

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи



Рыбаков Константин Александрович

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА
И СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
НЕПРЕРЫВНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Специальность 2.3.1 — Системный анализ, управление
и обработка информации, статистика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор Пантелеев Андрей Владимирович

Москва, 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава 1. Спектральное представление функций времени	24
1.1. Базисные системы и спектральные характеристики функций одной переменной	24
1.2. Базисные системы и спектральные характеристики функций двух переменных	38
1.3. Изменение базисной системы	50
1.4. Спектральные характеристики линейных операторов	54
1.5. Спектральные характеристики операторов умножения	58
1.6. Спектральные характеристики операторов интегрирования	66
1.7. Спектральные характеристики операторов дифференцирования	75
1.8. Линейные преобразования функций времени	84
1.9. Матричные и интегральные следы	86
1.10. Приближенное представление функций	98
1.11. Учет ограничений на значения функций	103
Глава 2. Спектральное представление случайных процессов	116
2.1. Описание случайных процессов в рамках корреляционной теории	116
2.2. Спектральные характеристики случайных процессов	123
2.3. Представление стохастических интегралов	130
2.4. Линейные преобразования случайных процессов	150
2.5. Спектральные характеристики случайных линейных операторов	154
2.6. Спектральные характеристики операторов умножения	158
2.7. Спектральные характеристики операторов стохастического интегрирования .	159
2.8. Приближенное представление случайных процессов	165
Глава 3. Спектральный метод анализа и статистического моделирования линейных непрерывных стохастических систем	180
3.1. Описание стохастических систем дифференциальными уравнениями	180
3.2. Уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова	182
3.3. Спектральный метод решения линейных стохастических дифференциальных уравнений	183
3.4. Применение в теории оценивания	197
3.5. Моделирование типовых случайных процессов	209

3.6. Моделирование турбулентного ветра	232
Глава 4. Спектральное представление функций многих переменных	237
4.1. Базисные системы и спектральные характеристики функций многих переменных	237
4.2. Спектральные характеристики линейных функционалов	253
4.3. Симметризованные функции и их спектральные характеристики	263
4.4. Матричные и интегральные следы	268
4.5. Приближенное представление функций многих переменных	289
Глава 5. Кратные и повторные стохастические интегралы и их статистическое моделирование	305
5.1. Ортогональные системы случайных величин	305
5.2. Кратные стохастические интегралы	312
5.3. Представление кратных стохастических интегралов Ито	314
5.4. Представление кратных стохастических интегралов Стратоновича	325
5.5. Повторные стохастические интегралы	339
5.6. Моменты типовых повторных стохастических интегралов	340
5.7. Приближенное представление кратных стохастических интегралов	350
5.8. Моделирование кратных стохастических интегралов	372
Глава 6. Спектральное представление и статистическое моделирование повторных стохастических интегралов	376
6.1. Представление повторных стохастических интегралов Стратоновича	376
6.2. Представление повторных стохастических интегралов Ито	389
6.3. Моменты типовых повторных стохастических интегралов	430
6.4. Моделирование повторных стохастических интегралов	438
6.5. Численно-спектральные методы решения стохастических дифференциальных уравнений	460
Приложение . Программное обеспечение спектрального метода анализа и статистического моделирования непрерывных стохастических систем	473
П.1. Программы для главы 1	474
П.2. Программы для главы 2	494
П.3. Программы для главы 3	498
П.4. Программы для главы 4	503
П.5. Программы для главы 5	518
П.6. Программы для главы 6	522
Заключение	527
Библиографический список	528

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Для описания динамических систем, состояние которых изменяется в непрерывном времени, используются дифференциальные уравнения. Классическая теория дифференциальных уравнений предполагает, что решениями являются достаточно гладкие детерминированные функции, однако для учета случайных входных воздействий или внешних возмущений необходимо рассматривать дифференциальные уравнения со случайными функциями (случайными процессами) [38]. Если эти случайные функции достаточно регулярны, то при исследовании решений можно обойтись классической теорией. Для нерегулярных случайных функций типа белого шума классическая теория неприменима и в ее развитие, начиная с работ С.Н. Бернштейна [250], Н.Н. Боголюбова и Н.М. Крылова [26], возникла теория стохастических дифференциальных уравнений, строгое обоснование которой связано с работами И.И. Гихмана [35,36] и К. Ито [285,286]. Стохастические дифференциальные уравнения находят применение при описании и анализе различных физических, технических и химических процессов [4, 17, 19, 22, 76, 321], в финансовой математике [18, 102, 239, 337], в биологии и медицине [22, 279], они имеют существенное значение при обработке информации в радиотехнике и навигационных комплексах [225, 226, 229, 230].

При изучении любого стохастического дифференциального уравнения ключевым является его тип и, как следствие, определение решения. Уравнение, рассмотренное К. Ито, основано на понятии стохастического интеграла по винеровскому процессу. Такой интеграл предложил Н. Wiener для детерминированных функций [365] — интеграл по винеровской мере. Конструкция стохастического интеграла К. Ито (стохастический интеграл Ито) предполагает, что интеграл определен для случайных функций. Этот интеграл обладает такими полезными свойствами, как центрированность и изометричность, но одновременно для него несправедливы правила привычного интегрального исчисления и основным инструментом в этом контексте является формула Ито [37, 38, 87, 102]. Со временем появились другие определения стохастических интегралов и связанных с ними стохастических дифференциальных уравнений. Здесь важно отметить работы Р.Л. Стратоновича [226] и D. Fisk [271], независимо предложивших определение стохастического интеграла (стохастический интеграл Стратоновича – Фиска, или стохастический интеграл Стратоновича), для которого выполняются обычные правила интегрального исчисления. Обобщает стохастические интегралы Ито и Стратоновича стохастический θ -интеграл [4, 106, 125, 229]. Более подробно проследить историю возникновения стохастического исчисления можно, например, по статье R. Jarrow и P. Protter [290].

Перечисленные стохастические интегралы определяются как пределы последовательностей

соответствующих интегральных сумм. Интегральные суммы могут включать не сечения случайного процесса, а его интегральные усреднения на непересекающихся подмножествах. Предел последовательности таких интегральных сумм дает симметричный стохастический интеграл (сглаженный стохастический интеграл Стратоновича), свойства которого изучались в работах D. Nualart, E. Pardoux и M. Zakai [328, 330], Ф.С. Насырова [95]. Существуют стохастические интегралы, которые определяются как ряды случайных величин, например стохастический интеграл, предложенный А.В. Скороходом (стохастический интеграл Скорохода) [215], или стохастический интеграл, введенный S. Ogawa (стохастический интеграл Огавы) [332]. Описанные подходы к конструированию стохастических интегралов позволяют расширить класс функций и случайных процессов, для которых такие интегралы существуют. Связи между ними обсуждаются в уже упомянутых работах D. Nualart, E. Pardoux и M. Zakai [328, 330].

Теория стохастических интегралов, разумеется, не исчерпывается интегралами только по винеровскому процессу. Наиболее часто после них упоминаются и применяются интегралы по пуассоновскому процессу (простому или сложному) и по его централизованной версии — интегралы по пуассоновским мерам. Винеровский и пуассоновский процессы — это процессы с независимыми приращениями, а соответствующая теория стохастических интегралов и стохастических дифференциальных уравнений для них наиболее развита [37, 38]. Однако формальный перенос определений стохастических интегралов Ито и Стратоновича при интегрировании по пуассоновскому процессу наталкивается на ряд затруднений. Вариант стохастического интеграла Ито по централизованному пуассоновскому процессу также обладает свойствами централизованности и изометричности, но для него несправедливы правила обычного интегрального исчисления, причем «таблица интегралов» отличается от таковой для стохастических интегралов Ито по винеровскому процессу. Более того, обычные правила интегрирования не применимы и для стохастического интеграла Стратоновича по пуассоновскому процессу. Предлагались варианты интегралов, которые обладают этим удобным для приложений свойством, например стохастические интегралы, которые определили S.I. Marcus [319], а также M. Di Paola и G. Falsone [268]. Сравнительный анализ разных определений стохастических интегралов по пуассоновскому процессу можно найти в статьях Grigoriu M. [276], А. Чечкина и И. Павлюкевича [260], G. Germano, M. Politi, E. Scalas и R.L. Schilling [273], R. Zygadlo [370].

Стохастические интегралы могут быть определены не только по процессам с независимыми приращениями, т.е. по винеровскому либо пуассоновскому процессам, а также по их комбинации (процессу Леви). В этой связи нужно упомянуть стохастические интегралы по процессу, который называют дробным броуновским движением, а также по обобщениям дробного броуновского движения. По этой теме опубликовано большое количество работ, анализ которых здесь не приводится. Тем не менее, укажем монографии Ю. Мишуры и M. Zili [322, 323], F. Viagini, Y. Hu, B. Øksendal и T. Zhang [251]. Общая теория стохастического интегрирования предполагает определение и изучение свойств стохастических интегралов по мартингалам или полумартингалам и в этом контексте стоит обратиться к классической монографии Р.Ш. Липцера и А.Н. Ширяева [88].

С теоретической точки зрения несомненный интерес представляют условия существования и единственности решений стохастических дифференциальных уравнений. Здесь стоит отметить работы И.И. Гихмана и А.В. Скорохода [38], М.Б. Невельсона и Р.З. Хасьминского [96], Р.Ш. Липцера и А.Н. Ширяева [87], А.Ю. Веретенникова и Н.В. Крылова [15], В. Øksendal [102], D.W. Stroock и S.R.S. Varadhan [360], а также многих других авторов. Однако для приложений важны методы нахождения решений конкретных типов уравнений, что является очень непростой задачей. Как правило, при обсуждении аналитических решений стохастических дифференциальных уравнений Ито и Стратоновича рассматриваются линейные уравнения или нелинейные уравнения, которые сводятся к линейным с помощью замены переменных. Большинство примеров, в которых получены аналитические решения стохастических дифференциальных уравнений, построены от обратного, т.е. по аналитическому выражению некоторого случайного процесса строится стохастическое дифференциальное уравнение, решением которого оно является. Обзор различных подходов и методов можно найти в книгах А.А. Левакова [84, 85]. Обратные задачи, рассмотренные в работах В.А. Дубко и Е.В. Карачанской [46, 47, 53, 293], включают построение стохастического дифференциального уравнения по заданному многообразию, которому принадлежат траектории решения.

Так как аналитические решения стохастических дифференциальных уравнений можно отыскать только в некоторых случаях, возникает необходимость в методах, позволяющих найти решение приближенно. Здесь разумно выделить численные методы, которые предполагают дискретную (в дискретном времени) аппроксимацию решения, и приближенно-аналитические методы, позволяющие аппроксимировать решение частичной суммой ряда.

Начиная со статьи G. Mačugaма [320] (стохастический метод Эйлера, метод Эйлера – Маруямы), развиваются численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений. Разные варианты методов типа Рунге – Кутты предлагались в работах P.E. Kloeden и R.A. Pearson [299], Г.Н. Мильштейна [92], Н.Н. Никитина и В.Д. Разевига [98], Y. Saito и T. Mitsui [352], K. Burrage и T. Tian [257], A. Röbler [340], A.J. Roberts [338], X. Xin, W. Qin и X. Ding [368], а также других авторов. Семейство методов типа Розенброка предложено в работах Т.А. Авериной и С.С. Артемьева [2, 4, 5, 240], они включают процедуру регуляризации, что позволяет не накладывать условия на шаг численного интегрирования для устойчивости. Обзоры различных методов решения стохастических дифференциальных уравнений опубликованы E. Pardoux и D. Talay [335], А.В. Лукшиным и С.Н. Смирновым [89], K. Burrage, P.M. Burrage и T. Tian [256], также достаточно полные обзоры содержатся в монографиях Г.Н. Мильштейна и М.В. Третьякова [93, 321], P.E. Kloeden и E. Platen [300], Т.А. Авериной и С.С. Артемьева [4, 16, 240], Д.Ф. Кузнецова [76, 305, 308], С. Graham и D. Talay [275], а также в работах В.К. Саульева [203] и H. Schurz [353].

Отдельно выделим семейства численных методов, в основе которых лежат разложения решения стохастического дифференциального уравнения: разложения Тейлора – Ито и Тейлора – Стратоновича — аналоги разложения в ряд Тейлора решения обыкновенного дифференциального уравнения, полученные в работах W. Wagner, E. Platen и P.E. Kloeden [300, 336, 337, 364], а

также унифицированные разложения Тейлора – Ито и Тейлора – Стратоновича из работ Д.Ф. Кузнецова [76, 77, 305, 308]. Эти разложения содержат повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича по случайным процессам, которые задают стохастическое дифференциальное уравнение, т.е. повторные стохастические интегралы по винеровским процессам для стохастических дифференциальных уравнений с винеровской составляющей и повторные стохастические интегралы по пуассоновским процессам для стохастических дифференциальных уравнений с пуассоновской составляющей. Разностные схемы для соответствующих численных методов включают начальные слагаемые разложений Тейлора – Ито или Тейлора – Стратоновича и максимальная кратность повторных стохастических интегралов в учитываемых слагаемых определяет порядок сходимости конкретного численного метода. Несмотря на то, что указанные разложения содержат повторные стохастические интегралы с простейшими (единичными) весовыми функциями или, после преобразований, с весовыми функциями в виде мономов, в общем случае эти интегралы не выражаются элементарным образом через случайные величины, для которых есть эффективные алгоритмы моделирования.

Самый простой вариант их приближенного моделирования сводится к численному интегрированию, однако для повторных стохастических интегралов по винеровским процессам более продуктивно применять разложение по ортонормированным функциям, что было продемонстрировано Г.Н. Мильштейном [93]. Он ограничился аппроксимацией повторных стохастических интегралов второй кратности, используя тригонометрическую систему функций. Численный метод, в котором применяется указанная аппроксимация, называют методом Мильштейна [4, 76, 300]. Аналогичная аппроксимация, но уже для повторных стохастических интегралов третьей кратности появилась в работе Р.Е. Kloeden и Е. Platen [300]. Варианты аппроксимации интегралов второй кратности обсуждаются в статьях С.В. Li, Х.С. Liu и С.С. Wu [312, 313], F. Kastner, J. Mrongowius и A. Rößler [295, 327], а их распределение изучали Т. Rydén и М. Wiktorsson [351, 367]. Кубатурные формулы для повторных стохастических интегралов произвольной кратности предложили S. Hayakawa и К. Tanaka [280]. Принципиальным является то, что в общем случае, не учитывая в разностной схеме повторные стохастические интегралы, невозможно добиться высокого порядка среднеквадратической или сильной сходимости численного метода. Это показано в работах J.M.C. Clark и R.J. Cameron [262], а также Г.Н. Мильштейна [93].

Перечисленные выше методы приближенного решения стохастических дифференциальных уравнений с некоторыми дополнениями могут применяться и применяются при наличии в уравнении пуассоновской составляющей, а также для уравнений с марковскими или условно-марковскими изменениями правой части. Такие методы и алгоритмы описаны в работах Т.А. Авериной [1, 3, 4], М.К. Ghosh и А. Bagchi [274], F.B. Hanson [279], Е. Platen и N. Bruti-Liberati [337], Н.В. Черных и П.В. Пакшина [234–236].

С одной стороны, повторные стохастические интегралы из разложений Тейлора – Ито и Тейлора – Стратоновича выражаются через решения векторных линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито и Стратоновича, а с другой стороны, их можно рассмат-

ривать как частный случай кратных стохастических интегралов Ито и Стратоновича соответственно. И именно второе обстоятельство послужило основой для методов моделирования повторных стохастических интегралов, предложенных Д.Ф. Кузнецовым [75–77].

Кратные стохастические интегралы появились в статье N. Wiener (винеровский хаос) [366], а далее, как и в случае некрatных стохастических интегралов, К. Itô предложил более удобное определение (кратный стохастический интеграл Ито) [287], которое послужило отправной точкой в теории кратных стохастических интегралов. Она включает кратные стохастические интегралы по винеровским и пуассоновским процессам, а в общем случае по мартингалам или полумартингалам.

Важные результаты в этом направлении были получены такими авторами, как Т. Hida и N. Ikeda [281], Н. Ogura [334], А. Segall и Т. Kailath [354], Р. Major [315], Y. Ito и I. Kubo [289]. Отметим, что перечисленные работы не рассматривают численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений как возможное приложение, кратные стохастические интегралы в них определены относительно одного винеровского или пуассоновского процесса. Их применение — представление случайных величин в виде рядов, образованных кратными стохастическими интегралами возрастающей кратности (хаотическое представление) [288, 328]. Результаты в этой связи опубликованы Ю.М. Кабановым [51], Ю. Кондратьевым и Е. Литвиновым [301], D. Nualart и W. Schoutens [329], J.L. Solé, F. Utzet и J. Vives [359] и другими авторами. Кратные стохастические интегралы Ито применяются для описания предельных распределений U-статистик и V-статистик [29]. В работах R. Fox и M.S. Taqqu [272], J. Szulga [361], M. Farré, M. Jolis и F. Utzet [269], а также Р. Major [316, 317] рассмотрен более общий случай, а именно кратные стохастические интегралы по зависимым или независимым винеровским процессам и кратные стохастические интегралы по процессам Леви. Такие интегралы могут определяться относительно гамма-процессов (см. статьи Ю. Кондратьева и Е. Литвинова [301], M. Farré, M. Jolis и F. Utzet [269]).

Наряду с кратными стохастическими интегралами Ито изучаются и кратные стохастические интегралы Стратоновича. Они отличаются от интегралов Ито тем, что для них выполняется мультипликативное свойство: если функция многих переменных, для которой определен такой интеграл, представляется в виде произведения функций по разным переменным, то интеграл равен произведению кратных стохастических интегралов Стратоновича меньшей кратности от этих множителей. Для интегралов Ито такое свойство не выполняется, однако интеграл Стратоновича не обладает свойствами центрированности и изометричности. В статье Y.-Z. Hu и P.-A. Meyer [282] кратный стохастический интеграл Стратоновича по винеровскому процессу определен через соответствующий повторный стохастический интеграл Стратоновича. Основным результатом упомянутой статьи состоит в доказательстве представления кратного стохастического интеграла Стратоновича в виде суммы кратных стохастических интегралов Ито и, возможно, константы. Эту формулу называют разложением Ху – Мейера, она является аналогом формулы, связывающей некрatные стохастические интегралы Ито и Стратоновича. В развитие работы [282] появились другие определения кратного стохастического интегра-

ла Стратоновича: J.L. Solé и F. Utzet [357] предложили определение, которое предполагает интегральное усреднение функции, причем в следующей своей статье Y.-Z. Hu и P.-A. Meyer назвали определение J.L. Solé и F. Utzet наиболее естественным [283], сравнивая его в том числе и с результатами статьи G.W. Johnson и G. Kallianpur [292], в которой для представления интегралов использовалась теория гильбертовых пространств. Существуют различные обобщения формулы Ху – Мейера, например ее вариант для интегралов от случайных функций рассмотрен в статье R. Delgado и M. Sanz [265]. Значимые результаты в исследовании кратных стохастических интегралов Стратоновича содержатся в статьях X. Vardina, M. Jolis и C. Rovira [248, 249], Д.Ф. Кузнецова [306, 307, 309], причем последние две работы ориентированы именно на численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений.

Сложность кратных стохастических интегралов Стратоновича по винеровским процессам состоит в «проблеме следов». Она заключается в том, что класс функций, для которых определены интегралы Стратоновича, не такой широкий по сравнению с классом функций, для которых определены интегралы Ито (областью определения кратных стохастических интегралов Ито можно считать пространство квадратично интегрируемых функций). Для наглядности можно привести аналогию с теорией линейных операторов: отличия между областями определения кратных стохастических интегралов Ито и Стратоновича отчасти аналогичны отличиям между множествами ядер операторов Гильберта – Шмидта и операторов следового класса (см. статью J. Rosinski [339]).

Помимо приведенных выше типов кратных стохастических интегралов, существуют кратные стохастические интегралы Скорохода и Огавы. Определения и аналоги формулы Ху – Мейера для них содержатся в статьях D. Nualart и M. Zakai [331], R. Delgado [264].

Перечисленные результаты отчасти переносятся на кратные стохастические интегралы Стратоновича по пуассоновским процессам и гамма-процессам. Они получены в статьях J.L. Solé и F. Utzet [358], M. Farré, M. Jolis и F. Utzet [269]. Но подобные интегралы сложнее и имеют меньше приложений. Кратные стохастические интегралы по гауссовским процессам (не обязательно винеровским) рассматривались в статьях А.А. Филипповой [231], S.T. Huang и S. Cambanis [284]. В частности, можно определить кратные стохастические интегралы по дробным броуновским движениям и соответствующие результаты опубликованы, например, в статьях A. Dasgupta и G. Kallianpur [263], M. Jolis [291], C. Tudor и M. Tudor [362]. Вариант кратного стохастического интеграла без условия ортогональности интегрирующей меры предложен И.С. Борисовым и А.А. Быстровым [27].

Приведенный обзор по кратным стохастическим интегралам охватывает ряд важных результатов. Тем не менее, за редким исключением работ Д.Ф. Кузнецова [75–77, 306, 307, 309] описанные результаты слабо применимы для численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений и здесь можно выделить два обстоятельства.

