УДК 539.124:537.533

Суперсимметричный электрон в постоянном и однородном магнитном и электрическом полях

Козориз В.И.

Рассмотрена задача движения электрона со спином в постоянном и однородном магнитном и электрическом полях. Получено точное аналитическое решение задачи как для пространственных, так и для спиновых координат, сделан анализ полученных результатов.

Существует множество работ, посвященных задачам исследования частиц и суперчастиц во внешних полях [1]-[5]. Интерес к подобного рода исследованиям возник благодаря развитию теории (в частности, благодаря появлению таких объектов, как струны и мембраны) и совершенствованию экспериментальных установок. Физические эксперименты с применением поляризованных пучков релятивистских частиц становятся особенно перспективными в свете развития современной техники коллайдеров, которые дают возможность работы с ранее не достижимыми (10^{12} эВ) областями энергии, а также в исследованиях тонких структур атомов, и при изучении аномального магнитного момента.

Основная масса работ по исследованиям спиновых частиц ведется в рамках классической или квантовой механики, что очень усложняет поиск точных решений даже для простых задач. Псевдоклассическая механика [2] позволяет не только по-новому взглянуть на физику спиновых частиц, но и дает возможность аналитического решения ряда задач.

Решение задачи движения частицы во внешнем постоянном и однородном магнитном и электрическом полях хорошо известно в рамках классической (бесспиновый случай) и квантовой (спиновая частица) механики. Проведем исследование в рамках псевдоклассической механики [2]. В качестве базовой модели возьмем модель ди Векъя-Равндала [4]. Уравнения движения частицы будут представлять собой псевдоклассический аналог уравнений Баргмана-Мишеля-Телегди для частицы с гиромагнитным отношением g=2. Считаем для простоты скорость света равной единице.

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}_\mu - qF_{\mu\nu}\dot{x}^\nu - \frac{q}{2}S^{\nu\alpha}\partial_\mu F_{\nu\alpha} = 0;\\ &\dot{\theta}_\mu - qF_{\mu\nu}\theta^\nu = 0, \end{aligned}\right\}(1)$$

где $S^{\nu\alpha} = -i\theta^{\nu}\theta^{\alpha}$ - тензор спина, $F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}$ - тензор электромагнитного поля; x^{μ} - пространственные, а θ^{μ} - спиновые координаты; A_{μ} - 4-потенциал электромагнитного поля; μ,ν=0,1,2,3 (что отвечает t, x, y, z, соответственно); $q = -e$ - заряд электрона. Точкой обозначается производная по собственному времени частицы s.

Рассмотрим движение электрона в постоянном магнитном поле напряженностью H, поле направленно вдоль оси Oz. Тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H & 0 \\ 0 & -H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Подставляя его в уравнения движения, после простых преобразований, получим
уравнения гармонических колебаний с частотой eH

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{t} = 0, \\ &\ddot{x} + eH\dot{y} = 0, \\ &\ddot{y} - eH\dot{x} = 0, \\ &\ddot{z} = 0; \end{aligned}\right\}(2)$$

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\theta}^0 = 0, \\ &\dot{\theta}^1 + eH\theta^2 = 0, \\ &\dot{\theta}^2 - eH\theta^1 = 0, \\ &\dot{\theta}^3 = 0; \end{aligned}\right\}(3)$$

Заметим, что уравнения для спиновых и пространственных координат разделены. Это означает, что в координатах собственного времени спин взаимодействует только с полем и не оказывает влияние на орбитальное движение электрона и сам не зависит от него. Из уравнений (2) и (3) легко получить решения

$$\left.\begin{aligned} &t = U^t(0)s + t(0), \\ &x = \frac{1}{\omega}(U^x(0)\sin\omega s + U^y(0)\cos\omega s) + (x(0) - \frac{1}{\omega}U^y(0)), \\ &y = \frac{1}{\omega}(-U^x(0)\cos\omega s + U^y(0)\sin\omega s) + (y(0) + \frac{1}{\omega}U^x(0)), \\ &z = U^z(0)s + z(0); \end{aligned}\right\}(4)$$

$$\left.\begin{aligned}
\theta^0 &= \theta^0,\\
\theta^1 &= \frac{1}{\omega}(\theta^1(0)\cos\omega s - \theta^2(0)\sin\omega s),\\
\theta^2 &= \frac{1}{\omega}(\theta^1(0)\sin\omega s + \theta^2(0)\cos\omega s),\\
\theta^3 &= \theta^3(0);
\end{aligned}\right\}(5)$$

