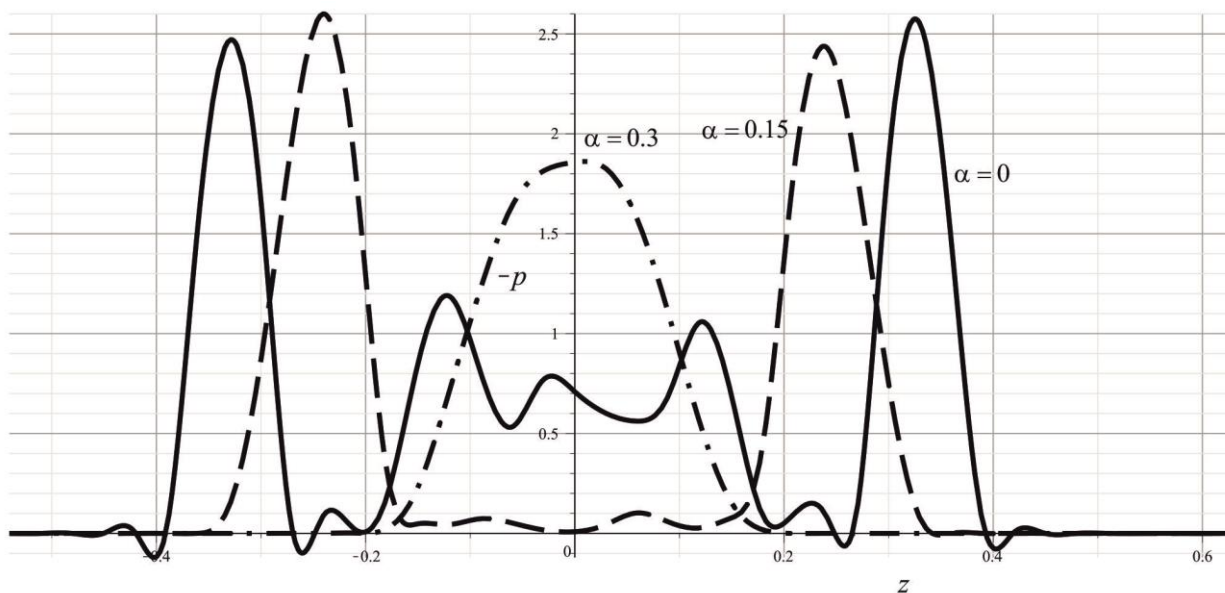


Рис. 3.3.14. Распределение контактного давления по координате z ,
 $\tau = 0.3, V_0 = 0.1$.

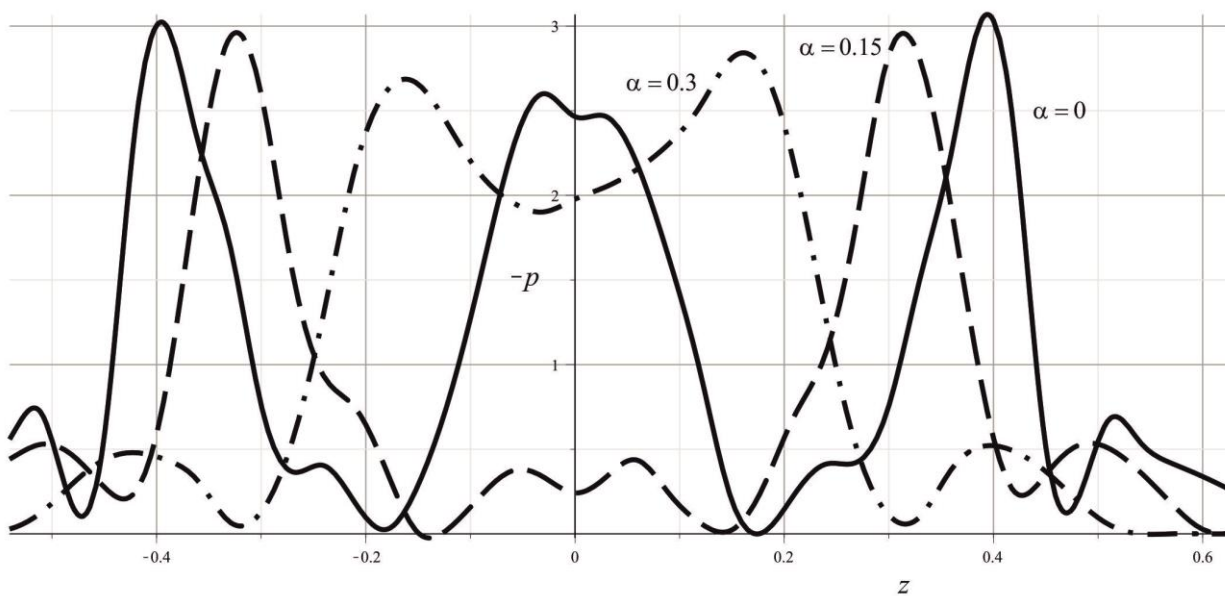


Рис. 3.3.15. Распределение контактного давления по координате z ,
 $\tau = 0.6, V_0 = 0.1$.

Распределение нормальных перемещений по угловой координате в момент времени $\tau = 0.6$ при $V_0 = 0.01$ представлено на рис. 3.3.16. Сплошная кривая соответствует координате $z = 0$, штриховая – $z = 0.15$, штрихпунктирная – $z = 0.3$. Аналогичные результаты приведены на рис. 3.3.17, 3.3.18 при значениях начальной скорости ударника $V_0 = 0.05$ и $V_0 = 0.1$ соответственно.