Первое обстоятельство связано с тем, что в большинстве перечисленных работ кратные стохастические интегралы определены относительно одного случайного процесса (винеровского, пуассоновского или какого-либо другого) и этого достаточно для хаотического представления

случайных величин. Но повторные стохастические интегралы, рассматриваемые как частный случай кратных и используемые при построении численных методов, должны определяться относительно всех комбинаций случайных процессов, которые выбираются из некоторого конечного множества независимых случайных процессов, в том числе и с повторениями. Интеграл по одному случайному процессу — это только один из вариантов. Вообще говоря, можно выделить два предельных варианта: интеграл по одному случайному процессу и интеграл по независимым случайным процессам. Интегралы второй кратности этими двумя вариантами и исчерпываются, однако для интегралов большей кратности есть промежуточные варианты, число которых растет с увеличением кратности.

Второе обстоятельство состоит в том, что для реализации численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений, построенных на основе разложений Тейлора — Ито и Тейлора — Стратоновича, а также их унифицированных версий, требуется моделировать повторные стохастические интегралы. Только для некоторых из них существуют простые моделирующие формулы, их можно найти, например, в монографии Р.Е. Kloeden и Е. Platen [300], однако в общем случае необходимо разрабатывать алгоритмы приближенного моделирования. Как указано выше, для повторных стохастических интегралов второй кратности такой алгоритм предложен Г.Н. Мильштейном [93]. Для повторных стохастических интегралов третьей кратности варианты описаны в монографиях Р.Е. Kloeden и Е. Platen [300], Т.А. Авериной и С.С. Артемьева [240]. В указанных работах использовались разложения винеровских процессов в ряды по тригонометрическим функциям. Кроме того, в работе С.М. Пригарина и С.М. Белова [121] для аппроксимации повторных стохастических интегралов второй кратности дополнительно применялись функции Хаара. Апробация алгоритмов приближенного моделирования повторных стохастических интегралов третьей кратности проведено Т.А. Авериной и С.М. Пригариным [6].

Значительное продвижение в аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича достигнуто Д.Ф. Кузнецовым [76, 305, 308]. Предложенный им подход предполагает переход к соответствующим кратным стохастическим интегралам с последующим их представлением в виде кратных рядов со случайными коэффициентами. При этом используется разложение детерминированных функций многих переменных в обобщенные ряды Фурье. В качестве базисных систем для представления повторных стохастических интегралов произвольной кратности основное внимание уделено полиномам Лежандра и тригонометрическим функциям, но также применялись функции Уолша и Хаара для представления повторных стохастических интегралов второй кратности. При этом доказательство сходимости частичных сумм рядов к соответствующим повторным стохастическим интегралам Стратоновича опирается на вид базисной системы. В указанных работах получены варианты формул для вычисления погрешностей аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича.

Отметим, что представление кратных стохастических интегралов в виде рядов встречалось и ранее, например в работах J. Rosinski [339], G.W. Johnson и G. Kallianpur [292], но

без приложения к решению стохастических дифференциальных уравнений и с указанными выше ограничениями. Кратные стохастические интегралы Огавы сразу определяются как ряды [332, 333] и при выполнении ряда условий они совпадают с кратными стохастическими интегралами Стратоновича. В этом контексте стоит еще указать на работы И.С. Борисова и С.Е. Хрущева [28, 29], в которых также используются представления кратных стохастических интегралов в виде рядов.

Приведенный обзор показывает, что, несмотря на довольно развитую теорию кратных и повторных стохастических интегралов, она далека от завершения особенно в области приложений к численным методам решения стохастических дифференциальных уравнений, а значит и к методам анализа и статистического моделирования непрерывных стохастических систем. Ее совершенствование в этой части является актуальной задачей. Представляет как теоретический, так и практический интерес использование произвольных базисных систем пространства квадратично интегрируемых функций одной переменной для представления кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича, в том числе и более общего вида по сравнению с интегралами, которые необходимы для реализации численных методов. Актуально формирование новых алгоритмов приближенного моделирования кратных и повторных стохастических интегралов.

При приближенном решении стохастических дифференциальных уравнений альтернативой численным методам могут служить приближенно-аналитические методы, которые не предполагают переход к дискретному времени. Они основаны на приближенном представлении решений в виде линейных комбинаций базисных функций со случайными коэффициентами. И здесь перспективным является применение спектральной формы математического описания систем управления.

Для моделей линейных непрерывных и дискретных систем управления, как правило, используют следующие формы математического описания [105, 209]:

- 1) дифференциальными и разностными уравнениями;
- 2) интегральными уравнениями и их разностными аналогами;
- 3) интегральными преобразованиями.

При выборе первых двух форм математического описания преобразование сигналов в системе управления осуществляется непосредственно во временной области, а третья форма предполагает переход от функций времени к их изображениям с помощью подходов, применяемых в операционном исчислении.

В 60-х годах XX века В.В. Семеновым [206, 212, 213] был разработан спектральный метод расчета нестационарных систем управления. Этот метод породил новую спектральную форму математического описания сигналов и систем управления. Истоки спектрального метода расчета линейных нестационарных систем управления лежат в представлении сигналов в виде ортогональных рядов. Коэффициенты этих рядов, отделенные от самих рядов и представленные в виде упорядоченного набора — бесконечной матрицы-столбца, рассматриваются как характеристики сигналов и систем управления. Они составляют математический аппарат

анализа и синтеза линейных и нелинейных систем управления. Этот математический аппарат включает следующие характеристики сигналов: нестационарные спектральные характеристики функций времени и нестационарные спектральные плотности случайных процессов, а также характеристики систем управления — нестационарные передаточные функции: нормальную, сопряженную и двумерную (двумерные нестационарные передаточные функции будем также называть спектральными характеристиками линейных операторов [349]). Все спектральные характеристики определены для функций, включая и обобщенные функции, на конечных или бесконечных интервалах времени относительно широкого класса ортонормированных или биортонормированных систем функций (базисных систем). В дальнейшем были введены нестационарные спектральные характеристики функций времени и вектора состояния для систем управления с распределенными параметрами, многомерные нестационарные передаточные функции, различные вспомогательные характеристики, например двумерные нестационарные характеристики связи.

Для линейных систем управления использование спектральной формы математического описания и спектрального метода состоит в переходе от исходной задачи решения линейных дифференциальных, интегро-дифференциальных, разностных уравнений, уравнений с отклоняющимся аргументом к решению системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения решений этих уравнений в ортогональные ряды по выбранной базисной системе. Основные результаты по спектральному методу были опубликованы в монографиях В.В. Солодовникова и В.В. Семенова [220–222], В.В. Солодовникова, А.Н. Дмитриева и Н.Д. Егупова [219]. Обобщение спектрального метода для моделирования и анализа непрерывно-дискретных систем управления и развитие алгоритмического обеспечения связано с работами В.В. Рыбина [190–192, 196–198, 210, 211].

Отличительной особенностью спектральной формы математического описания является то, что все операции при решении задач производятся не с ортогональным рядом, а с упорядоченным набором коэффициентов при базисных функциях, т.е. со спектральной характеристикой. Элементарным и типовым звеньям линейных систем, например усилительному, дифференцирующему, интегрирующему, апериодическому, колебательному и др., ставятся в соответствие бесконечные матрицы, а преобразования сигналов сводятся к линейным преобразованиям спектральных характеристик. Фактически, рассматриваемый спектральный метод основан на матричном представлении линейных операторов в гильбертовых пространствах [21, 278] и в книгах К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова [90], С.В. Лапина и Н.Д. Егупова [83] его называют методом матричных операторов.

Спектральная форма математического описания систем управления, как и другие формы, позволяет проводить анализ не только линейных непрерывных, дискретных и непрерывно-дискретных систем управления с сосредоточенными параметрами при детерминированных и случайных воздействиях, но и анализ линейных систем управления с распределенными параметрами (см. работы Ю.А. Клевцова и В.Е. Краскевича [55–58, 72, 73], В.А. Коваля и О.Ю. Торгашовой [61–64]), а также нелинейных стохастических систем управления (см. работы В.В.

Семенова и И.Л. Сотсковой [205, 207, 208, 223, 224, 355], А.В. Пантелеева, К.А. Рыбакова и И.Л. Сотсковой [7, 107–113, 137, 142, 184, 243, 246, 247], А.С. Кожевникова и К.А. Рыбакова [65–68]). Впоследствии спектральный метод был распространен на системы управления, модели которых содержат дробные интегрирующие и дифференцирующие звенья, т.е. с систем управления, содержащих дифференциальные операторы целого порядка, на системы управления, которые включают дифференциальные и интегральные операторы дробного порядка. Соответствующие результаты опубликованы В.В. Васильевым и Л.А. Симак [31], К.А. Рыбаковым и В.В. Рыбиным [177, 180, 181, 199, 201], а также другими авторами.

Различные задачи для линейных систем управления при случайных воздействиях или для нелинейных стохастических систем в перечисленных выше работах предлагалось решать как детерминированные: либо в рамках корреляционной теории, т.е. задача анализа выходных процессов решалась как детерминированная, где случайные входные и выходные сигналы задавались своими математическими ожиданиями и корреляционными функциями, либо осуществлялся переход к нахождению плотности распределения вероятностей вектора состояния. Однако спектральный метод дает возможность находить явный вид выходного сигнала как случайного процесса, т.е. не ограничиваться детерминированными характеристиками вектора состояния. Отчасти эти вопросы нашли отражение в монографиях В.В. Солодовникова и В.В. Семенова [220, 222], С.В. Лапина и Н.Д. Егупова [83], К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова и А.И. Трофимова [126], но в них не содержится представлений решения задачи анализа линейных непрерывных стохастических систем в общей постановке.

Существует близкий метод, основанный на канонических разложениях случайных процессов, который был предложен В.С. Пугачевым [122] и подробно описан в монографии И.Н. Сеницына [214], однако он не применялся для того, чтобы получить представления кратных и повторных стохастических интегралов. И спектральная форма математического описания, и метод канонических разложений предполагают, что случайные процессы представляются в виде рядов со случайными коэффициентами. Однако, если для канонического разложения линейное преобразование сводится к преобразованию детерминированных функций с сохранением случайных коэффициентов, то для спектрального метода линейное преобразование сохраняет детерминированные функции (ортонормированный базис), а все действия осуществляются со случайными коэффициентами. Это отличие позволяет существенно упростить алгоритмы преобразований случайных процессов, сводя их к алгебраическим операциям с векторами и матрицами.

Дополнительно укажем работы по решению стохастических дифференциальных уравнений, представленные Z. Yin и S. Gan [369], F. Mohammadi [324], N. Momenzade, A.R. Vahidi и E. Babolian [325], S.U. Khan, M. Ali и I. Ali [296, 297], C. Chauvière и H. Djellout [259], в которых применяются различные варианты спектрального метода (но не спектральной формы математического описания систем управления). Варианты методов, относящихся к спектральным, и их возможные приложения описаны в книгах В.-Y. Guo [277], J.P. Boyd [252], L.N. Trefethen [363].

Обобщение спектрального метода для анализа и статистического моделирования линейных непрерывных стохастических систем в общей постановке представляется актуальной и имеющей как теоретическую, так и практическую значимость. Во-первых, такой метод позволяет представить выходные сигналы линейных непрерывных систем при случайных воздействиях как случайные процессы в форме, удобной для решения задач анализа, статистического моделирования и оценивания. Во-вторых, он дает новые представления повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича произвольной кратности, что позволяет применять спектральную форму математического описания систем управления для реализации численных методов решения нелинейных СДУ и, таким образом, решать задачи анализа, статистического моделирования и оценивания для нелинейных непрерывных стохастических систем.

Расчет систем автоматического управления на основе спектральной формы математического описания предполагает наличие развитого алгоритмического и программного обеспечения, которое необходимо для вычисления характеристик сигналов и систем управления относительно различных базисных функций. Оно разрабатывалось и совершенствовалось вместе с развитием спектральной теории.

В 70-х годах для расчета систем управления использовались пакеты подпрограмм спектрального метода, написанные на языках Алгол-60 и Фортран для ЭВМ серий М (М-220, М-222) и БЭСМ (БЭСМ-4) [222], а в начале 80-х годов были заложены принципы построения систем автоматизированного проектирования систем управления с диалоговыми формирователями программ. Их основу составили система элементарных алгоритмов динамического расчета, ориентированная на предметную область теории управления, и система специализированных алгоритмов динамического расчета, предназначенная для решения конкретных прикладных задач. В частности, были разработаны модули спектрального метода на языках программирования Алгол-60, Фортран и PL/1 для ЭВМ серии ЕС (ЕС 1022) (авторы — И.Г. Грибков, В.М. Репин, Е.А. Руденко, В.В. Рыбин, В.И. Сивцов и др.) [12, 205, 209]. Спектральная форма математического описания наряду с другими формами использовалась для расчета систем автоматического управления в диалоговой системе КИПАРИС (диалоговая система коллективного интерактивного пользования для анализа, расчета и исследования систем, авторы — Г.А. Перепелкин и В.Е. Зотов) для ЭВМ серии ЕС (ЕС 1022, ЕС 1033, ЕС 1045 и др.) [117, 204].

В начале 90-х годов появилась система СПЕКТР для расчета систем автоматического управления спектральным и частотным методами, а также методом моделирования для ПЭВМ, совместимых с IBM-PC (автор — В.И. Виноградов) [33, 49]. Особенностью используемого подхода является задание систем управления с помощью структурных схем, что обеспечивает наглядность и простоту решения задач анализа. Другой подход использован в системе ИКС-АЛГОРИТМ (автор — Е.Н. Галанина) [34], в основе которой лежит ввод формул в директивном режиме на ограниченном языке, ориентированном на применение библиотеки подпрограмм спектрального метода. Однако все описанные программные средства не отвечают современным требованиям, предъявляемым к программному обеспечению, они разрабатывались для устаревших компьютеров и операционных систем.

В настоящее время алгоритмическое и программное обеспечение спектрального метода реализовано в виде пакетов расширений систем компьютерной математики Mathcad, Maple, Mathematica, Matlab и систем визуального моделирования Simulink, VisSim (автор — В.В. Рыбин) [193–195, 200, 201], а также в виде модулей для расчетной системы Spectrum (автор — К.А. Рыбаков) [128, 150, 185]. Более подробный обзор указанных результатов можно найти в публикациях К.А. Рыбакова и В.В. Рыбина [150, 179]. Отметим, что в приведенном обзоре развитие алгоритмического и программного обеспечения спектрального метода, а также его современное состояние рассматривается в рамках работ, проведенных по большей части на кафедре «Математическая кибернетика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета).

С одной стороны, упомянутые выше пакеты расширения систем компьютерной математики и систем визуального моделирования можно считать вполне современными и они могут функционировать в новых версиях соответствующих программ, а последняя версия расчетной системы Spectrum позволяет задействовать для расчетов спектральным методом современные технологии параллельного программирования [59, 60, 140], например OpenMP, OpenCL, nVidia CUDA и др. С другой стороны, перечисленные комплексы программ создавались для задач, в перечень которых не входило моделирование случайных процессов, а также кратных и повторных стохастических интегралов. Пакеты расширения систем компьютерной математики и систем визуального моделирования разрабатывались на тех же принципах, что и первое программное обеспечение спектрального метода. В этой связи разработка нового комплекса программ, ориентированного на моделирование кратных и повторных стохастических интегралов, также является необходимой частью исследований. В качестве базы выбрана система компьютерной математики Mathcad.

Объектом исследования являются математические модели непрерывных стохастических систем, описываемых линейными и нелинейными стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ), кратные и повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича.

Предметом исследования являются приближенно-аналитические и численные методы анализа выходных процессов и статистического моделирования непрерывных стохастических систем, основанные на спектральной форме математического описания систем управления, методы аппроксимации кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича.

Цель работы состоит в обобщении спектрального метода для анализа выходных процессов и статистического моделирования непрерывных стохастических систем, получении новых представлений кратных и повторных стохастических интегралов, а также в разработке алгоритмов их статистического моделирования. Чтобы достичь поставленной цели, необходимо решить следующие **задачи**:

1. Разработать алгоритмическое обеспечение представления случайных процессов в спектральной форме математического описания систем управления.
2. Обобщить спектральный метод для анализа и статистического моделирования линейных непрерывных стохастических систем.

3. Обобщить спектральный метод для оценивания состояний линейных непрерывных стохастических систем с полиномиальными измерителями.
4. Получить новые представления кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича произвольной кратности, в том числе на основе спектральной формы математического описания систем управления.
5. Разработать новые алгоритмы статистического моделирования кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича произвольной кратности, в том числе необходимых для статистического моделирования нелинейных непрерывных стохастических систем.
6. Разработать алгоритмическое обеспечение статистического моделирования кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича на основе спектральной формы математического описания систем управления, провести апробацию предложенных методов и алгоритмов.

Методы исследования. Для решения поставленных задач использовались методы математического и функционального анализа, теории управления, теории вероятностей и математической статистики, теории случайных процессов.

Достоверность результатов обусловлена доказательствами утверждений и теорем. Результаты моделирования и вычислительные эксперименты подтверждают теоретические положения.

Научная новизна состоит в следующих результатах:

1. Разработано алгоритмическое обеспечение представления случайных процессов в спектральной форме математического описания систем управления.
2. Обобщен спектральный метод для анализа и статистического моделирования линейных непрерывных стохастических систем, получены представления некоторых типовых случайных процессов в спектральной форме математического описания систем управления.
3. Обобщен спектральный метод для оценивания состояний (фильтрация, сглаживание и прогнозирование) линейных непрерывных стохастических систем с полиномиальными измерителями.
4. Получены ортогональные разложения кратных стохастических интегралов Ито и Стратоновича произвольной кратности в виде рядов случайных величин, которые необходимы в том числе для статистического моделирования нелинейных непрерывных стохастических систем.
5. Разработаны методы расчета коэффициентов разложения функций многих переменных (относительно полиномов Лежандра, косинусоид, функций Уолша и Хаара, тригонометрических функций), определяющих повторные стохастические интегралы, необходимые для реализации методов статистического моделирования нелинейных непрерывных стохастических систем.
6. Получены представления повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича произвольной кратности на основе спектральной формы математического описания систем управления.

7. Получены формулы для точного вычисления среднеквадратических погрешностей аппроксимации кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича на основе перехода к симметризованным функциям.
8. Разработан метод аппроксимации множества спектральных характеристик функций одной переменной с ограничениями (типовыми ограничениями на управляющие воздействия или входные/выходные сигналы).
9. Разработано алгоритмическое обеспечение статистического моделирования кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича на основе спектральной формы математического описания систем управления.

Теоретическая значимость результатов состоит в развитии спектральной формы математического описания случайных процессов в непрерывном времени, которые можно трактовать как сигналы в непрерывных системах управления; в обобщении спектрального метода для анализа, статистического моделирования и оценивания состояний непрерывных стохастических систем; в новых представлениях кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича; в новом алгоритмическом обеспечении статистического моделирования повторных стохастических интегралов.

Практическая значимость результатов обусловлена возможностью применения разработанных методов, алгоритмов и комплекса программ для решения задач анализа и статистического моделирования непрерывных стохастических систем, в задачах оценивания их состояний, т.е. в задачах статистической обработки информации (в естественно-научной, технической и финансовой сферах).

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В диссертации обобщен спектральный метод для анализа, статистического моделирования и оценивания состояний линейных непрерывных стохастических систем, базирующийся на спектральной форме математического описания систем управления. На его основе получены новые представления кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича, а также разработано алгоритмическое и программное обеспечение для их статистического моделирования. Они предназначены для реализации методов статистического моделирования нелинейных непрерывных стохастических систем (в основе численные методы решения СДУ с высокими порядками среднеквадратической и сильной сходимости). Полученные результаты могут применяться при решении задач анализа выходных процессов, статистического моделирования и оценивания для нелинейных непрерывных стохастических систем, т.е. в задачах статистической обработки информации. Перечисленные результаты соответствуют следующим направлениям исследований специальности 2.3.1 «Системный анализ, управление и обработка информации, статистика»:

1. Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.
2. Формализация и постановка задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

4. Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.
5. Разработка специального математического и алгоритмического обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

Личный вклад. Все результаты диссертации получены лично автором. Из результатов, опубликованных в соавторстве, в диссертацию включен только материал, вклад соискателя в который был определяющим.

Структура и объем диссертации. Диссертация содержит введение, шесть глав, приложение, заключение и список используемой литературы. Работа изложена на 548 страницах, включает 167 рисунков, 139 таблиц и список литературы из 370 наименований.

Содержание диссертации

Во введении приведено обоснование актуальности выбранной темы диссертации, сформулирована цель работы, указаны ее научная новизна, теоретическая и практическая значимость, перечислены выносимые на защиту результаты, а также изложено краткое содержание диссертации по главам.

