

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи



УДК 517.925.51, 523.214, 530.182,
531.314.3, 531.537, 534.756.1

Сафонов Алексей Игоревич

**Исследование частных движений механических
систем при наличии возмущений**

1.1.7 – Теоретическая механика, динамика машин

**Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Научный руководитель

д.ф.-м.н., доц.

Холостова Ольга Владимировна

Москва – 2025

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Исследование нелинейных колебаний динамически сим-	
метричного спутника на круговой орбите при резонансе 1:1	32
1.1. Постановка задачи	32
1.2. Преобразование гамильтониана. Модельный гамильтониан	34
1.3. Анализ модельной системы с одной степенью свободы	37
1.3.1. Положения равновесия модельной системы	38
1.3.2. Фазовые портреты модельной системы	43
1.4. Семейство периодических решений полной системы. Исследо-	
вание устойчивости	46
1.5. Полная система. Условно-периодические движения	52
1.5.1. Случай $a = 0, b = 1$	53
1.5.2. Случай $a = 1, b = 0$	55
Глава 2. Исследование периодических движений близкой к ав-	
тономной гамильтоновой системы в окрестности неустойчивого	
равновесия в случае двойного резонанса третьего порядка	64
2.1. Постановка задачи	64
2.2. Преобразование гамильтониана. Модельные гамильтонианы	67
2.3. Положения равновесия модельных систем	70
2.4. Достаточные условия устойчивости положений равновесия	75
2.5. Необходимые условия устойчивости положений равновесия	77
2.6. Периодические движения	91

Глава 3. О периодических движениях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности кратного резонанса третьего порядка	94
3.1. Постановка задачи. Преобразование гамильтониана. Модельные гамильтонианы	94
3.2. Положения равновесия модельных систем	96
3.3. Достаточные условия устойчивости положений равновесия	104
3.4. Необходимые условия положений равновесия	105
3.5. Периодические движения	110
Глава 4. О бифуркациях положений равновесия близкой к автономной гамильтоновой системы в случаях двойного комбинационного резонанса третьего порядка	113
4.1. Постановка задачи. Преобразование гамильтониана. Модельная система	113
4.2. Положения равновесия модельной системы и их бифуркации	116
Глава 5. О периодических движениях симметричного спутника на слабоэллиптической орбите в одном случае кратного комбинационного резонанса третьего порядка	127
5.1. Постановка задачи	127
5.1.1. Случай круговой орбиты	128
5.1.2. Случай слабоэллиптической орбиты	130
5.2. Резонансные периодические движения в окрестности гиперболической прецессии	132
5.2.1. Нормализация гамильтониана при $e = 0$	132
5.2.2. Нормализация неавтономной части гамильтониана	134

5.2.3.	Положения равновесия в упрощенной модельной задаче	139
5.2.4.	Положения равновесия полной модельной системы	140
5.2.5.	Построение резонансных периодических движений спутника	143
5.2.6.	Устойчивость периодических движений	146
5.3.	Резонансные периодические движения в окрестности конической прецессии	147
5.3.1.	Периодические движения вблизи первой точки (5.1.8)	148
5.3.2.	Периодические движения вблизи второй точки (5.1.8)	154
Глава 6. О влиянии малого вязкого трения на устойчивость равновесий тела с вибрирующим подвесом		
6.1.	Постановка задачи	159
6.2.	Уравнения возмущенного движения	164
6.3.	Об устойчивости относительных равновесий при отсутствии трения	166
6.4.	Исследование устойчивости относительных равновесий твердого тела при наличии вязкого трения	168
6.4.1.	Случай расположения центра масс тела на главной оси инерции	169
6.4.2.	Случай динамически симметричного тела	171
6.4.3.	Случай расположения центра масс в главной плоскости инерции	176
Заключение		180
Список литературы		183

Введение

Исследование движений механических систем при наличии возмущений является актуальным направлением в теории устойчивости, теории нелинейных колебаний, в классической и небесной механике. Исторически теория возмущений возникла в небесной механике при исследовании взаимных возмущений планет Солнечной системы. Некоторые методы использовали еще Лагранж и Лаплас в своих исследованиях вековых возмущений планет [33, 90].

Основа современных методов исследования нелинейных систем заложена в трудах А.М. Ляпунова [34] по теории устойчивости и работах А. Пуанкаре о периодических движениях систем дифференциальных уравнений с малым параметром. В книге [141] содержится обстоятельное введение в теорию возмущений. Методы теории возмущений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром освещены в [21].

Во второй половине 20 века была разработана теория возмущений условно-периодических движений гамильтоновых систем (КАМ-теория, работы А.Н. Колмогорова, В.И. Арнольда, Ю. Мозера [1, 2, 67, 68]), а также теория устойчивости гамильтоновых систем при резонансах, значительный вклад в которую внесли работы А.П. Маркеева [38, 40, 42]. Удобным техническим аппаратом при исследовании гамильтоновых систем является метод нормальных форм [15], позволяющий максимально, с учетом характера задачи, упростить гамильтониан системы. Для гамильтоновых систем были разработаны конструктивные алгоритмы нормализации (метод Биркгофа [12], метод Депри-Хори и их модификации [21, 42, 121] и др.).

Целью данной диссертационной работы является исследование влияния малых возмущений различного вида на устойчивость частных движений и ха-

рактен нелинейных колебаний системы в их окрестности в задачах динамики гамильтоновых систем при наличии кратных резонансов, а также в диссипативных системах.

Отметим, что случаи кратных резонансов нередко встречаются при исследовании частных движений механических систем, зависящих от нескольких параметров. Для резонансных случаев существенным образом меняется как характер устойчивости самого решения (по сравнению со случаями отсутствия резонансов), так и характер движений системы в его окрестности. Исследование случаев кратных резонансов началось сравнительно недавно благодаря появлению компьютерных систем аналитических вычислений.

Первые работы по исследованию влияния резонанса на устойчивость положений равновесия механических систем появились на рубеже XIX и XX веков. Начальным этапом развития исследования автономных гамильтоновых систем можно считать работу [165], в которой проводился приближенный анализ нелинейных колебаний гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае резонанса третьего порядка. Впервые было показано, что устойчивое в линейном приближении решение может стать неустойчивым в случае рассмотрения резонансной формы гамильтониана, содержащей члены не выше четвертой степени. Данная задача получила дальнейшее развитие в работах [135, 136].

Современные результаты исследования устойчивости гамильтоновых систем при наличии однократных резонансов изложены в монографии [42], а также обзорах [31] и [52]. В [31] имеется также обзор исследований негамильтоновых систем при наличии резонансов.

Актуальным является вопрос исследования нелинейных колебаний гамильтоновых систем в малой окрестности изучаемого движения при наличии резонансов. Этой тематике посвящено значительное число работ.

Для *неавтономных, периодических по времени гамильтоновых систем с одной степенью свободы* в резонансных случаях и случаях, близких к резонансным, выделим исследования в случаях резонанса в вынужденных колебаниях [94, 96], параметрического резонанса [25] и на границе его области [44], резонансов третьего [43, 97] и четвертого [46, 99, 100] порядков. Случаи резонансов с первого по шестого порядков при вырождении гамильтониана в слагаемых четвертого порядка относительно возмущений в гамильтониане возмущенного движения рассмотрены в работах [103, 104]. В приведенных исследованиях подробно изучены приближенные (модельные) системы, характерные для рассматриваемых резонансов; в соответствующих полных неавтономных системах построены резонансные периодические движения и исследована их устойчивость в линейной и нелинейной постановках; описаны условно-периодические движения. К перечисленным публикациям примыкает статья [101], где аналогичные вопросы рассматриваются для близкой к автономной гамильтоновой системе с двумя степенями свободы при параметрическом резонансе основного типа. Построенная теория применена в резонансных задачах динамики маятника [103, 107], волчка Лагранжа [103], задаче о движении спутника относительно центра масс [95, 97, 99], движения тяжелого твердого тела [45] и др.

Большое число работ посвящено исследованию нелинейных колебаний *автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы при резонансах*, когда частоты линейных колебаний линейной системы связаны соотношениями 1:1, 2:1 или 3:1.

При рассмотрении резонанса 1:1 (случай равных частот) необходимо различать два случая, определяемых структурой нормальной формы линеаризованных уравнений возмущенного движения. В первом из них *матрица коэффи-*

центов этих уравнений не приводится к диагональной форме и положение равновесия неустойчиво в линейном приближении. Нелинейный анализ устойчивости в этом резонансном случае проведен в работе [84]. Нелинейные резонансные колебания системы подробно изучены в работах [91, 128, 175, 176, 182]. Данный случай довольно часто встречается в приложениях, например, при исследовании колебаний вблизи треугольных точек либрации в случае критического отношения масс [85, 128, 169, 175] или в задаче об устойчивости движения спутников относительно центра масс [59, 86].

В работе [176] изучено влияние резонанса 1:1 (а также резонансов третьего, четвертого и более высоких порядков) на существование семейств периодических движений. В работе [182] для описываемого резонансного случая получены коэффициенты нормализованного гамильтониана; в качестве приложения рассматривался случай ограниченной задачи трех тел вблизи точки либрации L_4 . В статье [175] предлагается метод построения нормализованных матриц и проводится нормализация гамильтониана возмущенного движения. Дан анализ резонансных периодических движений вблизи положения равновесия. В качестве модельной задачи с помощью полученных результатов исследован случай ограниченной задачи трех тел вблизи точки L_4 .

В статье [128] представлен детальный анализ движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в рассматриваемом резонансном случае. Проводится подробное исследование усеченной (модельной) системы. Для полной системы исследуется вопрос о существовании семейств периодических решений. Методами КАМ-теории описаны условно-периодические движения системы. Показано, что в случае неустойчивости тривиального равновесия все движения системы, начинающиеся в его окрестности, всегда остаются в ограниченной области (мягкая неустойчивость); приведена оценка верхней

границы этой области. В качестве приложения рассмотрена плоская круговая ограниченная задача трех тел вблизи точки L_4 в случае критического отношения масс.

Во втором случае резонанса 1:1 *матрица коэффициентов линеаризованных уравнений приводится к диагональной форме*, то есть положение равновесия устойчиво в линейном приближении. Этот случай изучен еще весьма неполно (см. например, работы [138, 139, 146]). Нормальная форма гамильтониана возмущенного движения здесь существенно сложнее, чем в первом случае, поэтому при произвольных значениях коэффициентов нормальной формы исследование движений системы представляет гораздо более трудную задачу. Однако при рассмотрении приложений, когда коэффициенты нормальной формы — конкретные числа или выражения, зависящие от небольшого числа параметров, исследование нелинейных колебаний может быть проведено в достаточно полном объеме.

В работе [146] численно исследуется существование интеграла движения для гамильтоновой системы с резонансом 1:1, рассматриваемой в одной задаче астрофизики. Показано, что интеграл движения существует для ограниченного диапазона начальных условий. В статье [138] изучается система, похожая на систему из [146] с резонансом 1:1 при дополнительном условии рациональности коэффициентов слагаемых гамильтониана. Проведена нормализация функции Гамильтона, исследовано существование периодических движений системы и их бифуркации, построены фазовые портреты семейств периодических движений системы. В работе [142] произведено исследование бифуркаций положения равновесия системы в точке резонанса 1:1. Проведена нормализация гамильтониана, приведены различные варианты фазовых портретов.

Исследованию резонансных случаев 1:1, 1:2 и 1:3 в автономном гамильтониане с двумя степенями свободы посвящена работа [151]. Для заданных параметров задачи получены решения уравнений Гамильтона, произведен анализ фазового пространства и сепаратрис при изменении энергии системы для данных резонансных случаев, приведены асимптотические выражения для частот и интегралов действия.

В работе [139] произведена нормализация функции Гамильтона автономной системы с двумя степенями свободы с потенциалом, имеющего вид многочлена четвертой степени, при резонансе 1:1. Такие системы возникают, например, в задачах динамики галактик, космологии и т.д. Исследовались положения равновесия, их бифуркации, построены области устойчивости и неустойчивости в зависимости от параметров гамильтониана, а также фазовые портреты возможных движений. Рассмотрен частный случай, когда для определенного набора параметров система интегрируема.

В статье [61] рассматривается задача о движении динамически симметричного спутника в центральном ньютоновском поле на круговой орбите вблизи его стационарного вращения (гиперболоидальной прецессии). Предполагается, что проекция угловой скорости вращения на ось динамической симметрии равна нулю, а значение инерционного параметра соответствует случаю резонанса 1:1 или близко к нему. Получены результаты существования, бифуркаций и орбитальной устойчивости периодических движений твердого тела, методами КАМ-теории описаны условно-периодические движения.

Периодические и условно-периодические движения динамически симметричного спутника относительно центра масс, движущегося по круговой орбите, в окрестности конической прецессии при резонансе 1:1 исследованы в статье [168].

В данной диссертационной работе исследуется еще одна резонансная задача о движении динамически симметричного спутника на круговой орбите. Предполагается, что спутник движется в окрестности другого стационарного вращения (цилиндрической прецессии), а значения инерционного параметра и безразмерной угловой скорости вращения близки к значениям, отвечающим резонансу 1:1. Исследованы периодические и условно-периодические движения системы в окрестности невозмущенного движения. Полученные результаты опубликованы в статье [163].

В работах [147, 148, 173, 180] обобщаются результаты Ляпунова и формулируются условия существования и орбитальной устойчивости в линейном приближении периодических движений, рождающихся из положения равновесия, в автономной гамильтоновой системе с двумя степенями свободы при резонансах третьего, четвертого и более высоких порядков.

В статье [174] вблизи положения равновесия исследуется существование и устойчивость семейств резонансных периодических движений и рассмотрена задача трех тел вблизи точки L_4 в случае, когда отношение частот малых колебаний является рациональным числом.

В работе [49] изучаются нелинейные колебания автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности устойчивого равновесия в случае, когда отношение частот линейных колебаний *близко к двум или равно двум*. Получены резонансные периодические движения системы, а также выводы их орбитальной устойчивости в строгой нелинейной постановке. Анализируются условно-периодические движения приближенной системы с учетом членов до третьего порядка включительно в нормализованном гамильтониане. С помощью методов КАМ-теории решается вопрос о сохранении этих движений

с учетом слагаемых гамильтониана четвертого порядка и выше по возмущениям в окрестности положения равновесия. В качестве приложения рассматривается задача о нелинейных колебаниях упругого маятника.

В статье [106] изучается автономная гамильтонова система с двумя степенями свободы в окрестности положения равновесия, устойчивого в линейном приближении в случае, когда отношение частот линейных колебаний также близко или равно двум и при этом соответствующие резонансные слагаемые в членах третьей степени гамильтониана малы. Исследуются существование, бифуркации и орбитальная устойчивость периодических движений системы в окрестности положения равновесия и условно-периодические движения системы. Получена оценка области ограниченности движений системы в окрестности неустойчивого положения равновесия в случае точного резонанса. В качестве приложения рассмотрены движения тяжелого динамически симметричного твердого тела с неподвижной точкой в окрестности его перманентных вращений вокруг вертикали при резонансе третьего порядка.

В работе [129] исследуется автономная гамильтонова система с двумя степенями свободы в окрестности положения равновесия *при резонансе 3:1* в предположении, что гамильтониан возмущенного движения — знакопеременная функция. Проведен детальный анализ приближенной (модельной) системы, получены условия существования периодических, асимптотических к периодическим и условно-периодических движений. С помощью методов КАМ-теории исследовался вопрос о сохранении условно-периодических движений в полной системе. Дана оценка множества траекторий, не являющихся условно-периодическими. В работе [4] при тех же предположениях проведен анализ орбитальной устойчивости резонансных периодических движений в строгой нелинейной постановке.

В зависимости от параметров задачи получены выводы о существовании, числе, бифуркациях и устойчивости семейств короткопериодических и долгопериодических движений.

Аналогичные результаты в случае резонанса четвертого порядка, в предположении, что гамильтониан возмущенного движения — знакоопределенная функция, получены в работе [6]. Модельная система, в которой учтены слагаемые до третьей степени включительно относительно возмущений, проинтегрирована с помощью эллиптических функций. Рассмотрен вопрос о сохранении условно-периодических движений в полной системе.

В качестве приложения в работах [129], [4] и [6] рассмотрена задача о движении динамически симметричного спутника в окрестности цилиндрической прецессии.

В работах [92,93] изучается взаимное влияние *двойного резонанса третьего порядка* на устойчивость положения равновесия *многомерной автономной гамильтоновой системы*.

Изучение *близких к автономным, периодическим по времени гамильтоновых систем в случаях кратных резонансов* началось в последние десятилетия.

Выделим сначала работы, посвященные исследованию кратных параметрических резонансов, когда в невозмущенном случае для некоторых наборов параметров частоты малых линейных колебаний в окрестности изучаемого равновесия равны целым или полуцелым числам.

Исследование влияния двукратного параметрического резонанса на устойчивость одного специального случая стационарного вращения спутника относительно центра масс, а также на устойчивость треугольных точек либрации в эллиптической ограниченной задаче трех тел, было проведено в [54]. В ра-

боте [55] предложен алгоритм построения областей неустойчивости и области устойчивости в линейном приближении периодических движений динамически симметричного спутника в гравитационном поле на слабоэллиптической орбите в окрестности гиперболоидальной прецессии (на круговой орбите) в случае кратного параметрического резонанса.

Исследование кратных параметрических резонансов начато в статье [57], где представлен перечень всех случаев кратных параметрических резонансов в линейных гамильтоновых системах. Для каждого из десяти возможных вариантов изучаемых резонансов предложен конструктивный алгоритм построения областей неустойчивости (областей параметрического резонанса), рождающихся из резонансной точки. Эти алгоритмы применены при построении областей параметрического резонанса в задаче о движении динамики симметричного спутника на слабоэллиптической орбите в окрестности цилиндрической прецессии. На примере этой задачи, а также рассмотренной чуть ранее в работе [56] задаче об устойчивости плоских линейных колебаний спутника-пластинки на слабоэллиптической орбите, впервые показано, что из резонансной точки в плоскости параметров может выходить от одной до трех областей неустойчивости.

Систематическое изложение этих результатов, а также описание ряда других резонансных и нерезонансных задач динамики спутника относительно центра масс содержится в монографии [59].

Развитием этого направления является исследование нелинейных резонансных колебаний *близких к автономным*, периодических по времени нелинейных гамильтоновых систем в случаях *кратных параметрических резонансов и близких к ним*. Характер движений таких систем существенно отличается для значений параметров вне областей параметрических резонансов (и их ма-

лых окрестностей) и внутри этих областей (или вблизи них). Последние случаи отвечают наличию в преобразованной системе вторичных резонансов (случаи нулевой частоты и равных частот).

Были рассмотрены случаи,

1. когда одна из частот малых линейных колебаний линеаризованной системы уравнений возмущенного движения в автономном случае — целое или полуцелое число, а другая равна нулю, и при этом ранг матрицы линеаризованных уравнений равен трем [115];
2. когда одна из частот малых линейных колебаний системы в окрестности положения равновесия является целым, а другая полуцелым числом [117];
3. когда обе частоты малых линейных колебаний системы в окрестности равновесия равны нулю, а ранг матрицы линеаризованных уравнений возмущенного движения равен трем, двум или единице [118];
4. когда частоты малых линейных колебаний системы равны между собой и являются целыми или полуцелыми числами, и при этом квадратичная часть гамильтониана возмущенного движения не приводится к сумме квадратов [157, 159];
5. когда частоты малых линейных колебаний системы равны двум и единице, а резонансная точка в пространстве параметров принадлежит области выполнения необходимых и достаточных условий устойчивости тривиального равновесия системы [161] или в области только необходимых, не являющихся достаточными, условиями устойчивости [162];
6. когда обе частоты равны единице (резонанс 1:1:1), и матрица линеаризованных уравнений возмущенного движения приводится к сумме квад-

ратов [156]. Исследование проводится на примере задачи о движении динамически симметричного спутника (твердого тела) относительно центра масс в центральном ньютоновском поле на слабоэллиптической орбите вблизи его цилиндрической прецессии. Эта работа является развитием задачи, рассмотренной в [163].

В перечисленных работах были описаны возможные варианты областей параметрического резонанса; подробно исследованы периодические движения рассматриваемых систем, аналитические по дробным или целым степеням малого параметра, и решен вопрос об их устойчивости (в линейной и нелинейной постановках); описаны условно-периодические движения.

В качестве приложения для рассмотренных случаев кратных параметрических резонансов построены новые классы резонансных периодических движений динамически симметричного спутника относительно центра масс в окрестности его цилиндрической прецессии на слабоэллиптической орбите и проведен полный анализ их устойчивости.

В работе [110] для периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы перечислены все возможные пары (λ_1, λ_2) из характеристических показателей $\pm\lambda_j$ ($j = 1, 2$), для которых в системе реализуется *кратный резонанс третьего порядка*. Получены модельные гамильтонианы четырех типов, когда в системе имеются два сильных (основной и комбинационный), два комбинационных (сильный и слабый), а также два слабых комбинационных резонанса третьего порядка. С помощью теоремы Четаева о неустойчивости [36], показано что тривиальное положение равновесия в случаях кратных резонансов третьего порядка при любом соотношении между резонансными коэффициентами является неустойчивым. Описаны движения соответствующих

приближенных систем при учете в гамильтонианах слагаемых до третьего порядка включительно относительно возмущений.

Значительная часть данной диссертационной работы посвящена исследованию движений близкой к автономной, периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности неустойчивого положения равновесия при наличии кратных резонансов третьего порядка. Решена задача о существовании, числе и устойчивости (в линейном приближении) периодических движений системы при наличии основного и комбинационного (сильного или слабого) резонанса третьего порядка, а также вблизи указанного резонанса, когда по одной из частот малых линейных колебаний системы имеется малая резонансная расстройка.

Изучается также случай двойного комбинационного резонанса третьего порядка, сильного и слабого. На первом этапе исследования предполагается, что можно пренебречь имеющимся в системе резонансом четвертого порядка. Решена задача о существовании и числе положений равновесия приближенной системы, соответствующей данному резонансному случаю.

На втором этапе изучается взаимодействие двойного комбинационного резонанса третьего порядка и резонанса четвертого порядков, на примере задачи о движении динамически симметричного спутника (твёрдого тела) относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на слабоэллиптической орбите. Рассматривается окрестность цилиндрической и гиперболоидальной прецессий спутника на круговой орбите, для трех наборов параметров, соответствующих рассматриваемым резонансным случаям. Построены резонансные периодические движения спутника, проведен анализ их устойчивости в строгой нелинейной постановке.

Описываемые результаты опубликованы в статьях [80, 82, 83, 119].

В статье [112] исследуется взаимное влияние слабого комбинационного резонанса *третьего порядка* и сильного основного резонанса *четвертого порядка* (в зоне его устойчивости) на движения периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности тривиального равновесия. Найдена область изменения параметров задачи (коэффициентов нормализованного гамильтониана), для которых все движения модельной системы в окрестности равновесия ограничены, а также получена оценка области ограниченности. Чуть ранее [155] описываемый резонансный случай был рассмотрен в задаче об устойчивости при исследовании задачи об устойчивости треугольных точек либрации плоской эллиптической ограниченной задачи трех тел.

В статье [116] для периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности устойчивого в линейном приближении тривиального равновесия перечислены все возможные пары (λ_1, λ_2) из характеристических показателей $\pm\lambda_j$ ($j = 1, 2$), для которых в системе реализуется *кратный резонанс четвертого порядка*. Получены пять модельных гамильтониана для всех наборов характеристических показателей, соответствующих указанным резонансным случаям, когда в системе имеется два сильных (основной и комбинационный), сильный основной и слабый комбинационный, два комбинационных (сильный и слабый), два сильных и один слабый комбинационный, два слабых и один сильный комбинационный резонанса четвертого порядка. Для первых двух из описанных случаев доказана неустойчивость тривиального равновесия, если параметры системы находятся в зоне неустойчивости основного резонанса. Для всех случаев резонансов четвертого порядка получены достаточные условия формальной устойчивости тривиального положения полной системы; дана их графическая интерпретация. На основании полученных

критериев проверена формальная устойчивость (для различных случаев кратного резонанса четвертого порядка) в задаче об устойчивости цилиндрической прецессии симметричного спутника-пластинки на эллиптической орбите произвольного эксцентриситета.

Несколько ранее формальная устойчивость была доказана в задаче об устойчивости треугольных точек либрации плоской эллиптической ограниченной задачи трех тел в случае кратного резонанса четвертого порядка [155], а также в задаче об устойчивости относительных равновесий на вертикали плоского двойного маятника, точка подвеса которого колеблется вдоль вертикали по гармоническому закону с произвольной частотой и амплитудой, в различных случаях кратных резонансов четвертого порядка [113].

В работе [160] решен вопрос о существовании, числе и устойчивости (в линейном приближении) резонансных периодических движений неавтономной, периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности тривиального положения равновесия в предположении, что в системе реализуется двойной резонанс четвертого порядка (основной и комбинационный) или имеются резонансные расстройки по одной или обоим частотам. В качестве приложения рассмотрена задача о резонансных периодических движениях спутника-пластинки в окрестности его цилиндрической прецессии в случае кратного резонанса четвертого порядка.

Как следует из предыдущего изложения, исследование кратных резонансов в гамильтоновых системах представляет не только теоретический интерес, но важен и с точки зрения приложений. Большое число приложений доставляют задачи небесной механики и, в частности, задачи *о движении динамически симметричного спутника относительно центра масс в окрестности стац-*

онарных вращений.

Более 60 лет назад в работе [22] у динамически симметричного спутника на круговой орбите были обнаружены стационарные вращения, для которых в орбитальной системе координат фиксирована ось симметрии спутника, — гиперболическая, коническая и цилиндрическая прецессии. Анализ устойчивости найденных стационарных вращений для спутника на круговой орбите исследован в работах [8, 22, 29, 38, 40, 41, 51, 63, 72, 86, 122, 130, 152, 154, 166, 172, 181].

В работе [72] была открыта цилиндрическая прецессия на эллиптической орбите и показано, что она существует для любых значений эксцентриситета. Исследование устойчивости цилиндрической прецессии на эллиптической орбите рассматривалось в работах [37, 39, 64, 72, 153, 170, 183].

Большое число работ посвящено исследованию периодических движений динамически симметричного спутника в окрестности его стационарных вращений, см., например, [26, 47, 55, 61, 65, 87, 88, 114–118, 124, 129, 130, 156, 157, 159–162, 168], а также описанные выше работы для случаев кратных резонансов.

В описанных работах и описанной части диссертации рассматривались возмущения параметров и/или начальных условий при исследовании движения гамильтоновых систем, при этом при введении возмущений гамильтоновость систем сохранялась. В реальных системах всегда присутствует *диссипация*, наличие которой может существенным образом повлиять на движения системы и характер их устойчивости. Эта тема требует большого отдельного исследования. В качестве примера приведем работы [94] и [100], где изучались движения близких к гамильтоновым систем с одной степенью свободы при резонансе в вынужденных колебаниях и резонансе четвертого порядка и наличии малых диссипативных сил.

В диссертации проведено исследование влияние малых диссипативных сил на примере одной *вибрационной задачи* динамики твердого тела. Предполагается, что одна из точек тяжелого твердого тела совершает вертикальные гармонические колебания большой частоты и малой амплитуды. На тело действует сила малого вязкого трения. В рамках приближенной автономной системы исследуется устойчивость двух положений относительного равновесия твердого тела на вертикали.

Исследование влияния высокочастотных возмущений на механические системы является очень важной задачей. Воздействие высокочастотных вибраций может привести как к созданию новых устойчивых движений, так и к разрушению динамической устойчивости механических систем. Результаты имеют большое значение при проектировании машин и механизмов, в частности, в авиационной и космической технике.

Впервые вопросы влияния высокочастотных вибраций на устойчивость рассматривались более ста лет назад в работах А. Стефенсона [177–179], который показал, что неустойчивое перевернутое положение маятника на вертикали становится устойчивым, если точка подвеса маятника совершает вертикальные вибрации достаточно большой частоты.

Исследованию влияния высокочастотных вибраций на устойчивость *маятников* различного типа посвящено множество работ. Отметим работы по исследованию математических [3, 5, 13, 27, 28, 30, 32, 35, 69, 89, 98, 102, 127, 143, 144, 149, 164, 171, 177–179], физических [14, 20], сферических [24, 48, 70], двойных [17, 20, 24, 89, 105, 108, 137, 150, 167] маятников. Более полная библиография содержится в монографиях [89, 113].

Сравнительно недавно появились работы [58, 60], в которых получены приближенные автономные дифференциальные уравнения движения *твердого те-*

ла (типа уравнений Эйлера-Пуассона) с произвольной геометрией масс в предположении, что одна из точек тела совершает произвольные периодические или условно-периодические вибрации высокой частоты и малой амплитуды. Показано, что наличие высокочастотных вибраций точки подвеса в приближенной задаче можно рассматривать как действие потенциального поля с вибрационным потенциалом, зависящего от характера вибраций точки подвеса и геометрии масс тела. Получена погрешность, с которой решения приближенной системы аппроксимируют решения полной неавтономной системы. Ранее вибрационный потенциал (или вибрационная энергия) обсуждались в работах [13, 125].

В рамках приближенной системы найдены условия, налагаемые на частоту вертикальных вибраций точки подвеса для того, чтобы положения равновесия, для которых центр масс и точка подвеса тела находятся на одной вертикали, были устойчивы [58, 60]. В статье [109] исследована устойчивость «боковых» относительных равновесий тела с различной геометрией масс при наличии высокочастотных вертикальных вибраций точки подвеса. В статье [9] решена задача о существовании и устойчивости в линейном приближении высокочастотных периодических движений с периодом, равным периоду колебаний точки подвеса тяжелого твердого тела при условии горизонтальных гармонических вибраций высокой частоты и малой амплитуды.

Перечислим задачи динамики твердого тела с вибрирующим подвесом, решенные за последние несколько лет в рамках приближенной автономной системы, представленной в виде модифицированных уравнений Эйлера-Пуассона или в форме канонических уравнений Гамильтона. Стационарные вращения волчка Лагранжа, изучались в работе [62] в случае вибраций точки подвеса, обладающей симметрией относительно вертикали, и в статье [11] для различных вариантов высокочастотных вибраций точки подвеса в трехмерном простран-

стве.

В работе [111] найдены и исследованы движения тела, обусловленные наличием быстрых вибраций и отсутствующие, если точка подвеса тела неподвижна. В работах [16, 18, 19] проведен полный нелинейный анализ устойчивости перманентных вращений вокруг вертикали тяжелого твердого тела при наличии высокочастотных вертикальных вибраций одной из его точек. Рассмотрены случаи, когда центр масс тела лежит на главной оси инерции для точки подвеса, а вращение происходит вокруг этой главной оси или вокруг осей из главной плоскости инерции, примыкающей к этой оси, а также случай динамически симметричного тела, для которого центр масс не лежит на оси динамической симметрии.

В работах [10, 132] исследовалась орбитальная устойчивость маятниковых колебаний и вращений вокруг горизонтально расположенной главной оси инерции твердого тела с горизонтально вибрирующей точкой подвеса с геометрией масс, отвечающей случаю С. В. Ковалевской. А в [131] проводились исследования орбитальной устойчивости маятниковых колебаний волчка Лагранжа вблизи нижних, верхних или наклонных относительных положений равновесия и его вращений в предположении, что его точка подвеса испытывает высокочастотные колебания с малой амплитудой в трехмерном пространстве.

В работе [133] решен вопрос о существовании, числе и устойчивости в линейном приближении относительных равновесий тяжелого твердого тела, центр масс которого находится на главной оси инерции, в случае вибрирующей вдоль наклонной прямой точки подвеса. В [134] аналогичный вопрос решен для твердого тела (с центром масс в главной плоскости инерции) с вибрирующей вдоль вертикального эллипса точкой подвеса.

В работе [158] было показано существование первого интеграла в задаче

динамики тяжелого твердого тела с геометрией масс, соответствующей случаю Гесса, и с вибрирующей в трехмерном пространстве точкой подвеса, аналогичного первому интегралу этой задачи при отсутствии вибраций. Рассмотрены также другие задачи динамики тела в случае Гесса при наличии вибраций.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы.

В первой главе исследуется задача о движении динамически симметричного спутника относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на круговой орбите в окрестности его цилиндрической прецессии при резонансе 1:1. В этом резонансном случае матрица коэффициентов линеаризованных уравнений приводится к диагональной форме, то есть положение равновесия устойчиво в линейном приближении. В малой окрестности резонансной точки в плоскости параметров решена задача о существовании, бифуркации и орбитальной устойчивости периодических движений тела, рождающихся из соответствующего цилиндрической прецессии положения равновесия приведенной системы с двумя степенями свободы. При помощи КАМ-теории описаны условно-периодические движения полной системы для двух наборов параметров задачи, получена оценка области фазового пространства, не заполненного условно-периодическими движениями.

Во второй главе изучается близкая к автономной периодическая по времени гамильтонова система с двумя степенями свободы в окрестности неустойчивого тривиального положения равновесия, в предположении, что в системе имеются основной и комбинационный (сильный или слабый) резонансы третьего порядка, когда комбинации характеристических показателей $3\lambda_1$, $\lambda_1 + 2\lambda_2$ или $3\lambda_1$, $\lambda_1 - 2\lambda_2$ являются целыми числами. Решается задача о существова-

нии, числе и устойчивости в линейном приближении периодических движений системы. Определяются области параметров, для которых в достаточно малой окрестности равновесия имеются устойчивые периодические решения.

В третьей главе продолжается начатое в главе 2 исследование кратного резонанса третьего порядка в предположении, что имеются малые резонансные расстройки по частотам малых колебаний системы. Подробно исследован случай резонансной расстройки по одной из частот. Решается задача о существовании, числе и устойчивости в линейном приближении периодических движений системы. Определяются области параметров, для которых в достаточно малой окрестности равновесия имеются устойчивые периодические решения.

В четвертой главе для системы, описанной в главе 2, изучается случай двойного комбинационного резонанса третьего порядка, сильного и слабого, когда комбинации $\lambda_1 - 2\lambda_2$ и $2\lambda_1 + \lambda_2$ являются целыми числами. В предположении, что коэффициенты в слагаемых, соответствующих имеющемуся при сделанных предположениях резонансу четвертого порядка, малы, с помощью графических и аналитических методов решена задача о существовании и числе положений равновесия приближенной (модельной) системы.

В пятой главе изучается взаимодействие двойного комбинационного резонанса третьего (рассмотренного в четвертой главе) и резонанса четвертого порядков в задаче о движении динамически симметричного спутника относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на слабоэллиптической орбите. В качестве невозмущенной задачи для наборов параметров, соответствующих рассматриваемым резонансам, принята гиперболоидальная или коническая прецессия спутника на круговой орбите. На первом этапе построены 2π -периодические по истинной аномалии ν движения спутника на слабоэллиптической орбите, рождающиеся из этих стационарных вращений

на круговой орбите и отвечающие исследуемым резонансным случаям. Для приближенной системы, рассматриваемой без учета резонанса четвертого порядка, на основании результатов главы 4 сделаны выводы о существовании, числе и устойчивости (в линейном приближении) или неустойчивости положений равновесия этой системы. Аналогичные выводы получены для приближенной системы с учетом резонанса четвертого порядка. Сделан вывод о влиянии этого резонанса на число и характер устойчивости периодических движений спутника. В окрестности порождающих движений найдены резонансные 10π -периодические по ν движения спутника, дана их геометрическая интерпретация, проведен полный линейный и нелинейный анализ их устойчивости.

В шестой главе в рамках приближенной автономной системы, записанной в форме модифицированных уравнений Эйлера-Пуассона, исследуется влияние малых диссипативных сил (сил малого вязкого трения) на устойчивость двух относительных равновесий твердого тела, для которых центр масс и точка подвеса, совершающая вертикальные высокочастотные вибрации, лежат на одной вертикали. Результаты устойчивости относительных равновесий на вертикали тела с вибрирующей точкой подвеса (для различных случаев геометрии масс тела) без учета вязкого трения получены ранее в рамках приближенной системы в работе [60]. Добавление малого вязкого трения, рассматриваемое в диссертации, приводит к необходимости исследования особенного случая одного нулевого корня (по терминологии А.Г. Малкина [36]). Показано, что добавление малого вязкого трения приводит к тому, что устойчивость положений относительного равновесия, имевшая место при отсутствии трения, становится асимптотической для всех переменных кроме одной, для которой остается обычная устойчивость.

Научная новизна диссертации состоит в следующем.

1. Разработан способ исследования автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности положения равновесия при резонансе 1:1 и вблизи него в случае, когда матрица коэффициентов линеаризованных уравнений приводится к диагональной форме; исследование проводится на примере задачи динамики симметричного спутника на круговой орбите в окрестности цилиндрической прецессии. Построен приближенный (модельный) гамильтониан, подробно исследованы движения модельной системы. Найдены периодические движения исходной полной системы, проведен анализ их орбитальной устойчивости в строгой нелинейной постановке. Методами КАМ-теории описаны двухчастотные условно-периодические движения полной системы для двух наборов параметров модельной системы.
2. Исследованы движения близкой к автономной, периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности неустойчивого тривиального равновесия в случае двойного (основного и комбинационного) резонанса третьего порядка. Построены приближенные (модельные) гамильтонианы, отвечающие автономным системам, решен вопрос о существовании, числе и устойчивости (в линейном приближении) положений равновесия этих систем. Аналитически выявлены области параметров задачи, для которых выполняются достаточные условия устойчивости. При помощи аналитических и графических методов построены области необходимых условий устойчивости. Методом Пуанкаре построены периодические по времени решения исходной неавтономной системы, сделаны выводы об их устойчивости (в линейном приближении).

3. Для того же кратного резонанса третьего порядка рассмотрен случай, когда по одной из частот имеется малая резонансная расстройка. Решен вопрос о существовании и числе периодических движений системы. Выявлены области параметров, где выполняются условия устойчивости (в линейном приближении) и достаточные условия неустойчивости этих движений.
4. Проведено исследование близкой к автономной, периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности неустойчивого тривиального равновесия в случае двойного (сильного и слабого) комбинационного резонанса третьего порядка. Построен приближенный (модельный) гамильтониан. Аналитически и графически решен вопрос о существовании и числе положений равновесия модельной системы.
5. Для указанной системы при наличии кратного комбинационного резонанса третьего порядка проведено исследование, учитывающее имеющийся резонанс четвертого порядка, на примере задачи о движении динамически симметричного спутника (твердого тела) относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на слабоэллиптической орбите. За невозмущенное движение принято одно из стационарных вращений спутника на круговой орбите (коническая или гиперболоидальная прецессия). Для ряда резонансных значений параметров построены периодические движения спутника, дана их графическая интерпретация, проведен полный, линейный и нелинейный, анализ их устойчивости.
6. Проведен анализ влияния малых диссипативных сил (сил вязкого трения) на характер устойчивости положения равновесия системы, в приближенной задаче динамики твердого тела с вибрирующей вдоль вертикали

точкой подвеса. Изучается устойчивость двух относительных равновесий тела, когда его центр масс и точка подвеса лежат на одной вертикали. Показано, что имеет место особенный (по терминологии И.Г. Малкина [36]) случай нулевого корня, а положение равновесия, устойчивое при отсутствии вязкого трения, становится при его наличии асимптотически устойчивым по всем переменным, кроме одной (критической) переменной, по которой сохраняется обычная устойчивость.

Теоретическая и практическая значимость работы. В диссертационной работе решен ряд новых актуальных задач, исследующих влияние возмущений различного характера на устойчивость и свойства нелинейных колебаний механических систем. Изучались нелинейные колебания автономных или близких к автономным гамильтоновых систем с двумя степенями свободы в нескольких не исследованных ранее случаях кратных резонансов, а также в случаях, близких к резонансным. Полученные общетеоретические результаты развивают теорию нелинейных колебаний гамильтоновых систем при резонансах и, в частности, предлагают алгоритмы построения новых классов резонансных периодических движений систем. В диссертации найдены новые резонансные периодические движения симметричного спутника относительно центра масс в окрестности его стационарных вращений на круговой орбите и проведен линейный и нелинейный анализ их устойчивости. Исследовалось также влияние малых диссипативных сил на устойчивость двух относительных равновесий в приближенной задаче динамики твердого тела, при наличии высокочастотных вибраций одной из его точек. Полученные результаты могут быть полезны при разработке вибрационных систем, в том числе используемых в авиационной промышленности и ракетостроении.

Методология и методы диссертационного исследования. Для достижения цели диссертационной работы применялись общие методы теории устойчивости [34, 66, 123], методы теории устойчивости линейных и нелинейных гамильтоновых систем в нерезонансных и резонансных случаях [38, 40, 42, 49], КАМ-теория [1, 2, 67, 68], метод малого параметра Пуанкаре [35]. При исследовании устойчивости в особенном случае одного нулевого корня использовались результаты А.Г. Малкина [36]. Применялись методы нормальных форм [15], нормализация гамильтонианов проводилась методом Депри-Хори [21, 42, 121]. Использовались компьютерные системы аналитических вычислений и численные расчеты.

Апробация результатов. Результаты данной диссертационной работы опубликованы в научных журналах, рекомендованных ВАК и индексируемые в базах данных Web of Science и Scopus [75, 80, 82, 83, 119, 163]. А также освещались на научных семинарах, российских и международных конференциях:

1. Юбилейная 50-я международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, Новосибирский государственный университет, 13–19 апреля 2012 года) [73];
2. Всероссийская конференция с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» (Москва, РУДН, 23–27 апреля 2012 года) [74];
3. LI Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники (Москва, РУДН, 12–15 мая 2015 года) [81];

4. 14-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2015» (16 – 20 ноября 2015 года. Москва) [77];
5. XXVII Международная инновационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС–2015) (Москва, 2–4 декабря 2015 года) [76];
6. LI Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники (Москва, РУДН, 17–19 мая 2016 года) [78];
7. LIV Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники (Москва, РУДН, 14–18 мая 2018 года) [120];
8. XVI Международная научная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого)» (Москва, ИПУ РАН, 1–3 июня 2022 года) [79].

Личный вклад автора. Содержание диссертационной работы и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы и получены лично автором. Постановки задач, исследованных в рамках подготовки диссертационной работы, задавались научным руководителем. Автор выполнил подавляющее большинство аналитических исследований и численных расчетов, самостоятельно обрабатывал и интерпретировал полученные результаты.

Глава 1

Исследование нелинейных колебаний динамически симметричного спутника на круговой орбите при резонансе 1:1

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим движение спутника, моделируемого твердым телом, относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле. Размеры спутника предполагаем малыми по сравнению с размерами орбиты, и принимаем обычные [7, 8] предположения о независимости движения спутника относительно центра масс от движения самого центра масс; орбиту последнего предполагаем круговой.

Введем орбитальную систему координат $OXYZ$, оси OX , OY и OZ которой направлены соответственно по вектору скорости центра масс, по нормали к плоскости орбиты и вдоль радиус-вектора центра масс O тела относительно притягивающего центра. Введем также жестко связанную с телом систему координат $Oxyz$ с осями, совпадающими с главными центральными осями инерции спутника; ее ориентацию в системе $OXYZ$ зададим при помощи углов Эйлера ψ , θ , φ . Пусть A , B и C — главные центральные моменты инерции спутника, причем $A = B$, то есть спутник обладает динамической симметрией.

В рассматриваемой задаче координата φ циклическая, и имеется первый интеграл $r = r_0 = \text{const}$, где r — проекция вектора угловой скорости тела в орбитальной системе координат на ось его динамической симметрии. Пусть ω_0

- среднее движение центра масс тела по орбите.

Введем безразмерные параметры α и β по формулам $\alpha = C/A$ ($0 \leq \alpha \leq 2$), $\beta = r_0/\omega_0$. Пусть $p_\psi, p_\theta, p_\varphi$ — обобщенные импульсы, сопряженные с углами ψ, θ, φ и обезразмеренные при помощи множителя $A\omega_0$, а $\tau = \omega_0 t$ — безразмерное время, принимаемое далее за независимую переменную.

Гамильтониан задачи имеет вид [8]

$$H = \frac{1}{2} \frac{p_\psi^2}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{2} p_\theta^2 - p_\psi \cot \theta \cos \psi - \frac{\alpha\beta \cos \theta}{\sin^2 \theta} p_\psi - p_\theta \sin \psi + \frac{\alpha\beta \cos \psi}{\sin \theta} + \frac{1}{2} \alpha^2 \beta^2 \cot^2 \theta + \frac{3}{2} (\alpha - 1) \cos^2 \theta. \quad (1.1.1)$$

Уравнения движения системы с гамильтонианом (1.1.1) допускают частное решение [8]

$$\psi = \pi, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad p_\psi = 0, \quad p_\theta = 0,$$

соответствующее вращению тела вокруг оси динамической симметрии, расположенной перпендикулярно плоскости орбиты, с постоянной угловой скоростью ω_0 (цилиндрической прецессии). Задача об устойчивости цилиндрической прецессии на круговой орбите исследована в работах [8, 38, 50, 86].

Области устойчивости в линейном приближении цилиндрической прецессии спутника на круговой орбите задаются неравенствами

$$\begin{aligned} l_1 > 0, \quad l_2 > 0 \quad \text{и} \quad l_1 < 0, \quad l_2 < 0, \quad l_3^2 - 4l_1l_2 > 0, \\ l_1 = \alpha\beta - 1, \quad l_2 = \alpha\beta + 3\alpha - 4, \quad l_3 = (\alpha\beta - 1)^2 + 3\alpha - 2, \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

а частоты ω_1, ω_2 ($\omega_1 \geq \omega_2$) малых линейных колебаний приведенной системы с двумя степенями свободы определяются в этих областях из уравнения

$$\omega^4 - l_3\omega^2 + l_1l_2 = 0. \quad (1.1.3)$$

Из соотношений (1.1.2) и (1.1.3) следует, что при $\alpha = 1$ и $\beta = 2$ уравнение частот имеет решение $\omega_1 = \omega_2 = 1$, то есть в системе реализуется резонанс 1:1. Эти значения параметров задачи отвечают сферической симметрии тела, при этом угловая скорость собственного вращения тела совпадает по величине и направлению с угловой скоростью обращения радиус-вектора его центра масс по орбите.

Далее будет проведен анализ нелинейных колебаний оси динамической симметрии тела для значений параметров α и β , близких к резонансной точке.

1.2. Преобразование гамильтониана. Модельный гамильтониан

Введем возмущения переменных системы с гамильтонианом (1.1.1) по формулам

$$\psi = \pi + q_2, \quad \theta = \frac{\pi}{2} + q_1, \quad p_\psi = p_2, \quad p_\theta = p_1$$

и запишем гамильтониан возмущенного движения в виде

$$\begin{aligned} H &= H_2 + H_4 + \dots, \\ H_2 &= \frac{1}{2} p_1^2 + \frac{1}{2} p_2^2 + \left(\frac{1}{2} \alpha^2 \beta^2 - \frac{1}{2} \alpha \beta + \frac{3}{2} \alpha - \frac{3}{2} \right) q_1^2 + \\ &\quad + (\alpha \beta - 1) p_2 q_1 + p_1 q_2 + \frac{1}{2} \alpha \beta q_2^2, \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

$$\begin{aligned} H_4 &= \left(-\frac{5}{24} \alpha \beta + \frac{1}{3} \alpha^2 \beta^2 - \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \right) q_1^4 + \left(\frac{5}{6} \alpha \beta - \frac{1}{3} \right) p_2 q_1^3 + \\ &\quad + \frac{1}{2} p_2^2 q_1^2 + \frac{1}{4} \alpha \beta q_1^2 q_2^2 + \frac{1}{2} p_2 q_1 q_2^2 - \frac{1}{24} \alpha \beta q_2^4 - \frac{1}{6} p_1 q_2^3. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

В плоскости параметров (α, β) рассмотрим малую окрестность точки $\alpha = 1, \beta = 2$, в которой реализуется исследуемый кратный резонанс. Введем малый параметр ε ($0 < \varepsilon \ll 1$) и положим

$$\alpha = 1 + \varepsilon\alpha_1, \quad \beta = 2 + \varepsilon\beta_1.$$

Формы H_2 и H_4 из (1.2.1) и (1.2.2) перепишем в виде

$$H_2 = H_{20} + \varepsilon H_{21} + O(\varepsilon^2), \quad H_4 = H_{40} + O(\varepsilon), \quad (1.2.3)$$

$$H_{20} = \frac{1}{2} p_2^2 + \frac{1}{2} p_1^2 + p_2 q_1 + p_1 q_2 + q_1^2 + q_2^2,$$

$$H_{21} = (\beta_1 + 2\alpha_1) p_2 q_1 + \frac{3}{2} (\beta_1 + 3\alpha_1) q_1^2 + \frac{1}{2} (\beta_1 + 2\alpha_1) q_2^2,$$

$$H_{40} = \frac{11}{12} q_1^4 + \frac{4}{3} p_2 q_1^3 - \frac{1}{6} p_1 q_2^3 + \frac{1}{2} q_1^2 q_2^2 + \frac{1}{2} p_2 q_1 q_2^2 - \frac{1}{12} q_2^4 + \frac{1}{2} p_2^2 q_1^2.$$

Осуществим ряд канонических преобразований, упрощающих структуру выписанных в (1.2.3) форм с учетом имеющегося резонанса. Сначала сделаем унивалентное линейное каноническое преобразование

$$q_1 = q'_1, \quad q_2 = q'_2, \quad p_1 = -q'_2 + p'_1, \quad p_2 = -q'_1 + p'_2, \quad (1.2.4)$$

приводящее форму H_{20} к виду

$$H'_{20} = \frac{1}{2} (q_1'^2 + p_1'^2) + \frac{1}{2} (q_2'^2 + p_2'^2).$$

Каноническая замена переменных $q'_j, p'_j \rightarrow \hat{q}_j, \hat{p}_j$ ($j = 1, 2$) вида

$$q'_j = \hat{q}_j + \varepsilon \frac{\partial U}{\partial \hat{p}_j}, \quad p'_j = \hat{p}_j - \varepsilon \frac{\partial U}{\partial \hat{q}_j},$$

$$U = \frac{2\alpha_1 + \beta_1}{4} \hat{q}_2 (2\hat{q}_1 - \hat{p}_2) - \frac{5\alpha_1 + \beta_1}{4} \hat{q}_1 \hat{p}_1$$

нормализует квадратичную часть гамильтониана в слагаемых порядка ε , а близкое к тождественному каноническое преобразование $\hat{q}_j, \hat{p}_j \rightarrow u_j, v_j$ ($j = 1, 2$), задаваемое формулами

$$\hat{q}_j = u_j + \frac{\partial V}{\partial v_j}, \quad \hat{p}_j = v_j - \frac{\partial V}{\partial u_j} \quad (j = 1, 2),$$

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{12} u_2^3 u_1 - \frac{1}{12} v_1^3 v_2 - \frac{5}{24} u_1^2 v_1 v_2 + \frac{1}{24} v_1^2 u_1 u_2 + \\ & + \frac{1}{8} u_2^2 v_1 v_2 - \frac{1}{8} v_2^2 u_1 u_2 - \frac{1}{16} v_2^2 u_1 v_1 + \frac{1}{4} u_1^2 u_2 v_2 - \\ & - \frac{3}{16} u_2^2 u_1 v_1 - \frac{1}{32} v_2^3 u_2 - \frac{5}{96} u_1^3 v_1 - \frac{5}{96} u_2^3 v_2 - \frac{1}{32} u_1 v_1^3, \end{aligned}$$

приводит члены четвертой степени гамильтониана при $\varepsilon = 0$ к нормальной форме. В симплектических полярных координатах φ_j, r_j ($j = 1, 2$), вводимых по формулам

$$u_j = \sqrt{2\varepsilon r_j} \sin \varphi_j, \quad v_j = \sqrt{2\varepsilon r_j} \cos \varphi_j \quad (j = 1, 2), \quad (1.2.5)$$

преобразованный гамильтониан записывается в виде

$$\begin{aligned} K = & r_1 + r_2 + \varepsilon \left[\frac{1}{2} (5\alpha_1 + \beta_1) r_1 + \frac{1}{2} (\beta_1 + 2\alpha_1) r_2 + \right. \\ & + (\beta_1 + 2\alpha_1) \sqrt{r_1 r_2} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2} \sqrt{r_1 r_2} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) (r_1 + r_2) + \\ & \left. + \frac{1}{8} r_1^2 + \frac{1}{2} r_1 r_2 + \frac{1}{8} r_2^2 - \frac{1}{4} r_1 r_2 \cos(2\varphi_1 - 2\varphi_2) \right] + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Сделаем еще одну каноническую замену переменных по формулам

$$\varphi_1 = \Phi_1 + \Phi_2, \quad \varphi_2 = \Phi_2, \quad r_1 = R_1, \quad r_2 = R_2 - R_1, \quad (1.2.7)$$

в результате чего гамильтониан (1.2.6) приобретает окончательный вид

$$\Gamma = \Gamma_0 + O(\varepsilon^2), \quad (1.2.8)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_0 = R_2 + \frac{1}{2} \varepsilon \left[R_2 (\beta_1 + 2\alpha_1) + \frac{1}{4} R_2^2 \right] + \\ + \varepsilon \left[\frac{3}{2} \alpha_1 R_1 + \left(\beta_1 + 2\alpha_1 + \frac{R_2}{2} \right) \sqrt{R_1} \sqrt{R_2 - R_1} \sin \Phi_1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} R_1 (R_2 - R_1) \sin^2 \Phi_1 \right], \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

где $O(\varepsilon^2)$ - слагаемые второй и более степени по ε , а также более второй степени по переменным R_i ($i = 1, 2$).

Исследуем движения системы с гамильтонианом (1.2.8). Отметим, что его главная часть Γ_0 не содержит координату Φ_2 , в отвечающей ей приближенной системе эта координата циклическая и $R_2 = \text{const}$.

1.3. Анализ модельной системы с одной степенью свободы

Полагая в гамильтониане (1.2.9) $R_2 = c$ ($c > 0$) и отбрасывая аддитивные константы, получим гамильтониан, отвечающий приведенной системе с одной степенью свободы; в этой системе $0 \leq R_1 \leq c$. Пусть $R_1 = cr$ ($0 \leq r \leq 1$). Перейдем к новой независимой переменной $\eta = \varepsilon c t$ и параметрам

$$a = \frac{3\alpha_1}{c}, \quad b = \frac{2\beta_1 + 4\alpha_1}{c} + 1$$

и перепишем гамильтониан в виде

$$\gamma = \frac{1}{2} ar + \frac{b}{2} \sqrt{r} \sqrt{1-r} \sin \Phi_1 + \frac{1}{2} r (1-r) \sin^2 \Phi_1. \quad (1.3.1)$$

Соответствующие ему уравнения движения таковы:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_1}{d\eta} &= \frac{a}{2} - \frac{1}{4} \left[\frac{b}{\sqrt{r}\sqrt{1-r}} + 2 \sin \Phi_1 \right] (2r - 1) \sin \Phi_1, \\ \frac{dr}{d\eta} &= - \left[\frac{b}{2} + \sqrt{r}\sqrt{1-r} \sin \Phi_1 \right] \sqrt{r}\sqrt{1-r} \cos \Phi_1. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Введем канонически сопряженные декартовы координаты x и y по формулам

$$x = \sqrt{2r} \sin \Phi_1, \quad y = \sqrt{2r} \cos \Phi_1 \quad (0 \leq x^2 + y^2 \leq 2) \quad (1.3.3)$$

и перепишем соотношения (1.3.1) и (1.3.2) в виде

$$\gamma' = \frac{a}{4} (x^2 + y^2) + \frac{b}{4} \sqrt{2 - x^2 - y^2} x + \frac{x^2}{8} (2 - x^2 - y^2), \quad (1.3.4)$$

$$\frac{dx}{d\eta} = \frac{y \left[\sqrt{2 - x^2 - y^2} (2a - x^2) - bx \right]}{4 \sqrt{2 - x^2 - y^2}}, \quad (1.3.5)$$

$$\frac{dy}{d\eta} = - \frac{\sqrt{2 - x^2 - y^2} x (2a + 2 - 2x^2 - y^2) + b (2 - 2x^2 - y^2)}{4 \sqrt{2 - x^2 - y^2}}.$$

Систему с гамильтонианом (1.3.1) или (1.3.4) будем далее называть модельной. Уравнения движения этой системы имеют первый интеграл

$$\gamma' = h = \text{const.} \quad (1.3.6)$$

Траектории модельной системы ограничены в плоскости переменных x и y окружностью $x^2 + y^2 = 2$, состоящей из одной или нескольких фазовых траекторий. Опишем другие движения этой системы.