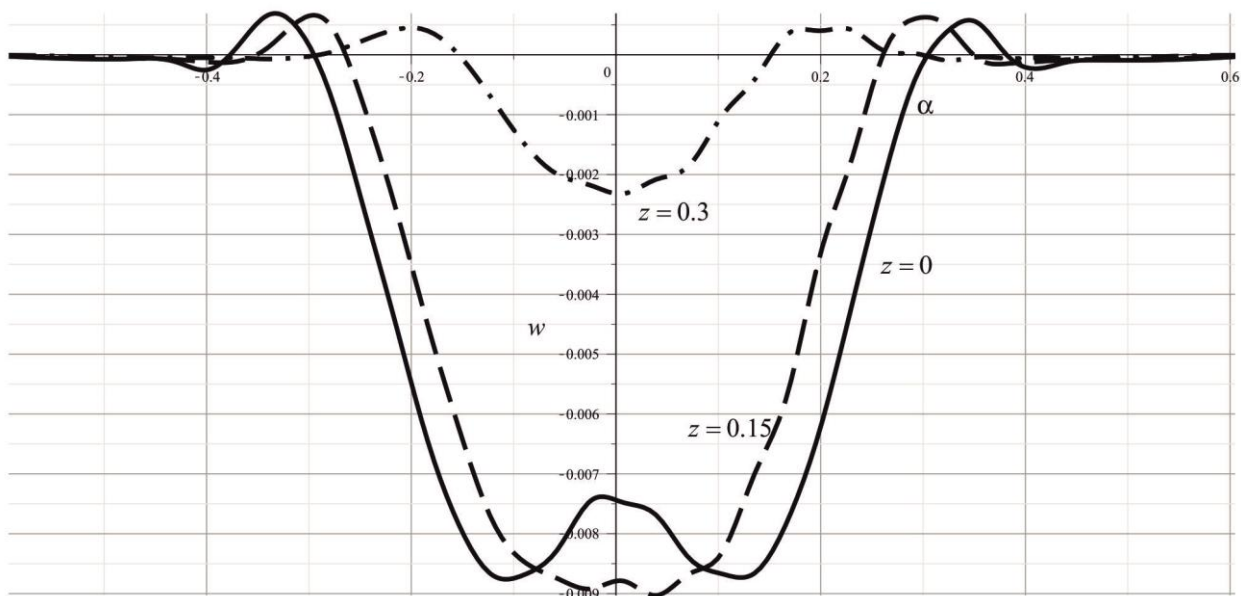


Рис. 3.3.16. Распределение нормальных перемещений по координате α , $\tau = 0.6$, $V_0 = 0.01$.

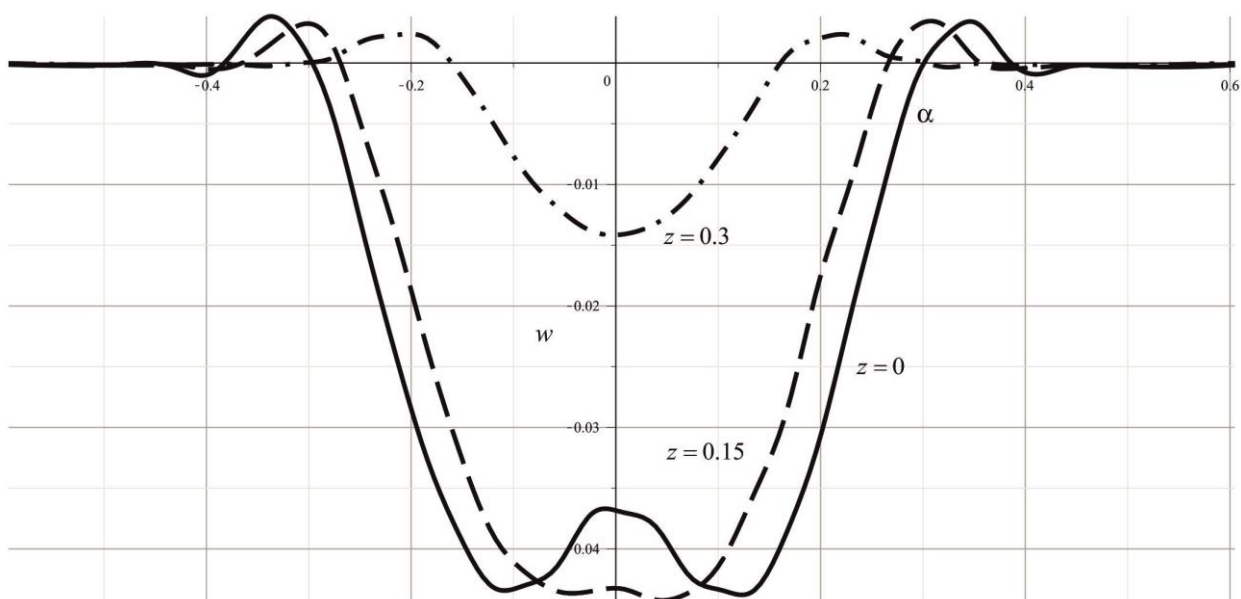


Рис. 3.3.17. Распределение нормальных перемещений по координате α , $\tau = 0.6$, $V_0 = 0.05$.

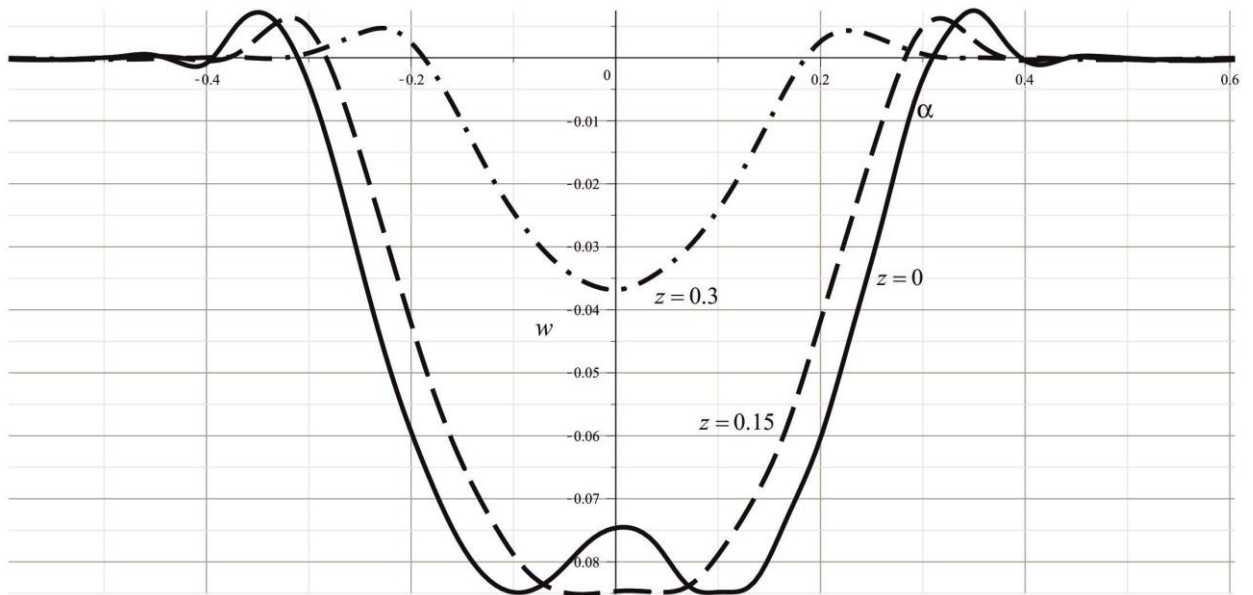


Рис. 3.3.18. Распределение нормальных перемещений по координате α ,
 $\tau = 0.6, V_0 = 0.1$.

Распределение нормальных перемещений по координате z в момент времени $\tau = 0.6$ для различных начальных скоростей движения ударника проиллюстрировано на рис. 3.3.19-3.3.21. Здесь сплошная кривая соответствует координате $\alpha = 0$, штриховая – $\alpha = 0.15$, штрихпунктирная – $\alpha = 0.3$.