где спиновые, пространственные координаты и компоненты 4-скорости взятые как функции от нуля (в нулевой момент времени) есть константы интегрирования и

$\omega = eH.$ (6)

Как видно электрон движется по спирали с постоянным радиусом и шагом, закрученной в трехмерном пространстве вокруг направления поля. Этот результат аналогичен движению бесспиновой частицы.

Исследуем поведение 4-вектора спина. Нам понадобится для его вычисления 4-скорость

$$\left.\begin{aligned}
U^t &= U^t(0),\\
U^x &= U^x(0)\cos\omega s - U^y(0)\sin\omega s,\\
U^y &= U^x(0)\sin\omega s + U^y(0)\cos\omega s,\\
U^z &= U^z(0).
\end{aligned}\right\}(7)$$

Для получения тензора спина воспользуемся известной формулой

$S^{\mu\nu} = -i\theta^\mu\theta^\nu$, (8)

подставляя в которую выражения (5) для спиновых координат, получим

$$\left.\begin{aligned}
S^{01} &= -X^1\cos\omega s + X^2\sin\omega s,\\
S^{02} &= -X^1\sin\omega s - X^2\cos\omega s,\\
S^{03} &= -A,\\
S^{12} &= -B,\\
S^{13} &= -Y^1\cos\omega s + Y^2\sin\omega s,\\
S^{02} &= -Y^1\sin\omega s - Y^2\cos\omega s,
\end{aligned}\right\}(9)$$

где 0,1,2,3 отвечают t, x, y, z, соответственно; и где

$X^1 = i\theta^0(0)\theta^1(0),\ \ X^2 = i\theta^0(0)\theta^2(0),\ \ Y^1 = i\theta^1(0)\theta^3(0),\ \ Y^2 = i\theta^2(0)\theta^3(0),$

$A = i\theta^0(0)\theta^3(0),\ \ B = i\theta^1(0)\theta^2(0)$

- четные константы, которые мы можем одновременно считать действительными числами, согласно правилу усреднения [3].

Запишем 4-вектор спина

$$S_p = -\frac{1}{2} U^r S^{lm} \varepsilon_{prlm}, \quad (10)$$

где U^r - 4-скорость, ε_{prlm} - абсолютно антисимметричный псевдотензор, индексы принимают значения (0,1,2,3), что отвечает (t, x, y, z), соответственно. Подставляя сюда (7) и (9), имеем

$$\left.\begin{aligned}
S_0 &= -U^y(0)Y^1 + U^x(0)Y^2 + U^z(0)B, \\
S_1 &= -(U^t(0)Y^1 - U^x(0)A + U^z(0)X^1)\sin\omega s + (-U^t(0)Y^2 + U^y(0)A - U^z(0)X^2)\cos\omega s, \\
S_2 &= (U^t(0)Y^1 - U^x(0)A + U^z(0)X^1)\cos\omega s + (-U^t(0)Y^2 + U^y(0)A - U^z(0)X^2)\sin\omega s, \\
S_3 &= -U^t(0)B - U^y(0)X^1 + U^x(0)X^2.
\end{aligned}\right\}$$

Более наглядно будет выглядеть 4-вектор в виде

$$\left.\begin{aligned}
S_0 &= C_0, \\
S_1 &= -C_1 \sin\omega s + C_2 \cos\omega s, \\
S_2 &= C_1 \cos\omega s + C_2 \sin\omega s, \\
S_3 &= C_3.
\end{aligned}\right\} (11)$$

где C^0, C^1, C^2, C^3 - постоянные величины. Т.е., 4-вектор спина вращается относительно оси Oz с угловой скоростью ω, которая зависит от поля H [см. (6)]. Легко убедиться в выполнении условий

$$\left.\begin{aligned}
S^\mu S_\mu &= const, \\
S_\mu U^\mu &= 0.
\end{aligned}\right\} (12)$$

Рассмотрим на простейшем примере движения, поведение спина электрона в постоянном магнитном поле. Пусть уравнения движения имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
x &= r\cos\Omega t, \\
y &= r\sin\Omega t, \\
z &= 0,
\end{aligned}\right\} (13)$$

где $\Omega = \omega / \gamma$, $\gamma = 1 / \sqrt{1 - \omega^2 r^2}$, т.е. электрон движется по круговой орбите, лежащей в плоскости, перпендикулярной полю.

