



Научная статья

УДК: 532.5.032

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=189149>

EDN: <https://www.elibrary.ru/EDRBYS>

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТОМ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ СОСУДЕ

Чжан Юе¹ , В.В. Орлов^{1,2}, А.Н. Темнов¹ 

¹Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

²Общество с ограниченной ответственностью «Интерпроком», г. Москва, Россия

 antt45@mail.ru

Цитирование: Чжан Юе, Орлов В.В., Темнов А.Н. Аналитическое и численное определение собственных колебаний стратифицированной жидкости в открытом осесимметричном сосуде // Труды МАИ: электрон. журнал. № 149. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=189149>

Аннотация. В статье представлено аналитическое и численное исследование собственных колебаний (поверхностных и внутренних волн) непрерывно-стратифицированной жидкости со свободной поверхностью в открытом цилиндрическом сосуде, что является фундаментальной задачей для обеспечения динамической устойчивости жидкого топлива в аэрокосмических системах. На основе выведенных аналитических свойств задачи предложена эффективная численная модель, использующая слабую формулировку краевой задачи. Для дискретизации проведён сравнительный анализ элементов Паскаля третьего (10 степеней свободы, непрерывность C^0) и пятого порядка (21 степень свободы, непрерывность C^1). Показано, что элементы Паскаля пятого порядка обладают значительным преимуществом: при одинаковом разрешении расчётной сетки элементы C^1 успешно разрешают частоты поверхностных волн высших мод, в то время как низкопорядковые элементы C^0 существенно ограничены: после необходимого отсева обильных нефизических «численных артефактов» диапазон достоверных решений критически сужается. Попытки

принудительного извлечения высших мод с помощью таких элементов приводят к завышению собственных частот из-за избыточной жёсткости сетки и сильным нефизическим осцилляциям в формах колебаний по оси z , что делает их применение неэффективным. Для оптимизации вычислительных затрат и повышения точности дискретных форм колебаний предложен двухэтапный алгоритм: предварительный расчёт полного спектра на грубой сетке с фильтрацией эффективных собственных значений, с последующим локальным точным поиском в окрестностях найденных значений на сгущённой сетке. Полученные результаты демонстрируют высокую точность предлагаемого метода при определении характеристик как поверхностных, так и внутренних волн, что открывает новые возможности для анализа динамики стратифицированных сред в ёмкостях более сложной геометрии. В работе предоставляется вычислительный инструмент для определения собственных частот колебаний, что является основой прогнозирования сложного взаимодействия жидкости и конструкции, а также оптимизации систем управления криогенным топливом в ракетах-носителях и космических аппаратах.

Ключевые слова: стратифицированная жидкость; свободные осесимметричные колебания; спектральная задача; метод конечных элементов; внутренние волны; поверхностные волны; метод Галёркина.

ANALYTICAL AND NUMERICAL DETERMINATION OF NATURAL OSCILLATIONS OF A STRATIFIED FLUID IN AN OPEN AXISYMMETRIC CONTAINER

Zhang Yue¹ , V.V. Orlov^{1,2}, A.N. Temnov¹ 

¹Bauman Moscow State Technical University (National Research University), Moscow, Russia

²Interprokom Limited Liability Company, Moscow, Russia

✉ antt45@mail.ru

Citation: Zhang Yue, Orlov V.V., Temnov A.N. Analytical and numerical determination of natural oscillations of a stratified fluid in an open axisymmetric container // Trudy MAI. 2026. No. 149. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=189149>

Abstract. This paper presents the analytical and numerical investigation of the natural oscillations (surface and internal waves) of a continuously stratified fluid with a free surface in an open cylindrical container, a problem fundamental to the dynamic stability of liquid propellant in aerospace applications. Based on the derived analytical properties of the problem, an efficient numerical model is proposed using the weak formulation of the boundary value problem. For spatial discretization, a comparative analysis of third-order (10 degrees of freedom, C^0 continuity) and fifth-order (21 degrees of freedom, C^1 continuity) Pascal elements is performed. It is shown that fifth-order Pascal elements possess a significant advantage: for the same mesh resolution, these higher-order elements successfully resolve the frequencies of higher-mode surface waves (e.g., at $n = 3$), whereas low-order elements are substantially limited. After the necessary filtering of abundant non-physical "numerical artifacts", the range of reliable solutions is critically narrowed. Attempts to force the extraction of higher modes using such low-order elements lead to an overestimation of the natural frequencies due to excessive mesh stiffness, as well as to strong non-physical oscillations in the mode shapes along the z -axis, rendering their application inefficient. To optimize computational costs and improve the accuracy of discrete mode shapes, a two-stage algorithm that consists of a preliminary calculation of the full spectrum on a coarse mesh with the filtering of physical eigenvalues and a local precise search in the vicinity of the identified values on a refined mesh, is proposed. The obtained results demonstrate the high accuracy of the proposed method in determining the characteristics of both surface and internal waves. This work presents a computational tool for determining natural oscillation frequencies, which serves as a basis for predicting complex fluid-structure interactions and optimizing cryogenic fuel management systems in launch vehicles and spacecraft.

Keywords: Stratified fluid; free axisymmetric oscillations; eigenvalue problem; finite element method; internal waves; surface waves; Galerkin method.

Введение

Динамика стратифицированных жидкостей представляет собой фундаментальную проблему, имеющую широкое применение как в

геофизической гидродинамике (изучение океанических и атмосферных течений), так и в современных аэрокосмических технологиях [1-3]. В частности, задача о собственных колебаниях непрерывно-стратифицированной жидкости в резервуарах имеет критическое значение для проектирования криогенных топливных баков ракет-носителей. С одной стороны, точное прогнозирование собственных частот жидкости является необходимым условием для предотвращения резонанса между колебаниями жидкости и конструкцией летательного аппарата, а также для настройки фильтров системы управления движением и ориентацией. С другой стороны, осцилляции внутренних волн возмущают термодинамическую границу раздела, влияя на стабильность давления наддува в газовой подушке [4-7]. При внешнем кинематическом возбуждении в стратифицированной жидкости со свободной поверхностью одновременно генерируются высокочастотные поверхностные волны и низкочастотные внутренние волны. Хотя теоретически различие в их частотных диапазонах велико, и линейная связь между ними слаба, их одновременное присутствие значительно расширяет диапазон широкополосных возмущений, действующих на летательный аппарат во время сложных этапов миссии, таких как орбитальные манёвры, разделение космических аппаратов или либрации космических тросовых систем. С другой стороны, подобная ситуация создаёт трудности для численного спектрального анализа: как в рамках единого уравнения на собственные значения получить одновременно с большой точностью высоко- и низкочастотные моды, существенно различающиеся по масштабу.

Исторически анализ волновых движений неоднородных жидкостей опирался на аналитические методы, с помощью которых был получен ряд результатов для сосудов канонических форм. Копачевский Н.Д. и Темнов А.Н. [8-9], опираясь на теорию функционального анализа, исследовали задачу о малых колебаниях идеальной непрерывно-стратифицированной жидкости со свободной поверхностью в цилиндрических и прямоугольных сосудах. Ими была строго математически доказана сложная структура спектра собственных значений, включающая дискретный спектр поверхностных волн и предельный спектр

внутренних волн. В свою очередь, Габов С.А. и Свешников А.Г. [10] внесли фундаментальный вклад в линейную теорию нестационарных внутренних волн в полностью заполненных закрытых сосудах (без свободной поверхности), получив точные аналитические решения для законов распространения внутренних волн при заданных граничных условиях.

Однако при переходе к реальным инженерным резервуарам более сложной геометрии возможности чисто аналитических подходов резко ограничиваются. Для преодоления этого ограничения Луковский И.А., Гаврилюк И. и др. [11-13] успешно применили полуаналитические вариационные методы, в частности, метод Ритца и метод суперпозиции, позволяющие находить высокоточные приближённые решения для конкретных резервуаров, таких как наклонные цилиндрические или усечённые конические сосуды. Тем не менее, ключевым недостатком классических вариационных методов является их сильная зависимость от глобальных координатных функций. При решении необходимо заранее угадывать и конструировать глобальные базисные функции (например, на основе функций Бесселя или полиномов Лежандра), соответствующие специфической геометрии сосуда. Это означает, что как только резервуар принимает открытую осесимметричную форму с произвольной кривой границы, поиск глобальной функции, удовлетворяющей физическим граничным условиям во всей области, становится практически невыполнимым.

Для полного избавления от ограничений, накладываемых вариационным методом, метод Галёркина, основанный на слабой формулировке краевой задачи, стал универсальным направлением эволюции спектрального анализа в гидродинамике [14-16]. Фундаментальные основы и вопросы вычислительной устойчивости подобных вариационных подходов подробно изложены в классических трудах, например, С.Г. Михлиным [17]. В отличие от способа Ритца, данный подход отказывается от попыток поиска единой глобальной базисной функции во всей расчётной области. За счёт дискретизации сложной жидкой области на маленькие элементы и конструирования простых локальных полиномиальных базисных функций внутри каждого элемента,

конечноэлементный подход теоретически способен с высокой гибкостью аппроксимировать любую сложную осесимметричную геометрию.

Несмотря на высокую геометрическую адаптивность МКЭ, при решении спектральной задачи о колебаниях стратифицированных жидкостей со свободной поверхностью традиционные элементы низкого порядка сталкиваются с упомянутой выше проблемой: синхронным разрешением высокочастотных поверхностных волн и низкочастотных внутренних волн. Как известно из фундаментальных трудов по вычислительной гидродинамике [18], стандартные изопараметрические элементы низкого порядка подвержены сильной численной дисперсии при аппроксимации сложных волновых процессов. В задачах спектрального анализа гидродинамических систем это приводит не только к генерации обширного массива нефизических численных артефактов (ложных мод), но и к искажениям физической картины: принудительное выделение высших форм колебаний сопровождается завышением собственных частот и сильными нефизическими осцилляциями форм колебаний. Таким образом, для высокоточного широкополосного спектрального анализа становится критически важным переход к использованию элементов Паскаля более высокого порядка, способных обеспечить физическую достоверность решений без катастрофического роста вычислительных затрат.