1.3.1. Положения равновесия модельной системы

Приравнивая к нулю правые части уравнений (1.3.5), найдем особые точки (положения равновесия) модельной системы.

В случае, когда $a \neq 0$ и $b \neq 0$, модельная система имеет неустойчивые положения равновесия $x = 0$ и $y = \pm\sqrt{2}$ на граничной окружности, а также равновесные точки, для которых $y = 0$, а величина x удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{2 - x^2} x (a + 1 - x^2) = b (x^2 - 1). \quad (1.3.7)$$

имеет при $x_* = \pm\sqrt{1+a^{1/3}}$ точки экстремума (максимума и минимума), см. рис. 1б, 1в.

Горизонтальные прямые $b = \text{const} \neq 0$ пересекают графики функции $b = b(x, a)$ либо в двух точках при всех b (рис. 1а, 1г, случаи $|a| \geq 1$), либо, в зависимости от значения b , в двух или четырех точках (рис. 1б, 1в, случаи $|a| < 1, a \neq 0$). Переход от случая двух к случаю четырех корней уравнения (1.3.8) происходит для значений $b = b(x_*, a)$, соответствующих точкам экстремума.

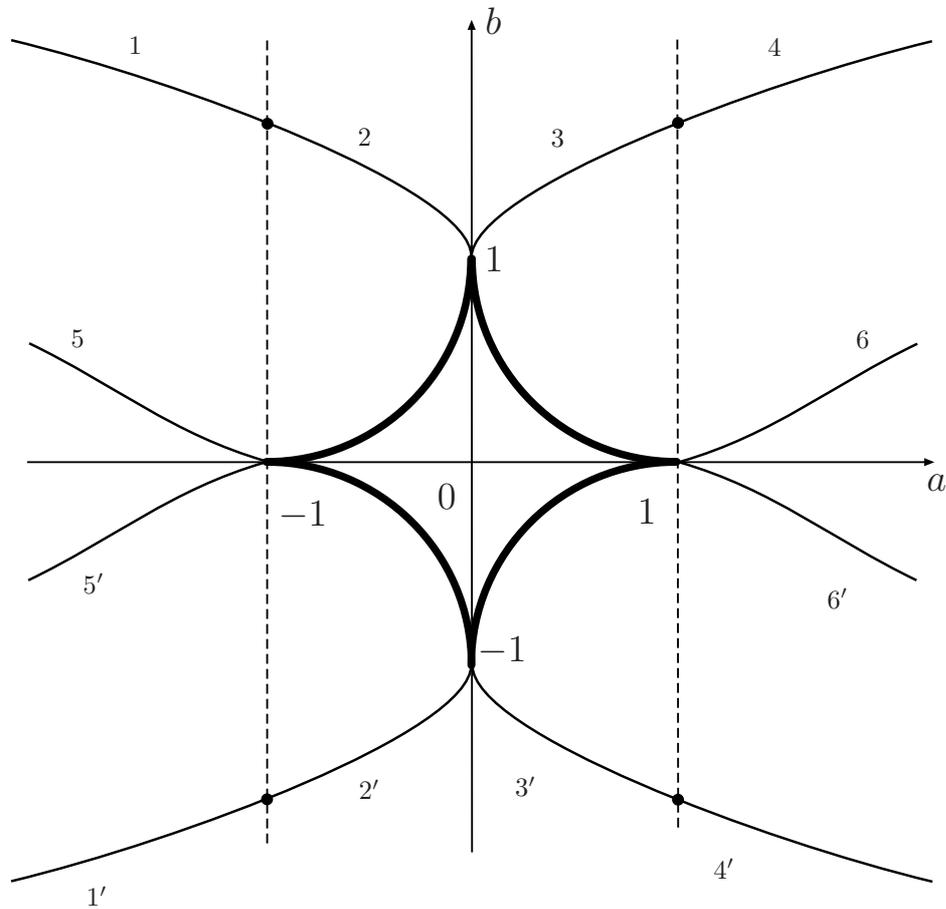


Рис. 2: Бифуркационная кривая и кривые вырождения.

Последнее условие сводится к уравнению

$$|a|^{2/3} + |b|^{2/3} = 1, \quad (1.3.9)$$

задающему бифуркационную кривую в плоскости параметров (a, b) . Кри-

вая (1.3.9) — астроида, она показана на рис. 2 полужирной линией. Для точек a , b , лежащих внутри астроида (кроме точек координатных осей), число корней уравнения (1.3.8) равно четырем. Для точек вне этой кривой уравнение (1.3.8) имеет два корня при всех отличных от нуля значениях a и b .

Пусть x_0 — один из корней уравнения (1.3.8). Для исследования устойчивости соответствующего ему положения равновесия модельной системы положим в (1.3.4) $x = x_0 + q$, $y = p$. Гамильтониан возмущенного движения имеет вид

$$\gamma' = \kappa_1 q^2 + \kappa_2 p^2 + \dots, \quad (1.3.10)$$

$$\kappa_1 = -\frac{b [a - (x_0^2 - 1)^3]}{2x_0 (a + 1 - x_0^2) (2 - x_0^2)^{3/2}}, \quad \kappa_2 = -\frac{ab\sqrt{2 - x_0^2}}{8x_0 (a + 1 - x_0^2)}.$$

Здесь многоточие означает совокупность слагаемых не менее третьей степени относительно возмущений.

При выполнении условия $\kappa_1 \kappa_2 > 0$ квадратичная часть в (1.3.10) является знакоопределенной. Учитывая, что гамильтониан γ' есть первый интеграл системы, заключаем, что в этом случае положение равновесия устойчиво на основании теоремы Ляпунова об устойчивости. При выполнении неравенства $\kappa_1 \kappa_2 < 0$ квадратичная часть знакопеременна, и положение равновесия неустойчиво.

Указанное условие устойчивости сводится к неравенству

$$a [a - (x_0^2 - 1)^3] > 0.$$

Заметим при этом, что

$$b'_x(x, a) = -\frac{2 [a - (x_0^2 - 1)^3]}{\sqrt{2 - x_0^2} (x_0^2 - 1)^2}.$$

Отсюда следует, что в случае $a < 0$ устойчивыми на рис. 1а, 1б будут точки на участках возрастания функции $b = b(x, a)$ и неустойчивыми — точки на участках ее убывания. В случае же $a > 0$ (рис. 1в, 1г), наоборот, участки

возрастания и убывания функции $b = b(x, a)$ соответствуют неустойчивым и устойчивым равновесным точкам.

Положения равновесия, соответствующие точкам экстремума функции (1.3.8), являются неустойчивыми сложными особыми точками системы.

Устойчивые и неустойчивые точки отмечены на рис. 1 символами s и u соответственно.

Рассмотрим частные случаи, когда хотя бы одна из величин a или b равна нулю. Если $b = 0$ и $a \neq 0$, то модельная система имеет положение равновесия $x = y = 0$ в начале координат, неустойчивое при $-1 < a < 0$ и устойчивое на интервалах $a < -1$ и $a > 0$. При $-1 < a < 1$, существуют также два устойчивых положения равновесия $x = \pm\sqrt{a+1}$, $y = 0$. Если $0 < a < 1$, то на граничной окружности имеются еще четыре неустойчивые равновесные точки $x = \pm\sqrt{2a}$, $y = \pm\sqrt{2-2a}$.

Для значения $a = -1$ модельная система имеет единственное положение равновесия — устойчивую сложную особую точку $x = y = 0$. При $a = 1$, помимо устойчивого положения равновесия в начале координат, есть две неустойчивые сложные особые точки $x = \pm\sqrt{2}$, $y = 0$ на граничной окружности.

В случае $a = 0$ и $b \neq 0$ в модельной системе имеются неустойчивые $x = 0$, $y = \pm\sqrt{2}$ и устойчивые $x = \pm 1$, $y = 0$ положения равновесия. Кроме того, при $0 < |b| < 1$ существует множество неустойчивых сложных особых точек, образующих кривую, задаваемую уравнением $x\sqrt{2-x^2-y^2} + b = 0$. При $b = 1$ (случай точного резонанса) и $b = -1$ эта кривая стягивается в точку $x = -\text{sign } b$, $y = 0$, сливаясь с одним из устойчивых равновесий; в результате образуется устойчивая сложная особая точка.

Если $a = b = 0$, то, помимо устойчивых равновесий $x = \pm 1$, $y = 0$, имеется отрезок $x = 0$, $|y| \leq \sqrt{2}$ неустойчивых сложных особых точек на оси ординат.

1.3.2. Фазовые портреты модельной системы

На рис. 3–6 в плоскости переменных x, y представлены фазовые портреты модельной системы. Так как гамильтониан (1.3.4) не меняется при одновременной замене на противоположные знаки величин x и b , то достаточно рассмотреть случаи, когда $b \geq 0$.

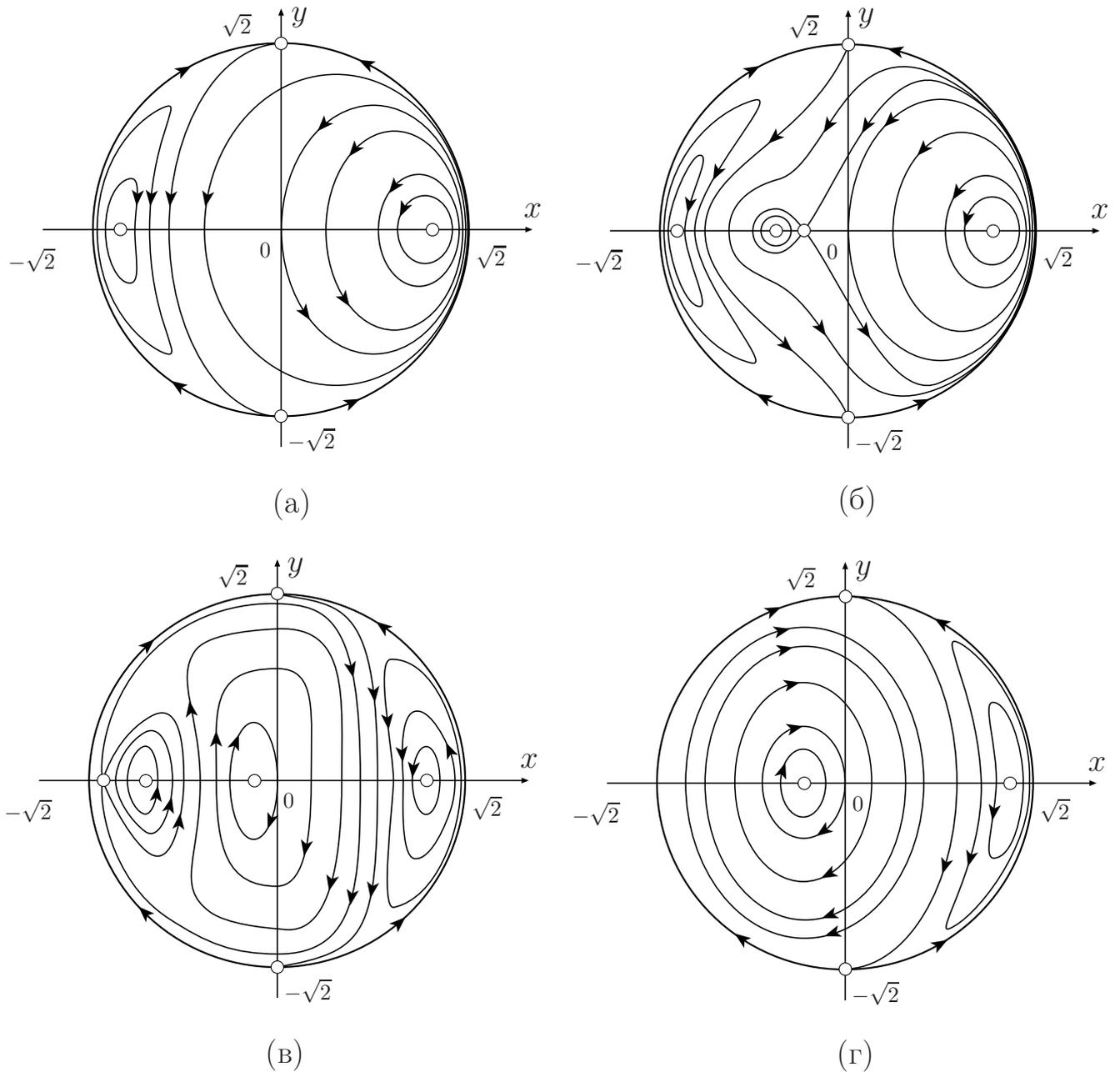


Рис. 3: Фазовый портрет модельной системы при $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

Рис. 3 относится к общему случаю $a \neq 0, b \neq 0$. Фазовые портреты на рис. 3а и 3г соответствуют точкам (a, b) , лежащим вне области, ограниченной кривой (1.3.9) на рис. 2, в случаях $a < 0$ и $a > 0$, фазовые портреты на рис. 3б и 3в отвечают точкам внутри этой области при $a < 0$ и $a > 0$.

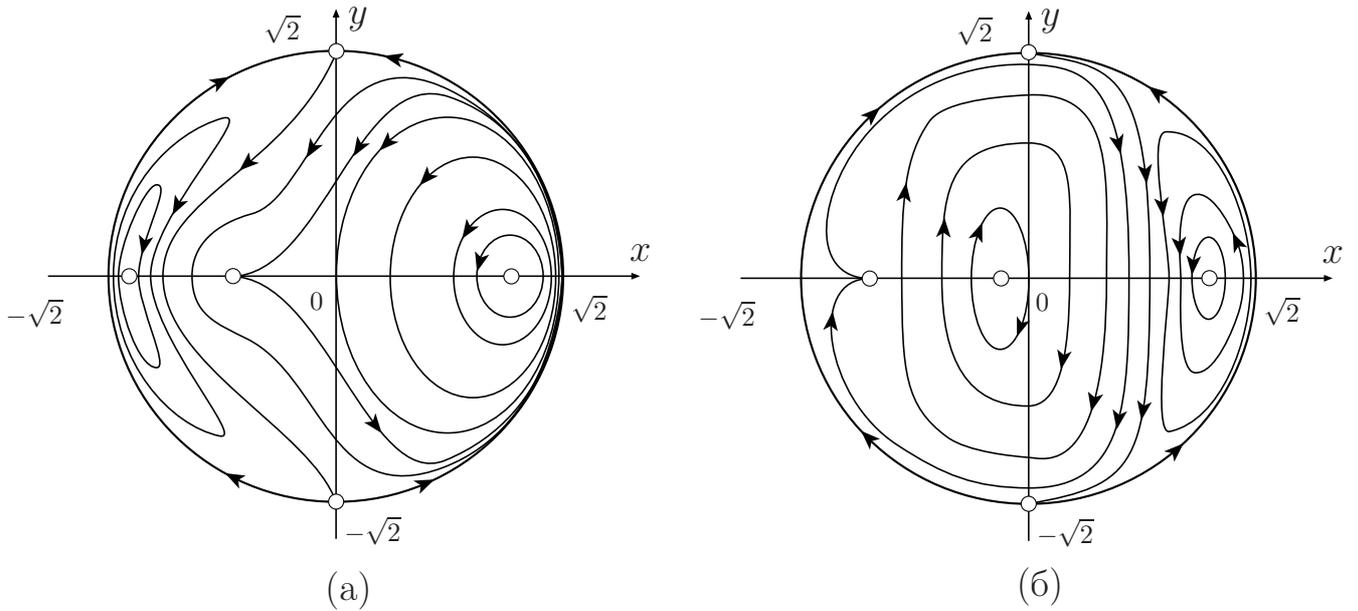


Рис. 4: Фазовые портреты для точек бифуркационной кривой.

Устойчивым положениям равновесия соответствуют на рис. 3 особые точки типа центр, неустойчивым — седловые особые точки. Сепаратриса, соединяющая две неустойчивые точки, расположенные на концах вертикального диаметра граничной окружности, разделяет допустимую область движений на две области. В случае двух корней уравнения (1.3.8) это области колебаний в окрестности устойчивых равновесий (рис. 3а, 3г). В случае четырех корней уравнения (1.3.8) одна из областей — также область колебаний; другая область содержит еще одну сепаратрису, разделяющую ее на две подобласти колебаний и подобласть, фазовые траектории которой охватывают три особые точки системы (рис. 3б, 3в).

Фазовые портреты для точек (a, b) бифуркационной кривой (1.3.9) при $a < 0$ и $a > 0$ представлены на рис. 4а и 4б соответственно.

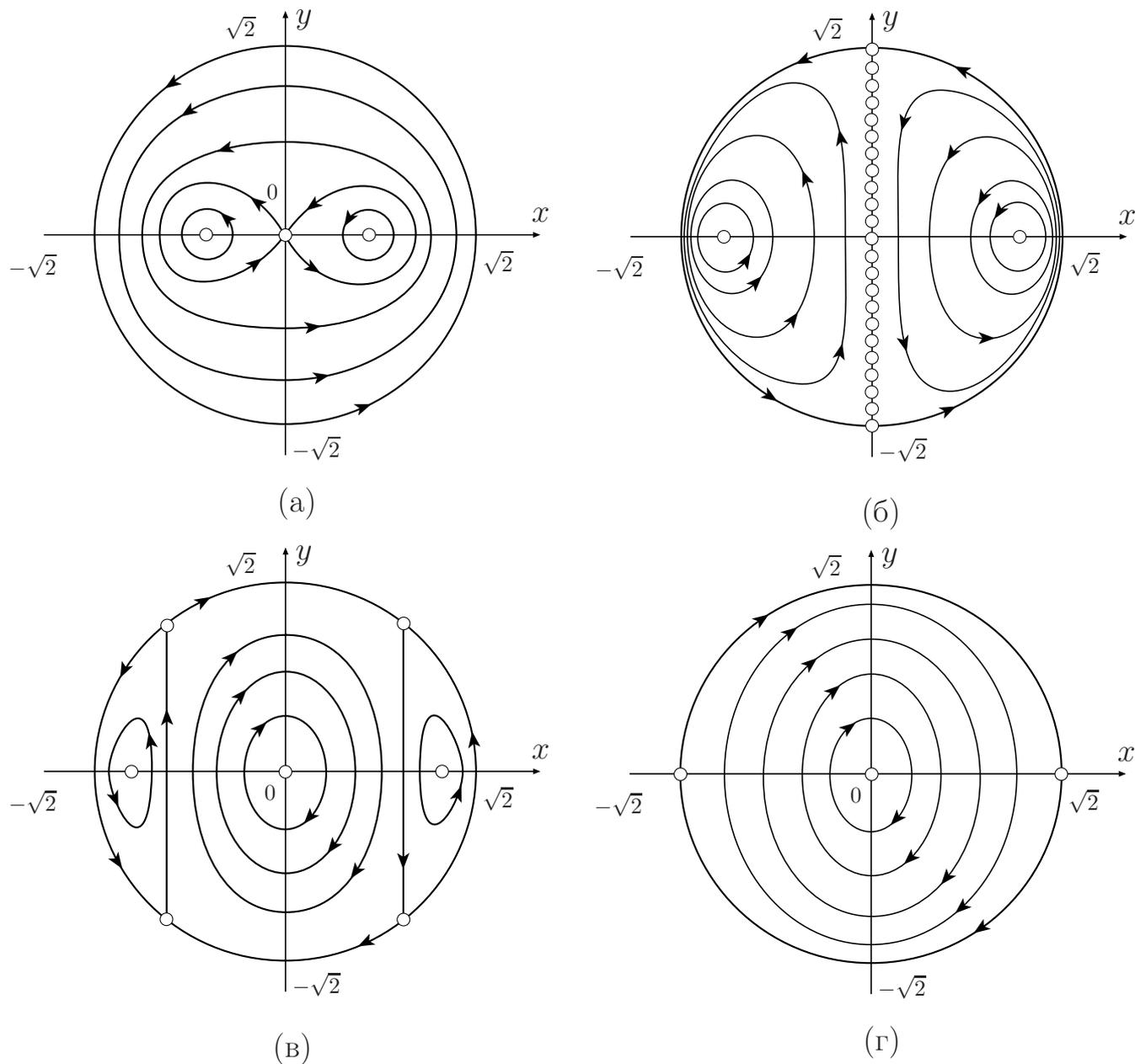


Рис. 5: Фазовые портреты для случая $b = 0$.

Фазовые портреты на рис. 5а–5г отвечают случаю $b = 0$ и значениям $-1 < a < 0$, $a = 0$, $0 < a < 1$, $a = 1$. При $a > 1$ фазовый портрет качественно

такой же, как на рис. 5г, только неустойчивые сложные особые точки на концах горизонтального диаметра окружности пропадают. Случаи $a = -1$ и $a < -1$ качественно такие же, как соответственно случаи $a = 1$ и $a > 1$, но меняются на противоположные направления движений вдоль фазовых траекторий.

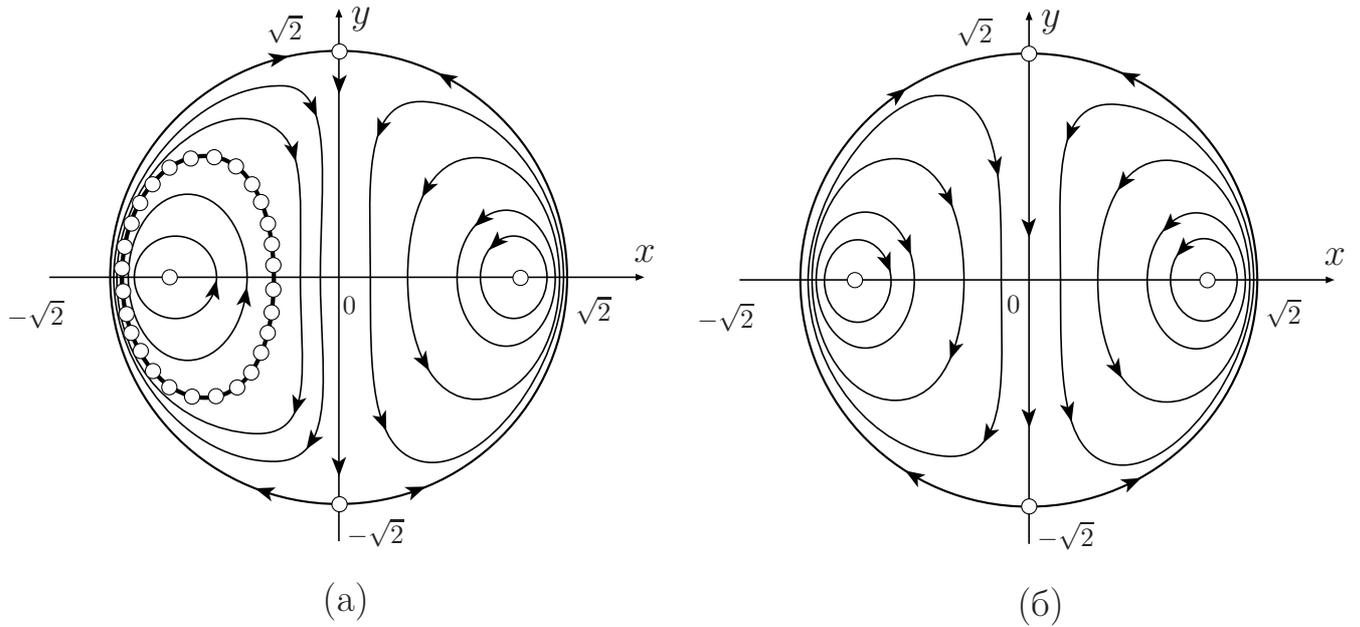


Рис. 6: Фазовые портреты для случая $a = 0$.

При $a = 0$ фазовые портреты модельной системы представлены на рис. 6а, 6б для случаев $0 < b < 1$ и $b = 1$. При $b > 1$ фазовый портрет качественно такой же, как при $b = 1$.

1.4. Семейство периодических решений полной системы.

Исследование устойчивости

Пусть точка $x = x_0, y = y_0$ или связанная с ней при помощи формул (1.3.3) точка $\Phi_1 = \Phi_{10}, r = r_0$ — одно из положений равновесия модельной системы.

В приближенной системе с двумя степенями свободы с гамильтонианом (1.2.9) этому равновесию соответствует однопараметрическое (с параметром c) семейство частных решений вида

$$R_1 = cr_0, \quad R_2 = c, \quad \Phi_1 = \Phi_{10}, \quad \frac{d\Phi_2}{d\tau} = \frac{\partial\Gamma_0}{\partial R_2} = \Omega_{20} = 1 + O(\varepsilon). \quad (1.4.1)$$

Далее исключим из рассмотрения решения, отвечающие сложным особым точкам модельной системы и равновесным точкам на граничной окружности. Тогда x_0 — корень уравнения (1.3.7) (кроме исключенных случаев), $y_0 = 0$, и $r_0 = x_0^2/2$, $\Phi_{10} = \pm\pi/2$.

В полной системе с гамильтонианом (1.2.8) можно осуществить изоэнергетическую редукцию, записать уравнения Уиттекера и, применяя метод Пуанкаре, построить семейство периодических движений, рождающихся из каждого решения вида (1.4.1). При $c = 0$ данное семейство вырождается в одну точку — положение равновесия в начале координат. Период по τ этих движений отличается от 2π на величину порядка ε и при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к 2π .

Принимая во внимание замены переменных (1.2.4), (1.2.5), (1.2.7), запишем периодические решения полной системы в виде

$$\begin{aligned} q_1 &= \sqrt{\varepsilon c} x_0 \cos \Phi_2 + \frac{1}{48} (\varepsilon c)^{3/2} \times \\ &\times \left[\left(\sqrt{2 - x_0^2} (3 - 13x_0^2) + 3x_0 (x_0^2/2 - 4a - 2b - 1) \right) \cos \Phi_2 + \right. \\ &\left. + \left(3\sqrt{2 - x_0^2} (x_0^2 - 1) + x_0 (3 - x_0^2) \right) \cos 3\Phi_2 \right] + O(\varepsilon^{5/2}), \\ q_2 &= \sqrt{\varepsilon c} (2 - x_0^2) \sin \Phi_2 + \frac{1}{48} (\varepsilon c)^{3/2} \times \\ &\times \left[\left(3\sqrt{2 - x_0^2} (5x_0^2/2 - 2b) + x_0 (13x_0^2 - 15) \right) \sin \Phi_2 + \right. \\ &\left. + \left(\sqrt{2 - x_0^2} (5x_0^2 - 1) + 3x_0 (x_0^2 - 1) \right) \sin 3\Phi_2 \right] + O(\varepsilon^{5/2}), \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

$$\Phi_2 = \Omega_2(\tau + \tau_0), \quad \Omega_2 = 1 + \frac{\varepsilon c}{4} \left[b + x_0^2 + \frac{x_0(2 - x_0^2 + b)}{\sqrt{2 - x_0^2}} \right] + O(\varepsilon^2). \quad (1.4.3)$$

Полученные решения аналитичны по дробным степеням малого параметра ε .

Если в соотношениях (1.4.2) оставить только первые слагаемые (порядка $\sqrt{\varepsilon}$), то в случае $x_0 \neq 0$ в плоскости q_1, q_2 получаем эллипс с полуосями $\sqrt{\varepsilon c} |x_0|$ и $\sqrt{\varepsilon c(2 - x_0^2)}$ (рис. 7а) или, при $x_0 = \pm 1$ (в случаях $a = 0, b = \pm 1$), окружность радиуса $\sqrt{\varepsilon c}$ (рис. 7б). Направление движения вдоль фазовых траекторий на рис. 7а, 7б соответствует $x_0 > 0$, при $x_0 < 0$ оно меняется на противоположное.

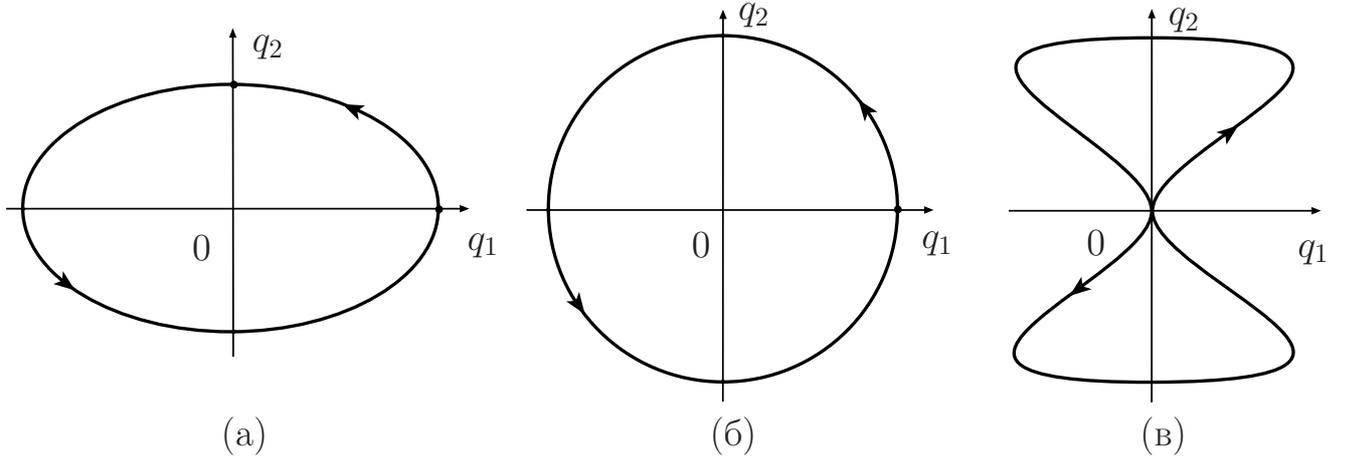


Рис. 7: Периодические траектории в плоскости q_1, q_2 .

Если $x_0 = 0$ (случай $b = 0$), то, оставляя только первые отличные от нуля слагаемые в (1.4.2), получаем приближенные соотношения вида

$$q_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} (\varepsilon c)^{3/2} \sin^2 \Phi_2 \cos \Phi_2, \quad q_2 = \sqrt{2\varepsilon c} \sin \Phi_2.$$

Исключая отсюда Φ_2 , приходим к уравнению

$$\frac{1}{2} q_2^2 + 32 \frac{q_1^2}{q_2^4} = c\varepsilon,$$

описывающему кривую, вид которой представлен на рис. 7в.

Проведем исследование орбитальной устойчивости найденных периодических движений. Для рассматриваемой здесь автономной гамильтоновой системы два характеристических показателя соответствующих линеаризованных уравнений возмущенного движения равны нулю, а два другие удовлетворяют уравнению

$$\lambda^2 + 4\varepsilon^2 c^2 \kappa_1 \kappa_2 (1 + O(\varepsilon)) = 0, \quad (1.4.4)$$

причем величины κ_1 и κ_2 определены в соотношениях (1.3.10).

Для периодического движения, порождаемого неустойчивым положением равновесия модельной системы, имеем $\kappa_1 \kappa_2 < 0$, поэтому при достаточно малых ε уравнение (1.4.4) имеет положительный вещественный корень. Отсюда следует, что такое периодическое движение орбитально неустойчиво на основании теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Если порождающее положение равновесия модельной системы устойчиво, т.е. $\kappa_1 \kappa_2 > 0$, то корни $\lambda = \pm i\Omega_1$ уравнения (1.4.4) чисто мнимые, частота Ω_1 вычисляется по формуле

$$\Omega_1 = 2\sigma\varepsilon c\sqrt{\kappa_1 \kappa_2} + O(\varepsilon^2), \quad (1.4.5)$$

в которой коэффициент σ принимает значения $+1$ или -1 , в зависимости от выбранных значений a , b и отвечающих им равновесных значений x_0 . В случае $a < 0$ (рис. 1а, 1б) имеем $\sigma = +1$ на участках кривой (1.3.9) при $|x_0| > 1$ и $\sigma = -1$ на участках устойчивости на этой кривой при $|x_0| < 1$. Если $a > 0$ (рис. 1в, 1г), то, наоборот, $\sigma = -1$ на участках устойчивости на кривой (1.3.9) при $|x_0| > 1$ и $\sigma = +1$ на ветвях этой кривой при $|x_0| < 1$.

Для получения строгого вывода об орбитальной устойчивости необходимо провести нормализацию гамильтониана возмущенного движения в слагаемых

до четвертой степени включительно относительно возмущений. Общий алгоритм нормализации автономных гамильтоновых систем в задаче об орбитальной устойчивости периодических движений описан в работе [53].

В исследуемой задаче нормализованный гамильтониан возмущенного движения представляется в виде

$$\Gamma' = \Omega_1 r_1 + \Omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + \dots, \quad (1.4.6)$$

причем частоты Ω_1 и Ω_2 определены в соотношениях (1.4.5) и (1.4.3), а коэффициенты c_{ij} , как показывают вычисления, имеют вид

$$\begin{aligned} c_{20} &= \frac{3c_1 \kappa_2^2 + c_2 \kappa_1 \kappa_2 + 3c_3 \kappa_1^2}{2\kappa_1 \kappa_2} - \frac{3\sigma}{8} \frac{5\kappa_2^2 b_1^2 + 2\kappa_1 \kappa_2 b_1 b_2 + \kappa_1^2 b_2^2}{\kappa_1^2 \kappa_2}, \\ c_{11} &= \frac{\sigma}{2} \frac{2c_4 \kappa_1 \kappa_2 + 2c_5 \kappa_1^2 - b_3 (b_2 \kappa_1 + 3\kappa_2 b_1)}{\kappa_1 \sqrt{\kappa_1 \kappa_2}}, \quad c_{02} = \frac{4c_6 \kappa_1 - \sigma b_3^2}{4\kappa_1}, \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

где (слагаемые порядка ε^2 и выше отброшены)

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{\varepsilon c}{2} \left[x_0 + b (2 - x_0^2)^{-\frac{5}{2}} \right], \quad b_2 = -\frac{\varepsilon c}{4} \left[x_0 + b (2 - x_0^2)^{-\frac{3}{2}} \right], \\ b_3 &= \frac{\varepsilon c}{2} \left[x_0 + (b - (x_0^2 - 1) (2 - x_0^2)) (2 - x_0^2)^{-\frac{3}{2}} \right], \\ c_1 &= -\frac{\varepsilon c}{8} \left[1 + 5b x_0 (2 - x_0^2)^{-\frac{7}{2}} \right], \quad c_2 = -\frac{\varepsilon c}{8} \left[1 + 3b x_0 (2 - x_0^2)^{-\frac{5}{2}} \right], \\ c_3 &= -\frac{\varepsilon c}{32} b x_0 (2 - x_0^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad c_5 = \frac{\varepsilon c}{8} x_0 (b - 2 + x_0^2) (2 - x_0^2)^{-\frac{3}{2}}, \\ c_4 &= \frac{\varepsilon c}{4} \left[1 + x_0 ((2 - x_0^2) (x_0^2 - 3) + 3b) (2 - x_0^2)^{-\frac{5}{2}} \right], \\ c_6 &= \frac{\varepsilon c}{8} \left[1 - x_0 (2x_0^2 + b - 4) (2 - x_0^2)^{-\frac{3}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Многоточием в (1.4.6) обозначены слагаемые выше второй степени по r_1, r_2 .

Рассмотрим выражение

$$\Delta = c_{20} \Omega_2^2 + c_{11} \Omega_1 \Omega_2 + c_{02} \Omega_1^2. \quad (1.4.9)$$

Если $\Delta \neq 0$, то рассматриваемое периодическое решение орбитально устойчиво на основании теоремы Арнольда—Мозера [42].

Из соотношений (1.4.5), (1.4.3), (1.4.7), (1.4.8) следует, что при достаточно малых ε условие орбитальной устойчивости может нарушиться, если обратится в нуль коэффициент c_{20} . Проанализируем свойства этого коэффициента.

Рассмотрим сначала значения параметров a и b , лежащие на координатных осях. Если $a = 0$ и $x_0 = \pm 1$, то при всех b имеем $c_{20} = \varepsilon c/2 + O(\varepsilon^2) > 0$. При $b = 0$ и $x_0 = 0$ ($a < -1$ или $a > 0$) получаем

$$c_{20} = -\frac{\varepsilon c}{16} \frac{4a + 1}{1 + a} + O(\varepsilon^2) < 0.$$

Если $b = 0$ и $x_0 = \pm\sqrt{a+1}$ ($|a| < 1$), то

$$c_{20} = \varepsilon c \frac{a^2 + 2}{4(1 - a^2)} + O(\varepsilon^2) > 0.$$

Для произвольных отличных от нуля значений параметров a и b проведен совместный анализ уравнений $c_{20} = 0$ и (1.3.7), при этом в выражении для c_{20} были отброшены слагаемые $O(\varepsilon^2)$. Выявлено, что данные уравнения имеют общие решения x_0 в том случае, когда параметры a и b связаны соотношением

$$\begin{aligned} &256a^{12} - 240(b^2 - 1)a^{10} - (1296b^4 + 12033b^2 + 1296)a^8 + \\ &\quad + 16(b^2 - 1)(11b^4 + 356b^2 + 11)a^6 + \\ &\quad + (2064b^8 - 24672b^6 + 31392b^4 - 24672b^2 + 2064)a^4 + \\ &\quad + 1152(1 + 6b^2 + b^4)(b^2 - 1)^3 a^2 + 64(b^2 - 1)^6 = 0. \end{aligned} \tag{1.4.10}$$

В плоскости параметров (a, b) ему соответствуют кривые, показанные на рис. 2 тонкими сплошными линиями. Эти кривые выходят попарно из вершин астроида и расположены симметрично относительно обеих координатных осей. Точками с абсциссами $a = 1$ или $a = -1$ кривые (1.4.10), начинающиеся на оси ординат, разделены на два участка. Этим участкам, а также остальным четырём кривым присвоены номера 1–6 и 1'–6' (см. рис. 2). Каждой занумерованной

кривой (1.4.10) (или ее части), в свою очередь, соответствует один из участков устойчивых равновесных точек на графике функции (1.3.8) на рис. 1; ему присвоен тот же номер.

Выбирая произвольную точку (a, b) кривой (1.4.10) на рис. 2, находим (единственную) точку (x_0, a) , принадлежащую кривой (1.3.8) на рис. 1 с тем же номером. Как следует из рис. 2, для значений a из интервалов $0 < |a| < 1$ или $|a| > 1$ имеем соответственно четыре или две тройки чисел a, b, x_0 , для которых может быть нарушено условие орбитальной устойчивости отвечающих им периодических движений системы.

Для того чтобы решить вопрос об орбитальной устойчивости в этих случаях, необходимо провести вычисление коэффициента c_{20} до членов порядка ε^2 включительно и, найдя величину (1.4.9) с той же точностью, вновь проверить выполнение условия $\Delta \neq 0$. Такое исследование в данной работе не проводилось.

1.5. Полная система. Условно-периодические движения

Из результатов раздела 1.3.2 следует, что если значения параметров a, b и h модельной системы с гамильтонианом (1.3.4) не соответствует положениям равновесия и сепаратрисам, то движения системы носят колебательный характер. В этих случаях колебательными будут также и движения приближенной системы с двумя степенями свободы с гамильтонианом (1.2.9).

Опишем отвечающие им движения полной системы с гамильтонианом (1.2.8). Рассмотрим два набора параметров при $a = 0, b = 1$ и $a = 1, b = 0$.

1.5.1. Случай $a = 0, b = 1$

Фазовый портрет, соответствующий данному случаю, представлен на рис. 6б. Параметр h меняется в диапазоне $-1/8 \leq h \leq 3/8$, причем граничным точкам $h = -1/8$ и $h = 3/8$ отвечают устойчивые положения равновесия $x = -1, y = 0$ и $x = 1, y = 0$, интервалам $-1/8 < h < 0$ и $0 < h < 3/8$ — колебания в их окрестности, а значению $h = 0$ — неустойчивые равновесия $x = 0, y = \pm\sqrt{2}$ и движения по сепаратрисам.

Проведем интегрирование модельной системы в областях колебаний; это удобнее сделать в переменных Φ_1, r . Разрешим интеграл $\gamma = h$ относительно $\sin \Phi_1$:

$$\sin \Phi_1 = \frac{\sqrt{1+8h}-1}{2\sqrt{r}\sqrt{1-r}}.$$

При помощи этого соотношения исключим угловую переменную Φ_1 из правой части второго уравнения (1.3.2) и перепишем его в виде

$$\left(\frac{dr}{d\eta}\right)^2 = \beta^2 (r_1 - r)(r - r_2) \quad (r_1 \geq r \geq r_2), \quad (1.5.1)$$

$$r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-\alpha}}{2}, \quad \beta(h) = \frac{\sqrt{1+8h}}{2}, \quad \alpha = (2\beta - 1)^2 \quad (0 < \alpha < 1).$$

Интегрируя уравнение (1.5.1), найдем зависимость $r = r(\eta)$ в области колебаний:

$$r(\eta) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-\alpha}}{2} \sin \beta\eta.$$

Частота колебаний равна $\omega = \beta(h)$.

Введем в областях колебаний модельной системы переменные действие-угол I, w , полагая

$$I = I(h) = \frac{1}{2\pi} \oint r d\Phi_1 = \frac{1}{2\pi} \oint y dx. \quad (1.5.2)$$

Здесь интегрирование проводится по замкнутой кривой, охватывающей положение устойчивого равновесия системы. Обратная к (1.5.2) функция $h = h(I)$ представляет собой гамильтониан модельной системы, записанный в переменных действие-угол.

Явную зависимость $h = h(I)$ можно найти, принимая во внимание соотношение

$$\frac{dh}{dI} = \omega(h).$$

Интегрируя это уравнение и отбрасывая аддитивные константы, получим

$$h(I) = \frac{1}{2} I^2.$$

Введем также переменные действие-угол I_j, w_j ($j = 1, 2$) в приближенной системе с гамильтонианом (1.2.9). Так как Φ_2 — циклическая координата, то $I_2 = R_2$. Для величины I_1 имеем

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \oint R_1 d\Phi_1 = \frac{1}{2\pi} I_2 \oint r d\Phi_1 = I_2 I(h),$$

откуда следует, что

$$I(h) = \frac{I_1}{I_2}.$$

Гамильтониан (1.2.9) в новых переменных не содержит угловых переменных w_1, w_2 и имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_0 &= \Gamma^{(0)}(I_2) + \varepsilon \Gamma^{(1)}(I_1, I_2), \\ \Gamma^{(0)}(I_2) &= I_2, \quad \Gamma^{(1)}(I_1, I_2) = \frac{1}{8} I_2^2 + I_2^2 h(I) = \frac{1}{8} I_2^2 + \frac{1}{2} I_1^2. \end{aligned} \tag{1.5.3}$$

Частоты нелинейных колебаний приближенной системы определяются формулами

$$\omega_1 = \frac{\partial \tilde{\Gamma}_0}{\partial I_1} = \varepsilon I_1, \quad \omega_2 = \frac{\partial \tilde{\Gamma}_0}{\partial I_2} = 1 + \varepsilon \frac{I_2}{4}.$$

Если в начальный момент отношение частот $\omega_1 : \omega_2$ не является рациональным числом, то движение приближенной системы будет условно периодическим с частотами ω_1 и ω_2 .

Рассмотрим теперь полную систему с гамильтонианом (1.2.8). В переменных I_j, w_j ($j = 1, 2$) этот гамильтониан представляется в виде

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma^{(0)}(I_2) + \varepsilon \Gamma^{(1)}(I_1, I_2) + \varepsilon^2 \Gamma^{(2)}(I_1, I_2, w_1, w_2, \varepsilon), \quad (1.5.4)$$

причем функции $\Gamma^{(0)}$ и $\Gamma^{(1)}$ определены формулами из (1.5.3), а функция $\Gamma^{(2)}$ аналитична по всем аргументам и 2π -периодична по w_1 и w_2 .

Так как при $\varepsilon = 0$ гамильтониан (1.5.4) зависит только от одной переменной I_2 , то в системе имеет место случай собственного вырождения [2]. При этом в областях колебаний, очевидно, выполняются соотношения

$$\frac{\partial \Gamma^{(0)}}{\partial I_2} \neq 0, \quad \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial I_1} \neq 0, \quad \frac{\partial^2 \Gamma^{(1)}}{\partial I_1^2} \neq 0. \quad (1.5.5)$$

Поэтому [2] движения полной системы с функцией Гамильтона (1.2.8) для большинства начальных условий условно-периодические с частотами ω_1 и ω_2 . Доля фазового пространства, не заполненная условно-периодическими траекториями, определяется величиной $O(\exp(-d_1/\varepsilon))$, где $d_1 = \text{const} > 0$. Кроме того, для всех начальных условий переменные $I_j(\tau)$ ($j = 1, 2$) при всех τ остаются вблизи своих начальных значений, и справедлива оценка

$$|I_j(\tau) - I_j(0)| < \varepsilon d_2 \quad (d_2 = \text{const} > 0). \quad (1.5.6)$$

1.5.2. Случай $a = 1, b = 0$

Фазовый портрет, соответствующий данному случаю, представлен на рис. 5г. Параметр h меняется в диапазоне $0 \leq h \leq 1/2$, причем точке $h = 0$

отвечает устойчивое положение равновесия $x = 0, y = 0$, интервалу

$$0 < h < 1/2 \quad (1.5.7)$$

соответствуют колебания в его окрестности, а значению $h = 1/2$ — неустойчивые равновесия $x = \pm\sqrt{2}, y = 0$ и движение по сепаратрисе.

Дальнейшее исследование проведем по той же схеме, что и в предыдущем разделе. Разрешим соотношение $\gamma = h$ относительно $\sin \Phi_1$

$$\sin \Phi_1 = \frac{\sqrt{2h - r}}{\sqrt{r}\sqrt{1 - r}}$$

и исключим угловую переменную Φ_1 из правой части второго уравнения (1.3.2) и перепишем его в виде

$$\left(\frac{dr}{d\eta}\right)^2 = F(r, h), \quad (1.5.8)$$

где

$$F(r, h) = (r - 2h)(r^2 - 2r + 2h). \quad (1.5.9)$$

Функция (1.5.9) может быть записана в виде

$$F(r, h) = (r - r_1)(r_2 - r)(r_3 - r), \quad (1.5.10)$$

где

$$r_{1,3} = 1 \mp \sqrt{1 - 2h}, \quad r_2 = 2h. \quad (1.5.11)$$

Исследуем функцию $F(r, h)$. Будем считать, что $r \neq 0$ и $r \neq 1$. Уравнение (1.5.8) определено только для тех значений r из интервала $(0, 1)$, для которых многочлен третьей степени $F(r, h)$ принимает неотрицательные значения.

В этом случае имеем

$$\frac{dr}{d\eta} = \pm \sqrt{F(r, h)}, \quad (1.5.12)$$

откуда следует, что переменная η , а следовательно и безразмерное время τ и время t определяются эллиптическими интегралами первого рода от переменной r , а зависимость $r(t)$ записывается при помощи эллиптических функций.

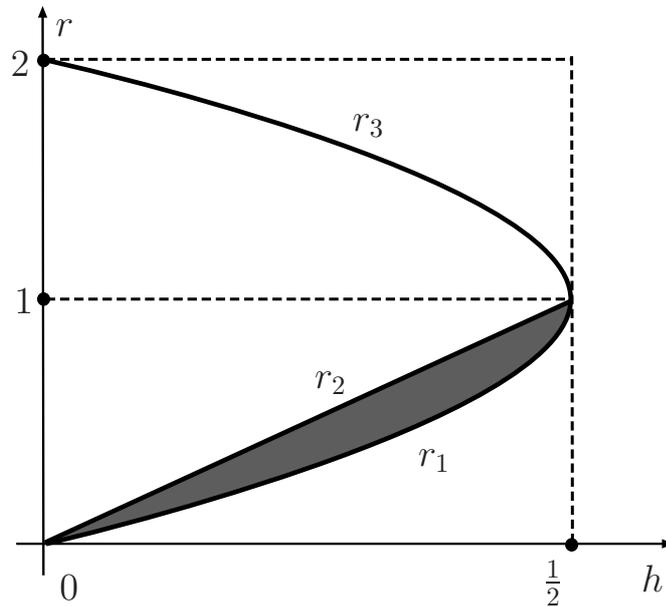


Рис. 8: Корни многочлена третьей степени $F(r, h)$ в зависимости от h .

Далее заметим, что $F(\pm\infty, h) = \pm\infty$, $F(0, h) = -4h^2 \leq 0$ и $F(1, h) = -(1 - 2h)^2 \leq 0$. На рис. 8 представлена зависимость корней многочлена третьей степени от параметра h и изображена область параметров, где функция $F(r, h)$ принимает положительные значения.

Для значений h из интервала (1.5.7) многочлен (1.5.10) имеет три вещественных значения r_i ($i = 1, 2, 3$). Занумеровав их в порядке возрастания, получим, что

$$0 < r_1 < r_2 < 1 < r_3 < 2.$$

Для реальных движений $F(r, h) \geq 0$ и величина r может принимать значения только из интервала $r_1 \leq r \leq r_2$.

Чтобы проинтегрировать уравнение (1.5.12) перейдем от переменной r к новой переменной w по формуле

$$r = r_1 + (r_2 - r_1) w^2. \quad (1.5.13)$$

Заметим, что при $w = 0$ $r = r_1$, а при $w = \pm 1$ $r = r_2$. Используя (1.5.13), перепишем многочлен в виде

$$F(w, k) = (r_2 - r_1)^2 (r_3 - r_1) w^2 (1 - w^2) (1 - k^2 w^2),$$

где $k^2 = \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_1}$, причем $0 < k^2 < 1$.

Учтем также, что согласно (1.5.13)

$$\frac{dr}{d\eta} = 2(r_2 - r_1) w \frac{dw}{d\eta}.$$

Подставляя выражение для $\frac{dr}{d\eta}$ и $F(w)$ в уравнение (1.5.10), получим

$$\left(\frac{dw}{d\eta} \right)^2 = \frac{1}{4} (r_3 - r_1) (1 - w^2) (1 - k^2 w^2).$$

Откуда имеем

$$\frac{dw}{d\eta} = \pm m \sqrt{(1 - w^2) (1 - k^2 w^2)} \quad \left(m = \frac{1}{2} \sqrt{r_3 - r_1} \right). \quad (1.5.14)$$

Проинтегрируем уравнение (1.5.14) от момента η_1 , когда $r = r_1$, а $w = 0$, до произвольного момента времени:

$$m(\eta - \eta_1) = \pm \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1 - w^2) (1 - k^2 w^2)}}.$$

Откуда следует, что переменная w определяется через эллиптический синус величины

$$\xi = m(\eta - \eta_1)$$

по формуле

$$w = \pm \operatorname{sn}(\xi, k),$$

а следовательно, переменная r , на основании формулы (1.5.13) вычисляется по формуле

$$r = r_1 + (r_2 - r_1) \operatorname{sn}^2(\xi, k).$$

Таким образом в случае трех различных корней функции $F(r, h)$ переменная r , а значит и начальные параметры задачи, периодически меняются со временем.

Здесь и далее применяются общепринятые обозначения для эллиптических функций и интегралов [23, 140].

Частота ω_1 нелинейных колебаний задается равенством

$$\omega_1 = \omega_1^* \frac{\pi \sqrt{r_3 - r_1}}{\sqrt{2} \mathbf{K}(k)}; \quad \omega_1^* = \frac{\sqrt{2}}{2} \varepsilon c, \quad (1.5.15)$$

где ω_1^* — частота малых линейных колебаний в окрестности точки $(0, 0)$ (рис. 5г), а r_i ($i = 1, 2, 3$) вычисляются по формулам (1.5.11).

Величина ω_1/ω_1^* — функция от h . Ее график представлен на рис. 9.

Введем в областях колебаний модельной системы переменные действие-угол I, w при помощи формулы (1.5.2).

Зависимость $h = h(I)$ можно найти, интегрируя соотношение

$$\frac{dh}{dI} = \omega_1(h) = \omega_1^* \frac{\pi \sqrt{r_3 - r_1}}{\sqrt{2} \mathbf{K}(k)},$$

где ω_1^* представлена в (1.5.15), величины r_i ($i = 1, 2, 3$) вычисляются по формулам (1.5.11), а $\mathbf{K}(k)$ - полный эллиптический интеграл первого рода.

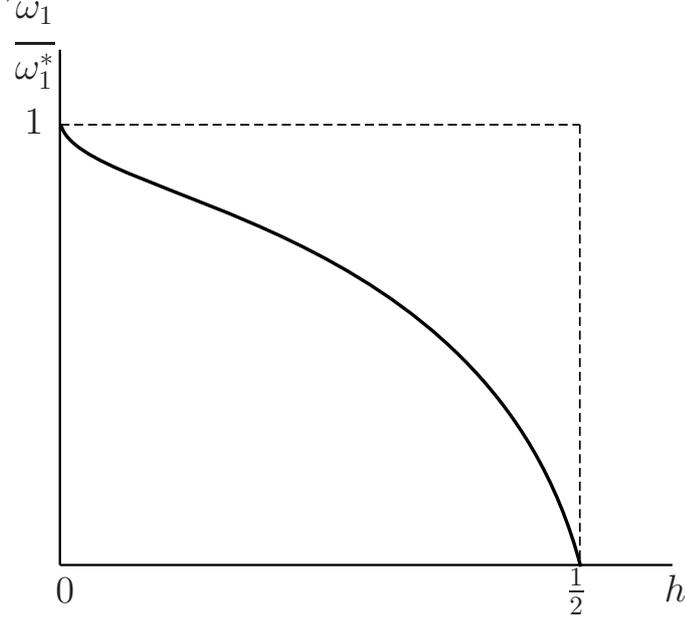


Рис. 9: Зависимость ω_1/ω_1^* от h .

Введем также переменные действие-угол I_j, w_j ($j = 1, 2$) в приближенной системе с гамильтонианом (1.2.9). Имеем $I_2 = R_2$ и

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \oint R_1 d\Phi_1 = \frac{1}{2\pi} I_2 \oint r(\Phi_1, h) d\Phi_1 = \frac{1}{2\pi} I_2 \oint y(x, h) dx. \quad (1.5.16)$$

Причем функция $r(\Phi_1, h)$ определяется из соотношений (1.3.4), (1.3.6).

Из соотношения (1.5.16) следует, что величина h — функция отношения переменных действие:

$$h = \Phi \left(\frac{I_1}{I_2} \right).$$

График этой функции показан на рис. 10 для рассматриваемых значений h .

В концевых точках P_1, P_2 графика величина h равна своим предельным значениям равным соответственно 0 и $\frac{1}{2}$.

