ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

доктора физико-математических наук Балашова Максима Викторовича

на диссертационную работу Анастасии Вячеславовны Симкиной на тему

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ И АППРОКСИМАЦИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ 0-УПРАВЛЯЕМОСТИ И ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ

представленную на соискание степени кандидата физико-математических наук по специальности 2.3.1 —

Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

Работа А. В. Симкиной посвящена изучению способов получения погрешностей в метрике Хаусдорфа приближенных построений предельных множеств достижимости и управляемости (или 0-управляемости) линейных дискретных систем с геометрическими ограничениями на управление. Теория линейных систем давно является существенной частью теории дифференциальных уравнений, теории управления и ее приложений. Возникновение теории линейных задач быстродействия (Гамкрелидзе), применение к исследованию систем принципа максимума (Понтрягин и др.) вывели эти задачи также в ранг актуальных задач теории оптимального управления. Еще классики теории оптимального управления подчеркивали, что точное аналитическое решение линейной задачи быстродействия практически никогда не возможно. Поэтому с самого начала активно обсуждались численные алгоритмы их решения, напр. Нейштадта-Итона (Болтянский). После указанных выше работ, а также после работ Красовского и др. стало понятно, что анализ множеств достижимости и управляемости является одним из ключевых способов решения указанных задач. Именно этому анализу посвящена настоящая работа.

Актуальность темы. В работе рассматриваются вопросы построения приближений множеств достижимости и управляемости линейных дискретных систем, что, в частности, позволяет решать линейную задачу быстродействия. Поскольку при исследовании непрерывных систем зачастую осуществляется дискретизация по времени, то рассмотренные алгоритмы могут быть актуальны и для решения задач с непрерывным временем при дискретизации по времени.

Содержание и структура работы. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 162 наименований и содержит 119 страниц текста.

Введение начинается с достаточно полного обзора результатов по линейной задаче быстродействия, а также алгоритмам построения множеств достижимости и управляемости, в т.ч. в непрерывных задачах. Далее кратко формулируется содержание работы, научная новизна, основные выносимые на защиту результаты и т.п.

Первая глава посвящена получению оценок погрешности при оценке/аппроксимации множества управляемости $\mathcal{X}_\infty$. В теореме 1.1 приводится критерий ограниченности множества $\mathcal{X}_\infty$. Далее идут разные утверждения о декомпозиции множества управляемости за счет блочной структуры матрицы A системы на подмножества в соответствующих подпространствах. В разделе 1.3 уточняются некоторые оценки с помощью метода опорных гиперплоскостей. В теореме 1.2 получена оценка погрешности $\mathcal{X}_\infty$ в метрике Хаусдорфа через некоторое множество $\mathcal{X}(k)$ управляемости на k-м шаге, а также ряд технических утверждений. В заключении главы рассмотрены примеры.

Вторая глава посвящена получению оценок погрешности при оценке/аппроксимации множества достижимости $\mathcal{Y}_\infty$. Она содержит симметричные главе 1 результаты, за тем исключением, что от матрицы A (или соотв. подматриц A) требуется, чтобы спектр был $|\sigma(A)| < 1$, в отличие от главы 1, где $|\sigma(A)| > 1$.

Третья глава посвящена получению оценок множеств управляемости и достижимости для почти периодических систем, т.е. систем, у которых жорданова форма матрицы A системы имеет блочный вид. При этом каждый блок определяется комплексно-сопряженными собственными значениями.

Глава 4 посвящена численным экспериментам.

Научная новизна.

В работе Анастасии Вячеславовны хотелось бы отметить следующие основные результаты, определяющие ее научную новизну.

Результаты теоремы 1.1 про ограниченность множества $\mathcal{X}_\infty$ (и аналогичные результаты теоремы 2.1 про $\mathcal{Y}_\infty$ из главы 2), а также декомпозиция множеств управляемости/достижимости на основе жордановой формы матрицы A линейной дискретной системы являются важными техническими средствами для исследования множеств управляемости/достижимости. В частности, эти результаты позволяют получать представление множества управляемости $\mathcal{X}_\infty$ или $\mathcal{X}(N)$ в виде декартова произведения подмножеств меньшей размерности, лемма 1.1. Конструкции, основанные на блочном виде матрицы A, являются стандартными в работах по линейным дифференциальным уравнениям и их приложениям к управляемым системам. Однако основные результаты диссертации из разделов 1.2 и 2.2, насколько известно рецензенту, новые и являются существенными для анализа множеств $\mathcal{X}(N)$, $\mathcal{X}_\infty$, $\mathcal{Y}(N)$, $\mathcal{Y}_\infty$.

Теорема 1.2 (и симметричная 2.2) является ярким результатом, позволяющими на основе построения множества $\mathcal{X}(NM)$ получать оценку погрешности в метрике Хаусдорфа множества $\mathcal{X}_\infty$. При этом натуральный "шаг квантования" M подбирается так, чтобы минимизировать показатель α, который является показателем скорости линейной сходимости в оценке расстояние $\rho_H(\mathcal{X}(NM), \mathrm{cl}\mathcal{X}_\infty)$, п. 3) теоремы 1.2. Идеи, использованные для доказательства теоремы 1.2, общеизвестны. Однако их синтез и получившийся результат заслуживают похвалы. Результаты теоремы 1.2 (2.2) являются как достаточно универсальными теоретическими оценками, так простыми и хорошо работающими конструкциями в численных приложениях.