С целью устранения вышеуказанных теоретических и численных недостатков, в настоящей работе разработана двойная (аналитическая и численная) исследовательская база. Хотя в рамках работы спектральная задача решается преимущественно для цилиндрического сосуда правильной формы, предлагаемый численный метод является универсальным и пригоден для анализа открытых осесимметричных сосудов более сложной формы.

В работе выводятся точное аналитическое и дискретное решения, обеспечивающих глобальную дифференцируемость C^1 элементов Паскаля пятого порядка (21 степень свободы) для собственных колебаний непрерывно-стратифицированной жидкости в сосуде сложной формы.

Для решения проблемы больших вычислительных затрат при использовании элементов высокого порядка и одновременном обеспечении

высокой точности дискретных форм колебаний предложен эффективный двухуровневый алгоритм поиска: первоначальное полное определение всего спектра частот на грубой сетке с последующим локальным точным поиском на сгущённой сетке. Сравнение вычислений демонстрирует, что полученный результат по предложенному в статье численному алгоритму с большой степенью точности совпадает с аналитическим решением.

Постановка задачи и вывод интегрального тождества

Рассмотрим экспоненциально стратифицированную жидкость.

$$\rho_0(z) = \rho_{0\text{стат}} e^{-\beta z}, \rho_{0\text{стат}} = \text{const} \quad (1.1)$$

Уравнения малых колебаний стратифицированной жидкости, занимающей жидким объёмом Ω , со свободной поверхностью Γ в приближении Буссинеска, выраженные через одну искомую функцию давления, в цилиндрической системе координат имеют вид [19]

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta p + N^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} \right) = 0, & \text{в } \Omega \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} + N^2 \left(\frac{\partial p}{\partial r} n_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} n_\theta \right) = 0, & \text{на } S \cup \Sigma \\ \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{g} (N^2 + \partial_{tt}) p = 0, & \text{на } \Gamma, \end{cases} \quad (1.2)$$

где $S \cup \Sigma$ — смачиваемая поверхность. S — дно; Σ — боковые стенки. Границы сосуда Γ , Σ и S — твёрдые.

Пусть $(r, \theta, z, t) = p(r, z) e^{i(m\theta + \omega t)}$. После подстановки получим

$$\begin{cases} -\omega^2 \Delta p + N^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} - m^2 \frac{p}{r^2} \right) = 0, & \text{в } \Omega \\ -\omega^2 \frac{\partial p}{\partial z} n_z + (N^2 - \omega^2) \left(\frac{\partial p}{\partial r} n_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} n_\theta \right) = 0, & \text{на } S \cup \Sigma \\ \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{N^2 - \omega^2}{g} p = 0, & \text{на } \Gamma \end{cases} \quad (1.3)$$

Решение спектральной задачи $p(r, z)$ ищем методом Галёркина. С этой целью составим функционал

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[\Delta p - \frac{N^2}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} - m^2 \frac{p}{r^2} \right) \right] \cdot v \, d\Omega = \\
& = - \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla v \, d\Omega + \oint_{\Gamma+S+\Sigma} \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} v \, dS - \frac{N^2}{\omega^2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} - m^2 \frac{p}{r^2} \right] v \, d\Omega
\end{aligned} \tag{1.4}$$

где весовая функция $v(r, z) \in W_2^1(\Omega)$ — произвольная функция.

Для применения МКЭ исходная спектральная задача (1.3) преобразуется в слабую формулировку. Выполняя интегрирование по частям по объёму жидкости Ω и применяя формулу Гаусса-Остроградского с учётом граничных условий на твёрдых стенках $S \cup \Sigma$ и свободной поверхности Γ , получаем следующее интегральное тождество

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[\Delta p - \frac{N^2}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} - m^2 \frac{p}{r^2} \right) \right] \cdot v \, d\Omega = \\
& = \int_{\Omega} \left[\nabla p \cdot \nabla v - \frac{N^2}{\omega^2} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + m^2 \frac{p}{r^2} v \right) \right] d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{N^2 - \omega^2}{g} p v \, dS = 0
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Размерность интегральных результатов каждого члена уравнения равна $\text{м}^5/\text{с}^4$.

Численное решение по методу Бубнова-Галёркина

Расчётная схема и дискретизация.

Допустим, что жидкий объём состоит из N элементов $\Omega_i, i = 1, \dots, N$. Узловые параметры $q_j, j = 1, \dots, m$, где m — суммарное количество всех узловых параметров. Узлы обозначаются $x = X_k, k = 1, \dots, s$, где s — количество узлов во всем объёме. $m = \sum_{k=1}^s n_k$, где n_k — количество параметров в узле X_k .

Для произвольной функции $v^N(r, x) \in V_n^h \subset W_2^1$ решение из множества $P_n^h \subset W_2^1$ удовлетворяет тождеством (1.5). Пусть

$$p^N(r, z) = \sum_{i=1}^m q_i^N \varphi_i^N(r, z) \tag{2.1}$$

С учётом того, что интегральное тождество (1.6) справедливо для всех базисных функций (функций формы) $\varphi_j^N(r, z)$ в пространстве $V_n^h (j = 1, \dots, m)$, то

(1.5) можно переписать как выражение от q_i^N , $\varphi_i^N(r, z)$ и $\varphi_j^N(r, z)$, где $\varphi_j^N(r, z)$ — сопряжённое $\varphi_i^N(r, z)$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m q_i^N \nabla \varphi_i^N \cdot \nabla \varphi_j^N d\Omega - \frac{N^2}{\omega^2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m q_i^N \frac{\partial \varphi_i^N}{\partial r} \cdot \frac{\partial \varphi_j^N}{\partial r} d\Omega - m^2 \frac{N^2}{\omega^2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m q_i^N \varphi_i^N \cdot \frac{\varphi_j^N}{r^2} d\Omega \\ + \frac{N^2 - \omega^2}{g} \int_S \sum_{i=1}^m q_i^N \varphi_i^N \varphi_j^N dS = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для n -го элемента с m_n степенями свободы

$$p^{(n)}(r, z) = \sum_{i=1}^{m_n} q_i^{(n)} \varphi_i^{(n)}(r, z) = \{q^{(n)}\}^T \{\varphi^{(n)}\},$$

$$\{\varphi^{(n)}\} = [K^{(n)}]\{x\}, \quad \{x\} = \{1, r, z, r^2, zr, z^2, \dots\}^T \quad (2.3)$$

$$p^{(n)}(r, z) = \{q^{(n)}\}^T [K^{(n)}]\{x\} \quad (2.4)$$

где $[K^{(n)}]$ — матрица коэффициентов функций формы. Степень $\{x\}$ зависит от требования к непрерывно-дифференцируемости исходных уравнений. В нашем расчёте по треугольнику Паскаля до 5-ой степени включительно в случае треугольного элемента.

Интегральное тождество в n -ом элементе с m_n степенями свободы в развёрнутом виде

$$\begin{aligned} [K^{(n)}] \int_{\Omega^{(n)}} \left(\frac{\partial \{x\}}{\partial r} \frac{\partial \{x\}^T}{\partial r} + \frac{m^2}{r^2} \{x\} \{x\}^T + \frac{\partial \{x\}}{\partial z} \frac{\partial \{x\}^T}{\partial z} \right) d\Omega [K^{(n)}]^T \{q^{(n)}\} - \\ - \frac{N^2}{\omega^2} [K^{(n)}] \int_{\Omega^{(n)}} \frac{\partial \{x\}}{\partial r} \frac{\partial \{x\}^T}{\partial r} d\Omega [K^{(n)}]^T \{q^{(n)}\} - \\ - m^2 \frac{N^2}{\omega^2} [K^{(n)}] \int_{\Omega^{(n)}} \frac{1}{r^2} \{x\} \{x\}^T d\Omega [K^{(n)}]^T \{q^{(n)}\} + \\ + \frac{N^2 - \omega^2}{g} [K^{(n)}] \int_{S^{(n)}} \{x\} \{x\}^T dS [K^{(n)}]^T \{q^{(n)}\} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Введём безразмерный параметр $\mu = \omega^2/N^2$. Тогда

$$\frac{N^2}{\omega^2} = \frac{1}{\mu}, \quad \frac{N^2}{N^2 - \omega^2} = \frac{1}{1 - \mu}, \quad \frac{N^2 - \omega^2}{g} = \frac{N^2 - \omega^2}{N^2} \frac{N^2}{g} = \beta(1 - \mu) \quad (2.6)$$

Пусть

$$[a_1^{(n)}] = \int_{\Omega^{(n)}} \frac{\partial\{x\}}{\partial r} \frac{\partial\{x\}^T}{\partial r} d\Omega \quad (2.7); \quad [a_2^{(n)}] = \int_{\Omega^{(n)}} \{x\}\{x\}^T \frac{1}{r^2} d\Omega \quad (2.8);$$

$$[a_3^{(n)}] = \int_{\Omega^{(n)}} \frac{\partial\{x\}}{\partial z} \frac{\partial\{x\}^T}{\partial z} d\Omega \quad (2.9); \quad [b_1^{(n)}] = \int_{S^{(n)}} \{x\}\{x\}^T dS \quad (2.10).$$

Тогда (2.5) можно записать в следующем виде

$$\left((\mu - 1) [a_1^{(n)}] + m^2 (\mu - 1) [a_2^{(n)}] + \mu [a_3^{(n)}] + (\mu - \mu^2) [b_1^{(n)}] \right) \{q^{(n)}\} = 0 \quad (2.11)$$