В главе 1 описано спектральное представление функций времени — функций одной или двух переменных. В разд. 1.1 приведены примеры базисных систем (полиномы Лежандра, косинусоиды, функции Уолша, функции Хаара и тригонометрические функции), определены спектральные характеристики функций одной переменной и соответствующих им линейных функционалов, приведены их основные свойства. Эти результаты обобщаются в разд. 1.2, в частности в нем определены двумерные спектральные характеристики функций двух переменных, а также соответствующих им линейных функционалов. В разд. 1.3 затрагивается вопрос об изменении базисной системы и связанным с этим преобразованием спектральных характеристик. Спектральные характеристики линейных операторов введены в разд. 1.4, рассмотрены их основные свойства. Далее в разд. 1.5–1.7 более детально изучаются спектральные характеристики типовых линейных операторов: умножения, интегрирования и дифференцирования. Кроме того, в разд. 1.5 определена спектральная характеристика билинейного оператора, ставящего в соответствие двум функциям их произведение. Разд. 1.1 и 1.2 содержат алгоритмы расчета спектральных характеристик типовых функций и линейных функционалов, а разд. 1.5–1.7 — алгоритмы расчета спектральных характеристик типовых линейных операторов относительно перечисленных выше базисных систем, т.е. необходимый справочный материал для практической реализации соответствующих программ. Линейные преобразования функций времени в контексте применения спектральной формы математического описания кратко описаны в разд. 1.8. Разд. 1.9 касается вопросов связи матричных следов линейных операторов и интегральных следов функций, которые эти операторы задают, в том числе и с точки зрения применения спектральной формы математического описания. Некоторые аспекты приближенного представления функций времени, которые основаны на усечении спектральных

характеристик, описаны в разд. 1.10, а в разд. 1.11 рассматривается, каким образом учитывать ограничения на значения функций одной переменной при их представлении усеченными спектральными характеристиками. Основные определения и свойства иллюстрируются различными примерами.

В главе 2 результаты главы 1 обобщаются и применяются для спектрального представления случайных процессов и их моментных характеристик. Так, в разд. 2.1 определены спектральные характеристики математического ожидания, корреляционной функции и моментной функции второго порядка, т.е. случайные процессы описываются в рамках корреляционной теории. Разд. 2.2 содержит определения и основные свойства спектральных характеристик случайных процессов и случайных линейных функционалов. Значительное внимание уделено спектральному представлению винеровского и центрированного пуассоновского процессов, а также связанных с ними случайных линейных функционалов: гауссовского и пуассоновского белых шумов. Отдельно выделен разд. 2.3, в котором описывается спектральное представление стохастических интегралов: интегралов Стратоновича и Ито по винеровскому процессу и интеграла Огавы по центрированному пуассоновскому процессу, также приведен общий случай стохастического θ -интеграла по винеровскому процессу. Линейные преобразования случайных процессов в спектральной форме математического описания рассмотрены в разд. 2.4. Определение и некоторые свойства спектральных характеристик случайных линейных операторов даны в разд. 2.5. Их конкретные примеры — операторы умножения на случайный процесс и операторы стохастического интегрирования изучаются в разд. 2.6 и 2.7, приводятся свойства. В части операторов стохастического интегрирования описываются как интегралы Стратоновича и Ито по винеровскому процессу, так и стохастический θ -интеграл по винеровскому процессу. Кроме того, рассматриваются стохастические интегралы Огавы по центрированному пуассоновскому процессу. В разд. 2.8 затронуто приближенное представление случайных процессов. Как и в главе 1, основные определения и свойства иллюстрируются примерами.

Решение линейных стохастических дифференциальных уравнений и систем таких уравнений, или решение задачи анализа выходных процессов одномерных и многомерных линейных стохастических систем управления, рассмотрено в главе 3. Сначала в разд. 3.1 задача решения стохастического дифференциального уравнения формулируется в общей нелинейной постановке, а далее в разд. 3.2 приведено соответствующее этой задаче уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова. Спектральный метод решения линейных стохастических дифференциальных уравнений с винеровской составляющей подробно описан в разд. 3.3 отдельно для одномерного и многомерного случаев, рассмотрены уравнения Стратоновича и Ито, а также общий случай стохастических дифференциальных уравнений с θ -дифференциалом. Спектральная форма математического описания в задачах теории оценивания (фильтрация, сглаживание и прогнозирование) также отдельно для одномерного и многомерного случаев применяется в разд. 3.4. Для апробации в разд. 3.5 приведены примеры моделирования типовых случайных процессов: винеровского процесса (броуновского движения), броуновского моста, процесса Орнштейна — Уленбека, геометрического броуновского движения, осциллятора Кубо

и вращательной диффузии, а также пример решения задачи оценивания траектории процесса Орнштейна – Уленбека. Применение спектральной формы математического описания для решения прикладных задач иллюстрируется с помощью моделирования турбулентного ветра на основе формирующего фильтра Драйдена и его модификации в разд. 3.6.

Глава 4 посвящена представлению функций многих переменных в спектральной форме математического описания. В разд. 4.1 показано, как формируются базисные системы для представления функций многих переменных, определены спектральные характеристики таких функций, особое внимание уделено типовым функциям, которые требуются при изложении основных результатов диссертации. Спектральные характеристики линейных функционалов определены в разд. 4.2, в качестве примеров приведены линейные функционалы, определяемые типовыми функциями. В необходимом для дальнейшего изложения объеме в разд. 4.3 рассмотрены симметризованные функции по части переменных или по всем переменным и их спектральные характеристики. Пространства функций с дополнительными свойствами существования интегральных следов, которые совпадают с соответствующими матричными следами, введены в разд. 4.4, там же доказан ряд важных утверждений и теорем. Некоторые аспекты приближенного представления функций многих переменных, которые связаны с усечением спектральных характеристик, описаны в разд. 4.5. В этом же разделе приведены примеры аппроксимации типовых функций многих переменных с применением разных базисных систем: полиномов Лежандра, косинусоид, функций Уолша, функций Хаара и тригонометрических функций.

В главе 5 изучаются кратные стохастические интегралы Ито и Стратоновича. Вспомогательные результаты, касающиеся ортогональных систем случайных величин, изложены в разд. 5.1. В том числе рассмотрены системы, которые формируются на основе преобразования случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение, с помощью полиномов Эрмита, а также на основе преобразования случайных величин, имеющих центрированное пуассоновское распределение, с помощью модифицированных полиномов Шарлье. В разд. 5.2 приведены основные определения и свойства кратных стохастических интегралов по винеровским процессам. Более детально кратные стохастические интегралы Ито изучены в разд. 5.3, для них получены новые представления, в частности в виде ортогонального разложения. Кратные стохастические интегралы Стратоновича рассмотрены в разд. 5.4, для них также получены ортогональные разложения. Результаты указанных разделов иллюстрируются многочисленными примерами. В качестве частного случая кратных стохастических интегралов в разд. 5.5 уделено внимание повторным стохастическим интегралам, для них сформулированы некоторые полезные утверждения. Раздел 5.6 затрагивает вопросы нахождения первых двух моментов (математического ожидания и второго начального момента) типовых повторных стохастических интегралов. Раздел 5.7 посвящен приближенному представлению кратных стохастических интегралов в виде частичных сумм рядов, образованных случайными величинами. Алгоритмы моделирования кратных стохастических интегралов с соответствующими примерами приведены в разд. 5.8.

Глава 6 посвящена спектральному представлению повторных стохастических интегралов, в его основе лежит решение линейных стохастических дифференциальных уравнений спектральным методом. В разд. 6.1 и 6.2 подробно рассматриваются повторные стохастические интегралы Стратоновича и Ито произвольной кратности, детально разобраны частные случаи второй, третьей и четвертой кратностей. В этих представлениях используются спектральные характеристики операторов интегрирования и умножения, спектральная характеристика оператора умножения функций, а также спектральные характеристики белых шумов. В качестве обобщения предложено спектральное представление повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито смешанного типа, а также повторных стохастических θ -интегралов по винеровским процессам. В разд. 6.3 предлагается подход к нахождению первых двух моментов типовых повторных стохастических интегралов с помощью интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений для них. Приближенное моделирование повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито с помощью соответствующих спектральных представлений рассматривается в разд. 6.4. Основное применение предложенные алгоритмы моделирования повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито находят при реализации численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений, описание таких численно-спектральных методов содержится в разд. 6.5.

Чтобы апробировать предложенные методы и алгоритмы, разработано программное обеспечение для системы компьютерной математики Mathcad. Оно подробно описано в приложении. Для каждой базисной системы реализован отдельный модуль, включающий программы вычисления значений базисных функций, спектральных характеристик элементарных функций, спектральных характеристик операторов умножения, интегрирования и дифференцирования, спектральной характеристики оператора умножения функций. Часть программ нацелена на нахождение спектральных характеристик функций, которые используются для представления типовых повторных стохастических интегралов. В основе этого программного обеспечения лежат многочисленные работы по развитию алгоритмической базы спектрального метода [83, 127, 129, 131, 154, 177, 180–183, 191–193, 196–198, 200–202, 210, 211, 220–222, 228], в том числе и результаты автора. Оно находится в ряду комплексов программ спектрального метода [33, 34, 101, 117, 118, 140, 150, 179, 194, 195, 199, 200, 204, 205], созданных в разные годы. Приложение включает 6 разделов: по одному для каждой главы основной части.

В заключении перечислены основные итоги работы.

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Алгоритмическое обеспечение представления случайных процессов в спектральной форме математического описания систем управления [151, 163, 341].
2. Обобщение спектрального метода для анализа и статистического моделирования линейных непрерывных стохастических систем [155, 158, 163, 341, 343, 350].
3. Обобщение спектрального метода оценивания для состояний (фильтрация, сглаживание и прогнозирование) линейных непрерывных стохастических систем с полиномиальными измерителями [74, 341, 343].

4. Ортогональные разложения кратных стохастических интегралов Ито и Стратоновича произвольной кратности в приложении к анализу и статистическому моделированию нелинейных непрерывных стохастических систем [151, 161, 162, 165, 172, 173, 348].
5. Методы расчета коэффициентов разложения функций многих переменных, определяющих повторные стохастические интегралы, применяемые для статистического моделирования нелинейных непрерывных стохастических систем [172, 344].
6. Представления повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича произвольной кратности на основе спектральной формы математического описания систем управления [11, 342, 344, 345, 347].
7. Формулы для точного вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича на основе перехода к симметризованным функциям [173].
8. Метод аппроксимации множества спектральных характеристик функций одной переменной с ограничениями (типовые ограничения на управляющие воздействия или входные/выходные сигналы) [138, 141].
9. Алгоритмическое обеспечение статистического моделирования кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича на основе спектральной формы математического описания систем управления [131, 150, 154, 174, 179].

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

1. Научный семинар кафедры «Математическая кибернетика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета) (под рук. д.ф.-м.н., проф. Пантелеева А.В.);
2. Научный семинар кафедры «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» Московского авиационного института (национального исследовательского университета) (под рук. д.ф.-м.н., проф. Кибзуна А.И.);
3. Международная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 2012, 2013) [130, 133];
4. Международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, 2013, 2014) [59, 100];
5. Международная конференция «Идентификация систем и задачи управления (SICPRO)» (Москва, 2015) [137];
6. Международная конференция «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» (Новосибирск, 2015) [139];
7. Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Алушта, 2017, 2019, 2021) [8, 20, 160];
8. Международная Четаевская научная конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление» (Казань, 2017) [144];
9. Международная конференция «Математическая теория управления и механика» (Суздаль, 2017) [145];
10. International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIR-

- CON) (Новосибирск, 2017) [241];
11. Международная научно-техническая конференция «Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем» (Пенза, 2017) [178];
 12. Международная конференция «Вычислительная математика и математическая геофизика» (Новосибирск, 2018) [9];
 13. Международная научно-практическая конференция «Мехатроника, автоматика и робототехника» (Новокузнецк, 2019) [147];
 14. Всероссийская научная конференция с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2019) [148];
 15. Всероссийское совещание по проблемам управления (Москва, 2019) [149];
 16. Международная конференция «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» (Новосибирск, 2019) [182, 183];
 17. Всероссийская конференция «Актуальные проблемы математики и информационных технологий» (Махачкала, 2020–2023) [152, 159, 164, 171];
 18. Всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование» (Ижевск, 2020) [153, 188];
 19. Международная конференция по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАИ) (Алушта, 2020) [157, 189];
 20. Конференция памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова (Мультиконференция по проблемам управления) (Санкт-Петербург, 2020) [156];
 21. Конференция «Математическая теория управления и ее приложения» (Мультиконференция по проблемам управления) (Санкт-Петербург, 2022) [168];
 22. Международная научно-практическая конференция «Открытые эволюционирующие системы: цифровая трансформация» (Хабаровск, 2022) [166, 167];
 23. Международная научная конференция «Марчуковские научные чтения» (Новосибирск, 2022) [169, 170].

Работа частично поддержана грантами РФФИ 12-08-00892, 17-08-00530.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 62 научных работах, из которых 14 статей [11, 74, 151, 155, 158, 161, 162, 172, 173, 242, 341, 347–349] в журналах, индексируемых в Web of Science или Scopus, 6 статей [241, 342–345, 350] в трудах конференций, индексируемых в Web of Science или Scopus, 8 статей [131, 138, 141, 150, 154, 165, 174, 181] в журналах из перечня рецензируемых научных изданий ВАК (из них 4 статьи [131, 138, 174, 181] по специальности 2.3.1 «Системный анализ, управление и обработка информации, статистика»), 1 монография [163], 2 коллективные монографии [179, 185], 28 работ [8, 9, 20, 60, 130, 132, 133, 137, 139, 140, 144, 147–149, 152, 156, 157, 159, 160, 164, 167, 168, 171, 176, 178, 180, 189, 346] в других научных изданиях и материалах конференций. Получено 3 государственных свидетельства о регистрации программ для ЭВМ [135, 136, 175].

ГЛАВА 1

СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ВРЕМЕНИ

1.1. Базисные системы и спектральные характеристики функций одной переменной

Рассмотрим гильбертово пространство $L_2(\mathbb{T})$ квадратично интегрируемых функций одной переменной $f(\cdot): \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, где $\mathbb{T} = [t_0, T]$, т.е.

$$\int_{\mathbb{T}} f^2(t) dt < \infty,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега [69, 123], как и все интегралы в этой главе.

Норма в пространстве $L_2(\mathbb{T})$ определяется выражением

$$\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left\{ \int_{\mathbb{T}} f^2(t) dt \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (1.1)$$

а скалярное произведение задается формулой

$$(f(\cdot), g(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} f(t)g(t) dt, \quad (1.2)$$

где $f(\cdot), g(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ [21, 69].

Функции $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю. Система попарно ортогональных функций $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$, принадлежащих пространству $L_2(\mathbb{T})$, называется ортонормированной на отрезке \mathbb{T} , если справедливо равенство

$$(q(i, \cdot), q(j, \cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.3)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1.4)$$

Полная ортонормированная система функций называется базисом пространства $L_2(\mathbb{T})$, или базисной системой.

Перечислим некоторые свойства базисных систем.

1. Сдвиг.

Если $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2([t_0, T])$ и $p(i, t) = q(i, t - \tau)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, то $\{p(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2([t_0 + \tau, T + \tau])$.

2. Масштабирование.

Если $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2([t_0, T])$ и

$$p(i, t) = \frac{1}{\sqrt{\theta}} q\left(i, \frac{t}{\theta}\right), \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

то $\{p(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2([\theta t_0, \theta T])$.

Приведем примеры базисных систем [40, 48, 54, 99, 200, 220–222, 227], заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$, т.е. при условии $t_0 = 0$.

1. Полиномы Лежандра:

$$\hat{P}(i, t) = \sqrt{\frac{2i+1}{T}} \sum_{k=0}^i l_{ik} \frac{t^k}{T^k}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.5)$$

где $l_{ik} = (-1)^{i-k} C_{i+k}^i C_i^{i-k}$, C_k^i — биномиальный коэффициент.

2. Косинусоиды:

$$\hat{C}(i, t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{T}}, & i = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{i\pi t}{T}, & i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.6)$$

3. Функции Уолша:

$$\hat{W}(i, t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{T}}, & i = 0, \\ \sqrt{\frac{1}{T}} \prod_{\{k: \gamma_k=1\}} R(k, t), & i = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (1.7)$$

где $\gamma_k \in \{0, 1\}$, $k = 1, 2, \dots, m+1$, — коэффициенты в двоичном представлении числа $i = (\gamma_{m+1} \dots \gamma_1)_2 = \gamma_1 2^0 + \gamma_2 2^1 + \dots + \gamma_{m+1} 2^m$, $m = \lfloor \log_2 i \rfloor$ — наибольшая степень в этом двоичном представлении, $\lfloor \cdot \rfloor$ — целая часть числа, $R(k, \cdot)$ — функции Радемахера:

$$R(k, t) = \text{sign} \left[\sin \frac{2^k \pi t}{T} \right] \quad \left(\text{sign } x = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \right), \quad \text{или} \quad R(k, t) = (-1)^{\lfloor \frac{2^k t}{T} \rfloor}.$$

4. Функции Хаара:

$$\hat{X}(i, t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{T}}, & 0 \leq t \leq T, \quad i = 0, \\ \sqrt{\frac{2^m}{T}}, & \frac{2kT}{2^{m+1}} \leq t < \frac{(2k+1)T}{2^{m+1}}, \\ -\sqrt{\frac{2^m}{T}}, & \frac{(2k+1)T}{2^{m+1}} \leq t < \frac{2(k+1)T}{2^{m+1}}, \\ 0, & \frac{2lT}{2^{m+1}} \leq t < \frac{(2l+1)T}{2^{m+1}}, \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} i = 2^m + k = 1, 2, \dots, \\ m = 0, 1, 2, \dots, \\ k, l = 0, 1, \dots, 2^m - 1, \\ k \neq l. \end{array} \right\} \quad (1.8)$$

5. Тригонометрические функции (базис Фурье):

$$\hat{F}(i, t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{T}}, & i = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{i\pi t}{T}, & i = 2k, \\ \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{(i+1)\pi t}{T}, & i = 2k-1, \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.9)$$

Далее рассмотрим задачу представления функции одной переменной в виде ряда.

Теорема 1.1 (см. [21, 69]). Пусть система функций $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ образует базис пространства $L_2(\mathbb{T})$. Тогда любая функция $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ представляется в виде ряда по функциям базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$:

$$f(\cdot) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i q(i, \cdot), \quad (1.10)$$

где

$$F_i = (q(i, \cdot), f(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) f(t) dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.11)$$

Числа F_i называются коэффициентами разложения функции $f(\cdot)$.

Таким образом, решение задачи представления функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ в виде ряда (этот ряд сходится абсолютно) по функциям выбранной базисной системы состоит в определении коэффициентов разложения F_i и использовании (1.10). При этом коэффициенты разложения (1.11) однозначно задают функцию $f(\cdot)$, следовательно, упорядоченную совокупность этих коэффициентов можно рассматривать как характеристику функции $f(\cdot)$. Равенство (1.10) выполняется почти всюду на \mathbb{T} и понимается следующим образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f(\cdot) - \sum_{i=0}^n F_i q(i, \cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{T})} = 0. \quad (1.12)$$

З а м е ч а н и я 1.1.

1. Используя свойства сдвига и масштабирования базисных систем, достаточно определить полную ортонормированную систему функций на отрезке $[0, 1]$ с последующим преобразованием ее на любой отрезок $\mathbb{T} = [t_0, T]$. Если $\{\tilde{q}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2([0, 1])$ и

$$q(i, t) = \frac{1}{\sqrt{T - t_0}} \tilde{q}\left(i, \frac{t - t_0}{T - t_0}\right), \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

то $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2([t_0, T])$.

Например, положим $T = 1$ в формуле (1.5) и получим полиномы Лежандра, ортонормированные на отрезке $[0, 1]$:

$$\tilde{P}(i, t) = \sqrt{2i + 1} \sum_{k=0}^i l_{ik} t^k, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

тогда базисную систему пространства $L_2([t_0, T])$ образуют полиномы Лежандра, ортонормированные на отрезке $[t_0, T]$:

$$\hat{P}(i, t) = \frac{1}{\sqrt{T - t_0}} \tilde{P}\left(i, \frac{t - t_0}{T - t_0}\right), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

2. Наиболее часто используемая базисная система для представления функций одной переменной — тригонометрические функции. Как правило [50, 233], сначала тригонометрическая система определяется на отрезке $[-\pi, \pi]$, а затем с помощью сдвига и масштабирования формируется базисная система для представления функций одной переменной на отрезке $[a, a + 2l]$, $l > 0$. Например, для формулы (1.9) $a = 0$ и $l = T/2$.

Представление четных функций $f(\cdot)$ на симметричном отрезке $[-T, T]$ ($a = -T$, $l = T$) содержит только четные базисные функции (константа и косинусы), а представление нечетных функций $f(\cdot)$ — нечетные базисные функции (синусы). Это позволяет представлять функцию, заданную на отрезке $[0, T]$, либо по косинусам, доопределяя ее до четной функции, либо по синусам, доопределяя ее до нечетной функции. Косинусоиды (1.6) — это часть базисной системы тригонометрических функций, ортонормированной на отрезке $[-T, T]$.

3. Функции Хаара (1.8) можно определить с помощью сжатий, сдвигов и последующей

нормировки порождающей функции (вейвлета Хаара) [180]:

$$v(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0 \text{ или } \tau \geq 1, \\ 1, & 0 \leq \tau < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq \tau < 1, \end{cases}$$

т.е.

$$\hat{X}(0, t) = \frac{1}{\sqrt{T}}, \quad \hat{X}(i, t) = \sqrt{\frac{2^m}{T}} v\left(\frac{2^m t}{T} - k\right), \quad (1.13)$$

$$i = 2^m + k = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^m - 1.$$

Функции Хаара (1.8) и (1.13) целесообразно доопределить в точке $t = T$ таким образом, чтобы они были непрерывны слева.