Гамильтониан (1.2.9) в новых переменных не содержит угловых переменных w_1, w_2 и имеет вид (1.5.3), в котором

$$\begin{aligned} \Gamma^{(0)}(I_2) &= I_2, \\ \Gamma^{(1)}(I_1, I_2) &= -\frac{1}{8} I_2^2 + I_2^2 h(I) = -\frac{1}{8} I_2^2 + I_2^2 \Phi\left(\frac{I_1}{I_2}\right). \end{aligned} \quad (1.5.17)$$

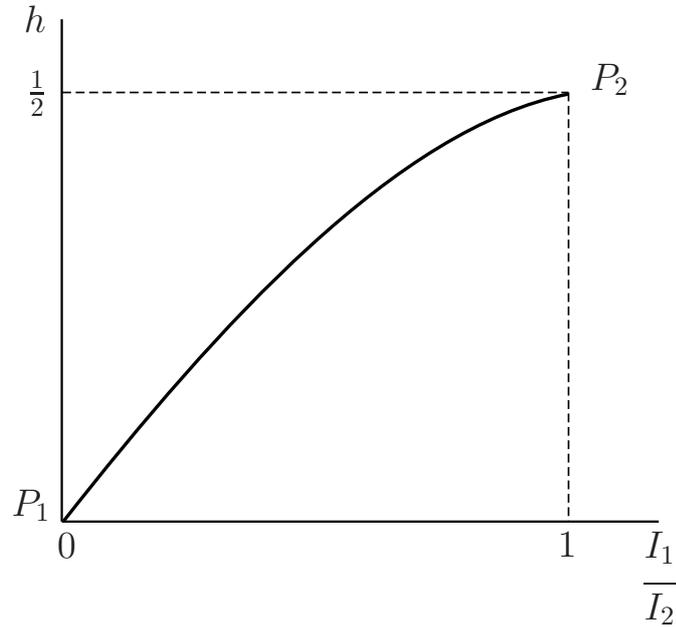


Рис. 10: Зависимость h от I_1/I_2 .

Частоты ω_1 и ω_2 нелинейных колебаний приближенной системы определяются формулами

$$\omega_1 = \frac{\partial \tilde{\Gamma}_0}{\partial I_1} = \varepsilon I_2 \Phi', \quad \omega_2 = \frac{\partial \tilde{\Gamma}_0}{\partial I_2} = 1 - \frac{\varepsilon}{4} (I_2 - 8I_2 \Phi + 4I_1 \Phi'), \quad (1.5.18)$$

где Φ' — производная функции Φ по переменной I_1/I_2 .

В соответствии с соотношениями (1.5.15) и (1.5.18) величина Φ' может быть определена по формулам

$$\Phi' = \frac{\pi \sqrt{r_3 - r_1}}{2 \mathbf{K}(k)}.$$

Аналогично предыдущему разделу движение приближенной системы будет условно-периодическим с частотами ω_1 и ω_2 , при условии, что в начальный момент отношение указанных частот $\omega_1 : \omega_2$ также не является рациональным числом.

Рассмотрим теперь полную систему с гамильтонианом (1.2.8). В переменных I_j, w_j ($j = 1, 2$) этот гамильтониан представляется в виде (1.5.4), причем функции $\Gamma^{(0)}$ и $\Gamma^{(1)}$ определены формулами из (1.5.17), а функция $\Gamma^{(2)}$ аналитична по всем аргументам и 2π -периодична по w_1 и w_2 .

Проверим выполнение неравенств (1.5.5).

Первое неравенство, очевидно, выполняется. Частная производная из второго неравенства

$$\frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial I_1} = I_2 \Phi',$$

очевидно, также отлична от нуля. Проверим выполнение третьего неравенства. Заметим, что

$$\frac{\partial^2 \Gamma^{(1)}}{\partial I_1^2} = \Phi''.$$

При этом

$$\Phi' = \frac{\pi \sqrt[4]{1 - 2\Phi}}{\sqrt{2} \mathbf{K}(k^*)}, \quad k^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - 2\Phi}}.$$

После выполнения дифференцирования получим, что вторая производная функции Φ имеет вид

$$\Phi'' = -\frac{\pi \Phi'}{4 \mathbf{K}^2(k)} \frac{1}{(1 - 2h)^{\frac{3}{4}} (1 - \sqrt{1 - 2h})^{\frac{1}{4}}} \left[2\sqrt{2} (1 - \sqrt{1 - 2h})^{\frac{1}{4}} \mathbf{K}(k) + (1 - 2h)^{\frac{1}{4}} \frac{d\mathbf{K}}{dk} \right].$$

Принимая во внимание, что $\mathbf{K}(k) > 0$, $\frac{d\mathbf{K}}{dk} > 0$ при всех k [23], а также что $\Phi' > 0$ для всех k из интервала (1.5.7), заключаем, что $\Phi'' < 0$, и третье неравенство (1.5.5) также удовлетворяется. Следовательно [2] движения полной системы с функцией Гамильтона (1.2.8) для большинства начальных условий условно-периодические с частотами ω_1 и ω_2 . Доля фазового пространства, не заполненная условно-периодическими траекториями, определяется величиной $O(\exp(-d_1/\varepsilon))$, где $d_1 = \text{const} > 0$ и справедлива оценка (1.5.6).

Глава 2

**Исследование периодических движений близкой
к автономной гамильтоновой системы в
окрестности неустойчивого равновесия в случае
двойного резонанса третьего порядка**

2.1. Постановка задачи

В этой и двух последующих главах будет проводиться исследование движений близкой к автономной, 2π -периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при наличии кратных резонансов третьего порядка. Пусть $H(q_j, p_j, t; \varepsilon)$ - гамильтониан системы, где q_j и p_j ($j = 1, 2$) — обобщенные координаты и канонически сопряженные с ними импульсы, t — время, ε — малый параметр ($0 < \varepsilon \ll 1$), причем при $\varepsilon = 0$ система автономна.

Пусть начало координат $q_j = 0$, $p_j = 0$ фазового пространства — положение равновесия рассматриваемой системы, в окрестности которого гамильтониан H аналитичен. Пусть это положение равновесия устойчиво в линейном приближении, и соответствующая линеаризованная система уравнений возмущенного движения имеет чисто мнимые характеристические показатели $\pm i\lambda_j$.

Будем считать, что величины λ_j , $2\lambda_j$ и $\lambda_1 \pm \lambda_2$ не являются целыми числами (в системе нет резонансов первого и второго порядков). Тогда выбором величин q_j и p_j ($j = 1, 2$) можно добиться того, чтобы в окрестности рассматриваемого равновесия гамильтониан представлялся в виде

$$H(q_j, p_j, t; \varepsilon) = \frac{1}{2}\lambda_1 (q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2}\sigma\lambda_2 (q_2^2 + p_2^2) + \\ + H_3(q_j, p_j, t; \varepsilon) + H_4(q_j, p_j, t; \varepsilon) + O_5, \quad (2.1.1)$$

$$H_k(q_j, p_j, t; \varepsilon) = H_k^{(0)}(q_j, p_j) + \varepsilon H_k^{(1)}(q_j, p_j, t) + O(\varepsilon^2) \quad (k = 3, 4),$$

где величина σ принимает значение 1 или -1 , H_k — совокупности слагаемых k -й степени, а O_5 — не менее пятой степени, относительно q_j и p_j ($j = 1, 2$).

Если величины λ_1 и λ_2 таковы, что

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 = l, \quad (2.1.2)$$

где m_1, m_2, l — целые числа и $|m_1| + |m_2| = 3$, то в системе реализуется резонанс третьего порядка.

Следуя терминологии работ [31, 126] и статьи [110], будем называть резонанс основным, если в резонансном соотношении (2.1.2) присутствует только одна из величин λ_j ($j = 1, 2$), и комбинационным, если в (2.1.2) имеются обе величины λ_1 и λ_2 . Кроме того, назовем резонанс сильным, если он может привести к неустойчивости в системе, и слабым, если его наличие не приводит к неустойчивости. Отметим, что основной резонанс всегда сильный. Комбинационный резонанс является сильным, если выполнено условие $\sigma m_1 m_2 > 0$, а при $\sigma m_1 m_2 < 0$ он слабый, так как в этом случае в системе имеется положительно-определенный формальный первый интеграл.

В данной главе будем считать, что величины λ_1 и λ_2 задаются одним из наборов (k_1, k_2 — целые числа) [110]

$$\lambda_1 = k_1 + \frac{1}{3}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{5}{6}, \quad k_1 \neq -2(1 + k_2); \\ \lambda_1 = k_1 + \frac{2}{3}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{1}{6}, \quad k_1 \neq -(1 + k_2); \quad (2.1.3)$$

$$\lambda_1 = k_1 + \frac{1}{3}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{1}{6}, \quad k_1 \neq -2k_2; \quad (2.1.4)$$

$$\lambda_1 = k_1 + \frac{2}{3}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{5}{6}, \quad k_1 \neq 1 + 2k_2.$$

Тогда комбинации $3\lambda_1$, $\lambda_1 + 2\lambda_2$ и $3\lambda_1$, $\lambda_1 - 2\lambda_2$ в случаях (2.1.3) и (2.1.4) соответственно являются целыми, и в системе реализуется двойной (основной и комбинационный) резонанс третьего порядка. Отметим, что в случаях (2.1.3) и (2.1.4) целыми являются также величины $2\lambda_1 - 2\lambda_2$ и $2\lambda_1 + 2\lambda_2$ соответственно, что означает наличие комбинационного резонанса четвертого порядка. При этом комбинации (2.1.3) и (2.1.4) не являются исчерпывающими, другие возможные случаи кратных резонансов третьего порядка представлены в [110]. Дополнительные условия, налагаемые на k_1 в (2.1.3) и (2.1.4), исключают случаи, когда резонансные слагаемые проявляются в автономной части гамильтониана (величины $\lambda_1 + 2\lambda_2$ или $\lambda_1 - 2\lambda_2$ равны нулю). Число резонансных случаев может быть удвоено, если поменять местами индексы 1 и 2.

Ранее в работе [110] было показано, что для указанных случаев двойного резонанса третьего порядка тривиальное положение равновесия системы неустойчиво при любом соотношении между резонансными коэффициентами. В данной главе будет решен вопрос о существовании, в ε -окрестности неустойчивого тривиального равновесия системы, периодических движений, их числе и устойчивости (в линейном приближении). В частности, будут найдены условия, при которых в системе имеются устойчивые периодические движения.

Исследование состоит из трех этапов. На первом этапе гамильтониан системы при помощи ряда канонических преобразований будет приведен к виду, главная (модельная) часть которого характерна для рассматриваемых резонансных случаев. Далее будет проведено подробное исследование существования и

устойчивости (в линейном приближении) положений равновесия соответствующих модельных систем. Наконец, при помощи метода малого параметра Пуанкаре будут построены периодические (с периодом 12π) решения полной системы и сделаны выводы об их устойчивости (в линейном приближении) или неустойчивости.

2.2. Преобразование гамильтониана. Модельные гамильтонианы

Осуществим в гамильтониане (2.1.1) ряд канонических замен переменных, упрощающих его структуру. Сначала рассмотрим автономную часть гамильтониана и сделаем близкую к тождественной замену переменных $q_j, p_j \rightarrow \tilde{q}_j, \tilde{p}_j$ ($j = 1, 2$), уничтожающую форму $H_3^{(0)}(q_j, p_j)$ третьей степени и нормализующую форму $H_4^{(0)}(q_j, p_j)$ четвертой степени. В симплектических полярных координатах φ_j, r_j , задаваемых формулами

$$\tilde{q}_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j, \quad \tilde{p}_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j \quad (j = 1, 2), \quad (2.2.1)$$

преобразованный гамильтониан запишется в виде

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\varphi_j, r_j, t) = & \lambda_1 r_1 + \sigma \lambda_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + \\ & + \varepsilon \tilde{H}_3^{(1)}(\varphi_j, r_j, t) + \varepsilon \tilde{H}_4^{(1)}(\varphi_j, r_j, t) + O_{5/2}. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Здесь $O_{5/2}$ — совокупности слагаемых не менее пятой степени относительно $r_j^{1/2}$ ($j = 1, 2$), имеющих по угловым координатам φ_j и времени t период 2π .

Пусть в системе реализуется случай (2.1.3). При помощи близкой к тождественной 2π -периодичной по времени канонической замены переменных уничтожим в формах $H_k^{(1)}(\varphi_j, r_j, t)$ слагаемые с нерезонансными гармониками и

приведем гамильтониан к виду (за переменными оставляем прежние обозначения)

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \lambda_1 r_1 + \sigma \lambda_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + \\ & + \varepsilon \left\{ a r_1^{3/2} \cos [3\varphi_1 - 3\lambda_1 t + 3\varphi_1^*] + \right. \\ & \left. + b r_1^{1/2} r_2 \cos [\varphi_1 + 2\sigma\varphi_2 - (\lambda_1 + 2\lambda_2) t + \varphi_1^* + 2\sigma\varphi_2^*] \right\} + \\ & + \varepsilon d r_1 r_2 \cos [2\varphi_1 - 2\sigma\varphi_2 - (2\lambda_1 + 2\lambda_2) t + 2\varphi_*] + O_{5/2}, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

где $a, b, d, c_{kl}, \varphi_j^*, \varphi_*$ — константы.

Перейдем в ε -окрестность начала координат, делая в (2.2.3) каноническую замену переменных (с валентностью ε^{-2})

$$r_j = \varepsilon^2 R_j, \quad \varphi_j = \Phi_j, \quad (j = 1, 2).$$

Осуществим затем замену переменных $\Phi_j, R_j \rightarrow \tilde{\Phi}_j, \tilde{R}_j$ ($j = 1, 2$) по формулам

$$\tilde{R}_j = R_j, \quad \tilde{\Phi}_1 = \Phi_1 + \varphi_1^* - \lambda_1 t, \quad \tilde{\Phi}_2 = \Phi_2 + \varphi_2^* - \sigma \lambda_2 t. \quad (2.2.4)$$

Это унивалентное каноническое преобразование, задаваемое производящей функцией

$$S = (\Phi_1 + \varphi_1^* - \lambda_1 t) \tilde{R}_1 + (\Phi_2 + \varphi_2^* - \sigma \lambda_2 t) \tilde{R}_2.$$

В результате замены (2.2.4) линейная по R_j ($j = 1, 2$) часть гамильтониана уничтожится, в слагаемых с резонансными гармониками (третьего и четвертого порядка по $R_j^{1/2}$) исчезает время, и гамильтониан (2.2.3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} H^* = & \varepsilon^2 \left[a \tilde{R}_1^{3/2} \cos 3\tilde{\Phi}_1 + b \tilde{R}_1^{1/2} \tilde{R}_2 \cos \left(\tilde{\Phi}_1 + 2\sigma\tilde{\Phi}_2 \right) + \right. \\ & \left. + c_{20} \tilde{R}_1^2 + c_{11} \tilde{R}_1 \tilde{R}_2 + c_{02} \tilde{R}_2^2 \right] + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Слагаемое $O(\varepsilon^3)$ в (2.2.5) аналитично по переменным $\tilde{\Phi}_j, \tilde{R}_j^{1/2}$ ($j = 1, 2$) и t , периодически по $\tilde{\Phi}_j$ с периодом 2π и по t с периодом 12π . Период 12π полу-

чен как наименьшее общее кратное чисел 2π и $2\pi/\lambda_j$ ($j = 1, 2$), см. соотношения (2.2.4), (2.1.3), (2.1.4).

Заметим, что коэффициенты c_{11} , a и b в (2.2.5) можно считать положительными. Действительно, если $c_{11} < 0$, то каноническая замена $\tilde{\Phi}_j \rightarrow -\tilde{\Phi}_j$ (с валентностью -1) меняет знак c_{11} . Далее путем сдвига по угловым переменным можно добиться положительности резонансных коэффициентов a и b .

Сделаем еще одну каноническую замену переменных (с валентностью ξ^{-1}) вида

$$\tilde{R}_j = \xi \hat{R}_j, \quad \tilde{\Phi}_j = \hat{\Phi}_j \quad (j = 1, 2), \quad \xi = \frac{b^2}{c_{11}^2} \quad (2.2.6)$$

и введем новую независимую переменную τ по формуле

$$\tau = (\varepsilon^2 b^2 / c_{11}) t. \quad (2.2.7)$$

Преобразованный гамильтониан принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_1 = \alpha \hat{R}_1^{3/2} \cos 3\hat{\Phi}_1 + \hat{R}_1^{1/2} \hat{R}_2 \cos (\hat{\Phi}_1 + 2\sigma \hat{\Phi}_2) + \\ + \gamma_{20} \hat{R}_1^2 + \hat{R}_1 \hat{R}_2 + \gamma_{02} \hat{R}_2^2 + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad \gamma_{20} = \frac{c_{20}}{c_{11}}, \quad \gamma_{02} = \frac{c_{02}}{c_{11}}. \quad (2.2.9)$$

В случае (2.1.4) преобразование гамильтониана (2.2.2) проводится аналогичным образом, в результате получается гамильтониан вида (2.2.8), в котором надо поменять на противоположный знак перед слагаемым σ .

Полагая в полученных гамильтонианах $\sigma = 1$ и $\sigma = -1$, получим два гамильтониана, характерных для рассматриваемых случаев двойного резонанса третьего порядка (знаки $\hat{}$ над переменными опускаем):

$$\begin{aligned} \Gamma_1 = \alpha R_1^{3/2} \cos 3\Phi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos (\Phi_1 + 2\Phi_2) + \\ + \gamma_{20} R_1^2 + R_1 R_2 + \gamma_{02} R_2^2 + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 = \alpha R_1^{3/2} \cos 3\Phi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos (\Phi_1 - 2\Phi_2) + \\ + \gamma_{20} R_1^2 + R_1 R_2 + \gamma_{02} R_2^2 + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Гамильтониан (2.2.10) отвечает случаю двух сильных (основного и комбинационного) резонансов третьего порядка, а гамильтониан (2.2.11) — случаю сильного основного и слабого комбинационного резонансов. Эти гамильтонианы зависят от трех параметров α , γ_{20} и γ_{02} . Резонансный коэффициент α в (2.2.10) и (2.2.11) считаем положительным, коэффициенты γ_{20} и γ_{02} в членах четвертой степени относительно $R_j^{1/2}$ могут принимать значения любого знака.

2.3. Положения равновесия модельных систем

Отбрасывая в (2.2.10) и (2.2.11) слагаемые $O(\varepsilon)$, получаем приближенные (модельные) гамильтонианы:

$$\Gamma_1 = \alpha R_1^{3/2} \cos 3\Phi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos (\Phi_1 + 2\Phi_2) + \gamma_{20} R_1^2 + R_1 R_2 + \gamma_{02} R_2^2, \quad (2.3.1)$$

$$\Gamma_2 = \alpha R_1^{3/2} \cos 3\Phi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos (\Phi_1 - 2\Phi_2) + \gamma_{20} R_1^2 + R_1 R_2 + \gamma_{02} R_2^2. \quad (2.3.2)$$

Для дальнейшего исследования удобно ввести обозначения

$$\Psi_1 = 3\Phi_1, \quad \Psi_2 = \Phi_1 \pm 2\Phi_2. \quad (2.3.3)$$

Соответствующие приближенные системы уравнений, описывающие изменения переменных Ψ_j , R_j ($j = 1, 2$), имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_1}{d\hat{\tau}} = \frac{9}{2} \alpha R_1^{1/2} \cos \Psi_1 + \frac{3}{2} \frac{R_2}{R_1^{1/2}} \cos \Psi_2 + 6\gamma_{20} R_1 + 3R_2, \\ \frac{d\Psi_2}{d\hat{\tau}} = R_1^{1/2} \left(\frac{3}{2} \alpha \cos \Psi_1 \pm 2 \cos \Psi_2 \right) + \frac{1}{2} \frac{R_2}{R_2^{1/2}} \cos \Psi_2 + \\ + 2(\gamma_{20} \pm 1) R_1 + (1 \pm 4\gamma_{02}) R_2, \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

$$\frac{dR_1}{d\hat{\tau}} = R_1^{1/2} (3\alpha R_1 \sin \Psi_1 + R_2 \sin \Psi_2), \quad (2.3.4)$$

$$\frac{dR_2}{d\hat{\tau}} = \pm 2R_1^{1/2} R_2 \sin \Psi_2,$$

где верхний и нижний знаки соответствуют гамильтонианам (2.3.1) и (2.3.2).

Найдем положения равновесия модельных систем. Приравняв нулю правые части систем (2.3.4), получим, что, кроме (неустойчивого) тривиального положения равновесия, имеются положения равновесия, для которых $R_2 \equiv 0$, а равновесные значения величин Ψ_1 и R_1 описываются соотношениями

$$\sin \Psi_1 = 0, \quad \frac{3}{2}\alpha\delta_1 + 2\gamma_{20}R_1^{1/2} = 0 \quad (\delta_1 = \cos \Psi_1 = \pm 1, \quad \delta_1\gamma_{20} < 0).$$

Этот случай сводится к системе с одной степенью свободы при наличии резонанса третьего порядка [97], [107], в рамках этой системы указанные положения равновесия устойчивы.

Найдем положения равновесия модельных систем, отличные от описанных. Для обеих систем должны выполняться условия $\sin \Psi_j = 0$, ($j = 1, 2$), а равновесные значения величин R_1 и R_2 задаются системой двух алгебраических уравнений

$$\frac{3}{2}\alpha R_1^{1/2}\delta_1 + \frac{1}{2}\frac{R_2}{R_1^{1/2}}\delta_2 + 2\gamma_{20}R_1 + R_2 = 0, \quad (2.3.5)$$

$$\delta_2 R_1^{1/2} + R_1 + 2\gamma_{02}R_2 = 0,$$

где введены обозначения $\delta_j = \cos \Psi_j$, ($\delta_j = \pm 1, j = 1, 2$).

При помощи второго уравнения системы (2.3.5) исключаем R_2 из первого уравнения и перепишем систему в виде

$$2(4g - 1)R_1 + 3(2\alpha\delta_1\gamma_{02} - \delta_2)R_1^{1/2} - 1 = 0, \quad g = \gamma_{02}\gamma_{20}, \quad (2.3.6)$$

$$R_2 = -\frac{\delta_2 + R_1^{1/2}}{\gamma_{02}}. \quad (2.3.7)$$

Уравнение (2.3.6) является квадратным относительно $R_1^{1/2}$. Необходимо найти условия, при которых оно имеет неотрицательные вещественные корни. Кроме того, найденные корни должны обеспечивать неотрицательность величины R_2 из (2.3.7). Последнее условие дает следующие ограничения на параметры задачи и величину R_1 :

$$\begin{aligned} \gamma_{02} > 0, \quad \delta_2 = -1 & \quad \text{при } R_1 < 1; \\ \gamma_{02} < 0, \quad \delta_2 = 1 & \quad \text{при } \forall R_1; \\ \gamma_{02} < 0, \quad \delta_2 = -1 & \quad \text{при } R_1 > 1. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

При $\gamma_{02} > 0$ и $\delta_2 = 1$ величина R_2 из (2.3.7) отрицательна, и неравенство $R_2 > 0$ решения не имеет.

Рассмотрим уравнение (2.3.6). Его дискриминант имеет вид квадратного трехчлена по α :

$$D = 36\gamma_{02}^2\alpha^2 - 36\delta_1\delta_2\gamma_{02}\alpha + 32g + 1, \quad (2.3.9)$$

который, в свою очередь, имеет дискриминант, равный

$$D_\alpha = 1152\gamma_{02}^2(1 - 4g).$$

Найдем условия, при которых дискриминант D положителен.

Если $D_\alpha < 0$, т.е. $g > \frac{1}{4}$, то, в силу положительности старшего коэффициента в (2.3.9), величина D положительна при всех значениях α .

Пусть $D_\alpha \geq 0$, т.е. $g \leq \frac{1}{4}$, тогда квадратный трехчлен D имеет два вещественных корня

$$\alpha_{1,2} = \frac{3\delta_1\delta_2\gamma_{02} \pm 2\sqrt{2\gamma_{02}^2(1 - 4g)}}{6\gamma_{02}^2}, \quad \alpha_1 > \alpha_2.$$

Анализируя расположения этих корней относительно нуля с учетом условия $\alpha > 0$, найдем области значений параметров g , γ_{02} и α , в которых выполнено неравенство $D > 0$. Эти области представлены в таблице 2.1.

g	γ_{02}	(δ_1, δ_2)	α
$\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$	$\forall \gamma_{02}$	$\forall (\delta_1, \delta_2)$	$\alpha > 0$
$\left(-\frac{1}{32}, \frac{1}{4}\right)$	$\gamma_{02} > 0$	$(-1, 1)$	
		$(1, -1)$	
	$\gamma_{02} < 0$	$(1, 1)$	
		$(-1, -1)$	
	$\gamma_{02} > 0$	$(1, 1)$	
		$(-1, -1)$	
$\gamma_{02} < 0$	$(-1, 1)$		
	$(1, -1)$		
$\left(-\infty, -\frac{1}{32}\right)$	$\forall \gamma_{02}$	$\forall (\delta_1, \delta_2)$	$\alpha > \alpha_1$

Таблица 2.1: Решение неравенства $D > 0$

В найденных областях были проверены условия положительности корней $R_1^{1/2}$ уравнения (2.3.6) и условия (2.3.8). При этом часть решений была отброшена, а на параметр α в ряде случаев получены дополнительные ограничения.

В пространстве параметров g , γ_{02} и α выявлены области с различным числом (от нуля до двух) действительных положительных решений системы (2.3.5), удовлетворяющих условиям (2.3.8); эти области описаны в таблице 2.2.

g	$\gamma_{02} < 0$	$\gamma_{02} > 0$
$\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$	корень R_{10}^+ : $(-1, 1), \alpha > 0;$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">$(1, 1), \alpha > 0;$</div> $(1, -1), \alpha > \alpha';$	корень R_{10}^+ : $(1, -1), \alpha > 0;$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">$(-1, -1), 0 < \alpha < \alpha';$</div>

$\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$	<p>корень R_{10}^-:</p> <p style="text-align: center;">$(-1, -1), \alpha > 0;$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin: 2px;"> $P_3: (1, -1), 0 < \alpha < \alpha_1^{pm};$ $P_4: (-1, 1), \alpha \geq \alpha_2^{mp};$ </div> <p>корень R_{10}^+:</p> <p style="text-align: center;">$(1, -1), \alpha' < \alpha < \alpha_1^{pm};$ $(-1, 1), \alpha \geq \alpha_2^{mp};$</p>	<p>корень R_{10}^+:</p> <p style="text-align: center;">$(1, -1), \alpha > 0;$</p> <div style="border: 3px double black; padding: 2px; margin: 2px;"> $(-1, -1), 0 < \alpha < \alpha';$ </div>
$\left(0, \frac{1}{8}\right)$	<p>корень R_{10}^-:</p> <p style="text-align: center;">$(-1, -1), \alpha > 0;$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin: 2px;"> $P_5: (1, -1), 0 < \alpha < \alpha';$ $P_4: (-1, 1), \alpha \geq \alpha_2^{mp};$ </div> <p>корень R_{10}^+:</p> <p style="text-align: center;">$(-1, 1), \alpha \geq \alpha_2^{mp};$</p>	<p>корень R_{10}^+:</p> <p style="text-align: center;">$(1, -1), \alpha > 0;$</p> <div style="border: 3px double black; padding: 2px; margin: 2px;"> $(-1, -1), 0 < \alpha < \alpha_2^{mm};$ </div> <p>корень R_{10}^-:</p> <p style="text-align: center;">$(-1, -1), \alpha' < \alpha < \alpha_2^{mm};$</p>
$\left(-\frac{1}{32}, 0\right)$	<p>корень R_{10}^-:</p> <p style="text-align: center;">$(-1, -1), \alpha > \alpha';$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin: 2px;"> $P_4: (-1, 1), \alpha \geq \alpha_2^{mp};$ </div> <p>корень R_{10}^+:</p> <p style="text-align: center;">$(-1, 1), \alpha \geq \alpha_2^{mp};$</p>	<p>корень R_{10}^+:</p> <p style="text-align: center;">$(1, -1), \alpha > \alpha';$</p> <div style="border: 3px double black; padding: 2px; margin: 2px;"> $(-1, -1), 0 < \alpha < \alpha_2^{mm};$ </div> <p style="text-align: center;">$(1, -1), 0 < \alpha < \alpha';$</p> <p>корень R_{10}^-:</p> <p style="text-align: center;">$(-1, -1), 0 < \alpha < \alpha_2^{mm};$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin: 2px;"> $P_1: (1, -1), 0 < \alpha < \alpha';$ </div>
$\left(-\infty, -\frac{1}{32}\right)$	<p>корень R_{10}^-:</p> <p style="text-align: center;">$(-1, -1), \alpha > \alpha';$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin: 2px;"> $P_4: (-1, 1), \alpha \geq \alpha_2^{mp};$ </div> <p>корень R_{10}^+:</p> <p style="text-align: center;">$(-1, 1), \alpha \geq \alpha_2^{mp};$</p>	<p>корень R_{10}^+:</p> <p style="text-align: center;">$(1, -1), \alpha > \alpha';$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin: 2px;"> $P_2: (1, -1), \alpha_1^{pm} < \alpha < \alpha';$ </div> <p>корень R_{10}^-:</p> <p style="text-align: center;">$(1, -1), \alpha_1^{pm} < \alpha < \alpha'$</p>

Таблица 2.2: Положения равновесия

Действительная ось значений параметра g разделена на пять интервалов (первый столбец таблицы), ось параметра γ_{02} — на два интервала $\gamma_{02} < 0$ и

$\gamma_{02} > 0$ (второй и третий столбцы). Для каждой области изменения параметров g и γ_{02} указаны возможные пары чисел (δ_1, δ_2) и отвечающий им диапазон изменения параметра α , в котором существуют равновесные точки. Для граничных значений α введены обозначения

$$\begin{aligned}\alpha_j^{pp} &= \alpha_j \Big|_{\delta_1=1, \delta_2=1}, & \alpha_j^{pm} &= \alpha_j \Big|_{\delta_1=1, \delta_2=-1}, \\ \alpha_j^{mp} &= \alpha_j \Big|_{\delta_1=-1, \delta_2=1}, & \alpha_j^{mm} &= \alpha_j \Big|_{\delta_1=-1, \delta_2=-1}, \\ \alpha' &= \frac{4}{3} |\gamma_{20}| \quad (j = 1, 2).\end{aligned}$$

В ячейках таблицы указаны одно или два соответствующих рассматриваемому случаю равновесных значения $R_1 = R_{10}^\pm$, задаваемых равенствами

$$R_{10}^\pm = \left(\frac{3(2\alpha\delta_1\gamma_{02} - \delta_2) \pm \sqrt{D}}{4(1-4g)} \right)^2, \quad (2.3.10)$$

где D — дискриминант (2.3.9). Каждому значению R_{10}^+ или R_{10}^- отвечает единственное равновесное значение $R_2 = R_{20}$, вычисляемое по формуле (2.3.7).

Для значений параметров, не указанных в таблице 2.2, положения равновесия рассматриваемого вида отсутствуют.

В следующих разделах будет проведено исследование устойчивости найденных положений равновесия.

2.4. Достаточные условия устойчивости положений равновесия

Введем возмущения координат и импульсов модельных систем с гамильтонианами (2.3.1) и (2.3.2) по формулам

$$\Phi_1 = \Phi_{10} + x_1, \quad \Phi_2 = \Phi_{20} + x_2, \quad R_1 = R_{10} + y_1, \quad R_2 = R_{20} + y_2,$$

причем равновесные значения Φ_{j0} ($j = 1, 2$) вычисляются, с учетом соотношений (2.3.3), по формулам

$$\Phi_{10} = \frac{\Psi_{10}}{3}, \quad \Phi_{20} = \frac{1}{2} \left(\Psi_{20} - \frac{\Psi_{10}}{3} \right), \quad \Psi_{j0} = \arccos \delta_j.$$

Квадратичная часть гамильтонианов возмущенного движения имеет вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,2}^* = & \left(-\frac{9}{2}R_{10}^{3/2}\delta_1 - \frac{1}{2}R_{10}^{1/2}R_{20}\delta_2 \right) x_1^2 \pm 2R_{10}^{1/2}R_{20}\delta_2 x_1 x_2 - \\ & - 2R_{10}^{1/2}R_{20}\delta_2 x_2^2 + \left(\gamma_{02} + \frac{3}{8}\alpha R_{10}^{-1/2}\delta_1 - \frac{1}{8}R_{20}R_{10}^{-3/2}\delta_2 \right) y_1^2 + \\ & + \left(1 + \frac{1}{2}R_{10}^{-1/2}\delta_2 \right) y_1 y_2 + \gamma_{02} y_2^2, \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

где верхний и нижний знак соответствует (2.3.1) и (2.3.2).

Достаточные условия устойчивости положений равновесия будем рассматривать как условия знакоопределенности квадратичных форм $\Gamma_{1,2}^*$, проверяемые при помощи критерия Сильвестра.

Несложный анализ показывает, что для обеих систем условия положительной определенности форм (2.4.1) сводятся к соотношениям

$$\gamma_{02} > 0, \quad \delta_1 = \delta_2 = -1,$$

а условия отрицательной определенности — к соотношениям

$$\gamma_{02} < 0, \quad \delta_1 = \delta_2 = 1.$$

В таблице 2.2 имеются четыре равновесные точки, удовлетворяющие приведенным условиям. Соответствующие им строчки в ячейках второго и третьего столбцах выделены в таблице 2.2 жирным шрифтом и заключены в двойные рамки.

2.5. Необходимые условия устойчивости положений равновесия

Для остальных равновесных точек квадратичные формы $\Gamma_{1,2}^*$ не являются знакоопределенными. Для решения вопроса об их устойчивости рассмотрим характеристическое уравнение линеаризованной системы уравнений возмущенного движения, имеющее вид

$$\lambda^4 + p\lambda^2 + q = 0. \quad (2.5.1)$$

Если выполнены условия

$$p > 0, \quad q > 0, \quad \mathfrak{D} = p^2 - 4q > 0, \quad (2.5.2)$$

то корни уравнения (2.5.1) чисто мнимые, и исследуемое положение равновесия устойчиво в линейном приближении. Неравенства (2.5.2) составляют необходимые условия устойчивости. Если для рассматриваемого положения равновесия хотя бы одно из этих неравенств выполняется с противоположным знаком, то характеристическое уравнение имеет корни с положительной вещественной частью, и по теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению данное положение равновесия неустойчиво, причем не только в линейном приближении, но и в полной нелинейной задаче.

Для обоих гамильтонианов коэффициенты уравнения (2.5.1) имеют вид:

$$p = -\frac{1}{128(4g-1)^3\gamma_{02}^2} \left(\pm \hat{p}\sqrt{D} + p' \right), \quad q = \pm 9\alpha\delta_1\delta_2 R_{10}^{3/2} R_{20}\sqrt{D}, \quad (2.5.3)$$

где D — дискриминант (2.3.9), верхний и нижний знаки соответствуют верхнему и нижнему знакам величины R_{10}^\pm из формулы (2.3.10).

Величины \hat{p} и p' в выражении для p из (2.5.3) равны

$$\begin{aligned}
\hat{p} &= \pm 648\gamma_{02}^3\delta_1(1+4g)\alpha^3 \mp 36\delta_2\gamma_{02}^2(32\gamma_{02}^2 \pm 16\gamma_{02} + 7 + 124g)\alpha^2 \pm \\
&\quad \pm 6\delta_1\gamma_{02}(320g^2 + 4(64\gamma_{02}^2 \pm 48\gamma_{02} + 49)g \pm 48\gamma_{02} - 3 + 128\gamma_{02}^2)\alpha \mp \\
&\quad \mp \delta_2(64(5 \pm 8\gamma_{02})g^2 + 4(256\gamma_{02}^2 \pm 112\gamma_{02} - 3)g + 1 + 32\gamma_{02}^2); \\
p' &= -7776\gamma_{02}^4(1+4g)\alpha^4 + 6912\delta_2\gamma_{02}^3\delta_1(2\gamma_{02}^2 \pm \gamma_{02} + 10g + 1)\alpha^3 - \\
&\quad - 144\gamma_{02}^2(256g^2 + 4(32\gamma_{02}^2 \pm 24\gamma_{02} + 71)g \pm 48\gamma_{02} + 112\gamma_{02}^2 + 3)\alpha^2 + \\
&\quad + 192\delta_1\delta_2\gamma_{02}(8(21 \pm 4\gamma_{02})g^2 + 4(3 \pm 20\gamma_{02} + 36\gamma_{02}^2)g + \\
&\quad + \gamma_{02}(18\gamma_{02} \pm 5))\alpha - 3072g^3 - 1024(1 \pm \gamma_{02})(1 \pm 8\gamma_{02})g^2 + \\
&\quad + 8(1 - 640\gamma_{02}^2 \mp 144\gamma_{02})g + 2 + 64\gamma_{02}^2,
\end{aligned}$$

причем верхний и нижний знак соответствует гамильтонианам Γ_1^* и Γ_2^* из (2.4.1).

Все полученные выше достаточные условия устойчивости положений равновесия являются также и необходимыми условиями. Найдем случаи, когда выполнены только необходимые условия устойчивости, а также условия неустойчивости.

Условию $q > 0$ соответствуют пять положений равновесия, обозначим их через P_i ($i = 1 \dots 5$); в таблице 2.2 соответствующие им строчки заключены в рамки. Ниже для каждой равновесной точки P_i ($i = 1 \dots 5$) будут проанализированы первое и третье условия из (2.5.3).

Распределение точек P_i ($i = 1 \dots 5$) в плоскости параметров g и γ_{02} показано на рисунке 11. Для каждой точки условие $q > 0$ реализуется для значений параметра α , указанных в таблице 2.2.

Для остальных положений равновесия (не заключенных в рамки и не выделенных жирным шрифтом в таблице 2.2) выполняется условие $q < 0$, и имеет место неустойчивость.

Отметим, что сделанные выводы верны для гамильтонианов обоих типов, так как свободный член q в характеристическом уравнении для них одинаков.

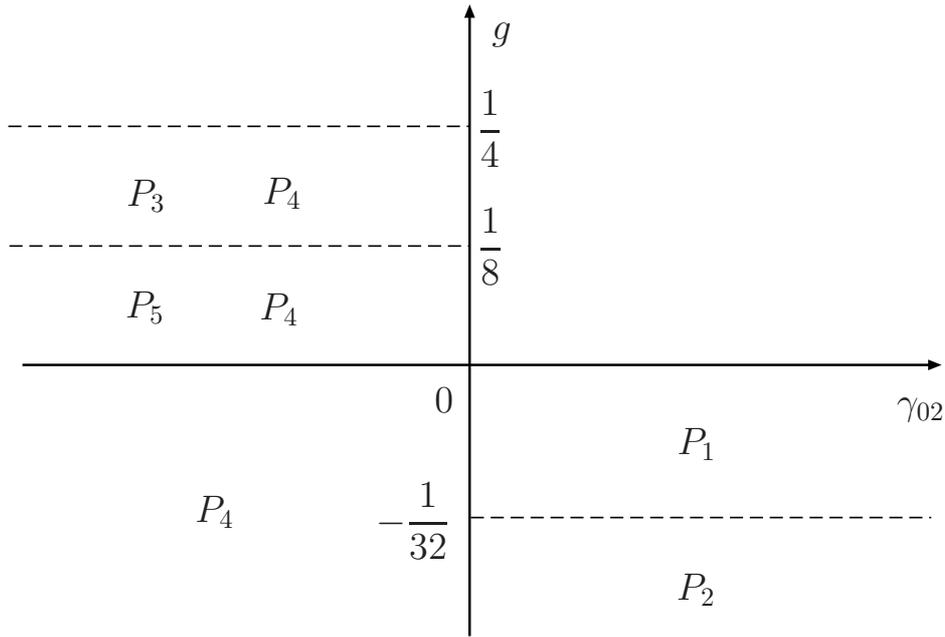


Рис. 11: Расположение положений равновесия, удовлетворяющих условию $q > 0$

Необходимые условия устойчивости равновесных точек P_i ($i = 1 \dots 5$)

Продолжим исследование устойчивости точек P_i ($i = 1 \dots 5$). Будем проводить его по следующей схеме. Сначала в трехмерном пространстве параметров ищем случаи пересечения поверхностей $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ с верхней и нижней границами $\alpha = \alpha(\gamma_{02}, g)$, определенными в таблице 2.2. Из последующего анализа следует, что указанные пересечения имеются только на тех границах, на которых выполнено равенство $q = 0$, а значит, на них условия $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ выполняются одновременно. Геометрическое место точек пересечения строим в виде кривых в плоскости параметров γ_{02}, g . Выделяем качественно различные случаи, для каждого из них рассматриваем сечения пространства параметров плоскостями $g = \text{const}$. В сечениях, в плоскости параметров γ_{02}, α , численно и аналитически строим граничные кривые исследуемой области, а также кривые $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$. Эти кривые разбивают область на несколько подобластей, в каждой из которых знаки величин p и \mathfrak{D} сохраняются. В подобластях, для которых вы-

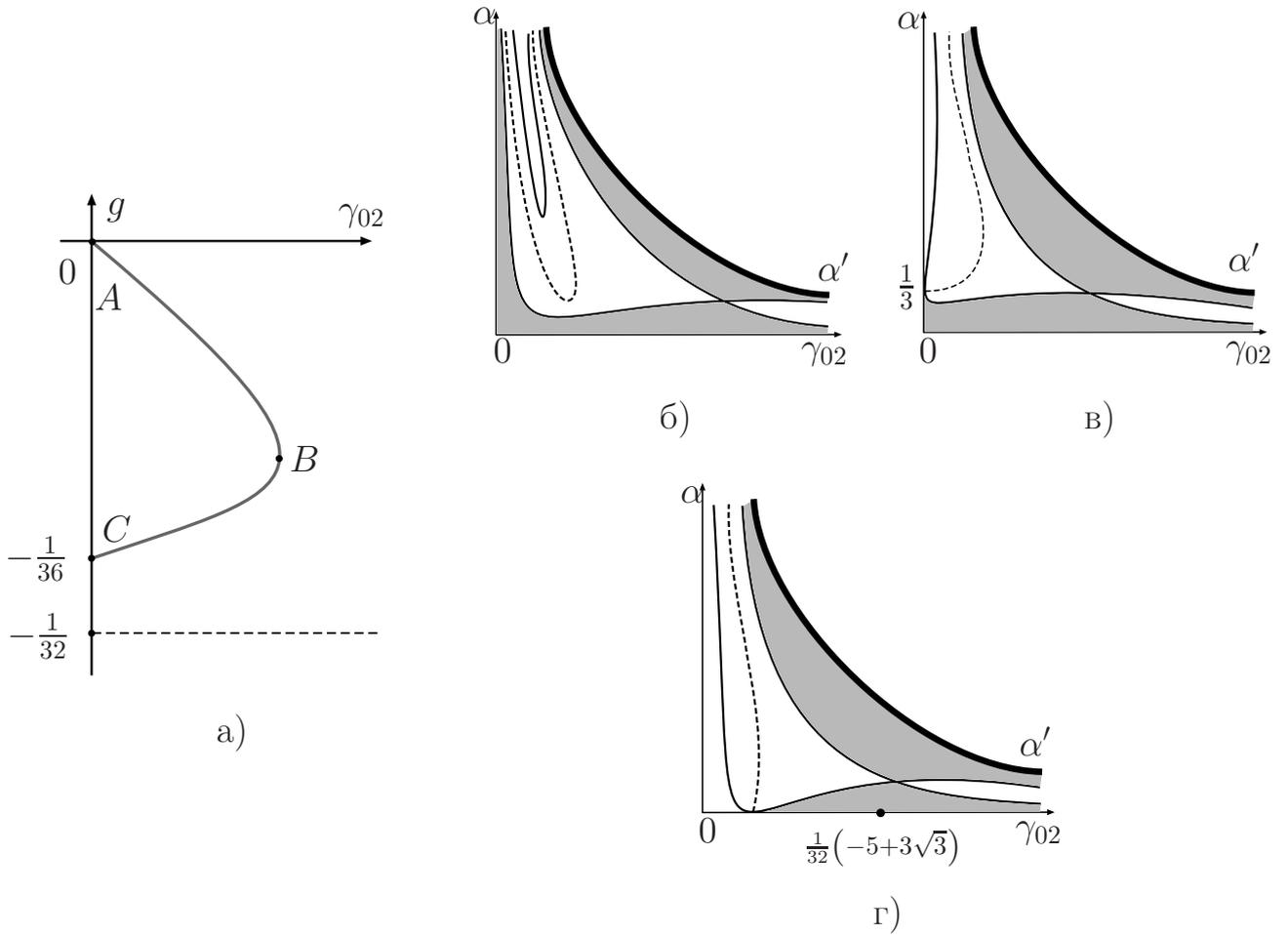
полнены условия $p > 0$ и $\mathfrak{D} > 0$, исследуемые равновесные точки устойчивы в линейном приближении, в остальных подобластях неустойчивы.

Точки P_1 . Для точек P_1 систем первого и второго типа пересечений поверхностей $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ с верхней границей $\alpha = \alpha'$ исследуемой области нет. Геометрическое место точек пересечения поверхностей $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ с границей $\alpha = 0$ совпадают и представляют собой кривые, показанные на рис. 12а и рис. 13а для систем первого и второго типов соответственно. На рисунке 12а выделены точки $A(0, 0)$, $B\left(\frac{-5 + 3\sqrt{3}}{32}, \frac{4 - 3\sqrt{3}}{64}\right)$, $C(0, -1/36)$, а отмеченные на рисунке 13а точки таковы: $A(0, -1/36)$, $B(1/16, -1/32)$, $C(1/4, 0)$, $D(1/6, -1/36)$.

Для системы первого типа рассматриваем качественно различные случаи $g \in (-1/32, -1/36)$, $g = -1/36$ и $g \in (-1/36, 0)$. Характерный вид исследуемых сечений $g = \text{const}$ представлен на рисунках 12б, 12в и 12г соответственно. Здесь и на последующих аналогичных рисунках тонкими линиями показаны граничные кривые исследуемой области, пунктирной линией — кривые $p = 0$ и полужирной линией — кривые $\mathfrak{D} = 0$. Отметим, что, как показывают расчеты в этом и во всех последующих случаях, кривые $p = 0$ всегда лежат в области, где $\mathfrak{D} < 0$ (в области неустойчивости). Области, в которых выполнены необходимые условия устойчивости, на рисунках заштрихованы.

На рисунках 12б–г во всех сечениях имеется одна ветвь кривой $p = 0$ и три ветви кривой $\mathfrak{D} = 0$ (с одной точкой самопересечения). Вместе с верхней граничной кривой изображенные кривые неограниченно, при $\gamma_{02} \rightarrow 0$ и $\gamma_{02} \rightarrow \infty$, приближаются к осям координат.

В точке $g = -1/36$ характер картины скачкообразно меняется. На рис. 12в две ветви кривой $\mathfrak{D} = 0$ и кривая $p = 0$ имеют общую точку $(0, 1/3)$ на оси

Рис. 12: Точка P_1 системы первого типа.

ординат. Для меньших значений параметра g общая точка кривых исчезает, и они асимптотически стремятся к оси ординат (рис. 12б). Для бóльших значений g (в сколь угодно малой окрестности значения $g = -1/36$) общая точка кривых перескакивает на ось γ_{02} (рис. 12г). Этот факт подтверждается аналитически: в окрестности точки $\gamma_{02} = 0$, $g = -1/36$, $\alpha = 1/3$ соотношения $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ могут быть разрешены относительно параметра α и представлены в виде $\alpha = \alpha_p(\gamma_{02}, g)$ и $\alpha = \alpha_{\mathfrak{D}}(\gamma_{02}, g)$ соответственно, где

$$\alpha_p = -\frac{36g + 1}{\gamma_{02}f(\gamma_{02})} + F(\gamma_{02}, g), \quad \alpha_{\mathfrak{D}} = \frac{(36g + 1)^2}{\gamma_{02}\hat{f}(\gamma_{02})} + \hat{F}(\gamma_{02}, g). \quad (2.5.4)$$

При этом $f(0) \neq 0$, $\hat{f}(0) \neq 0$, $F(-1/36, 0) = \hat{F}(-1/36, 0) = 1/3$.

Из полученных разложений (2.5.4) следует, что при $g \rightarrow -1/36 - 0$ имеем $\alpha_p \rightarrow +\infty$, при $g \rightarrow -1/36 + 0$ имеем $\alpha_p \rightarrow -\infty$ (эта часть ветви $p = 0$ выходит за пределы исследуемой области и не показана на рис. 12г), а при $g = -1/36$ получаем $\alpha_p = 1/3$. Эти же результаты относятся и к кривой $\alpha = \alpha_{\mathfrak{D}}(\gamma_{02}, g)$.

При дальнейшем увеличении параметра g (рис. 12г) общая точка кривых $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ скользит по оси абсцисс в сторону увеличения координаты γ_{02} . Дойдя до максимального значения $\gamma_{02} = (-5 + 3\sqrt{3})/32$, она движется в сторону уменьшения γ_{02} до нуля (см. рис. 12а).

Во всех рассмотренных сечениях имеются две области устойчивости в линейном приближении равновесной точки P_1 для системы первого типа.

Для исследования устойчивости равновесной точки P_1 системы второго типа интервал изменения параметра g разобьем на те же подинтервалы.

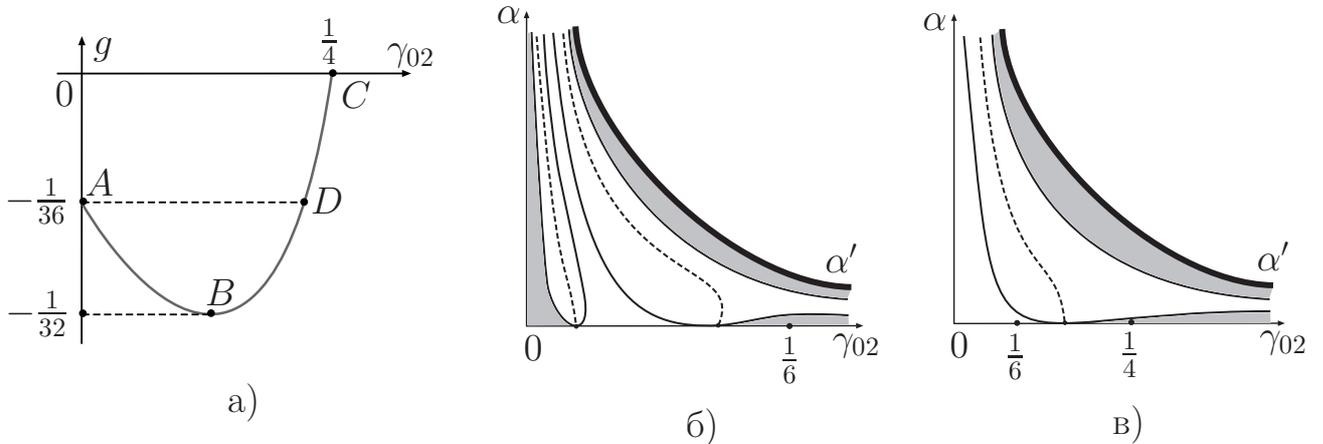


Рис. 13: Точка P_1 системы второго типа.

При $g \in (-1/32, -1/36)$ кривые $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ имеют две общие точки на оси абсцисс, скользящие по ней в разные стороны с ростом g . При этом в допустимой части плоскости параметров имеются три области устойчивости в линейном приближении (рис. 13б). При $g = -1/36$ левая группа кривых вырождается в ось ординат и при переходе через эту точку исчезает. Одновременно с

этим пропадает левая область устойчивости.

Для значений g из интервала $g \in (-1/36, 0)$ (рис. 13в) общая точка кривых $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ на нижней границе $\alpha = 0$ скользит по оси абсцисс в сторону увеличения γ_{02} , доходя до максимального значения $\gamma_{02} = 1/4$ при $g = 0$.

Точки P_2 . Как и для точек P_1 , для значений параметров, соответствующих равновесным точкам P_2 систем обоих типов, поверхности $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ не имеют пересечений с верхней граничной поверхностью $\alpha = \alpha'$ исследуемой области. На нижней границе $\alpha = \alpha_1^{pm}$ условия $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ реализуются (одновременно) для точек, геометрическое место которых в плоскости параметров (γ_{02}, g) изображено на рис. 14а и рис. 15а для систем первого и второго типов соответственно. На рис. 14а имеем характерные точки $A(0, -7/100)$, $B(0.0129, -0.1373)$, $C(0, -1/4)$, а на рис. 15а — точки $A(0, -7/100)$, $B(1/16, -1/32)$, $C(1/10, -7/100)$, $D(0, -1/4)$. Качественно различными для систем обоих типов являются случаи $g \in (-\infty, -1/4)$, $g = -1/4$, $g \in (-1/4, -7/100)$, $g = -7/100$ и $g \in (-7/100, -1/32)$.

Характерный вид сечений $g = \text{const}$ исследуемой части пространства параметров для точки P_2 системы первого типа показан на рис. 14б–д. Для всех значений параметра g ($g < -1/32$) имеются две подобласти выполнения необходимых условий устойчивости. Эволюция этих подобластей и подобластей неустойчивости соответствует рис. 14а.

При $g \in (-\infty, -1/4)$ и $g \in (-1/4, -7/100)$ кривые $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ имеют одну общую точку на нижней границе области (рис. 14б). Для граничной точки $g = -1/4$ этих двух интервалов ордината общей точки кривых $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ неограниченно возрастает, и кривая $p = 0$ исчезает (рис. 14в).

Внутри интервала $g \in (-1/4, -7/100)$ при увеличении параметра g карти-

на меняется: кривая $p = 0$ приобретает изгиб и одновременно возникает еще одна ветвь кривой $\mathfrak{D} = 0$ (рис. 14г). При подходе к граничному значению $g = -7/100$ общая точка кривых $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ на нижней границе области снова уходит на бесконечность, и при $g \in [-7/100, -1/32)$ общих точек у кривых нет; характерный вид сечений для значений g из этого интервала показан на рис. 14г.

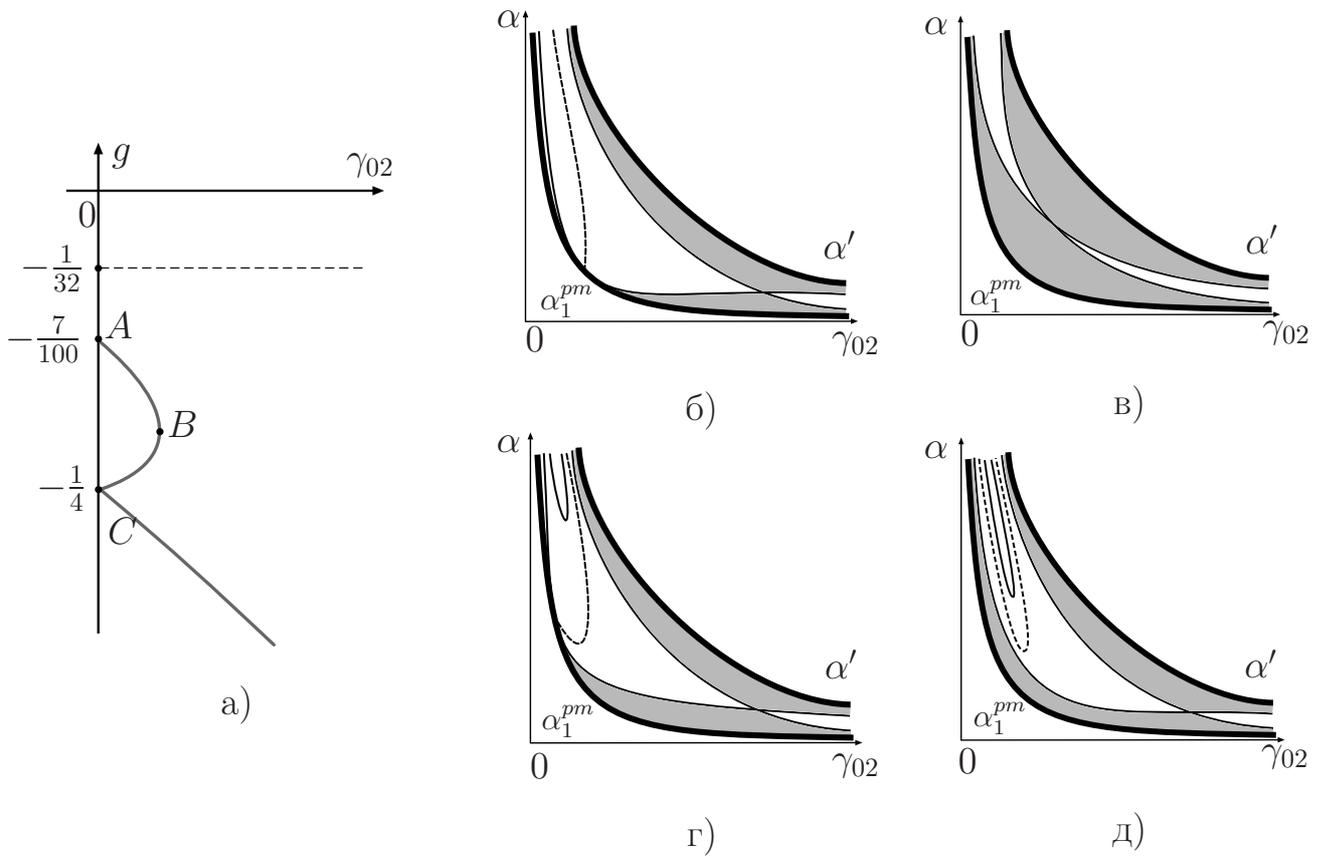


Рис. 14: Точка P_2 системы первого типа.