После упрощения окончательно получим

$$([A]^{(n)} \mu^2 + [B]^{(n)} \mu + [C]^{(n)}) \{q^{(n)}\} = 0 \quad (2.12)$$

где

$$[A]^{(n)} = \beta [b_1^{(n)}] \quad (2.13)$$

$$[B]^{(n)} = - \left([a_1^{(n)}] + m^2 [a_2^{(n)}] + [a_3^{(n)}] + \beta [b_1^{(n)}] \right) \quad (2.14)$$

$$[C]^{(n)} = [a_1^{(n)}] + m^2 [a_2^{(n)}] \quad (2.15)$$

В дальнейшем необходимо локальную систему уравнений для каждого элемента свести к единой глобальной системе для всего жидкого объёма Ω . Размер глобальных матриц равняется суммарному количеству степеней свободы (узловых параметров) всех элементов.

$$([A] \mu^2 + [B] \mu + [C]) \{q\} = 0 \quad (2.16)$$

Для обеспечения непрерывности C^1 и предотвращения нефизических осцилляций в зонах больших градиентов, дискретизация расчётной области выполняется с использованием треугольных элементов Argyris пятого порядка (у каждого элемента 21 степень свободы). Вычисление локальных матриц жёсткости и масс (2.7)-(2.10) осуществляется численно с применением симметричной 7-точечной квадратурной формулы Гаусса-Лежандра (Gauss-5), обладающей пятым порядком алгебраической точности для двумерных треугольных областей.

Стратегия поиска собственных частот и пост-обработка.

Подключим функции формы к каждому элементу, проинтегрируем для каждого элемента и после сборки глобальных матриц получим задачу на собственные значения (2.16), которую можно представить в виде

$$\begin{cases} [C]\{q\} + \mu([B]\{q\} + [A]\{q'\}) = 0 \\ \{q'\} - \mu\{q\} = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\begin{bmatrix} -[C] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ q' \end{Bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} [B] & [A] \\ [I] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ q' \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.18)$$

В матричной форме данная система принимает вид классической обобщённой задачи на собственные значения

$$[\mathcal{A}]\{Q\} = \mu[\mathcal{B}]\{Q\} \quad (2.19)$$

$$\text{где } [\mathcal{A}] = \begin{bmatrix} -[C] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix}, [\mathcal{B}] = \begin{bmatrix} [B] & [A] \\ [I] & [0] \end{bmatrix}, \{Q\} = \begin{Bmatrix} q \\ q' \end{Bmatrix}.$$

Математическим преимуществом линеаризации (2.18) является полное сохранение ленточной и разреженной структуры исходных глобальных матриц. В стандартной вычислительной практике прямое решение полиномиальных задач на собственные значения часто реализуется через автоматическое формирование сопровождающей матрицы в плотном формате. Однако при использовании элементов с непрерывной дифференцируемостью C^1 (в нашем случае 21 степень свободы на треугольник) размерность матриц возрастает настолько стремительно, что применение прямых методов полного спектра приводит к неизбежному исчерпанию оперативной памяти или колоссальным затратам процессорного времени.

Здесь выбор базового алгебраического алгоритма имеет решающее значение. Классические методы поиска полного спектра (например, QZ -алгоритм обобщённого разложения Шура) надёжны и находят абсолютно все решения, но оперируют плотными матрицами (вычислительная сложность $O(N^3)$). С другой стороны, итерационные методы для разреженных матриц на базе подпространств Крылова вычислительно эффективны $O(N)$, но склонны к расходимости или сходимости к численным артефактам (ложным модам) в плотном высокочастотном спектре, если им не задан точный целевой ориентир.

Для преодоления этих алгоритмических противоречий и обеспечения чистоты физических решений в настоящей работе предложена и реализована двухэтапная стратегия поиска и пост-обработки.

Этап 1. Глобальный поиск на грубой сетке

На первом этапе расчётная область дискретизируется относительно грубой сеткой. Благодаря высоким аппроксимационным свойствам элементов Паскаля 5-го порядка, даже грубое разбиение позволяет корректно уловить базовую физику волновых процессов. На данном этапе применяется алгоритм поиска полного спектра (на базе QZ -алгоритма). Поскольку глобальное число степеней свободы N ограничено грубой сеткой, QZ -алгоритм за приемлемое время вычисляет весь спектр. Полученный массив собственных значений подвергается математической фильтрации: ложные моды отсеиваются, а физически достоверные собственные частоты фиксируются в качестве целевых ориентиров (значений сдвига σ).

Этап 2. Локальный точный поиск на сгущённой сетке

На втором этапе для достижения эталонной точности гладких форм колебаний выполняется локальное измельчение сетки. Поскольку применение QZ -алгоритма для матриц такой размерности вычислительно недостижимо, здесь задействуется итерационный метод на подпространствах Крылова — неявно перезапускаемый алгоритм Арнольди. Итерационный решатель, оперируя исключительно разреженными блочными матрицами $[A]$ и $[B]$, обеспечивает быструю сходимость к искомым собственным значениям.

Здесь необходимо сделать ключевое теоретическое пояснение механизма алгоритма вложенных сеток: в разработанном двухуровневом алгоритме второй этап фактически не вносит вклада в итоговое количество захваченных эффективных собственных решений. Широта охвата физически достоверных решений (т.е. спектральный диапазон) полностью определяется на первом этапе в поиске на грубой сетке при сканировании полной матрицы. Ключевой целью введения локально сгущённой сетки на втором этапе является обеспечение достаточно плотного набора узлов выборки для точного отображения форм колебаний.

Данная комбинированная стратегия позволяет в полной мере реализовать вычислительный потенциал элементов C^1 , гарантируя точность определения и собственных частот, и дискретных форм колебаний стратифицированной жидкости при рациональном распределении нагрузки вычислительных ресурсов.

Аналитическое решение задачи

Вывод аналитического решения

Для верификации предложенной численной модели необходимо получить точное аналитическое решение. Применяя к краевой задаче (1.3) классический метод разделения переменных в виде

$$p(r, \theta, z, t) = R(r) \cdot e^{im\theta} \cdot Z(z) \cdot e^{i\omega t} \quad (3.1)$$

задача сводится к решению уравнения Бесселя для радиальной координаты и тригонометрического/гиперболического уравнения для осевой. Подставляя (3.1) в исходную систему уравнений и применяя классический метод разделения переменных, задача сводится к решению уравнения Бесселя для радиальной координаты и тригонометрического (при $\mu < 1$) или гиперболического (при $\mu > 1$) уравнения для осевой координаты z . Удовлетворяя граничным условиям на дне, стенках и свободной поверхности, получаем следующие трансцендентные уравнения для определения безразмерного квадрата частоты $\mu = \omega^2/N^2$.

Для случая $\mu < 1$ (внутренние волны):

$$\frac{\xi_{mn}}{r_0} \sqrt{\frac{1-\mu}{\mu}} \tan\left(\frac{\xi_{mn}H}{r_0} \sqrt{\frac{1-\mu}{\mu}}\right) = \beta(1-\mu), \quad \mu < 1 \quad (3.2)$$

Для случая $\mu > 1$ (поверхностные волны):

$$\frac{\xi_{mn}}{r_0} \sqrt{\frac{\mu-1}{\mu}} \tanh\left(\frac{\xi_{mn}H}{r_0} \sqrt{\frac{\mu-1}{\mu}}\right) = \beta(\mu-1), \quad \mu > 1 \quad (3.3)$$

Безразмерная квадратная частота μ и соответствующая собственная частота ω определяются численным решением уравнений.

Сравнение волновых характеристик и спектральных свойств стратифицированной жидкости.

1. Внутренние волны

При анализе свойств внутренних гравитационных волн целесообразно исходить из классического физического допущения, согласно которому все жидкие частицы на свободной поверхности в процессе движения остаются на ней. Условие непротекания на свободной поверхности в гидродинамике известно как приближение «жёсткой крышки», что математически означает равенство нулю вертикальной компоненты скорости на высоте уровня жидкости. При таком предположении получают дискретные значения вертикального волнового числа (граничное условие «жёсткой крышки»)

$$\gamma_l = \frac{l\pi}{H}, \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (3.4)$$

где l обозначает номер тона колебаний по вертикали. Не трудно заметить, что это решение идентично случаю полного заполнения сосуда высотой H .

Приближение «жёсткой крышки» позволяет непосредственно получить дисперсионное соотношение для внутренних волн в стратифицированной жидкости. Подставляя γ_l , полученные из граничных условий, в определение параметра $\gamma = k\sqrt{(1-\mu)/\mu}$ (где $k = \xi_{mn}/r_0$), и выполняя алгебраические преобразования, можно в явном виде выразить отношение квадратов частот μ

$$\mu = \frac{k^2}{k^2 + \gamma_l^2} = \frac{(\xi_{mn}/r_0)^2}{(\xi_{mn}/r_0)^2 + (l\pi/H)^2} \quad (3.5)$$

Полученное выражение может представлять собой приближенное дисперсионное соотношение для внутренних волн при наличии свободной поверхности. Как будет подтверждено в таблице 1, точное решение для внутренних волн со свободной поверхностью оказывается исключительно близким к решению в приближении «жёсткой крышки». При этом, поскольку реальная свободная поверхность освобождает часть кинематической связи системы, то согласно принципу Рэлея, минимум отношения Рэлея уменьшается, поэтому истинные частоты внутренних волн всегда оказываются несколько ниже частот аналогичных мод в приближении «жёсткой крышки».

Сравнение аналитического решения в допущении «жёсткой крышки» (ж.к.) и решения со свободной поверхностью (с.п.)