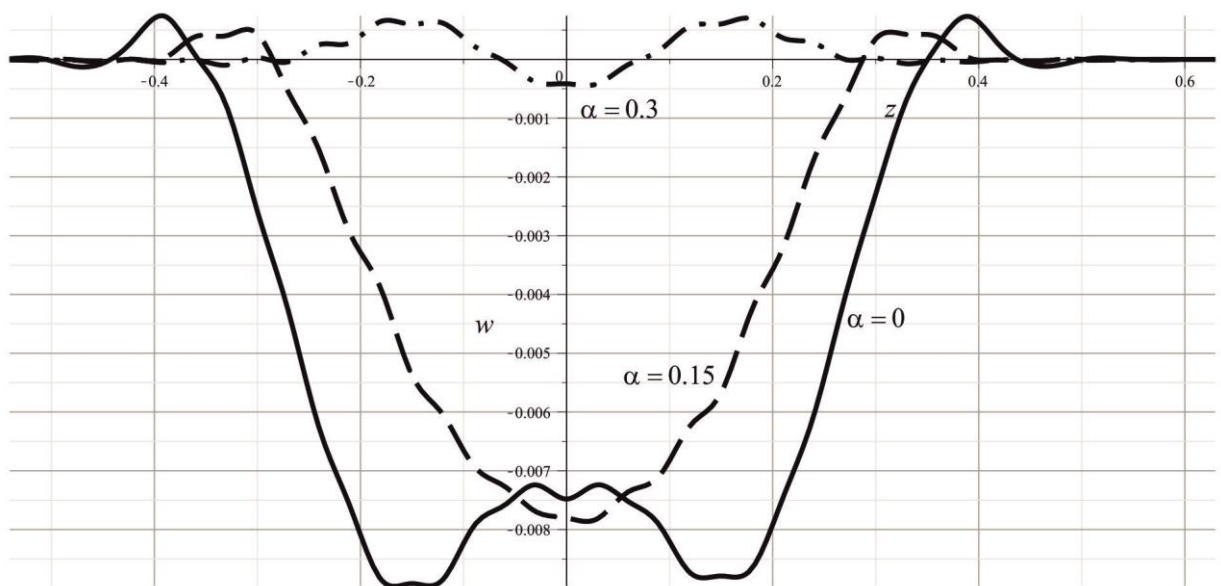


Рис. 3.3.19. Распределение нормальных перемещений по координате z ,
 $\tau = 0.6, V_0 = 0.01$.

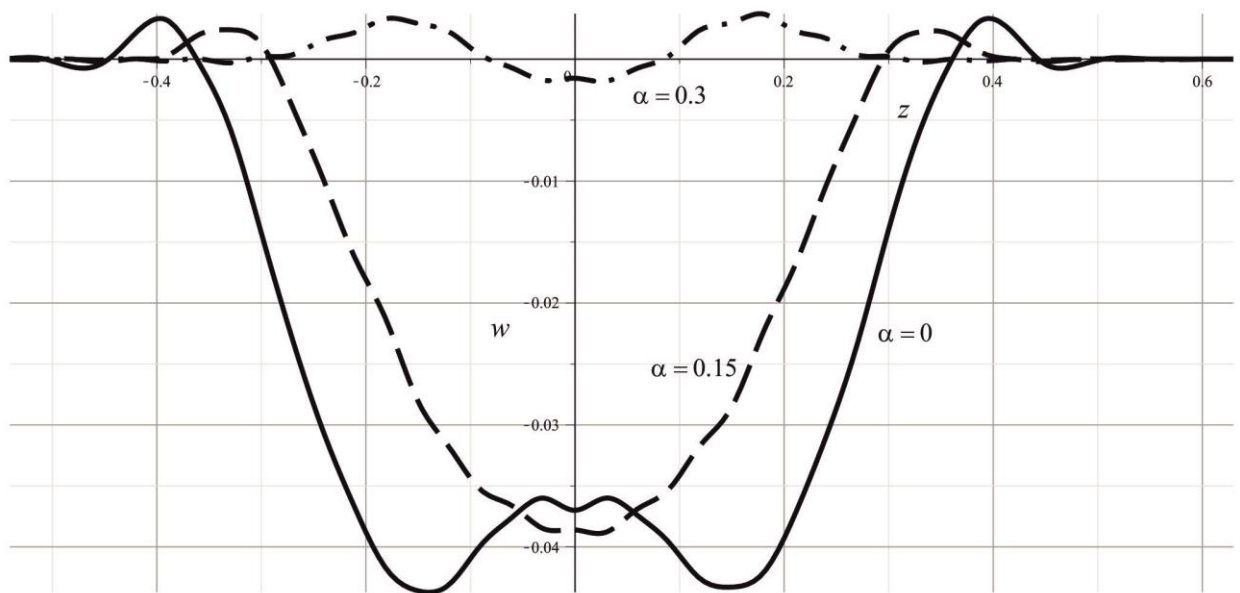


Рис. 3.3.20. Распределение нормальных перемещений по координате z ,
 $\tau = 0.6, V_0 = 0.05$.

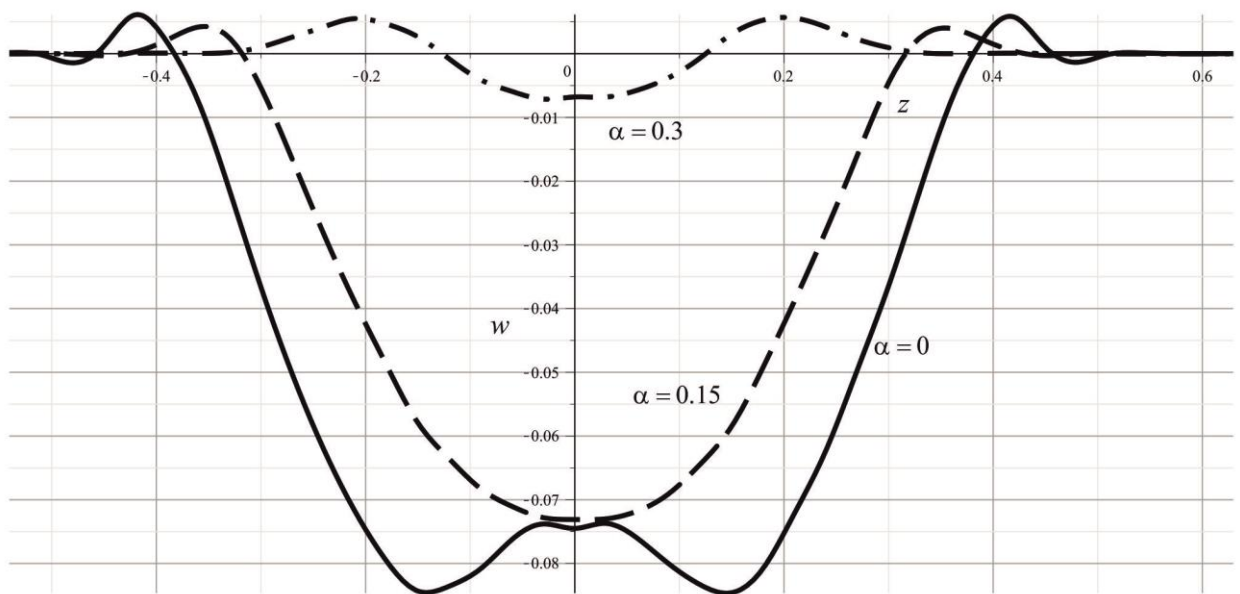


Рис. 3.3.21. Распределение нормальных перемещений по координате z ,
 $\tau = 0.6, V_0 = 0.1$.