Выражения для 4-скорости $U^{\mu} = \dot{x}^{\mu} = \gamma \dfrac{dx^{\mu}}{dt}$ в лабораторном времени запишутся как

$$\left.\begin{aligned} U^{t} &= \gamma, \\ U^{x} &= -r\Omega\gamma \sin\Omega t, \\ U^{y} &= r\Omega\gamma \cos\Omega t, \\ U^{z} &= 0, \end{aligned}\right\}$$

а 4-вектор спина в результате окажется равным

$$\left.\begin{aligned} S_0 &= -r\Omega Y^1, \\ S_1 &= -\gamma Y^1 \sin\Omega t + (-\gamma Y^2 + r\Omega\gamma A)\cos\Omega t, \\ S_2 &= \gamma Y^1 \cos\Omega t + (-\gamma Y^2 + r\Omega\gamma A)\sin\Omega t, \\ S_3 &= -\gamma B - r\Omega\gamma X^1. \end{aligned}\right\} (14)$$

В итоге, используя начальные условия

$$S_0 = 0\,, \quad S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\hbar\,, \quad S_2 = 0\,, \quad S_1 = \frac{1}{2}\hbar\,,$$

получим

$$\left.\begin{aligned} S_0 &= 0, \\ S_1 &= \tfrac{\hbar}{\sqrt{2}}\cos\Omega t, \\ S_2 &= \tfrac{\hbar}{\sqrt{2}}\sin\Omega t, \\ S_3 &= \tfrac{\hbar}{2}. \end{aligned}\right\} (15)$$

Таким образом, спин электрона вращается с угловой скоростью ω относительно направления поля. Подобная особенность поведения спина в магнитном поле была обнаружена еще в опыте Эйнштейна и де Гааза. Причем, в системе покоя электрона, т.е. в сопутствующей системе отсчета, спин электрона будет прецессировать с частотой $\omega = eH$, при переходе в лабораторную систему координат, частота прецессии уменьшится: $\Omega = \omega/\gamma$ ($\gamma > 1$).

Сравним полученные результаты с выражением для 4-вектора спина в случае, когда он переносится по Ферми-Уолкеру и выполняются условия (12). Приведем этот известный результат на прецессию Томаса [5]

$$
\left.\begin{aligned}
S^t &= -\tfrac{\hbar}{\sqrt{2}}\Omega r\gamma \sin\Omega\gamma t,\\
S^x &= \tfrac{\hbar}{\sqrt{2}}(\cos\Omega t\sin\Omega\gamma t + \gamma\sin\Omega t\cos\Omega\gamma t),\\
S^y &= \tfrac{\hbar}{\sqrt{2}}(\sin\Omega t\cos\Omega\gamma t - \gamma\cos\Omega t\sin\Omega\gamma t),\\
S^z &= \tfrac{\hbar}{2}.
\end{aligned}\right\}
$$

После небольших преобразований он примет вид

$$
\left.\begin{aligned}
S^t &= -\tfrac{\hbar}{\sqrt{2}}\Omega r\gamma \sin\Omega\gamma t,\\
S^x &= \tfrac{\hbar}{2\sqrt{2}}\{(1+\gamma)\cos[(1-\gamma)\Omega t] + (1-\gamma)\cos[(1+\gamma)\Omega t]\},\\
S^y &= \tfrac{\hbar}{2\sqrt{2}}\{(1+\gamma)\sin[(1-\gamma)\Omega t] + (1-\gamma)\sin[(1+\gamma)\Omega t]\},\\
S^z &= \tfrac{\hbar}{2}.
\end{aligned}\right\}(16)
$$

Движение 4-вектора в плоскости xOy представляет собой наложение двух колебаний с частотами

$(1-\gamma)\Omega$, $(1+\gamma)\Omega$

и амплитудами

$\frac{\hbar}{2\sqrt{2}}(1+\gamma)$, $\frac{\hbar}{2\sqrt{2}}(1-\gamma)$,

соответственно.