Номера тона (m, n, l)	$\omega_{\text{ж.к.}}, \text{с}^{-1}$	$\omega_{\text{с.п.}}, \text{с}^{-1}$	Погрешность, $\varepsilon \%$
(0, 1, 1)	0.9164	0.9161	0.0421
(0, 1, 2)	0.7659	0.7653	0.0819
(0, 1, 3)	0.6249	0.6243	0.0815
(0, 2, 1)	0.9665	0.9665	0.0046
(0, 2, 2)	0.9040	0.9038	0.0141
(0, 2, 3)	0.8222	0.8220	0.0218
(0, 3, 1)	0.9789	0.9788	0.0011
(0, 3, 2)	0.9464	0.9463	0.0038
(0, 3, 3)	0.8987	0.8987	0.0070
(1, 1, 1)	0.7535	0.7508	0.3596
(1, 1, 2)	0.5008	0.4994	0.2795
(1, 1, 3)	0.3604	0.3598	0.1689
(1, 2, 1)	0.9501	0.9500	0.0130
(1, 2, 2)	0.8533	0.8530	0.0337
(1, 2, 3)	0.7421	0.7418	0.0433
(1, 3, 1)	0.974100	0.974079	0.0022
(1, 3, 2)	0.9295	0.9294	0.0072
(1, 3, 3)	0.8671	0.8670	0.0123

2. Поверхностные волны

Для поверхностных волн показательным является сравнение с классической задачей о колебаниях свободной поверхности однородной жидкости. Как демонстрирует таблица 2, в условиях слабой стратификации ($\beta = 0.1 \text{ м}^{-1}$) частоты колебаний свободной поверхности весьма близки к частотам в однородной жидкости, однако частоты аналогичных мод проявляют незначительное повышение. Физическая природа этого явления заключается в том, что градиент плотности в толще жидкости создаёт дополнительную восстанавливающую силу (силу Архимеда) в дополнение к гравитационному полю. Макроскопически эта суперпозиция восстанавливающих сил эквивалентна увеличению значений элементов глобальной матрицы жёсткости, что и приводит к общему увеличению собственных частот.

$$\omega_{\text{однород.}} = \sqrt{gk \tanh(kH)} \quad (3.6)$$

Таблица 2

Сравнение аналитического решения однородной жидкости (однород.) и решения стратифицированной жидкости (страт.)

Номера тона (m, n)	$\omega_{\text{однород.}}, \text{с}^{-1}$	$\omega_{\text{страт.}}, \text{с}^{-1}$	Погрешность, $\varepsilon \%$
(0, 1)	6.1310	6.1711	0.6546
(0, 2)	8.2960	8.3256	0.3570
(0, 3)	9.9901	10.0147	0.2460
(1, 1)	4.2473	4.3048	1.3550
(1, 2)	7.2319	7.2659	0.4700
(1, 3)	9.1510	9.1779	0.2933

Точность численного решения

Вариационная природа численной погрешности и эффект смягчения при редуцированном интегрировании

При количественном сравнении собственных частот поверхностных и внутренних волн стратифицированной жидкости наблюдается исключительно устойчивый и противоречащий интуиции численный эффект: для абсолютно идентичной физической модели и граничных условий собственные частоты, рассчитанные с использованием элементов высокого порядка, всегда оказываются несколько меньше точных аналитических решений. Для объяснения источника этой незначительной погрешности необходимо проанализировать базовые математические механизмы численного алгоритма МКЭ. В классической теории конечных элементов метод Бубнова-Галёркина для консервативных систем математически полностью эквивалентен энергетическому вариационному принципу Рэлея-Ритца. Дискретизация сплошной жидкой среды на конечное число степеней свободы по сути эквивалентна наложению на реальную гидродинамическую систему искусственных кинематических ограничений. Жидкие частицы теряют возможность бесконечно свободной деформации и вынуждены подчиняться законам распределения полиномиальных функций формы. Подобные ограничения приводят к тому, что для реализации эквивалентной деформации системе требуется накопить большую энергию деформации, что макроскопически проявляется в увеличении жёсткости глобальной матрицы $[K]$.

Следовательно, собственные частоты, вычисленные стандартным методом Галёркина, теоретически должны строго приближаться к истинному значению сверху, то есть давать верхнюю границу точного решения.

Отметим, что в данной работе численные решения опускаются ниже точного аналитического решения. Истинная причина этого феномена кроется не в различиях физических моделей или граничных условий, а в эффекте смягчения жёсткости, вызванном применением стратегии редуцированного интегрирования на этапе сборки глобальных матриц.

В построенном в данной работе функционале слабой формулировки объёмный интеграл матрицы жёсткости $[K]$, контролирующей внутреннюю энергию деформации жидкости, содержит скалярное произведение градиентов пробной и тестовой функций $\nabla p \cdot \nabla v$. Поскольку в статье используются элементы Паскаля 5-го порядка с дифференцируемостью C^1 , полином их функций формы имеет 5-й порядок, а соответствующий градиент — 4-й порядок. Таким образом, при вычислении матрицы жёсткости степень подынтегрального полинома в объёмном интеграле может достигать 8-го порядка. Для выполнения полного интегрирования полинома 8-й степени в двумерной треугольной области теоретически требуется применение высокопорядковых квадратурных формул Гаусса (например, с 16 и более точками). Однако для таких элементов при полном интегрировании подвержены проблеме численного записания и избыточной жёсткости сетки. В связи с этим при разработке алгоритма было принято решение намеренно применить к матрице жёсткости редуцированное интегрирование, используя схему Гаусса-Лежандра с алгебраической точности 5-го порядка (7 точек интегрирования, Gauss-5).

Введение редуцированного интегрирования фундаментально изменяет энергетический баланс алгебраической системы. Использование правила интегрирования 5-го порядка для оценки подынтегральной функции 8-го порядка означает, что алгоритм на численном уровне недоучитывает энергетический вклад некоторых высокочастотных мод деформации. Подобная недооценка энергии приводит к тому, что собранная глобальная матрица жёсткости численно подвергается дополнительному смягчению.

В рамках вычислительной схемы данной работы происходит исключительно тонкая взаимная компенсация погрешностей. С одной стороны, дискретизация Галёркина имеет тенденцию к увеличению жёсткости системы, что ведёт к повышению частоты; с другой стороны, редуцированное интегрирование Gauss-5 снижает учитываемую энергию деформации, вызывая смягчение матрицы, что ведёт к понижению частоты.

Поскольку сами элементы Паскаля 5-го порядка обладают высокой аппроксимационной способностью, ошибка усечения при их дискретизации минимальна (эффект искусственного ужесточения крайне слаб), в то же время эффект смягчения от редуцированного интегрирования численно начинает доминировать. Суперпозиция и конкуренция этих двух базовых механизмов не только преодолевают искусственную жёсткость от дискретизации, но и приводят к опусканию численных решений (немного ниже аналитических). При этом, так как квадратура Gauss-5 по-прежнему способна точно захватывать подавляющую часть эффективной энергии, падение частоты, вызванное этим смягчением, строго ограничивается узким диапазоном. Это идеально объясняет, почему предложенный алгоритм, выдавая заниженные численные решения, все же позволяет стабильно удерживать относительную погрешность в диапазоне экстремальной точности $\sim 0.01\%$.

Несмотря на наличие незначительного отклонения в численных значениях частот, вызванного редуцированным интегрированием, такое алгебраическое смягчение не оказывает негативного влияния на макроскопические характеристики колебаний. Как будет показано в следующих разделах, разработанный алгоритм сохраняет большую разрешающую способность при вычислении пространственных мод относительно высокого тона.

Верификация численных решений

Для более наглядного подтверждения достоверности численных решений в данном разделе проводится сравнение распределения собственных форм колебаний, полученных аналитическим методом и МКЭ.

На рисунках ниже представлено распределение гидродинамического давления p вдоль радиальной координаты r для классической моды поверхностной волны.

Поверхностные волны: Аналитика vs МКЭ | $m = 0$ ($H = 2.0$, $\beta = 0.10$, $H_{\max} = 0.100$)

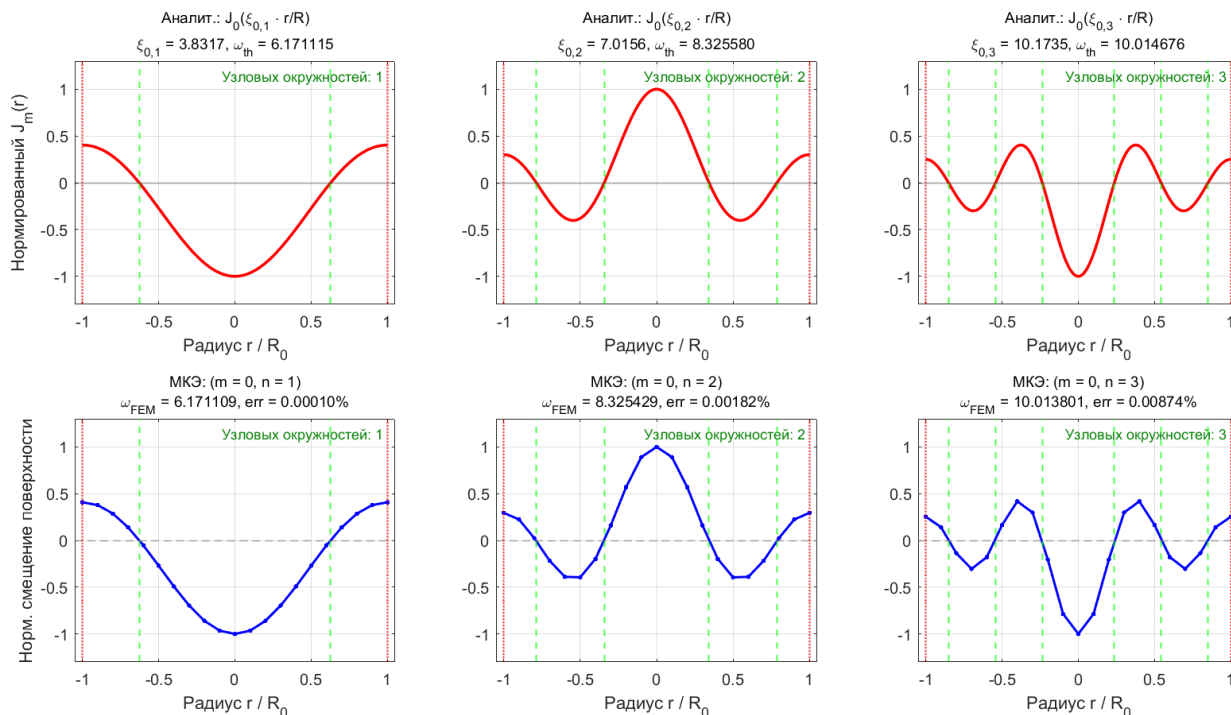


Рисунок 1 - Сравнение частот и форм колебаний свободной поверхности при $m = 0$

Поверхностные волны: Аналитика vs МКЭ | $m = 1$ ($H = 2.0$, $\beta = 0.10$, $H_{\max} = 0.100$)