Для точки P_2 системы второго типа случаи $g \in (-\infty, -1/4)$, $g = -1/4$, $g \in (-1/4, -7/100)$, $g = -7/100$ и $g \in (-7/100, -1/32)$ соответствуют рис. 15б, 15в, 15г, 15д и 15е.

Качественный вид сечений для интервала $g \in (-\infty, -1/4)$ такой же, как для системы первого типа (рис. 14б); в сечениях имеются две области выполне-

ния необходимых условий устойчивости. С ростом g ординаты точек пересечения кривых $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ и самопересечения двух ветвей кривой $\mathfrak{D} = 0$ растут и при $g = -1/4$ становятся неограниченными, при этом кривая $p = 0$ пропадает (см. рис. 15в). Далее, при $g \in [-1/4, -7/100]$ (рис. 15в-д), ветви кривой $\mathfrak{D} = 0$ не имеют точек самопересечения.

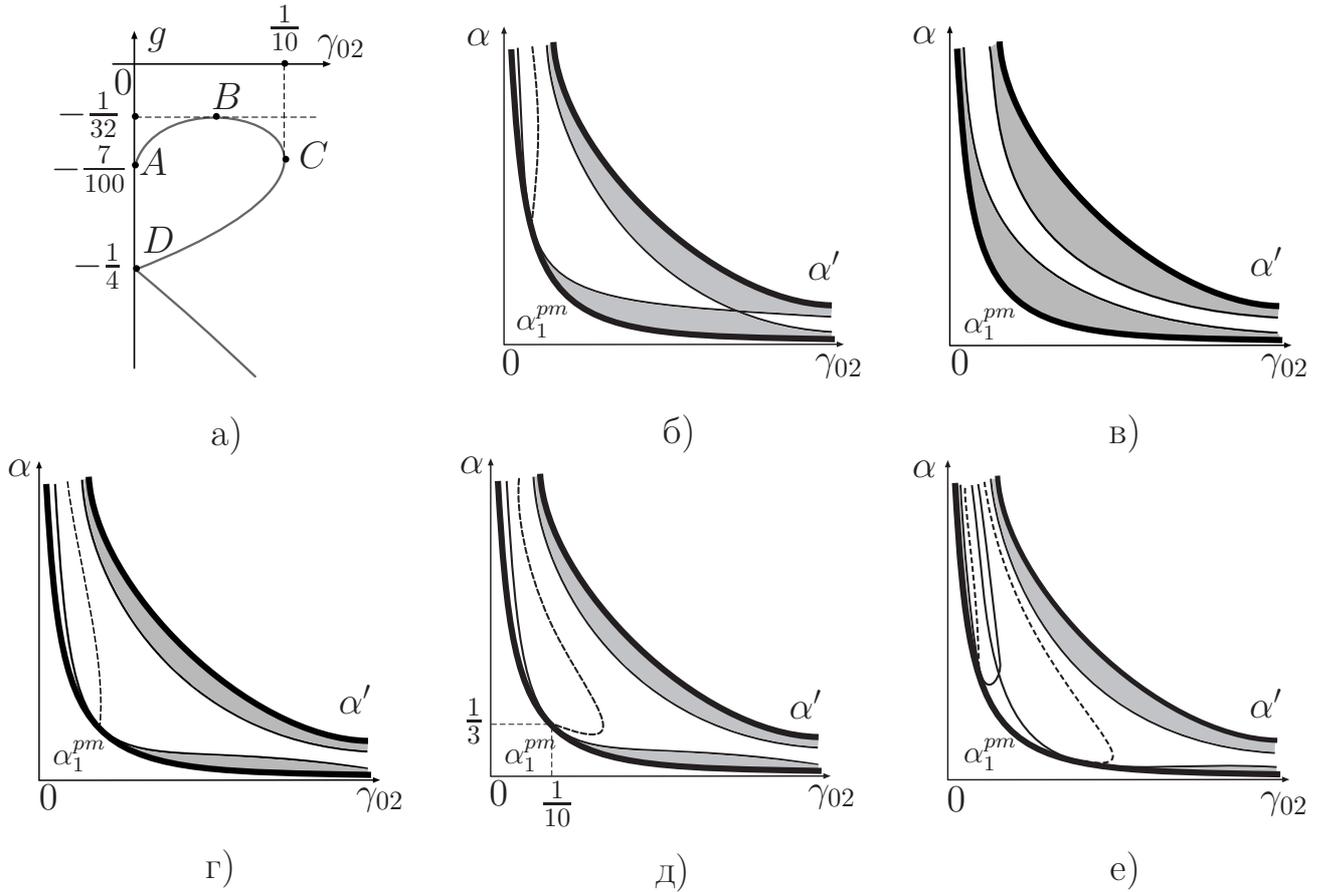


Рис. 15: Точка P_2 системы второго типа.

При переходе через точку $g = -1/4$ на нижней границе области кривые $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ вновь имеют общую точку, абсцисса которой растет с увеличением g и достигает максимального значения $\gamma_{02} = 0.1$ при $g = -7/100$ (рис. 15г, д). Для значений g из интервала $(-7/100, -1/32)$ появляются еще одна ветвь кривой $\mathfrak{D} = 0$ (пересекающаяся с уже имеющейся ранее ветвью $\mathfrak{D} = 0$) и вторая ветвь кривой $p = 0$. Эти новые кривые выходят из общей точки нижней

границы области (рис. 15е), вместе с их появлением в сечении возникает третья область устойчивости.

Точки P_3 . Для равновесной точки P_3 системы первого типа геометрические места (общих) точек пересечения поверхностей $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ с нижней и верхней граничными поверхностями $\alpha = 0$ и $\alpha = \alpha_1^{pm}$ показаны на рис. 16а и 16б соответственно. Отмеченные на этих рисунках точки имеют координаты $A\left(-\left(1 + \sqrt{5} + \sqrt{-10 + 6\sqrt{5}}\right)/16, 1/8\right)$, $B\left(-\left(1 + \sqrt{5} - \sqrt{-10 + 6\sqrt{5}}\right)/16, 1/8\right)$, $C(-1/4, 1/4)$, $D(-1, 1/4)$, $E(-0.8119, 0.1922)$. Характерный вид исследуемых сечений на всем интервале $g \in (1/8, 1/4)$ существования точек P_3 качественно не меняется и имеет вид, представленный на рис. 16в; в каждом сечении имеются две области выполнения необходимых условий устойчивости.

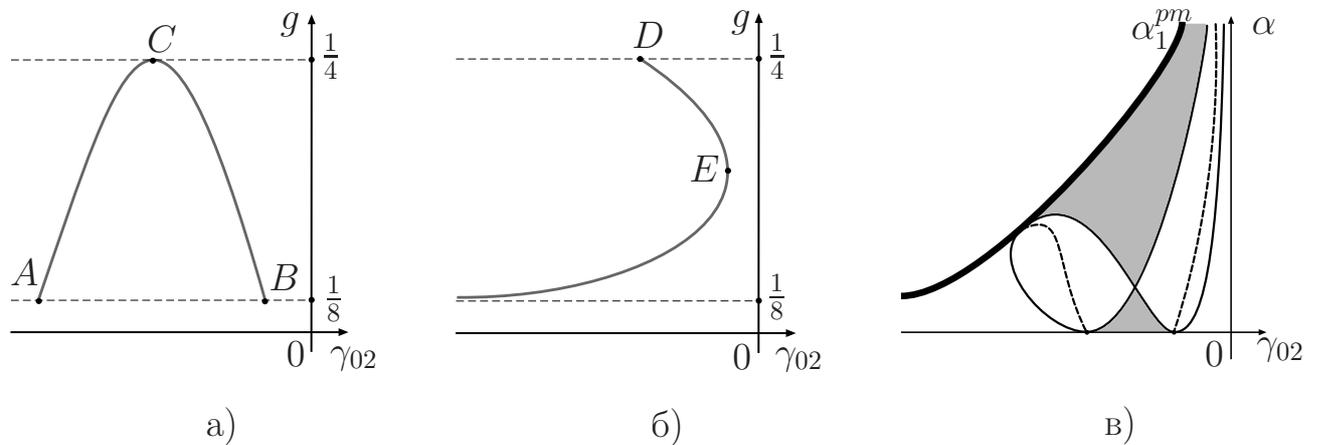
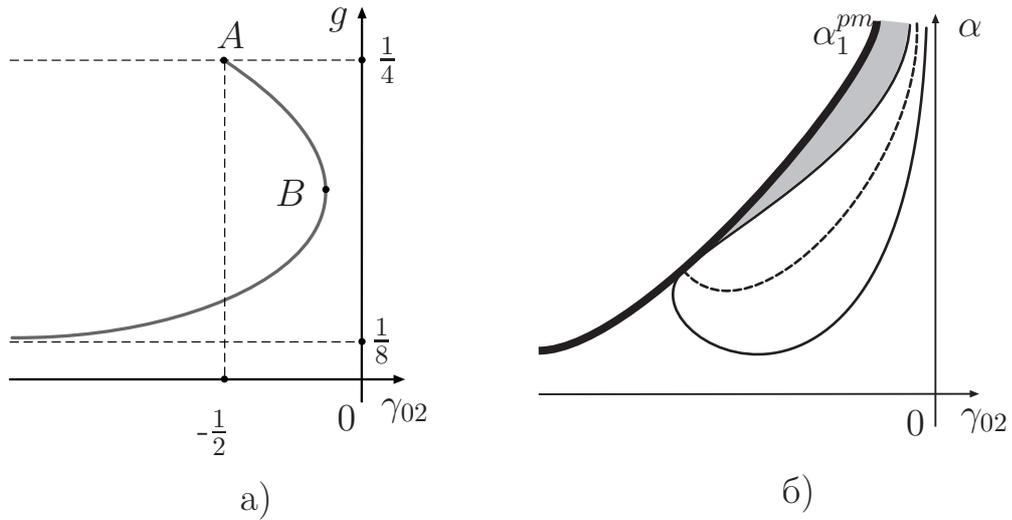


Рис. 16: Точка P_3 первого типа

Для системы второго типа поверхности $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ имеют (общие) точки пересечения только с верхней граничной поверхностью, геометрическое место которых показано на рис. 17а, координаты точек A и B таковы: $A = (-1/2, 1/4)$, $B = (-0.4618, 0.2218)$. В исследуемых сечениях имеется одна область устойчивости (рис. 17б).

Рис. 17: Точка P_3 второго типа

Точки P_4 . Для системы первого типа характерный вид сечений $g = \text{const}$ на интервале $g \in (-\infty, -1/4)$ представлен на рис. 18; имеются две области выполнения необходимых условий устойчивости. При переходе через точку $g = -1/4$ и далее на интервале $g \in (-1/4, 1/4)$ верхняя ветвь кривой $\mathfrak{D} = 0$ исчезает вместе с верхней областью устойчивости (этот случай на рис. 18 не показан). С ростом g абсцисса общей точки кривых $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ на нижней границе рассматриваемой области растет, ее максимальное значение (при $g = 1/4$) равно -1 .

Для системы второго типа характерные сечения качественно такие же, как и для системы первого типа. Максимальное значение абсциссы общей точки кривых $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ на нижней границе области равно $-1/2$.

Точки P_5 . Для точки P_5 системы первого типа поверхности $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ имеют общие точки пересечения с нижней граничной плоскостью $\alpha = 0$, а в исследуемых сечениях — две общие точки на оси абсцисс; при этом в сечении имеются две области выполнения необходимых условий устойчивости (рис. 19а).

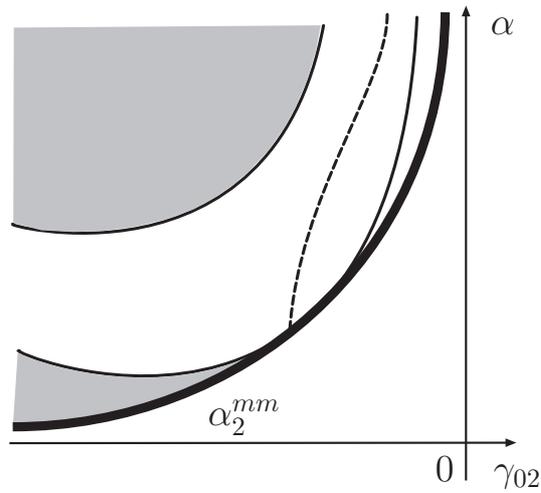


Рис. 18: Характерный вид графиков точки P_4 первого и второго типа

Для точки P_5 системы второго типа поверхности $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ не пересекаются с граничными поверхностями, в сечениях, характерный вид которых представлен на рис. 19б, имеется одна область устойчивости.

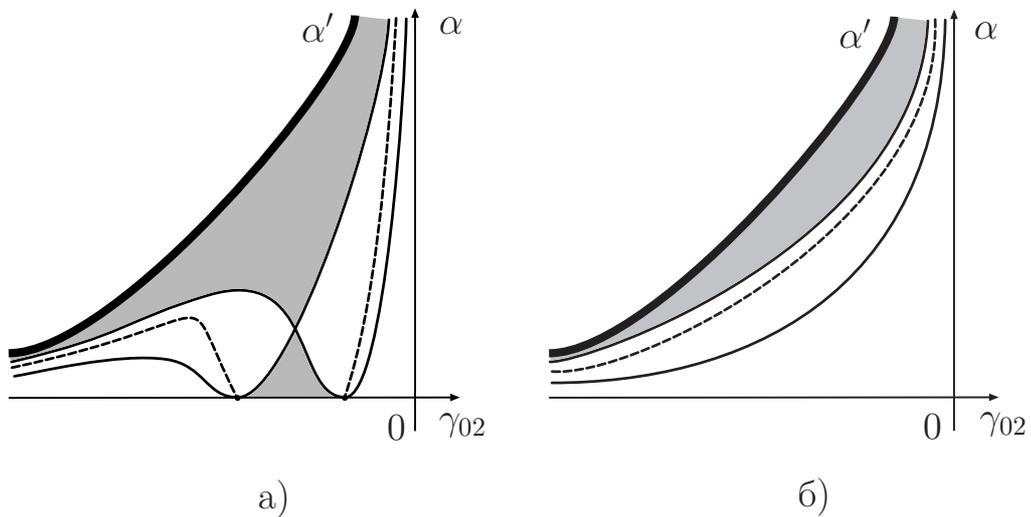


Рис. 19: Характерный вид графиков точки P_5 первого и второго типа

Граничные значения параметра g . Рассмотрим три значения параметра g , лежащие на границах исследуемых интервалов.

В случае $g = 1/4$ уравнение (2.3.6) становится линейным относительно $R_1^{1/2}$ и имеет единственное решение

$$\hat{R}_1^{1/2} = \frac{1}{3} (2\alpha\delta_1\gamma_{02} - \delta_2)^{-1}. \quad (2.5.5)$$

Условия положительности величин \hat{R}_j ($j = 1, 2$) налагают следующие ограничения на параметры задачи:

$$\gamma_{02} > 0, \quad \delta_1 = 1, \quad \delta_2 = -1, \quad \alpha > 0; \quad (2.5.6)$$

$$\gamma_{02} > 0, \quad \delta_1 = -1, \quad \delta_2 = -1, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{3\gamma_{02}}; \quad (2.5.7)$$

$$\gamma_{02} < 0, \quad \delta_1 = -1, \quad \delta_2 = 1, \quad \alpha > -\frac{1}{2\gamma_{02}}; \quad (2.5.8)$$

$$\gamma_{02} < 0, \quad \delta_1 = 1, \quad \delta_2 = -1, \quad -\frac{1}{3\gamma_{02}} < \alpha < -\frac{1}{2\gamma_{02}}. \quad (2.5.9)$$

В каждом из этих случаев у систем обоих типов имеется единственное положение равновесия.

Исследуя квадратичные формы гамильтонианов возмущенного движения, найдем, что достаточные условия устойчивости сводятся к соотношениям $\gamma_{02} > 0$, $\delta_1 = \delta_2 = -1$, $\alpha < 1/(2\gamma_{02})$, которым удовлетворяет случай (2.5.7).

Для оставшихся положений равновесия исследуем необходимые условия устойчивости. Для обеих систем свободный член соответствующего характеристического уравнения (2.5.1) вычисляется по формуле

$$q = 27\alpha\hat{R}_1^{3/2}\hat{R}_2(2\delta_1\alpha\gamma_{02} - \delta_2)\delta_1\delta_2.$$

Отсюда следует, что для параметров задачи, удовлетворяющих условиям (2.5.6), (2.5.8), (2.5.9), справедливо соотношение $q < 0$, поэтому соответствующие положения равновесия неустойчивы.

В случае $g = 1/8$ границы $\alpha_1^{pm} \big|_{g=1/8} = \alpha' \big|_{g=1/8} = \alpha_2^{mm} \big|_{g=1/8}$ совпадают, обозначим их через α^* . В области, задаваемой условиями

$$\gamma_{02} > 0, \quad 0 < \alpha < \alpha^* \quad (\delta_1 = \delta_2 = -1),$$

имеется одно положение равновесия, для которого выполняются достаточные условия устойчивости (см. таблицу 2.2).

При исследовании необходимых условий устойчивости заметим, что для обоих гамильтонианов значение $g = 1/8$ является граничным между точками P_3 и P_5 (см. таблицу 2.2). Как следует из рис. 16б и 17а, при $g \rightarrow 1/8$ общая точка кривых $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ на верхней границе уходит в область неограниченных отрицательных значений γ_{02} , при этом для системы первого типа рис. 16в переходит в рис. 19а, а для системы второго типа рис. 17б переходит в рис. 19б. Области необходимых условий устойчивости и неустойчивости для рассматриваемой равновесной точки иллюстрируют рис. 19а, б.

Значение $g = 1/8$ лежит также внутри области существования равновесной точки P_4 ; соответствующее сечение имеет вид, показанный на рис. 18.

В случае $g = -1/32$ на границах имеем: $\alpha_1^{pm} \big|_{g=-1/32} = \alpha_2^{mm} \big|_{g=-1/32} = 0$. Согласно таблице 2.2, часть положений равновесия, для которых эти значения являются верхними границами изменения α , пропадают. В частности, для рассматриваемого случая нет положений равновесия, для которых выполняются достаточные условия устойчивости.

Исследуем необходимые условия устойчивости. Значение $g = -1/32$ является граничным между равновесными точками P_1 и P_2 (см. таблицу 2.2). Нижняя граница исследуемой области в этом сечении совпадает с осью абсцисс. Для системы первого типа качественный вид сечения, отвечающий данному случаю, имеет вид как на рис. 12б. Для системы второго типа, в соответствии с рис. 13а

и 5а, кривые $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ имеют на нижней границе $\alpha = 0$ одну общую точку с абсциссой $\gamma_{02} = 1/16$ (см. рис. 20).

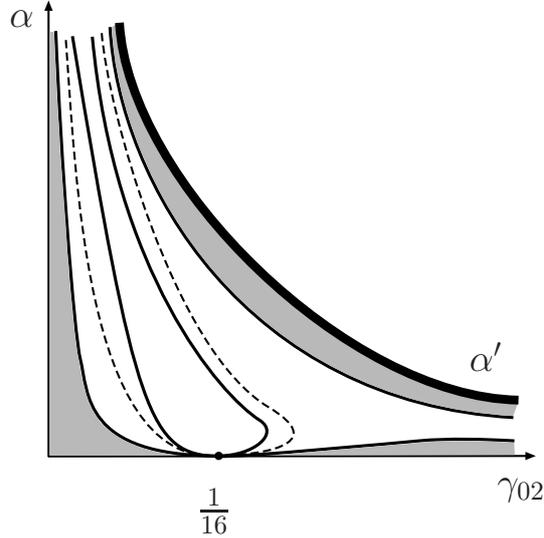


Рис. 20: Характерный вид сечения точки $P_{1,2}$ для гамильтонианов Γ_2 .

Значение $g = -1/32$ содержится также внутри области существования равновесной точки P_4 , вид соответствующего сечения представлен на рис. 18.

2.6. Периодические движения

Пусть $\Psi_j = \Psi_{j0} = \arccos \delta_j$, $R_j = R_{j0}$ ($j = 1, 2$) — одно из рассмотренных положений равновесия системы (2.3.4). Величины R_{10} вычисляются по формуле (2.3.10) (или (2.5.5)), а величины R_{20} связаны с R_{10} соотношением (2.3.7). Гамильтоновым системам с модельными гамильтонианами (2.3.1), (2.3.2) указанному положению равновесия отвечает положение равновесия $\Phi_j = \Phi_{j0}$, $R_j = R_{j0}$ ($j = 1, 2$), где, согласно (2.3.3),

$$\Phi_{10} = \frac{\Psi_{10}}{3}, \quad \Phi_{20} = \pm \left(\frac{\Psi_{20}}{2} - \frac{\Psi_{10}}{6} \right).$$

Рассмотрим полные системы с гамильтонианами (2.2.10), (2.2.11). В окрестности описанных положений равновесия приближенной (модельной) системы полную систему можно рассматривать как квазилинейную с возмущениями порядка ε , имеющими по τ период $T \sim \varepsilon^2$. При этом корни характеристических уравнений линеаризованных уравнений возмущенного движения модельных систем имеют порядок единицы, а частоты возмущений — порядок ε^{-2} . Таким образом, имеет место нерезонансный случай теории Пуанкаре в задаче о периодических решениях квазилинейных систем [35], и из каждого положения равновесия модельной системы рождается единственное, T -периодическое по τ , аналитическое по ε решение соответствующей полной системы с гамильтонианом (2.2.10) или (2.2.11), имеющее вид

$$\Phi_j = \tilde{\Phi}_j(\tau) = \Phi_{j0} + O(\varepsilon), \quad R_j = \tilde{R}_j(\tau) = R_{j0} + O(\varepsilon) \quad (j = 1, 2).$$

Проводя в обратной последовательности замены переменных, описанные в разд. 2.1 и 2.2, найдем отвечающее ему периодическое движение системы с исходным гамильтонианом (2.1.1), аналитическое по ε и имеющее по t период, равный 12π . Это движение имеет вид (константа ξ определена в (2.2.6))

$$q_j = \varepsilon \sqrt{2\xi R_{j0}} \sin \varphi_j + O(\varepsilon^2), \quad p_j = \varepsilon \sqrt{2\xi R_{j0}} \cos \varphi_j + O(\varepsilon^2), \quad (2.6.1)$$

$$\varphi_1 = \lambda_1 t + \Phi_{10} - \varphi_1^*, \quad \varphi_2 = \sigma \lambda_2 t + \Phi_{20} - \varphi_2^*.$$

Слагаемые $O(\varepsilon^2)$ в выражениях для q_j, p_j (2.6.1) ($j = 1, 2$) содержат любые гармоники величин $nt, n_1 \lambda_1 t, n_2 \lambda_2 t$, где n, n_1, n_2 — целые числа.

Неустойчивые положения равновесия модельных систем переходят в неустойчивые периодические движения полных систем. Положения равновесия, рассмотренные для значений параметров из областей выполнения достаточных или только необходимых условий устойчивости, переходят в периодические движения полных систем, устойчивые в линейном приближении. Эти утверждения

следуют из свойства непрерывности по ε характеристических показателей соответствующих линеаризованных уравнений возмущенного движения.

Глава 3

**О периодических движениях гамильтоновой
системы с двумя степенями свободы в
окрестности кратного резонанса третьего
порядка**

**3.1. Постановка задачи. Преобразование гамильтониана.
Модельные гамильтонианы**

В данной главе продолжим исследование системы, описанной в главе 2. Пусть гамильтониан системы приведен к виду (2.1.1), в котором величины λ_1 и λ_2 задаются одним из наборов (2.1.3) и (2.1.4) или близки к ним.

Исследуем вопрос о существовании (в ε -окрестности неустойчивого тривиального равновесия системы) периодических движений, их числе и устойчивости в случае близком к резонансному.

Рассмотрим наборы $(\lambda_{10}, \lambda_{20})$, удовлетворяющие условиям (2.1.3) точного резонанса. Введем резонансные расстройки по формулам $\lambda_j = \lambda_{j0} - \varepsilon^2 \mu_j$ ($j = 1, 2$). Величины μ_j могут быть произвольного знака.

Осуществим серию канонических замен, описанных в главе 2 и приводящих гамильтониан к виду (2.2.3). Делая далее замену (2.2.4), преобразуем гамильтониан (2.2.3) к виду

$$H^* = \varepsilon^2 \left[-\mu_1 R_1 - \mu_2 \sigma R_2 + a \tilde{R}_1^{3/2} \cos 3\tilde{\Phi}_1 + b \tilde{R}_1^{1/2} \tilde{R}_2 \cos(\tilde{\Phi}_1 + 2\sigma \tilde{\Phi}_2) + c_{20} R_1^2 + c_{11} R_1 R_2 + c_{02} R_2^2 \right] + O(\varepsilon^3), \quad (3.1.1)$$

Слагаемое $O(\varepsilon^3)$ в (3.1.1) аналитично по переменным $\tilde{\Phi}_j$, $\tilde{R}_j^{1/2}$ ($j = 1, 2$) и t , периодически по $\tilde{\Phi}_j$ с периодом 2π и по t с периодом 12π .

Коэффициенты c_{11} , a и b в (3.1.1), как и в главе 2, считаем положительными.

Введем новую независимую переменную τ по формуле (2.2.7) и сделаем каноническую замену (2.2.6).

Преобразованный гамильтониан принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_1 = \nu_1 R_1 + \sigma \nu_2 R_2 + \alpha \hat{R}_1^{3/2} \cos 3\hat{\Phi}_1 + \hat{R}_1^{1/2} \hat{R}_2 \cos(\hat{\Phi}_1 + 2\sigma \hat{\Phi}_2) + \\ + \gamma_{20} \hat{R}_1^2 + \hat{R}_1 \hat{R}_2 + \gamma_{02} \hat{R}_2^2 + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

$$\text{где} \quad \nu_1 = -\frac{\mu_1 c_{11}}{b^2}, \quad \nu_2 = -\frac{\mu_2 c_{11}}{b^2},$$

а величины α , γ_{20} и γ_{02} определены в (2.2.9).

В случае (2.1.4) преобразование гамильтониана проводится аналогичным образом, в результате получается гамильтониан вида (3.1.2), в котором надо поменять на противоположный знак при σ .

Полагая в полученных гамильтонианах $\sigma = 1$ и $\sigma = -1$, получим гамильтонианы, характерные для рассматриваемых случаев двойного резонанса третьего порядка (знак $\hat{}$ над переменными опускаем):

$$\begin{aligned} \Gamma_{\pm} = \nu_1 R_1 \pm \nu_2 R_2 + \alpha R_1^{3/2} \cos 3\Phi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos(\Phi_1 \pm 2\Phi_2) + \\ + \gamma_{20} R_1^2 + R_1 R_2 + \gamma_{02} R_2^2 + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Эти гамильтонианы зависят от пяти параметров ν_1 , ν_2 , α , γ_{20} и γ_{02} . Резонансный коэффициент α в (3.1.3) считаем положительным; резонансные расстройки ν_1 и ν_2 , а также коэффициенты γ_{20} и γ_{02} могут принимать значения

любого знака. Слагаемое $O(\varepsilon)$ аналитично по переменным Φ_j , $R_j^{1/2}$ и τ , периодически по Φ_j с периодом 2π и по τ с периодом $T_\tau = 12\pi (b^2/c_{11}) \varepsilon^2$ и содержит слагаемые пятой и больших степеней по $R_j^{1/2}$.

3.2. Положения равновесия модельных систем

Отбрасывая в (3.1.3) слагаемое $O(\varepsilon)$, получаем приближенные (модельные) гамильтонианы:

$$\begin{aligned} \Gamma_+ = \nu_1 R_1 + \nu_2 R_2 + \alpha R_1^{3/2} \cos 3\Phi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos(\Phi_1 + 2\Phi_2) + \\ + \gamma_{20} R_1^2 + R_1 R_2 + \gamma_{02} R_2^2, \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_- = \nu_1 R_1 - \nu_2 R_2 + \alpha R_1^{3/2} \cos 3\Phi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos(\Phi_1 - 2\Phi_2) + \\ + \gamma_{20} R_1^2 + R_1 R_2 + \gamma_{02} R_2^2. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Введем обозначения

$$\Psi_1 = 3\Phi_1, \quad \Psi_2 = \Phi_1 \pm 2\Phi_2. \quad (3.2.3)$$

Приближенные системы уравнений, описывающие изменения переменных Φ_j , R_j ($j = 1, 2$), имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_1}{d\hat{\tau}} &= \nu_1 + \frac{3}{2} \alpha R_1^{1/2} \cos \Psi_1 + \frac{1}{2} \frac{R_2}{R_1^{1/2}} \cos \Psi_2 + 2\gamma_{20} R_1 + R_2, \\ \frac{d\Phi_2}{d\hat{\tau}} &= \pm \nu_2 + R_1^{1/2} \cos \Psi_2 + R_1 + 2\gamma_{02} R_2, \\ \frac{dR_1}{d\hat{\tau}} &= R_1^{1/2} (3\alpha R_1 \sin \Psi_1 + R_2 \sin \Psi_2), \\ \frac{dR_2}{d\hat{\tau}} &= \pm 2R_1^{1/2} R_2 \sin \Psi_2, \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

где верхний и нижний знаки соответствуют гамильтонианам (3.2.1) и (3.2.2).

Найдем положения равновесия модельных систем, приравняв нулю правые части систем (3.2.4). Неустойчивое тривиальное положение равновесия $R_1 = R_2 = 0$ было исследовано ранее в [110]. Также имеются положения равновесия, для которых $R_1 \equiv 0$. Этот случай приводит к исследованию системы с одной степенью свободы с гамильтонианом $\Gamma_{\pm} = \pm\nu_2 R_2 + \gamma_{02} R_2^2$; в системе имеется семейство положений равновесия, задаваемое равенствами

$$\forall \Phi_2 = \Phi_{20} = \text{const}, \quad R_2 = \mp \frac{\nu_2}{2\gamma_{02}}$$

(sign $(\nu_2) = -\text{sign}(\gamma_{02})$ для Γ_+ ; sign $(\nu_2) = \text{sign}(\gamma_{02})$ для Γ_-).

Кроме того, имеются положения равновесия, для которых $R_2 \equiv 0$, а равновесные значения величин Ψ_1 и R_1 описываются соотношениями $\sin 3\Phi_1 = 0$, $\nu_1 + \frac{3}{2}\alpha\delta_1 R_1^{1/2} + 2\gamma_{20} R_1 = 0$ ($\delta_1 = \cos 3\Phi_1 = \pm 1$). Этот случай сводится к системе с одной степенью свободы при наличии резонанса третьего порядка, который подробно изучен в работе [97].

Найдем положения равновесия модельных систем, отличные от описанных. Как и в случае точного резонанса (см. главу 2) должны выполняться условия $\sin \Psi_1 = 0$ и $\sin \Psi_2 = 0$, а равновесные значения величин R_1 и R_2 задаются системой двух алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \nu_1 + \frac{3}{2}\alpha\delta_1 R_1^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\delta_2 R_1^{-\frac{1}{2}} R_2 + 2\gamma_{20} R_1 + R_2 &= 0, \\ \pm\nu_2 + \delta_2 R_1^{\frac{1}{2}} + R_1 + 2\gamma_{02} R_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

где введены обозначения $\delta_j = \cos \Psi_j$, ($\delta_j = \pm 1, j = 1, 2$).

При помощи второго уравнения системы (3.2.5) исключаем R_2 из первого уравнения и перепишем систему в виде

$$2(4g_1 - 1) R_1^{3/2} + 3(2\delta_1 g_2 - \delta_2) R_1 + (4g_3 \mp 2\nu_2 - 1) R_1^{1/2} \mp \delta_2 \nu_2 = 0, \quad (3.2.6)$$

$$R_2 = -\frac{\alpha}{2g_2} \left(R_1 + \delta_2 R_1^{1/2} \pm \nu_2 \right) \quad (R_2 > 0), \quad (3.2.7)$$

где введены следующие обозначения $g_1 = \gamma_{20}\gamma_{02}$, $g_2 = \alpha\gamma_{02}$ и $g_3 = \nu_1\gamma_{02}$. При этом параметры g_1 , g_2 и g_3 отличны от нуля и имеют произвольные знаки.

Пусть одна из резонансных расстроек ν_j ($j = 1, 2$) равна нулю. В случае, когда $\nu_1 \neq 0$, $\nu_2 = 0$, система (3.2.6), (3.2.7) принимает вид

$$2(4g_1 - 1)R_1 + 3(2\delta_1 g_2 - \delta_2)R_1^{1/2} + (4g_3 - 1) = 0, \quad (3.2.8)$$

$$R_2 = -\frac{\alpha}{2g_2} \left(R_1 + \delta_2 R_1^{1/2} \right);$$

а в случае $\nu_1 = 0$, $\nu_2 \neq 0$ вид

$$2(4g_1 - 1)R_1^{3/2} + 3(2\delta_1 g_2 - \delta_2)R_1 + (\mp 2\nu_2 - 1)R_1^{1/2} \mp \delta_2 \nu_2 = 0, \quad (3.2.9)$$

$$R_2 = -\frac{\alpha}{2g_2} \left(R_1 + \delta_2 R_1^{1/2} \pm \nu_2 \right).$$

Дальнейшее исследование зависит от трех параметров, так как значение параметра α не влияет на качественные выводы в силу его положительности. Случай (3.2.8) зависит от g_1 , g_2 и g_3 , а первое уравнение (3.2.8) является квадратным относительно $R_1^{1/2}$; а случай (3.2.9) — от g_1 , g_2 и ν_2 , и первое уравнение (3.2.9) является кубическим относительно $R_1^{1/2}$. Необходимо найти условия, при которых указанные уравнения имеют положительные вещественные корни. Кроме того, найденные корни должны обеспечивать положительность величины R_2 для каждого конкретного случая.

Ограничимся случаем (3.2.8). Из условия $R_2 > 0$ получаются следующие условия на параметры задачи и величину R_1 :

$$\frac{\delta_2 + R_1^{1/2}}{g_2} < 0, \quad \begin{array}{l} g_2 > 0, \quad \delta_2 = -1 : R_1 < 1; \\ g_2 < 0, \quad \delta_2 = 1 : R_1 > 0; \\ g_2 < 0, \quad \delta_2 = -1 : R_1 > 1. \end{array} \quad (3.2.10)$$

При $g_2 > 0$, $\delta_2 = 1$ величина R_2 отрицательна.

Рассмотрим первое уравнение (3.2.8). Его дискриминант имеет вид квадратного трехчлена по g_2 вида

$$D = 36g_2^2 - 36\delta_1\delta_2g_2 + (32g_1 + 32g_3 - 128g_1g_3 + 1), \quad (3.2.11)$$

который, в свою очередь, имеет дискриминант, равный

$$D_g = 1152(4g_1 - 1)(4g_3 - 1).$$

Найдем условия, при которых дискриминант D положителен.

g_1	g_3	(δ_1, δ_2)	g_2	
$(\frac{1}{4}, \infty)$	$(\frac{1}{4}, \infty)$	$(1, 1)$	$(-\infty, g_{2p}^-]$	
		$(1, -1)$	$(-\infty, g_{2m}^-]$	
		$(-1, 1)$	$(g_{2m}^+, \infty]$	
		$(-1, -1)$	$(g_{2p}^+, \infty]$	
$(-\infty, \frac{1}{4})$	$(-\infty, \frac{1}{4})$	$\forall (\delta_1, \delta_2)$	$\forall g_2 \neq 0$	
	$(\frac{1}{4}, \infty)$			
	$(-\infty, \frac{1}{4})$	$(-\infty, \frac{1}{4})$	$(1, 1)$	$[g_{2p}^+, \infty)$
			$(1, -1)$	$[g_{2m}^+, \infty)$
			$(-1, 1)$	$[-\infty, g_{2m}^-)$
			$(-1, -1)$	$[-\infty, g_{2p}^-)$

Таблица 3.1: Решение неравенства $D > 0$

Если $D_g < 0$, т.е. либо $g_1 > \frac{1}{4}$ и $g_3 < \frac{1}{4}$, либо $g_1 < \frac{1}{4}$ и $g_3 > \frac{1}{4}$, то, в силу положительности старшего коэффициента в (3.2.11), величина D положительна при всех значениях g_2 . Пусть $D_g \geq 0$, т.е. либо $g_1 > \frac{1}{4}$ и $g_3 > \frac{1}{4}$, либо $g_1 < \frac{1}{4}$ и

$g_3 < \frac{1}{4}$, тогда квадратный трехчлен D имеет два вещественных корня

$$g_2^\pm = \frac{1}{72} \left(36\delta_1\delta_2 \pm \sqrt{D_g} \right), \quad g_2^+ > g_2^-.$$

Анализируя расположения этих корней относительно нуля, найдем области значений параметров g_1 , g_2 и g_3 , в которых выполнено неравенство $D > 0$. Эти области представлены в таблице 3.1. Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} g_{2p}^\pm &= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \sqrt{2(1-4g_1)(1-4g_3)}, \\ g_{2m}^\pm &= -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \sqrt{2(1-4g_1)(1-4g_3)}. \end{aligned}$$

В найденных областях были проверены условия положительности корней $R_1^{1/2}$ первого уравнения (3.2.8) и условия (3.2.10). При этом часть решений была отброшена, а на параметры g_1 , g_2 и g_3 в ряде случаев получены дополнительные ограничения.

Результаты представлены на рис. 21. Пространство параметров g_1 , g_3 разделяется на 20 областей, обозначенные числами 1-20. Границы областей задаются уравнениями

$$g_3^* = \frac{1}{4} + \frac{9}{32(4g_1 - 1)}, \quad g_{30}^* = -2g_1, \quad g_{31}^* = 2g_1 - \frac{1}{4}, \quad g_{3F}^\pm = 2g_1 - \frac{7}{4} \pm \sqrt{3 - 12g_1}.$$

Для дальнейшего введем также обозначения:

$$g_2^m = -\frac{4}{3}g_1 - \frac{2}{3}g_3, \quad g_2^p = \frac{4}{3}g_1 + \frac{2}{3}g_3.$$

Точки пересечения границ имеют координаты

$$\begin{aligned} &B \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right), \quad A \left(-\frac{1}{8} \left(\frac{5}{2} + 3\sqrt{2} \right), \frac{3}{4}\sqrt{2} - \frac{7}{8} \right), \quad C \left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{4} \right), \\ &D \left(\frac{1}{16}, -\frac{1}{8} \right), \quad E \left(\frac{1}{8} \left(3\sqrt{2} - \frac{5}{2} \right), -\frac{1}{4} \left(3\sqrt{2} + \frac{7}{2} \right) \right), \quad F \left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{4} \right), \end{aligned}$$

$$G \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2} \right),$$

$$H \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right),$$

$$I \left(\frac{7}{16}, \frac{5}{8} \right).$$

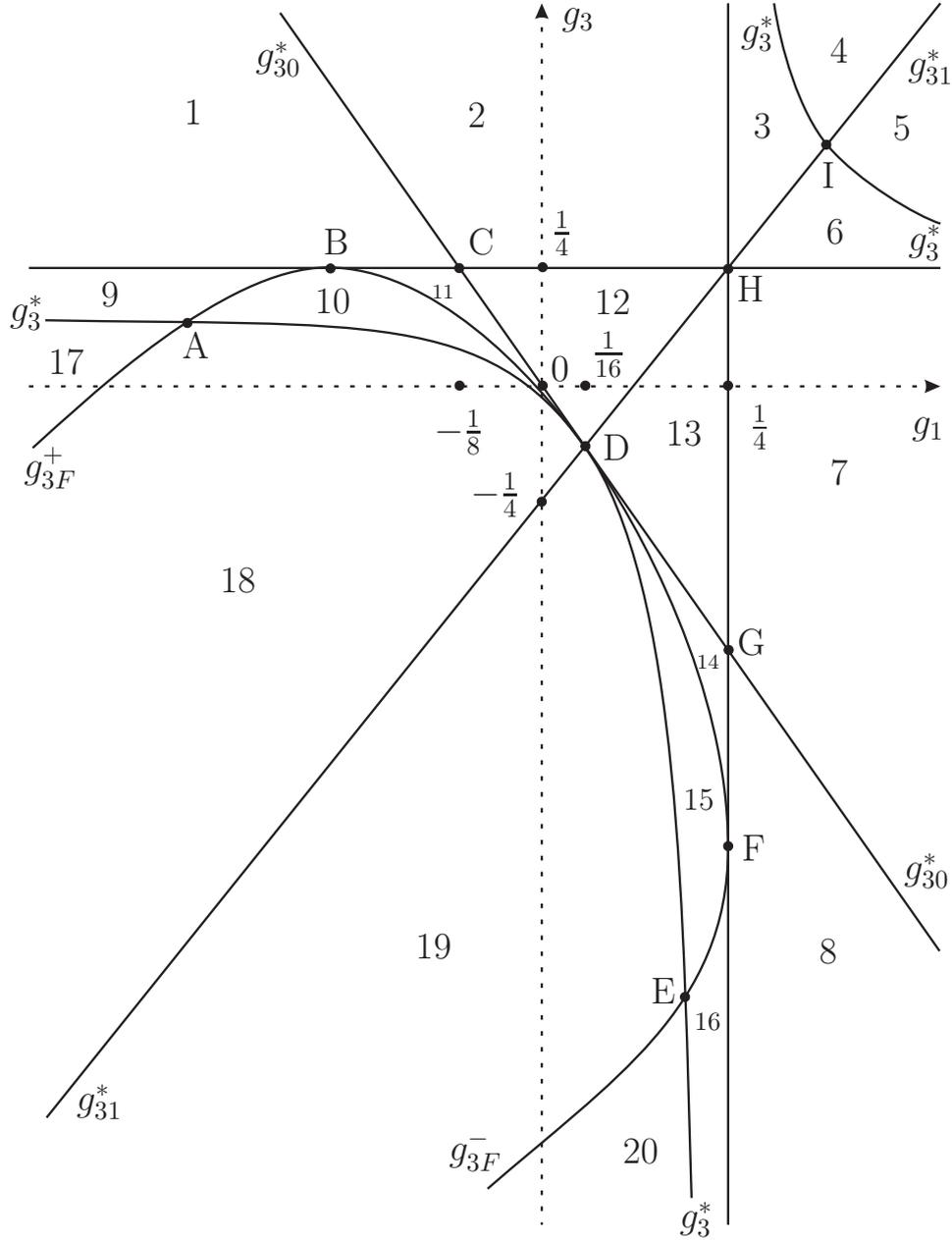


Рис. 21: Разбиение областей существования корней
в плоскости параметров g_1, g_3 .

Для каждой занумерованной области на рис. 21 ось Og_2 третьего парамет-

ра g_2 разбивается на несколько интервалов (от четырех до шести) с различными числом (от нуля до четырех) положений равновесия, являющихся решением первого уравнения (3.2.8) и удовлетворяющих условиям (3.2.10).

№	Интервал g_2 и количество корней					
1,7	$(-\infty; g_2^m), 3$	$(g_2^m; 0), 2$	$(0; g_2^p), 2$	$(g_2^p; +\infty), 1$		
2	$(-\infty; g_2^m), 3$	$(g_2^m; 0), 4$	$(0; g_2^p), 0$	$(g_2^p; +\infty), 1$		
3	$(-\infty; g_2^m), 3$	$(g_2^m; g_{2m}^-), 4$	$(g_{2m}^-; g_{2m}^+), 2$	$(g_{2m}^+; 0), 4$	$(0; g_2^p), 0$	$(g_2^p; +\infty), 1$
4	$(-\infty; g_2^m), 3$	$(g_2^m; g_{2m}^-), 4$	$(g_{2m}^-; g_{2p}^-), 2$	$(g_{2p}^-; g_2^p), 0$	$(g_2^p; +\infty), 1$	
5	$(-\infty; g_2^m), 3$	$(g_2^m; g_{2p}^-), 2$	$(g_{2p}^-; g_{2p}^+), 0$	$(g_{2p}^+; g_2^p), 2$	$(g_2^p; +\infty), 1$	
6	$(-\infty; g_2^m), 3$	$(g_2^m; g_{2m}^+), 2$	$(g_{2m}^+; 0), 4$	$(0; g_{2p}^+), 0$	$(g_{2p}^+; g_2^p), 2$	$(g_2^p; +\infty), 1$
8	$(-\infty; g_2^p), 3$	$(g_2^p; 0), 4$	$(0; g_2^m), 0$	$(g_2^m; +\infty), 1$		
9	$(-\infty; g_2^p), 3$	$(g_2^p; g_{2m}^-), 2$	$(g_{2m}^-; 0), 0$	$(0; g_{2p}^-), 4$	$(g_{2p}^-; g_2^m), 2$	$(g_2^m; +\infty), 1$
10	$(-\infty; g_{2m}^-), 3$	$(g_{2m}^-; g_2^p), 1$	$(g_2^p; 0), 0$	$(0; g_{2p}^-), 4$	$(g_{2p}^-; g_2^m), 2$	$(g_2^m; +\infty), 1$
11	$(-\infty; g_{2m}^-), 3$	$(g_{2m}^-; g_2^p), 1$	$(g_2^p; 0), 0$	$(0; g_2^m), 4$	$(g_2^m; g_{2p}^-), 3$	$(g_{2p}^-; +\infty), 1$
12	$(-\infty; g_{2m}^-), 3$	$(g_{2m}^-; g_2^m), 1$	$(g_2^m; 0), 2$	$(0; g_2^p), 2$	$(g_2^p; g_{2p}^-), 3$	$(g_{2p}^-; +\infty), 1$
13	$(-\infty; g_{2m}^-), 3$	$(g_{2m}^-; g_{2m}^+), 1$	$(g_{2m}^+; g_2^m), 3$	$(g_2^m; 0), 2$	$(0; g_2^p), 2$	$(g_2^p; +\infty), 1$
14	$(-\infty; g_{2m}^-), 3$	$(g_{2m}^-; g_{2m}^+), 1$	$(g_{2m}^+; g_2^p), 3$	$(g_2^p; 0), 4$	$(0; g_2^m), 0$	$(g_2^m; +\infty), 1$
15	$(-\infty; g_{2m}^-), 3$	$(g_{2m}^-; g_2^p), 1$	$(g_2^p; g_{2m}^+), 2$	$(g_{2m}^+; 0), 4$	$(0; g_2^m), 0$	$(g_2^m; +\infty), 1$
16	$(-\infty; g_2^p), 3$	$(g_2^p; g_{2m}^-), 4$	$(g_{2m}^-; g_{2m}^+), 2$	$(g_{2m}^+; 0), 4$	$(0; g_2^m), 0$	$(g_2^m; +\infty), 1$
17	$(-\infty; g_2^p), 3$	$(g_2^p; g_{2m}^-), 2$	$(g_{2m}^-; g_{2m}^+), 0$	$(g_{2m}^+; g_2^m), 2$	$(g_2^m; +\infty), 1$	
18	$(-\infty; g_{2m}^-), 3$	$(g_{2m}^-; g_2^p), 1$	$(g_2^p; g_{2m}^+), 0$	$(g_{2m}^+; g_2^m), 2$	$(g_2^m; +\infty), 1$	
19	$(-\infty; g_{2m}^-), 3$	$(g_{2m}^-; g_2^p), 1$	$(g_2^p; g_{2p}^-), 2$	$(g_{2p}^-; g_2^m), 0$	$(g_2^m; +\infty), 1$	
20	$(-\infty; g_2^p), 3$	$(g_2^p; g_{2m}^-), 4$	$(g_{2m}^-; g_{2p}^-), 2$	$(g_{2p}^-; g_2^m), 0$	$(g_2^m; +\infty), 1$	

Таблица 3.2: Число положений равновесия в областях 1-20, в зависимости от значений g_2

В первой ячейке каждой строки таблицы 3.2 представлен порядковый номер области, указанный на рис. 21. В последующих ячейках число рядом с

интервалом для параметра g_2 представляет собой суммарное количество положений равновесия в указанном интервале. Отметим, что каждой ячейке таблицы соответствуют несколько значений набора параметров (δ_1, δ_2) , для каждого из которых реализуется одно или два решения системы уравнений (3.2.8), или эти решения отсутствуют.

Равновесные значения переменной R_1 представляются в виде $R_1 = R_{10}^\pm$, где

$$R_{10}^\pm = \left(\frac{-3(2\delta_1 g_2 - \delta_2) \pm \sqrt{D}}{4(4g_1 - 1)} \right)^2, \quad (3.2.12)$$

а D — дискриминант (3.2.11). Их одно или два для каждого набора (δ_1, δ_2) . Каждому значению R_{10}^+ или R_{10}^- отвечает единственное значение $R_2 = R_{20}$, вычисляемое по второй формуле (3.2.8).

Подведем итоги исследования вопроса о существовании равновесных точек в рассматриваемом случае $\nu_1 \neq 0, \nu_2 = 0$. Заметим, что, как и в случае точного резонанса $\nu_1 = \nu_2 = 0$ (соответствующего оси Og_1 на рис. 21), в зависимости от выбранных значений параметров, в системе может существовать от 0 до 4 равновесных точек. В областях, через которые проходит ось Og_1 , имеем точно такое же разбиение оси третьего параметра на интервалы, как и в случае точного резонанса. Однако, при удалении от этой оси и переходе в соседние области разбиение на интервалы и число положений равновесия в них меняется.

В следующих разделах будет проведено исследование устойчивости найденных положений равновесия.

3.3. Достаточные условия устойчивости положений равновесия

Введем возмущения координат и импульсов модельных систем с гамильтонианами (3.2.1) и (3.2.2) по формулам

$$\Phi_1 = \Phi_{10} + x_1, \quad \Phi_2 = \Phi_{20} + x_2, \quad R_1 = R_{10} + y_1, \quad R_2 = R_{20} + y_2,$$

причем равновесные значения Φ_{j0} ($j = 1, 2$) вычисляются, с учетом соотношений (3.2.3), по формулам

$$\Phi_{10} = \Psi_{10}/3, \quad \Phi_{20} = \pm (\Psi_{20}/2 - \Psi_{10}/6), \quad \Psi_{j0} = \arccos \delta_j \quad (3.3.1)$$

Квадратичная часть гамильтонианов возмущенного движения имеет вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,2}^* = & \left(-\frac{9}{2}\alpha\delta_1 R_{10}^{3/2} - \frac{1}{2}\delta_2 R_{10}^{1/2} R_{20} \right) x_1^2 \mp 2\delta_2 R_{10}^{1/2} R_{20} x_1 x_2 - 2\delta_2 R_{10}^{1/2} R_{20} x_2^2 + \\ & + \left(\gamma_{20} + \frac{3}{8}\alpha\delta_1 R_{10}^{-1/2} - \frac{1}{8}\delta_2 R_{10}^{-3/2} R_{20} \right) y_1^2 + \left(1 + \frac{1}{2}\delta_2 R_{10}^{-1/2} \right) y_1 y_2 + \gamma_{02} y_2^2, \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

где верхний и нижний знак соответствует (3.2.1) и (3.2.2).

Достаточные условия устойчивости положений равновесия будем рассматривать как условия знакоопределенности квадратичных форм $\Gamma_{1,2}^*$, проверяемые при помощи критерия Сильвестра.

Несложный анализ показывает, что для обеих систем условия положительной определенности форм (3.3.2) удовлетворяются только для решений $R_1 = R_1^+$ при выполнении соотношений $g_2 > 0$, $\delta_1 = \delta_2 = -1$, а условия отрицательной определенности — соотношений $g_2 < 0$, $\delta_1 = \delta_2 = 1$.

Десять положений равновесия D_i ($i = 1 \dots 10$), удовлетворяющих данным условиям, приведены в таблице 3.3. Для каждой точки указана пара (δ_1, δ_2) и

интервалы изменения параметров g_1, g_2, g_3 , в которых данная точка существует.

Их расположение в плоскости параметров g_1, g_3 представлено на рисунке 22.

	g_1	(δ_1, δ_2)	g_2	g_3	
D_1	$\left(-\infty, -\frac{1}{8}\right]$	$(-1, -1)$	$(0, g_{2p}^-]$	$\left(g_3^*, \frac{1}{4}\right)$	
D_2	$\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right]$			(g_3^*, g_{30}^*)	
D_3			$(g_2^p, g_{2p}^-]$	$\left(g_{30}^*, \frac{1}{4}\right)$	
D_4	$\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$			$\left(g_{31}^*, \frac{1}{4}\right)$	
D_5	$\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$	$(-1, -1)$	$(-\infty, g_{2p}^-]$	$(g_3^*, +\infty)$	
D_6			$(-\infty, 0)$	$\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$	
D_7				$\left(\frac{1}{4}, g_3^*\right)$	
D_8		$(-1, -1)$	$(0, g_2^p)$	$\left(g_{30}^*, \frac{1}{4}\right)$	
D_9			$[g_{2p}^+, g_2^p)$	$\left(\frac{1}{4}, g_{31}^*\right)$	
D_{10}			$(g_2^p, +\infty)$	$(g_2^p, +\infty)$	$\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$

Таблица 3.3: Положения равновесия, для которых выполняются достаточные условия устойчивости

3.4. Необходимые условия положений равновесия

Для остальных равновесных точек квадратичные формы $\Gamma_{1,2}^*$ не являются знакоопределенными. Чтобы решить вопрос об их устойчивости, рассмотрим характеристическое уравнение линеаризованной системы уравнений возмущен-

ного движения, имеющее вид

$$\lambda^4 + p\lambda^2 + q = 0. \quad (3.4.1)$$

Если выполнены условия

$$p > 0, \quad q > 0, \quad \mathfrak{D} = p^2 - 4q > 0, \quad (3.4.2)$$

то корни уравнения (3.4.1) чисто мнимые, и исследуемое положение равновесия устойчиво в линейном приближении. Неравенства (3.4.2) составляют необходимые условия устойчивости. Если для рассматриваемого положения равновесия хотя бы одно из этих неравенств выполняется с противоположным знаком, то характеристическое уравнение имеет корни с положительной вещественной частью, и данное положение равновесия неустойчиво, причем не только в линейном приближении, но и в полной нелинейной задаче.

Для обоих гамильтонианов коэффициенты уравнения (3.4.1) имеют вид:

$$p = \frac{\hat{p}\sqrt{D} + p'}{128(4\gamma_{20}\gamma_{02} - 1)^3\gamma_{02}^2}, \quad q = \pm 9\alpha\delta_1\delta_2 R_{10}^{3/2} R_{20}\sqrt{D}, \quad (3.4.3)$$

где D — дискриминант (3.2.11); верхний и нижний знаки соответствуют верхнему и нижнему знакам величины R_{10}^\pm из формулы (3.2.12).