Пространственные распределения нормальных перемещений оболочки в момент времени $\tau=0.6$ представлены на рис. 3.3.22-3.3.24. Рис. 3.3.22 соответствует значению начальной скорости $V_0=0.01$, рис. 3.3.23 – $V_0=0.05$, рис. 3.3.24 – $V_0=0.1$. Для большей наглядности значения нормальных перемещений на этих графиках увеличены в 10 раз.

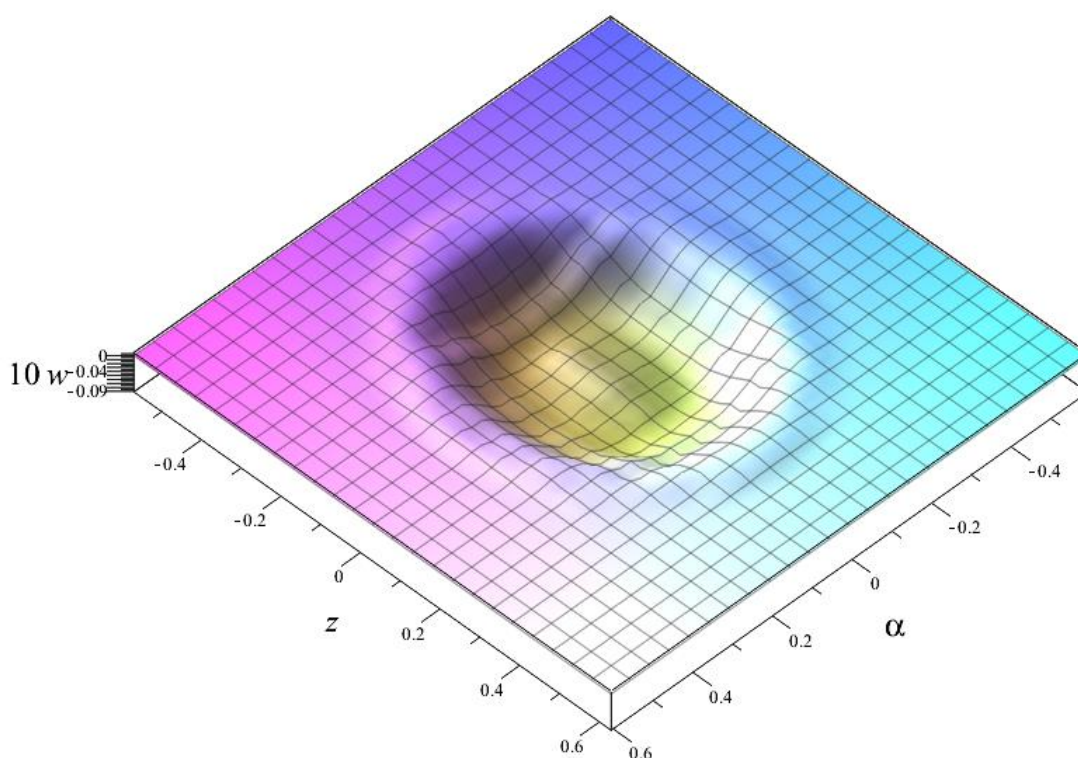


Рис. 3.3.22. Пространственное распределение нормальных перемещений,
 $\tau=0.6, V_0=0.01$.

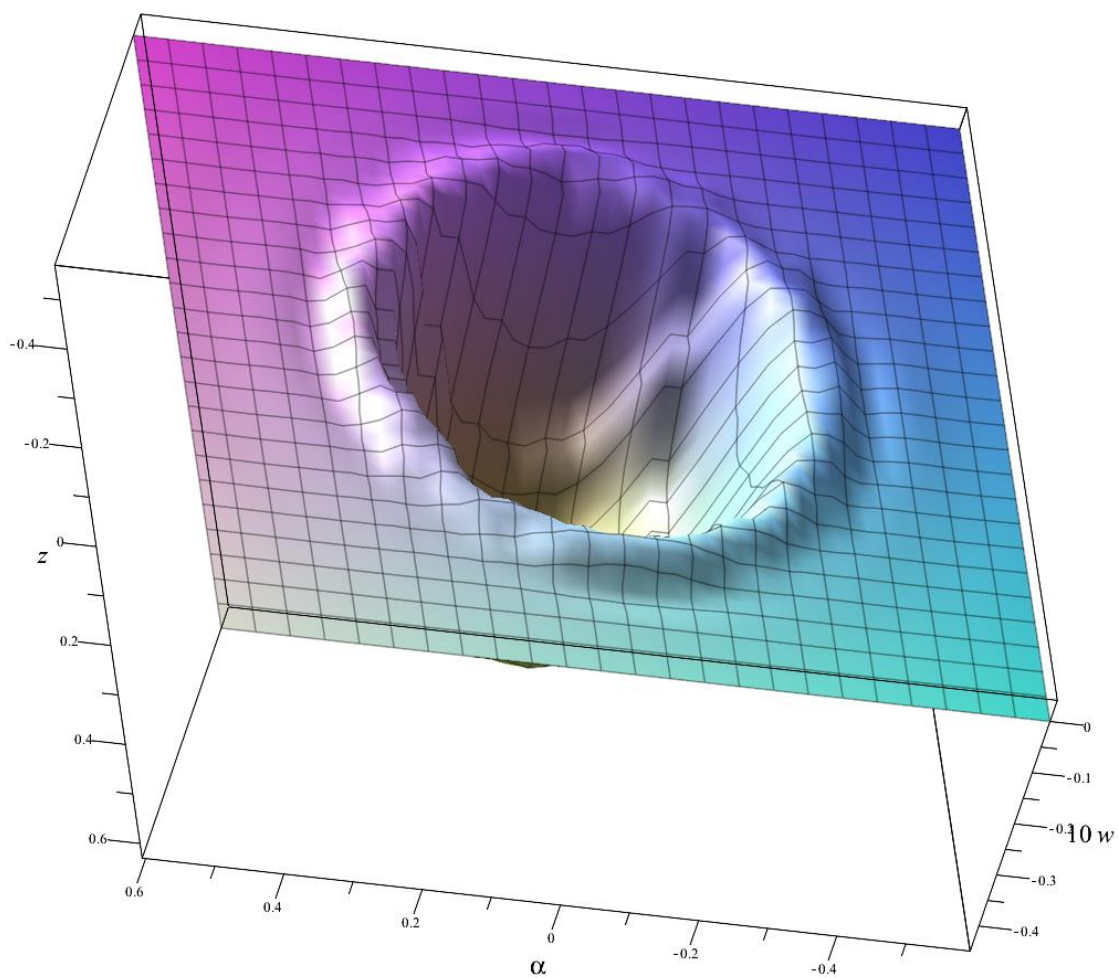


Рис. 3.3.23. Пространственное распределение нормальных перемещений,
 $\tau = 0.6, V_0 = 0.05$.