4. Функции Уолша (1.7) и функции Хаара (1.8) удобно выражать через блочно-импульсные функции [31, 83, 177]. Определим блочно-импульсные функции на полуинтервале $[0, T)$ в виде

$$\hat{\Pi}(i, t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \begin{cases} 1, & t \in [ih, (i+1)h), \\ 0, & t \notin [ih, (i+1)h), \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, L-1, \quad h = \frac{T}{L},$$

где L — это заданное натуральное число (количество блочно-импульсных функций).

Введем используемое далее понятие индикатора множества, или характеристической функции множества, $\chi_\Omega(\cdot)$:

$$\chi_\Omega(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Omega, \\ 0, & t \notin \Omega, \end{cases} \quad (1.14)$$

с помощью которого удобно определить блочно-импульсные функции:

$$\hat{\Pi}(i, t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \chi_{[0, T)}\left(\frac{t}{h} - i\right). \quad (1.15)$$

Функцию $\hat{\Pi}(L-1, \cdot)$ целесообразно доопределить в точке $t = T$ таким образом, чтобы она была непрерывна слева (см. также п. 3).

Блочно-импульсные функции $\{\hat{\Pi}(i, \cdot)\}_{i=0}^{L-1}$ ортогональны, поскольку имеют попарно непересекающиеся носители, и нормированы в пространстве $L_2(\mathbb{T})$, однако они не образуют полной системы, т.е. не являются базисом $L_2(\mathbb{T})$. Тем не менее, подобные системы функций могут эффективно применяться в различных приближенных методах, включая и спектральные [83, 177, 201]. Кроме того, через них можно выразить функции Уолша и Хаара.

Зафиксируем число $L = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, и выразим функции Уолша (1.7) с номерами $i = 0, 1, \dots, L-1$ через блочно-импульсные функции (1.15) [40, 83, 154]. Пусть

$$\Delta^{(0)} = 1, \quad \Delta_{2^i, j}^{(k+1)} = \Delta_{2^{i+1}, j}^{(k+1)} = \Delta_{2^i, 2^k + j}^{(k+1)} = -\Delta_{2^{i+1}, 2^k + j}^{(k+1)} = \Delta_{ij}^{(k)}, \\ i, j = 0, 1, \dots, 2^k - 1, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

тогда матрица

$$\Delta_{\hat{W}\hat{\Pi}} = \frac{1}{\sqrt{L}} \Delta^{(n)} \quad (1.16)$$

задает коэффициенты линейных комбинаций блочно-импульсных функций (1.15), определяющих функции Уолша (1.7):

$$\hat{W}(i, t) = \sum_{j=0}^{L-1} \Delta_{\hat{W}\hat{\Pi}}^{ij} \hat{\Pi}(j, t). \quad (1.17)$$

Несложно построить матрицу $\Delta_{\hat{X}\hat{\Pi}}$, задающую коэффициенты линейных комбинаций блочно-импульсных функций (1.15), которые определяют функции Хаара (1.8) с номерами $i = 0, 1, \dots, L - 1$ [154]:

$$\Delta_{\hat{X}\hat{\Pi}} 0j = \sqrt{L}, \quad j = 0, 1, \dots, L - 1; \quad \Delta_{\hat{X}\hat{\Pi}} i+2^k, j+i2^{-k}L = \begin{cases} \sqrt{2^k L}, & j < 2^{-k-1}L, \\ -\sqrt{2^k L}, & j \geq 2^{-k-1}L, \end{cases} \quad (1.18)$$

$$i = 0, 1, \dots, 2^k - 1, \quad j = 0, 1, \dots, 2^{-k}L - 1, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

В соотношении (1.18) указаны только ненулевые элементы матрицы $\Delta_{\hat{X}\hat{\Pi}}$. Для ненормированных блочно-импульсных функций матрица коэффициентов линейных комбинаций приведена, например, в [324]. Следовательно,

$$\hat{X}(i, t) = \sum_{j=0}^{L-1} \Delta_{\hat{X}\hat{\Pi}} ij \hat{\Pi}(j, t). \quad (1.19)$$

6. Другой пример ортонормированной, но не полной системы функций — это функции, которые получаются в результате нормировки функций Радемахера. Они определены сразу после формулы (1.7):

$$\hat{R}(i, t) = \sqrt{\frac{1}{T}} R(i + 1, t) = \sqrt{\frac{1}{T}} \text{sign} \left[\sin \frac{2^i \pi t}{T} \right] = \sqrt{\frac{1}{T}} (-1)^{\lfloor \frac{2^i t}{T} \rfloor}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.20)$$

Бесконечная матрица-столбец $F = (F_i)$, элементы которой представляют собой коэффициенты разложения (1.11) функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ в ряд по функциям базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$, называется спектральной характеристикой функции $f(\cdot)$.

Отображение, ставящее в соответствие функции $f(\cdot)$ ее спектральную характеристику F , называется спектральным преобразованием функции $f(\cdot)$ и обозначается \mathbb{S} :

$$\mathbb{S}[f(\cdot)] = F = [F_0 \ F_1 \ F_2 \ \dots]^T,$$

где числа F_i определяются формулой (1.11), а $[\cdot]^T$ означает транспонирование (в данном случае — переход от бесконечной матрицы-строки к бесконечной матрице-столбцу).

Обратный переход от спектральной характеристики к соответствующей функции одной переменной осуществляется по формуле обращения (обратное спектральное преобразование):

$$f(\cdot) = \mathbb{S}^{-1}[F] = \sum_{i=0}^{\infty} F_i q(i, \cdot). \quad (1.21)$$

З а м е ч а н и я 1.2.

1. В работах [220–222] спектральные характеристики введены для представления входных и выходных сигналов в линейных системах управления (функций времени) и в общем случае отрезок \mathbb{T} зависит от параметра τ , определяющего границы промежутка времени, которому принадлежит t : $\mathbb{T} = [a(\tau), b(\tau)]$. Такой отрезок называется нестационарным, а функции $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ служат его характеристиками.

Нестационарный отрезок можно описывать длиной $\theta(\tau) = b(\tau) - a(\tau)$ и одной из функций $a(\cdot)$ или $b(\cdot)$. От параметра τ в таком случае зависит и базисная система, и спектральные характеристики функций. Чтобы подчеркнуть последнее обстоятельство, используют термин нестационарная спектральная характеристика.

2. Спектральные характеристики функции $f(\cdot)$, определенные относительно разных базисных систем, в общем случае отличаются, поэтому обозначение спектральной характеристики может включать обозначение базисной системы: F_q . Обозначение базисной системы может быть включено и в обозначения прямого и обратного спектральных преобразований \mathbb{S}_q и \mathbb{S}_q^{-1} :

$$\mathbb{S}_q[f(\cdot)] = F_q, \quad f(\cdot) = \mathbb{S}_q^{-1}[F_q].$$

Например, спектральные характеристики относительно перечисленных базисных систем обозначаются следующим образом: $F_{\hat{P}}, F_{\hat{C}}, F_{\hat{W}}, F_{\hat{X}}, F_{\hat{F}}$.

3. В более общем случае можно рассмотреть гильбертово пространство $L_2^{\nu}(\mathbb{T})$ квадратично интегрируемых функций $f(\cdot)$ с весом $\nu(t) \geq 0$:

$$\int_{\mathbb{T}} \nu(t) f^2(t) dt < \infty.$$

Норма и скалярное произведение в этом пространстве задаются соотношениями

$$\|f(\cdot)\|_{L_2^{\nu}(\mathbb{T})} = \left\{ \int_{\mathbb{T}} \nu(t) f^2(t) dt \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (f(\cdot), g(\cdot))_{L_2^{\nu}(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} \nu(t) f(t) g(t) dt, \quad f(\cdot), g(\cdot) \in L_2^{\nu}(\mathbb{T}).$$

Все введенные ранее определения легко обобщаются для представления функций одной переменной в виде ряда, в частности они приведены в работах [112, 211]. В качестве примеров базисных систем здесь уместно упомянуть полиномы Чебышева первого и второго рода, заданные на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$, т.е. при условии $t_0 = 0$, и ортонормированные с весами $\nu(t) = 1/\sqrt{t(T-t)}$ и $\nu(t) = \sqrt{t(T-t)}$ соответственно. Наряду с полиномами Лежандра они являются частным случаем полиномов Гегенбауэра, которые в свою очередь включены в семейство полиномов Якоби [99]. В приложении к спектральной форме математического описания эти базисные системы исследованы в работах [191, 200, 211].

Базисные функции могут быть ортонормированными на полубесконечных интервалах или на множестве \mathbb{R} [131]. Здесь важно упомянуть полиномы и функции Лагерра, а также полиномы и функции Эрмита [99, 112, 127, 129], которые применяются далее в разд. 5.1.

Множество всех спектральных характеристик F функций $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ образует гильбертово пространство ℓ_2 квадратично суммируемых последовательностей, т.е. $\sum_{i=0}^{\infty} F_i^2 < \infty$.

Норма в этом пространстве определяется выражением

$$\|F\|_{\ell_2} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} F_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (1.22)$$

а скалярное произведение — формулой

$$(F, G)_{\ell_2} = \sum_{i=0}^{\infty} F_i G_i, \quad (1.23)$$

где $F, G \in \ell_2$ [21, 69].

Таким образом, спектральное преобразование \mathbb{S} является взаимно однозначным и устанавливает изоморфизм пространств $L_2(\mathbb{T})$ и ℓ_2 .

Укажем некоторые свойства спектрального преобразования функций одной переменной.

1. Линейность [220–222].

Пусть $f(\cdot), g(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, $\mathbb{S}[f(\cdot)] = F$, $\mathbb{S}[g(\cdot)] = G$. Тогда

$$\mathbb{S}[\alpha f(\cdot) + \beta g(\cdot)] = \alpha F + \beta G \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (1.24)$$

2. Сохранение нормы и скалярного произведения [220–222].

Пусть $f(\cdot), g(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, $\mathbb{S}[f(\cdot)] = F$, $\mathbb{S}[g(\cdot)] = G$. Тогда

$$\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \|F\|_{\ell_2}^2 = F^T F, \quad (1.25)$$

$$(f(\cdot), g(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = (F, G)_{\ell_2} = F^T G, \quad (1.26)$$

т.е. спектральное преобразование \mathbb{S} является ортогональным преобразованием.

3. Сдвиг и масштабирование базисной системы.

Если $\{\tilde{q}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ — базисная система пространства $L_2([0, 1])$, а $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ — соответствующая ей базисная система пространства $L_2([t_0, T])$ (см. п. 1 замечаний 1.1), то

$$F = \sqrt{T - t_0} F_{\tilde{q}}^+, \quad (1.27)$$

где $F_{\tilde{q}}$ и $F_{\tilde{q}}^+$ — спектральные характеристики функций $f(t) = f^+((t - t_0)(T - t_0))$ и $f^+(t)$ соответственно, что следует из определения элементов матрицы-столбца F (замена переменной интегрирования).

Пример 1.1. Найти спектральную характеристику $\mathbf{1}$ функции $f_0(t) \equiv 1$ относительно базисных систем, перечисленных выше и заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Для базисных систем (1.5)–(1.9) функция $f_0(\cdot)$ отличается от базисной функции $q(0, \cdot)$ числовым коэффициентом: $f_0(t) = \sqrt{T} q(0, t)$, а при $T = 1$ совпадает с ней. Следовательно, элементы спектральной характеристики $\mathbb{S}[f(\cdot)] = \mathbf{1}$ имеют вид

$$\mathbf{1}_i = (q(i, \cdot), f_0(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = (q(i, \cdot), \sqrt{T} q(0, \cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \sqrt{T} (q(i, t), q(0, t))_{L_2(\mathbb{T})}, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

или согласно равенству (1.3)

$$\mathbf{1}_i = \sqrt{T} \delta_{i0} = \begin{cases} \sqrt{T}, & i = 0, \\ 0, & i = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

т.е. $\mathbf{1} = [\sqrt{T} \ 0 \ 0 \ \dots]^T = \sqrt{T} \cdot [1 \ 0 \ 0 \ \dots]^T$ для полиномов Лежандра (1.5), косинусоид (1.6), функций Уолша (1.7), функций Хаара (1.8) и тригонометрических функций (1.9). ■

Пример 1.2. Найти спектральные характеристики F^n функций $f_n(t) = t^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, относительно полиномов Лежандра (1.5), заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Воспользуемся следующим представлением для полиномов Лежандра (1.5):

$$\hat{P}(i, t) = \sqrt{\frac{2i+1}{T}} P_i\left(\frac{2t}{T} - 1\right),$$

где $\{P_i(\cdot)\}_{i=0}^\infty$ — ненормированные полиномы Лежандра, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$, и рекуррентной формулой [99]:

$$(i+1)P_{i+1}(x) - (2i+1)xP_i(x) + iP_{i-1}(x) = 0, \quad x = \frac{2t}{T} - 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\frac{2i+1}{\sqrt{2i+1}} \left(\frac{2t}{T} - 1\right) \hat{P}(i, t) = \frac{i+1}{\sqrt{2i+3}} \hat{P}(i+1, t) + \frac{i}{\sqrt{2i-1}} \hat{P}(i-1, t),$$

или

$$t\hat{P}(i, t) = \frac{T}{2} \left[\frac{i+1}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}} \hat{P}(i+1, t) + \hat{P}(i, t) + \frac{i}{\sqrt{(2i-1)(2i+1)}} \hat{P}(i-1, t) \right].$$

Отметим, что приведенные рекуррентные соотношения при $i = 0$ применяются формально: слагаемое с множителем i полагается равным нулю.

Умножим левую и правую части последнего соотношения на t^{n-1} и проинтегрируем по отрезку \mathbb{T} :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \hat{P}(i, t) t^n dt &= \frac{T}{2} \left[\frac{i+1}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}} \int_{\mathbb{T}} \hat{P}(i+1, t) t^{n-1} dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{T}} \hat{P}(i, t) t^{n-1} dt + \frac{i}{\sqrt{(2i-1)(2i+1)}} \int_{\mathbb{T}} \hat{P}(i-1, t) t^{n-1} dt \right]. \end{aligned}$$

Элементы спектральной характеристики $\mathbb{S}[f_n(\cdot)] = F^n$ задаются формулой (1.11):

$$F_i^n = (q(i, \cdot), f_n(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} \hat{P}(i, t) t^n dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

следовательно,

$$F_i^n = \frac{T}{2} \left[\frac{i+1}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}} F_{i+1}^{n-1} + F_i^{n-1} + \frac{i}{\sqrt{(2i-1)(2i+1)}} F_{i-1}^{n-1} \right],$$

причем спектральная характеристика F^0 функции $f_0(t) \equiv 1$ найдена в примере 1.1: $F^0 = \mathbf{1}$.

Кроме того, функция $f_n(\cdot)$ представляется в виде линейной комбинации полиномов Лежандра (1.5) с номерами $i = 0, 1, \dots, n$. Это означает, что $F_i^n = 0$ при $i > n$. На это же указывает структура рекуррентной формулы для элементов F_i^n .

Таким образом,

$$\begin{aligned} F = F^1 &= T\sqrt{T} \cdot \left[\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{6} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \right]^T, \quad F^2 = T^2\sqrt{T} \cdot \left[\frac{1}{3} \quad \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \frac{\sqrt{5}}{30} \quad 0 \quad 0 \quad \dots \right]^T, \\ F^3 &= T^3\sqrt{T} \cdot \left[\frac{1}{4} \quad \frac{3\sqrt{3}}{20} \quad \frac{\sqrt{5}}{20} \quad \frac{\sqrt{7}}{140} \quad 0 \quad \dots \right]^T \quad \text{и т.д.} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 1.3. Найти спектральные характеристики F^n функций $f_n(t) = t^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, относительно косинусоид (1.6), заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Как и в примере 1.2, запишем формулу (1.11) для элементов спектральной характеристики $\mathbb{S}[f_n(\cdot)] = F^n$:

$$F_i^n = (q(i, \cdot), f_n(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} \hat{C}(i, t) t^n dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

При $i = 0$ значения F_i^n получены в примере 1.2 (базисные функции систем (1.5) и (1.6) с номером $i = 0$ совпадают):

$$F_0^n = \frac{T^n \sqrt{T}}{n+1}.$$

При $i > 0$ применим табличную формулу из [42]:

$$\begin{aligned} F_i^n &= \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T \cos \frac{i\pi t}{T} t^n dt = T^n \sqrt{2T} \left[\sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{(i\pi)^{k+1}} \sin \left(i\pi + \frac{k\pi}{2} \right) - \frac{n!}{(i\pi)^{n+1}} \sin \frac{n\pi}{2} \right] = \\ &= n! T^n \sqrt{2T} \left[(-1)^i \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n-k)! (i\pi)^{k+1}} \sin \frac{k\pi}{2} - \frac{1}{(i\pi)^{n+1}} \sin \frac{n\pi}{2} \right], \quad i = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где суммирование достаточно вести только по нечетным k .

В частности [220–222, 228],

$$F_i = F_i^1 = T\sqrt{T} \begin{cases} \frac{1}{2}, & i = 0, \\ \frac{\sqrt{2}[(-1)^i - 1]}{i^2\pi^2}, & i = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad F_i^2 = T^2\sqrt{T} \begin{cases} \frac{1}{3}, & i = 0, \\ \frac{2\sqrt{2}(-1)^i}{i^2\pi^2}, & i = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$$F_i^3 = T^3\sqrt{T} \begin{cases} \frac{1}{4}, & i = 0, \\ \frac{3\sqrt{2}[(-1)^i(i^2\pi^2 - 2) + 2]}{i^4\pi^4}, & i = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

т.е.

$$F = F^1 = T\sqrt{T} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{9\pi^2} & 0 & \dots \end{bmatrix}^T,$$

$$F^2 = T^2\sqrt{T} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} & \frac{2\sqrt{2}}{4\pi^2} & -\frac{2\sqrt{2}}{9\pi^2} & \frac{2\sqrt{2}}{16\pi^2} & \dots \end{bmatrix}^T,$$

$$F^3 = T^3\sqrt{T} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3\sqrt{2}(\pi^2 - 4)}{\pi^4} & \frac{3\sqrt{2}}{4\pi^2} & -\frac{3\sqrt{2}(9\pi^2 - 4)}{81\pi^4} & \frac{3\sqrt{2}}{16\pi^2} & \dots \end{bmatrix}^T \quad \text{и т.д.}$$

На примере функции $f_2(t) = t^2$ и ее спектральной характеристики F^2 продемонстрируем свойство сохранения нормы. Согласно (1.1) и (1.22) имеем

$$\|f_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \int_0^T t^4 dt = \frac{T^5}{5}$$

и

$$\|F^2\|_{\ell_2} = \sum_{i=0}^{\infty} (F_i^2)^2 = T^5 \left(\left[\frac{1}{3} \right]^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{2\sqrt{2}(-1)^i}{i^2\pi^2} \right]^2 \right) = T^5 \left(\frac{1}{9} + \frac{8}{\pi^4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4} \right).$$

Сумма ряда в правой части равна $\pi^4/90$ [42], следовательно,

$$\|F^2\|_{\ell_2} = T^5 \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{45} \right) = \frac{T^5}{5}. \quad \blacksquare$$

Замечание 1.3. Для некоторых элементарных функций спектральные характеристики, определенные относительно разных базисных систем, приведены в работах [210, 220–222, 228]. В частности, для функции $f_1(t) = t$ элементы спектральной характеристики $\mathbb{S}[f_1(\cdot)] = F$ относительно функций Уолша (1.7) вычисляются следующим образом:

$$F_i = T\sqrt{T} \begin{cases} \frac{1}{2}, & i = 0, \\ -\frac{1}{2^{m+2}}, & i = 2^m, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad i, m = 0, 1, 2, \dots,$$

т.е.

$$F = T\sqrt{T} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{16} & 0 & \dots \end{bmatrix}^T.$$

Для функций Хаара (1.8) имеем

$$F_i = T\sqrt{T} \begin{cases} \frac{1}{2}, & i = 0, \\ -\frac{1}{4\sqrt{2^{3m}}}, & i = 2^m + k, \end{cases} \quad i, m = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^m - 1,$$

т.е.

$$F = T\sqrt{T} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{16} & -\frac{\sqrt{2}}{16} & -\frac{1}{32} & -\frac{1}{32} & \dots \end{bmatrix}^T.$$

Для тригонометрических функций (1.9) спектральную характеристику нетрудно получить, используя таблицу интегралов [42]:

$$F_i = T\sqrt{T} \begin{cases} \frac{1}{2}, & i = 0, \\ 0, & i = 2k, \\ -\frac{\sqrt{2}}{(i+1)\pi}, & i = 2k-1, \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 0, 1, 2, \dots, \\ k = 1, 2, 3, \dots, \end{matrix}$$

т.е.

$$F = T\sqrt{T} \cdot \left[\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \quad 0 \quad -\frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \quad 0 \quad -\frac{1}{3\sqrt{2}\pi} \quad \dots \right]^T.$$

Пример 1.4. Найти спектральную характеристику $\mathbf{1}_\tau$ единичной ступенчатой функции (функции Хевисайда) $f(t) = 1(t - \tau)$ относительно косинусоид (1.6), заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$, $\tau \in \mathbb{T}$ — параметр.