Легко заметить, что средняя частота совпадает с Ω. Кроме того, частота $(1-\gamma)\,\Omega$ есть прецессия Томаса. Второе слагаемое для компонент 1 и 2 обусловлено (12). Прецессия Томаса совпадает с Ω в случае, когда γ близко к 2, т.е. линейная скорость электрона по орбите близка к 0,866 от скорости света. Таким образом, наше решение (15) согласуется с решением (16), если $\gamma \approx 2$.

Обобщая выше сказанное, приходим к выводу, что реальное движение 4-вектора спина релятивистского электрона происходит с учетом спин-орбитального взаимодействия, а не является простым переносом Ферми-Уолкера. Это движение представляет собой прецессию вокруг оси, перпендикулярной плоскости движения частицы, с частотой, равной частоте обращения электрона по орбите.

Рассмотрим движение электрона в постоянном электрическом поле напряженностью E, поле направленно вдоль оси Ox. Тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Подставляя его в уравнения движения, получим

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{t} - eE\dot{x} = 0, \\ &\ddot{x} - eE\dot{t} = 0, \\ &\ddot{y} = 0, \\ &\ddot{z} = 0; \end{aligned}\right\} (17)$$

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\theta}^0 - eE\theta^1 = 0, \\ &\dot{\theta}^1 - eE\theta^0 = 0, \\ &\dot{\theta}^2 = 0, \\ &\dot{\theta}^3 = 0; \end{aligned}\right\} (18)$$

Как видно, уравнения движения для спиновых и пространственных координат независимы. Спин электрона, в собственном времени, не зависит от движения в пространстве и не влияет на него, а зависит только от поля. Эту особенность мы уже встречали для постоянного магнитного поля.

Из уравнений (17) и (18) легко получить решения

$$\left.\begin{aligned} &t = \frac{1}{\omega}(U^t(0)\mathrm{sh}\omega s + U^x(0)\mathrm{ch}\omega s) + (t(0) - \frac{1}{\omega}U^x(0)), \\ &x = \frac{1}{\omega}(U^t(0)\mathrm{ch}\omega s + U^x(0)\mathrm{sh}\omega s) + (x(0) - \frac{1}{\omega}U^t(0)), \\ &y = U^y(0)s + y(0), \\ &z = U^z(0)s + z(0); \end{aligned}\right\} (19)$$

$$\left.\begin{aligned} &\theta^0 = \theta^0(0)\mathrm{ch}\omega s + \theta^1(0)\mathrm{sh}\omega s, \\ &\theta^1 = \theta^0(0)\mathrm{sh}\omega s + \theta^1(0)\mathrm{ch}\omega s, \\ &\theta^2 = \theta^2(0), \\ &\theta^3 = \theta^3(0); \end{aligned}\right\} (20)$$

где спиновые, пространственные координаты и компоненты 4-скорости взятые как функции от нуля (т.е. в нулевой момент времени) есть константы интегрирования и

$\omega = eE.$ (21)

Как видно, электрон движется с ускорением по направлению поля.

Исследуем поведение 4-вектора спина. Нам понадобится 4-скорость

$$\left.\begin{aligned} U^t &= U^t(0)\mathrm{ch}\omega s + U^x(0)\mathrm{sh}\omega s, \\ U^x &= U^t(0)\mathrm{sh}\omega s + U^x(0)\mathrm{ch}\omega s, \\ U^y &= U^y(0), \\ U^z &= U^z(0). \end{aligned}\right\} (22)$$

Для получения тензора спина воспользуемся формулой (8), подставляя в которую выражения (20) для спиновых координат, получим

$$\left.\begin{aligned} S^{01} &= -A, \\ S^{02} &= X^1\mathrm{ch}\omega s + X^2\mathrm{sh}\omega s, \\ S^{03} &= Y^1\mathrm{ch}\omega s + Y^2\mathrm{sh}\omega s, \\ S^{12} &= X^1\mathrm{sh}\omega s + X^2\mathrm{ch}\omega s, \\ S^{13} &= Y^1\mathrm{sh}\omega s + Y^2\mathrm{ch}\omega s, \\ S^{02} &= B, \end{aligned}\right\} (23)$$

где 0,1,2,3 отвечают t, x, y, z, соответственно; и где

$X^1 = i\theta^2(0)\theta^0(0),\ \ X^2 = i\theta^2(0)\theta^1(0),\ \ Y^1 = i\theta^3(0)\theta^0(0),\ \ Y^2 = i\theta^3(0)\theta^1(0),$
$A = i\theta^0(0)\theta^1(0),\ \ B = i\theta^3(0)\theta^2(0)$

- четные константы, которые мы можем одновременно считать действительными числами, согласно правилу усреднения [3].