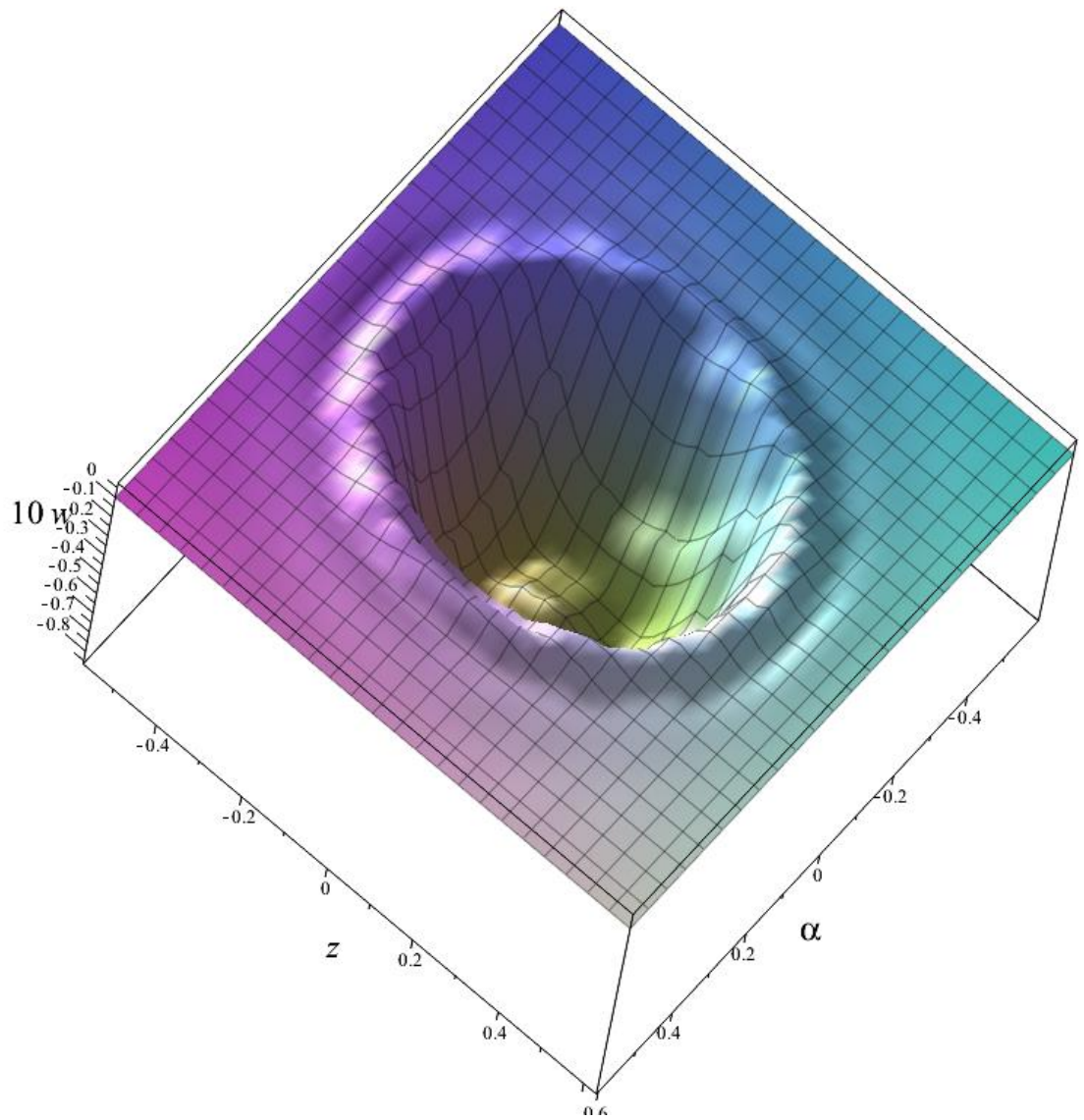


Рис. 3.3.24. Пространственное распределение нормальных перемещений,
 $\tau = 0.6, V_0 = 0.1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы.

1. Дана постановка и разрешающая система уравнений новой пространственной нестационарной контактной задачи с подвижными границами о взаимодействии абсолютно твёрдого ударника с тонкой круговой цилиндрической оболочкой типа Тимошенко.

2. Построена и исследована нестационарная пространственная функция влияния для тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко.

3. Предложен и реализован аналитический метод обращения совместных интегральных преобразований Фурье-Лапласа применительно к решению пространственных нестационарных контактных задач.

4. Разработаны и реализованы алгоритмы решения пространственной нестационарной контактной задачи для абсолютно твёрдых ударников и круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко.

5. Получено решение пространственной нестационарной контактной задачи с подвижными границами для круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко и абсолютно твёрдого тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзикович С.М., Васильев А.С., Волков С.С. Осесимметричная контактная задача о вдавливании конического штампа в полупространство с неоднородным по глубине покрытием – Прикладная математика и механика, т. 79, № 5, с. 710–716, 2015.
2. Арутюнян А.М., Федотенков Г.В., Тарлаковский Д.В. Плоская нестационарная задача о распространении упругих волн в упругом полупространстве с полостью – Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела, с. 50–53, 2017.
3. Баженов В. Г., Кочетков А. В., Крылов С. В. Анализ нелинейных эффектов при высокоскоростном проникновении тел в сжимаемую жидкость // Прикл. мех. 1986. Т. 22. № 2. С. 125–127.
4. Баженов В. Г., Кочетков А. В., Крылов С. В. Исследование нелинейных эффектов при взаимодействии оболочечных конструкций с жидкостью и газом // Взаимодействие тел с границами раздела сплошной среды. Чебоксары, 1985. С. 11–15.
5. Баженов В. Г., Кочетков А. В., Крылов С. В., Угодчиков А. Г. Высокоскоростной удар упругопластических тонкостенных конструкций о поверхность сжимаемой жидкости // Изв. АН. МТТ. 1984. № 5. С. 161–169.
6. Базаренко Н.А. Контактная задача для полого и сплошного цилиндров со свободными от напряжений торцами – Прикладная математика и механика, т. 72, № 2, с. 328–341, 2008.
7. Белов А.А., Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю. Развитие метода граничных элементов для решения трехмерных контактных нестационарных динамических задач теории упругости – Проблемы прочности и пластичности, № 69, с. 125–136, 2007.