□ Единичная ступенчатая функция (функция Хевисайда) задается выражением

$$1(t - \tau) = \begin{cases} 1, & t > \tau, \\ 0, & t \leq \tau. \end{cases} \quad (1.28)$$

Воспользуемся формулой (1.11) для нахождения коэффициентов разложения функции $f(\cdot)$ в ряд по функциям базисной системы (1.6), т.е. элементов искомой спектральной характеристики $\mathbb{S}[f(\cdot)] = \mathbf{1}_\tau$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{1}_\tau)_0 &= (q(0, \cdot), f(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} \hat{C}(0, t) 1(t - \tau) dt = \sqrt{\frac{1}{T}} \int_{\tau}^T dt = \frac{T - \tau}{\sqrt{T}}, \\ (\mathbf{1}_\tau)_i &= (q(i, \cdot), f(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} \hat{C}(i, t) 1(t - \tau) dt = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{\tau}^T \cos \frac{i\pi t}{T} dt = \\ &= \frac{\sqrt{2T}}{i\pi} \left(\sin i\pi - \sin \frac{i\pi\tau}{T} \right) = -\frac{\sqrt{2T}}{i\pi} \sin \frac{i\pi\tau}{T}, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{1}_\tau = \left[\frac{T - \tau}{\sqrt{T}} \quad -\frac{\sqrt{2T}}{\pi} \sin \frac{\pi\tau}{T} \quad -\frac{\sqrt{2T}}{2\pi} \sin \frac{2\pi\tau}{T} \quad -\frac{\sqrt{2T}}{3\pi} \sin \frac{3\pi\tau}{T} \quad \dots \right]^T$$

и при $\tau = 0$ она совпадает со спектральной характеристикой $\mathbf{1}$ функции $f_0(t) \equiv 1$, найденной в примере 1.1.

В дополнение найдем спектральную характеристику $\mathbf{1}_t^*$ единичной ступенчатой функции $f^*(\tau) = 1(t - \tau)$ как функции переменной τ относительно той же базисной системы. Здесь параметром является $t \in \mathbb{T}$ и эту функцию можно рассматривать как индикатор множества $[0, t]$. Ее можно выразить иначе, а именно $f^*(t) = 1 - 1(t - \tau)$, где τ — параметр. Отсюда следует, что спектральная характеристика F_t^* функции $f^*(\cdot)$ по свойству линейности (1.24) представляется следующим образом:

$$\mathbf{1}_\tau^* = \mathbf{1} - \mathbf{1}_\tau, \quad \mathbf{1}_t^* = \mathbf{1}_\tau^* \Big|_{\tau=t}, \quad \mathbf{1}_t^* = \left[\frac{t}{\sqrt{T}} \quad \frac{\sqrt{2T}}{\pi} \sin \frac{\pi t}{T} \quad \frac{\sqrt{2T}}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} \quad \frac{\sqrt{2T}}{3\pi} \sin \frac{3\pi t}{T} \quad \dots \right]^T$$

и

$$(\mathbf{1}_t^*)_i = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{T}}, & i = 0, \\ \frac{\sqrt{2T}}{i\pi} \sin \frac{i\pi t}{T}, & i = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Она совпадает со спектральной характеристикой $\mathbf{1}$ при $t = T$. ■

Спектральные характеристики можно определить не только для элементов пространства $L_2(\mathbb{T})$, но и для обобщенных функций (линейных функционалов). Пусть \mathcal{Z} — линейный функционал, определенный на пространстве основных функций $D(\mathbb{T})$ — бесконечно дифференцируемых функций, носитель которых содержится в \mathbb{T} : $D(\mathbb{T}) \subset C^\infty(\mathbb{T}) \subset L_2(\mathbb{T})$, $\mathcal{Z}: D(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{R}$. Как и ранее, $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ — базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$.

Бесконечная матрица-столбец $Z = (Z_i)$, элементы которой определяются формулой

$$Z_i = \mathcal{Z}q(i, \cdot), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.29)$$

называется спектральной характеристикой линейного функционала \mathcal{Z} .

Отображение, ставящее в соответствие линейному функционалу \mathcal{Z} его спектральную характеристику Z , называется спектральным преобразованием и также обозначается \mathbb{S} :

$$\mathbb{S}[\mathcal{Z}] = Z = [Z_0 \ Z_1 \ Z_2 \ \dots]^T,$$

где числа Z_i определяются формулой (1.29).

З а м е ч а н и я 1.4.

1. Определение спектральной характеристики линейного функционала \mathcal{Z} корректно, если функции базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ принадлежат $D(\mathbb{T})$. Это справедливо, например, для полиномов Лежандра (1.5), косинусоид (1.6) и тригонометрических функций (1.9). Для того чтобы это определение было корректно для других базисных систем, необходимо рассматривать функционал \mathcal{Z} на множестве функций, включающих $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$. Например, на множестве кусочно-постоянных или кусочно-непрерывных функций в случае функций Уолша (1.7) и функций Хаара (1.8).

2. В работе [112] спектральная характеристика линейного функционала определялась как бесконечная матрица-строка.

Если линейный функционал \mathcal{Z} можно представить в виде

$$\mathcal{Z}f(\cdot) = (z(\cdot), f(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})}, \quad (1.30)$$

где $z(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, то его спектральная характеристика — это спектральная характеристика функции $z(t)$: $\mathbb{S}[\mathcal{Z}] = \mathbb{S}[z(\cdot)]$. Такой функционал (регулярную обобщенную функцию) можно продолжить на все пространство $L_2(\mathbb{T})$ и $\|\mathcal{Z}\| = \|z(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}$.

Теорема 1.2. Пусть \mathcal{Z} — линейный функционал, определенный на пространстве $L_2(\mathbb{T})$; $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ — функция одной переменной; Z и F — спектральные характеристики функционала \mathcal{Z} и функции $f(\cdot)$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$. Тогда

$$\mathcal{Z}f(\cdot) = Z^T F. \quad (1.31)$$

Сформулированное утверждение эквивалентно свойству сохранения скалярного произведения при спектральном преобразовании.

Если линейный функционал \mathcal{Z} нельзя представить в виде (1.30), то его (сингулярную обобщенную функцию) можно рассматривать либо на пространстве основных функций $D(\mathbb{T})$, либо

на некотором подпространстве пространства $L_2(\mathbb{T})$, но не на всем $L_2(\mathbb{T})$. При этом соотношение (1.31) может не выполняться.

Приведем примеры линейных функционалов на множестве функций одной переменной.

1. Линейный функционал $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}$, ставящий в соответствие функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ интеграл от этой функции по отрезку \mathbb{T} :

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}}f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} f(t) dt.$$

Очевидно, что функционалу $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}$ соответствует функция $z_0(t) \equiv 1$ и $z_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, следовательно, по определению спектральной характеристики линейного функционала $\mathbb{S}[\mathcal{J}_{\mathbb{T}}] = \mathbb{S}[z_0(\cdot)] = \mathbf{1}$, где элементы спектральной характеристики $\mathbf{1}$ задаются соотношением

$$\mathbf{1}_i = \mathcal{J}_{\mathbb{T}}q(i, \cdot) = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда значение функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}$ определяется следующим выражением:

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}}f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} f(t) dt = \mathbf{1}^T F, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)]. \quad (1.32)$$

Для всех перечисленных в этом разделе базисных систем спектральная характеристика $\mathbf{1}$ найдена в примере 1.1.

2. Линейный функционал $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^n$, ставящий в соответствие функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ интеграл от этой функции с весом t^n по отрезку \mathbb{T} :

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^n f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} t^n f(t) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Этот функционал задает функция $z_n(t) = t^n$ — элемент пространства $L_2(\mathbb{T})$. По определению спектральной характеристики линейного функционала $\mathbb{S}[\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^n] = \mathbb{S}[z_n(\cdot)] = F^n$, где элементы спектральной характеристики F^n задаются соотношением

$$\mathbf{1}_i = \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^n q(i, \cdot) = \int_{\mathbb{T}} t^n q(i, t) dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда значение функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^n$ определяется следующим выражением:

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^n f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} t^n f(t) dt = [F^n]^T F, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)]. \quad (1.33)$$

Для базисных систем (1.5) и (1.6) спектральные характеристики F^n получены в примерах 1.2 и 1.3, а для базисных систем (1.7)–(1.9) при $n = 1$ они приведены в замечании 1.3.

Если, например, τ — случайная величина со значениями на отрезке \mathbb{T} , плотность распределения вероятностей которой $f(\cdot)$ [37], то $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^n f(\cdot)$ — это начальный момент порядка n случайной величины τ , а $\mathcal{J}_{\mathbb{T}} f(\cdot) = 1$ — условие нормировки.

3. Линейный функционал δ_{τ} , ставящий в соответствие функции $f(\cdot) \in D(\mathbb{T})$ значение этой функции в точке $\tau \in \mathbb{T}$: $\delta_{\tau} f(\cdot) = f(\tau)$.

В пространстве $L_2(\mathbb{T})$, как известно [21, 69], не существует такого элемента, что этот функционал можно представить в виде (1.30), однако для удобства вводят обобщенную функцию $\delta(\cdot - \tau)$ — импульсную дельта-функцию Дирака — и записывают

$$\delta_{\tau} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \delta(t - \tau) f(t) dt = f(\tau).$$

Кроме того, дельта-функцию рассматривают как формальную (обобщенную) производную единичной ступенчатой функции (1.28) [105, 220]:

$$\frac{d \mathbf{1}(t - \tau)}{dt} = \delta(t - \tau). \quad (1.34)$$

При фиксированном τ этот функционал можно продолжить на множество функций из пространства $L_2(\mathbb{T})$, непрерывных в точке τ . Тогда по определению спектральной характеристики линейного функционала имеем $\mathbb{S}[\delta_\tau] = \Delta_\tau$, где элементы спектральной характеристики Δ_τ задаются соотношением

$$(\Delta_\tau)_i = \delta_\tau q(i, \cdot) = q(i, \tau), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.35)$$

Следуя [220–222], будем называть Δ_τ спектральной характеристикой дельта-функции $\delta((\cdot) - \tau)$:

$$\mathbb{S}[\delta((\cdot) - \tau)] = \Delta_\tau = [q(0, \tau) \ q(1, \tau) \ q(2, \tau) \ \dots]^T. \quad (1.36)$$

Приведем *примеры спектральных характеристик Δ_0 дельта-функции $\delta(\cdot)$* , определенных относительно различных базисных систем на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$ (см. разд. 1.1).

1. Полиномы Лежандра (1.5):

$$\Delta_0 = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot [1 \ -\sqrt{3} \ \sqrt{5} \ -\sqrt{7} \ \dots \ c_i \ \dots]^T, \quad c_i = (-1)^i \sqrt{2i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

2. Косинусоиды (1.6):

$$\Delta_0 = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot [1 \ \sqrt{2} \ \sqrt{2} \ \sqrt{2} \ \dots \ c_i \ \dots]^T, \quad c_i = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ \sqrt{2}, & i = 1, 2, \dots \end{cases}$$

3. Функции Уолша (1.7):

$$\Delta_0 = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ c_i \ \dots]^T, \quad c_i = 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

4. Функции Хаара (1.8):

$$\Delta_0 = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot [1 \ 1 \ \sqrt{2} \ 0 \ \dots \ c_i \ \dots]^T, \quad c_i = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ \sqrt{2^m}, & i = 2^m, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

5. Тригонометрические функции (1.9):

$$\Delta_0 = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot [1 \ 0 \ \sqrt{2} \ 0 \ \dots \ c_i \ \dots]^T, \quad c_i = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ \sqrt{2}, & i = 2k, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \\ 0, & i = 2k - 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Значение функционала δ_τ определяется выражением (формула обращения (1.21) при $t = \tau$)

$$\delta_\tau f(\cdot) = f(\tau) = \Delta_\tau^T F, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)], \quad (1.37)$$

если числовой ряд $\sum_{i=0}^{\infty} F_i q(i, \tau)$ сходится к значению функции $f(\tau)$ (из условия (1.12) не следует поточечная сходимости функционального ряда на отрезке \mathbb{T}). Проиллюстрируем это следующим примером.

Пример 1.5. Найти спектральную характеристику Δ_τ дельта-функции $\delta((\cdot) - \tau)$ относительно косинусоид (1.6), заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$, $\tau = T/2$.

□ Применим формулу (1.35) для элементов спектральной характеристики Δ_τ :

$$(\Delta_\tau)_i = \hat{C}(i, \tau) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{T}}, & i = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{i\pi}{2}, & i = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

т.е.

$$(\Delta_\tau)_i = \frac{1}{\sqrt{T}} \begin{cases} 1, & i = 0, \\ \sqrt{2}(-1)^k, & i = 2k, \\ 0, & i = 2k - 1, \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 0, 1, 2, \dots, \\ k = 1, 2, 3, \dots, \end{matrix}$$

или $\Delta_{T/2} = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot [1 \ 0 \ -\sqrt{2} \ 0 \ \sqrt{2} \ \dots]^T$.

Найдем произведение $\Delta_{T/2}^T \mathbf{1}_{T/2}$, где $\mathbf{1}_{T/2}$ — спектральная характеристика единичной ступенчатой функции $f(t) = 1(t - \tau)$ при $\tau = T/2$ относительно косинусоид (1.6) на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$. Пользуясь результатом примера 1.4, получаем

$$\mathbf{1}_{T/2} = \left[\frac{T}{2\sqrt{T}} - \frac{\sqrt{2T}}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2T}}{2\pi} \sin \pi - \frac{\sqrt{2T}}{3\pi} \sin \frac{3\pi}{2} \dots \right]^T = \left[\frac{\sqrt{T}}{2} - \frac{\sqrt{2T}}{\pi} \ 0 \ \frac{\sqrt{2T}}{3\pi} \ 0 \ \dots \right]^T,$$

тогда (см. выражение (1.37))

$$\Delta_{T/2}^T \mathbf{1}_{T/2} = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\sqrt{T}}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1(0-) + 1(0+)) \neq 1(0) = f(T/2).$$

Далее найдем произведение $\Delta_{T/2}^T \mathbf{1}_0$, в котором $\mathbf{1}_0 = \mathbf{1}$ — спектральная характеристика функции $f_0(t) \equiv 1$ относительно косинусоид (1.6) на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$. Из примера 1.1 следует, что $\mathbf{1} = \sqrt{T} \cdot [1 \ 0 \ 0 \ \dots]^T$, тогда $\Delta_{T/2}^T \mathbf{1} = 1 = f_0(T/2)$. ■

Замечание 1.5. В примере 1.5 показано, что выражение (1.37) несправедливо для разрывной функции $f(t) = 1(t - \tau)$ в точке разрыва $t = \tau = T/2$ с учетом того, что (1.37) — это соотношение (1.10) или (1.21), записанное в обозначениях спектральных характеристик функции и линейного функционала. Причина состоит в том, что $\delta((\cdot) - \tau)$ — сингулярная обобщенная функция.

Здесь нужно отметить, что пространство $L_2(\mathbb{T})$ — это, вообще говоря, пространство классов эквивалентности функций. Каждый класс эквивалентности образован функциями, значения которых отличаются на множестве нулевой меры Лебега [69, 123]. Такими функциями, например, являются

$$1(t - \tau) = 1_-(t - \tau) = \begin{cases} 1, & t > \tau, \\ 0, & t \leq \tau, \end{cases} \quad 1_+(t - \tau) = \begin{cases} 1, & t \geq \tau, \\ 0, & t < \tau, \end{cases} \quad 1_\pm(t - \tau) = \begin{cases} 1, & t > \tau, \\ 1/2, & t = 0, \\ 0, & t < \tau, \end{cases}$$

при фиксированном τ . Их спектральные характеристики совпадают, а результат применения обратного спектрального преобразования удовлетворяет условию (1.12), где в качестве функции $f(\cdot)$ могут быть взяты $1_-(\cdot - \tau)$, $1_+(\cdot - \tau)$ и $1_\pm(\cdot - \tau)$, а также любые другие функции, значения которых отличаются от единичной ступенчатой функции (1.28) на множестве нулевой меры. И это вполне естественно, так как интегралы, определяющие коэффициенты разложения (1.11), не зависят от того, как определена функция $f(\cdot)$ на множестве нулевой меры.

В том же примере 1.5 продемонстрировано, что правая часть выражения (1.37) при $\tau = T/2$ представляет собой полусумму левого и правого пределов функции $1((\cdot) - \tau)$ в выбранной точке τ (в примере $\tau = T/2$, однако для других значений τ результат будет аналогичным). Это хорошо известный факт из теории тригонометрических рядов Фурье [50, 233] — сходимость

ряда Фурье некоторой функции $f(\cdot)$, имеющей разрыв первого рода в точке $\tau \in (0, T)$, к полусумме левого и правого пределов функции в этой точке:

$$\frac{f(\tau-) + f(\tau+)}{2}. \quad (1.38)$$

Более того, сходимость ряда Фурье в точке зависит от поведения функции $f(\cdot)$ в сколь угодно малой окрестности этой точки (принцип локализации [50, 233]). Именно этот факт приводит к значению (1.38) для суммы соответствующего ряда Фурье функции $f(\cdot)$ в точке τ . Фактически, ряд Фурье сходится к функции $1_{\pm}((\cdot) - \tau)$, которую можно отождествить с функцией $f(t) = 1(t - \tau) = 1_{-}(t - \tau)$.

Сумма тригонометрического ряда Фурье функции, заданной на отрезке $[0, T]$, — это периодическая функция. Если $f(0) \neq f(T)$, то такая периодическая функция имеет разрывы первого рода в точках nT , $n \in \mathbb{Z}$, а ряд Фурье сходится в этих точках к значению

$$\frac{f(0+) + f(T-)}{2}.$$

К этим рассуждениям добавим, что любой функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ можно поставить в соответствие функцию, которая определена однозначно в каждой точке отрезка \mathbb{T} . Для этого определим усредняющий оператор $\mathcal{S}^\varepsilon: L_2(\mathbb{T}) \rightarrow C(\mathbb{T})$, следующим образом:

$$\mathcal{S}^\varepsilon f(\cdot) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{(\cdot)-\varepsilon}^{(\cdot)+\varepsilon} f(\tau) d\tau, \quad \varepsilon > 0,$$

если доопределить функцию $f(\cdot)$ вне отрезка \mathbb{T} нулем [41]. Тогда функция $\bar{f}(\cdot) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{S}^\varepsilon f(\cdot)$ определена однозначно, совпадает с $f(\cdot)$ при почти всех $t \in \mathbb{T}$, а в точках разрыва ее значения задаются формулой (1.38). При этом $\mathbb{S}[f(\cdot)] = \mathbb{S}[\bar{f}(\cdot)]$.

В контексте разложения функций в тригонометрические ряды Фурье функцию $f(\cdot)$ естественно рассматривать как периодическую функцию.

1.2. Базисные системы и спектральные характеристики функций двух переменных

С точки зрения общей теории гильбертовых пространств представление функций двух или более переменных в виде ряда по функциям базисной системы не отличается от представления функций одной переменной [21, 69]. Однако для дальнейшего изложения удобно рассматривать функции двух переменных отдельно.

Пусть $L_2(\mathbb{T}^2)$ — гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций двух переменных $f(\cdot): \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, где $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ и $\mathbb{T} = [t_0, T]$:

$$\int_{\mathbb{T}^2} f^2(t, \tau) dt d\tau < \infty.$$

Норма в пространстве $L_2(\mathbb{T}^2)$ определяется выражением

$$\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \left\{ \int_{\mathbb{T}^2} f^2(t, \tau) dt d\tau \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (1.39)$$

а скалярное произведение задается формулой

$$(f(\cdot), g(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \int_{\mathbb{T}^2} f(t, \tau) g(t, \tau) dt d\tau, \quad (1.40)$$

где $f(\cdot), g(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ [21, 69].

Функции $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю. Система попарно ортогональных функций $\{Q(i, j, \cdot)\}_{i,j=0}^\infty$, принадлежащих пространству $L_2(\mathbb{T}^2)$, называется ортонормированной на квадрате \mathbb{T}^2 , если справедливо равенство

$$(Q(i, j, \cdot), Q(i', j', \cdot))_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \delta_{ii'} \delta_{jj'} = \begin{cases} 1, & i = i' \text{ и } j = j', \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad i, i', j, j' = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\delta_{ii'}$ и $\delta_{jj'}$ — символы Кронекера (1.4).

Полная ортонормированная система функций называется базисом пространства $L_2(\mathbb{T}^2)$, или базисной системой.

Ограничимся рассмотрением базисных систем, для которых $Q(i, j, t, \tau) = q(i, t)q(j, \tau)$, где $i, j = 0, 1, 2, \dots$ и функции $q(i, \cdot)$ образуют базисную систему $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ пространства $L_2(\mathbb{T})$ (см. разд. 1.1). Далее под записью $f(\cdot) = f_1(\cdot) \otimes f_2(\cdot)$ будем понимать функцию, значение которой в точке $(t, \tau) \in \mathbb{T}^2$ равно $f_1(t)f_2(\tau)$, например $Q(i, j, \cdot) = q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot)$.