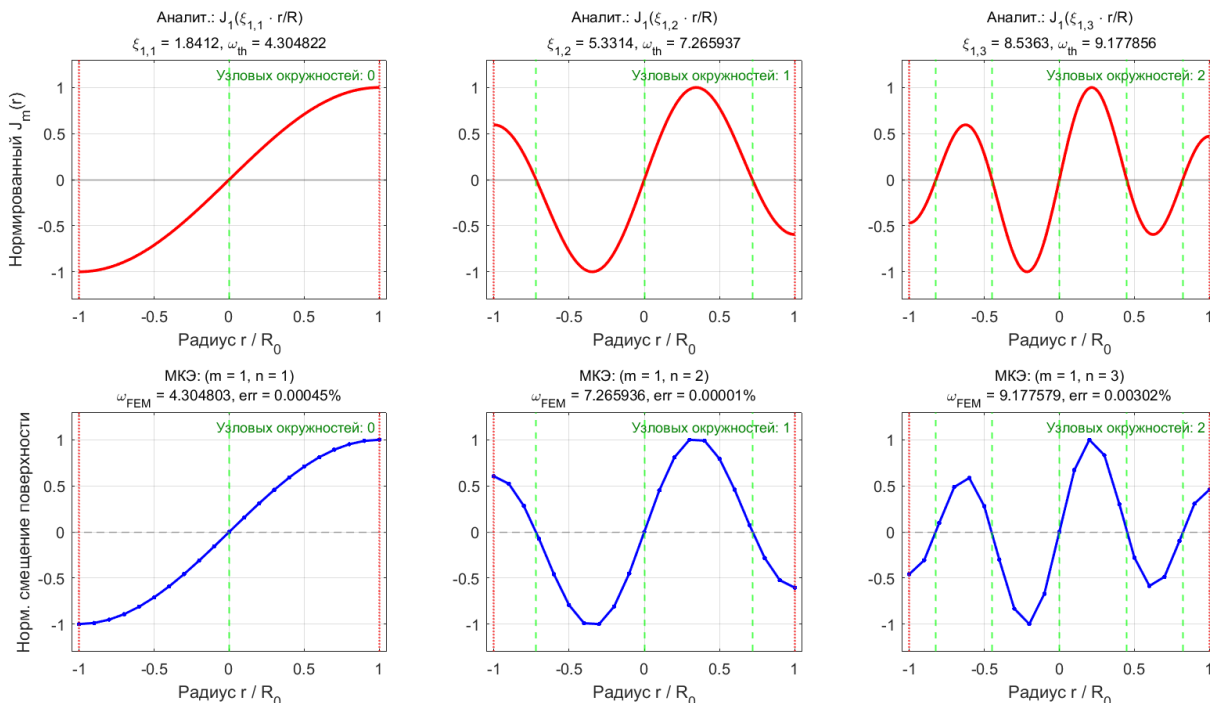


Рисунок 2 - Сравнение частот и форм колебаний свободной поверхности при $m = 1$

Из рисунков видно, что численные пространственные моды, рассчитанные на основе элементов Паскаля с дифференцируемостью C^1 совпадают с кривыми

функций Бесселя, полученными из аналитического решения. Это доказывает, что элементы 5-го порядка обладают высокой гладкостью при захвате колебаний свободной поверхности с большими градиентами, при этом отсутствуют численные осцилляции и артефакты вблизи границ, характерные для традиционных конечноэлементных схем.

Рисунок 3 демонстрирует характерное распределение давления p по глубине сосуда (вдоль оси z) для моды внутренней волны в области плотного спектра.

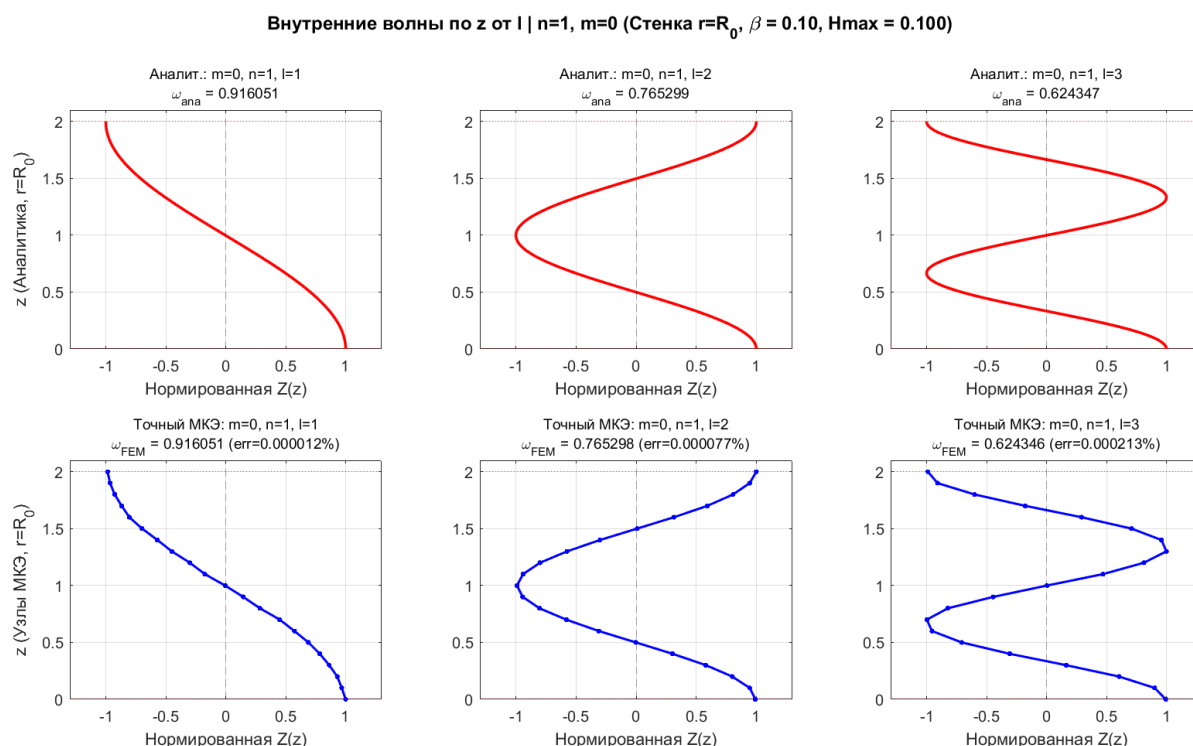


Рисунок 3 - Сравнение частот и форм внутренних волн (выбор m не влияет на формы колебаний)

Как показано на рисунке 3, поскольку внутренние волны обладают ярко выраженным характером стоячих волн в вертикальном направлении, форма колебаний демонстрирует периодические синусоидальные изменения по глубине. Численное решение МКЭ точно воспроизводит расположение узлов, определяемых вертикальным волновым числом $\gamma_l \approx l\pi/H$ из аналитического решения. Благодаря тому, что элементы C^1 обеспечивают глобальную непрерывность первых производных, даже в зонах резких градиентов вблизи жёсткой границы дна ($z = 0$) численная мода сохраняет высокую степень совпадения с точным аналитическим решением, что ещё раз подчёркивает надёжность предложенного в статье численного алгоритма.

Для наглядной демонстрации критических недостатков, возникающих при отказе от предлагаемого подхода и механизма сгущения сеток, на рисунках 4-5 представлены формы внутренних волн вдоль оси z , полученные прямым одноуровневым расчётом без использования алгоритма вложенных сеток, на примере $m = 0$. Такая же картина нефизических колебаний наблюдалась при $m = 1$, здесь подробно раскрывать не будем.