Подставляя в (10) выражения (22) и (23), имеем

$$\left.\begin{aligned} S_0 &= -(U^t(0)B - U^y(0)Y^1 + U^z(0)X^1)\mathrm{sh}\omega \mathrm{s} - (U^x(0)B - U^y(0)Y^2 + U^z(0)X^2)\mathrm{ch}\omega s, \\ S_1 &= (U^t(0)B - U^y(0)Y^1 + U^z(0)X^1)\mathrm{ch}\omega \mathrm{s} + (U^x(0)B - U^y(0)Y^2 + U^z(0)X^2)\mathrm{sh}\omega s, \\ S_2 &= U^x(0)Y^1 - U^t(0)Y^2 + U^z(0)A, \\ S_3 &= -U^x(0)X^1 + U^t(0)X^2 - U^y(0)A. \end{aligned}\right\}$$

Более наглядно будет выглядеть 4-вектор в виде

$$\left.\begin{aligned} S_0 &= -C_0\,\mathrm{sh}\,\omega s - C_1\,\mathrm{ch}\,\omega s,\\ S_1 &= C_0\,\mathrm{ch}\,\omega s + C_1\,\mathrm{sh}\,\omega s,\\ S_2 &= C_2,\\ S_3 &= C_3. \end{aligned}\right\}$$

где C^0, C^1, C^2, C^3 - постоянные величины. Т.е. 4-вектор спина совершает гиперболический поворот в плоскости sOx с угловой скоростью ω. Легко убедиться в выполнении условий (12).

Если учесть, что для электрона мы считаем

$$S^{\mu}S_{\mu} = \frac{3\hbar^2}{4} = const,$$

и взять начальные условия

$$S_0 = 0\,,\quad S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\hbar\,,\quad S_2 = 0\,,\quad S_1 = \frac{1}{2}\hbar\,,$$

то поведение 4-вектора спина будет описываться следующим образом

$$\left.\begin{aligned} S_0 &= -\tfrac{\hbar}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sh}\,\omega s,\\ S_1 &= \tfrac{\hbar}{\sqrt{2}}\,\mathrm{ch}\,\omega s,\\ S_2 &= 0,\\ S_3 &= \tfrac{\hbar}{2}. \end{aligned}\right\}$$

Таким образом, в постоянном электрическом поле электрон движется с ускорением, а спин электрона ложится в пределе $s \to \infty$ на световой конус (совершая гиперболический поворот). Подобный результат верен и для сопутствующей системы координат электрона.

Несмотря на кажущуюся сложность, решение задач оказалось простым и может, в силу этого, иметь методический интерес, однако поведение спина во многом определяется как наличием и характером поля, так и движением частицы в пространстве, поэтому уравнения движения спиновой частицы в общем случае очень сложны. Полученные точные решения и независимость движения от спина подчеркивают справедливость существующих решений для бесспиновых частиц и дают возможность получить точные аналитические решения для спина частиц.

1. Тернов И.М. Введение в физику спина релятивистских частиц. - М.:Изд-во МГУ,1997.- 240 с.
2. Freund P.G.O. Introduction to supersymmetry.- Berlin: Springer Verlag, 1986.- 276 p.
3. Мусин Ю.Р. Матрица плотности в псевдоклассической механике. //Известия Вузов СССР.- 1991, №2.- с.50-55
4. Ravndal F. Supersymmetric Dirac particles in external fields. //Phys. Rev. -1980, D21.- p.2832-2852
5. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация.- Алма-Ата: Айнштайн,1994, т.1.- 23 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Козориз Виктор Иванович, аспирант кафедры прикладной физики

Московского государственного авиационного института (технического университета).