8. Белянкova Т.И., Калинин В.В. Динамическая контактная задача для заполненной жидкостью преднапряженной цилиндрической трубы – Прикладная математика и механика, т. 73, № 2, с. 289–302, 2009.
9. Богданов В. Р., Попов С. Н. Вертикальный удар сферической оболочки об упругое полупространство // Тр. 17 научн. конф. мол. ученых ин-та мех. АН Украины, Киев, 19–22 мая, 1992 г. Киев, 1992.
10. Богомолов В. Г. Наклонный вход цилиндрической оболочки в жидкость // Взаимодействие пластин и оболочек с жидкостью и газом. М., 1984. С. 83–91.
11. Богомолов В. Г. Об одном случае несимметричного погружения цилиндрической оболочки в несжимаемую жидкость // Прикл. мех. 1987. Т. 23. № 4. С. 99–103.
12. Буланов Э.А. Осесимметричная контактная задача – Трение и износ, т. 27, № 6, с. 587–591, 2006.
13. Вакалов Г. Н., Горшков А. Г. Проникание двухслойных оболочек вращения в несжимаемую жидкость // Взаимодействие пластин и оболочек с жидкостью и газом. М., 1984. С. 73–82.
14. Вестяк А.В., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарная контактная задача об ударе деформируемой цилиндрической оболочкой по упругому полупространству. // Тезисы докл. VI межд. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплошн. сред» ». М.: изд-во ГАФОС, 2000. С. 10–11.
15. Вестяк А.В., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарное контактное взаимодействие цилиндрической оболочки и упругой полуплоскости // Тезисы докл. V межд. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплошн. сред». М.: изд-во ГАФОС, 1999. С. 10.

16. Вестяк В.А., Федотенков Г.В. Алгоритм численного обращения преобразования Лапласа в классе обобщенных функций, образующих алгебру со сверткой – Прикладная математика и математическая физика т. 1, № 1, с. 67–76, 2015.
17. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупруго\–пластических сред с повреждениями – Москва, Физ–мат лит, 2008 – 424 с.
18. Гавриленко В. В. Определение напряженно–деформированного состояния проникающих в сжимаемую жидкость тонких упругих сферических оболочек // Прикл. мех. 1988. Т. 24. № 9. С. 30–37.
19. Гавриленко В. В. Удар тонкой упругой цилиндрической оболочки о поверхность жидкости // Гидромеханика. 1990. № 62. С. 34–39.
20. Гавриленко В. В., Гавриленко В. Н., Кубенко В. Д. Численная реализация решения линейной задачи проникания тонких упругих оболочек в сжимаемую жидкость // Эффект. числ. методы реш. краев. задач мех. тверд. деформ. тела: Тез. докл. респ. научн.–техн. конф., 27–29 сент., 1989 г. Ч. 1. Харьков, 1989. С. 62–64.
21. Галимов К.З., Паймушин В.Н., Терегулов И.Г. Основания нелинейной теории оболочек – Казань: Фэн, 1996.
22. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек – Главная редакция физико–математической литературы изд–ва «Наука», 1976 г. – 512 с.
23. Горшков А. Г., Богомолов В. Г. Взаимодействие двухслойных цилиндрических оболочек с жидкостью // Задачи мех. тверд. деформир. тела. М., 1985. С. 55–63.
24. Горшков А. Г., Дробышевский Н. И. Наклонный вход цилиндрических оболочек в жидкость // Изв. АН. МТТ. 1987. № 2. С. 164–170.

25. Горшков А. Г., Дробышевский Н. И. Численное исследование процесса входа оболочек вращения в жидкость // Прикл. мех. 1988. Т. 24. № 12. С. 39–44.
26. Горшков А. Г., Мартиросов М. И. Динамика и прочность элементов тонкостенных конструкций при нестационарном взаимодействии с жидкостью // Современ. пробл. строит. мех. и прочности ЛА: Тр. 11 Всес. конф., Куйбышев, 1986 / Тез. докл. Куйбышев, 1986. С. 37.
27. Горшков А. Г., Медведский А. Л. Тарлаковский Д. В., Федотенков Г.В. Нестационарные контактные задачи с подвижными границами для деформируемого тела и полупространства // Известия высших научных заведений Северо–Кавказский регион, 2000. №3 С. 41–46.
28. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В. Динамика абсолютно твердой сферической оболочки с наполнителем при ударе по упругому полупространству // II Всес. конф. по мех. неоднор. структур, Львов, 1987: Тез. докл. Т. 1. Львов, 1987. С. 74–75.
29. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В. Динамическая контактная задача для круговой цилиндрической оболочки и упругого полупространства // Прочность пластин и оболочек при комбинированных воздействиях. М.: МАИ, 1987. С. 16–25.
30. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Наука. Физматлит, 1995. 352. с.
31. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. М.: Наука, 1990. 264 с.
32. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В. Удар цилиндрической оболочкой по упругому полупространству // Тр. XVI

- Гагаринских научн. чтений по космонавтике и авиации, Москва, 1986. М., 1987. С. 165.
33. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Вертикальный удар цилиндрической оболочкой по упругой полуплоскости // Акт. пробл. разв. трансп. систем: Тез. докл. междунар. научн.–тех. конф. Гомель: БелГУТ, 1998. С. 194–195.
 34. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Плоская задача о вертикальном ударе цилиндрической оболочки по упругому полупространству // Изв. РАН. МТТ № 5, 2000. С. 151–158.
 35. Горшков А.Г. Динамические контактные задачи – отчет о НИР № 96–01–01083 (Российский фонд фундаментальных исследований), 1998.
 36. Горшков А.Г., Дергачев А.А., Егорова О.В., Зайцев В.Н., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи – отчет о НИР № 96–01–01083 (Российский фонд фундаментальных исследований), 1996.
 37. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах – Москва, Физматлит, 472 с., 2004.
 38. Григорян А.Ж. Контактная задача для упругой составной ортотропной полуплоскости с межфазной трещиной – Актуальные проблемы механики сплошной среды материалы научных трудов V Международной конференции, с. 67–68, 2017.
 39. Ершов Н. Ф., Шахверди Г. Г. Метод конечных элементов в задачах гидродинамики и гидроупругости. Л.: Судостроение, 1984. 240 с.
 40. Зеленцов В.Б. Нестационарная динамическая контактная задача теории упругости об ударе параболического штампа в упругую полуплоскость – Известия РАН, МТТ, № 1, с. 28–46, 2006.