Величины \hat{p} и p' в выражении для p из (3.4.3) равны

$$\begin{aligned} \hat{p} = & -\varkappa 648 \delta_1 \gamma_{02}^3 (4 \gamma_{20} \gamma_{02} + 1) \alpha^3 + \\ & + 36 \delta_2 \gamma_{02}^2 [32 \varkappa \gamma_{02}^2 + 4 (31 \varkappa \gamma_{20} + 4) \gamma_{02} + 7 \varkappa] \alpha^2 + \\ & + 6 \delta_1 \gamma_{02} [256 \varkappa \gamma_{20} (3 \gamma_{20} \nu_1 - 1) \gamma_{02}^3 - 64 (5 \varkappa \gamma_{20}^2 + 3 \gamma_{20} \nu_1 \varkappa + 3 \gamma_{20} + 2 \varkappa) \gamma_{02}^2 - \\ & - 4 (49 \varkappa \gamma_{20} + 12) \gamma_{02} + 3 \varkappa] \alpha - \delta_2 [1024 \varkappa \gamma_{20} \nu_1 \gamma_{02}^4 + \\ & + 256 (\varkappa \gamma_{20}^2 \nu_1 - 2 \gamma_{20}^2 + 2 \gamma_{20} \nu_1 - 4 \varkappa \gamma_{20} - \varkappa \nu_1) \gamma_{02}^3 + \\ & - 32 (10 \varkappa \gamma_{20}^2 + 2 \varkappa \gamma_{20} \nu_1 + 14 \gamma_{20} + 4 \nu_1 + \varkappa) \gamma_{02}^2 + 12 \varkappa \gamma_{20} \gamma_{02} - \varkappa], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p' = & 3888 \gamma_{02}^4 (4 \gamma_{02} \gamma_{20} + 1) \alpha^4 - 3456 \delta_1 \delta_2 \gamma_{02}^3 [2 \gamma_{02}^2 + (10 \gamma_{20} + \varkappa) \gamma_{02} + 1] \alpha^3 - \\
& - 72 \gamma_{02}^2 [128 \gamma_{20} (6 \gamma_{20} \nu_1 - 1) \gamma_{02}^3 - 16 (16 \gamma_{20}^2 + 6 \gamma_{20} \nu_1 + 6 \gamma_{20} \varkappa + 7) \gamma_{02}^2 - \\
& - 4 (71 \gamma_{20} + 6 \nu_1 + 12 \varkappa) \gamma_{02} - 3] \alpha^2 + 96 \delta_1 \delta_2 \gamma_{02}^2 [192 \gamma_{20} \nu_1 \gamma_{02}^3 + \\
& + 16 (32 \nu_1 \gamma_{20}^2 - 2 \varkappa \gamma_{20}^2 + 6 \varkappa \gamma_{20} \nu_1 - 9 \gamma_{20} - 3 \nu_1) \gamma_{02}^2 - \\
& - 2 (84 \gamma_{20}^2 + 68 \gamma_{20} \nu_1 + 40 \varkappa \gamma_{20} + 12 \varkappa \nu_1 + 9) \gamma_{02} - 12 \gamma_{20} + 2 \nu_1 - 5 \varkappa] \alpha - \\
& - 16384 \gamma_{20}^2 \nu_1 \gamma_{02}^5 - 1024 \gamma_{20} (4 \nu_1 \gamma_{20}^2 + 12 \varkappa \gamma_{20} \nu_1 - 4 \gamma_{20} + \nu_1) \gamma_{02}^4 + \\
& + 256 (6 \gamma_{20}^3 - 2 \nu_1 \gamma_{20}^2 + 18 \varkappa \gamma_{20}^2 + 6 \varkappa \gamma_{20} \nu_1 + 10 \gamma_{20} + 5 \nu_1) \gamma_{02}^3 + \\
& + 32 (16 \gamma_{20}^2 + 14 \gamma_{20} \nu_1 + 18 \varkappa \gamma_{20} + 12 \varkappa \nu_1 - 1) \gamma_{02}^2 - 4 (\gamma_{20} + 4 \nu_1) \gamma_{02} - 1,
\end{aligned}$$

причем $\varkappa = 1$ соответствует гамильтониану Γ_1^* , а $\varkappa = -1$ гамильтониану Γ_2^* из (3.3.2). Отметим, что коэффициенты p и q зависят от четырех параметров γ_{20} , γ_{02} , α и ν_1 .

Все полученные выше достаточные условия устойчивости положений равновесия являются также и необходимыми условиями.

Условию $q > 0$ соответствуют 21 положение равновесия, обозначим их через N_i ($i = 1 \dots 21$). Они представлены в таблице 3.4. Для остальных 36 положений равновесия, не указанных в таблицах 3.3 и 3.4, выполняется условие $q < 0$, и имеет место неустойчивость.

	g_1	(δ_1, δ_2)	g_2	g_3	Корень
N_1	$\left(-\infty, -\frac{1}{8}\right)$	$(1, -1)$	$(g_2^m, +\infty)$	$\left(g_3^*, \frac{1}{4}\right)$	R_1^-
N_2	$\left(-\infty, -\frac{1}{8}\right)$	$(1, -1)$	$(0, g_2^m)$	$\left(\frac{1}{4}, g_3^*\right)$	R_1^-
N_3	$\left(-\infty, -\frac{1}{8}\right)$	$(1, -1)$	$(g_2^m, 0)$	$(g_{30}^*, +\infty)$	R_1^-
N_4	$\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$	$(1, -1)$	$(g_2^m, +\infty)$	$(-\infty, g_3^*)$	R_1^-

[Положения равновесия, для которых $q > 0$ (продолжение таблицы далее)]

	g_1	(δ_1, δ_2)	g_2	g_3	Корень
N_5	$\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$	$(1, -1)$	$(g_2^m, +\infty)$	$[g_3^*, g_{30}^*)$	R_1^-
N_6	$\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$	$(1, -1)$	$(g_2^m, 0)$	$\left(g_{30}^*, \frac{1}{4}\right)$	R_1^-
N_7	$\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$	$(1, -1)$	$(0, +\infty)$	$\left(g_{30}^*, \frac{1}{4}\right)$	R_1^-
N_8	$\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$	$(1, -1)$	$(g_2^m, 0)$	$\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$	R_1^-
N_9	$\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$	$(-1, 1)$	$(-\infty, 0)$	$\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$	R_1^-
N_{10}	$\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$	$(-1, -1)$	$(g_2^p, 0)$	$(-\infty, g_{30}^*)$	R_1^+
N_{11}	$\left(-\infty, -\frac{1}{8}\right)$	$(1, -1)$	$(0, g_2^m)$	$\left[g_3^*, \frac{1}{4}\right)$	R_1^-
N_{12}	$\left(-\infty, \frac{1}{16}\right)$	$(1, -1)$	$[g_{2m}^+, g_2^m)$	(g_{31}^*, g_3^*)	R_1^-
N_{13}	$\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right)$	$(1, -1)$	$(0, g_2^m)$	$[g_3^*, g_{30}^*)$	R_1^-
N_{14}	$\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$	$(1, -1)$	$[g_{2m}^+, 0)$	(g_3^*, g_{30}^*)	R_1^-
N_{15}	$\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$	$(1, -1)$	$[g_{2m}^+, g_2^m)$	$[g_{30}^*, g_{31}^*]$	R_1^-
N_{16}	$\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$	$(1, -1)$	$(g_2^m, g_{2m}^-]$	$(g_{31}^*, +\infty)$	R_1^-
N_{17}	$\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$	$(-1, 1)$	$(-\infty, g_{2m}^-]$	$\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$	R_1^-
N_{18}	$\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$	$(-1, 1)$	$[g_{2m}^+, 0)$	$\left(\frac{1}{4}, g_3^*\right)$	R_1^-
N_{19}	$\left(-\infty, \frac{1}{16}\right)$	$(-1, -1)$	$(g_2^p, g_{2p}^-]$	$(-\infty, g_{31}^*)$	R_1^+
N_{20}	$\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$	$(-1, -1)$	$(g_2^p, g_{2p}^-]$	$(-\infty, g_3^*)$	R_1^+
N_{21}	$\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$	$(-1, -1)$	$(g_2^p, 0]$	(g_3^*, g_{30}^*)	R_1^+

Таблица 3.4: Положения равновесия, для которых $q > 0$

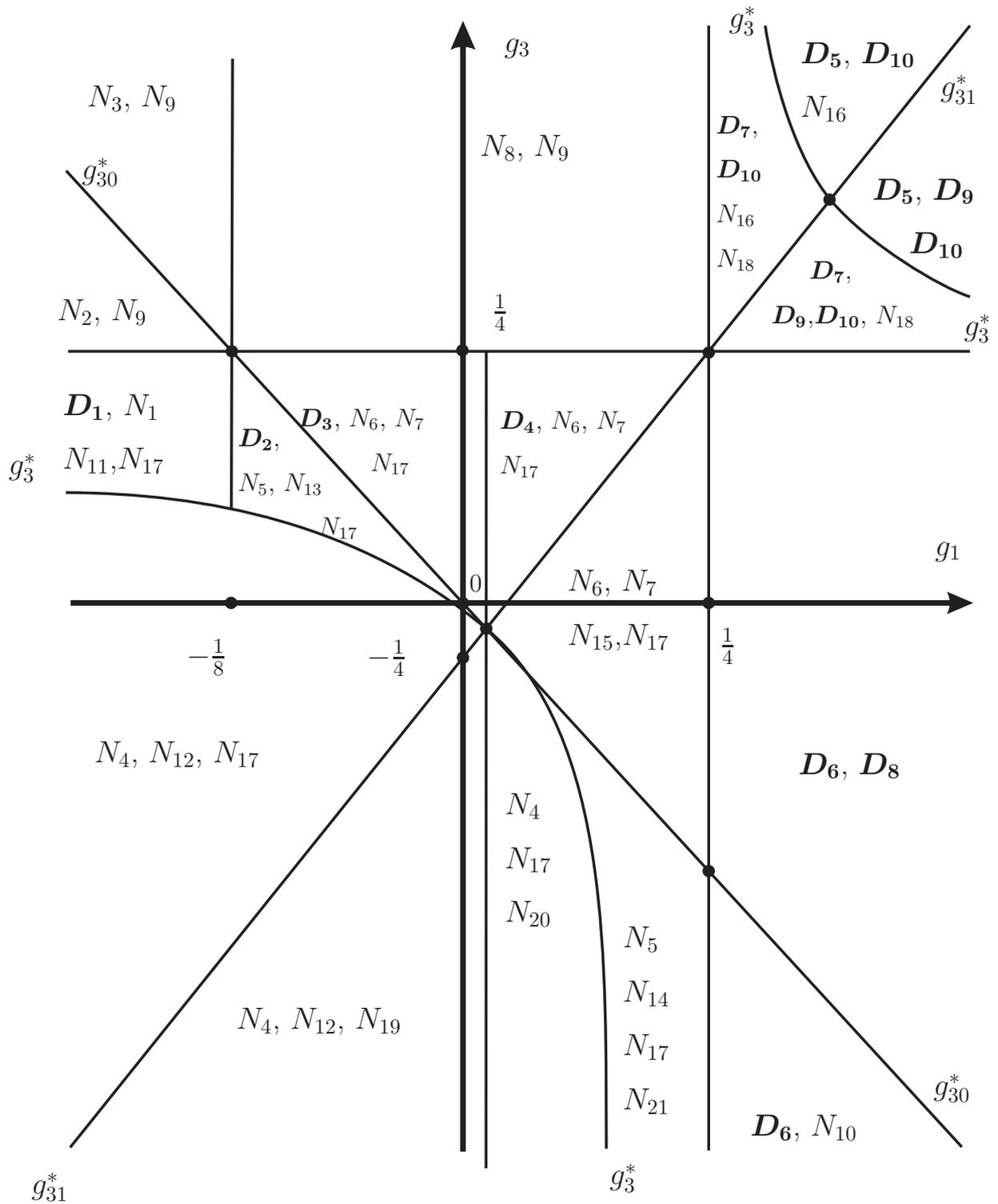


Рис. 22: Распределение точек D_i и N_j в плоскости параметров g_1, g_3 .

Отметим, что сделанные выводы верны для гамильтонианов обоих типов, так как свободный член q в характеристическом уравнении для них одинаков.

Распределение точек D_i ($i = 1 \dots 10$) и N_j ($j = 1 \dots 21$) в плоскости параметров g_1 и g_3 показано на рис. 22. Для каждой точки N_j ($j = 1 \dots 21$) условие $q > 0$ реализуется для значений параметров g_1, g_2, g_3 , а также для наборов (δ_1, δ_2) , указанных в таблице 3.4.

В найденных областях пространства параметров, где выполнено условие $q > 0$, требуются дополнительные исследования системы неравенств $p > 0$ и $\mathfrak{D} > 0$ для получения вывода об устойчивости. В четырехмерном пространстве параметров, в силу громоздкости выражения для p и \mathfrak{D} , это исследование весьма затруднительно и проведено не было. В случае точного резонанса [82] соответствующее исследование было проведено аналитически и графически в пространстве трех параметров.

3.5. Периодические движения

Пусть $\Psi_j = \Psi_{j0} = \arccos \delta_j$, $R_j = R_{j0}$ ($j = 1, 2$) — одно из рассмотренных положений равновесия системы (3.2.4). Величины R_{10} вычисляются по формуле (3.2.12), а величины R_{20} связаны с R_{10} соотношением (3.2.7). Гамильтоновым системам с модельными гамильтонианами (3.2.1), (3.2.2) указанному положению равновесия отвечает положение равновесия $\Phi_j = \Phi_{j0}$, $R_j = R_{j0}$ ($j = 1, 2$), определяемые выражениями (3.3.1).

Рассмотрим полные системы с гамильтонианами (3.1.3). В окрестности описанных положений равновесия приближенной (модельной) системы полную систему можно рассматривать как квазилинейную с возмущениями порядка ε , имеющими по τ период $T \sim \varepsilon^2$. При этом корни характеристических уравнений

линеаризованных уравнений возмущенного движения модельных систем имеют порядок единицы, а частоты возмущений — порядок ε^{-2} . Таким образом, имеет место нерезонансный случай теории Пуанкаре в задаче о периодических решениях квазилинейных систем [35], и из каждого положения равновесия модельной системы рождается единственное, T -периодическое по τ , аналитическое по ε решение соответствующей полной системы с одним из гамильтонианов (3.1.3), имеющее вид

$$\Phi_j = \tilde{\Phi}_j(\tau) = \Phi_{j0} + O(\varepsilon), \quad R_j = \tilde{R}_j(\tau) = R_{j0} + O(\varepsilon) \quad (j = 1, 2).$$

Проводя в обратной последовательности замены переменных, описанные в разд. 2.1, 2.2 и 3.1, найдем отвечающее ему периодическое движение системы с исходным гамильтонианом (2.1.1), аналитическое по ε и имеющее по t период, равный 12π . Это движение имеет вид (константа ξ определена в (2.2.6))

$$\begin{aligned} q_j &= \varepsilon \sqrt{2\xi R_{j0}} \sin \varphi_j + O(\varepsilon^2), & p_j &= \varepsilon \sqrt{2\xi R_{j0}} \cos \varphi_j + O(\varepsilon^2) \quad (j = 1, 2), \\ \varphi_1 &= \lambda_1 t + \Phi_{10} - \varphi_1^*, & \varphi_2 &= \sigma \lambda_2 t + \Phi_{20} - \varphi_2^*. \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

В соотношениях (3.5.1) явно выписаны главные (порядка ε) части периодических движений, каждая из которых содержит только «свои» гармоники (синусы и косинусы) величин $\lambda_j t$. В то же время слагаемые $O(\varepsilon^2)$ в выражениях для q_j, p_j содержат, вообще говоря, любые гармоники величин $nt, n_1 \lambda_1 t, n_2 \lambda_2 t$ (n, n_1, n_2 — целые числа).

Неустойчивые положения равновесия модельных систем переходят в неустойчивые периодические движения полных систем. Положения равновесия, рассмотренные для значений параметров из областей выполнения достаточных или только необходимых условий устойчивости, переходят в периодические движения полных систем, устойчивые в линейном приближении. Эти утверждения

следуют из свойства непрерывности по ε характеристических показателей соответствующих линеаризованных уравнений возмущенного движения.

Глава 4

О бифуркациях положений равновесия близкой к автономной гамильтоновой системы в случаях двойного комбинационного резонанса третьего порядка

4.1. Постановка задачи. Преобразование гамильтониана.

Модельная система

В этой главе будем продолжать исследование системы, описанной в главе 2, предполагая, что теперь в системе реализуются случаи кратного комбинационного резонанса третьего порядка. Пусть гамильтониан возмущенного движения приведен к виду (2.1.1). Перечислим возможные комбинации величин λ_1 и λ_2 , для которых реализуются эти резонансные случаи [110]:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = k_1 + \frac{1}{5}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{3}{5}, & \quad \lambda_1 = k_1 + \frac{3}{5}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{4}{5}, \\ \lambda_1 = k_1 + \frac{2}{5}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{1}{5}, & \quad \lambda_1 = k_1 + \frac{4}{5}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{2}{5}. \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Тогда комбинации $\lambda_1 - 2\lambda_2$ и $2\lambda_1 + \lambda_2$ являются целыми числами, и в системе реализуется двойной комбинационный резонанс третьего порядка. В этих случаях целыми являются также величины $\lambda_1 + 3\lambda_2$ и $3\lambda_1 - \lambda_2$, что означает наличие двойного комбинационного резонанса четвертого порядка.

В данной главе будем считать, что реализуется один из случаев (4.1.1) и при этом справедливо соотношение $\lambda_1 - 2\lambda_2 = 2\lambda_1 + \lambda_2 = \ell$ (где ℓ — целое число). Тогда для резонансных соотношений четвертого порядка имеем $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$,

$3\lambda_1 - \lambda_2 = 2\ell$. Первый из этих резонансов проявляется уже в слагаемых автономной ($\varepsilon = 0$) части гамильтониана возмущенного движения. Будем считать, что слагаемые, соответствующие резонансам третьего порядка, впервые проявляются в гамильтониане в членах порядка ε^ℓ , а соответствующие второму случаю резонанса четвертого порядка — в членах порядка $\varepsilon^{2\ell}$.

Проводя серию канонических преобразований, аналогичных описанным в главе 2, нормализуем слагаемые третьей и четвертой степеней относительно возмущений и, вводя симплектические полярные координаты по формуле (2.2.1), приведем гамильтониан к виду

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \lambda_1 r_1 + \sigma \lambda_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + \\ & + d r_1^{1/2} r_2^{3/2} \cos [\varphi_1 + 3\sigma \varphi_2 - (\lambda_1 + 3\lambda_2) t + \varphi_*] + \varepsilon O_2 + O_{5/2} + \\ & + \varepsilon^\ell a r_1^{1/2} r_2 \cos [\varphi_1 - 2\sigma \varphi_2 - (\lambda_1 - 2\lambda_2) t + \varphi_1^* - 2\sigma \varphi_2^*] + \\ & + \varepsilon^\ell b r_1 r_2^{1/2} \cos [2\varphi_1 + \sigma \varphi_2 - (2\lambda_1 + \lambda_2) t + 2\varphi_1^* + \sigma \varphi_2^*] + O(\varepsilon^{\ell+1}). \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Здесь c_{ij} , d , a , b , φ_j^* , φ_* — константы, O_2 и $O_{5/2}$ — совокупности слагаемых соответственно четвертой и не менее пятой степени относительно r_j ($j = 1, 2$), имеющие по угловым координатам φ_j период 2π .

Перейдем в ε^ℓ -окрестность начала координат, полагая $r_j = \varepsilon^{2\ell} R_j$, $\varphi_j = \Phi_j$ ($j = 1, 2$). Осуществим затем унивалентную каноническую замену переменных $\Phi_j, R_j \rightarrow \tilde{\Phi}_j, \tilde{R}_j$ ($j = 1, 2$) по формулам (2.2.4).

При этом, как и ранее, линейная по R_j ($j = 1, 2$) часть гамильтониана уничтожится, а в резонансных в слагаемых третьего и четвертого порядков по $R_j^{1/2}$ исчезает время. Гамильтониан (4.1.2) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \varepsilon^{2\ell} \left[a \tilde{R}_1^{1/2} \tilde{R}_2 \cos \left(\tilde{\Phi}_1 - 2\sigma \tilde{\Phi}_2 \right) + \right. \\ & + b \tilde{R}_1 \tilde{R}_2^{1/2} \cos \left(2\tilde{\Phi}_1 + \sigma \tilde{\Phi}_2 \right) + c_{20} \tilde{R}_1^2 + c_{11} \tilde{R}_1 \tilde{R}_2 + c_{02} \tilde{R}_2^2 + \\ & \left. + d \tilde{R}_1^{1/2} \tilde{R}_2^{3/2} \cos \left(\tilde{\Phi}_1 + 3\sigma \tilde{\Phi}_2 + \tilde{\varphi}_* \right) \right] + O(\varepsilon^{2\ell+1}). \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Слагаемое $O(\varepsilon^{2\ell+1})$ в (4.1.3) аналитично по переменным $\tilde{\Phi}_j$, \tilde{R}_j и t , 2π -периодично по $\tilde{\Phi}_j$ и 10π -периодично по t . Без ограничения общности коэффициенты c_{11} , a и b в (4.1.3) можно считать положительными [82].

Сделаем еще одну каноническую замену переменных (2.2.6) и введем новую независимую переменную τ по формуле $\tau = (\varepsilon^{2\ell} b^2 / c_{11}) t$. Преобразованный гамильтониан принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} = & \alpha \hat{R}_1^{1/2} \hat{R}_2 \cos(\hat{\Phi}_1 - 2\sigma \hat{\Phi}_2) + \hat{R}_1 \hat{R}_2^{1/2} \cos(2\hat{\Phi}_1 + \sigma \hat{\Phi}_2) + \\ & + \gamma_{20} \hat{R}_1^2 + \hat{R}_1 \hat{R}_2 + \gamma_{02} \hat{R}_2^2 + \delta \hat{R}_1^{1/2} \hat{R}_2^{3/2} \cos(\hat{\Phi}_1 + 3\sigma \hat{\Phi}_2 + \tilde{\varphi}_*) + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad \gamma_{20} = \frac{c_{20}}{c_{11}}, \quad \gamma_{02} = \frac{c_{02}}{c_{11}}, \quad \delta = \frac{d}{c_{11}}.$$

Гамильтониан (4.1.4) является характерным для рассматриваемого здесь резонансного случая. Главная (модельная) его часть, получаемая из (4.1.4) путем отбрасывания последнего слагаемого, зависит от пяти параметров α , γ_{20} , γ_{02} , δ , $\tilde{\varphi}_*$.

Общий анализ этой пятипараметрической задачи затруднителен. Такой анализ лучше проводить, рассматривая конкретную задачу с заданными коэффициентами, что будет проделано в следующей главе при рассмотрении одной резонансной спутниковой задачи.

Однако, в качестве первого, предварительного рассмотрения, можно исследовать модельную систему, в которой предполагаем малым (порядка ε) коэффициент δ в слагаемом, отвечающим резонансу четвертого порядка. Отбрасывая это слагаемое вместе с $O(\varepsilon)$ и полагая в полученном гамильтониане $\sigma = 1$ и $\sigma = -1$, получим два гамильтониана, переходящие один в другой, если поменять местами индексы 1 и 2. Поэтому будем рассматривать один модельный

гамильтониан, имеющий вид (знаки $\hat{}$ над переменными опускаем)

$$\Gamma = \alpha R_1^{1/2} R_2 \cos(\Phi_1 - 2\Phi_2) + R_1 R_2^{1/2} \cos(2\Phi_1 + \Phi_2) + \gamma_{20} R_1^2 + R_1 R_2 + \gamma_{02} R_2^2. \quad (4.1.5)$$

Гамильтониан (4.1.5) отвечает наличию в системе двух комбинационных (сильного и слабого) резонансов третьего порядка. Он зависит от трех параметров α , γ_{20} и γ_{02} . Резонансный коэффициент α в (4.1.5) считаем положительным, коэффициенты γ_{20} и γ_{02} в членах четвертой степени относительно $R_j^{1/2}$ могут принимать значения любого знака.

Исследуем влияние двойного комбинационного резонанса третьего порядка на существование и бифуркации положений равновесия модельной системы с гамильтонианом (4.1.5).

4.2. Положения равновесия модельной системы и их бифуркации

Запишем уравнения движения модельной системы

$$\frac{d\Phi_j}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial R_j}, \quad \frac{dR_j}{d\tau} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \Phi_j}, \quad (j = 1, 2)$$

и, введя обозначения $\Psi_1 = \Phi_1 - 2\Phi_2$, $\Psi_2 = 2\Phi_1 + \Phi_2$, представим их в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_1}{d\tau} &= \frac{\alpha R_2}{2 R_1^{1/2}} \cos \Psi_1 + R_2^{1/2} \cos \Psi_2 + 2\gamma_{20} R_1 + R_2, \\ \frac{d\Phi_2}{d\tau} &= \alpha R_1^{1/2} \cos \Psi_1 + \frac{1 R_1}{2 R_2^{1/2}} \cos \Psi_2 + R_1 + 2\gamma_{02} R_2, \\ \frac{dR_1}{d\tau} &= R_1^{1/2} R_2^{1/2} \left(\alpha R_2^{1/2} \sin \Psi_1 + 2R_1^{1/2} \sin \Psi_2 \right), \end{aligned}$$

$$\frac{dR_2}{d\tau} = R_1^{1/2} R_2^{1/2} \left(-2\alpha R_2^{1/2} \sin \Psi_1 + R_1^{1/2} \sin \Psi_2 \right).$$

Приравняв к нулю правые части, получим систему уравнений, определяющих положения равновесия модельной системы. Из анализа этой системы следует, что, кроме тривиального, она может иметь решения, для которых $\sin \Psi_1 = 0$ и $\sin \Psi_2 = 0$. Положим в первых двух уравнениях $\cos \Psi_j = \delta_j$ ($\delta_j = 1$ или -1 , ($j = 1, 2$)) и, вводя обозначения $u = R_1^{1/2}$, $v = R_2^{1/2}$ ($u \geq 0, v \geq 0$), приведем их к виду

$$\begin{aligned} f_1(u, v) &= \left(u + \frac{\alpha\delta_1}{2} \right) v^2 + \delta_2 uv + 2\gamma_{20} u^3 = 0, \\ f_2(u, v) &= \left(v + \frac{\delta_2}{2} \right) u^2 + \alpha\delta_1 uv + 2\gamma_{02} v^3 = 0. \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Уравнения (4.2.1) являются квадратными относительно v и u . Найдем, при каких условиях они имеют вещественные положительные корни. Рассмотрим сначала первое уравнение (4.2.1). Дискриминант этого уравнения

$$D_1 = u^2 \left[1 - 8\gamma_{20} u \left(u + \frac{\alpha\delta_1}{2} \right) \right] = u^2 (1 - 4\alpha\delta_1\gamma_{20}u - 8\gamma_{20}u^2)$$

содержит квадратный трехчлен относительно u , имеющий, в свою очередь, дискриминант $16d_1$, где $d_1 = \gamma_{20} (\alpha^2\gamma_{20} + 2)$.

Используя формулы Виета для корней квадратного уравнения, найдем, что при выполнении условия

$$\gamma_{20} \left(u + \frac{\alpha\delta_1}{2} \right) < 0 \tag{4.2.2}$$

исследуемое уравнение имеет один положительный вещественный корень. Если справедливы неравенства

$$\gamma_{20} \left(u + \frac{\alpha\delta_1}{2} \right) > 0, \quad \delta_2 \left(u + \frac{\alpha\delta_1}{2} \right) < 0, \quad D_1 > 0, \quad (4.2.3)$$

то это уравнение имеет два положительных вещественных корня. В остальных случаях искомым корней нет.

Неравенство (4.2.2) удовлетворяется в следующих случаях:

1. $\gamma_{20} < 0$, $\delta_1 = 1$, u любое положительное;
2. $\gamma_{20} < 0$, $\delta_1 = -1$, $u > \alpha/2$;
3. $\gamma_{20} > 0$, $\delta_1 = -1$, $0 < u < \alpha/2$.

Во всех этих случаях параметр α может принимать произвольные (положительные) значения.

Рассмотрим систему (4.2.3). Она эквивалентна совокупности двух систем:

$$\gamma_{20} > 0, \quad \delta_2 = -1, \quad u + \frac{\alpha\delta_1}{2} > 0, \quad D_1 > 0, \quad (4.2.4)$$

$$\gamma_{20} < 0, \quad \delta_2 = 1, \quad u + \frac{\alpha\delta_1}{2} < 0, \quad D_1 > 0. \quad (4.2.5)$$

При $\gamma_{20} > 0$ (случай (4.2.4)) имеем $d_1 > 0$. В этом случае квадратичный трехчлен в D_1 имеет два вещественных корня разных знаков ($u_1 < 0 < u_2$) и отрицательный старший коэффициент. При $\delta_1 = 1$ второе неравенство в (4.2.3) всегда выполняется, и тогда $u \in (0, u_2)$. При $\delta_1 = -1$ должны одновременно выполняться условия $u > \alpha/2$ и $D_1 > 0$, что приводит к интервалу $u \in (\alpha/2, u_2)$.

В случае (4.2.5) второе неравенство удовлетворяется, если $\delta_1 = 1$ и $u < \alpha/2$. Далее, если $\alpha^2 < 2/|\gamma_{20}|$, то $d_1 < 0$ и неравенство $D_1 > 0$ удовлетворяется при всех u . Если же $\alpha^2 > 2/|\gamma_{20}|$, то $d_1 > 0$, и квадратный трехчлен

в D_1 (с положительным старшим коэффициентом) имеет два положительных вещественных корня ($0 < u_1 < u_2$). Величина $u = \alpha/2$ лежит в области положительности квадратного трехчлена в D_1 , правее его точки минимума $u = \alpha/4$. Поэтому система (4.2.3) удовлетворяется при $u \in (0, u_1) \cup (u_2, \alpha/2)$.

Объединяя результаты решения систем (4.2.2) и (4.2.3), найдем следующие четыре варианта, для которых первое уравнение (4.2.1) имеет два положительных вещественных корня

1. $\gamma_{20} > 0, \quad \delta_1 = 1, \quad \delta_2 = 1, \quad u \in (0, u_2);$
2. $\gamma_{20} > 0, \quad \delta_1 = -1, \quad \delta_2 = -1, \quad u \in (\alpha/2, u_2);$
3. $\gamma_{20} < 0, \quad \delta_1 = -1, \quad \delta_2 = 1, \quad \alpha^2 < \alpha_1^2, \quad u \in (0, \alpha/2);$
4. $\gamma_{20} < 0, \quad \delta_1 = -1, \quad \delta_2 = 1, \quad \alpha^2 > \alpha_1^2, \quad u \in (0, u_1) \cup (u_2, \alpha/2).$

Здесь введены обозначения $\alpha_1 = \sqrt{2/|\gamma_{20}|}$, $u_{1,2} = (-\alpha\delta_1\gamma_{20} \pm \sqrt{d_1}) / (4\gamma_{20})$ ($u_1 < u_2$).

Аналогичным образом может быть проанализировано второе уравнение (4.2.1). Это уравнение имеет один положительный вещественный корень в случаях

1. $\gamma_{02} > 0, \quad \delta_2 = -1, \quad v \in (0, 1/2);$
2. $\gamma_{02} < 0, \quad \delta_2 = 1, \quad v \text{ любое положительное};$
3. $\gamma_{02} < 0, \quad \delta_2 = -1, \quad v > 1/2,$

и два положительных вещественных корня в случаях

1. $\gamma_{02} > 0, \quad \delta_1 = -1, \quad \delta_2 = 1, \quad v \in (0, v_2);$
2. $\gamma_{02} > 0, \quad \delta_1 = -1, \quad \delta_2 = -1, \quad v \in (1/2, v_2);$
3. $\gamma_{02} < 0, \quad \delta_1 = 1, \quad \delta_2 = -1, \quad \alpha^2 > \alpha_2^2, \quad v \in (0, 1/2);$

$$4. \gamma_{02} < 0, \quad \delta_1 = 1, \quad \delta_2 = -1, \quad \alpha^2 < \alpha_2^2, \quad v \in (0, v_1) \cup (v_2, 1/2).$$

Здесь $\alpha_2 = \sqrt{|\gamma_{02}|/2}$, $v_{1,2} = (-\delta_2\gamma_{02} \pm \sqrt{d_2}) / (4\gamma_{02})$ ($v_1 < v_2$), $d_2 = \gamma_{02}(\gamma_{02} + 2\alpha^2)$.

Полученные результаты удобно представить графически в плоскости переменных u, v ($u \geq 0, v \geq 0$). Заметим, что при малых u, v уравнение $f_1(u, v) = 0$ приближенно представляется в виде $f_1 \approx v(\delta_2 u + \alpha\delta_1/2)$. Поэтому из начала координат выходит либо одна ветвь кривой $f_1(u, v) = 0$ с горизонтальной касательной, либо (при условии $\delta_1\delta_2 < 0$) одна ветвь, определяемая уравнением $v = (2/\alpha)u + O(u^2)$, либо обе ветви. Для больших значений u и v получаем $f_1 \approx u(2\gamma_{20}u^2 + v^2) = 0$, следовательно, при условии $\gamma_{20} < 0$, имеется наклонная асимптота $v = \sqrt{2|\gamma_{20}|}u$. Кроме того, в случае $\delta_1 = -1$ у кривой $f_1(u, v) = 0$ есть вертикальная асимптота $u = \alpha/2$.

Различные варианты кривой $f_1(u, v) = 0$ представлены на рис. 23(а-з). Рис. 23 а-в соответствуют случаю $\gamma_{20} > 0$ и $\delta_1 = -\delta_2 = 1$ (а), $\delta_1 = -\delta_2 = -1$ (б), $\delta_1 = \delta_2 = -1$ (в); рис. 23 г-з отвечают случаю $\gamma_{20} < 0$ и $\delta_1 = \delta_2 = 1$ (г), $\delta_1 = -\delta_2 = 1$ (д), $\delta_1 = -\delta_2 = -1, \alpha < \alpha_1$ (е), $\delta_1 = -\delta_2 = -1, \alpha > \alpha_1$ (ж), $\delta_1 = \delta_2 = -1$ (з).

Аналогично, из начала координат выходит либо одна ветвь кривой $f_2(u, v) = 0$ с вертикальной касательной, либо (при $\delta_1\delta_2 < 0$) одна ветвь $v = u/(2\alpha) + O(u^2)$, либо обе ветви. При $\gamma_{20} < 0$ кривая $f_2(u, v) = 0$ имеет наклонную асимптоту $v = u/\sqrt{2|\gamma_{02}|}$, а при $\delta_2 = -1$ — горизонтальную асимптоту $v = \alpha/2$. Качественный вид кривой $f_2(u, v) = 0$ такой же, как и на рис. 23, только оси u и v нужно поменять местами.

Искомым положениям равновесия отвечают точки пересечения кривых $f_1(u, v) = 0$ и $f_2(u, v) = 0$. Число этих точек меняется при переходе через

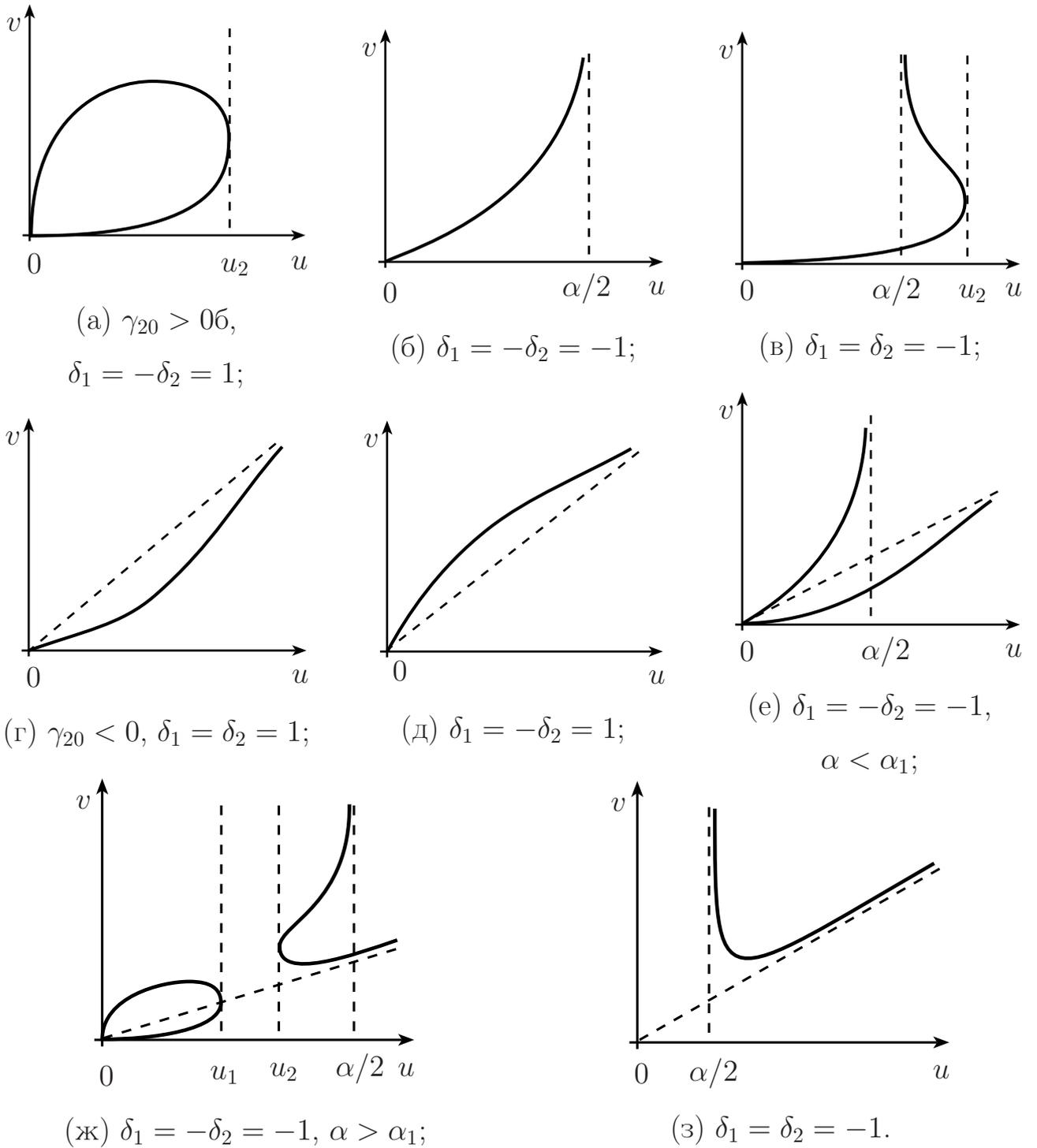


Рис. 23: Вид кривой $f_1(u, v) = 0$ для различных значений параметров.

такие значения параметров α , γ_{20} , γ_{02} , для которых рассматриваемые кривые имеют общие касательные, при этом $f_3(u, v) = f'_{1u}f'_{2u} - f'_{1v}f'_{2v}$. Исключая из

системы уравнений $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ величины u и v , найдем уравнение, связывающее бифуркационные значения параметров:

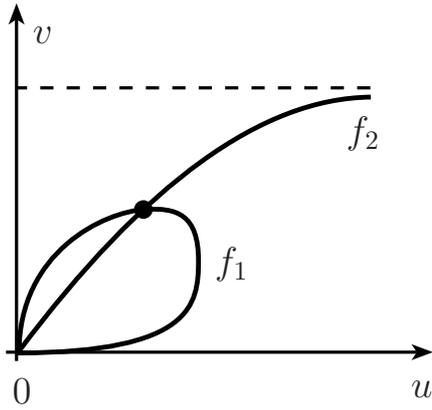
$$f = 128(32\kappa + 1)^2 s^2 + 2(154880\kappa^2 + 1544\kappa + 59) s + 8112\kappa^3 + 174296\kappa^2 - 4537\kappa - 4.$$

Здесь $\kappa = \gamma_{20}\gamma_{02}$, $s = (\gamma_{02} + \alpha^4\gamma_{20})/\alpha^2$.

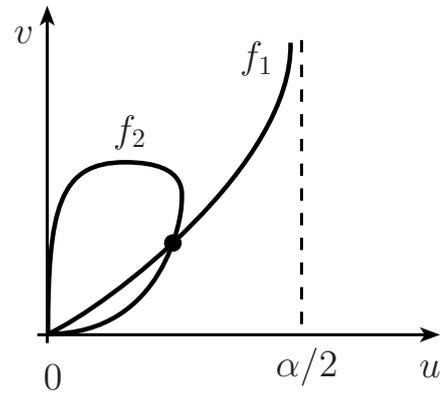
При $\kappa < 11/32$ ($\kappa \neq -1/32$) квадратное относительно s уравнение $f = 0$ имеет два вещественных корня, обозначим их через s_1 и s_2 ($s_1 > s_2$). Соотношения $s_j = (\gamma_{02} + \alpha^4\gamma_{20})/\alpha^2$ ($j = 1, 2$) определяют биквадратные уравнения относительно α . Обозначим их действительные положительные решения (в областях существования) через $\alpha_{j\pm}$ ($j = 1, 2$). Взаимное расположение величин $\alpha_{j\pm}$ и введенных ранее величин α_1 и α_2 меняется в точках $\kappa = \kappa'$ и κ'' , где $\kappa' = (-5291 - 435\sqrt{145})/4096$, $\kappa'' = (-5291 + 435\sqrt{145})/4096$ ($\kappa'' > \kappa'$). При $\kappa = -1/32$ уравнение $f = 0$ имеет единственное решение $s = -7781/8192$, которому отвечает решение $\alpha = \alpha_0$, где $\alpha_{10}^2 = 0.0318337/\gamma_{20}$ ($\gamma_{20} > 0$) или $\alpha_{20}^2 = -0.9816628/\gamma_{20}$ ($\gamma_{20} < 0$).

На рис. 24-26 представлены различные варианты взаимного расположения кривых $f_1(u, v) = 0$ и $f_2(u, v) = 0$; изображены только случаи, для которых кривые имеют точки пересечения. В круглых скобках под рисунками приведены пары чисел (δ_1, δ_2) соответствующие рассматриваемому на рисунке случаю.

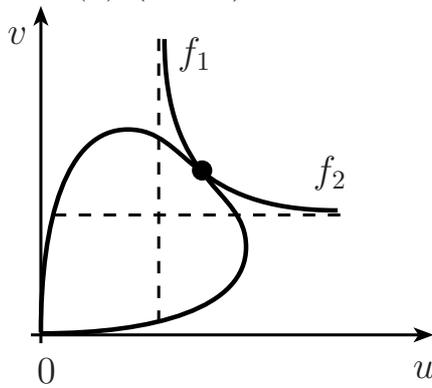
Рис. 24,а-г относится к случаю $\gamma_{20} > 0$, $\gamma_{02} > 0$. Для вариантов, показанных на рис. 24,а,б при всех $\kappa > 0$ и рис. 24,в при $\kappa > 1/484$, параметр α может принимать произвольные значения. Если $0 < \kappa < 1/484$ и $\delta_1 = \delta_2 = -1$, то при $0 < \alpha < \alpha_{1-}$ или при $\alpha > \alpha_{1+}$ вновь имеем рис. 24,в, а при $\alpha_{1-} < \alpha < \alpha_{1+}$ — рис. 24,г. В последнем случае модельная система имеет пять положений равновесия, в остальных случаях — три.



(а) $(1, -1)$, $\kappa > 0$;

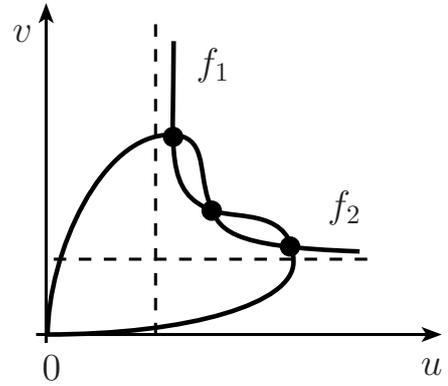


(б) $(-1, 1)$, $\kappa > 0$;



(в) $(-1, -1)$,

- 1) $\kappa > 1/484$;
- 2) $0 < \kappa < 1/484$, $0 < \alpha < \alpha_{1-}$;
- 3) $0 < \kappa < 1/484$, $\alpha > \alpha_{1+}$;



(г) $(-1, -1)$, $0 < \kappa < 1/484$,
 $\alpha_{1-} < \alpha < \alpha_{1+}$.

Рис. 24: Случай $\gamma_{20} > 0$, $\gamma_{02} > 0$.

При $\gamma_{20} > 0$, $\gamma_{02} < 0$ положения равновесия существуют в случаях $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = -1$ и $\delta_1 = \delta_2 = 1$. Возможные варианты взаимного расположения кривых $f_1(u, v) = 0$ и $f_2(u, v) = 0$ показаны на рис. 25,а-е. Если $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = -1$ и $\kappa'' < \kappa < 0$, то случаям $0 < \alpha < \alpha_2$, $\alpha_2 < \alpha < \alpha_{2+}$ и $\alpha > \alpha_{2+}$ отвечают рис. 25,а, 25,б и 25,в соответственно; при $\kappa' < \kappa < \kappa''$ в случаях $0 < \alpha < \alpha_{2+}$, $\alpha_{2+} < \alpha < \alpha_2$, $\alpha_2 < \alpha < \alpha_{1+}$ и $\alpha > \alpha_{1+}$ имеем рис. 25,г, 25,д, 25,б и 25,в; при $\kappa < \kappa'$ и $0 < \alpha < \alpha_{2+}$, $\alpha_{2+} < \alpha < \alpha_{1+}$, $\alpha_{1+} < \alpha < \alpha_2$ и $\alpha > \alpha_2$ имеем рис. 25,г,

25,д, 25,г и 25,в соответственно. Случаю $\kappa = -1/32$ отвечают рис. 25,б и 25,в при $0 < \alpha < \alpha_{10}$ и $\alpha > \alpha_{10}$ Вариант $\delta_1 = \delta_2 = -1$ относится только к случаю $\kappa'' < \kappa < 0$ и $0 < \alpha < \alpha_{1+}$ (рис. 25,е).

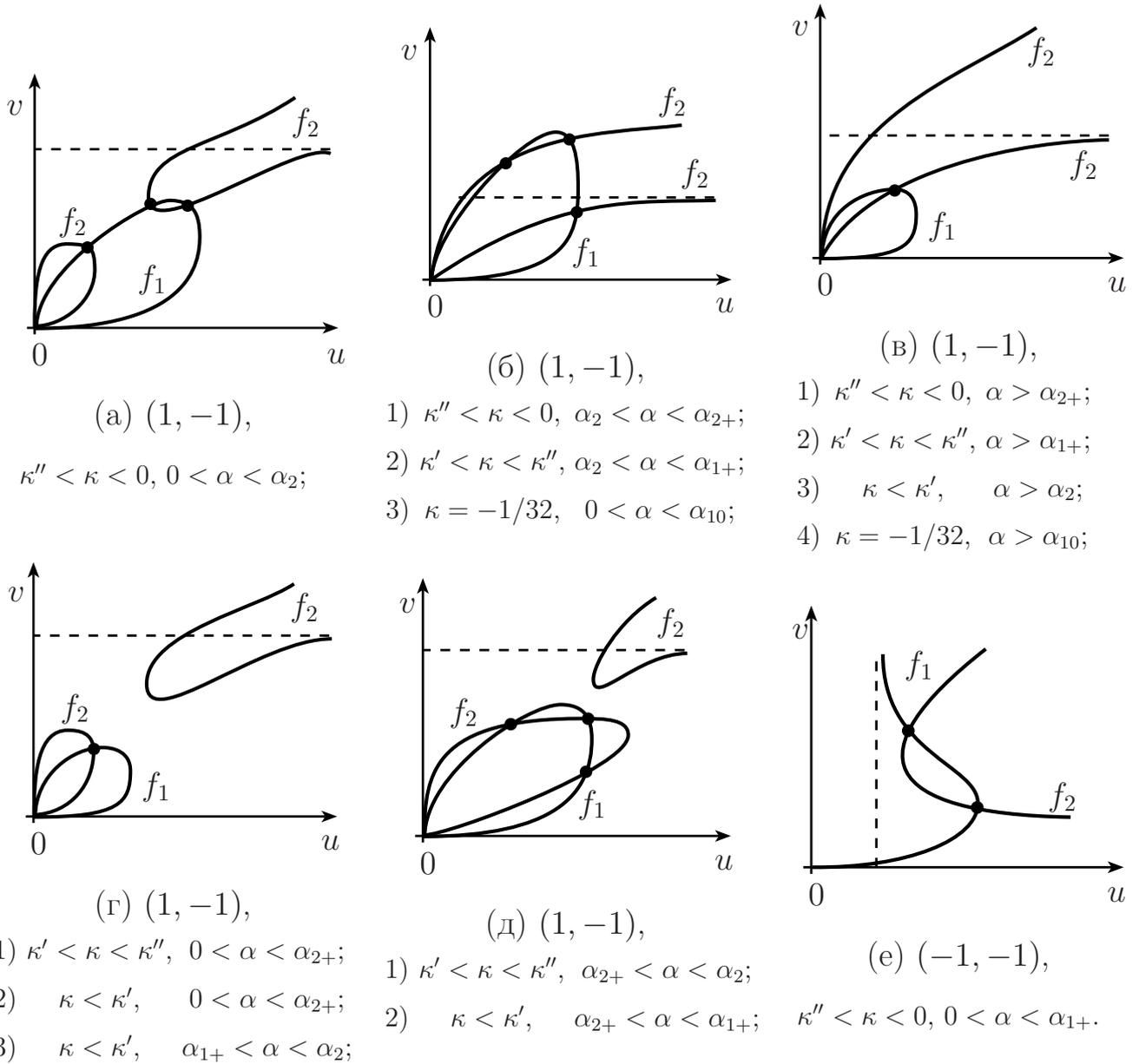


Рис. 25: Случай $\gamma_{20} > 0, \gamma_{02} < 0.$

Объединяя результаты, найдем, что в случае $\kappa < \kappa''$ при $\alpha < \alpha_{2+}$ или $\alpha > \alpha_{1+}$ модельная система имеет одно, а при $\alpha_{2+} < \alpha < \alpha_{1+}$ — три положения

равновесия (для $\delta_1 = 1, \delta_2 = -1$). Если $\kappa'' < \kappa < 0$, то при $0 < \alpha < \alpha_{2+}$ имеется пять положений равновесия (три для случая $\delta_1 = 1, \delta_2 = -1$ и два для $\delta_1 = \delta_2 = -1$), при $\alpha_{2+} < \alpha < \alpha_{1+}$ три положения равновесия (одно для $\delta_1 = 1, \delta_2 = -1$ и два для $\delta_1 = \delta_2 = -1$), а при $\alpha > \alpha_{1+}$ одно положение равновесия (для $\delta_1 = 1, \delta_2 = -1$). В случае $\kappa = -1/32$ и $\delta_1 = 1, \delta_2 = -1$ имеются три (при $0 < \alpha < \alpha_{10}$) или одно (при $\alpha > \alpha_{10}$) положения равновесия.

Совершенно аналогично рассматривается случай $\gamma_{20} < 0, \gamma_{02} > 0$. Не приводя соответствующие графические изображения, укажем, что в случае $\kappa < \kappa''$ при $\alpha < \alpha_{1-}$ или $\alpha > \alpha_{2-}$ модельная система имеет одно, а при $\alpha_{1-} < \alpha < \alpha_{2-}$ — три положения равновесия (для $\delta_1 = -1, \delta_2 = 1$). При $\kappa'' < \kappa < 0$ и $0 < \alpha < \alpha_{1-}, \alpha_{1-} < \alpha < \alpha_{2-}$ и $\alpha > \alpha_{2-}$ имеются соответственно одно, три и пять положений равновесия, а при $\kappa = -1/32$ одно ($0 < \alpha < \alpha_{20}$) или три ($\alpha > \alpha_{20}$).

В случае $\gamma_{20} < 0, \gamma_{02} < 0$ возможен один из восьми вариантов взаимного расположения кривых $f_1(u, v) = 0$ и $f_2(u, v) = 0$ (рис. 26,а-з). Анализируя результаты, получаем, что если выполнено условие $\kappa > 1/4$, то на интервале $\alpha < \alpha_2$ в модельной системе имеются четыре положения равновесия, а на интервале $\alpha > \alpha_2$ — три. Если же $0 < \kappa < 1/4$, то при условиях $\alpha < \alpha_1, \alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ и $\alpha > \alpha_2$ имеются соответственно два, одно или три положения равновесия.

Следует отметить, что других вариантов пересечения данных кривых нет.

Таким образом в данной главе получено, что в случае, когда резонанс четвертого порядка не учитывается, в зависимости от значений параметров в модельной системе может быть от одного до пяти положений равновесия. В полной неавтономной системе из них рождаются резонансные 10π -периодические движения по исходному времени t .

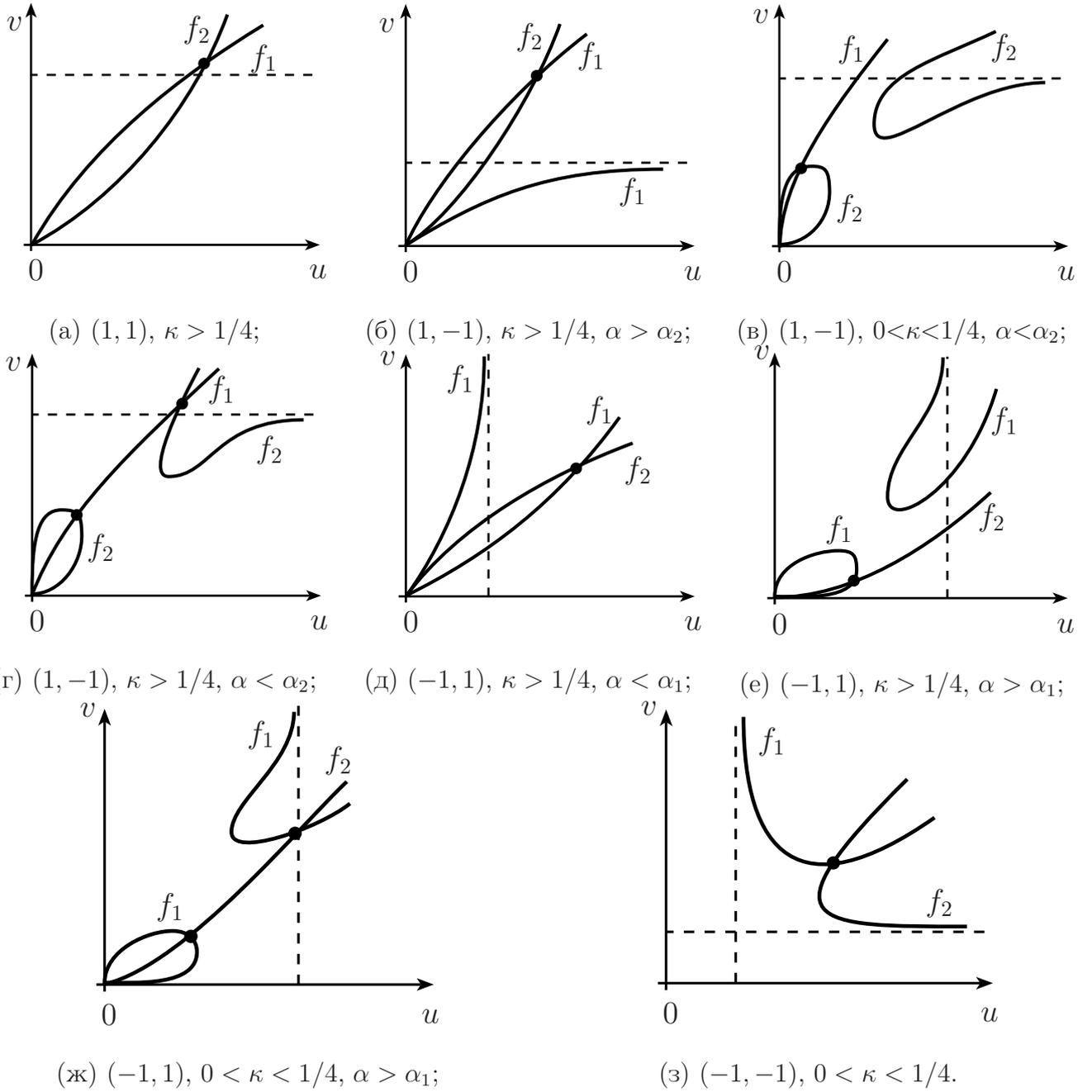


Рис. 26: Случай $\gamma_{20} < 0, \gamma_{02} < 0.$

Глава 5

О периодических движениях симметричного спутника на слабоэллиптической орбите в одном случае кратного комбинационного резонанса третьего порядка

5.1. Постановка задачи

Рассмотрим движение твердого тела (спутника) относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле. Предполагаем, что центр масс спутника движется по слабоэллиптической орбите с эксцентриситетом e ($0 < e \ll 1$) и движение тела относительно центра масс не влияет на движение самого центра масс [7, 8].