В качестве примеров базисных систем, ортонормированных на квадрате $\mathbb{T}^2 = [0, T] \times [0, T]$, т.е. при условии $t_0 = 0$, приведем следующие функции:

$$\begin{aligned} \{\hat{P}(i, \cdot) \otimes \hat{P}(j, \cdot)\}_{i,j=0}^\infty, \quad \{\hat{C}(i, \cdot) \otimes \hat{C}(j, \cdot)\}_{i,j=0}^\infty, \quad \{\hat{W}(i, \cdot) \otimes \hat{W}(j, \cdot)\}_{i,j=0}^\infty, \\ \{\hat{X}(i, \cdot) \otimes \hat{X}(j, \cdot)\}_{i,j=0}^\infty, \quad \{\hat{F}(i, \cdot) \otimes \hat{F}(j, \cdot)\}_{i,j=0}^\infty. \end{aligned}$$

Как и для функций одной переменной, можно рассмотреть задачу представления функции двух переменных в виде ряда. Она решается аналогичным образом как для произвольной базисной системы $\{Q(i, j, \cdot)\}_{i,j=0}^\infty$, так и для частного случая, когда выбрана базисная система $\{q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot)\}_{i,j=0}^\infty$.

Теорема 1.3 (см. [21, 69]). Пусть система функций $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ образует базис пространства $L_2(\mathbb{T})$. Тогда любая функция $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ представляется в виде ряда по функциям базисной системы $\{q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot)\}_{i,j=0}^\infty$:

$$f(\cdot) = \sum_{i,j=0}^{\infty} F_{ij} q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot), \quad (1.41)$$

где

$$F_{ij} = (q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot), f(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \int_{\mathbb{T}^2} q(i, t)q(j, \tau) f(t, \tau) dt d\tau, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (1.42)$$

Числа F_{ij} называются коэффициентами разложения функции $f(\cdot)$.

Таким образом, решение задачи представления функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ в виде ряда по функциям выбранной базисной системы состоит в определении коэффициентов разложения F_{ij} и использовании выражения (1.41). При этом коэффициенты разложения (1.42) однозначно задают функцию $f(\cdot)$, следовательно, упорядоченную совокупность этих коэффициентов можно рассматривать как характеристику функции $f(\cdot)$. Равенство (1.41) выполняется при почти всех $(t, \tau) \in \mathbb{T}^2$ и понимается аналогично соотношению (1.12). Ряд в правой части (1.41) сходится абсолютно и не зависит от порядка суммирования, такие ряды называются суммируемыми, или безусловно сходящимися [232, 237, 238].

Введем понятие спектральной характеристики функции двух переменных. Бесконечная

матрица $F = (F_{ij})$, элементы которой представляют собой коэффициенты разложения (1.42) функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ в ряд по функциям базисной системы $\{q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot)\}_{i,j=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T}^2)$, называется двумерной спектральной характеристикой функции $f(\cdot)$. Для краткости будем говорить, что двумерная спектральная характеристика определена относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$.

Отображение, ставящее в соответствие функции $f(\cdot)$ ее двумерную спектральную характеристику F , называется спектральным преобразованием функции $f(\cdot)$ и обозначается \mathbb{S} :

$$\mathbb{S}[f(\cdot)] = F = \begin{bmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & \dots \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & \dots \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где числа F_{ij} определяются формулой (1.42).

Обратный переход от двумерной спектральной характеристики к соответствующей функции двух переменных осуществляется по формуле обращения:

$$f(\cdot) = \mathbb{S}^{-1}[F] = \sum_{i,j=0}^{\infty} F_{ij} q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot). \quad (1.43)$$

Теорема 1.4 (см. [163]) Пусть функция $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ удовлетворяет условию $f(\cdot) = f_1(\cdot) \otimes f_2(\cdot)$, F — двумерная спектральная характеристика функции $f(\cdot)$, определенная относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$, а F_1 и F_2 — спектральные характеристики функций $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$ соответственно, определенные относительно той же базисной системы. Тогда

$$F = F_1 F_2^T. \quad (1.44)$$

Замечания 1.6.

1. По аналогии со спектральной характеристикой функции одной переменной, если функцию двух переменных задавать на множестве \mathbb{T}^2 , где \mathbb{T} — нестационарный отрезок (см. п. 1 замечаний 1.2), то ее двумерную спектральную характеристику следует называть двумерной нестационарной спектральной характеристикой [220–222].

2. Двумерные спектральные характеристики функции $f(\cdot)$ могут быть определены относительно различных базисных систем, поэтому обозначение базисной системы при необходимости включается в обозначение двумерной спектральной характеристики: F_{qq} . Аналогичное замечание справедливо для обозначений прямого и обратного спектральных преобразований \mathbb{S}_{qq} и \mathbb{S}_{qq}^{-1} (см. п. 2 замечаний 1.2):

$$\mathbb{S}_{qq}[f(\cdot)] = F_{qq}, \quad f(\cdot) = \mathbb{S}_{qq}^{-1}[F_{qq}].$$

Например, двумерные спектральные характеристики относительно базисных систем (1.5) — (1.9) обозначаются следующим образом: $F_{\hat{P}\hat{P}}, F_{\hat{C}\hat{C}}, F_{\hat{W}\hat{W}}, F_{\hat{X}\hat{X}}, F_{\hat{F}\hat{F}}$.

В более общем случае функции базисной системы $\{Q(i, j, \cdot)\}_{i,j=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T}^2)$ могут быть заданы в виде $Q(i, j, \cdot) = q(i, \cdot) \otimes p(j, \cdot)$, где $i, j = 0, 1, 2, \dots$ и функции $q(i, \cdot)$ и $p(i, \cdot)$

образуют разные базисные системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{p(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$ (см. разд. 1.1). Чтобы это подчеркнуть, используются обозначения F , \mathbb{S} и \mathbb{S}^{-1} . Например, F , F , F .

Множество всех двумерных спектральных характеристик F функций $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ образует линейное гильбертово пространство \mathcal{M}_2 — пространство бесконечных матриц, удовлетворяющих условию $\sum_{i,j=0}^{\infty} F_{ij}^2 < \infty$, с нормой (нормой Гильберта – Шмидта)

$$\|F\|_{\mathcal{M}_2} = \left\{ \sum_{i,j=0}^{\infty} F_{ij}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty \quad (1.45)$$

и скалярным произведением

$$(F, G)_{\mathcal{M}_2} = \sum_{i,j=0}^{\infty} F_{ij}G_{ij}, \quad (1.46)$$

где $F, G \in \mathcal{M}_2$.

Таким образом, спектральное преобразование \mathbb{S} является взаимно однозначным и устанавливает изоморфизм пространств $L_2(\mathbb{T}^2)$ и \mathcal{M}_2 .

Рассмотрим некоторые свойства спектрального преобразования функций двух переменных, аналогичные указанным в предыдущем разделе.

1. Линейность [220–222].

Пусть $f(\cdot), g(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$, $\mathbb{S}[f(\cdot)] = F$, $\mathbb{S}[g(\cdot)] = G$. Тогда

$$\mathbb{S}[\alpha f(\cdot) + \beta g(\cdot)] = \alpha F + \beta G \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (1.47)$$

2. Сохранение нормы и скалярного произведения [220–222].

Пусть $f(\cdot), g(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$, $\mathbb{S}[f(\cdot)] = F$, $\mathbb{S}[g(\cdot)] = G$. Тогда

$$\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \|F\|_{\mathcal{M}_2}^2 = \text{tr } F^T F = \text{tr } F F^T, \quad (1.48)$$

$$(f(\cdot), g(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^2)} = (F, G)_{\mathcal{M}_2} = \text{tr } F^T G = \text{tr } F G^T, \quad (1.49)$$

где $\text{tr}[\cdot]$ означает след матрицы [81]:

$$\text{tr } F = \sum_{i=0}^{\infty} F_{ii}. \quad (1.50)$$

3. Симметричность [220–222].

Пусть $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ и $f^*(t, \tau) = f(\tau, t)$ при почти всех $(t, \tau) \in \mathbb{T}^2$, $\mathbb{S}[f(\cdot)] = F$, $\mathbb{S}[f^*(\cdot)] = F^*$.

Тогда

$$F^* = F^T, \quad F_{ij} = F_{ji}^*, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.51)$$

что непосредственно следует из определения элементов матриц F и F^* .

Если функция $f(\cdot)$ удовлетворяет условию $f(t, \tau) = f(\tau, t)$, то двумерная спектральная характеристика F является симметрической матрицей:

$$F = F^T, \quad F_{ij} = F_{ji}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (1.52)$$

4. Сдвиг и масштабирование базисной системы.

Если $\{\tilde{q}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2([0, 1])$, а $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — соответствующая ей базисная система пространства $L_2([t_0, T])$ (см. п. 1 замечаний 1.1), то

$$F = (T - t_0) \underset{\tilde{q}\tilde{q}}{F}^+, \quad (1.53)$$

где F и $F_{\bar{q}\bar{q}}^+$ — двумерные спектральные характеристики функций $f(t, \tau) = f^+((t - t_0)(T - t_0), (\tau - t_0)(T - t_0))$ и $f^+(t, \tau)$ соответственно, что следует из определения элементов матрицы F (замена переменных интегрирования).

Пример 1.6. Найти двумерную спектральную характеристику Λ функции $f(t, \tau) \equiv 1$ относительно базисных систем (1.5)–(1.9), заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Функция $f(t, \tau) \equiv 1$ удовлетворяет условию $f(t, \tau) = f_0(t)f_0(\tau)$, или $f(\cdot) = f_0(\cdot) \otimes f_0(\cdot)$, где $f_0(t) \equiv 1$, поэтому согласно теореме 1.4 получаем $\Lambda = \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T$, где $\mathbf{1}$ — спектральная характеристика функции $f_0(\cdot)$ относительно той же базисной системы, что и спектральная характеристика Λ .

Спектральная характеристика $\mathbf{1}$ относительно базисных систем (1.5)–(1.9), заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$, найдена в примере 1.1: $\mathbf{1} = [\sqrt{T} \ 0 \ 0 \ \dots]^T = \sqrt{T} \cdot [1 \ 0 \ 0 \ \dots]^T$, поэтому

$$\Lambda = \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T = \begin{bmatrix} T & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

для полиномов Лежандра (1.5), косинусоид (1.6), функций Уолша (1.7), функций Хаара (1.8) и тригонометрических функций (1.9). ■

Пример 1.7. Найти двумерную спектральную характеристику F единичной ступенчатой функции (функции Хевисайда) $f(t, \tau) = 1(t - \tau)$ как функции двух переменных относительно полиномов Лежандра (1.5), заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Единичная ступенчатая функция задается выражением (1.28) (см. пример 1.4). Запишем элементы двумерной спектральной характеристики F единичной ступенчатой функции $f(\cdot)$, используя формулу (1.42):

$$\begin{aligned} F_{ij} &= (q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot), f(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \int_{\mathbb{T}^2} \hat{P}(i, t) \hat{P}(j, \tau) 1(t - \tau) dt d\tau = \\ &= \int_{\mathbb{T}} \hat{P}(i, t) \int_0^t \hat{P}(j, \tau) d\tau dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Применим следующее представление для полиномов Лежандра (1.5):

$$\hat{P}(i, t) = \sqrt{\frac{2i+1}{T}} P_i\left(\frac{2t}{T} - 1\right), \quad \hat{P}'(i, t) = \frac{2}{T} \sqrt{\frac{2i+1}{T}} P_i'\left(\frac{2t}{T} - 1\right),$$

где $\{P_i(\cdot)\}_{i=0}^\infty$ — ненормированные полиномы Лежандра, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$, и рекуррентную формулу [99]:

$$P_j(x) = \frac{1}{2j+1} [P'_{j+1}(x) - P'_{j-1}(x)], \quad x = \frac{2t}{T} - 1, \quad j = 1, 2, \dots,$$

тогда

$$\sqrt{2j+1} \hat{P}(j, t) = \frac{2}{T} \left[\frac{1}{\sqrt{2j+3}} \hat{P}'(j+1, t) - \frac{1}{\sqrt{2j-1}} \hat{P}'(j-1, t) \right].$$

Принимая во внимание свойство $P_{j+1}(-1) = P_{j-1}(-1) = (-1)^{j-1}$ и, следовательно, выражение

$$\frac{1}{\sqrt{2j+3}} \hat{P}(j+1, 0) - \frac{1}{\sqrt{2j-1}} \hat{P}(j-1, 0) = 0,$$

получаем

$$\int_0^t \hat{P}(j, \tau) d\tau = \frac{T}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} \hat{P}(j+1, t) - \frac{1}{\sqrt{(2j-1)(2j+1)}} \hat{P}(j-1, t) \right].$$

Таким образом, с учетом равенства (1.3) имеем

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \frac{T}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} \int_{\mathbb{T}} \hat{P}(i, t) \hat{P}(j+1, t) dt - \frac{1}{\sqrt{(2j-1)(2j+1)}} \int_{\mathbb{T}} \hat{P}(i, t) \hat{P}(j-1, t) dt \right] = \\ &= \frac{T}{2} \left[\frac{\delta_{i,j+1}}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} - \frac{\delta_{i,j-1}}{\sqrt{(2j-1)(2j+1)}} \right], \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где $\delta_{i,j+1}$ и $\delta_{i,j-1}$ — символы Кронекера (1.4).

Первые два полинома Лежандра (1.5) имеют вид

$$\hat{P}(0, t) = \sqrt{\frac{1}{T}}, \quad \hat{P}(1, t) = \sqrt{\frac{3}{T}} \left(\frac{2t}{T} - 1 \right),$$

поэтому

$$\int_0^t \hat{P}(0, \tau) d\tau = \sqrt{\frac{1}{T}} \int_0^t d\tau = \sqrt{\frac{1}{T}} t = \frac{T}{2\sqrt{3}} \hat{P}(1, t) + \frac{T}{2} \hat{P}(0, t),$$

т.е.

$$F_{i0} = \frac{T}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\mathbb{T}} \hat{P}(i, t) \hat{P}(1, t) dt + \int_{\mathbb{T}} \hat{P}(i, t) \hat{P}(0, t) dt \right] = \frac{T}{2} \left[\frac{\delta_{i1}}{\sqrt{3}} + \delta_{i0} \right], \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

В результате получаем [220–222]:

$$F = T \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{15}} & 0 & \ddots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{15}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{35}} & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{35}} & 0 & \ddots & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{m-1,m} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{m,m-1} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} c_{00} &= \frac{1}{2}, \quad c_{m-1,m} = -c_{m,m-1} = -\frac{1}{2\sqrt{4m^2-1}}, \quad c_{m-k,m} = c_{m,m-k} = 0, \\ & m = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 0, 2, 3, \dots, m. \end{aligned}$$

Проиллюстрируем свойство сохранения нормы. Согласно (1.39) и (1.45)

$$\begin{aligned} \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 &= \int_{\mathbb{T}^2} [1(t-\tau)]^2 dt d\tau = \int_0^T \left[\int_0^t d\tau \right] dt = \int_0^T t dt = \frac{T^2}{2}, \\ \|F\|_{\mathcal{M}_2}^2 &= \sum_{i,j=0}^{\infty} F_{ij}^2 = T^2 \left[c_{00}^2 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} c_{m-1,m}^2 \right] = T^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4m^2-1} \right]. \end{aligned}$$

Сумма ряда в правой части последнего выражения равна 1/2 [42, 163]. Таким образом, $\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \|F\|_{\mathcal{M}_2}^2 = T^2/2$. ■

Пример 1.8. Найти двумерные спектральные характеристики F , H и M трех функций $f(t, \tau) = 1(t-\tau)$, $h(t, \tau) = \tau 1(t-\tau)$ и $m(t, \tau) = t 1(t-\tau)$ относительно функций Уолша (1.7) и функции Хаара (1.8), заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Начнем с единичной ступенчатой функции $f(\cdot)$. Выберем число $L = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, обозначим $h = T/L$ и найдем величины

$$\tilde{F}_{ij} = \int_{\mathbb{T}^2} \hat{\Pi}(i, t) \hat{\Pi}(j, \tau) 1(t - \tau) dt d\tau = \int_{\mathbb{T}} \hat{\Pi}(i, t) \int_0^t \hat{\Pi}(j, \tau) d\tau dt, \quad i, j = 0, 1, \dots, L-1,$$

где $\{\hat{\Pi}(i, \cdot)\}_{i=0}^{L-1}$ — блочно-импульсные функции (1.15).

Если $i < j$, то $\tilde{F}_{ij} = 0$, поскольку носитель произведения $\hat{\Pi}(i, \cdot) \otimes \hat{\Pi}(j, \cdot)$ содержится в множестве $\{(t, \tau) : f(t, \tau) = 0\}$. Если $i > j$, то

$$\tilde{F}_{ij} = \int_{ih}^{(i+1)h} \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{jh}^{(j+1)h} \frac{1}{\sqrt{h}} d\tau dt = \frac{1}{h} \int_{ih}^{(i+1)h} dt \int_{jh}^{(j+1)h} dt = h,$$

а если $i = j$, то

$$\tilde{F}_{ij} = \int_{ih}^{(i+1)h} \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{ih}^t \frac{1}{\sqrt{h}} d\tau dt = \frac{1}{h} \int_{ih}^{(i+1)h} (t - ih) dt = \frac{1}{h} \int_0^h t dt = \frac{h}{2},$$

т.е.

$$\tilde{F}_{ij} = \begin{cases} h, & i > j, \\ h/2, & i = j, \\ 0, & i < j. \end{cases}$$

Запишем элементы двумерной спектральной характеристики F функции $f(\cdot)$ на основе формулы (1.42) и связи (1.17) между блочно-импульсными функциями и функциями Уолша:

$$\begin{aligned} F_{ij} &= (\hat{W}(i, \cdot) \otimes \hat{W}(j, \cdot), f(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \int_{\mathbb{T}^2} \hat{W}(i, t) \hat{W}(j, \tau) 1(t - \tau) dt d\tau = \\ &= \sum_{k, l=0}^{L-1} \Delta_{\hat{W}\hat{\Pi}}^{ik} \Delta_{\hat{W}\hat{\Pi}}^{jl} \int_{\mathbb{T}^2} \hat{\Pi}(k, t) \hat{\Pi}(l, \tau) 1(t - \tau) dt d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, коэффициенты разложения F_{ij} функции $f(\cdot)$ по функциям Уолша записываются в форме (см. выражение (1.16))

$$F_{ij} = \sum_{k, l=0}^{L-1} \Delta_{\hat{W}\hat{\Pi}}^{ik} \Delta_{\hat{W}\hat{\Pi}}^{jl} \tilde{F}_{kl}.$$

Перейдем к нахождению элементов двумерной спектральной характеристики H функции $h(\cdot)$. Рассуждая аналогично, находим

$$H_{ij} = \sum_{k, l=0}^{L-1} \Delta_{\hat{W}\hat{\Pi}}^{ik} \Delta_{\hat{W}\hat{\Pi}}^{jl} \tilde{H}_{kl},$$

где

$$\tilde{H}_{ij} = \int_{\mathbb{T}^2} \hat{\Pi}(i, t) \hat{\Pi}(j, \tau) \tau 1(t - \tau) dt d\tau = \int_{\mathbb{T}} \hat{\Pi}(i, t) \int_0^t \hat{\Pi}(j, \tau) \tau d\tau dt = \begin{cases} h^2 \left(j + \frac{1}{2} \right), & i > j, \\ h^2 \left(\frac{i}{2} + \frac{1}{6} \right), & i = j, \\ 0, & i < j. \end{cases}$$

Для элементов двумерной спектральной характеристики M функции $m(\cdot)$ находим

$$M_{ij} = \sum_{k, l=0}^{L-1} \Delta_{\hat{W}\hat{\Pi}}^{ik} \Delta_{\hat{W}\hat{\Pi}}^{jl} \tilde{M}_{kl},$$

где

$$\tilde{M}_{ij} = \int_{\mathbb{T}^2} \hat{\Pi}(i, t) \hat{\Pi}(j, \tau) t 1(t - \tau) dt d\tau = \int_{\mathbb{T}} \hat{\Pi}(i, t) t \int_0^t \hat{\Pi}(j, \tau) d\tau dt = \begin{cases} h^2 \left(i + \frac{1}{2} \right), & i > j, \\ h^2 \left(\frac{i}{2} + \frac{1}{3} \right), & i = j, \\ 0, & i < j. \end{cases}$$

В матричной форме приведенные выше соотношения записываются следующим образом:

$$\underline{F} = \frac{\Delta \tilde{F} \Delta^T}{\hat{w}_{\hat{\Pi}} \hat{w}_{\hat{\Pi}}}, \quad \underline{H} = \frac{\Delta \tilde{H} \Delta^T}{\hat{w}_{\hat{\Pi}} \hat{w}_{\hat{\Pi}}}, \quad \underline{M} = \frac{\Delta \tilde{M} \Delta^T}{\hat{w}_{\hat{\Pi}} \hat{w}_{\hat{\Pi}}},$$

где \underline{F} означает квадратную матрицу размеров $L \times L$, образованную элементами бесконечной матрицы F из первых L строк и столбцов с сохранением порядка (также определяются матрицы \underline{H} и \underline{M}).