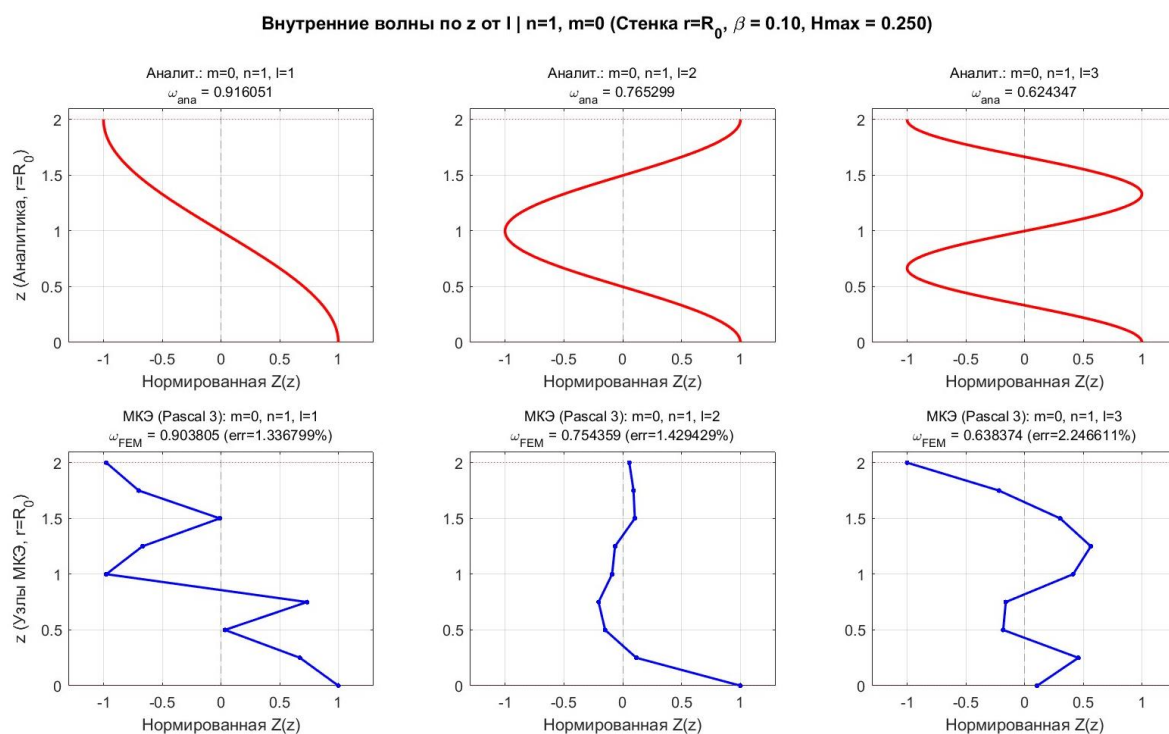


Рисунок 4 - Численные осцилляции по оси z при использовании элемента низкого порядка ($m = 0$)

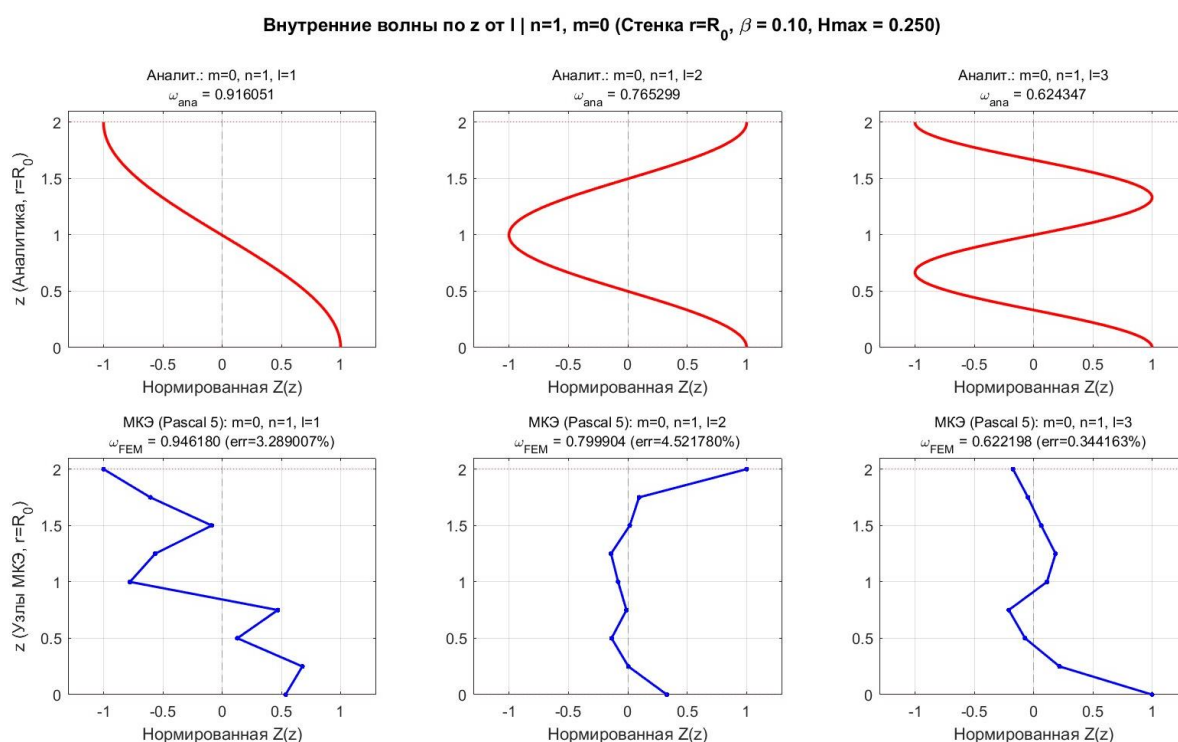


Рисунок 5 - Численные осцилляции по оси z при использовании элемента высокого порядка ($m = 0$)

Математическое объяснение этих нефизических осцилляций кроется в фундаментальных свойствах спектра внутренних волн и алгебраических ограничениях прямых решателей. В отличие от поверхностных волн, внутренние гравитационные волны обладают аномально плотным частотным спектром. При попытке прямого вычисления полного спектра с помощью алгоритмов для плотных матриц с применением классического QZ -алгоритма (обобщённого разложения Шура) возникает вычислительный парадокс: сплошное измельчение сетки приводит не к повышению, а к обратному падению точности.

С ростом числа элементов резко увеличивается размерность глобальных матриц, что неизбежно влечёт за собой стремительное ухудшение их числа обусловленности. Численные эксперименты выявили поразительный факт, что при прямом глобальном решении на сгущённой сетке погрешность собственных частот у элементов C^1 возрастает даже сильнее, чем у простых элементов C^0 . Это объясняется тем, что матрицы элементов Паскаля 5-го порядка обладают значительно большей алгебраической жёсткостью, из-за чего QZ -алгоритм, имеющий кубическую сложность $O(N^3)$, существенно накапливает ошибки округления именно в плотном спектре внутренних волн.

Как следствие, искажение собственных частот приводит к фатальному разрушению соответствующих собственных векторов и форм колебаний. В направлении оси z , где градиент давления жидкости имеет значительные перепады, эти накопленные алгебраические погрешности проявляются в дискретной области как резкие изломы и пространственные скачки. Подобные сильные нефизические осцилляции разрушают непрерывность мод стоячих волн, из-за чего построенные графики уже утрачивают инженерную ценность.

Таким образом, предложенный в статье двухуровневый вложенный механизм «поиск частот на грубой сетке + построение форм на сгущённой сетке» представляет собой метод для повышения точности алгебраических собственных значений и построения точных форм поверхностных и внутренних волн.

Асимптотическое поведение высокочастотных мод внутренних волн

Для дальнейшей демонстрации работоспособности и предельных возможностей предлагаемого двухэтапного алгоритма следует рассматривать поведение спектра в экстремальных условиях, когда номер тонов стремится к бесконечности. Из аналитического дисперсионного соотношения (3.5) можно установить, что спектр внутренних волн обладает асимптотикой, что при бесконечном росте вертикального тона $l \rightarrow \infty$ квадрат частоты $\mu \rightarrow 0$, а при росте радиального тона $n \rightarrow \infty$ значение $\mu \rightarrow 1$. Вблизи этих пределов спектр становится аномально плотным, что делает выделение истинных физических мод крайне сложной задачей, изобилующей численными артефактами.

На рисунке 6 представлено сопоставление теоретических асимптотических кривых и дискретных значений, полученных с помощью разработанного МКЭ. На рисунке 7 показана эволюция соответствующих форм колебаний.

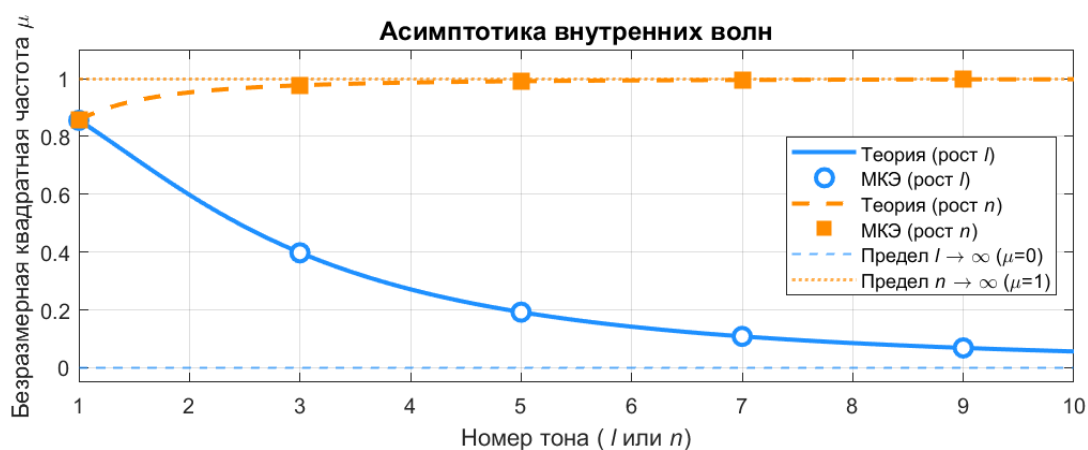


Рисунок 6 - Асимптотика внутренних волн ($m = 0$)