41. Зеленцов В.Б. О нестационарных динамических контактных задачах теории упругости с изменяющейся шириной зоны контакта – Прикладная математика и механика, т. 68, № 1, с. 119–134, 2004.
42. Золотов Н.Б., Пожарская Е.Д., Пожарский Д.А. К контактным задачам для цилиндра – Известия высших учебных заведений. Северо–Кавказский регион. Серия: Естественные науки, № 2 (194), с. 12–14, 2017.
43. Коровайцева Е.А., Тарлаковский Д.В. Симметричная контактная задача для вязкоупругой полуплоскости и абсолютно твердого ударника на сверхзвуковом этапе взаимодействия – Проблемы прочности и пластичности, т. 80, № 3, с. 326–335, 2018.
44. Костырева Л.А. Плоская контактная задача и задача о трещине для преднапряженного упругого слоя – Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, № 3, с. 56–63, 2009.
45. Кочетков А. В., Крылов С. В. О влиянии нелинейных эффектов в задаче удара сферической оболочки о поверхность жидкости // Колебания упруг. конструкций с жидкостью: Сб. науч. докл. 5 Всес. симп., Новосибирск, 1992. М., 1984. С. 150–155.
46. Кочеулов Ю. В., Шуршалов А. И. Удар цилиндрических оболочек о жидкость // Расчет на прочн. и оптим. проектир. элем. авиац. констр. М., 1988. С. 46–51.
47. Кравчук А.С. О решении трехмерных контактных задач с трением – Прикладная математика и механика, т. 72, № 3, с. 485–496, 2008.
48. Кравчук А.С., Нейтгаанмяки П. Решение контактных задач с использованием метода граничных элементов – Прикладная математика и механика, т.71, № 2, с. 329–339, 2007.

49. Кубенко В. Д. Проникание упругих оболочек в сжимаемую жидкость. Киев: Наук. думка, 1981. 160 с.
50. Кубенко В. Д., Богданов В. Р. Плоская задача удара оболочки об упругое полупространство // Прикл. мех. 1995. Т. 31. № 6. С. 78–85.
51. Кубенко В. Д., Гавриленко В. В. Осесимметричная задача проникания тонких упругих сферических оболочек в сжимаемую жидкость // Прикл. мех. 1988. Т. 24. № 4. С. 63–74.
52. Кузнецова Е.Л., Митин А.Ю., Федотенков Г.В. Пространственное нестационарное движение круговой оболочки типа Тимошенко // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. 17-26 апреля 2017, Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, серия Секция механики, место издания Изд-во Московского университета Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, тезисы, с. 126;
53. Кузнецова Е. Л., Митин А.Ю., Федотенков Г. В. Нестационарные пространственные функции влияния для круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко // Материалы XXIII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова – М., 2017., Т. 2. – С. 60-61;
54. Куликов Г.М., Плотникова С.В. Контактная задача для геометрически нелинейной оболочки типа Тимошенко – Прикладная математика и механика, т. 67, № 6, с. 940, 2003.
55. Лобода А. И. Проникание в жидкость оболочек вращения // Динам. упруг. и тверд. тел, взаимодейств. с жидкостью. Томск, 1984. С. 83–87.
56. Ломунов А.К., Пряжевский Р.Д., Федотенков Г.В. Нестационарная контактная задача для абсолютно твердого гладкого штампа и упругой полуплоскости на дорэлеевском

- интервале движения границ области взаимодействия – Проблемы прочности и пластичности, т. 79, № 1, с. 17–27, 2017.
57. Максимова Е. А., Петухова В. И., Шахверди Г. Г. Численное моделирование погружения тел и конструкций в жидкость // X Дальневосточ. научно–техн. конф., Владивосток, 1987: Тез. докл. Владивосток, 1987. С. 89–90.
 58. Мартиросов М. И. Динамика деформируемых систем при несимметричном входе в жидкость // Прочн. пластин и оболочек при комбинир. воздействиях. М., 1987. С. 41–49.
 59. Мартиросов М. И. Динамическое поведение оболочечных конструкций при нестационарном взаимодействии с границей раздела двух сред // II Всес. конф. по механике неоднород. структур, Львов, 1987: Тез. докл. Т. 1. Львов, 1987. С. 168.
 60. Мартиросов М. И. Численное исследование динамического поведения сферической оболочки, связанной с твердым телом, при наклонном погружении в жидкость // Тр. XVI Гагаринских научн. чтений по космон. и авиации, Москва, 1986. М., 1987. С. 175.
 61. Мартиросов М. И., Шуршалов А. И. Поведение сферических оболочек при ударе о жидкость // Эксплуатац. и конструктивная прочн. судовых констр: VIII Бубновские чтения, Горький, 1988: Тез. докл. Горький, 1988. С. 71.
 62. Мартиросов М. И., Шуршалов А. И. Погружение в жидкость цилиндрических оболочек из композиционных материалов // Деформир. и разруш. элем. констр. летат. аппаратов. М., 1989. С. 81–88.
 63. Мартиросов М. И., Шуршалов А. И. Ударное взаимодействие трехслойной сферической оболочки с жидкостью // Вопр. прочн. тонкостен. констр. М., 1989. С. 16–20. [57]

64. Медведский А.Л., Тарлаковский Д.В. Нестационарный контакт недеформируемого ударника с несовершенствами и упругой полуплоскости на сверхзвуковом участке внедрения – Вестник Московского авиационного института, т. 18, № 6, с. 125–132, 2011.
65. Миронов В.В., Михайловский Е.И. Об оценке влияния учета поперечных деформаций в одной контактной задаче со свободной границей – Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, № 5, с. 52–67, 2008.
66. Митин А.Ю. Федотенков Г.В. Метод и алгоритм решения пространственных нестационарных контактных задач для абсолютно твердых ударников и тонкой упругой цилиндрической оболочки // Материалы XXV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова – М., 2019, с. 113.
67. Митин А.Ю. Федотенков Г.В., Тарлаковский Д.В. Нестационарное пространственное движение цилиндрической оболочки типа Тимошенко под воздействием внешнего давления // Современные проблемы механики сплошной среды: тезисы докладов XIX Международной конференции (Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2018 г.) / отв. ред. О.А. Ватульян и др.; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону, 2018 – С. – 123.
68. Митин А.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарный контакт цилиндрической оболочки и абсолютно твердого эллиптического параболоида // Труды МАИ № 107, 2019.
69. Неустроева Н.В. Контактная задача для упругих тел разных размерностей – Вестник Новосибирского государственного