Введем орбитальную систему координат $OXYZ$, оси OX , OY и OZ которой направлены соответственно по трансверсали к орбите центра масс O спутника, по нормали к плоскости орбиты и вдоль радиус-вектора центра масс относительно притягивающего центра, и жестко связанную с телом систему координат $Oxyz$ с осями, совпадающими с главными центральными осями инерции спутника. Ориентацию связанной системы в $OXYZ$ зададим при помощи углов Эйлера ψ , θ , φ . Центральный эллипсоид инерции тела считаем эллипсоидом вращения, экваториальный и осевой моменты инерции тела обозначим через A и C .

В рассматриваемой задаче координата φ циклическая, и имеется первый интеграл $r = r_0 = \text{const}$, где r — проекция вектора угловой скорости тела в

системе координат $OXYZ$ на ось динамической симметрии.

Запишем уравнения движения спутника в форме канонических уравнений Гамильтона. Введем канонически сопряженные с ψ и θ обобщенные импульсы p_ψ и p_θ , обезразмеренные при помощи множителя $A\omega_0$, где ω_0 — среднее движение центра масс O по орбите. Введем также безразмерные параметры $\alpha = C/A$ ($0 \leq \alpha \leq 2$) и $\beta = r_0/\omega_0$. За независимую переменную примем истинную аномалию ν .

Функция Гамильтона приведенной системы с двумя степенями свободы, описывающей движение динамически симметричного спутника относительно центра масс на эллиптической орбите произвольного эксцентриситета, имеет вид [39]

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{p_\psi^2}{2(1+e\cos\nu)^2\sin^2\theta} + \frac{p_\theta^2}{2(1+e\cos\nu)^2} - p_\psi\operatorname{ctg}\theta\cos\psi - \\
 & - \frac{\alpha\beta(1-e^2)^{3/2}p_\psi\cos\theta}{(1+e\cos\nu)^2\sin^2\theta} - p_\theta\sin\psi + \frac{\alpha\beta(1-e^2)^{3/2}\cos\psi}{\sin\theta} + \\
 & + \frac{\alpha^2\beta^2(1-e^2)^3\operatorname{ctg}^2\theta}{2(1+e\cos\nu)^2} + \frac{3}{2}(\alpha-1)(1+e\cos\nu)\cos^2\theta.
 \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

5.1.1. Случай круговой орбиты

В предельном случае $e = 0$, соответствующем круговой орбите центра масс, система с гамильтонианом (5.1.1) имеет два частных решения (положения равновесия) [8]. Первое из них задается соотношениями

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \psi_0 \quad (\cos\psi_0 = -\alpha\beta), \quad p_{\theta_0} = \sin\psi_0, \quad p_{\psi_0} = 0 \tag{5.1.2}$$

и соответствует такому движению тела (называемому гиперболоидальной прецессией), для которого ось его динамической симметрии расположена перпендикулярно радиус-вектору центра масс и составляет угол $\pi/2 - \psi_0$ с нормалью

к плоскости орбиты.

Область выполнения достаточных и одновременно необходимых условий устойчивости гиперболоидальной прецессии задается [8] неравенствами $1 < \alpha < 2$, $0 < \psi_0 < \pi/2$, а частоты ω_1, ω_2 ($\omega_1 \geq \omega_2$) малых колебаний линеаризованных уравнений возмущенного движения являются корнями уравнения

$$\omega^4 - (3\alpha - 2)\omega^2 + 3(\alpha - 1)\sin^2 \psi_0 = 0. \quad (5.1.3)$$

Второе частное решение определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 \quad \left(\sin \theta_0 = \frac{\alpha\beta}{3\alpha - 4} \right), & \psi_0 &= 0, \\ p_{\theta_0} &= 0, & p_{\psi_0} &= 3(\alpha - 1)\sin \theta_0 \cos \theta_0 \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

и отвечает конической прецессии тела, для которой ось симметрии спутника перпендикулярна вектору скорости центра масс и составляет с радиус-вектором угол θ_0 .

Неравенство $\alpha < 1$ является необходимым и достаточным условием устойчивости данного движения. В области, задаваемой неравенствами

$$\frac{4}{3} \leq \alpha \leq 2, \quad \sin^2 \theta \geq \frac{18\alpha^2 - 27\alpha + 8 + 2(3\alpha - 2)\sqrt{(3\alpha - 1)(3\alpha - 4)}}{27\alpha^2(\alpha - 1)},$$

выполняются только необходимые (не являющиеся достаточными) условия устойчивости. Соответствующее конической прецессии уравнение частот малых линейных колебаний имеет вид

$$\omega^4 - [1 + 6(1 - \alpha) - 9\alpha(1 - \alpha)\sin^2 \theta_0]\omega^2 + 3\cos^2 \theta_0(4 - 3\alpha)(1 - \alpha) = 0. \quad (5.1.5)$$

Из уравнения (5.1.3) следует, что для значений параметров

$$\alpha = \frac{6}{5}, \quad \psi_0 = \arcsin \frac{4\sqrt{15}}{25} \quad \left(\beta = -\frac{\sqrt{385}}{30} \right) \quad (5.1.6)$$

частоты малых линейных колебаний системы таковы: $\omega_1 = 6/5$, $\omega_2 = 2/5$. Эти значения частот связаны двумя соотношениями резонанса третьего порядка и соотношением резонанса четвертого порядка:

$$\omega_1 + 2\omega_2 = 2, \quad 2\omega_1 - \omega_2 = 2, \quad \omega_1 - 3\omega_2 = 0. \quad (5.1.7)$$

Для уравнения (5.1.5) решения $\omega_1 = 6/5$ и $\omega_2 = 2/5$ реализуются в точках

$$\begin{aligned} 1) \quad & \alpha = 0.557571, \quad \theta_0 = 1.294174 \quad \text{и} \\ 2) \quad & \alpha = 1.459060, \quad \theta_0 = 0.841967 \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

из областей выполнения достаточных и только необходимых условий устойчивости соответственно.

5.1.2. Случай слабоэллиптической орбиты

В случае слабоэллиптической орбиты из рассматриваемых положений равновесия (5.1.2) и (5.1.4) рождаются 2π -периодические по ν , аналитические по e движения спутника, представляемые в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(\nu) &= \theta_0 + \tilde{q}_1(\nu), & \tilde{\psi}(\nu) &= \psi_0 + \tilde{q}_2(\nu), \\ \tilde{p}_\theta(\nu) &= p_{\theta_0} + \tilde{p}_1(\nu), & \tilde{p}_\psi(\nu) &= p_{\psi_0} + \tilde{p}_2(\nu). \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

Эти решения могут быть построены при помощи метода малого параметра Пуанкаре [35]. Приведем их явный вид с точностью до слагаемых порядка e^2 включительно для наборов параметров (5.1.6) и (5.1.8), соответствующих точным резонансам на круговой орбите.

В случае гиперболоидальной прецессии для точки (5.1.6) имеем

$$\tilde{q}_j(\nu) = \hat{q}_j(\nu) + O(e^3), \quad \tilde{p}_j(\nu) = \hat{p}_j(\nu) + O(e^3) \quad (j = 1, 2),$$

$$\begin{aligned}
\hat{q}_1(\nu) &= \frac{10575\sqrt{15}}{39424} e^2 \sin 2\nu, \\
\hat{q}_2(\nu) &= -\frac{8\sqrt{231}}{77} e \cos \nu - \frac{\sqrt{231}}{77} e^2 \left(4 - \frac{3673}{1024} \cos 2\nu\right), \\
\hat{p}_1(\nu) &= \frac{37\sqrt{15}}{77} e^2 \left(-\frac{26}{25} + \frac{725}{1024} \cos 2\nu\right), \\
\hat{p}_2(\nu) &= \frac{\sqrt{231}}{77} \left(8e \sin \nu + \frac{423}{512} e^2 \sin 2\nu\right).
\end{aligned} \tag{5.1.10}$$

В случае конической прецессии для первой точки из (5.1.8) имеем решение (5.1.9), в котором полагаем

$$\begin{aligned}
\hat{q}_1(\nu) &= 0.308789 e \cos \nu - e^2 (11.442735 - 1.543846 \cos 2\nu), \\
\hat{q}_2(\nu) &= 2.043667 e \sin \nu - 2.555583 e^2 \sin 2\nu, \\
\hat{p}_1(\nu) &= 1.734878 e \sin \nu - 3.908397 e^2 \sin 2\nu, \\
\hat{p}_2(\nu) &= 2.818998 e \cos \nu - e^2 (12.350424 + 0.528982 \cos 2\nu),
\end{aligned} \tag{5.1.11}$$

а для второй точки (5.1.8) — решение (5.1.9) при

$$\begin{aligned}
\hat{q}_1(\nu) &= 4.400529 e \cos \nu + e^2 (78.703197 + 8.137707 \cos 2\nu), \\
\hat{q}_2(\nu) &= 3.649377 e \sin \nu + 5.330592 e^2 \sin 2\nu, \\
\hat{p}_1(\nu) &= -0.751152 e \sin \nu - 11.695975 e^2 \sin 2\nu, \\
\hat{p}_2(\nu) &= 1.603907 e \cos \nu + e^2 (-28.105787 + 4.192797 \cos 2\nu).
\end{aligned} \tag{5.1.12}$$

Характеристические показатели $\pm i\lambda_j$ ($j = 1, 2$) линеаризованных уравнений возмущенного движения, соответствующие выписанным решениям, таковы, что $\lambda_1 = 6/5 + O(e^2)$, $\lambda_2 = 2/5 + O(e^2)$, и для них точные резонансные соотношения, аналогичные (5.1.7), не выполняются. Однако, в силу непрерывности по малому параметру характеристических показателей, в трехмерном пространстве параметров имеются точки из окрестностей порождающих точек (5.1.6) и (5.1.8), соответствующие точным резонансам.

Для этих значений параметров из-за наличия двойного резонанса третьего порядка соответствующие периодические движения спутника неустойчивы [110]. Далее в окрестности этих движений будут построены аналитические по e периодические (с периодом 10π) движения спутника, обусловленные взаимодействием резонансов третьего и четвертого порядков, и проведен анализ их устойчивости в строгой нелинейной постановке.

5.2. Резонансные периодические движения в окрестности гиперболоидальной прецессии

Осуществим нормализацию гамильтониана (5.1.1) (при малых e) в окрестности периодического движения, рождающегося из гиперболоидальной прецессии для значений параметров (5.1.6) и соответствующего, в трехмерном пространстве параметров, точному резонансу.

5.2.1. Нормализация гамильтониана при $e = 0$

Сначала нормализуем гамильтониан возмущенного движения для случая $e = 0$. Введем возмущения по формулам

$$\theta = \theta_0 + q_1, \quad \psi = \psi_0 + q_2, \quad p_\theta = p_{\theta_0} + p_1, \quad p_\psi = p_{\psi_0} + p_2 \quad (5.2.1)$$

и представим гамильтониан в виде $H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots$, где H_k — совокупность слагаемых степени k ($k = 2, 3, 4$), а многоточие — совокупность слагаемых не менее пятой степени относительно возмущений.

Линейная каноническая замена $q_j, p_j \rightarrow q'_j, p'_j$ ($j = 1, 2$) вида

$$\begin{aligned} q_1 &= -\frac{\sqrt{11}}{4} q'_1 + \frac{\sqrt{7}}{4} q'_2, & q_2 &= \frac{\sqrt{35}}{8} p'_1 + \frac{\sqrt{55}}{8} p'_2, \\ p_1 &= -\frac{\sqrt{11}}{8} p'_1 + \frac{3\sqrt{7}}{8} p'_2, & p_2 &= -\frac{3\sqrt{35}}{20} q'_1 - \frac{\sqrt{55}}{20} q'_2 \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

приводит квадратичную часть гамильтониана к нормальной форме

$$H_{20} = \frac{3}{5} (q_1'^2 + p_1'^2) + \frac{1}{5} (q_2'^2 + p_2'^2).$$

Последующая близкая к тождественной нелинейная нормализующая замена $q'_j, p'_j \rightarrow x_j, X_j$ ($j = 1, 2$) приводит к нормальной форме слагаемые четвертой степени относительно возмущений, получаемой с учетом имеющегося резонанса четвертого порядка. Это преобразование получено при помощи метода Депри — Хори [42] и имеет вид

$$q'_j = x_1 + x_{j1} + \frac{1}{2} x_{j2}, \quad p'_j = X_j + X_{j1} + \frac{1}{2} X_{j2}, \quad (5.2.3)$$

$$x_{j1} = \frac{\partial V_1}{\partial X_j}, \quad X_{j1} = -\frac{\partial V_1}{\partial x_j}, \quad x_{j2} = \frac{\partial V_2}{\partial X_j} + (x_{j1}, V_1), \quad X_{j2} = -\frac{\partial V_2}{\partial x_j} + (X_{j1}, V_1).$$

Круглые скобки в последней строке обозначают скобки Пуассона стоящих в них функций, а

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{\sqrt{165}}{38400} (294x_1^3 - 486x_2^2x_1 + 175X_1^2x_1 - 765X_2^2x_1 - 30x_2X_1X_2) - \\ &\quad - \frac{\sqrt{105}}{268800} (-16786x_2^3 + 9186x_1^2x_2 + 8895X_1^2x_2 - 17325X_2^2x_2 - 2790x_1X_1X_2), \\ V_2 &= -\frac{52039}{1228800} x_1^3 X_1 + \frac{15}{16384} X_1^3 x_1 - \frac{59243}{409600} x_2^3 X_2 - \frac{5485}{49152} X_2^3 x_2 + \\ &\quad + \frac{1601}{32768} X_2^2 x_1 X_1 + \frac{144083}{819200} x_2^2 x_1 X_1 + \frac{3085}{32768} X_1^2 x_2 X_2 + \frac{93023}{819200} x_1^2 x_2 X_2 + \\ &\quad + \sqrt{77} \left[\frac{4573}{1433600} x_1^3 X_2 - \frac{559}{21504} X_1^3 x_2 + \frac{3491}{860160} X_2^3 x_1 + \frac{27}{2048} X_1^2 x_1 X_2 - \right. \end{aligned}$$

$$\left. -\frac{6617}{204800}x_1^2x_2X_1 - \frac{3847}{51200}x_2^2x_1X_2 - \frac{19811}{286720}X_2^2x_2X_1 \right].$$

В симплектических полярных координатах φ_j, r_j ($j = 1, 2$), задаваемых формулами $x_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j$, $X_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j$ ($j = 1, 2$), нормализованный при $e = 0$ гамильтониан имеет вид

$$H_0 = \frac{6}{5}r_1 + \frac{2}{5}r_2 - \frac{3479}{20480}r_1^2 + \frac{2031}{5120}r_1r_2 - \frac{16923}{20480}r_2^2 - \frac{21\sqrt{77}}{2560}r_1^{1/2}r_2^{3/2} \cos(\varphi_1 - 3\varphi_2) + O(r_j^{5/2}). \quad (5.2.4)$$

5.2.2. Нормализация неавтономной части гамильтониана

Преобразуем далее неавтономную часть гамильтониана. Рассмотрим окрестность точки (5.1.6), полагая

$$\alpha = \frac{6}{5} + \sum_{k=1}^5 e^k \alpha_k + O(e^6), \quad \beta = -\frac{\sqrt{385}}{30} + \sum_{k=1}^5 e^k \beta_k + O(e^6). \quad (5.2.5)$$

Постоянные коэффициенты α_k и β_k подберем таким образом, чтобы для характеристических показателей линеаризованной в окрестности соответствующего периодического решения системы выполнялись соотношения $\lambda_1 = 6/5 + O(e^6)$, $\lambda_2 = 2/5 + O(e^6)$. Дальнейшие расчеты показали, что коэффициенты α_k и β_k с нечетными индексами равны нулю.

Периодическое решение, отвечающее точке (5.2.5), в слагаемых до e^2 включительно совпадает с решением (5.1.10), полученным для случая $e = 0$. Часть периодического решения в слагаемых порядка e^3 и e^4 зависит от значений α_2, β_2 и должно определяться совместно с ними; коэффициенты α_4 и β_4 влияют на решение в слагаемых порядка e^5 и e^6 и т.д.

Вводим возмущения в окрестности периодического решения, полагая

$$\theta = \theta_0 + \tilde{q}_1(\nu) + q_1, \quad \psi = \psi_0 + \tilde{q}_2(\nu) + q_2,$$

$$p_\theta = p_{\theta_0} + \tilde{p}_1(\nu) + p_1, \quad p_\psi = p_{\psi_0} + \tilde{p}_2(\nu) + p_2.$$

В гамильтониане возмущенного движения осуществляются замены (5.2.2) и (5.2.3), затем при помощи близкой к тождественной 2π -периодической по ν унивалентной канонической замены $x_j, X_j \rightarrow y_j, Y_j$ ($j = 1, 2$) проводится нормализация квадратичной части преобразованного гамильтониана в слагаемых до порядка e^5 включительно, приводящая ее к виду

$$\tilde{H}_2 = \frac{3}{5}(y_1^2 + Y_1^2) + \frac{1}{5}(y_2^2 + Y_2^2) + O(e^6). \quad (5.2.6)$$

Проводя расчеты, находим, что

$$\alpha_2 = -\frac{128473}{255255}, \quad \alpha_4 = \frac{41263286648313365643547}{2790247127279751659520},$$

$$\beta_2 = -\frac{82274957\sqrt{385}}{707566860}, \quad \beta_4 = \frac{23717913273456618679013107\sqrt{385}}{7734565036819471600189440}.$$

Соответствующее периодическое решение приведем явно до слагаемых порядка e^3 включительно:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1(\nu) &= \hat{q}_1(\nu) - \\ &\quad - \sqrt{15}e^3 \left(\frac{255320525}{1097800704} \sin 3\nu + \frac{1829475}{6071296} \sin \nu \right) + O(e^4), \\ \tilde{q}_2(\nu) &= \hat{q}_2(\nu) + \\ &\quad + \sqrt{231}e^3 \left(\frac{22327891}{431278848} \cos 3\nu - \frac{2066615401}{2012634624} \cos \nu \right) + O(e^4), \\ \tilde{p}_1(\nu) &= \hat{p}_1(\nu) - \\ &\quad - \sqrt{15}e^3 \left(\frac{32149265}{137225088} \cos 3\nu - \frac{86715}{758912} \cos \nu \right) + O(e^4), \\ \tilde{p}_2(\nu) &= \hat{p}_2(\nu) + \\ &\quad + \sqrt{231}e^3 \left(\frac{1037875}{1006317312} \sin 3\nu - \frac{2377130125}{2012634624} \sin \nu \right) + O(e^4). \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Входящие сюда функции $\hat{q}_j(\nu)$, $\hat{p}_j(\nu)$ ($j = 1, 2$) определены в (5.1.10).

Указанная нормализующая замена переменных подбирается так, чтобы одновременно с квадратичными слагаемыми к нормальной форме были приведены слагаемые третьей и четвертой степеней относительно возмущений (первые до порядков e^3 и вторые до порядка e включительно). В результате форма четвертой степени порядка e , а также формы третьей степени порядков e и e^3 уничтожаются. В форме третьей степени порядка e^2 остаются только слагаемые с резонансными гармониками.

Процедура нормализации форм второй, третьей и четвертой степеней может быть осуществлена методом Депри — Хори. Описанная замена переменных представляется в виде, аналогичном (5.2.3):

$$x_1 = y_j + ey_{j1} + \frac{e^2}{2} y_{j2} + O(e^3), \quad X_1 = Y_j + eY_{j1} + \frac{e^2}{2} Y_{j2} + O(e^3) \quad (j = 1, 2),$$

$$y_{j1} = \frac{\partial W_1}{\partial Y_j}, \quad Y_{j1} = -\frac{\partial W_1}{\partial y_j}, \quad y_{j2} = \frac{\partial W_2}{\partial Y_j} + (y_{j1}, W_1), \quad Y_{j2} = -\frac{\partial W_2}{\partial y_2} + (Y_{j1}, W_1).$$

Сначала нормализуются слагаемые порядка e в формах второй, третьей и четвертой степеней относительно возмущений. Соответствующая часть производящей функции есть сумма трех однородных форм: $W_1 = W_{12} + W_{13} + W_{14}$, где

$$W_{12} = \left[\frac{167}{48} y_2 Y_2 - \frac{219}{1904} y_1 Y_1 + \frac{\sqrt{77}}{16016} (4047 y_2 Y_1 - 1699 y_1 Y_2) \right] \cos \nu +$$

$$+ \left[\frac{1783}{3808} y_1^2 + \frac{31}{96} y_2^2 + \frac{2027}{7616} Y_1^2 - \frac{629}{192} Y_2^2 + \frac{\sqrt{77}}{32032} (6154 y_1 y_2 + 2595 Y_1 Y_2) \right] \sin \nu,$$

$$W_{13} = \left[\sqrt{165} \left(\frac{28837173}{324163840} y_1^3 - \frac{249503}{1084160} y_2^2 y_1 + \frac{3410345}{37047296} Y_1^2 y_1 - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1446163}{4336640} Y_2^2 y_1 + \frac{3051}{28160} y_2 Y_1 Y_2 \Big) + \sqrt{105} \left(\frac{21289}{689920} y_2^3 + \frac{22661}{306432} y_1^2 y_2 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{564173}{6128640} Y_1^2 y_2 - \frac{420445}{551936} Y_2^2 y_2 + \frac{10247}{3064320} y_1 Y_1 Y_2 \right) \Big] \cos \nu + \\
& \quad + \left[\sqrt{165} \left(-\frac{40135083}{518662144} Y_1^3 - \frac{17538271}{277854720} y_1^2 Y_1 + \frac{75829}{309760} y_2^2 Y_1 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{2745933}{8673280} Y_2^2 Y_1 - \frac{2745933}{8673280} Y_2^2 Y_1 + \frac{3083}{98560} y_1 Y_2 y_2 \right) + \sqrt{105} \left(\frac{1670729}{3311616} Y_2^3 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{324143}{3064320} Y_2 y_1^2 - \frac{373789}{137984} Y_2 y_2^2 - \frac{1535929}{12257280} Y_2 Y_1^2 - \frac{54533}{1532160} y_1 y_2 Y_1 \right) \right] \sin \nu.
\end{aligned}$$

Явный вид формы W_{14} не приводим в силу громоздкости, далее он не потребуется.

Затем проводится нормализация слагаемых порядка e^2 в формах второй и третьей степеней. Для производящей функции W_2 имеем выражение $W_2 = W_{22} + W_{23}$, где

$$\begin{aligned}
W_{22} = & - \left[\frac{7387599819}{3066871808} y_1 Y_1 + \frac{1020577865}{114802688} Y_2 y_2 - \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{77} \left(\frac{2286900347}{5854937088} Y_2 y_1 + \frac{180091315}{1951645696} y_2 Y_1 \right) \right] \cos 2\nu + \\
& \quad + \left[-\frac{5218288875}{3066871808} y_1^2 - \frac{408876899}{114802688} y_2^2 + \frac{6677149539}{6133743616} Y_1^2 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1314764067}{229605376} Y_2^2 + \sqrt{77} \left(\frac{120243391}{2927468544} y_1 y_2 + \frac{649071153}{1951645696} Y_1 Y_2 \right) \right] \sin 2\nu - \\
& \quad - \frac{403099}{1633632} y_1 Y_1 + \frac{457675}{49504} Y_2 y_2 - \sqrt{77} \left(\frac{2532147}{41929888} Y_2 y_1 + \frac{9439873}{41929888} y_2 Y_1 \right).
\end{aligned}$$

Явный вид формы W_{23} третьей степени также не приводим.

Далее нормализуем слагаемые второй и третьей степеней выше второго порядка по e (соответствующая часть замены также не потребуется).

В преобразованном гамильтониане перейдем от переменных y_j , Y_j к симплектическим полярным координатам и, сохраняя за ними обозначения, приня-

тые в (5.2.4), запишем гамильтониан в виде

$$\begin{aligned}
 H = H_0 + e^2 & \left[\frac{8731191\sqrt{330}}{14417920} r_1^{1/2} r_2 \cos(2\varphi_2 + \varphi_1 - 2\nu) + \right. \\
 & \left. + \frac{2772049349\sqrt{210}}{13776322560} r_1 r_2^{1/2} \cos(2\varphi_1 - \varphi_2 - 2\nu) \right] + \\
 & + e^6 \tilde{H}_2 + e^4 \tilde{H}_3 + e^2 \tilde{H}_4 + O_5.
 \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Автономная часть H_0 определена в (5.2.4). Через $e^k \tilde{H}_\ell$ обозначена совокупность слагаемых ℓ -й степени по $r_j^{1/2}$, имеющих по e порядок не меньший, чем k , а O_5 — совокупность слагаемых пятой степени и выше по $r_j^{1/2}$; эти четыре группы слагаемых 2π -периодичны по ν и переменным φ_1, φ_2 .

Проведем дальнейшее преобразование гамильтониана. Унивалентная каноническая замена переменных $\varphi_j, r_j \rightarrow R_j, \Phi_j$ по формулам

$$r_j = R_j \quad (j = 1, 2), \quad \varphi_1 = \Phi_1 + \frac{6}{5}\nu, \quad \varphi_2 = \Phi_2 + \frac{2}{5}\nu \tag{5.2.9}$$

исключает в (5.2.8) переменную ν из слагаемых с резонансными гармониками и уничтожает слагаемые, линейные по r_j . Последние четыре группы слагаемых в преобразованном гамильтониане 10π -периодичны по ν .

Осуществим еще одну каноническую замену

$$\Phi_j = \Phi_j, \quad R_j = e^4 \xi \rho_j \quad (j = 1, 2)$$

и перейдем к новой независимой переменной $\tau = e^4 \eta \nu$. Здесь

$$\xi = \frac{127056160464135}{165203771392}, \quad \eta = \frac{76233696278481}{249879855104}.$$

Получаем в итоге

$$\begin{aligned}
 F = \rho_1^{1/2} \rho_2 \cos(\Phi_1 + 2\Phi_2) + \frac{5544098698\sqrt{77}}{183538366011} \rho_1 \rho_2^{1/2} \cos(2\Phi_1 - \Phi_2) - \\
 - \frac{3479}{8124} \rho_1^2 + \rho_1 \rho_2 - \frac{5641}{2708} \rho_2^2 - \frac{14\sqrt{77}}{677} \rho_1^{1/2} \rho_2^{3/2} \cos(\Phi_1 - 3\Phi_2) + O(e^2).
 \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

Слагаемое $O(e^2)$ 2π -периодично по Φ_1 , Φ_2 и периодически по τ с периодом порядка e^4 .

5.2.3. Положения равновесия в упрощенной модельной задаче

Отметим, что слагаемое, соответствующее в (5.2.10) резонансу четвертого порядка, невелико по сравнению с другими коэффициентами нормальной формы

$$0.181462 \rho_1^{1/2} \rho_2^{3/2} \cos(\Phi_1 - 3\Phi_2)$$

и на первом этапе исследования его можно отбросить. Получаем модельную систему, рассмотренную в главе 4, с гамильтонианом

$$\begin{aligned} \tilde{F} = \rho_1^{1/2} \rho_2 \cos(\Phi_1 + 2\Phi_2) + \frac{5544098698\sqrt{77}}{183538366011} \rho_1 \rho_2^{1/2} \cos(2\Phi_1 - \Phi_2) - \\ - \frac{3479}{8124} \rho_1^2 + \rho_1 \rho_2 - \frac{5641}{2708} \rho_2^2. \end{aligned}$$

Учитывая теоретические результаты, полученные в разд. 4.2, заключаем, что для данного набора параметров модельная система имеет три положения равновесия, удовлетворяющие условиям (см. рис. 26 а,б,е соответственно).

1. $P_{3g}^1 = \{\delta_1 = 1, \delta_2 = 1, \rho_{10} = 1.34108943, \rho_{20} = 0.652672425\}$;
2. $P_{3g}^2 = \{\delta_1 = 1, \delta_2 = -1, \rho_{10} = 0.25022341, \rho_{20} = 0.1602438\}$; (5.2.11)
3. $P_{3g}^3 = \{\delta_1 = -1, \delta_2 = 1, \rho_{10} = 0.00102888, \rho_{20} = 0.0000191907\}$.

Рассмотрим вопрос об устойчивости (в линейном приближении) найденных положений равновесия. Введем возмущения $\Phi_j = \Phi_{j0} + x_j$, $\rho_j = \rho_{j0} + y_j$ ($j = 1, 2$) переменных модельной системы относительно их равновесных значений. Характеристическое уравнение соответствующих линеаризованных уравнений возмущенного движения представляется в виде (2.5.1). Коэффициенты

характеристического уравнения и корни этого уравнения соответственно равны:

$$1. p = 13.18987578, q = 8.79845627,$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 0.83947184i, \lambda_{3,4} = \pm 3.53343498i;$$

$$2. p = 0.40637444, q = -0.09649832,$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 0.40988365, \lambda_{3,4} = \pm 0.075787799i;$$

$$3. p = -0.00091687, q = -6.14555252 \cdot 10^{-9},$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 0.03038958, \lambda_{3,4} = \pm 0.00257962i.$$

Отсюда следует, что для положения равновесия P_{3g}^1 корни характеристического уравнения чисто мнимые, и имеет место устойчивость в линейном приближении. У характеристических уравнений, отвечающих положениям равновесия P_{3g}^2 и P_{3g}^3 , имеются корни с положительными вещественными частями, и эти равновесия неустойчивы, причем не только в линейной, но и в полной нелинейной задаче.

5.2.4. Положения равновесия полной модельной системы

Восстановим теперь слагаемое, отвечающее резонансу четвертого порядка, и рассмотрим модельную систему с гамильтонианом

$$\begin{aligned} \hat{F} = & \rho_1^{1/2} \rho_2 \cos(\Phi_1 + 2\Phi_2) + \frac{5544098698\sqrt{77}}{183538366011} \rho_1 \rho_2^{1/2} \cos(2\Phi_1 - \Phi_2) - \\ & - \frac{3479}{8124} \rho_1^2 + \rho_1 \rho_2 - \frac{5641}{2708} \rho_2^2 - \frac{14\sqrt{77}}{677} \rho_1^{1/2} \rho_2^{3/2} \cos(\Phi_1 - 3\Phi_2). \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

Приравнявая нулю частные производные функции \hat{F} по Φ_j и ρ_j ($j = 1, 2$), получим систему уравнений для нахождения равновесных значений переменных:

$$\begin{aligned} \rho_1^{1/2} \rho_2 \sin \Psi_1 + \frac{11088197396\sqrt{77}}{183538366011} \rho_1 \rho_2^{1/2} \sin \Psi_2 - \frac{14\sqrt{77}}{677} \rho_1^{1/2} \rho_2^{3/2} \sin \Psi_{21} &= 0, \\ 2\rho_1^{1/2} \rho_2 \sin \Psi_1 - \frac{5544098698\sqrt{77}}{183538366011} \rho_1 \rho_2^{1/2} \sin \Psi_2 + \frac{42\sqrt{77}}{677} \rho_1^{1/2} \rho_2^{3/2} \sin \Psi_{21} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2}{2\rho_1^{1/2}} \cos \Psi_1 + \frac{5544098698\sqrt{77}}{183538366011} \rho_2^{1/2} \cos \Psi_2 + \\ + \rho_2 - \frac{3479}{4062} \rho_1 - \frac{7\sqrt{77}}{677} \frac{\rho_2^{3/2}}{\rho_1^{1/2}} \cos \Psi_{21} = 0, \\ \rho_1^{1/2} \cos \Psi_1 + \frac{2772049349\sqrt{77}}{183538366011} \frac{\rho_1}{\rho_2^{1/2}} \cos \Psi_2 + \\ + \rho_1 - \frac{5641}{1354} \rho_2 - \frac{21\sqrt{77}}{677} \rho_1^{1/2} \rho_2^{1/2} \cos \Psi_{21} = 0. \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения $\Psi_1 = \Phi_1 + 2\Phi_2$, $\Psi_2 = 2\Phi_1 - \Phi_2$, $\Psi_{21} = \Psi_2 - \Psi_1$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\sin \Psi_j \neq 0$ ($j = 1, 2$), $\sin \Psi_{21} \neq 0$. Разрешим первые два уравнения этой системы относительно ρ_1 , ρ_2 :

$$\rho_1 = \frac{53143913061843895656729}{122948121492661180816} \frac{\sin^4 \Psi_1}{\sin^2 \Psi_2 \sin^2 \Psi_{21}}, \quad \rho_2 = \frac{458329}{15092} \frac{\sin^2 \Psi_1}{\sin^2 \Psi_{21}}.$$

Подставляя эти выражения в третье и четвертое уравнения, получим систему двух уравнений $f_1(\Psi_1, \Psi_2) = 0$, $f_2(\Psi_1, \Psi_2) = 0$. Функции f_1 и f_2 имеют по Ψ_1 , Ψ_2 период π , их явный вид в силу громоздкости не приводим.

Геометрическое место точек в плоскости величин Ψ_1 , Ψ_2 , удовлетворяющих условиям $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, представлено на рис. 27. В области, задаваемой условиями $-\pi/2 \leq \Psi_1 \leq \pi/2$, $0 \leq \Psi_2 \leq \pi$, изображенные кривые имеют только две общие точки $(0, 0)$ и $(0, \pi)$, которые на данном этапе исключены из рассмотрения. Таким образом, в рассматриваемой системе нет положений равновесия, для которых $\sin \Psi_j \neq 0$, $\sin \Psi_{21} \neq 0$.

При $\sin \Psi_1 = 0$ и $\sin \Psi_2 = 0$ первые два уравнения системы тождественно удовлетворяются. Положим $\cos \Psi_j = \delta_j$ ($j = 1$ или -1). Подставляя различные варианты пар (δ_1, δ_2) в третье и четвертое уравнения системы, найдем следующие

щие решения:

1. $P_{4g}^1 = \{\delta_1 = 1, \delta_2 = 1, \rho_{10} = 1.044473, \rho_{20} = 0.496149\}$;
 2. $P_{4g}^2 = \{\delta_1 = 1, \delta_2 = -1, \rho_{10} = 0.346079, \rho_{20} = 0.218707\}$;
 3. $P_{4g}^3 = \{\delta_1 = -1, \delta_2 = 1, \rho_{10} = 0.001031, \rho_{20} = 0.0000192837\}$.
- (5.2.13)

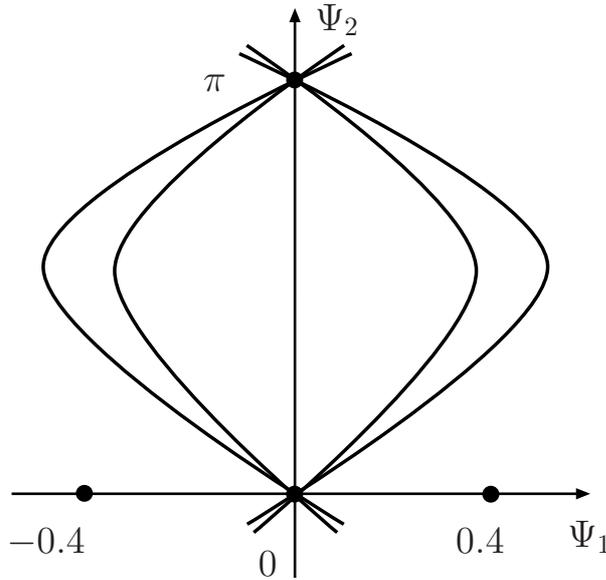


Рис. 27: Графический анализ системы уравнений $f_1 = 0, f_2 = 0$.

Сравнивая полученные положения равновесия с найденными ранее положениями равновесия (5.2.11) в случае отсутствия резонанса четвертого порядка, заключаем, что учет этого резонанса не меняет числа положений равновесия модельной системы и значений пар (δ_1, δ_2) , но сдвигает равновесные значения переменных ρ_j ($j = 1, 2$).

Исследуем устойчивость решений (5.2.13). Введем в модельном гамильтониане возмущения по формулам $\Phi_j = \Phi_{j0} + x_j, \rho_j = \rho_{j0} + y_j$ ($j = 1, 2$) относительно найденных равновесных значений Φ_{j0} и ρ_{j0} (5.2.13). Характеристическое уравнение линеаризованных уравнений возмущенного движения имеет вид (2.5.1).

Для равновесия P_{4g}^1 квадратичная часть гамильтониана возмущенного движения имеет вид

$$h_2 = -0.611142 x_1^2 - 0.818542 x_1 x_2 - 0.819976 x_2^2 - 0.478911 y_1^2 + 1.583593 y_1 y_2 - 2.280843 y_2^2. \quad (5.2.14)$$

Отсюда находим, что $p = 6.059203$, $q = 2.484149$, $\mathfrak{D} = 26.777342$, и данное равновесие устойчиво в линейном приближении. Равновесие P_{4g}^1 устойчиво и в полной модельной системе с гамильтонианом (5.2.12) на основании теоремы Ляпунова об устойчивости. Это следует из того, что форма h_2 отрицательно определена и в автономной системе гамильтониан является первым интегралом.

Рассматривая характеристические уравнения, отвечающие равновесиям P_{4g}^2 и P_{4g}^3 , находим соответственно $p = 1.073075$, $q = -0.174557 < 0$ и $p = -0.913964 \cdot 10^{-3} < 0$, $q = -6.163395 \cdot 10^{-9} < 0$. Таким образом, оба эти равновесия неустойчивы.

Сравнивая устойчивость полученных положений равновесия с устойчивостью найденных ранее положений равновесия (5.2.11) в случае отсутствия резонанса четвертого порядка, делаем вывод, что учет резонансных слагаемых четвертого порядка не меняет характера устойчивости.

5.2.5. Построение резонансных периодических движений спутника

Вернемся к полной системе с гамильтонианом (5.2.10). В окрестности рассмотренных положений равновесия модельной системы полную систему можно рассматривать как квазилинейную с возмущениями порядка e^2 . Корни характеристических уравнений линеаризованных уравнений возмущенного движения порядка единицы, в то время как возмущения в слагаемых $O(e^2)$ периодичны по τ с периодом $T \sim e^4$. Таким образом, имеет место нерезонансный случай теории

периодических движений Пуанкаре [35], и из найденных положений равновесия модельной системы в полной системе с гамильтонианом (5.2.10) рождаются аналитические по e , T -периодические по τ решения, имеющие вид

$$\rho_j = \rho_{j0} + O(e^2), \quad \Phi_j = \Phi_{j0} + O(e^2) \quad (j = 1, 2).$$

В исходной системе им отвечают аналитические по e , 10π -периодические по ν резонансные движения оси симметрии спутника, происходящие в окрестности движения (5.2.7), (5.1.10). Проводя обратную последовательность замен переменных из разд. 5.1, 5.2, получим описывающие их соотношения вида

$$\begin{aligned} q_1 = q_1(\nu) = & \\ & = -\frac{\sqrt{2}}{4} \left[\sqrt{11}\sqrt{\xi\rho_{10}} \sin\left(\frac{6}{5}\nu + \Phi_{10}\right) - \sqrt{7}\sqrt{\xi\rho_{20}} \sin\left(\frac{2}{5}\nu + \Phi_{20}\right) \right] e^2 - \\ & - \frac{\sqrt{2}}{408408} \left[3\sqrt{11}\sqrt{\xi\rho_{10}} \left(10087 \sin\left(\frac{11}{5}\nu + \Phi_{10}\right) + 11271 \sin\left(\frac{1}{5}\nu + \Phi_{10}\right) \right) + \right. \\ & \left. + 187\sqrt{7}\sqrt{\xi\rho_{20}} \left(1841 \sin\left(\frac{7}{5}\nu + \Phi_{20}\right) - 2223 \sin\left(-\frac{3}{5}\nu + \Phi_{20}\right) \right) \right] e^3 + O(e^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2 = q_2(\nu) = & \\ & = \frac{\sqrt{10}}{8} \left[\sqrt{7}\sqrt{\xi\rho_{10}} \cos\left(\frac{6}{5}\nu + \Phi_{10}\right) + \sqrt{11}\sqrt{\xi\rho_{20}} \cos\left(\frac{2}{5}\nu + \Phi_{20}\right) \right] e^2 - \\ & - \frac{\sqrt{10}}{204204} \left[33\sqrt{7}\sqrt{\xi\rho_{10}} \left(-149 \cos\left(\frac{11}{5}\nu + \Phi_{10}\right) \right) + 2210 \cos\left(\frac{1}{5}\nu + \Phi_{10}\right) + \right. \\ & \left. + 119\sqrt{11}\sqrt{\xi\rho_{20}} \left(80 \cos\left(\frac{7}{5}\nu + \Phi_{20}\right) + 507 \cos\left(-\frac{3}{5}\nu + \Phi_{20}\right) \right) \right] e^3 + O(e^4). \end{aligned}$$

Рассмотрим первую порождающую точку из (5.2.13). В области $0 \leq \Phi_{j0} < 2\pi$ ($j = 1, 2$) существует пять пар точек (Φ_{10}, Φ_{20}) вида

$$(0, 0), \quad \left(\frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi\right), \quad \left(\frac{4}{5}\pi, \frac{8}{5}\pi\right), \quad \left(\frac{6}{5}\pi, \frac{2}{5}\pi\right), \quad \left(\frac{8}{5}\pi, \frac{6}{5}\pi\right),$$

удовлетворяющих условию $\delta_1 = \delta_2 = 1$. Из приведенных соотношений, однако, следует, что решения, отвечающие второй и следующим парам, отличается от

решения для пары $(0, 0)$ сдвигом по ν соответственно на -2π , -4π , 4π и 2π . Эти пять периодических решений соответствуют одному и тому же движению спутника, задаваемому формулами

$$\begin{aligned} q_1(\nu) &= \left(-33.234394 \sin \frac{6}{5}\nu + 18.272509 \sin \frac{2}{5}\nu \right) e^2 - \left(9.850013 \sin \frac{11}{5}\nu + \right. \\ &\quad \left. + 11.006196 \sin \frac{1}{5}\nu + 61.611152 \sin \frac{7}{5}\nu + 74.395215 \sin \frac{3}{5}\nu \right) e^3 + O(e^4), \\ q_2(\nu) &= \left(29.641178 \cos \frac{6}{5}\nu + 25.609465 \cos \frac{2}{5}\nu \right) e^2 + \left(5.709807 \cos \frac{11}{5}\nu - \right. \\ &\quad \left. - 84.689079 \cos \frac{1}{5}\nu - 9.551316 \cos \frac{7}{5}\nu - 60.531463 \cos \frac{3}{5}\nu \right) e^3 + O(e^4). \end{aligned}$$

Аналогичные выводы делаются для второй и третьей порождающей точек из (5.2.13), для них берем $\Phi_{10} = 0$, $\Phi_{20} = \pi$ и $\Phi_{10} = \pi$, $\Phi_{20} = 0$ соответственно. Для второй точки имеем периодическое движение вида

$$\begin{aligned} q_1(\nu) &= \left(-19.130515 \sin \frac{6}{5}\nu - 12.131749 \sin \frac{2}{5}\nu \right) e^2 + \left(-5.669904 \sin \frac{11}{5}\nu - \right. \\ &\quad \left. - 6.335430 \sin \frac{1}{5}\nu + 40.905770 \sin \frac{7}{5}\nu + 49.393551 \sin \frac{3}{5}\nu \right) e^3 + O(e^4), \\ q_2(\nu) &= \left(17.062173 \cos \frac{6}{5}\nu - 17.003008 \cos \frac{2}{5}\nu \right) e^2 + \left(3.286702 \cos \frac{11}{5}\nu - \right. \\ &\quad \left. - 48.749066 \cos \frac{1}{5}\nu + 6.341448 \cos \frac{7}{5}\nu + 40.188928 \cos \frac{3}{5}\nu \right) e^3 + O(e^4), \end{aligned}$$

а для третьей точки — вида

$$\begin{aligned} q_1(\nu) &= \left(1.044301 \sin \frac{6}{5}\nu + 0.113917 \sin \frac{2}{5}\nu \right) e^2 + \left(0.309510 \sin \frac{11}{5}\nu + \right. \\ &\quad \left. + 0.345840 \sin \frac{1}{5}\nu - 0.384104 \sin \frac{7}{5}\nu - 0.463804 \sin \frac{3}{5}\nu \right) e^3 + O(e^4), \\ q_2(\nu) &= \left(-0.931394 \cos \frac{6}{5}\nu + 0.159658 \cos \frac{2}{5}\nu \right) e^2 + \left(-0.179415 \cos \frac{11}{5}\nu + \right. \\ &\quad \left. + 2.661125 \cos \frac{1}{5}\nu - 0.059546 \cos \frac{7}{5}\nu - 0.377373 \cos \frac{3}{5}\nu \right) e^3 + O(e^4). \end{aligned}$$

В плоскости величин q_1, q_2 эти три пары соотношений описывают замкнутые кривые, имеющие (если пренебречь слагаемыми порядка e^3 и выше) вид, показанный на рис.28,а,б,в соответственно для случая $e = 0.1$.

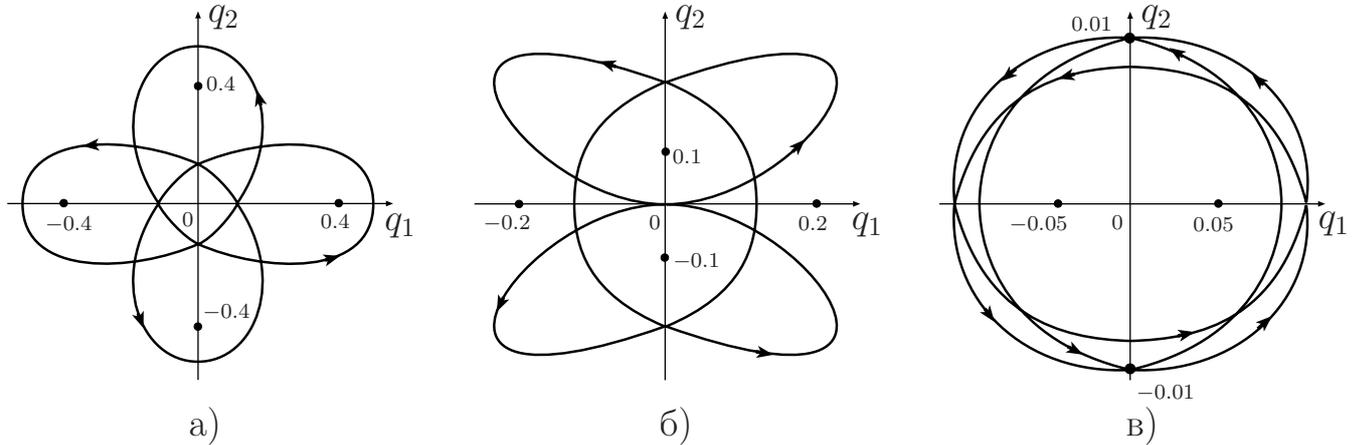


Рис. 28: Периодические решения в окрестности движения (5.1.10).

5.2.6. Устойчивость периодических движений

Рассмотрим вопрос об устойчивости найденных периодических движений. Движение, рождающееся из устойчивого положения равновесия P_{4g}^1 модельной системы, устойчиво в линейном приближении, а движения, рождающиеся из неустойчивых положений равновесия P_{4g}^2 и P_{4g}^3 , также неустойчивы. Это следует из непрерывности по малому параметру соответствующих характеристических показателей линеаризованных уравнений возмущенного движения.

Чтобы решить вопрос об устойчивости первого периодического движения в строгой нелинейной постановке, рассмотрим гамильтониан возмущенного движения полной системы и осуществим его нормализацию в слагаемых до четвертой степени включительно относительно возмущений. Учитывая выражение (5.2.14) для главной части квадратичной формы, получаем нормализован-

ный гамильтониан возмущенного движения в виде

$$H_n = -(\Omega_1 + O(e^2))r_1 - (\Omega_2 + O(e^2))r_2 + (c_{20} + O(e^2))r_1^2 + \\ + (c_{11} + O(e^2))r_1r_2 + (c_{02} + O(e^2))r_2^2 + O_5, \quad (5.2.15)$$

$$\Omega_1 = 2.370009, \quad \Omega_2 = 0.665026, \quad c_{20} = 2.157979, \quad c_{11} = 2.487900, \quad c_{02} = 0.511268.$$

Поправки $O(e)$ к частотам Ω_j и коэффициентам c_{ij} — постоянные числа.

Так как при малых e выполнено условие

$$\Delta = c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} + O(e^4) = 1.776428 + O(e^4) \neq 0,$$

то для достаточно малых значений e рассматриваемое периодическое движение устойчиво для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий [42].

Кроме того, квадратичная форма

$$c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2$$

положительно определена при $r_1 \geq 0, r_2 \geq 0$, что означает формальную устойчивость данного движения [145].

5.3. Резонансные периодические движения в окрестности конической прецессии

Исследуем теперь резонансные периодические движения спутника в окрестности его конической прецессии для порождающих точек (5.1.8). Процедура построения и анализа совершенно аналогична рассмотренной в разд. 5.2. Опуская детали, опишем основные этапы и результаты исследования.

5.3.1. Периодические движения вблизи первой точки (5.1.8)

5.3.1.1. Преобразование гамильтониана

Приведем к нормальной форме часть гамильтониана возмущенного движения при $e = 0$. Введем возмущения по формулам (5.2.1). Осуществим линейное каноническое преобразование

$$\begin{aligned} q_1 &= 0.270890 q'_1 - 1.509919 q'_2, & q_2 &= 0.943897 p'_1 + 0.169342 p'_2, \\ p_1 &= 1.268965 p'_1 - 0.434626 p'_2, & p_2 &= -0.695256 q'_1 - 2.029920 q'_2. \end{aligned}$$

Затем при помощи близкого к тождественному преобразования, аналогичного (5.2.3), уничтожим слагаемые третьей степени и нормализуем слагаемые четвертой степени. Получаем гамильтониан, имеющий в симплектических полярных координатах вид

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{6}{5}r_1 + \frac{2}{5}r_2 - 0.424836 r_1^2 - 2.842471 r_1 r_2 - 8.690427 r_2^2 + \\ &+ 2.612670 r_1^{1/2} r_2^{3/2} \cos(\varphi_1 - 3\varphi_2) + O(r_j^{5/2}). \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

При $e \neq 0$ рассмотрим окрестность резонансной точки в плоскости параметров α, θ_0 , полагая

$$\alpha = \alpha_* + e^2 \alpha_2 + e^4 \alpha_4 + O(e^6), \quad \theta_0 = \theta_{0*} + e^2 \theta_{02} + e^4 \theta_{04} + O(e^6), \quad (5.3.2)$$

где (α_*, θ_{0*}) — первый набор из (5.1.8). Если принять, что

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 1.287951, & \alpha_4 &= -361.154100, \\ \theta_{02} &= 23.784455, & \theta_{04} &= 1677.152504, \end{aligned}$$

то периодическое движение спутника, рождающееся из конической прецессии для точки (5.3.2), будет иметь вид

$$\tilde{q}_1(\nu) = \hat{q}_1(\nu) - e^3 (17.338297 \cos \nu + 2.170284 \cos 3\nu) + O(e^4), \quad (5.3.3)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_2(\nu) &= \hat{q}_2(\nu) - e^3 (134.594004 \sin \nu - 3.113258 \sin 3\nu) + O(e^4), \\
\tilde{p}_1(\nu) &= \hat{p}_1(\nu) - e^3 (123.532203 \sin \nu - 4.770203 \sin 3\nu) + O(e^4), \\
\tilde{p}_2(\nu) &= \hat{p}_2(\nu) - e^3 (157.839743 \cos \nu - 0.040622 \cos 3\nu) + O(e^4),
\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

причем функции $\hat{q}_j(\nu)$ и $\hat{p}_j(\nu)$ ($j = 1, 2$) определены в (5.1.11). Нормализованная до слагаемых порядка e^6 квадратичная часть соответствующего этому движению возмущенного гамильтониана имеет вид (5.2.6).

Одновременно приводим к нормальной форме (до порядков по e , указанных в разд. 5.2) слагаемые третьей и четвертой степеней относительно возмущений. Преобразованный гамильтониан примет вид, аналогичный (5.2.8):

$$\begin{aligned}
H &= H_0 + \sqrt{2}e^2 \left[24.250690 r_1 r_2^{1/2} \sin(2\varphi_1 - \varphi_2 - 2\nu) - \right. \\
&\quad \left. - 76.683915 r_1^{1/2} r_2 \sin(2\varphi_2 + \varphi_1 - 2\nu) \right] + e^6 \tilde{H}_2 + e^4 \tilde{H}_3 + e^2 \tilde{H}_4 + O_5.
\end{aligned}$$

Функция H_0 определена в (5.3.1).

Проведем далее каноническую замену (5.2.9), затем положим $R_j = e^4 \xi \rho_j$, заменим Φ_j на $-\Phi_j - \pi/2$ ($j = 1, 2$) и введем независимую переменную $\tau = e^4 \eta \nu$. Здесь введены обозначения $\xi = 1455.614780$, $\eta = 4137.542851$.

Получаем гамильтониан вида

$$\begin{aligned}
F &= 0.316242 \rho_1 \rho_2^{1/2} \cos(2\Phi_1 - \Phi_2) + \rho_1^{1/2} \rho_2 \cos(\Phi_1 + 2\Phi_2) + \\
&\quad + 0.149460 \rho_1^2 + \rho_1 \rho_2 + 3.057349 \rho_2^2 + \\
&\quad + 0.919154 \rho_1^{1/2} \rho_2^{3/2} \cos(\Phi_1 - 3\Phi_2) + O(e^2).
\end{aligned} \tag{5.3.4}$$

В данном случае коэффициент в резонансном слагаемом четвертого порядка не является малым, он сопоставим по значению с другими коэффициентами нормальной формы.

5.3.1.2. Положения равновесия модельной системы

Отбрасывая в (5.3.4) последнее слагаемое, получаем модельную систему. Для ее отличных от тривиального положений равновесия, как и в разд. 5.2.4, имеем условия $\sin \Psi_1 = \sin \Psi_2 = 0$ (величины Ψ_j введены в разд. 5.2.4).