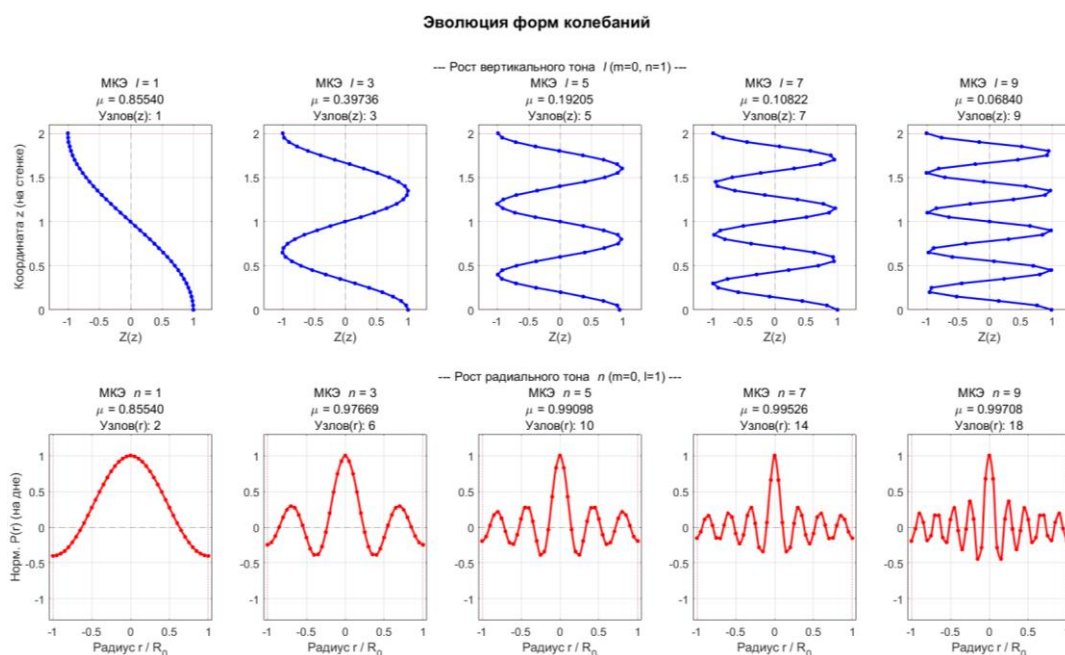


Рисунок 7 - Эволюция форм колебаний ($m = 0$)

Следует отметить, что демонстрация асимптотического поведения ограничена 9-м порядком ($l = 9$ и $n = 9$) ввиду фундаментальных физических ограничений дискретизации элементами, описываемых теоремой Котельникова-Шеннона (теоремой отсчётов). С ростом номеров тонов длины генерируемых внутренних волн стремительно уменьшаются. Как только длина полуволны становится сопоставимой с заданным максимальным размером конечного элемента, возникает эффект недодискретизации. В таких условиях сетке не хватает достаточное количество координатных узлов (точек выборки) для корректного разрешения форм колебаний с множеством пиков и впадин, что неизбежно приводит к искажению визуальной формы волны независимо от алгебраической точности самого решателя.

Как видно из графиков выше, благодаря механизму фильтрации и целевому поиску на сгущённой сетке, численные решения идеально следуют аналитическим трендам и для высоких тонов, демонстрируя гладкие, физически достоверные формы с точным количеством узловых точек.

Количественное сравнение вычислительной эффективности и точности

Для всесторонней оценки инженерной и практической ценности предложенного в данной работе двухуровневого алгоритма вложенного поиска (первичный поиск полного спектра на грубой сетке + точный целевой поиск на сгущённой сетке) на базе элементов с дифференцируемостью C^1 , в этом разделе проводится сравнительное тестирование с традиционной конечноэлементной моделью на основе полиномов Паскаля 3-го порядка (10 степеней свободы, дифференцируемость C^0).

Оба алгоритма выполнялись на вычислительной платформе с процессором AMD Ryzen 9 5900HX, оперативной памятью 32 ГБ и видеокартой AMD Radeon RX 6800M. Количественная оценка вычислительной эффективности проводилась с использованием встроенных функций таймера.

Конкретные сравнительные данные сведены в таблицу 4.

Показатель оценки / Тип элемента	Традиционный МКЭ низкого порядка (3-й порядок Паскаля, C^0)	Предложенный вложенный МКЭ (5-й порядок Паскаля, C^1)
Размер тестовой сетки и количество элементов	$H_{max} = 0.25$ $N_{элемент} = 110$ $N_{узел} = 68$	Грубая сетка $H_{max} = 0.25$ $N_{элемент} = 110$ $N_{узел} = 68$
		Сгущённая сетка $H_{max} = 0.10$ $N_{элемент} = 666$ $N_{узел} = 364$
Количество найденных поверхностных мод	9	14
Общее время вычислений	3 секунды	45 секунд
Погрешность вычисления поверхностных волн	$10^{-4}\% \sim 10^{-1}\%$	$10^{-6}\% \sim 10^{-3}\%$
Погрешность вычисления внутренних волн	$1\% \sim 7\%$	$10^{-6}\% \sim 10^{-4}\%$

Заключение

В работе представлено комплексное исследование собственных колебаний стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, включающее и аналитическое, и численное решение задачи. Показано, что элементы с дифференцируемостью C^1 обеспечивают более стабильное разрешение поверхностных мод по сравнению с традиционными элементами C^0 при одинаковом глобальном числе узлов. Это обусловлено тем, что функции формы элемента Argyris более корректно учитывают энергетический вклад граничного условия с градиентом в слабой формулировке дискретной системы.

Установлено, что сплошное измельчение расчётной сетки с целью поиска высокочастотных мод ведёт к существенному ухудшению обусловленности глобальных матриц. Возрастающая разница в порядках величин между матрицами объёмных и поверхностных интегралов снижает точность традиционных алгоритмов расчёта полного спектра. Вместе с накоплением нефизических численных артефактов это приводит к тому, что простое

глобальное сгущение сетки может даже снижать точность вычисления собственных значений.

Для преодоления данных ограничений предложен и верифицирован двухуровневый алгоритм вложенных сеток. На первом этапе применяется грубая сетка с элементами C^1 для быстрого расчёта полного спектра и локализации физических частот. На втором этапе эти частоты используются как точки сдвига для точного локального итерационного поиска на измельчённой сетке. Данный подход нивелирует влияние численной дисперсии, устраняет нефизические осцилляции значения физической величины (в нашей задаче — функции давления) при построении форм колебаний и обеспечивает высокую точность определения частот при рациональном использовании вычислительных ресурсов. Верификация результатов расчёта на задаче в открытом стандартном цилиндрическом сосуда, продемонстрировавшая совпадение с точным аналитическим решением, подтверждает высокую надёжность предложенного алгоритма. Разработанная методика находит дальнейшее применение к исследованию частотных характеристик и волновой динамики непрерывно-стратифицированных жидкостей в произвольных открытых осесимметричных резервуарах более сложной геометрии. В аэрокосмической инженерии подобные возможности имеют первостепенное значение для современных систем управления топливом. Точная оценка как колебаний свободной поверхности, так и внутренних гравитационных волн, позволяет корректно определять возмущённое давление на свободной поверхности и на глубине, а также взаимодействие жидкости с баком, что обеспечивает правильность прочностных расчётов топливных баков и помогает избежать резонанс при управлении ориентацией на динамических этапах полёта, для которых получение аналитических решений практически невозможно.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Список источников

1. Hawthorne W R. Dynamics of Nonhomogeneous Fluids. By CHIA-SHUN YIH. Macmillan, 1965. 306 pp. 90s. Journal of Fluid Mechanics, 1967, 29(4): 826-828.
2. Turner J S. Buoyancy effects in fluids. Cambridge university press, 1979.
3. Nappo C J. An introduction to atmospheric gravity waves. Academic press, 2012.
4. Dodge F T. The new "dynamic behavior of liquids in moving containers", Southwest Research Institute. 2000.
5. Темнов А.Н., Ян Наинг У. Об устойчивости стационарного вращения твёрдого тела с полостью, содержащей криогенную жидкость // Труды МАИ. 2023. № 133. с.1-30.
6. Темнов А.Н., Ян Наинг У. Вращение вокруг неподвижной точки твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, полностью наполненной неоднородной жидкостью // Труды МАИ. 2023. № 128. С. 1-30.
7. Simonini, A., Dreyer, M., Urbano, A. et al. Cryogenic propellant management in space: open challenges and perspectives. npj Microgravity 10, 34. 2024. <https://doi.org/10.1038/s41526-024-00377-5>
8. Копачевский Н.Д., Темнов А.Н. Свободные колебания идеальной стратифицированной жидкости в сосуде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1984.
9. Копачевский Н.Д., Темнов А.Н. Колебания стратифицированной жидкости в бассейне произвольной формы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1986. — Т. 26. № 5. С. 734-755. Л5.
10. Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. — М.: Наука 1990г. — 342с.
11. Луковский И.А., Барняк М.Я., Комаренко А.Н. Приближённые методы решения задач динамики ограниченного объёма жидкости. — Киев: Наук. думка, 1984. — 232 с.
12. Gavriluk I, Hermann M, Lukovsky I, et al. Natural sloshing frequencies in rigid truncated conical tanks. Engineering Computations, 2008, 25(6): 518-540.