Хочется также отметить большое количество разнообразных примеров (которым в частности посвящены главы 3 и 4) и особенно примеры о выборе шага квантования, раздел 1.6. В теореме 1.2 доказано, что некоторая степень оператора T^M является сжимающей с коэффициентом $\alpha \in (0, 1)$. Отсюда, как хорошо известно, следует, что последовательность $T^N\mathcal{X}$ сходится к неподвижной точке (к $\mathrm{cl}\mathcal{X}_\infty$) со скоростью геометрической прогрессии с показателем $\alpha^{\frac{N}{M}}$. Однако M может выбираться по разному и от этого выбора будет существенно зависеть α и коэффициент в формуле оценки скорости сходимости. Отсюда возникает задача оценки минимума в формуле (1.15), которая позволяет для ограниченного N находить оптимальные "шаги квантования" M, что в результате приводит к наилучшим оценкам в теореме 1.2. Вся эта деятельность очень интересна, важна для численных приложений и еще ждет теоретического обоснования.

Обоснованность и достоверность полученных результатов. Все результаты работы достаточно подробно доказаны. Они неоднократно докладывались и обсуждались на научных семинарах, конференциях и полностью опубликованы в известных рецензируемых изданиях.

Теоретическая и практическая значимость работы. Основные результаты — теоремы диссертации — носят в первую очередь теоретический характер. Они также могут эффективно использоваться для оценки погрешности приближения множеств управляемости и достижимости в разных алгоритмах, как упомянутых в работе, так и любых других, при возможности с заданной точностью находить $\mathcal{X}(k)$ или $\mathcal{Y}(k)$ для натурального k. Большое количество интересных и эффективно разобранных примеров подтверждают практическую ценность результатов.

Результаты могут найти применение в исследованиях линейных управляемых систем в таких научных центрах, как МАИ, ВМиК МГУ, ИПМех РАН, ИММ УрО РАН. Часть результатов может быть прочитана в качестве спецкурсов студентам и аспирантам.

Замечания по работе. В целом, работа написана достаточно подробно и понятно. При чтении возникли следующие замечания редакционного характера:

1. Автор не всегда ссылается на первоисточники. Например, на стр. 6 "Способ ... основанный на аппарате опорных функций и опорных гиперплоскостей, получил свое развитие в работах [7, 16]" (работы 2001, 2017 гг.). Однако, еще в прошлом веке метод опорных функций/гиперплоскостей был полностью разработан, что легко проследить, набрав в поисковой строке фразу типа "hyperplane method for a reachable set". Собственно, его обоснование уже есть в работах Понтрягина и др., а также в монографиях, напр. Ли и Маркуса (результаты про свойства экстремального управления). Впрочем, часто четко проследить первоисточник бывает проблематично.
2. Определение множества $\mathbb{L}_{>1}$ в начале стр. 18 не понятно (что значит "h_i соответствует собственному значению λ..."?). Только в доказательстве теоремы 1.1 становится понятно, что имела в виду автор.
3. Доказательство теоремы 1.1 (и симметричной теоремы 2.1) надо было упростить, возможно разбив на части (вещественные, комплексные собственные значения A и т.п.). Настоящая редакция достаточно трудна для чтения и довольно успешно запутывает читателя. Страница 18 строка 14: $\lambda_i \in \mathbb{C} \to \lambda_i \in \mathbb{R}$. На стр. 19 определяются числа $\alpha_{i,j}(k)$, а на стр. 20 строка 5 вдруг появляются $\alpha_{i,j}$? Формулы типа строка -2 стр. 19, оценка строка - 8 стр. 20, оценка 2 строка стр. 22 и т.п. нуждаются в кратком комментарии. Для чего-то на строке 7 стр. 22 упомянута теорема Вейля, хотя автору всего-то

нужна плотность чисел $\{nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ на отрезке $[0,1]$ для иррационального числа x — тривиальный факт. Этот список можно продолжить.

4. Формуле для $\mathcal{X}(N)$ строка -1 стр. 38 логично было бы появиться в разделе 1.3, а м.б. даже в начале главы 1. Аналогичное замечание про $\mathcal{Y}(N)$: явный вид этого множества поздно появляется в главе 2. Я также хочу обратить внимание, что, определив множество достижимости для начального условия $x(0) = x_0$ по формуле $\mathcal{Y}(k, x_0) = A^k x_0 + \mathcal{Y}(k)$, мы получим $A^k(x_0 + \mathcal{X}(k)) = \mathcal{Y}(k, x_0)$. Это соотношение мб полезно для исследования взаимосвязи поведения множеств достижимости и управляемости.

5. Строка -14 стр. 55 "Красные точки начинают монотонно убывать" $\to$ Ординаты красных точек начинают монотонно убывать.

Заключение. Работа является завершенной и надлежащим образом оформленной. Все вынесенные на защиту результаты получены автором самостоятельно и полностью опубликованы. Автореферат соответствует содержанию диссертации и верно его отражает.

Представленная диссертация является завершенной научно-квалификационной работой, которая по критериям актуальности, научной новизны, обоснованности и достоверности выводов соответствует требованиям "Положения о порядке присуждения научных степеней" (утвержденного постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 № 842). Её автор Анастасия Вячеславовна Симкина заслуживает присвоения ей степени кандидата физико-математических наук по специальности 2.3.1 — системный анализ, управление и обработка информации, статистика.

Официальный оппонент
д.ф.-м.н., доцент,
в.н.с. ИПУ РАН

Балашов Максим Викторович

«14» мая 2026 г.

специальность 01.01.09
тел. +7 977 648 39 18
e-mail: balashov73@mail.ru
ИПУ РАН Россия, 117342,
Москва, ул. Профсоюзная, д. 65 стр. 2.

Подпись Балашова Максима Викторовича
ЗАВЕРЯЮ
ВЕД. ИНЖЕНЕР
ЗАЛОЖНЕВА Л.Н.

С отзывом ознакомлена 18.05.2026