Полагая $\cos \Psi_1 = \delta_1$, $\cos \Psi_2 = \delta_2$ ($\delta_j = 1$ или -1), выпишем уравнения для равновесных значений ρ_1 , ρ_2 :

$$\begin{aligned} 0.316242\delta_2\rho_2^{1/2} + \frac{\delta_1\rho_2}{2\rho_1^{1/2}} + 0.298920\rho_1 + \rho_2 + \frac{0.459577\delta_1\delta_2\rho_2^{3/2}}{\rho_1^{1/2}} &= 0, \\ \frac{0.158121\rho_1\delta_2}{\rho_2^{1/2}} + \delta_1\rho_1^{1/2} + 6.114699\rho_2 + \rho_1 + 1.378732\delta_1\delta_2\rho_1^{1/2}\rho_2^{1/2} &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решения для трех наборов (δ_1, δ_2) :

1. $P_{4k1}^1 = \{\delta_1 = -1, \delta_2 = 1, \rho_{10} = 0.028392, \rho_{20} = 0.024077\}$;
2. $P_{4k1}^2 = \{\delta_1 = -1, \delta_2 = -1, \rho_{10} = 0.206129, \rho_{20} = 0.044312\}$;
3. $P_{4k1}^3 = \{\delta_1 = 1, \delta_2 = -1, \rho_{10} = 0.012155, \rho_{20} = 0.000250\}$.

Для найденных положений равновесия коэффициенты соответствующих характеристических уравнений (2.5.1) таковы:

1. $p = -0.958798 \cdot 10^{-2}$, $q = -0.129720 \cdot 10^{-5}$, $\mathfrak{D} = 6.578436 \cdot 10^{-3}$;
2. $p = 0.0648609$, $q = -0.592875 \cdot 10^{-3}$, $\mathfrak{D} = 9.7698 \cdot 10^{-5}$;
3. $p = 0.555051$, $q = 0.0122799$, $\mathfrak{D} = 0.258962$.

Отсюда следует, что положения равновесия P_{4k1}^1 и P_{4k1}^2 неустойчивы, а положение равновесия P_{4k1}^3 устойчиво в линейном приближении. Решение P_{4k1}^3 устойчиво и в полной (нелинейной) модельной системе в силу знакоопределенности квадратичной части соответствующего гамильтониана возмущенного движения.

Если не учитывать резонанс четвертого порядка, то равновесные точки модельной системы таковы:

1. $P_{3k}^1 = \{\delta_1 = -1, \delta_2 = 1, \rho_{10} = 0.016126, \rho_{20} = 0.014689\}$;
2. $P_{3k}^2 = \{\delta_1 = -1, \delta_2 = -1, \rho_{10} = 0.267332, \rho_{20} = 0.067454\}$;
3. $P_{3k}^3 = \{\delta_1 = 1, \delta_2 = -1, \rho_{10} = 0.011807, \rho_{20} = 0.000234563\}$.

Для этих точек соответственно имеем:

1. $p = 0.019456, q = -0.248751 \cdot 10^{-3}, \mathfrak{D} = 0.137355 \cdot 10^{-2}$;
2. $p = -0.010292, q = -0.164135 \cdot 10^{-5}, \mathfrak{D} = 0.112501 \cdot 10^{-3}$;
3. $p = 1.203992, q = 0.052649, \mathfrak{D} = 1.2390006$.

Следовательно положения равновесия P_{3k}^1 и P_{3k}^2 неустойчивы, а положение равновесия P_{3k}^3 устойчиво.

Таким образом, учет резонанса четвертого порядка не меняет числа положений равновесия модельной системы (сдвигая равновесные значения переменных ρ_j ($j = 1, 2$)), и не меняет характер их устойчивости.

5.3.1.3. Резонансные периодические движения

Используя метод Пуанкаре и осуществляя обратную последовательность замен переменных, строим резонансные периодические движения оси симметрии спутника, происходящие в окрестности движения (5.3.3), (5.1.11). Запишем их в виде $q_1 = q_1(\nu), q_2 = q_2(\nu)$:

$$\begin{aligned}
 q_1(\nu) = & -\sqrt{\xi} \left[2.135348\sqrt{\rho_{20}} \sin\left(\Phi_{20} + \frac{2}{5}\nu\right) + \right. \\
 & \left. + 0.383096\sqrt{\rho_{10}} \sin\left(\Phi_{10} + \frac{6}{5}\nu\right) \right] e^2 + \sqrt{\xi} \left[1.338852\sqrt{\rho_{10}} \sin\left(\Phi_{10} + \frac{11}{5}\nu\right) + \right. \\
 & \left. + 10.055193\sqrt{\rho_{20}} \sin\left(\Phi_{20} - \frac{3}{5}\nu\right) - 11.225244\sqrt{\rho_{10}} \sin\left(\Phi_{10} + \frac{1}{5}\nu\right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3.270574\sqrt{\rho_{20}} \sin \left(\Phi_{20} + \frac{7}{5}\nu \right) \Big] e^3 + O(e^4), \\
q_2(\nu) = & \sqrt{\xi} \left[0.239485\sqrt{\rho_{20}} \cos \left(\Phi_{20} + \frac{2}{5}\nu \right) - \right. \\
& - 1.334871\sqrt{\rho_{10}} \cos \left(\Phi_{10} + \frac{6}{5}\nu \right) \Big] e^2 + \sqrt{\xi} \left[1.990926\sqrt{\rho_{10}} \cos \left(\Phi_{10} + \frac{11}{5}\nu \right) + \right. \\
& + 2.022539\sqrt{\rho_{20}} \cos \left(\Phi_{20} - \frac{3}{5}\nu \right) - 1.104187\sqrt{\rho_{10}} \cos \left(\Phi_{10} + \frac{1}{5}\nu \right) + \\
& \left. + 5.493181\sqrt{\rho_{20}} \cos \left(\Phi_{20} + \frac{7}{5}\nu \right) \right] e^3 + O(e^4).
\end{aligned}$$

Для найденных положений равновесия модельной системы соответственно имеем

1. $q_1(\nu) = \left(-1.611427 \cos \frac{6}{5}\nu - 1.288410 \cos \frac{2}{5}\nu \right) e^2 + \left(5.631644 \cos \frac{11}{5}\nu - \right.$
 $\left. - 47.216983 \cos \frac{1}{5}\nu + 1.973375 \cos \frac{7}{5}\nu + 6.067030 \cos \frac{3}{5}\nu \right) e^3 + O(e^4),$
 $q_2(\nu) = \left(5.614897 \sin \frac{6}{5}\nu - 0.144499 \sin \frac{2}{5}\nu \right) e^2 + \left(-8.374474 \sin \frac{11}{5}\nu + \right.$
 $\left. + 4.644567 \sin \frac{1}{5}\nu - 3.314436 \sin \frac{7}{5}\nu + 1.220345 \sin \frac{3}{5}\nu \right) e^3 + O(e^4);$
2. $q_1(\nu) = \left(2.462814 \cos \frac{6}{5}\nu + 12.641314 \cos \frac{2}{5}\nu \right) e^2 + \left(-8.607089 \cos \frac{11}{5}\nu + \right.$
 $\left. + 72.163790 \cos \frac{1}{5}\nu - 19.361884 \cos \frac{7}{5}\nu - 59.527003 \cos \frac{3}{5}\nu \right) e^3 + O(e^4),$
 $q_2(\nu) = \left(-8.581494 \sin \frac{6}{5}\nu + 1.417759 \sin \frac{2}{5}\nu \right) e^2 + \left(12.799076 \sin \frac{11}{5}\nu - \right.$
 $\left. - 7.098496 \sin \frac{1}{5}\nu + 32.519772 \sin \frac{7}{5}\nu - 11.973486 \sin \frac{3}{5}\nu \right) e^3 + O(e^4);$
3. $q_1(\nu) = \left(6.635919 \cos \frac{6}{5}\nu - 17.149494 \cos \frac{2}{5}\nu \right) e^2 + \left(-23.191335 \cos \frac{11}{5}\nu + \right.$

$$\begin{aligned}
& +194.441425 \cos \frac{1}{5}\nu + 26.266773 \cos \frac{7}{5}\nu + 80.755689 \cos \frac{3}{5}\nu \Big) e^3 + O(e^4), \\
q_2(\nu) = & \left(-23.122372 \sin \frac{6}{5}\nu - 1.923364 \sin \frac{2}{5}\nu \right) e^2 + \left(34.486417 \sin \frac{11}{5}\nu - \right. \\
& \left. -19.126513 \sin \frac{1}{5}\nu - 44.117063 \sin \frac{7}{5}\nu + 16.243504 \sin \frac{3}{5}\nu \right) e^3 + O(e^4).
\end{aligned}$$

Если в этих соотношениях пренебречь слагаемыми порядка e^3 и выше, то в плоскости величин q_1, q_2 они описывают замкнутые кривые, показанные на рис.29а,б,в соответственно, где принято, что $e = 0.1$.

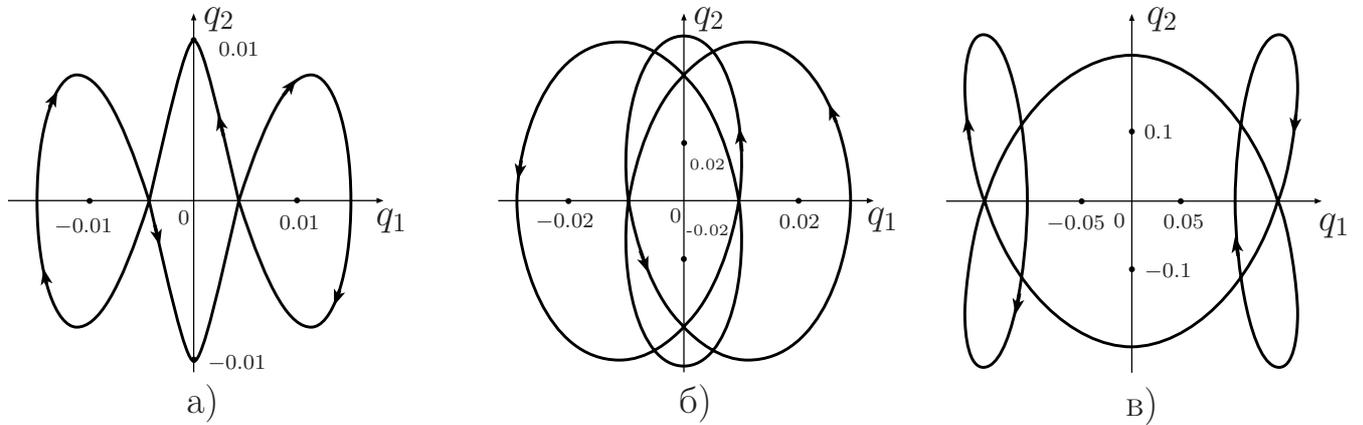


Рис. 29: Периодические решения в окрестности движения (5.1.11).

Первые два периодические движения спутника неустойчивы, а третье устойчиво в линейном приближении. Для полного решения вопроса об устойчивости третьего решения проведем нормализацию соответствующего ему гамильтониана возмущенного движения полной системы и запишем его в виде (5.2.15), где

$$\Omega_1 = -0.729361, \quad \Omega_2 = -0.151934,$$

$$c_{20} = -6.227365, \quad c_{11} = -3.488544, \quad c_{02} = -0.460472.$$

Применяя критерии, выписанные в разд. 5.2.6, заключаем, что при достаточно

малых e исследуемое движение устойчиво для большинства начальных условий и формально устойчиво.

5.3.2. Периодические движения вблизи второй точки (5.1.8)

Рассмотрим второй резонансный случай для конической прецессии. В окрестности резонансной точки пространства параметров выбираем точку вида (5.3.2), где (α_*, θ_{0*}) — второй набор из (5.1.8), а $\alpha_2 = -89.652220$, $\theta_{02} = -172.745302$.

Соответствующее этой точке периодическое решение, рождающееся из конической прецессии спутника на круговой орбите, имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{q}_1(\nu) &= \hat{q}_1(\nu) + e^3 (6931.161178 \cos \nu + 6.996445 \cos 3\nu) + O(e^4), \\ \tilde{q}_2(\nu) &= \hat{q}_2(\nu) + e^3 (6700.976621 \sin \nu - 0.344129 \sin 3\nu) + O(e^4), \\ \tilde{p}_1(\nu) &= \hat{p}_1(\nu) + e^3 (-247.392447 \sin \nu - 30.440981 \sin 3\nu) + O(e^4), \\ \tilde{p}_2(\nu) &= \hat{p}_2(\nu) + e^3 (2869.864486 \cos \nu + 6.060462 \cos 3\nu) + O(e^4),\end{aligned}$$

причем функции $\hat{q}_j(\nu)$ и $\hat{p}_j(\nu)$ определены формулами (5.1.12).

В случае $e = 0$ сделаем линейную каноническую замену

$$\begin{aligned}q_1 &= -1.354290 q'_1 + 1.732715 q'_2, & q_2 &= 1.371325 p'_1 + 1.071827 p'_2, \\ p_1 &= -0.253823 p'_1 + 0.378741 p'_2, & p_2 &= -0.478552 q'_1 - 0.320714 q'_2.\end{aligned}$$

Продолжая нормализацию, получаем для случая круговой орбиты гамильтониан вида

$$\begin{aligned}H_0 &= \frac{6}{5}r_1 - \frac{2}{5}r_2 + 25.661851r_1^2 - 5.312807r_1r_2 - 2.532359r_2^2 + \\ &\quad + 50.218861r_1^{1/2}r_2^{3/2} \cos(\varphi_1 + 3\varphi_2) + O(r_j^{5/2}).\end{aligned}$$

Далее проводим нормализацию неавтономной части гамильтониана при малых e и находим резонансные кубические слагаемые порядка e^2 :

$$\sqrt{2}e^2 \left[-2716.105152 r_1 r_2^{1/2} \sin(2\varphi_1 + \varphi_2 - 2\nu) - \right. \\ \left. -8562.720420 r_1^{1/2} r_2 \sin(\varphi_1 - 2\varphi_2 - 2\nu) \right].$$

Полагая затем

$$R_j = e^4 \xi \rho_j \quad (j = 1, 2), \quad \varphi_1 = -\Phi_1 - \frac{\pi}{2} + \frac{6}{5}\nu, \quad \varphi_2 = -\Phi_2 - \frac{\pi}{2} - \frac{2}{5}\nu, \quad \tau = e^4 \eta \nu,$$

где $\xi = 5.195238 \cdot 10^6$, $\eta = 2.760130 \cdot 10^7$, приводим гамильтониан к окончательному виду

$$F = 0.317201 \rho_1 \rho_2^{1/2} \cos(2\Phi_1 + \Phi_2) + \rho_1^{1/2} \rho_2 \cos(\Phi_1 - 2\Phi_2) - \\ - 4.830187 \rho_1^2 + \rho_1 \rho_2 + 0.476652 \rho_2^2 - \\ - 9.452416 \rho_1^{1/2} \rho_2^{3/2} \cos(3\Phi_2 + \Phi_1) + O(e^2). \quad (5.3.5)$$

В данном случае коэффициент в резонансном слагаемом четвертого порядка довольно большой, он принимает значения больше чем другие коэффициенты нормальной формы. В данном случае это значение попадает в область неустойчивости системы при наличии одного лишь этого резонанса четвертого порядка.

Положения равновесия модельной системы с гамильтонианом (5.3.5) (без последнего слагаемого) удовлетворяют соотношениям $\sin \Psi_j = 0$ ($\cos \Psi_j = \delta_j = \pm 1$, $j = 1, 2$), где $\Psi_1 = \Phi_1 - 2\Phi_2$, $\Psi_2 = 2\Phi_1 + \Phi_2$, и системе

$$-9.660374 \rho_1 + \rho_2 - \frac{4.726208 \delta_1 \delta_2 \rho_2^{3/2}}{\rho_1^{1/2}} + 0.317201 \delta_2 \rho_2^{1/2} + \frac{\delta_1 \rho_2}{2 \rho_1^{1/2}} = 0, \\ 0.953304 \rho_2 + \rho_1 - 14.178624 \delta_1 \delta_2 \rho_2^{1/2} \rho_1^{1/2} + \frac{0.158601 \delta_2 \rho_1}{\rho_2^{1/2}} + \delta_1 \rho_1^{1/2} = 0.$$

Данная система имеет решения для трех наборов (δ_1, δ_2) :

1. $P_{4k2}^1 = \{ \delta_1 = 1, \delta_2 = 1, \rho_{10} = 0.439450 \cdot 10^{-3}, \rho_{20} = 0.014544 \}$;
 2. $P_{4k2}^2 = \{ \delta_1 = 1, \delta_2 = 1, \rho_{10} = 0.472782 \cdot 10^{-2}, \rho_{20} = 0.846698 \cdot 10^{-2} \}$;
 3. $P_{4k2}^3 = \{ \delta_1 = -1, \delta_2 = 1, \rho_{10} = 0.1.5671 \cdot 10^{-4}, \rho_{20} = 4.047079 \cdot 10^{-7} \}$.
- (5.3.6)

Коэффициенты соответствующих характеристических уравнений таковы:

1. $p = -0.358610 \cdot 10^{-3}, \quad q = -0.104405 \cdot 10^{-2}, \quad \mathfrak{D} = 1.435548 \cdot 10^{-3}$;
2. $p = 0.606292 \cdot 10^{-3}, \quad q = -0.049015, \quad \mathfrak{D} = -2.26994 \cdot 10^{-5}$;
3. $p = -2,876913 \cdot 10^{-12}, \quad q = -1.741 \cdot 10^{-5}, \quad \mathfrak{D} = 3.146423 \cdot 10^{-10}$.

Таким образом, все три положения равновесия модельной системы неустойчивы.

Отметим, что если не учитывать влияния резонанса четвертого порядка, то модельная система имеет единственную равновесную точку:

$$P_{3k} = \{ \delta_1 = -1, \delta_2 = 1, \rho_{10} = 0.1541804 \cdot 10^{-4}, \rho_{20} = 3.9096607 \cdot 10^{-7} \},$$

являющуюся неустойчивой.

Таким образом, число равновесных точек в «усеченной» модельной системе сократилось. Различие обусловлено тем, что коэффициент, соответствующий резонансу четвертого порядка, не является малым, и наличие этого резонанса качественно меняет характер движений модельной системы.

Вернемся к полной модельной системе с гамильтонианом (5.2.10). Рождающиеся из равновесных точек (5.3.6) периодические движения неустойчивы. В исходных переменных они записываются в виде

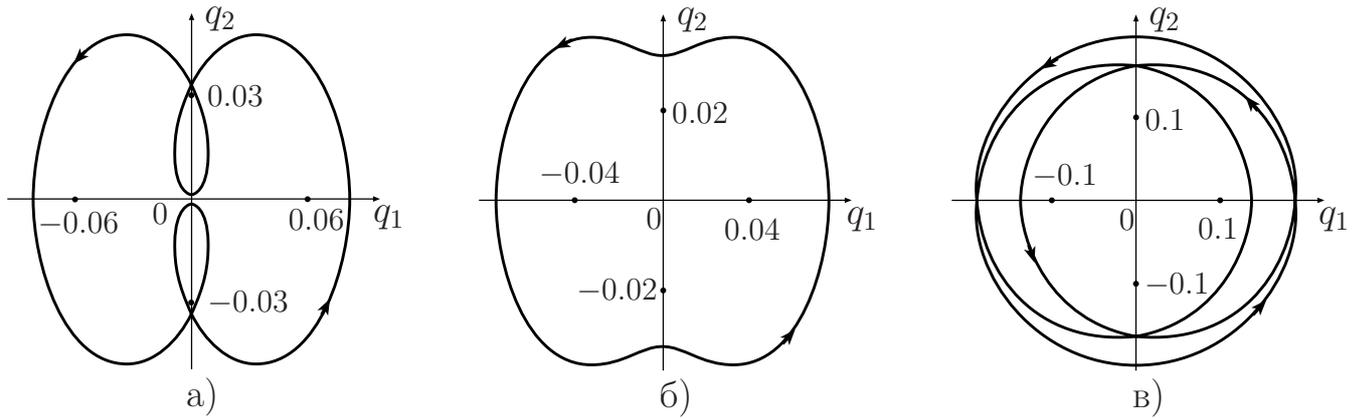


Рис. 30: Периодические решения в окрестности движения (5.1.12).

$$\begin{aligned}
 q_1(\nu) = & \sqrt{\xi} \left[-2.450429\sqrt{\rho_{20}} \cos\left(\Phi_{20} - \frac{2}{5}\nu\right) + \right. \\
 & \left. + 1.915255\sqrt{\rho_{10}} \cos\left(\Phi_{10} + \frac{6}{5}\nu\right) \right] e^2 + \sqrt{\xi} \left[5.042214\sqrt{\rho_{10}} \cos\left(\Phi_{10} + \frac{11}{5}\nu\right) - \right. \\
 & - 63.20673\sqrt{\rho_{20}} \cos\left(\Phi_{20} - \frac{7}{5}\nu\right) + 108.818137\sqrt{\rho_{10}} \cos\left(\Phi_{10} + \frac{1}{5}\nu\right) + \\
 & \left. + 101.663687\sqrt{\rho_{20}} \cos\left(\Phi_{20} + \frac{3}{5}\nu\right) \right] e^3 + O(e^4), \\
 q_2(\nu) = & \sqrt{\xi} \left[1.515792\sqrt{\rho_{20}} \sin\left(\Phi_{20} - \frac{2}{5}\nu\right) + \right. \\
 & \left. + 1.939346\sqrt{\rho_{10}} \sin\left(\Phi_{10} + \frac{6}{5}\nu\right) \right] e^2 + \sqrt{\xi} \left[1.642102\sqrt{\rho_{10}} \sin\left(\Phi_{10} + \frac{11}{5}\nu\right) + \right. \\
 & + 62.587539\sqrt{\rho_{20}} \sin\left(\Phi_{20} - \frac{7}{5}\nu\right) + 36.775245\sqrt{\rho_{10}} \sin\left(\Phi_{10} + \frac{1}{5}\nu\right) + \\
 & \left. + 81.340848\sqrt{\rho_{20}} \sin\left(\Phi_{20} + \frac{3}{5}\nu\right) \right] e^3 + O(e^4).
 \end{aligned}$$

А для соответствующих найденных положений равновесия модельной системы имеем:

$$\begin{aligned}
 q_1(\nu) = & \left(-300.164929 \cos \frac{6}{5}\nu - 513.936272 \cos \frac{2}{5}\nu \right) e^2 + \left(-790.232107 \cos \frac{11}{5}\nu - \right. \\
 & \left. - 17054.32823 \cos \frac{1}{5}\nu + 21322.24224 \cos \frac{3}{5}\nu - 13256.54465 \cos \frac{7}{5}\nu \right) e^3 + O(e^4),
 \end{aligned}$$

$$q_2(\nu) = \left(-303.940547 \sin \frac{6}{5}\nu - 317.911832 \sin \frac{2}{5}\nu \right) e^2 + \left(-257.355583 \sin \frac{11}{5}\nu - 5763.534591 \sin \frac{1}{5}\nu + 17059.86977 \sin \frac{3}{5}\nu - 13126.67985 \sin \frac{7}{5}\nu \right) e^3 + O(e^4)$$

для первой, в виде

$$q_1(\nu) = \left(-91.513230 \cos \frac{6}{5}\nu - 673.585352 \cos \frac{2}{5}\nu \right) e^2 + \left(-240.923190 \cos \frac{11}{5}\nu - 5199.463706 \cos \frac{1}{5}\nu + 27945.78010 \cos \frac{3}{5}\nu - 17374.55553 \cos \frac{7}{5}\nu \right) e^3 + O(e^4),$$

$$q_2(\nu) = \left(-92.664327 \sin \frac{6}{5}\nu - 416.667911 \sin \frac{2}{5}\nu \right) e^2 + \left(-78.461666 \sin \frac{11}{5}\nu - 1757.166188 \sin \frac{1}{5}\nu + 22359.34495 \sin \frac{3}{5}\nu - 17204.34954 \sin \frac{7}{5}\nu \right) e^3 + O(e^4)$$

для второй и в виде

$$q_1(\nu) = \left(17.281364 \cos \frac{6}{5}\nu - 3.5531604 \cos \frac{2}{5}\nu \right) e^2 + \left(45.495952 \cos \frac{11}{5}\nu + 981.867105 \cos \frac{1}{5}\nu + 147.413896 \cos \frac{3}{5}\nu - 91.650721 \cos \frac{7}{5}\nu \right) e^3 + O(e^4),$$

$$q_2(\nu) = \left(17.498738 \sin \frac{6}{5}\nu - 2.197921 \sin \frac{2}{5}\nu \right) e^2 + \left(14.816706 \sin \frac{11}{5}\nu + 331.823391 \sin \frac{1}{5}\nu + 117.945469 \sin \frac{3}{5}\nu - 90.752885 \sin \frac{7}{5}\nu \right) e^3 + O(e^4)$$

для третьей порождающей точки.

Если пренебречь слагаемыми выше второго порядка по e , имеем в плоскости параметров q_1, q_2 кривые, изображенные для случая $e = 0.01$ на рис.30а,б и для $e = 0.1$ на рис.30в.

Глава 6

О влиянии малого вязкого трения на устойчивость равновесий тела с вибрирующим подвесом

Рассмотренные резонансные эффекты гамильтоновых систем довольно часто проявляются при исследовании модельных задач вибродинамики. Когда частота собственных колебаний системы близка к частоте внешней вибрации или они связаны друг с другом определенным соотношением, то в системе возникает явление резонанса, которое может негативно сказываться как на самой конструкции, так и на ее движении и устойчивости этого движения. Зачастую проводится разработка методов подавления возникающих вибраций. Также актуальной проблемой является исследование влияния на исследуемые системы сил диссипации. В данной главе проводится исследование одновременного влияния на существование и устойчивость известных положений равновесия тяжелого твердого тела вертикальных высокочастотных вибраций малой амплитуды и малого вязкого трения.

6.1. Постановка задачи

Рассмотрим движение тяжелого твердого тела массы m , в предположении, что точка подвеса O тела совершает вертикальные гармонические колебания относительно некоторой фиксированной точки O_* по закону $O_*O = s \cos \Omega t$. Предполагается, что на тело действует сила вязкого трения, момент которой пропорционален угловой скорости вращения тела вокруг точки O : $M_{\text{тр}} = -\chi \omega$.

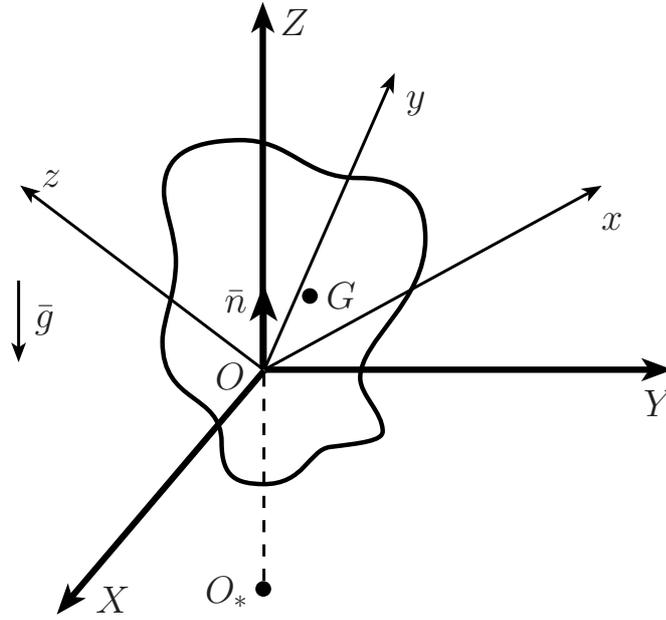


Рис. 31: Вертикальные вибрации тяжелого твердого тела

Введем поступательно движущуюся систему координат $OXYZ$ с осью OZ , направленной вертикально вверх, и связанную с телом систему координат $Oxyz$, оси которой направлены по главным осям инерции тела относительно точки O . При этом выберем и направим оси связанной системы так, чтобы все три координаты центра масс G были положительны.

Тогда движение тела может быть описано при помощи уравнений Эйлера-Пуассона вида:

$$\begin{aligned}
 A\dot{\omega}_x + (C - B)\omega_y\omega_z &= \\
 &= mg(\gamma_2 z_G - \gamma_3 y_G) + ms\Omega^2 \cos \Omega t (\gamma_3 y_G - \gamma_2 z_G) - \chi\omega_x; \\
 B\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_z\omega_x &= \\
 &= mg(\gamma_3 x_G - \gamma_1 z_G) + ms\Omega^2 \cos \Omega t (\gamma_1 z_G - \gamma_3 x_G) - \chi\omega_y; \quad (6.1.1) \\
 C\dot{\omega}_z + (B - A)\omega_x\omega_y &= \\
 &= mg(\gamma_1 y_G - \gamma_2 x_G) + ms\Omega^2 \cos \Omega t (\gamma_2 x_G - \gamma_1 y_G) - \chi\omega_z; \\
 \dot{\gamma}_1 &= \gamma_2\omega_z - \gamma_3\omega_y; \quad \dot{\gamma}_2 = \gamma_3\omega_x - \gamma_1\omega_z; \quad \dot{\gamma}_3 = \gamma_1\omega_y - \gamma_2\omega_x.
 \end{aligned}$$

Здесь A, B, C — главные моменты инерции тела для точки O ; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и x_G, y_G, z_G — соответственно проекции векторов угловой скорости $\bar{\omega}$, орта \bar{n} оси OZ и проекции \mathbf{OG} центра масс G тела на оси связанной системы координат. Здесь и далее точка над символом обозначает дифференцирование по t .

Будем считать, что амплитуда s колебаний точки подвеса мала по сравнению с длиной $r_G = OG = \sqrt{x_G^2 + y_G^2 + z_G^2}$, а частота вибрации Ω много больше характерной частоты $\omega_0 = \sqrt{g/r_G}$, и при этом $s \cdot \Omega \sim \omega_0 \cdot r_G$ (м/с).

Положим

$$s = \varepsilon^2 r_G, \quad g = \varepsilon^4 \Omega^2 r_G \omega_*, \quad (0 < \varepsilon \ll 1),$$

где ω_* — безразмерная частота ($\omega_* \sim 1$).

Будем также считать момент вязкого трения, действующий на тело, малым и коэффициент χ порядка ε . Положим $\chi = ml^2 \Omega \varepsilon^3 \chi_1$, где χ_1 — безразмерный параметр порядка единицы.

Введем безразмерные параметры A_1, B_1, C_1, a, b, c по формулам

$$x_G = r_G a, \quad y_G = r_G b, \quad z_G = r_G c, \quad A = mr_G^2 A_1, \quad B = mr_G^2 B_1, \quad C = mr_G^2 C_1.$$

Перейдем в системе (6.1.1) к безразмерным переменным p, q, r и времени τ по формулам

$$\omega_x = \varepsilon \Omega p, \quad \omega_y = \varepsilon \Omega q, \quad \omega_z = \varepsilon \Omega r, \quad \tau = \Omega t.$$

Уравнения (6.1.1) перепишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\tau} &= \frac{\varepsilon (B_1 - C_1)}{A_1} qr + \frac{\varepsilon (b\gamma_3 - c\gamma_2)}{A_1} \cos \tau + \frac{\varepsilon^3 (c\gamma_2 - b\gamma_3)}{A_1} \omega_* - \frac{\varepsilon^3 \chi_1 p}{A_1}; \\ \frac{dq}{d\tau} &= \frac{\varepsilon (C_1 - A_1)}{B_1} pr + \frac{\varepsilon (c\gamma_1 - a\gamma_3)}{B_1} \cos \tau + \frac{\varepsilon^3 (a\gamma_3 - c\gamma_1)}{B_1} \omega_* - \frac{\varepsilon^3 \chi_1 q}{B_1}; \\ \frac{dr}{d\tau} &= \frac{\varepsilon (A_1 - B_1)}{C_1} pq + \frac{\varepsilon (a\gamma_2 - b\gamma_1)}{C_1} \cos \tau + \frac{\varepsilon^3 (b\gamma_1 - a\gamma_2)}{C_1} \omega_* - \frac{\varepsilon^3 \chi_1 r}{C_1}; \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

$$\frac{d\gamma_1}{d\tau} = \varepsilon (\gamma_2 r - \gamma_3 q); \quad \frac{d\gamma_2}{d\tau} = \varepsilon (\gamma_3 p - \gamma_1 r); \quad \frac{d\gamma_3}{d\tau} = \varepsilon (\gamma_1 q - \gamma_2 p). \quad (6.1.2)$$

Далее, следуя [58, 60], при помощи методов теории возмущений можно найти замену $p, q, r, \gamma_j \rightarrow \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}, \tilde{\gamma}_j$ ($j = 1, 2, 3$), исключаящую время в слагаемых до ε^3 включительно. Эта замена совпадает с той, которая описана в работе [60] в аналогичной задаче без учета сил вязкого трения. Присутствующие в системе (6.1.2) слагаемые, соответствующие моменту вязкого трения, имеют максимальный по ε порядок (третий), не содержат время и остаются в преобразованной системе без изменений. Если в этой системе отбросить члены $O(\varepsilon^4)$, то получим приближенную автономную систему уравнений.

Вернемся затем к исходным размерным величинам, сохраняя для них исходные обозначения. Приближенные уравнения движения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x + (C - B)\omega_y\omega_z &= mg(\gamma_2 z_G - \gamma_3 y_G) + M_x^{(\nu)} - \chi\omega_x; \\ B\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_z\omega_x &= mg(\gamma_3 x_G - \gamma_1 z_G) + M_y^{(\nu)} - \chi\omega_y; \\ C\dot{\omega}_z + (B - A)\omega_x\omega_y &= mg(\gamma_1 y_G - \gamma_2 x_G) + M_z^{(\nu)} - \chi\omega_z; \\ \dot{\gamma}_1 &= \gamma_2\omega_z - \gamma_3\omega_y; \quad \dot{\gamma}_2 = \gamma_3\omega_x - \gamma_1\omega_z; \quad \dot{\gamma}_3 = \gamma_1\omega_y - \gamma_2\omega_x. \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

Здесь $M_x^{(\nu)}$, $M_y^{(\nu)}$ и $M_z^{(\nu)}$ — проекции вектора вибрационного момента [60, 125] на оси связанной системы координат, полученные в работе [60]:

$$\begin{aligned} M_x^{(\nu)} &= \alpha \left[-\frac{1}{A} (\gamma_2 y_G + \gamma_3 z_G) (z_G \gamma_2 - y_G \gamma_3) + \frac{x_G \gamma_2}{B} (x_G \gamma_3 - z_G \gamma_1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_G \gamma_3}{C} (y_G \gamma_1 - x_G \gamma_2) \right]; \\ M_y^{(\nu)} &= \alpha \left[-\frac{1}{B} (\gamma_3 z_G + \gamma_1 x_G) (x_G \gamma_3 - z_G \gamma_1) + \frac{y_G \gamma_1}{A} (z_G \gamma_2 - y_G \gamma_3) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{y_G \gamma_3}{C} (y_G \gamma_1 - x_G \gamma_2) \right]; \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

$$M_z^{(\nu)} = \alpha \left[-\frac{1}{C} (\gamma_1 x_G + \gamma_2 y_G) (y_G \gamma_1 - x_G \gamma_2) + \frac{z_G \gamma_1}{A} (z_G \gamma_2 - y_G \gamma_3) + \right. \\ \left. + \frac{z_G \gamma_2}{B} (x_G \gamma_3 - z_G \gamma_1) \right], \quad (6.1.4)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} m^2 s^2 \Omega^2.$$

Согласно [58] на интервале времени t порядка $\varepsilon^{-1/2}$ решения приближенной системы (6.1.3), (6.1.4) аппроксимируют решения исходной точной системы уравнений движения (6.1.1) с погрешностью, определяемой равенствами

$$\begin{aligned} \omega_x &= \tilde{\omega}_x + \frac{1}{A} m \Omega \sin \Omega t (z_G \tilde{\gamma}_2 - y_G \tilde{\gamma}_3) + O(\varepsilon^{1/2}), \\ \omega_y &= \tilde{\omega}_y + \frac{1}{B} m \Omega \sin \Omega t (x_G \tilde{\gamma}_3 - z_G \tilde{\gamma}_1) + O(\varepsilon^{1/2}), \\ \omega_z &= \tilde{\omega}_z + \frac{1}{C} m \Omega \sin \Omega t (y_G \tilde{\gamma}_1 - x_G \tilde{\gamma}_2) + O(\varepsilon^{1/2}), \\ \gamma_i &= \tilde{\gamma}_i + O(\varepsilon^{3/2}) \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

где знак \sim над символом обозначает принадлежность к переменным, в которых записана приближенная модельная система уравнений движения, а аналогичные символы без этого знака являются переменными полной исходной системы.

Далее будем проводить исследование, оставаясь в рамках приближенной системы (6.1.3), (6.1.4). Она имеет два частных решения

$$p = q = r = 0, \quad \gamma_{10} = \delta \frac{x_G}{r_G}; \quad \gamma_{20} = \delta \frac{y_G}{r_G}; \quad \gamma_{30} = \delta \frac{z_G}{r_G},$$

соответствующих положениям относительного равновесия тела, при которых точка G лежит на одной вертикали с O , находясь выше или ниже ее (случаи $\delta = 1$ и $\delta = -1$ соответственно) (см. рис. 32). Эти относительные равновесия имеются и при отсутствии вязкого трения, в этом случае условия их устойчивости получены в статье [60] для общего и частного случаев геометрии масс твердого тела.

В данной главе исследуется устойчивость указанных положений относительного равновесия при учете вязкого трения в рамках приближенной системы (6.1.3), (6.1.4).

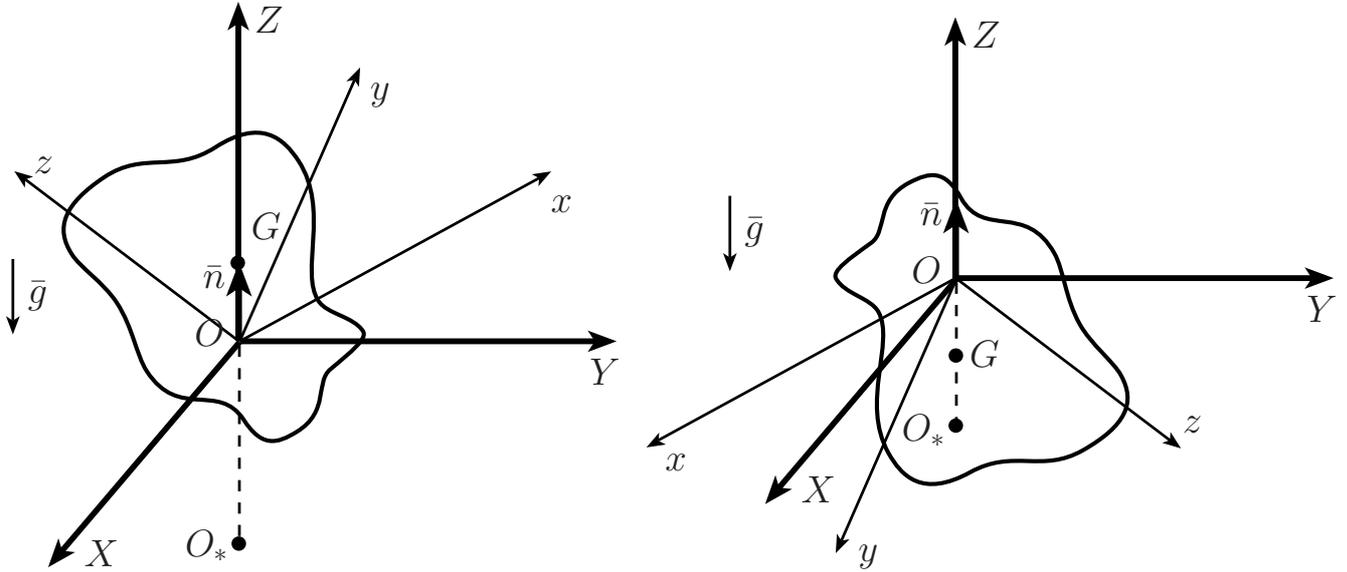


Рис. 32: Вертикальные вибрации тяжелого твердого тела

6.2. Уравнения возмущенного движения

Для исследования устойчивости введем возмущения переменных системы относительных равновесных значений по формулам:

$$\omega_x = x_1; \quad \omega_y = x_2; \quad \omega_z = x_3; \quad \gamma_1 = \gamma_{10} + y_1; \quad \gamma_2 = \gamma_{20} + y_2; \quad \gamma_3 = \gamma_{30} + y_3.$$

Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}y_2 + a_{14}y_3 + X_1(x_2, x_3, y_1, y_2, y_3); \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_2 + a_{22}y_1 + a_{23}y_2 + a_{24}y_3 + X_2(x_1, x_3, y_1, y_2, y_3); \\ \dot{x}_3 &= a_{31}x_3 + a_{32}y_1 + a_{33}y_2 + a_{34}y_3 + X_3(x_2, x_3, y_1, y_2, y_3); \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= a_{41}x_2 + a_{42}x_3 + Y_1(x_2, x_3, y_2, y_3); \\
\dot{y}_2 &= a_{51}x_1 + a_{52}x_3 + Y_2(x_1, x_3, y_1, y_3); \\
\dot{y}_3 &= a_{61}x_1 + a_{62}x_2 + Y_3(x_1, x_2, y_1, y_2),
\end{aligned} \tag{6.2.1}$$

где

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\frac{\chi}{A}; & a_{12} &= \frac{\alpha b_{11}}{A}; & a_{13} &= \frac{mgz_G + \alpha b_{12}}{A}; \\
a_{14} &= \frac{-mgy_G + \alpha b_{13}}{A}; & a_{21} &= -\frac{\chi}{B}; & a_{22} &= \frac{-mgz_G + \alpha b_{21}}{B}; \\
a_{23} &= \frac{\alpha b_{22}}{B}; & a_{24} &= \frac{mgx_G + \alpha b_{23}}{B}; & a_{31} &= -\frac{\chi}{C}; \\
a_{32} &= \frac{mgy_G + \alpha b_{31}}{C}; & a_{33} &= \frac{-mgx_G + \alpha b_{32}}{C}; & a_{34} &= \frac{\alpha b_{33}}{C}; \\
a_{41} &= -\gamma_{30}; & a_{42} &= \gamma_{20}; & a_{51} &= \gamma_{30}; \\
a_{52} &= -\gamma_{10}; & a_{61} &= -\gamma_{20}; & a_{62} &= \gamma_{10}.
\end{aligned} \tag{6.2.2}$$

Коэффициенты b_{ij} имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
b_{11} &= -\frac{z_G x_G}{B} \gamma_{20} + \frac{x_G y_G}{C} \gamma_{30}; \\
b_{12} &= -\frac{z_G x_G}{B} \gamma_{10} - \frac{2 z_G y_G}{A} \gamma_{20} + \frac{y_G^2 - z_G^2}{A} \gamma_{30} + \frac{x_G^2}{B} \gamma_{30} - \frac{x_G^2}{C} \gamma_{30}; \\
b_{13} &= \frac{x_G y_G}{C} \gamma_{10} + \frac{y_G^2 - z_G^2}{A} \gamma_{20} + \frac{x_G^2}{B} \gamma_{20} - \frac{x_G^2}{C} \gamma_{20} + \frac{2 z_G y_G}{A} \gamma_{30}; \\
b_{21} &= \frac{2 z_G x_G}{B} \gamma_{10} + \frac{z_G y_G}{A} \gamma_{20} + \frac{z_G^2 - x_G^2}{B} \gamma_{30} - \frac{y_G^2}{A} \gamma_{30} + \frac{y_G^2}{C} \gamma_{30}; \\
b_{22} &= \frac{z_G y_G}{A} \gamma_{10} - \frac{x_G y_G}{C} \gamma_{30}; \\
b_{23} &= \frac{z_G^2 - x_G^2}{B} \gamma_{10} - \frac{y_G^2}{A} \gamma_{10} + \frac{y_G^2}{C} \gamma_{10} - \frac{x_G y_G}{C} \gamma_{20} - \frac{2 z_G x_G}{B} \gamma_{30}; \\
b_{31} &= -\frac{2 x_G y_G}{C} \gamma_{10} + \frac{x_G^2 - y_G^2}{C} \gamma_{20} + \frac{z_G^2}{A} \gamma_{20} - \frac{z_G^2}{B} \gamma_{20} - \frac{z_G y_G}{A} \gamma_{30}; \\
b_{32} &= \frac{x_G^2 - y_G^2}{C} \gamma_{10} + \frac{z_G^2}{A} \gamma_{10} - \frac{z_G^2}{B} \gamma_{10} + \frac{2 x_G y_G}{C} \gamma_{20} + \frac{z_G x_G}{B} \gamma_{30}; \\
b_{33} &= -\frac{z_G y_G}{A} \gamma_{10} + \frac{z_G x_G}{B} \gamma_{20}.
\end{aligned}$$

Функции X_i и Y_i квадратичны по своим аргументам:

$$X_1 = \alpha (c_{122} y_2^2 + c_{133} y_3^2 + c_{123} y_2 y_3 + c_{112} y_1 y_2 + c_{113} y_1 y_3) - (C - B) x_2 x_3;$$

$$X_2 = \alpha (c_{211} y_1^2 + c_{233} y_3^2 + c_{223} y_2 y_3 + c_{212} y_1 y_2 + c_{123} y_1 y_3) - (A - C) x_1 x_3;$$

$$X_3 = \alpha (c_{322} y_2^2 + c_{311} y_1^2 + c_{323} y_2 y_3 + c_{312} y_1 y_2 + c_{313} y_1 y_3) - (B - A) x_2 x_1;$$

$$Y_1 = x_3 y_2 - x_2 y_3; \quad Y_2 = x_1 y_3 - x_3 y_1; \quad Y_3 = x_2 y_1 - x_1 y_2.$$

Коэффициенты c_{ijk} таковы:

$$c_{122} = -\frac{1}{A} z_G y_G; \quad c_{133} = \frac{1}{A} z_G y_G; \quad c_{112} = -\frac{1}{B} z_G x_G; \quad c_{113} = \frac{1}{C} x_G y_G;$$

$$c_{211} = \frac{1}{B} z_G x_G; \quad c_{233} = -\frac{1}{B} z_G x_G; \quad c_{212} = \frac{1}{A} z_G y_G; \quad c_{223} = -\frac{1}{C} x_G y_G;$$

$$c_{311} = -\frac{1}{C} y_G x_G; \quad c_{322} = \frac{1}{C} y_G x_G; \quad c_{313} = -\frac{1}{A} z_G y_G; \quad c_{323} = \frac{1}{B} x_G z_G;$$

$$c_{123} = -\frac{1}{A} (z_G^2 - y_G^2) + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right) x_G^2;$$

$$c_{213} = -\frac{1}{B} (x_G^2 - z_G^2) + \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) y_G^2;$$

$$c_{312} = -\frac{1}{C} (y_G^2 - x_G^2) + \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) z_G^2.$$

6.3. Об устойчивости относительных равновесий при отсутствии трения

В уравнениях (6.2.1) отбросим нелинейные слагаемые и положим $\chi = 0$.

Характеристическое уравнение полученной линейной системы имеет вид:

$$\lambda^2 (\lambda^4 + p\lambda^2 + q) = 0, \quad (6.3.1)$$

$$p = p_1 \alpha + p_0; \quad q = q_2 \alpha^2 + q_1 \alpha + q_0,$$

где

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{A^2 B^2 C^2 r_G^2} \cdot [A^2 (C^2 + B^2) x_G^2 + B^2 (A^2 + C^2) y_G^2 + C^2 (A^2 + B^2) z_G^2 + \\
&\quad + 2AB (AB + C^2) x_G^2 y_G^2 + 2AC (AC + B^2) x_G^2 z_G^2 + 2BC (BC + A^2) y_G^2 z_G^2]; \\
p_0 &= -\frac{\delta mg}{ABC r_G} [A (C + B) x_G^2 + B (C + A) y_G^2 + C (B + A) z_G^2]; \\
q_2 &= \frac{(Ax_G^2 + By_G^2 + Cz_G^2)^2}{A^2 B^2 C^2}; \\
q_1 &= -\frac{\delta mg (Ax_G^2 + By_G^2 + Cz_G^2)}{A^2 B^2 C^2 r_G} [A (C + B) x_G^2 + B (C + A) y_G^2 + C (B + A) z_G^2]; \\
q_0 &= \frac{g^2 m^2}{ABC} \cdot (Ax_G^2 + By_G^2 + Cz_G^2).
\end{aligned}$$

Уравнение (6.3.1) имеет двойной нулевой корень. Для устойчивости тривиального решения системы необходимо, чтобы остальные его (6.2.1) корни были чисто мнимыми. Последнее условие сводится к системе неравенств

$$p > 0; \quad q > 0; \quad \Delta = p^2 - 4q > 0. \quad (6.3.2)$$

Заметим, что дискриминант Δ квадратного трехчлена (6.3.1) сводится к виду

$$\Delta = \frac{d}{A^2 B^2 C^2 r_G^2} \left(\frac{\mu}{ABC r_G} \alpha - \delta mg \right)^2 \geq 0, \quad (6.3.3)$$

где

$$\begin{aligned}
d &= [A (B - C) x_G^2 - B (A - C) y_G^2 - C (A - B) z_G^2]^2 + \\
&\quad + 4AB (B - C) (A - C) x_G^2 y_G^2,
\end{aligned}$$

причем $d > 0$ для любой геометрии масс тела (см. [60]), а $\mu = A (B + C) x_G^2 + B (A + C) y_G^2 + C (A + B) z_G^2$.

При $\delta = -1$ всегда $\Delta > 0$ и первые два неравенства (6.3.2) очевидно выполняются. Это значит, что при любом α корни будут чисто мнимыми.

Пусть $\delta = 1$. Первое неравенство (6.3.2) выполняется при $\alpha \geq \alpha_* = -p_0/p_1$. Второе неравенство (6.3.2) является квадратичным по α , корни квадратного трехчлена имеют вид

$$\alpha_{1,2} = \frac{mg}{2r_G (Ax_G^2 + By_G^2 + Cz_G^2)} \cdot (\mu \pm \sqrt{d}), \quad (\alpha_1 \geq \alpha_2 > 0).$$

Анализ значений α_1 , α_2 и α_* показывает, что выполнено соотношение $\alpha_1 \geq \alpha_* \geq \alpha_2$. Поэтому при $\delta = 1$ система неравенств (6.3.2) удовлетворяется при условии $\alpha > \alpha_1$.

Значение $\hat{\alpha} = \delta mg \frac{ABC r_G}{\mu}$, которое обнуляет дискриминант (6.3.3), меньше чем α_1 , а следовательно, в область устойчивости не входит.

Полученные необходимые условия устойчивости совпадают с найденными в [60] достаточными условиями устойчивости, найденными с помощью теоремы Румянцева об устойчивости по части переменным [71] как условия минимума функции интеграла энергии системы.

6.4. Исследование устойчивости относительных равновесий твердого тела при наличии вязкого трения

Рассмотрим теперь влияние малого вязкого трения на устойчивость полученных равновесий. Будем исследовать три частных случая геометрии масс тела.

6.4.1. Случай расположения центра масс тела на главной оси инерции

Пусть центр масс тела лежит на оси z , тогда $x_G = y_G = 0$, $z_G \neq 0$. Положим для определенности $A > B$.

Характеристическое уравнение линейной системы, полученной из (6.2.1) путем отбрасывания последних слагаемых, сводится к виду

$$\lambda(\chi + \lambda C) (A^2\lambda^2 + A\chi\lambda + z_G(z_G\alpha - \delta mgA)) \\ (B^2\lambda^2 + B\chi\lambda + z_G(z_G\alpha - \delta mgB)) = 0.$$

Уравнение имеет один нулевой корень, отрицательный вещественный корень $\lambda_1 = -\frac{\chi}{C}$ и четыре корня

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2A} \left(-\chi \pm \sqrt{\chi^2 - 4z_G(z_G\alpha - \delta mgA)} \right), \\ \lambda_{4,5} = \frac{1}{2B} \left(-\chi \pm \sqrt{\chi^2 - 4z_G(z_G\alpha - \delta mgB)} \right).$$

Пусть χ достаточно мало, тогда разлагая в ряд полученные корни по χ и учитывая значения δ , получим:

$$\delta = -1 : \quad \lambda_{2,3} = -\frac{\chi}{2A} \pm \frac{\sqrt{z_G(z_G\alpha + mgA)}}{A} (1 + \dots) i, \\ \lambda_{4,5} = -\frac{\chi}{2B} \pm \frac{\sqrt{z_G(z_G\alpha + mgB)}}{B} (1 + \dots) i; \\ \delta = 1 : \quad \lambda_{2,3} = -\frac{\chi}{2A} \pm \frac{\sqrt{z_G(z_G\alpha - mgA)}}{A} (1 + \dots) i, \\ \lambda_{4,5} = -\frac{\chi}{2B} \pm \frac{\sqrt{z_G(z_G\alpha - mgB)}}{B} (1 + \dots) i.$$

При $\delta = -1$ эти корни будут иметь отрицательные вещественные части. Если же $\delta = 1$, то отрицательность вещественных частей будет иметь место при

выполнении неравенства

$$\alpha > \frac{mgA}{z_G}. \quad (6.4.1)$$

Для исследования устойчивости в случае одного нулевого корня будем пользоваться алгоритмом монографии [36].

В рассматриваемом случае уравнения (6.2.1) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{\chi}{A}x_1 + \frac{mgz_G + \alpha b_{12}}{A}y_2 - \frac{C - B}{A}x_2x_3 - \frac{\alpha}{A^2}z_G^2y_2y_3; \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\chi}{B}x_2 + \frac{-mgz_G + \alpha b_{21}}{B}y_1 - \frac{A - C}{B}x_1x_3 + \frac{\alpha}{B^2}z_G^2y_1y_3; \\ \dot{x}_3 &= -\frac{\chi}{C}x_3 - \frac{B - A}{C}x_1x_2 + \frac{\alpha z_G^2}{C} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) y_1y_2; \\ \dot{y}_1 &= -\gamma_{30}x_2 + x_3y_2 - x_2y_3; \\ \dot{y}_2 &= \gamma_{30}x_1 + x_1y_3 - x_3y_1; \\ \dot{y}_3 &= x_2y_1 - x_1y_2. \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

Приравняем к нулю правые части данной системы, за исключением последнего критического уравнения (не содержащего линейной части), и разрешим полученную алгебраическую систему относительно переменных x_1 , x_2 , x_3 , y_1 , y_2 , как функций от y_3 . Решение системы (6.4.2) будем искать в виде рядов по критической переменной y_3 . Единственным решением получившейся системы уравнений является тривиальное решение $x_1 = x_2 = x_3 = y_1 = y_2 = 0$.

Подставляя его в правую часть критического уравнения, получим тождественный нуль, поэтому в терминологии И.Г. Малкина [36] этот случай является особенным.

Условием устойчивости в особенном случае будут условия отрицательности вещественных корней (кроме имеющегося нулевого корня). При этом по всем переменным, кроме критической y_3 , имеет место асимптотическая устой-

чивость, по критической переменной наблюдается обычная устойчивость (не асимптотическая).

Итак, невозмущенное движение при $\delta = -1$ будет устойчиво в указанном смысле при любых положительных значениях параметра α (частоты вибрации). Если же $\delta = 1$, то устойчивость имеет место при выполнении условия (6.4.1).

6.4.2. Случай динамически симметричного тела

Пусть тело динамически симметрично ($A = B \neq C$), а центр масс занимает произвольное положение и не лежит на оси динамической симметрии. Выберем оси Ox и Oy так, чтобы центр масс лежал в главной плоскости инерции Oxz , тогда $y_G = 0$.