13. Gavriluk I, Hermann M, Lukovsky I, et al. Multimodal method for linear liquid sloshing in a rigid tapered conical tank. *Engineering Computations*, 2012, 29(2): 198-220.
14. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике: пер. с англ. Рипол Классик, 1975.
15. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация: пер. с англ. — М.: Мир, 1986. — 318 с.
16. Bathe K J. Finite element procedures. Klaus-Jurgen Bathe, 2006.
17. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. — М.: Наука, 1966. — 432 с.
18. Karniadakis G, Sherwin S. Spectral/hp element methods for computational fluid dynamics. American Chemical Society, 2013.
19. Чжан Юе, Темнов А.Н. Собственные колебания вязкой стратифицированной жидкости в ограниченных объёмах // Труды МАИ: электрон. журнал. № 147. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188107>
20. Kuznetsov N G. On direct and inverse spectral problems for sloshing of a two-layer fluid in an open container. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 2016, 7(5): 854-864.
21. Ibrahim R A. Liquid sloshing dynamics: theory and applications. Cambridge university press, 2005.
22. Ibrahim R A. Recent advances in physics of fluid parametric sloshing and related problems. *Journal of Fluids Engineering*, 2015, 137(9): 090801.
23. O.C. Zienkewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu. The finite element method: its basis and fundamentals. 2005, 6th edition.
24. Sarar B C, Yildizdag M E, Fabbrocino F, et al. A comparative analysis for different finite element types in strain-gradient elasticity simulations performed on Firedrake and FEniCS. *Mathematics and Mechanics of Complex Systems*, 2025, 13(3): 237-252.
25. 张诚坚, 何南忠, 覃婷婷. 工程数学计算方法第二版. —北京: 高等教育出版社, 2016.3 第 137-142 页 (Чжан Чэнцзянь, Хэ Наньчжун, Тань Тинтин. Численные

методы инженерной математики, второе издание. — Пекин: Высшее образование, 2016.3 — стр. 137-142)

26. Hughes T.J.R. The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis. Courier Corporation, 2003.

27. Sutherland BR. Stratified fluids and waves. In: Internal Gravity Waves. Cambridge University Press; 2010:1-73.

28. Ochirov A A, Chashechkin Y D. Two-dimensional periodic waves in an inviscid continuously stratified fluid. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 2022, 58(5): 450-458.

29. Bulatov V V. Formulation of Initial-Boundary Conditions at Numerical Modeling of Wave Dynamics of Stratified Media. *Fluid Dynamics*, 2023, 58(Suppl 2): S200-S209. <https://doi.org/10.1134/S0015462823603091>

30. Stokes, G.G. On the theory of oscillatory waves. In Mathematical and Physical Papers (Cambridge Library Collection — Mathematics); Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2010; pp. 197-229. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511702242.013>

31. Lamb H. Hydrodynamics. 1993: 764.

32. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. — М.: Наука, 2015. — 733с.

33. Темнов А.Н. О спектре малых колебаний непрерывно-стратифицированной жидкости. Нелинейные проблемы аэроупругости. // Труды семинара, Казань, 1979, в.11, с.183-193

34. Копачевский Н.Д., Цветков Д.О. Колебания стратифицированных жидкостей // Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т. 29, С. 103-130.

35. Потетюнко Э Н, Черкесов Л В, Шубин Д С, Щербак Е.Н. Свободные колебания и обратные спектральные задачи. — М.: Вузовская книга, 2018. — 288 с.

References

1. Hawthorne W R. Dynamics of Nonhomogeneous Fluids. By CHIA-SHUN YIH. Macmillan, 1965. 306 pp. 90s. *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, 29(4): 826-828.

2. Turner J S. Buoyancy effects in fluids. Cambridge university press, 1979.

3. Nappo C J. An introduction to atmospheric gravity waves. Academic press, 2012.
4. Dodge F T. The new "dynamic behavior of liquids in moving containers", Southwest Research Institute. 2000.
5. Temnov A.N., Yan Naing U. On the stability of stationary rotation of a rigid body with a cavity containing a cryogenic fluid // Trudy MAI. 2023. No. 133. pp. 1-30.
6. Temnov A.N., Yan Naing U. Rotation about a fixed point of a rigid body with an ellipsoidal cavity completely filled with an inhomogeneous fluid // Trudy MAI. 2023. No. 128. pp. 1-30.
7. Simonini, A., Dreyer, M., Urbano, A. et al. Cryogenic propellant management in space: open challenges and perspectives. npj Microgravity 10, 34. 2024. <https://doi.org/10.1038/s41526-024-00377-5>
8. Kopachevsky N.D., Temnov A.N. Free oscillations of an ideal stratified fluid in a vessel // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1984.
9. Kopachevsky N.D., Temnov A.N. Oscillations of a stratified fluid in a basin of arbitrary shape // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1986. Vol. 26. No. 5. — pp. 734-755.
10. Gabov S.A., Sveshnikov A.G. Linear problems of the theory of nonstationary internal waves. — Moscow: Nauka, 1990. — 342 p.
11. Lukovsky I.A., Barnyak M.Ya., Komarenko A.N. Approximate methods for solving problems of the dynamics of a bounded volume of fluid. — Kiev: Nauk. Dumka, 1984. — 232 p.
12. Gavriluk I, Hermann M, Lukovsky I, et al. Natural sloshing frequencies in rigid truncated conical tanks. Engineering Computations, 2008, 25(6): 518-540.
13. Gavriluk I, Hermann M, Lukovsky I, et al. Multimodal method for linear liquid sloshing in a rigid tapered conical tank. Engineering Computations, 2012, 29(2): 198-220.
14. Zienkiewicz O. The finite element method in engineering. Ripol Classic, 1975.
15. Zienkiewicz O., Morgan K. Finite elements and approximation: translated from English. — Moscow: Mir, 1986. — 318 p.
16. Bathe K J. Finite element procedures. Klaus-Jurgen Bathe, 2006.

17. Mikhlin S.G. Numerical realization of variational methods. — Moscow: Nauka, 1966. — 432 p.
18. Karniadakis G, Sherwin S. Spectral/hp element methods for computational fluid dynamics. American Chemical Society, 2013.
19. Zhang Y., Temnov A.N. Natural oscillations of a viscous stratified fluid in bounded volumes // Trudy MAI. 2026. No. 147. pp. 1–23.
20. Kuznetsov N G. On direct and inverse spectral problems for sloshing of a two-layer fluid in an open container. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 2016, 7(5): 854-864.
21. Ibrahim R A. Liquid sloshing dynamics: theory and applications. Cambridge university press, 2005.
22. Ibrahim R A. Recent advances in physics of fluid parametric sloshing and related problems. Journal of Fluids Engineering, 2015, 137(9): 090801.
23. O.C. Zienkewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu. The finite element method: its basis and fundamentals. 2005, 6th edition.
24. Sarar B C, Yildizdag M E, Fabbrocino F, et al. A comparative analysis for different finite element types in strain-gradient elasticity simulations performed on Firedrake and FEniCS. Mathematics and Mechanics of Complex Systems, 2025, 13(3): 237-252.
25. Zhang C., He N., Qin T. Computational Methods in Engineering Mathematics, 2nd Edition. — Beijing: Higher Education Press, 2016.3. pp. 137-142.
26. Hughes T.J.R. The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis. Courier Corporation, 2003.
27. Sutherland BR. Stratified fluids and waves. In: Internal Gravity Waves. Cambridge University Press; 2010:1-73.
28. Ochirov A A, Chashechkin Y D. Two-dimensional periodic waves in an inviscid continuously stratified fluid. Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics, 2022, 58(5): 450-458.
29. Bulatov V V. Formulation of Initial-Boundary Conditions at Numerical Modeling of Wave Dynamics of Stratified Media. Fluid Dynamics, 2023, 58(Suppl 2): S200-S209. <https://doi.org/10.1134/S0015462823603091>

30. Stokes, G.G. On the theory of oscillatory waves. In Mathematical and Physical Papers (Cambridge Library Collection — Mathematics); Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2010; pp. 197–229. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511702242.013>
31. Lamb H. Hydrodynamics. 1993: 764.
32. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Waves in stratified media. — Moscow: Nauka, 2015. — 733 p.
33. Temnov A.N. On the spectrum of small oscillations of a continuously stratified fluid. Nonlinear problems of aeroelasticity. // Proceedings of the seminar, Kazan, 1979, vol. 11, pp. 183-193.
34. Kopachevsky N.D., Tsvetkov D.O. Oscillations of stratified fluids // Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. 2008. Vol. 29, pp. 103-130.
35. Potetyunko E.N., Cherkesov L.V., Shubin D.S., Shcherbak E.N. Free oscillations and inverse spectral problems. — Moscow: Vuzovskaya kniga, 2018. — 288 p.

Информация об авторах

Чжан Юе, аспирант кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители», МГТУ, г. Москва, Россия; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3021-0060>; e-mail: zhangyue_hit-bmstu@qq.com

Владимир Владимирович Орлов, главный инженер по технологиям и развитию, ООО «Интерпроком»; аспирант кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители», МГТУ, г. Москва, Россия; e-mail: v_orlov@list.ru

Александр Николаевич Темнов, к. ф.-м. н., доцент кафедр «Космические аппараты и ракеты-носители» и «Теоретическая механика», МГТУ, г. Москва, Россия; e-mail: antt45@mail.ru

Information about the authors

Zhang Yue, PhD student, department of “Spacecraft and Carrier-rockets”, Bauman Moscow State Technical University, Moscow city, Russia; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3021-0060>; e mail: zhangyue_hit-bmstu@qq.com

Vladimir V. Orlov, Chief Technology and Development Engineer, LLC “Interprocom”; PhD student, department of “Spacecraft and Carrier-rockets”, Bauman Moscow State Technical University (BMSTU), Moscow, Russia; e-mail: v_orlov@list.ru

Alexander N. Temnov, PhD of physical and mathematical sciences, associate professor, department of “Spacecraft and Carrier-rockets” & department of “Theoretical Mechanics”, Bauman Moscow State Technical University, Moscow city, Russia; email: antt45@mail.ru

Получено 06 июня 2026 ● Принято к публикации 01 августа 2026 ● Опубликовано 31 августа 2026
Received 06 June 2026 ● Accepted 01 August 2026 ● Published 31 August 2026