- университета. Серия: Математика, механика, информатика, т. 8, № 4, с. 60–75, 2008.
70. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.
71. Петров В.А. Развитие методики решения задачи о контактном взаимодействии подземного трубопровода с упругопластичным грунтом при сейсмической нагрузке – Известия Всероссийского научно–исследовательского института гидротехники им. Б.Е. Веденеева, т. 244, с. 184–194, 2005.
72. Пожарский Д.А. Пространственная контактная задача с трением для упругого клина – Прикладная математика и механика, т. 72, № 5, с. 852–860, 2008.
73. Пожарский Д.А., Пожарская Е.Д. К контактными задачам для составных и анизотропных тел – Состояние и перспективы развития сельскохозяйственного машиностроения, с. 42–43, 2018.
74. Попов С. Н., Богданов В. Р. Вертикальный удар цилиндрической оболочки об упругое полупространство // Тр. 16 научн. конф. мол. ученых ин–та мех. АН Украины, Киев, 21–24 мая, 1991 г. Ч. 2. Киев, 1991. С. 332–337 (Рук. деп. в ВИНТИ 12.11.91, 4260–В91).
75. Розин Л.А. Задачи теории упругости и численные методы их решения – отчет о НИР № 94–01–01472 (Российский фонд фундаментальных исследований), 1994.
76. Сагомоян А. Я. Проникание (проникание твердых тел в сжимаемые сплошные среды). М.: МГУ, 1974. 299 с.
77. Сагомоян А. Я. Удар и проникание тел в жидкость.– М.: МГУ, 1986. 172 с.
78. Садовский В.М., Блинов А.Н., Богульский И.О., Бычек О.В. Разработка вычислительных методов для решения

- упругопластических контактных задач – отчет о НИР № 97–01–00434 (Российский фонд фундаментальных исследований), 1997.
79. Сеницкий Ю.Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований – Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, 1985 – 176 с.
80. Сеницкий Ю.Э., Сеницкий А.Ю. К проблеме разложения по собственным вектор–функциям в нестационарных начально–краевых задачах динамики оболочек вращения – Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: физико–математические науки, № 30, с. 83–91, 2004.
81. Слепян Л.И., Яковлев Ю.С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики – Ленинград, Судостроение, 344 с., 1980.
82. Таньков Г.В., Селиванов В.Ф., Трусков В.А. Нестационарная задача теории упругости в цилиндрических координатах – Труды международного симпозиума Надежность и качество, т. 1, с. 349–351, 2009.
83. Тарлаковский Д. В. Вертикальный удар абсолютно твердой сферы с заполнителем по упругому полупространству // Расчет на прочн. и оптим. проектир. элементов авиац. конструкций. М.: МАИ, 1988. С. 41–46.
84. Тарлаковский Д. В. Плоская задача об ударе цилиндрической оболочки по упругому полупространству // Тр. 14 Всес. конф. по теории пластин и оболочек, Кутаиси, 20–23 окт., 1987 г. Т. 2. Тбилиси, 1987. С. 471–476.
85. Тарлаковский Д. В. Удар абсолютно жесткой оболочки с заполнителем по упругому полупространству // Деформир. и

- разруш. элементов конструкций летат. аппаратов. М.: МАИ, 1989. С. 129–138.
86. Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Нестационарное контактное взаимодействие деформируемой цилиндрической оболочки и упругой полуплоскости // "Импульсные процессы в механике сплошных сред" Тез. докл. III научн. школы сентябрь 1999. Николаев, 1999. С. 66–68.
87. Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Удар цилиндрической оболочки по упругому полупространству // Матер. IV междунар. симп. «Динам. и технол. пробл. мех. констр. и сплош. сред». М.: из-во ГРАФРОС, 1998. С.130–134.
88. Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Контактное взаимодействие цилиндрической оболочки и упругой полуплоскости // I Всерос. конк. курсовых и дипломных проектов студ. по спец. «Технология и качество авиац. техники.». М.: изд-во «МАИ», 1999. С. 40–43.
89. Федотенков Г.В. Ударное взаимодействие тонкого цилиндра с упругим полупространством // Проблемы перспективной авиационной техники: Сб. статей науч.-исслед. работ студ., аспирант. и мол. ученых. М.: изд-во «МАИ» 1999. С. 97–103.
90. Чебаков М.И. Контактная задача для двойного слоя с учетом сил трения – Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки, № 3(131), с. 22–24, 2005.
91. Шахверди Г. Г. Исследование по МКЭ проникания твердых и деформируемых тел в сжимаемую жидкость // Соверш. и оптимиз. констр., изготавл. с примен. мягк. оболочек: Дальневост. конф. по мягк. оболочкам / Тез. докл. Владивосток, 1983. С. 89–91.

92. Шахверди Г. Г. Исследование проникания деформируемых тел в жидкость методом конечных элементов // Всес. конф. «Пробл. динам. взаимод. деформ. сред, Горис (АрмССР), 1984: Тез. докл. Ереван, 1984. С. 312–314.
93. Шептунов В.В., Горячева И.Г., Ноздрин М.А. Контактная задача о движении штампа с регулярным рельефом по вязкоупругому основанию – Трение и износ, т. 34, № 2, с. 109–119, 2013.
94. Шпенев А.Г. Контактная задача для вязкоупругого полупространства и шероховатого жесткого цилиндра в условиях гидродинамического смазывания – Трение и износ, т. 39, № 1, Гомель, РБ, 42–49, 2018.
95. Шуршалов А. И. Поведение ортотропных цилиндрических оболочек при нестационарном нагружении // Взаимод. пластин и оболочек с жидк. и газом. М., 1984. С. 60–72.
96. Fedotenkov G.V., Mitin A.Y., Tarlakovkii D.V. Transient Spatial Motion of Cylindrical Shell Under Influence of Non-stationary Pressure // Proceedings of the Second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics. ICTAEM 2019. Structural Integrity, vol 8. Springer, Cham, https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2_49.
97. Igumnov L.A., Tarlakovskii D.V., Zemskov A.V. A two-dimensional nonstationary problem of elastic diffusion for an orthotropic one-component layer – Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – Vol. 38, No. 5. – pp. 808–817.
98. Kalinchuk V.V., Fedotenkov G.V., Mitin A.Y. Three-dimensional non-stationary motion of Timoshenko-type circular cylindrical shell // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 40. – No. 3. – P. 311–320. DOI 10.1134/S1995080219030107;
99. Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space

(Initial Stage of Interaction) – *Mechanics of Solids*, 2011, Vol. 46, no. 2, pp. 239–247.

100. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Nonstationary 3d motion of an elastic spherical shell – *Mechanics of Solids*, 2015, Vol. 50, no. 2, pp. 208–217. doi: 10.3103/S0025654415020107.
101. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Two–dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells – *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, Vol. 43, no. 2, pp. 145–152. doi: 10.3103/S1052618814010178.
102. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Impact of non–stationary pressure on a cylindrical shell with elastic core – *Uchenyeyapiski Kazanskogo universiteta – Seriya fiziko–matematicheskie nauki*, 2016, Vol. 158:1, pp. 141–151. WOS:000408356100011.