Для элементов двумерных спектральных характеристик F , H и M относительно функций Хаара все соотношения аналогичны (см. выражение (1.18)):

$$F_{ij} = \sum_{k,l=0}^{L-1} \frac{\Delta_{ik}}{\hat{x}_{\hat{\Pi}}} \frac{\Delta_{jl}}{\hat{x}_{\hat{\Pi}}} \tilde{F}_{kl}, \quad H_{ij} = \sum_{k,l=0}^{L-1} \frac{\Delta_{ik}}{\hat{x}_{\hat{\Pi}}} \frac{\Delta_{jl}}{\hat{x}_{\hat{\Pi}}} \tilde{H}_{kl}, \quad M_{ij} = \sum_{k,l=0}^{L-1} \frac{\Delta_{ik}}{\hat{x}_{\hat{\Pi}}} \frac{\Delta_{jl}}{\hat{x}_{\hat{\Pi}}} \tilde{M}_{kl},$$

или в матричной форме

$$\underline{F} = \frac{\Delta \tilde{F} \Delta^T}{\hat{x}_{\hat{\Pi}} \hat{x}_{\hat{\Pi}}}, \quad \underline{H} = \frac{\Delta \tilde{H} \Delta^T}{\hat{x}_{\hat{\Pi}} \hat{x}_{\hat{\Pi}}}, \quad \underline{M} = \frac{\Delta \tilde{M} \Delta^T}{\hat{x}_{\hat{\Pi}} \hat{x}_{\hat{\Pi}}}.$$

Они получены на основе связи (1.19) между блочно-импульсными функциями и функциями Хаара.

Произвольность выбора величины n , определяющей значение $L = 2^n$, гарантирует вычисление всех элементов двумерных спектральных характеристик F , H и M относительно функций Уолша и Хаара. ■

Перейдем к спектральным характеристикам обобщенных функций (линейных функционалов). Пусть \mathcal{Z} — линейный функционал, определенный на пространстве основных функций $D(\mathbb{T}^2)$ — бесконечно дифференцируемых функций, носитель которых содержится в \mathbb{T}^2 : $D(\mathbb{T}^2) \subset C^\infty(\mathbb{T}^2) \subset L_2(\mathbb{T}^2)$, $\mathcal{Z}: D(\mathbb{T}^2) \rightarrow \mathbb{R}$; $\{q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot)\}_{i,j=0}^\infty$ — базисная система пространства $L_2(\mathbb{T}^2)$.

Бесконечная матрица $Z = (Z_{ij})$, элементы которой задаются формулой

$$Z_{ij} = \mathcal{Z} q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot), \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.54)$$

называется двумерной спектральной характеристикой линейного функционала \mathcal{Z} .

Как и ранее (см. разд. 1.1), отображение, ставящее в соответствие линейному функционалу \mathcal{Z} его двумерную спектральную характеристику Z , называется спектральным преобразованием и также обозначается \mathbb{S} :

$$\mathbb{S}[\mathcal{Z}] = Z = \begin{bmatrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} & \dots \\ Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} & \dots \\ Z_{20} & Z_{21} & Z_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где числа Z_{ij} определяются формулой (1.54).

Рассуждения о корректности определения спектральной характеристики линейного функционала \mathcal{Z} аналогичны приведенным в п. 1 замечаний 1.4.

Если линейный функционал \mathcal{Z} можно представить в виде

$$\mathcal{Z}f(\cdot) = (z(\cdot), f(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^2)}, \quad (1.55)$$

где $z(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$, то его спектральная характеристика — это двумерная спектральная характеристика функции $z(\cdot)$: $\mathbb{S}[\mathcal{Z}] = \mathbb{S}[z(\cdot)]$. Такой функционал (регулярную обобщенную функцию) можно продолжить на пространство $L_2(\mathbb{T}^2)$ и $\|\mathcal{Z}\| = \|z(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}$.

Теорема 1.5. Пусть \mathcal{Z} — линейный функционал, определенный на пространстве $L_2(\mathbb{T}^2)$; $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ — функция двух переменных; Z и F — двумерные спектральные характеристики функционала \mathcal{Z} и функции $f(\cdot)$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$. Тогда

$$\mathcal{Z}f(\cdot) = \text{tr } Z^T F. \quad (1.56)$$

Сформулированное утверждение эквивалентно свойству сохранения скалярного произведения при спектральном преобразовании.

Когда линейный функционал \mathcal{Z} нельзя представить в виде (1.55), его (сингулярную обобщенную функцию) можно рассматривать либо на пространстве основных функций $D(\mathbb{T}^2)$, либо на некотором подпространстве пространства $L_2(\mathbb{T}^2)$. На все пространство $L_2(\mathbb{T}^2)$ его продолжить невозможно, поэтому выполнение соотношения (1.56) не гарантируется.

Приведем примеры линейных функционалов на множестве функций двух переменных.

1. Линейный функционал $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}$, ставящий в соответствие функции двух переменных $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ интеграл от этой функции по квадрату \mathbb{T}^2 :

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}^2} f(t, \tau) dt d\tau.$$

Нетрудно видеть, что функционалу $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}$ соответствует функция $z(t, \tau) \equiv 1$ и $z(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$, следовательно, по определению двумерной спектральной характеристики линейного функционала $\mathbb{S}[\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}] = \mathbb{S}[z(\cdot)] = \Lambda$, где элементы двумерной спектральной характеристики Λ задаются соотношением

$$\Lambda_{ij} = \mathcal{J}_{\mathbb{T}^2} q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot) = \int_{\mathbb{T}^2} q(i, t) q(j, \tau) dt d\tau, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда значение функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}$ определяется формулой

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}^2} f(t, \tau) dt d\tau = \text{tr } \Lambda^T F = \text{tr } \Lambda F, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)],$$

с учетом симметричности матрицы Λ .

Дополнительно отметим, что функция $z(t, \tau) \equiv 1$ представляется в виде $z(\cdot) = z_0(\cdot) \otimes z_0(\cdot)$, где $z_0(t) \equiv 1$, поэтому согласно теореме 1.4 $\Lambda = \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T$, где $\mathbf{1}$ — спектральная характеристика функции $z_0(t)$, определенная относительно той же базисной системы, что и двумерная спектральная характеристика Λ . Кроме того, $\mathbf{1}$ — спектральная характеристика линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}$, ставящего в соответствие функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ интеграл от этой функции по отрезку \mathbb{T} (см. разд. 1.1), и значение функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}$ можно представить следующим образом: $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2} f(\cdot) = \mathbf{1}^T F \mathbf{1}$.

Для всех перечисленных в разд. 1.1 базисных систем двумерная спектральная характеристика Λ найдена в примере 1.6.

2. Линейный функционал $\delta_{\theta,\vartheta}$, ставящий в соответствие функции двух переменных $f(\cdot) \in D(\mathbb{T}^2)$ значение этой функции в точке $(\theta, \vartheta) \in \mathbb{T}^2$: $\delta_{\theta,\vartheta} f(\cdot) = f(\theta, \vartheta)$.

Как и в случае с линейным функционалом δ_τ , ставящим в соответствие функции $f(\cdot) \in D(\mathbb{T})$ значение этой функции в точке $\tau \in \mathbb{T}$ (см. разд. 1.1), в пространстве $L_2(\mathbb{T}^2)$ нет такого элемента, что функционал $\delta_{\theta,\vartheta}$ задается в виде (1.55), однако можно ввести обобщенную функцию $\delta((\cdot) - \theta) \otimes \delta((\cdot) - \vartheta)$, которая представляется как импульсная дельта-функция Дирака векторного аргумента $[t - \theta \ \tau - \vartheta]^T$ [237]. Тогда

$$\delta_{\theta,\vartheta} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}^2} \delta(t - \theta) \delta(\tau - \vartheta) f(t, \tau) dt d\tau = f(\theta, \vartheta).$$

При фиксированных θ, ϑ функционал $\delta_{\theta,\vartheta}$ можно продолжить на множество функций из пространства $L_2(\mathbb{T}^2)$, непрерывных в точке (θ, ϑ) .

Для элементов двумерной спектральной характеристики $\Delta_{\theta,\vartheta}$ линейного функционала $\delta_{\theta,\vartheta}$ согласно определению (1.54) имеем

$$(\Delta_{\theta,\vartheta})_{ij} = \delta_{\theta,\vartheta} q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot) = q(i, \theta) q(j, \vartheta), \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (1.57)$$

Значение функционала $\delta_{\theta,\vartheta}$ определяется выражением (формула обращения (1.43) при $t = \theta$ и $\tau = \vartheta$)

$$\delta_{\theta,\vartheta} f(\cdot) = f(\theta, \vartheta) = \text{tr } \Delta_{\theta,\vartheta}^T F, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)],$$

при условии, что числовой ряд $\sum_{i,j=0}^{\infty} F_{ij} q(i, \theta) q(j, \vartheta)$ сходится к значению функции $f(\theta, \vartheta)$.

Напомним (см. разд. 1.1 и соотношение (1.35)), что значения функций базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ при $t = \theta$ — это элементы спектральной характеристики Δ_θ линейного функционала δ_θ , или спектральной характеристики дельта-функции $\delta((\cdot) - \theta)$. Переходя к матричным обозначениям, получаем $\Delta_{\theta,\vartheta} = \Delta_\theta \Delta_\vartheta^T$, тогда значение функционала $\delta_{\theta,\vartheta}$ представляется в виде $\delta_{\theta,\vartheta} f(\cdot) = \Delta_\theta^T F \Delta_\vartheta$.

В частном случае $\theta = \vartheta$ двумерная спектральная характеристика $\Delta_{\theta,\theta} = \Delta_\theta \Delta_\theta^T$ — симметрическая матрица. При $\theta = \vartheta = t_0$ или $\theta = \vartheta = T$ она называется матрицей начальных или конечных значений соответственно [177].

Приведем *примеры матриц начальных значений* $\Delta_{0,0}$, определенных относительно различных базисных систем на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$ (см. разд. 1.1).

1. Полиномы Лежандра (1.5):

$$\Delta_{0,0} = \frac{1}{T} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{5} & -\sqrt{7} & \dots & c_{0m} & \dots \\ -\sqrt{3} & 3 & -\sqrt{15} & \sqrt{21} & \dots & c_{1m} & \dots \\ \sqrt{5} & -\sqrt{15} & 5 & -\sqrt{35} & \dots & c_{2m} & \dots \\ -\sqrt{7} & \sqrt{21} & -\sqrt{35} & 7 & \dots & c_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где $c_{m-k,m} = c_{m,m-k} = (-1)^k \sqrt{(2m - 2k + 1)(2m + 1)}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, \dots, m$.

2. Косинусоиды (1.6):

$$\Delta_{0,0} = \frac{1}{T} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \dots & c_{0m} & \dots \\ \sqrt{2} & 2 & 2 & 2 & \dots & c_{1m} & \dots \\ \sqrt{2} & 2 & 2 & 2 & \dots & c_{2m} & \dots \\ \sqrt{2} & 2 & 2 & 2 & \dots & c_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где $c_{00} = 1$, $c_{0m} = c_{m0} = \sqrt{2}$, $c_{mk} = c_{km} = 2$, $m, k = 1, 2, 3, \dots$

3. Функции Уолша (1.7):

$$\Delta_{0,0} = \frac{1}{T} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & c_{0m} & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & c_{1m} & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & c_{2m} & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & c_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где $c_{mk} = c_{km} = 1$, $m, k = 0, 1, 2, \dots$

4. Функции Хаара (1.8):

$$\Delta_{0,0} = \frac{1}{T} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & \dots & c_{0n} & \dots \\ 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & \dots & c_{1n} & \dots \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 & 0 & \dots & c_{2n} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{3n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{n0} & c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где $c_{00} = 1$, $c_{0,2^k} = c_{2^k,0} = \sqrt{2^k}$, $c_{2^m,2^k} = c_{2^k,2^m} = \sqrt{2^{m+k}}$, $m, k = 0, 1, 2, \dots$, $c_{ns} = 0$ в остальных случаях, $n, s = 0, 1, 2, \dots$

5. Тригонометрические функции (1.9):

$$\Delta_{0,0} = \frac{1}{T} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots & c_{0m} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{1m} & \dots \\ \sqrt{2} & 0 & 2 & 0 & \dots & c_{2m} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где $c_{00} = 1$, $c_{0m} = c_{m0} = \sqrt{2}$, $c_{ml} = c_{lm} = 2$, $m, l = 2, 4, 6, \dots$, $c_{ns} = 0$ в остальных случаях, $n, s = 0, 1, 2, \dots$

3. Линейный функционал $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^*$, ставящий в соответствие функции двух переменных $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ интеграл от функции $f^\diamond(\cdot)$ по отрезку \mathbb{T} , где $f^\diamond(t) = f(t, t)$:

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^* f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} f^\diamond(t) dt = \int_{\mathbb{T}} f(t, t) dt.$$

Здесь также не существует элемента пространства $L_2(\mathbb{T}^2)$, что функционал $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^*$ задается в виде (1.55). Используя дельта-функцию $\delta(\cdot)$, формально записываем

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^* f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}^2} \delta(t - \tau) f(t, \tau) dt d\tau = \int_{\mathbb{T}} f(t, t) dt,$$

где интеграл в правой части приведенного выражения будем называть интегральным следом функции $f(\cdot)$.

Двумерная спектральная характеристика E линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^*$ — это бесконечная матрица с элементами, которые выражаются формулой (1.54), т.е.

$$\Lambda_{ij}^* = \mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^* q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot) = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) q(j, t) dt = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера (1.4), т.е. двумерная спектральная характеристика линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^*$ — это бесконечная единичная матрица E вне зависимости от базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$.

По аналогии со спектральной характеристикой дельта-функции $\delta((\cdot) - \tau)$ как функции одной переменной, будем называть E двумерной спектральной характеристикой дельта-функции $\delta(\cdot)$: $\mathbb{S}[\delta((\cdot) - (\cdot))] = E$.

Значение функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^*$ можно найти по формуле

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^* f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} f(t, t) dt = \text{tr } E^T F = \text{tr } F, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)], \quad (1.58)$$

если числовой ряд (1.50) — след матрицы F — сходится к соответствующему значению интеграла. Далее приведем поясняющий пример.

Пример 1.9. Найти интегралы $\int_{\mathbb{T}} f(t, t) dt$ для функций $f(t, \tau) \equiv 1$ и $f(t, \tau) = 1(t - \tau)$ (единичная ступенчатая функция) при $\mathbb{T} = [0, T]$ и сравнить с результатом, полученным с помощью применения двумерных спектральных характеристик линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^*$ и функций $f(\cdot)$, определенных относительно полиномов Лежандра (1.5).

□ Непосредственное вычисление интегралов $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^* f(\cdot)$ для обеих функций $f(t, \tau) \equiv 1$ и $f(t, \tau) = 1(t - \tau)$ не составляет труда:

$$f(t, \tau) \equiv 1: \mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^* f(t, \tau) = \int_{\mathbb{T}} dt = T, \quad f(t, \tau) = 1(t - \tau): \mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^* f(t, \tau) = \int_{\mathbb{T}} 0 \cdot dt = 0.$$

Далее воспользуемся формулой (1.58). Двумерная спектральная характеристика Λ функции $f(t, \tau) \equiv 1$ относительно полиномов Лежандра (1.5) найдена в примере 1.6. У нее единственный ненулевой элемент $\Lambda_{00} = T$:

$$\Lambda = T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что $\text{tr } \Lambda = T$ и $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^* f(\cdot) = \text{tr } \Lambda$.

Двумерная спектральная характеристика F функции $f(t, \tau) = 1(t - \tau)$ относительно полиномов Лежандра (1.5) получена в примере 1.7. На главной диагонали только элемент $F_{00} = T/2$ не равен нулю, поэтому $\text{tr } F = T/2$ и $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^* f(t, \tau) \neq \text{tr } F$. Такой результат (формула (1.58) здесь несправедлива) связан с интегрированием функции $1(t - \tau)$ по множеству, на котором эта функция разрывна. Числовой ряд (1.50) — след матрицы F — не сходится к соответствующему значению интеграла. ■

З а м е ч а н и е 1.7. Результат примера 1.9, в некотором смысле аналогичный примеру 1.5, в более простом случае, а именно при вычислении значения линейного функционала (сингулярной обобщенной функции) на функции одной переменной, описан в замечании 1.5. В частности, рассматривая пространство $L_2(\mathbb{T}^2)$ как пространство классов эквивалентности, образованных функциями, значения которых отличаются на множестве нулевой меры, можно отождествить функцию $f(t, \tau) = 1(t - \tau) = 1_-(t - \tau)$ и функцию $1_{\pm}((\cdot) - (\cdot))$. Для функции $1_{\pm}((\cdot) - (\cdot))$ соотношение (1.58) выполнено.

Здесь также можно определить усредняющий оператор (см. замечание 1.5), результат применения которого к функции $f(\cdot)$ — функция, однозначно определенная в каждой точке квадрата \mathbb{T} . В частности, для функции $1((\cdot) - (\cdot))$ результатом усреднения будет $1_{\pm}((\cdot) - (\cdot))$.

Отметим, что усредняющий оператор можно задать неединственным образом [24]. Более подробно эти вопросы изложены в разд. 1.9, в том числе и корректное определение интегрального следа, связанного с линейным функционалом $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^*$.

1.3. Изменение базисной системы

Двумерные спектральные характеристики функции двух переменных могут быть определены относительно различных базисных систем (см. п. 2 замечаний 1.6), в том числе и относительно базисных систем вида $\{q(i, \cdot) \otimes p(j, \cdot)\}_{i,j=0}^{\infty}$, где функции $q(i, \cdot)$ и $p(i, \cdot)$ образуют разные базисные системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{p(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$ (см. разд. 1.1). В спектральной форме математического описания важное значение имеет двумерная спектральная характеристика дельта-функции, которая определена в разд. 1.2 относительно базисных систем вида $\{q(i, \cdot) \otimes p(j, \cdot)\}_{i,j=0}^{\infty}$.

Двумерная спектральная характеристика дельта-функции $\delta((\cdot) - (\cdot))$, определенная относительно базисной системы $\{q(i, \cdot) \otimes p(j, \cdot)\}_{i,j=0}^{\infty}$, задает матрицу изменения базисной системы. Обозначим такую матрицу через Δ_{qp} , ее элементы удовлетворяют выражению

$$\Delta_{qp}^{ij} = \mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^* q(i, \cdot) \otimes p(j, \cdot) = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) p(j, t) dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

Она зависит не только от двух базисных систем, но и того, в каком порядке они взяты, при этом $\Delta_{pq} = \Delta_{qp}^T$, что следует из определения.

Рассмотрим преобразование спектральных характеристик функций одной и двух переменных, связанное с изменением базисной системы [220–222].

1. Пусть $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, $\mathbb{S}[f(\cdot)] = F_q$ и $\mathbb{S}[f(\cdot)] = F_p$. Тогда

$$F_q = \Delta_{qp} F_p, \quad F_p = \Delta_{pq} F_q. \quad (1.59)$$

2. Пусть $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$, $\mathbb{S}[f(\cdot)] = F_{qq}$ и $\mathbb{S}[f(\cdot)] = F_{pp}$. Тогда

$$F_{qq} = \Delta_{qp} F_{pp} \Delta_{pq}, \quad F_{pp} = \Delta_{pq} F_{qq} \Delta_{qp}. \quad (1.60)$$

Укажем свойства матриц изменения базисных систем.

1. Ортогональность.

Матрица изменения базисной системы Δ_{qp} является ортогональной матрицей, т.е. $\Delta_{qp}^{-1} = \Delta_{qp}^T$. Она задает ортогональное преобразование пространства ℓ_2 квадратично суммируемых последовательностей, что следует из формулы (1.59) связи спектральных характеристик: $F_q = \Delta_{qp} \Delta_{pq} F_p$, $F_p = \Delta_{pq} \Delta_{qp} F_q$, которая справедлива для произвольных спектральных характеристик функций одной переменной — элементов пространства ℓ_2 , т.е. $\Delta_{qp} \Delta_{pq} = \Delta_{pq} \Delta_{qp} = E$.

Из ортогональности следует, что $\|\Delta_{qp}\| = 1$, а двумерные спектральные характеристики F_{qp} и F_{pq} — это подобные матрицы.

2. Транзитивность.

Пусть базисным системам $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{p(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ соответствует матрица Δ_{qp} , а базисным системам $\{p(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{r(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — матрица Δ_{pr} . Тогда базисным системам $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{r(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ соответствует матрица $\Delta_{qr} = \Delta_{qp} \Delta_{pr}$, что также следует из формулы (1.59) связи спектральных характеристик: $F_q = \Delta_{qp} F_p = \Delta_{qp} \Delta_{pr} F_r$, $F_r = \Delta_{rp} F_p = \Delta_{rp} \Delta_{qp} F_q$. Таким образом, матрицы изменения базисных систем образуют мультипликативную группу.

3. Сдвиг и масштабирование базисной системы.