Характеристическое уравнение рассматриваемой линеаризованной системы имеет вид

$$\lambda (A^2\lambda^2 + A\chi\lambda + r_G(r_G\alpha - \delta mgA)) (\Delta_3\lambda^3 + \Delta_2\lambda^2 + \Delta_1\lambda + \Delta_0) = 0, \quad (6.4.3)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \chi r_G^2 [(Ax_G^2 + Cz_G^2)\alpha - \delta ACr_G mg]; \\ \Delta_1 &= ACr_G^2\chi^2 + (Ax_G^2 + Cz_G^2)^2\alpha - \delta ACmgr_G(Ax_G^2 + Cz_G^2), \\ \Delta_2 &= AC\chi r_G^2(A + C); \quad \Delta_3 = A^2C^2r_G^2. \end{aligned}$$

Пусть χ достаточно мало, тогда при $\delta = -1$ корни характеристического уравнения будут иметь отрицательные вещественные части (кроме нулевого корня). Если же $\delta = 1$, то корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2A} \left(-\chi \pm \sqrt{\chi^2 - 4r_G(r_G\alpha - \delta mgA)} \right)$$

квадратного трехчлена в уравнении (6.4.3) будут иметь отрицательные вещественные части при выполнении условия

$$\alpha > \frac{mgA}{r_G}. \quad (6.4.4)$$

Это следует из разложения данного корня по малому параметру χ :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\chi}{2A} \pm \frac{\sqrt{r_G(r_G\alpha - mgA)}}{A} (1 + \dots) i.$$

Далее представим корни кубического многочлена в (6.4.3) в виде ряда по степеням малого параметра χ

$$\lambda = \lambda_0 + \chi\lambda_1 + \chi^2\lambda_2 + \dots \quad (6.4.5)$$

Два корня многочлена будут иметь вид

$$\lambda_{3,4} = -l_1\chi \pm \left(l_0\sqrt{L} - \frac{l_2}{\sqrt{L}}\chi^2 \right) i + \dots, \quad (6.4.6)$$

где

$$\begin{aligned} l_0 &= \sqrt{\frac{Ax_G^2 + Cz_G^2}{A^2C^2r_G^2}} > 0, \quad l_1 = \frac{1}{2} \frac{A^2x_G^2 + C^2z_G^2}{(Ax_G^2 + Cz_G^2)AC} > 0, \\ L &= \alpha (Ax_G^2 + Cz_G^2) - \delta ACr_Gmg, \\ l_2 &= \frac{1}{8} \frac{r_G [A^4x_G^4 + z_G^4C^4 + 2AC(2A^2 + 2C^2 - 3AC)x_G^2z_G^2]}{AC(Ax_G^2 + Cz_G^2)^{\frac{5}{2}}}, \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

а третий корень вещественный отрицательный:

$$\lambda_5 = -\frac{r_G^2}{Ax_G^2 + Cz_G^2}\chi + \dots \quad (6.4.8)$$

В случае $\delta = -1$ корни (6.4.6) комплексно сопряженные с одной и той же отрицательной вещественной частью.

В случае $\delta = 1$ отрицательность вещественных частей имеет место при выполнении условия

$$\alpha > \frac{ACmgr_G}{Ax_G^2 + Cz_G^2}. \quad (6.4.9)$$

Это следует из разложения корней по малому параметру χ вида:

$$\delta = -1 : \quad \lambda_{3,4} = -l_1\chi \pm l_0\sqrt{(Ax_G^2 + Cz_G^2)\alpha + ACr_Gmgi} + \dots;$$

$$\delta = 1 : \quad \lambda_{3,4} = -l_1\chi \pm l_0\sqrt{(Ax_G^2 + Cz_G^2)\alpha - ACr_Gmgi} + \dots$$

В этом случае при сравнении правых частей двух неравенств (6.4.4) и (6.4.9) получим, что

$$1) \text{ для } A > C \text{ система неравенств выполняется при } \alpha > \frac{Amg}{r_G}, \quad (6.4.10)$$

$$2) \text{ а для } A < C \text{ при } \alpha > \frac{ACmgr_G}{Ax_G^2 + Cz_G^2}. \quad (6.4.11)$$

Итак, найдены условия отрицательности вещественных частей линейного уравнения (6.2.1). Для проведения дальнейшего анализа устойчивости уравнения возмущенного движения должны быть приведены к специальному виду, в котором в одном из уравнений будет отсутствовать линейная часть. Процедура описана в [36] и осуществляется с помощью замены переменных

$$\hat{x}_1 = x_1; \quad \hat{x}_2 = x_2; \quad \hat{x}_3 = x_3;$$

$$\hat{y}_1 = y_1; \quad \hat{y}_2 = y_2; \quad \hat{y}_3 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4y_1 + a_5y_2 + a_6y_3.$$

коэффициенты a_i определяются с помощью системы уравнений

$$a_{1k}a_1 + a_{2k}a_2 + a_{3k}a_3 + a_{4k}a_4 + a_{5k}a_5 + a_{6k}a_6 = 0, \quad (k = 1..6),$$

где a_{ik} ($i = 1, \dots, 6; k = 1, \dots, 6$) определены в (6.2.2).

Определитель этой системы равен 0, поэтому система имеет нетривиальные решения. Примем $a_6 = 1$.

Полагая далее

$$p_{sk} = a_{sk} - a_k a_{s6}, \quad p_s = a_{s6},$$

приведем систему (6.2.1) к требуемому виду

$$\begin{aligned} \hat{x}'_1 &= p_{11}\hat{x}_1 + p_{15}\hat{y}_2 + \hat{X}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3); \\ \hat{x}'_2 &= p_{21}\hat{x}_1 + p_{22}\hat{x}_2 + p_{23}\hat{x}_3 + p_{24}\hat{y}_1 + p_{25}\hat{y}_2 + p_2\hat{y}_3 + \\ &\quad + \hat{X}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3); \\ \hat{x}'_3 &= p_{33}\hat{x}_3 + p_{35}\hat{y}_2 + \hat{X}_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3); \\ \hat{y}'_1 &= p_{42}\hat{x}_2 + \hat{Y}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3); \\ \hat{y}'_2 &= p_{51}\hat{x}_1 + p_{53}\hat{x}_3 + \hat{Y}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3); \\ \hat{y}'_3 &= \hat{Y}_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_1, \hat{y}_2), \end{aligned} \tag{6.4.12}$$

где

$$\begin{aligned} p_{11} &= -\frac{\chi}{A}, & p_{15} &= \frac{z_G h_1}{A^2 C r_G}, & p_{21} &= -\frac{x_G^3 z_G h_A h}{A^4 r_G^3 \chi}, & p_{22} &= -\frac{\chi}{A}, \\ p_{23} &= -\frac{x_G^2 z_G^2 h_A h}{A^4 r_G^3 \chi}, & p_{24} &= -\frac{r_G^2 h_A}{A^3 z_G}, & p_{25} &= -\frac{x_G^3 C h_A}{A^3 r_G^2}, & p_{33} &= -\frac{\chi}{C}, \\ p_{35} &= -\frac{x_G h}{A C^2 r_G}, & p_{42} &= -\frac{\delta z_G}{r_G}, & p_{51} &= \frac{\delta z_G}{r_G}, & p_{53} &= \frac{\delta x_G}{r_G}, \\ & & p_2 &= \frac{z_G h_A}{A^2} \end{aligned}$$

и введены обозначения

$$h = -\delta (A x_G^2 + C z_G^2) \alpha + m g r_G A C, \quad h_A = -\delta r_G \alpha + m g A.$$

Функции \hat{X}_i, \hat{Y}_i имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
\hat{X}_1 &= k_{15}^{(1)} \hat{x}_1 \hat{y}_2 + k_{23}^{(1)} \hat{x}_2 \hat{x}_3 + k_{55}^{(1)} \hat{y}_2^2 + k_{45}^{(1)} \hat{y}_1 \hat{y}_2 + k_{35}^{(1)} \hat{x}_3 \hat{y}_2 + k_5^{(1)} \hat{y}_2 \hat{y}_3, \\
\hat{X}_2 &= k_4^{(2)} \hat{y}_1 \hat{y}_3 + k^{(2)} \hat{y}_3^2 + k_{45}^{(2)} \hat{y}_1 \hat{y}_2 + k_{55}^{(2)} \hat{y}_2^2 + k_{13}^{(2)} \hat{x}_1 \hat{x}_3 + k_{14}^{(2)} \hat{x}_1 \hat{y}_1 + \\
&\quad + k_{34}^{(2)} \hat{x}_3 \hat{y}_1 + k_5^{(2)} \hat{y}_2 \hat{y}_3 + k_{11}^{(2)} \hat{x}_1 + k_{33}^{(2)} \hat{x}_3^2 + k_1^{(2)} \hat{x}_1 \hat{y}_3 + \\
&\quad + k_3^{(2)} \hat{x}_3 \hat{y}_3 + k_{35}^{(2)} \hat{x}_3 \hat{y}_2 + k_{15}^{(2)} \hat{x}_1 \hat{y}_2, \\
\hat{X}_3 &= k_{45}^{(3)} \hat{y}_1 \hat{y}_2 + k_5^{(3)} \hat{y}_2 \hat{y}_3 + k_{55}^{(3)} \hat{y}_2^2 + k_{35}^{(3)} \hat{x}_3 \hat{y}_2 + k_{15}^{(3)} \hat{x}_1 \hat{y}_2, \\
\hat{Y}_1 &= k_{35}^{(4)} \hat{x}_3 \hat{y}_2 + k_{24}^{(4)} \hat{x}_2 \hat{y}_1 + k_{25}^{(4)} \hat{x}_2 \hat{y}_2 + k_{12}^{(4)} \hat{x}_1 \hat{x}_2 + k_{32}^{(4)} \hat{x}_3 \hat{x}_2 + k_2^{(4)} \hat{x}_2 \hat{y}_3, \\
\hat{Y}_2 &= k_{15}^{(5)} \hat{x}_1 \hat{y}_2 + k_{34}^{(5)} \hat{x}_3 \hat{y}_1 + k_{14}^{(5)} \hat{x}_1 \hat{y}_1 + k_{15}^{(5)} \hat{x}_1 \hat{y}_2 + k_{11}^{(5)} \hat{x}_1^2 + k_{13}^{(5)} \hat{x}_1 \hat{x}_3, \\
\hat{Y}_3 &= \hat{x}_2 \hat{y}_1 - \hat{x}_1 \hat{y}_2.
\end{aligned} \tag{6.4.13}$$

Коэффициенты $k_{ij}^{(s)}$ ($i = 1 \dots 5, j = 1 \dots 5, s = 1 \dots 5$) получены явно при помощи системы аналитических вычислений Maple, но из-за громоздкости не приводятся.

Приравняем к нулю правые части уравнений (6.4.12) за исключением правой части последнего критического уравнения полученной системы. И будем искать решение в виде рядов по критической переменной \hat{y}_3 . Расчеты показывают, что оно имеет вид

$$\hat{x}_1 = 0, \quad \hat{x}_2 = 0, \quad \hat{x}_3 = 0, \quad \hat{y}_1 = -\frac{p_2}{p_{24}} \hat{y}_3 + \dots, \quad \hat{y}_2 = 0, \tag{6.4.14}$$

многоточие означает совокупность членов выше первой степени по \hat{y}_3 .

Подставляя в \hat{Y}_3 получим тождественный нуль. Поэтому случай также является особенным.

Вновь условия устойчивости совпадают с условиями отрицательности вещественных частей характеристического уравнения (кроме нулевого корня). Таким образом, для случая $\delta = 1$ условия запишутся в виде (6.4.10) и (6.4.11). А

в случае $\delta = -1$ положение равновесия является устойчивым только по критической переменной, по остальным переменным имеет место асимптотическая устойчивость. В случае $A = C$, получаем полное совпадение двух полученных условий (6.4.10) и (6.4.11).

6.4.3. Случай расположения центра масс в главной плоскости инерции

Пусть центр масс тела лежит в главной плоскости инерции Oxz , тогда $y_G = 0$. Характеристическое уравнение линеаризованной системы сводится к виду

$$\lambda (B^2\lambda^2 + B\chi\lambda + r_G(r_G\alpha - \delta mgB)) (\Delta_3\lambda^3 + \Delta_2\lambda^2 + \Delta_1\lambda + \Delta_0) = 0, \quad (6.4.15)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \chi r_G^2 [(Ax_G^2 + Cz_G^2)\alpha - \delta ACr_G mg]; \\ \Delta_1 &= ACr_G^2\chi^2 + (Ax_G^2 + Cz_G^2)^2\alpha - \delta ACmgr_G(Ax_G^2 + Cz_G^2); \\ \Delta_2 &= AC\chi r_G^2(A + C); \quad \Delta_3 = A^2C^2r_G^2. \end{aligned}$$

При $\delta = -1$, по аналогии исследования случая из раздела 6.4.2, вещественные части корней характеристического уравнения отрицательны (кроме нулевого корня).

Рассмотрим случай $\delta = 1$. При условии

$$\alpha > \frac{mgB}{r_G}, \quad (6.4.16)$$

квадратный трехчлен уравнения (6.4.15) имеет пару комплексно сопряженных корней

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2B} \left(\chi \pm \sqrt{\chi^2 - 4r_G(r_G\alpha - \delta mgB)} \right). \quad (6.4.17)$$

с отрицательными вещественными частями.

Это следует из разложения корней по малому параметру χ :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\chi}{2B} \pm \frac{\sqrt{r_G(r_G\alpha - mgB)}}{B} (1 + \dots) i.$$

Аналогично исследованию кубического многочлена из раздела 6.4.2, корни кубического многочлена в (6.4.15) будем искать в виде ряда (6.4.5) по степеням малого параметра χ . Два корня многочлена будут иметь вид (6.4.6) с коэффициентами (6.4.7), а третий корень (6.4.8) вещественный отрицательный. В случае $\delta = -1$ корни (6.4.17) комплексно сопряженные с одной и той же отрицательной вещественной частью. В случае $\delta = 1$ отрицательность вещественных частей имеет место при выполнении условия

$$\alpha > \frac{ACmgr_G}{Ax_G^2 + Cz_G^2}. \quad (6.4.18)$$

Это следует из разложения корней по малому параметру χ вида:

$$\delta = -1 : \quad \lambda_{3,4} = -l_1\chi \pm l_0\sqrt{(Ax_G^2 + Cz_G^2)\alpha + ACr_Gmg}i + \dots;$$

$$\delta = 1 : \quad \lambda_{3,4} = -l_1\chi \pm l_0\sqrt{(Ax_G^2 + Cz_G^2)\alpha - ACr_Gmg}i + \dots$$

Пятый корень имеет вид аналогичный (6.4.8).

При сравнении правых частей двух полученных неравенств (6.4.16) и (6.4.18) имеем, что

1. для $A(B - C)x_G^2 + C(B - A)z_G^2 > 0$ вещественные части корней характеристического уравнения будут отрицательны при $\alpha > \frac{mgB}{r_G}$,
2. а для $A(B - C)x_G^2 + C(B - A)z_G^2 < 0$ при $\alpha > \frac{ACmgr_G}{Ax_G^2 + Cz_G^2}$.

Проводя действия, аналогичные разделу 6.4.2, и вводя следующие обозначения

$$h = -\delta (Ax_G^2 + Cz_G^2) \alpha + mgr_G AC, \quad h_A = -\delta r_G \alpha + mgA, \quad h_B = -\delta r_G \alpha + mgB,$$

приведем систему к виду (6.4.12), где

$$\begin{aligned} p_{11} &= -\frac{\chi}{A}, & p_{15} &= \frac{z_G h}{A^2 C r_G}, & p_{21} &= -\frac{x_G^3 z_G h_B h}{A^4 r_G^3 \chi}, & p_{22} &= -\frac{\chi}{A}, \\ p_{23} &= -\frac{x_G^2 z_G^2 h_B h}{A^4 r_G^3 \chi}, & p_{24} &= -\frac{r_G^2 h_B}{A^3 z_G}, & p_{25} &= -\frac{x_G^3 C h_A}{A^3 r_G^2}, & p_{33} &= -\frac{\chi}{C}, \\ p_{35} &= -\frac{x_G h}{AC^2 r_G}, & p_{42} &= -\frac{\delta z_G}{r_G}, & p_{51} &= \frac{\delta z_G}{r_G}, & p_{53} &= \frac{\delta x_G}{r_G}, \\ & & p_2 &= \frac{z_G h_B}{A^2}. \end{aligned}$$

Расчеты показывают, что нелинейные функции правых частей уравнений совпадают с (6.4.13) кроме функции \hat{X}_3 , которая имеет вид:

$$\hat{X}_3 = k_{45}^{(3)} \hat{x}_4 \hat{y}_2 + k_5^{(3)} \hat{y}_2 \hat{y}_3 + k_{55}^{(3)} \hat{y}_2^2 + k_{35}^{(3)} \hat{x}_3 \hat{y}_2 + k_{15}^{(3)} \hat{x}_1 \hat{y}_2 + k_{12}^{(3)} \hat{x}_1 \hat{x}_2.$$

Коэффициенты $k_{ij}^{(s)}$ ($i = 1 \dots 5, j = 1 \dots 5, s = 1 \dots 5$) из-за громоздкости не приводятся.

Приравнивая полученные правые части уравнений (за исключением критического) ищем решение в виде рядов по \hat{y}_3 . Расчеты показывают, что решение имеет вид (6.4.14).

Подставляя полученные функции в критическое уравнение, получим тождественный нуль. Данный случай также является особенным.

Поэтому в случае $\delta = 1$ условия устойчивости совпадают с условиями отрицательности вещественных частей характеристического уравнения. Условия устойчивости при $A(B - C)x_G^2 + C(B - A)z_G^2 > 0$ и $A(B - C)x_G^2 +$

$C(B - A)z_G^2 < 0$ имеют следующий вид $\alpha > \frac{mgB}{r_G}$ и $\alpha > \frac{ACmgr_G}{Ax_G^2 + Cz_G^2}$ соответственно. В случае $A(B - C)x_G^2 + C(B - A)z_G^2 = 0$ получаем полное совпадение двух условий, налагаемых на α .

Таким образом, вновь получаем, что по всем переменным, кроме критической, имеет место асимптотическая устойчивость, по критической переменной наблюдается обычная устойчивость (не асимптотическая).

Подводя итоги исследования этой главы, можно сделать вывод, что, в рассмотренных случаях геометрии масс твердого тела добавление малого вязкого трения приводит к тому, что по всем переменным, кроме критической, устойчивость, имевшаяся при отсутствии трения, при тех же условиях, накладываемых на частоту вибраций точки подвеса, становится асимптотической. При этом по критической переменной остается обычная устойчивость (не асимптотическая).

Заключение

Сформулируем основные результаты диссертационной работы.

1. Исследованы движения динамически симметричного спутника (твердого тела) относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на круговой орбите, происходящие в окрестности его стационарного вращения (цилиндрической прецессии). В плоскости параметров задачи рассмотрена малая окрестность точки, для которой в системе реализуется кратный параметрический резонанс 1:1 (обе частоты малых линейных колебаний возмущенной системы равны единице), и при этом линейная система устойчива. Решен вопрос о существовании, числе и устойчивости (в строгой нелинейной постановке) однопараметрических семейств резонансных периодических движений оси симметрии спутника, дана геометрическая интерпретация найденных периодических движений. Методами КАМ-теории для двух наборов параметров решен вопрос о существовании условно-периодических движений системы.
2. Исследованы движения близкой к автономной 2π -периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности тривиального равновесия, устойчивого в линейном приближении. В предположении, что в системе реализуется двойной, основной и комбинационный, резонанс третьего порядка (и в полной системе тривиальное равновесие неустойчиво) решен вопрос о существовании и числе положений равновесия соответствующих нормализованных приближенных (модельных) систем, найдены достаточные и необходимые условия их устойчивости. Методом малого параметра Пуанкаре построены периодические (с периодом 12π) движения исходных полных систем, рождающиеся из поло-

жений равновесия модельных систем. Решен вопрос об их устойчивости в линейном приближении. В частности, получены условия существования, в малой окрестности неустойчивого тривиального равновесия, устойчивых (в линейном приближении) периодических движений.

3. Исследована задача о движениях периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности тривиального равновесия, устойчивого в линейном приближении в предположении, что в системе реализуется двойной (основной и комбинационный) резонанс третьего порядка или значения параметров близки к резонансным. Для случая, когда имеется резонансная расстройка по одной из частот линейных колебаний системы, исследован вопрос о существовании и числе резонансных периодических движений в малой окрестности равновесия, проанализированы условия их устойчивости. Проведено сравнение результатов со случаем точного резонанса.
4. Исследованы движения близкой к автономной периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности тривиального положения равновесия, устойчивого в линейном приближении (но неустойчивого в полной нелинейной системе). В предположении, что в рассмотренной системе реализуются одновременно два комбинационных резонанса третьего порядка (сильный и слабый) аналитическими и графическими методами решен вопрос о существовании и числе положений равновесия модельной системы. В пространстве параметров задачи выявлены области, в которых число положений равновесия модельной системы может варьироваться от нуля до пяти.
5. Исследована задача о движении динамически симметричного спутника

(твердого тела) относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на слабоэллиптической орбите в предположении, что в системе имеет место одновременно двойной комбинационный резонанс третьего порядка и резонанс четвертого порядка. В окрестности невозмущенных периодических движений спутника, рождающихся из его стационарных вращений на круговой орбите (гиперболоидальной и конической прецессий), для резонансных значений параметров методом Пуанкаре построены соответствующие резонансные периодические движения спутника и дана их геометрическая интерпретация. Проведено сравнение результатов с результатами модельной системы при отсутствии резонанса четвертого порядка, полученными с помощью теоретических результатов главы 4. Выявлены неустойчивые периодические движения, а также движения, являющиеся устойчивыми для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий и формально устойчивыми.

6. Исследовано движение тяжелого твердого тела в предположении, что точка подвеса тела совершает вертикальные гармонические колебания относительно некоторой фиксированной точки и что на тело действует малая сила вязкого трения, момент которой пропорционален угловой скорости вращения тела. В рамках приближенной автономной системы дифференциальных уравнений найдены условия устойчивости положений относительного равновесия твердого тела. Исследованы случаи расположения центра масс тела на главной оси и в главной плоскости инерции, а также случай динамически симметричного тела. Установлено, что устойчивость при этом будет асимптотической по всем переменным кроме одной, по которой будет наблюдаться обычная устойчивость.

Список литературы

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1974. — 432 с.
2. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Изд. 3-е. — М.: Эдиториал УРСС, 2009. — 416 с.
3. Аругюнов С. С. О демпфированном маятнике с вибрирующей точкой подвеса // Труды Казанского авиационного института. — 1959. — Вып. 45. — С. 93–102.
4. Бардин Б. С. Об орбитальной устойчивости периодических движений гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае резонанса 3:1 // Прикладная математика и механика. — 2007. — Т. 71, № 6. — С. 976–988.
5. Бардин Б. С., Маркеев А. П. Об устойчивости равновесий маятника при вертикальных колебаниях точки подвеса // Прикладная математика и механика. — 1995. — Т. 59, № 6. — С. 922–929.
6. Бардин Б. С., Чекин А. М. О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе 3:1 // Прикладная математика и механика. — 2009. — Т. 73, № 3. — С. 353–367.
7. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Изд-во МГУ, 1965. — 416 с.
8. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. — М.: Изд-во МГУ, 1975. — 308 с.
9. Беличенко М. В. Об устойчивости высокочастотных периодических движений тяжелого твердого тела с горизонтально вибрирующей точкой под-

- веса // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2016. — № 6. — С. 15–28.
10. Беличенко М. В. Об орбитальной устойчивости маятниковых движений в приближенной задаче динамики волчка Ковалевской с вибрирующей точкой подвеса // Прикладная математика и механика. — 2022. — Т. 86, № 2. — С. 169–185.
 11. Беличенко М. В., Холостова О. В. Об устойчивости стационарных вращений в приближенной задаче о движении волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // Нелинейная динамика. — 2017. — Т. 13, № 1. — С. 81–104.
 12. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. — 408 с.
 13. Блехман И. И. Вибрационная механика. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1994. — 400 с.
 14. Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике / Сборник трудов Института строительной механики АН УССР. — Киев: Изд-во АН УССР, 1950. — № 14. — 156 с. — С. 9–34.
 15. Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979. — 255 с.
 16. Вишенкова Е. А. Об устойчивости частных решений приближенных уравнений движения тяжелого твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Нелинейная динамика. — 2015. — Т. 11, № 3. — С. 459–474.
 17. Вишенкова Е. А., Холостова О. В. К динамике двойного маятника с горизонтально вибрирующей точкой подвеса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2012. — Вып. 2. — С. 25–40.

18. Вишенкова Е. А., Холостова О. В. О влиянии вертикальных вибраций на устойчивость перманентных вращений твердого тела вокруг осей, лежащих в главной плоскости инерции // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2017. — Т. 27. Вып. 1. — С. 98–120.
19. Вишенкова Е. А., Холостова О. В. Исследование перманентных вращений тяжелого динамически симметричного твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2017. — Т. 27. Вып. 4. — С. 590–607.
20. Грибков В. А., Хохлов А. О. Экспериментальное исследование устойчивости обращенных стабилизируемых маятников // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. — 2017. — № 2. — С. 22–39.
21. Джакаля Г. Е. О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. Пер. с англ. / Под ред. А. П. Маркеева. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. — 320 с.
22. Дубошин Г. Н. О вращательном движении искусственных небесных тел // Бюллетень Института теоретической астрономии Академии наук СССР. — 1960. — Т. 7, № 7. — С. 511–520.
23. Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1941. — 235 с.
24. Журавлев В. Ф., Петров А. Г., Шундерюк М. М. Избранные задачи гамильтоновой механики. — М.: Ленанд, 2015. — 304 с.
25. Иванов А. П., Сокольский А. Г. Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы при параметрическом резонансе основного типа // Прикладная математика и механика. — 1980. — Т. 44. Вып. 6. — С. 963–970.
26. Исхаков Е. В., Миронов С. В., Сокольский А. Г., Хованский С. А. Алгоритм

- построения периодических движений, рождающихся из конической прецессии симметричного спутника / В сб.: Прикладные методы нелинейного анализа и управления. — М.: Изд-во МГУ, 1987. — 159 с. — С. 3–15.
27. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журнал эксперим. и теорет. физики. — 1951. — Т. 21, № 5. — С. 588–597.
28. Капица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физ. наук. — 1951. — Т. 44, № 1. — С. 7–20.
29. Кондударь В. Т. Частные решения общей задачи о поступательно-вращательном движении сфероида под действием притяжения шара // Астрономический журнал. — 1959. — Т. 36. Вып. 5. — С. 890–901.
30. Красносельский М. А., Бурд Б. Ш., Колесов Ю. С. Нелинейные почти периодические колебания. — М.: Наука, 1970. — 351 с.
31. Куницын А. Л., Маркеев А. П. Устойчивость в резонансных случаях // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Сер. Общая механика. — 1979. — Т. 4. — С. 58–139.
32. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — М.: Наука, 1965. — 204 с.
33. Лаплас П. С. Изложение системы мира. — Л.: Наука, 1982. — 376 с.
34. Ляпунов Л. М. Общая задача об устойчивости движения. — М., Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. — 472 с.
35. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956. — 492 с.
36. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966. — 531 с.
37. Маркеев А. П. Устойчивость стационарного вращения спутника на эллиптической орбите // Космические исследования. — 1965. — Т. 3. Вып. 5. —

- С. 674–676.
38. Маркеев А. П. Резонансные эффекты и устойчивость стационарных вращений спутника // Космические исследования. — 1967. — Т. 5. Вып. 3. — С. 365–375.
 39. Маркеев А. П. О вращательном движении динамически симметричного спутника на эллиптической орбите // Космические исследования. — 1967. — Т. 5. Вып. 4. — С. 530–539.
 40. Маркеев А. П. Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса // Прикладная математика и механика. — 1968. — Т. 32. Вып. 4. — С. 738–744.
 41. Маркеев А. П. К задаче об устойчивости одного случая регулярной прецессии твердого тела в гравитационном поле / Тематический сборник научных трудов Института. Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе. — М.: Изд-во МАИ, 1978. — № 460. — 85 с. — С. 13–17.
 42. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. — М.: Наука, 1978. — 312 с.
 43. Маркеев А. П. Резонанс третьего порядка в гамильтоновой системе с одной степенью свободы // Прикладная математика и механика. — 1994. — Т. 58. Вып. 5. — С. 37–48.
 44. Маркеев А. П. О поведении нелинейной гамильтоновой системы с одной степенью свободы на границе области параметрического резонанса // Прикладная математика и механика. — 1995. — Т. 59. Вып. 4. — С. 569–580.
 45. Маркеев А. П. Параметрический резонанс и нелинейные колебания тяжелого твердого тела в окрестности его плоских вращений // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 1995. — № 5. — С. 34–44.
 46. Маркеев А. П. О критическом случае резонанса четвертого порядка в га-

- мильтоновой системе с одной степенью свободы // Прикладная математика и механика. — 1997. — Т. 61. Вып. 3. — С. 369–376.
47. Маркеев А. П. О критическом случае пары нулевых корней в гамильтоновой системе с двумя степенями свободы // Прикладная математика и механика. — 1998. — Т. 62. Вып. 3. — С. 372–382.
48. Маркеев А. П. О динамике сферического маятника с вибрирующим подвесом // Прикладная математика и механика. — 1999. — Т. 63, № 2. — С. 213–219.
49. Маркеев А. П. О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе 2:1 // Прикладная математика и механика. — 1999. — Т. 63. Вып. 5. — С. 757–769.
50. Маркеев А. П. Исследование устойчивости периодических движений автономной гамильтоновой системы в одном критическом случае // Прикладная математика и механика. — 2000. — Т. 64. Вып. 5. — С. 833–847.
51. Маркеев А. П. К задаче об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы при резонансе 3:1 // Прикладная математика и механика. — 2001. — Т. 65. Вып. 4. — С. 653–660.
52. Маркеев А. П. Устойчивость гамильтоновых систем / В сб.: Нелинейная механика / Под ред. В.М. Матросова, В.В. Румянцева, А.В. Карапетяна. — М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 2001. — 432 с. — С. 114–130.
53. Маркеев А. П. Алгоритм нормализации гамильтоновой системы в задаче об орбитальной устойчивости периодических движений // Прикладная математика и механика. — 2002. — Т. 66. Вып. 6. — С. 929–938.
54. Маркеев А. П. Об одном особом случае параметрического резонанса в задачах небесной механики // Письма в Астрономический журнал. — 2005.

- Т. 31, № 5. — С. 388–394.
55. Маркеев А. П. Кратный резонанс в одной задаче об устойчивости движения спутника относительно центра масс // Письма в Астрономический журнал. — 2005. — Т. 31, № 9. — С. 701–708.
56. Маркеев А. П. О кратном резонансе в линейных системах Гамильтона // Доклады Академии наук. — 2005. — Т. 402, № 3. — С. 339–343.
57. Маркеев А. П. О кратном параметрическом резонансе в системах Гамильтона // Прикладная математика и механика. — 2006. — Т. 70. Вып. 2. — С. 200–220.
58. Маркеев А. П. К теории движения твердого тела с вибрирующим подвесом // Доклады Академии наук. — 2009. — Т. 427, № 6. — С. 771–775.
59. Маркеев А. П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центр масс. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотич. динамика» Институт компьютерных исследований, 2009. — 396 с.
60. Маркеев А. П. Об уравнениях приближенной теории движения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Прикладная математика и механика. — 2011. — Т. 75. Вып. 2. — С. 193–203.
61. Маркеев А. П. О нелинейных колебаниях одной гамильтоновой системы при резонансе 1:1 // Прикладная математика и механика. — 2011. — Т. 75, № 6. — С. 901–922.
62. Маркеев А. П. О движении тяжелого динамически симметричного твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2012. — № 4. — С. 3–10.
63. Маркеев А. П. Об устойчивости стационарного вращения спутника вокруг нормали к плоскости орбиты // Прикладная математика и механика. —

2019. — Т. 83, № 5–6. — С. 691–703.
64. Маркеев А. П., Чеховская Т. Н. Об устойчивости цилиндрической прецессии спутника на эллиптической орбите // Прикладная математика и механика. — 1976. — Т. 40. Вып. 6. — С. 1040–1047.
65. Маркеев А. П., Чеховская Т. Н. О периодических движениях твердого тела, близких его цилиндрической прецессии / В сб.: Некоторые вопросы механики. — М.: Изд-во МАИ, 1978. — Вып. 460. — 85 с. — С. 17–24.
66. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. Учеб. пособие для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1987. — 304 с.
67. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. — М.: Мир, 1973. — 168 с.
68. Мозер Ю. КАМ-теория и проблемы устойчивости. — Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001. — 448 с.
69. Неспирный В. Н., Королев В. А. Стабилизация колебаний маятника с подвижной точкой подвеса относительно наклонного равновесия // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2009. — Вып. 39. — С. 181–192.
70. Неспирный В. Н., Королев В. А. Стационарные режимы сферического маятника с подвижной точкой подвеса // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2011. — № 41. — С. 225–232.
71. Румянцев В. В., Озиранер А. С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1987. — 256 с.
72. Сарычев В. А. Асимптотически устойчивые стационарные вращения спутника // Космические исследования. — 1965. — Т. 3, № 5. — С. 667–673.
73. Сафонов А. И. Исследование устойчивости двух относительных равнове-

- сий твердого тела при наличии быстрых вибраций с учетом сил сопротивления / Материалы Юбилейной 50-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. 13–19 апреля 2012 года. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 2012. — 130 с. — С. 70.
74. Сафонов А. И. Влияние быстрых вибраций и сил сопротивления на устойчивость двух относительных равновесий твердого тела / Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем [Текст] : тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием. Москва, РУДН, 23–27 апреля 2012 года. — М.: Изд-во РУДН, 2012. — 371 с. — С. 213–215.
75. Сафонов А. И. О влиянии вязкого трения на устойчивость равновесий тела с вибрирующим подвесом // Вестник Московского Авиационного Института. — 2014. — Т. 21, № 2. — С. 158–168.
76. Сафонов А. И. О периодических движениях гамильтоновой системы в окрестности неустойчивого равновесия в случае двойного резонанса третьего порядка / XXVII Международная инновационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС - 2015): Труды конференции, материалы конференции (Москва, 2-4 декабря 2015 года). — М.: Изд-во ИМАШ РАН, 2015. — 568 с. — С. 246–249.
77. Сафонов А. И. Периодические движения гамильтоновой системы при наличии двойного резонанса третьего порядка и их устойчивость / 14-я Международная конференция «Авиация и космонавтика - 2015». 16 – 20 ноября 2015 года. Москва. Тезисы. — М.: [б. и.] (типография «Люксор»), 2015. — 520 с. — С. 458–459.
78. Сафонов А. И. Исследование эволюции областей устойчивости в линей-

- ном приближении периодических движений гамильтоновой системы при наличии двойного резонанса третьего порядка / ЛII Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники : тезисы докладов. Москва, РУДН, 17–19 мая 2016 г. — М.: Изд-во РУДН, 2016. — 220 с. — С. 156–158.
79. Сафонов А. И. Исследование положений равновесия модельной гамильтоновой системы в случае двойного резонанса третьего порядка / Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого) : Материалы XVI Международной научной конференции. Москва, ИПУ РАН, 1–3 июня 2022 г. — М.: ИПУ РАН, 2022. — 548 с. — С. 388–391.
80. Сафонов А. И. О периодических движениях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности кратного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. — 2022. — № 126. — URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168988>
81. Сафонов А. И., Холостова О. В. Исследование периодических движений гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при наличии двойного резонанса третьего порядка / LI Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники: тезисы докладов. Москва, РУДН, 12 – 15 мая 2015 г. — М.: Изд-во РУДН, 2015. — 261 с. — С. 158–160.
82. Сафонов А. И., Холостова О. В. О периодических движениях гамильтоновой системы в окрестности неустойчивого равновесия в случае двойного резонанса третьего порядка // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2016. — Т. 26. Вып. 3. — С. 418–438.
83. Сафонов А. И., Холостова О. В. О периодических движениях симметрично-

- го спутника на слабоэллиптической орбите в одном случае кратного комбинационного резонанса третьего и четвертого порядков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2018. — Т. 28. Вып. 3. — С. 373–394.
84. Сокольский А. Г. Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот // Прикладная математика и механика. — 1974. — Т. 38, № 5. — С. 791–799.
85. Сокольский А. Г. Об устойчивости лагранжевых решений ограниченной задачи трех тел при критическом отношении масс // Прикладная математика и механика. — 1975. — Т. 39, № 2. — С. 366–369.
86. Сокольский А. Г. К задаче об устойчивости регулярных прецессий симметричного спутника // Космические исследования. — 1980. — Т. 18. Вып. 5. — С. 698–706.
87. Сокольский А. Г., Хованский С. А. Периодические движения, близкие гиперболоидальной прецессии симметричного спутника на круговой орбите // Космические исследования. — 1979. — Т. 17. Вып. 2. — С. 208–217.
88. Сокольский А. Г., Хованский С. А. О численном продолжении периодических решений лагранжевой системы с двумя степенями свободы // Космические исследования. — 1983. — Т. 21. Вып. 6. — С. 851–860.
89. Стрижак Т. Г. Методы исследования динамических систем типа «маятник». — Алма-Ата: Наука, 1981. — 254 с.
90. Субботин М. Ф. Астрономические работы Лагранжа // Жозеф Луи Лагранж : сборник статей к 200-летию со дня рождения. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1937. — 140 с.
91. Трещев Д. В. Потеря устойчивости в гамильтоновых системах, зависящих от параметров // Прикладная математика и механика. — 1992. — Т. 56.

- Вып. 4. — С. 587–596.
92. Хазин Л. Г. Об устойчивости положения равновесия гамильтоновых систем дифференциальных уравнений (Взаимодействие резонансов третьего порядка). Препринт. — М.: Институт прикладной математики АН СССР, 1981. — № 133. — 20 с.
93. Хазин Л. Г. Взаимодействие резонансов третьего порядка в задачах устойчивости гамильтоновых систем // Прикладная математика и механика. — 1984. — Т. 48. Вып. 3. — С. 494–498.
94. Холостова О. В. О движении близкой к гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе в вынужденных колебаниях // Прикладная математика и механика. — 1996. — Т. 60. Вып. 3. — С. 405–412.
95. Холостова О. В. Параметрический резонанс в задаче о нелинейных колебаниях спутника на эллиптической орбите // Космические исследования. — 1996. — Т. 34. Вып. 3. — С. 312–316.
96. Холостова О. В. О движении гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе в вынужденных колебаниях // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 1996. — № 3. — С. 167–175.
97. Холостова О. В. О нелинейных колебаниях спутника при резонансе третьего порядка // Прикладная математика и механика. — 1997. — Т. 61. Вып. 4. — С. 556–565.
98. Холостова О. В. Об устойчивости периодических движений маятника с горизонтально вибрирующей точкой подвеса // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 1997. — № 4. — С. 35–39.
99. Холостова О. В. О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе четвертого порядка // Прикладная математика и механика. — 1998. — Т. 62. Вып. 6. — С. 957–967.

100. Холостова О. В. О движении близкой к гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе четвертого порядка // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 1999. — № 4. — С. 25–30.
101. Холостова О. В. О периодических движениях неавтономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при параметрическом резонансе основного типа // Прикладная математика и механика. — 2002. — Т. 66. Вып. 4. — С. 540–551.
102. Холостова О. В. О движениях маятника с вибрирующей точкой подвеса / Сборник научно-методических статей. Теоретическая механика. — М.: Изд-во МГУ, 2003. — Т. 24. — 216 с. — С. 157–167.
103. Холостова О. В. О бифуркациях и устойчивости резонансных периодических движений гамильтоновых систем с одной степенью свободы при вырождении гамильтониана // Нелинейная динамика. — 2006. — Т. 2, № 1. — С. 87–108.
104. Холостова О. В. О резонансных периодических движениях гамильтоновых систем с одной степенью свободы при вырождении гамильтониана // Прикладная математика и механика. — 2006. — Т. 70. Вып. 4. — С. 568–580.
105. Холостова О. В. О движениях двойного маятника с вибрирующей точкой подвеса // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2009. — № 2. — С. 25–40.
106. Холостова О. В. О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе третьего порядка // Прикладная математика и механика. — 2010. — Т. 74. Вып. 5. — С. 789–811.
107. Холостова О. В. Исследование нелинейных колебаний гамильтоновых систем с одной степенью свободы при резонансах. Учебное пособие. — М.: Изд-во МАИ, 2011. — 96 с.

108. Холостова О. В. Об устойчивости относительных равновесий двойного маятника с вибрирующей точкой подвеса // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2011. — № 4. — С. 18–30.
109. Холостова О. В. Об устойчивости относительных равновесий твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Вестник Российского университета дружбы народов. Математика. Информатика. Физика. — 2011. — № 2. — С. 111–122.
110. Холостова О. В. О движениях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при наличии кратных резонансов третьего порядка // Нелинейная динамика. — 2012. — Т. 8, № 2. — С. 267–288.
111. Холостова О. В. Об устойчивости частных движений тяжелого твердого тела, обусловленных быстрыми вертикальными вибрациями одной из его точек // Нелинейная динамика. — 2015. — Т. 11, № 1. — С. 99–116.
112. Холостова О. В. О взаимодействии резонансов третьего и четвертого порядков в гамильтоновой системе с двумя степенями свободы // Нелинейная динамика. — 2015. — Т. 11, № 4. — С. 671–683.
113. Холостова О. В. Задачи динамики твердых тел с вибрирующим подвесом. — М. - Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2016. — 308 с.
114. Холостова О. В. Исследование формальной устойчивости неавтономных гамильтоновых систем в случаях кратных резонансов четвертого порядка / Аналитическая механика, устойчивость и управление: Труды XI Международной Четаевской конференции. Т. 2. Секция 2. Устойчивость. Казань, 13 - 17 июня 2017 г. — Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. — 294 с. — С. 268–275.
115. Холостова О. В. О периодических движениях неавтономной гамильтоновой системы в одном случае кратного параметрического резонанса // Нелиней-

- ная динамика. — 2017. — Т. 13, № 4. — С. 477–504.
116. Холостова О. В. О кратных резонансах четвертого порядка в неавтономной гамильтоновой системе с двумя степенями свободы // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2019. — Т. 29. Вып. 2. — С. 275–294.
117. Холостова О. В. О периодических движениях близкой к автономной системы в случаях двойного параметрического резонанса // Прикладная математика и механика. — 2019. — Т. 83, № 2. — С. 175–201.
118. Холостова О. В. О движениях близкой к автономной гамильтоновой системы в случаях двух нулевых частот // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2020. — Т. 30. Вып. 4. — С. 672–695.
119. Холостова О. В., Сафонов А. И. О бифуркациях положений равновесия гамильтоновой системы в случаях двойного комбинационного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. — 2018. — № 100. — URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=93297>
120. Холостова О. В., Сафонов А. И. О гамильтоновой системе в случае двойного комбинационного резонанса третьего порядка / LIV Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. Москва, РУДН, 14 – 18 мая 2018 г. — М.: Изд-во РУДН, 2018. — 311 с. — С. 209–213.
121. Холшевников К. В. Асимптотические методы небесной механики. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. — 208 с.
122. Черноусько Ф. Л. Об устойчивости регулярной прецессии спутника // Прикладная математика и механика. — 1964. — Т. 28. Вып. 1. — С. 155–157.
123. Четаев Н. Г. Устойчивость движения: Учебное руководство. - 4-е издание,

- исправленное. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1990. — 170 с.
124. Чеховская Т. Н. О периодических движениях осесимметричного твердого тела, близких к его конической прецессии / В сборнике: Исследование периодических движений и устойчивости механических систем. — М.: Изд-во МАИ, 1983. — 78 с. — С. 41–49.
125. Юдович В. И. Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями // Успехи механики. — 2006. — Т. 4, № 3. — С. 26–158.
126. Якубович В. А., Старжинский В. М. Параметрический резонанс в линейных системах. — М.: Наука, 1987. — 328 с.
127. Ahmad, B., Stabilization of Driven Pendulum with Periodic Linear Forces, *Journal of Nonlinear Dynamics*, 2013, no. 3, 10 p. URL: <https://doi.org/10.1155/2013/824701>
128. Bardin, B. S., On motions near the Lagrange equilibrium point L4 in the case of Routh's critical mass ratio, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2002, vol. 82, no. 2, pp. 163–177.
129. Bardin, B. S., On nonlinear motions of hamiltonian system in case of fourth order resonance, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2007, vol. 12, no. 1, pp. 86–100.
130. Bardin, B. S., Maciejewski, A. J., Transcendental case in stability problem of Hamiltonian system with two degrees of freedom in presence of first order resonance, *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 2013, vol. 12, iss. 1, pp. 207–216.
131. Belichenko, M. V., On the Stability of Pendulum-type Motions in the Approximate Problem of Dynamics of a Lagrange Top with a Vibrating Suspension Point, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 14, no. 2,

- pp. 243–263.
132. Belichenko, M. V., Linear orbital stability analysis of the pendulum-type motions of a Kovalevskaya top with a suspension point vibrating horizontally / IOP Conference Series: Materials Science And Engineering: 30th International Conference of Young Scientists and Students on "Topical Problems of Mechanical Engineering 2018 TopME 2018, 20–23 November 2018, Moscow, Russia: IOP Publishing Ltd., 2019, vol. 489, 9 p. URL: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/489/1/012034>
 133. Belichenko, M. V., On the equilibriums stability in an approximate problem of the dynamics of a rigid body with a suspension point vibrating along an inclined straight line / Journal of Physics: Conference Series, The International Scientific Conference on Mechanics "The Ninth Polyakhov's Reading", (ISCM) 2021, 09 - 12 March 2021, Saint Petersburg, Russia : IOP Publishing Ltd., 2021, vol. 1959, 7 p. URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1959/1/012007>
 134. Belichenko, M. V., On the Stability of Equilibrium Positions of a Rigid Body with a Suspension Vibrating along a Vertical Ellipse / Proceedings of 2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), STAB 2022, 01 - 03 June 2022, Moscow, Russia: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2022, 3 p. URL: <https://doi.org/10.1109/STAB54858.2022.9807560>
 135. Beth, H. I. E., Les oscillations autour d'une position dans le cas d'existence d'une relation linéaire simple entre les nombres vibratoires, *Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles*, 1910, sér. 2, no. 15, pp. 246–283.
 136. Beth, H. I. E., Les oscillations autour d'une position dans le cas d'existence d'une relation linéaire simple entre les nombres vibratoires (suite), *Archives*

- Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles*, 1912, sér. 3A, no. 1, pp. 185–213.
137. Bezdenejnykh, N. A., Mateo Gabin, Andrés, Zazo Jiménez, Raúl, Double pendulum induced stability, *International Journal of Applied Mechanics*, 2015, vol. 7, no. 6, 15 p. URL: <https://doi.org/10.1142/S175882511550088X>
138. Braun, M., On the applicability of the third integral of motion, *Journal of Differential Equations*, 1973, vol. 13, no. 2, pp. 300–318.
139. Breiter, S., Elipe, A., Pseudo-oscillator with a quartic perturbation, *Mechanics Research Communications*, 2001, vol. 28, no. 2, pp. 119–126.
140. Byrd, P. F., Friedman, M. D., Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists. Second Edition, Revised. Aeronautical Research Scientist National Advisory Committee For Aeronautics (U.S.A.). New York, Heidelberg, Berlin : Springer-Verlang, 1971, 358 p.
141. Charlie, C. L., Die Mechanik des Himmels. Berlin-Leipzig: Walter de Gruyter. 1927. Bd. 1–2. Aufl. 2. 488, 479 s. (Перевод на русский язык: Шарлье К.Л. Небесная механика. — М.: Наука, 1966. — 627 с.)
142. Duistermaat, J. J., Bifurcation of periodic solutions near equilibrium points of Hamiltonian systems, *Lecture Notes in Mathematics*, 1983, no. 1057, pp. 57–105.
143. Erdélyi, A. Über die kleinen Schwingungen eines Pendels mit oszillierendem Aufhängepunkt // ZAMM Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. 1934. Bd. 14. No. 4. S. 235–247.
144. Erdos, G., Singh, T., Stability of a parametrically excited damped inverted pendulum, *Journal of Sound and Vibration*, 1996, vol. 198, no. 5, pp. 643–650.
145. Glimm, J., Formal stability of Hamiltonian systems, *Communications of Pure and Applied Mathematics*, 1964, no. 4, pp. 509–526.

146. Henon, M., Heiles, C., The applicability of the third integral of motion; some numerical experiments, *Astronomical Journal*, 1964, vol. 69, no. 1, pp. 73–79.
147. Henrard, J., Periodic orbits emanating from a resonant equilibrium, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1970, vol. 1, no. 3-4, pp. 437–466.
148. Henrard, J., Lyapunov's center theorem for resonant equilibrium, *Journal of Differential Equations*, 1973, vol. 14, no. 3, pp. 431–441.
149. Hirsch, P. Das Pendel mit oszillierendem Aufhängepunkt // ZAMM Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. 1930. Bd. 10. No. 1. S. 41–52.
150. Hsu, C.S., On a restricted class of coupled Hill's equations and some applications, *Journal of Applied Mechanics*, 1961, no. 28, pp. 551–556.
151. Joyeux, M., Classical dynamics of the 1:1, 1:2 and 1:3 resonance Hamiltonians, *Chemical Physics*, 1996, vol. 203, no. 3, pp. 281–307.
152. Kane, T.R., Attitude stability of Earth-pointing satellites, *AIAA Journal*, 1965, vol. 3, no. 4, pp. 726–731.
153. Kane, T.R., Barba, P.M., Attitude stability of a spinning satellite in an elliptic orbit, *Transactions ASME, Journal of Applied Mechanics*, 1966, vol. 33, no. 2, pp. 402–405.
154. Kane, T.R., March, E.L., Wilson, W.G., Discussion on the paper: "Spin stabiliztion of attitude against gravity torque by W.T. Thomson, *Journal Of The Astronautical Sciences*, 1962, vol. 9, no. 4, pp. 108–109.
155. Kholostova, O.V., Stability of triangular libration points in a planar restricted elliptic three body problem in cases of double resonances, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2015, no. 73, pp. 64–68.
156. Kholostova, O.V., On the motions of one near-autonomous hamiltonian system at a 1:1:1 resonance, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019, vol. 24, no. 3, pp. 235–265.

157. Kholostova, O. V., Investigation of nonlinear oscillations of near-autonomous Hamiltonian systems in the cases of multiple parametric resonances / 2020 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB), Russia, Moscow, V.A. Trapeznikov Institute of control sciences, 03–05 June 2020, Moscow, Russia: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2020, 4 p. URL: <https://doi.org/10.1109/STAB49150.2020.9140709>
158. Kholostova, O. V., On the Dynamics of a Rigid Body in the Hess Case at High-Frequency Vibrations of a Suspension Point, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 16, no. 1, pp. 59–84.
159. Kholostova, O. V., On nonlinear oscillations of a near-autonomous Hamiltonian system in the case of two identical integer or half-integer frequencies, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2021, vol. 17, no. 1, pp. 77–102.
160. Kholostova, O. V., On nonlinear oscillations of time-periodic Hamiltonian systems in the presence of double fourth-order resonances / Journal of Physics: Conference Series, The International Scientific Conference on Mechanics "The Ninth Polyakhov's Reading", (ISCM) 2021, 09-12 March 2021, Saint Petersburg, Russian Federation: IOP Publishing Ltd., 2021, vol. 1959, no. 1, 8 p. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1959/1/012028>
161. Kholostova, O. V., On nonlinear oscillations of a time-periodic hamiltonian system at a 2:1:1 resonance, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2022, vol. 18, no. 4, pp. 481–512.
162. Kholostova, O. V., On Nonlinear Oscillations of a Near-Autonomous Hamiltonian System in One Case of Integer Nonequal Frequencies, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2023, vol. 19, no. 4, pp. 447–471.
163. Kholostova, O. V., Safonov, A. I., A Study of the Motions of an Autonomous

- Hamiltonian System at a 1:1 Resonance, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2017, vol. 22, no. 7, pp. 792–807.
164. Klotter, K., Kotowski, G. Über die Stabilität der Bewegungen des Pendels mit oszillierendem Aufhängepunkt // ZAMM Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. 1939. Bd. 19. No. 5. S. 289–296.
165. Korteweg, D.J., Sur certaines vibrations d'ordre supérieur et d'intensité anormale, vibrations de relation, dans les mécanismes à plusieurs degrés de liberté, *Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles*, 1898, sér. 2, vol. 1, pp. 229–260.
166. Likins, P.W., Stability of symmetrical satellite in attitude fixed in an orbiting reference frame, *Journal Of The Astronautical Sciences*, 1965, vol. 12, no. 1, pp. 18–24.
167. Lowenstern, E.R., The stabilizing effect of imposed oscillations of high frequency on a dynamical system, *Philosophical Magazine*, 1932, no. 8, pp. 458–486.
168. Markeev, A.P., On Nonlinear Resonant Oscillations of a Rigid Body Generated by Its Conical Precession, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 14, no. 4, pp. 503–518.
169. Meyer, K.R., Schmidt, D.S., Periodic orbits near for mass ratios near the critical mass ratio of Routh, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1971, vol. 4, no. 1, pp. 99–109.
170. Modi, V.J., Neilson, J.E., Attitude dynamics of slowly spinning axisymmetrical satellites under the influence of gravity gradient torques, Proceedings of the XXth International astronautical congress, Mar del Plata, 1969 : (Selected papers), New York, Warsaw : Pergamon press Polish scientific publ., 1972, 985 p. pp. 563–596.

171. Neishtadt, A.I., Sheng, K., Bifurcations of phase portraits of pendulum with vibrating suspension point, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2017, no. 47, pp. 71–80.
172. Pringle, R. Jr., Bounds of Librations of a Symmetrical Satellite, *AIAA Journal*, 1964, vol. 2, no. 5, pp. 908–912.
173. Roels, J., An extension to resonant cases of Liapunov's theorem concerning the periodic solutions near a Hamiltonian equilibrium, *Journal of Differential Equations*, 1971, vol. 9, no. 2, pp. 300–324.
174. Schmidt, D. S., Periodic solutions near a resonant equilibrium of a Hamiltonian system, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1974, vol. 9, no. 1, pp. 81–103.
175. Schmidt, D. S., Versal normal form of the Hamiltonian function of the restricted problem of three bodies near L_4 , *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1994, vol. 52, no. 1-3, pp. 155–176.
176. Schmidt, D. S., Sweet, D., A unifying theory in determining periodic families for Hamiltonian systems at resonance, *Journal of Differential Equations*, 1973, vol. 14, no. 3, pp. 597–609.
177. Stephenson, A., On a New Type of Dinamical Stability, *Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society (Manchester memoirs.)*, 1908, vol. 52, no. 2, pp. 1–10.
178. Stephenson, A., On induced stability, *Philosophical Magazine*, 1908, vol. 15, pp. 233–236.
179. Stephenson, A., On induced stability, *Philosophical Magazine*, 1909, vol. 17, pp. 765–766.
180. Sweet, D., Periodic solutions for dynamical systems possessing a first integral in the resonance case, *Journal of Differential Equations*, 1972, vol. 14, no. 1,

pp. 171–183.

181. Thomson W. T., Spin stabiliztion of attitude against gravity torque, *Journal Of The Astronautical Sciences*, 1962, vol. 9, no. 1, pp. 31–33.
182. Van der Meer J. C., Nonsemisimple 1:1 resonance at an equilibrium, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1982, vol. 27, no. 2, pp. 131–149.
183. Wallace F. B. Jr., Meirovich L., Attitude instability regions of a spinning symmetrical satellite in an elliptic orbit, *AIAA Journal*, 1967, vol. 5, no. 9, pp. 1642–1650.