Если $\{\tilde{q}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{\tilde{p}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисные системы пространства $L_2([0, 1])$, а $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{p(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — соответствующие им базисные системы пространства $L_2([t_0, T])$ (см. п. 1 замечаний 1.1), то $\Delta_{\tilde{q}\tilde{p}} = \Delta_{qp}$, т.е. матрица изменения базисной системы инвариантна относительно сдвига и масштабирования.

Доказательство этого свойства следует из определения элементов матрицы Δ_{qp} (замена переменной интегрирования).

Замечания 1.8.

1. Столбец матрицы изменения базисной системы Δ_{qp} с номером j представляет собой спектральную характеристику базисной функции $p(j, \cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$:

$$\Delta_{qp} = \begin{bmatrix} \mathbb{S}[p(0, \cdot)]_q & \mathbb{S}[p(1, \cdot)]_q & \mathbb{S}[p(2, \cdot)]_q & \dots \end{bmatrix}.$$

Строка матрицы изменения базисной системы Δ_{qp} с номером i — это транспонированная спектральная характеристика базисной функции $q(i, \cdot)$ относительно базисной системы $\{p(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$:

$$\Delta_{qp} = \begin{bmatrix} \mathbb{S}[q(0, \cdot)]_p^T & \mathbb{S}[q(1, \cdot)]_p^T & \mathbb{S}[q(2, \cdot)]_p^T & \dots \end{bmatrix}^T.$$

2. Преобразование спектральных характеристик обобщенных функций, связанное с изменением базисной системы, проводится аналогично по формулам (1.59) и (1.60).

3. Матрицы коэффициентов (1.16) и (1.18) линейных комбинаций блочно-импульсных функций (1.15), определяющих функции Уолша (1.7) и функции Хаара (1.8) соответственно — это матрицы изменения базисной системы, но для конечномерного случая. А выражения (1.17) и (1.19) задают конечномерный аналог формулы (1.59). Конечномерный аналог формулы (1.60) можно найти в примере 1.8.

Приведем *примеры матриц изменения базисных систем.*

1. Косинусоиды (1.6) и полиномы Лежандра (1.5):

$$\hat{\Delta}_{\hat{C}\hat{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{4\sqrt{6}}{\pi^2} & 0 & -\frac{24\sqrt{14}}{\pi^2}\left(1 - \frac{10}{\pi^2}\right) & \dots & c_{1m} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{10}}{\pi^2} & 0 & \dots & c_{2m} & \dots \\ 0 & -\frac{4\sqrt{6}}{9\pi^2} & 0 & -\frac{8\sqrt{14}}{3\pi^2}\left(1 - \frac{10}{9\pi^2}\right) & \dots & c_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{00} = 1, \quad c_{0m} = c_{m0} = 0,$$

$$c_{m-k,m} = \frac{[(-1)^{m-k} + (-1)^m] \sqrt{2(2m+1)}}{(m-k)^2 \pi^2} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s (m+2s+1)!}{(2s+1)! (m-2s-1)! (m-k)^{2s} \pi^{2s}},$$

$$c_{m,m-k} = \frac{[(-1)^{m-k} + (-1)^m] \sqrt{2(2m-2k+1)}}{m^2 \pi^2} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{m-k-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s (m-k+2s+1)!}{(2s+1)! (m-k-2s-1)! m^{2s} \pi^{2s}},$$

$$m = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Матрицу $\hat{\Delta}_{\hat{C}\hat{P}}$ можно получить, например, используя определение полиномов Лежандра (1.5) и результаты примера 1.3. Из приведенных формул следует, что $c_{m-k,m} = c_{m,m-k} = 0$, если k — нечетное число.

2. Косинусоиды (1.6) и функции Хаара (1.8):

$$\hat{\Delta}_{\hat{C}\hat{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{\pi} & \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\pi} & \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\pi} & \dots & c_{1s} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{2}{\pi} & -\frac{2}{\pi} & \dots & c_{2s} & \dots \\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3\pi} & \frac{2(\sqrt{2}+1)}{3\pi} & \frac{2(\sqrt{2}+1)}{3\pi} & \dots & c_{3s} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{ns} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{00} = 1, \quad c_{0m} = c_{m0} = 0, \quad c_{n,2^m+k} = -\frac{\sqrt{2^{m+3}}}{n\pi} \sin \frac{(2k+1)n\pi}{2^{m+1}} \left(\cos \frac{n\pi}{2^{m+1}} - 1 \right),$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^m - 1.$$

3. Косинусоиды (1.6) и тригонометрические функции (1.9):

$$\frac{\Delta}{\tilde{C}\hat{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{8}{3\pi} & 0 & \frac{16}{15\pi} & \dots & c_{1j} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & c_{2j} & \dots \\ 0 & -\frac{8}{5\pi} & 0 & \frac{16}{7\pi} & \dots & c_{3j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \dots & c_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & j = 2k, \\ \frac{2}{\pi} \frac{(1 + (-1)^{i+j})(j+1)}{(j+1)^2 - i^2}, & j = 2k-1, \end{cases} \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

При вычислении элементов этой матрицы использовано свойство ортонормированности тригонометрических функций, а также то, что косинусоиды — это часть базисной системы тригонометрических функций, ортонормированной на отрезке $[-T, T]$ (см. п. 2 замечаний 1.1). Дополнительно можно отметить, что $c_{ij} = 0$, если $i + j$ — нечетное число.

4. Функции Хаара (1.8) и функции Уолша (1.7):

$$\frac{\Delta}{\hat{X}\hat{W}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{ij} = (\hat{X}(i, t), \hat{W}(j, t))_{L_2(\mathbb{T})} = \begin{cases} 1, & i = j = 0 \text{ или } i = j = 1, \\ \sqrt{\frac{T}{2^m}} \hat{W}_l \left(l, \frac{(2k+1)T}{2^{m+1}} \right), & i = 2^m + k, \\ & j = 2^m + l, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$m = 1, 2, 3, \dots, \quad k, l = 0, 1, \dots, 2^m - 1.$$

Матрица $\frac{\Delta}{\hat{X}\hat{W}}$ является не только ортогональной, но и симметрической:

$$\frac{\Delta}{\hat{X}\hat{W}} = \frac{\Delta}{\hat{X}\hat{W}}^{-1} = \frac{\Delta}{\hat{X}\hat{W}}^T, \quad \frac{\Delta}{\hat{W}\hat{X}} = \frac{\Delta}{\hat{X}\hat{W}},$$

с блочно-диагональной структурой, с блоками размеров $2 \times 2, 2 \times 2, 4 \times 4, 8 \times 8, \dots, 2^m \times 2^m, \dots$. Это является следствием того, что функции с номерами $i = 0, 1$ для этих базисных систем совпадают, функции с номерами $i = 2^m + k, k = 0, 1, \dots, 2^m - 1$, для всех $m = 1, 2, 3, \dots$ связаны между собой линейными комбинациями [14, 154, 181].

Выше приведены матрицы изменения базисных систем, которые позволяют преобразовать

спектральные характеристики, определенные относительно следующих пар базисных систем:

$$\begin{array}{ccccc} \{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty} & \leftrightarrow & \{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty} & \leftrightarrow & \{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty} \\ & & \downarrow & & \\ & & \{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty} & \searrow & \\ & & \downarrow & & \{\hat{\Pi}(i, \cdot)\}_{i=0}^{L-1}, \\ & & \{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty} & \swarrow & \end{array}$$

но с учетом свойства транзитивности можно получить матрицы изменения базисных систем для любых пар базисов $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{p(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$, приведенных в разд. 1.1. Например:

$$\begin{array}{c} \Delta \\ \hat{P}\hat{W} \end{array} = \begin{array}{c} \Delta \\ \hat{P}\hat{C} \end{array} \begin{array}{c} \Delta \\ \hat{C}\hat{X} \end{array} \begin{array}{c} \Delta \\ \hat{X}\hat{W} \end{array} = \begin{array}{c} \Delta \\ \hat{C}\hat{P} \end{array} \begin{array}{c} \Delta \\ \hat{C}\hat{X} \end{array} \begin{array}{c} \Delta \\ \hat{X}\hat{W} \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{c} \Delta \\ \hat{W}\hat{F} \end{array} = \begin{array}{c} \Delta \\ \hat{W}\hat{X} \end{array} \begin{array}{c} \Delta \\ \hat{X}\hat{C} \end{array} \begin{array}{c} \Delta \\ \hat{C}\hat{F} \end{array} = \begin{array}{c} \Delta \\ \hat{X}\hat{W} \end{array} \begin{array}{c} \Delta \\ \hat{C}\hat{X} \end{array} \begin{array}{c} \Delta \\ \hat{C}\hat{F} \end{array}.$$

1.4. Спектральные характеристики линейных операторов

Введем понятие спектральных характеристик линейных операторов. Пусть $\mathcal{A}: D_{\mathcal{A}} \subseteq L_2(\mathbb{T}) \rightarrow L_2(\mathbb{T})$ — линейный оператор, определенный на пространстве $L_2(\mathbb{T})$ или на его некотором подпространстве, $\mathbb{T} = [t_0, T]$, $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базис этого пространства (см. разд. 1.1).

Бесконечная матрица $A = (A_{ij})$, элементы которой задаются формулой

$$A_{ij} = (q(i, \cdot), \mathcal{A}q(j, \cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \mathcal{A}q(j, t) dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.61)$$

называется спектральной характеристикой линейного оператора \mathcal{A} .

Так же, как и в случае спектральных характеристик функций, отображение, ставящее в соответствие линейному оператору его спектральную характеристику, называется спектральным преобразованием и обозначается \mathbb{S} :

$$\mathbb{S}[\mathcal{A}] = A = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & \dots \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & \dots \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где числа A_{ij} задаются формулой (1.61).

Установим связь между спектральными характеристиками функций $f(\cdot) \in D_{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{A}f(\cdot)$.

Теорема 1.6. Пусть \mathcal{A} — линейный оператор, определенный на пространстве $L_2(\mathbb{T})$ или на его некотором подпространстве, т.е. $\mathcal{A}: D_{\mathcal{A}} \subseteq L_2(\mathbb{T}) \rightarrow L_2(\mathbb{T})$, $f(\cdot) \in D_{\mathcal{A}}$; A и F — спектральные характеристики оператора \mathcal{A} и функции $f(\cdot)$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$. Тогда

$$\mathbb{S}[\mathcal{A}f(\cdot)] = AF. \quad (1.62)$$

Доказательство. Обозначим через $x(\cdot)$ образ функции $f(\cdot)$, т.е. $x(\cdot) = \mathcal{A}f(\cdot)$, и найдем коэффициенты разложения функции $x(\cdot)$ по функциям базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$. Для этого применим формулу (1.11):

$$X_i = (q(i, \cdot), x(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = (q(i, \cdot), \mathcal{A}f(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})}.$$

Представим функцию $f(\cdot)$ в виде ряда по функциям базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.1 и формулу (1.10)) и воспользуемся линейностью оператора \mathcal{A} . Тогда

$$\begin{aligned} X_i &= \left(q(i, \cdot), \mathcal{A} \sum_{j=0}^{\infty} F_j q(j, \cdot) \right)_{L_2(\mathbb{T})} = \left(q(i, \cdot), \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n F_j \mathcal{A} q(j, \cdot) \right)_{L_2(\mathbb{T})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \left(q(i, \cdot), \mathcal{A} q(j, \cdot) \right)_{L_2(\mathbb{T})} F_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n A_{ij} F_j, \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Следовательно, по определению произведения матриц [110, 112] справедливо равенство $X = AF$, где X — спектральная характеристика функции $x(\cdot)$, т.е. справедливо соотношение (1.62). ◀

Приведем свойства спектрального преобразования линейных операторов, определенных на пространстве $L_2(\mathbb{T})$.

1. Спектральное преобразование тождественного оператора [112].

Спектральная характеристика тождественного оператора \mathcal{I} представляет собой двумерную единичную матрицу:

$$\mathbb{S}[\mathcal{I}] = E. \quad (1.63)$$

2. Спектральное преобразование композиции операторов [112].

Спектральная характеристика композиции линейных операторов \mathcal{A} и \mathcal{B} равна произведению их спектральных характеристик:

$$\mathbb{S}[\mathcal{A} \circ \mathcal{B}] = AB, \quad A = \mathbb{S}[\mathcal{A}], \quad B = \mathbb{S}[\mathcal{B}]. \quad (1.64)$$

3. Спектральное преобразование сопряженного оператора [112].

Спектральная характеристика сопряженного оператора \mathcal{A}^* к оператору \mathcal{A} равна транспонированной спектральной характеристике оператора \mathcal{A} :

$$\mathbb{S}[\mathcal{A}^*] = A^T, \quad A = \mathbb{S}[\mathcal{A}]. \quad (1.65)$$

4. Спектральное преобразование обратного оператора [112].

Если для линейного оператора \mathcal{A} существует обратный оператор \mathcal{A}^{-1} , то спектральная характеристика обратного оператора равна обратной спектральной характеристике оператора \mathcal{A} :

$$\mathbb{S}[\mathcal{A}^{-1}] = A^{-1}, \quad A = \mathbb{S}[\mathcal{A}]. \quad (1.66)$$

5. Спектральное преобразование коммутатора операторов [132, 134].

Спектральная характеристика коммутатора линейных операторов \mathcal{A} и \mathcal{B} равна коммутатору их спектральных характеристик:

$$\mathbb{S}[[\mathcal{A}, \mathcal{B}]] = [A, B], \quad A = \mathbb{S}[\mathcal{A}], \quad B = \mathbb{S}[\mathcal{B}], \quad (1.67)$$

где $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A} \circ \mathcal{B} - \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$, $[A, B] = AB - BA$.

В теории управления широкое применение нашло описание линейных систем переходными функциями, в частности импульсной переходной функцией $k(\cdot)$ — функцией двух переменных, которая определяется как реакция системы на импульсное входное воздействие $f(t) = \delta(t - \tau)$ при нулевых начальных условиях [105, 209, 211, 220–222], где t — текущее время, τ — момент приложения импульсного воздействия (параметр). В спектральной форме математического

описания для линейных систем управления применяется двумерная нестационарная передаточная функция — двумерная нестационарная спектральная характеристика импульсной переходной функции $k(\cdot)$ (см. п. 1 замечаний 1.6), причем $k(\cdot)$ может быть и обобщенной функцией (см. разд. 1.2), — это бесконечная матрица $A = (A_{ij})$, элементы которой рассчитываются по формуле

$$\begin{aligned} A_{ij} &= (q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot), k(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \int_{\mathbb{T}^2} q(i, t) q(j, \tau) k(t, \tau) dt d\tau = \\ &= \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \int_{t_0}^t k(t, \tau) q(j, \tau) d\tau dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

с учетом условия физической реализуемости: $k(t, \tau) = 0$ при $t \leq \tau$, т.е. $A = \mathbb{S}[k(\cdot)]$.

Такое название неслучайно. Для линейных стационарных систем управления импульсную переходную функцию можно рассматривать как функцию $k(\eta) = k(t - \tau)$ одной переменной $\eta = t - \tau$. Ее изображение по Лапласу называется передаточной функцией [105, 209]. Для линейных нестационарных систем управления двумерная нестационарная передаточная функция выступает аналогом передаточной функции.

Бесконечная матрица A является спектральной характеристикой линейного оператора

$$\mathcal{A}f(\cdot) = \int_{t_0}^{(\cdot)} k(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (1.68)$$

который определяет выходной сигнал $x(\cdot)$ линейной системы управления при входном сигнале $f(\cdot)$ и нулевых начальных условиях [105, 220–222]. Она позволяет представить связь вход – выход

$$x(t) = \int_{t_0}^t k(t, \tau) f(\tau) d\tau \quad (1.69)$$

для линейных систем при детерминированных воздействиях и нулевых начальных условиях в спектральной форме математического описания:

$$X = AF, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)], \quad X = \mathbb{S}[x(\cdot)]. \quad (1.70)$$

Перечислим некоторые элементарные звенья линейных систем управления (на рис. 1.1 используется обозначение p для оператора дифференцирования по времени) и соответствующие им линейные операторы и импульсные переходные функции:

- усилительное звено: $\mathcal{A}f(\cdot) = a(\cdot)f(\cdot)$, $k(t, \tau) = a(t)\delta(t - \tau)$;
- дифференцирующее звено: $\mathcal{D}f(\cdot) = f'(\cdot)$, $k(t, \tau) = \delta'(t - \tau)$;
- интегрирующее звено: $\mathcal{D}^{-1}f(\cdot) = \int_{t_0}^{(\cdot)} f(\tau) d\tau$, $k(t, \tau) = 1(t - \tau)$.

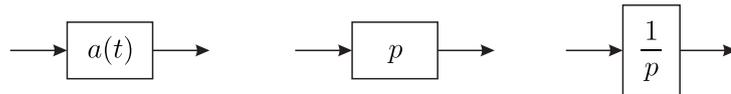


Рис. 1.1. Элементарные звенья линейных систем управления

Указанное выше свойство спектрального преобразования композиции операторов эквивалентно представлению двумерной нестационарной передаточной функции последовательного соединения двух звеньев линейных систем управления.

З а м е ч а н и я 1.9.

1. Нестационарная спектральная характеристика (см. п. 1 замечаний 1.2) нормальной импульсной реакции, т.е. функции $k(\cdot, \tau)$ при фиксированном значении $\tau \in \mathbb{T}$, называется нестационарной нормальной передаточной функцией: $N_\tau = \mathbb{S}[k(\cdot, \tau)]$, а транспонированная нестационарная спектральная характеристика сопряженной импульсной реакции, т.е. функции $k(t, \cdot)$ при фиксированном значении $t \in \mathbb{T}$, называется нестационарной сопряженной передаточной функцией: $H_t = (\mathbb{S}[k(t, \cdot)])^\top$.

Они связаны с двумерной нестационарной передаточной функцией соотношениями $N_\tau = A\Delta_\tau$, $H_t = \Delta_t^\top A$, где Δ_τ и Δ_t — спектральные характеристики дельта-функции.

В частности, с помощью нестационарной сопряженной передаточной функции можно представить связь выходного сигнала $x(\cdot)$ линейной системы управления и спектральной характеристики F входного сигнала $f(\cdot)$: $x(t) = H_t F$.

2. Столбец спектральной характеристики A линейного оператора \mathcal{A} с номером j представляет собой спектральную характеристику образа базисной функции $q(j, \cdot)$ при применении оператора \mathcal{A} , т.е.

$$\mathbb{S}[\mathcal{A}] = A = [\mathbb{S}[\mathcal{A}q(0, \cdot)] \quad \mathbb{S}[\mathcal{A}q(1, \cdot)] \quad \mathbb{S}[\mathcal{A}q(2, \cdot)] \quad \dots].$$

Если использовать терминологию, принятую в теории управления [220–222], то столбец двумерной нестационарной передаточной функции A с номером j — это нестационарная спектральная характеристика выходного сигнала при входном сигнале $q(j, \cdot)$ и нулевых начальных условиях (см. п. 1 замечаний 1.2).

3. При необходимости в обозначение спектральной характеристики линейного оператора включается обозначение базисной системы, как и для любой двумерной спектральной характеристики (см. п. 2 замечаний 1.6): A . Аналогичное замечание справедливо и для нестационарных нормальной и сопряженной передаточных функций.

Важный класс линейных операторов, определенных на пространстве $L_2(\mathbb{T})$, задается соотношением

$$\mathcal{A}f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} k(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau, \quad k(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2). \quad (1.71)$$

Они называются операторами Гильберта–Шмидта, а операторы (1.68) — операторами Вольтерра, или интегральными операторами, $k(\cdot)$ — ядро оператора [21, 69]. Спектральная характеристика такого оператора — это двумерная спектральная характеристика его ядра (см. разд. 1.2). Из перечисленных линейных операторов оператором Гильберта–Шмидта является только оператор интегрирования \mathcal{D}^{-1} , а его ядро — единичная ступенчатая функция $k(t, \tau) = 1(t - \tau)$ (см. формулу (1.28)). Ее двумерная спектральная характеристика относительно полиномов Лежандра (1.5) найдена в примере 1.7.

Остальные линейные операторы также задаются в интегральной форме (1.68), но их ядра не принадлежат пространству $L_2(\mathbb{T}^2)$, представляя собой обобщенные функции.

Далее подробно рассмотрим операторы умножения, интегрирования и дифференцирования. Отметим, что операторы умножения ограничены, но не компактны, операторы интегри-

рования компактны, а операторы дифференцирования неограничены.

1.5. Спектральные характеристики операторов умножения

Пусть $a(\cdot)$ — интегрируемая функция на отрезке $\mathbb{T} = [t_0, T]$, $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базис пространства $L_2(\mathbb{T})$. Оператор умножения на функцию $a(\cdot)$ вводится следующим образом:

$$\mathcal{A}f(\cdot) = a(\cdot)f(\cdot),$$

где $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$.

Бесконечная матрица $A = (A_{ij})$, элементы которой задаются формулой

$$A_{ij} = (q(i, \cdot), a(\cdot)q(j, \cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} a(t)q(i, t)q(j, t)dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.72)$$

называется спектральной характеристикой оператора умножения на функцию $a(\cdot)$, т.е. $\mathbb{S}[\mathcal{A}] = A$.

Приведем свойства спектрального преобразования операторов умножения.

1. Спектральное преобразование произведения функций одной переменной [220–222].

Спектральная характеристика произведения функций $a(\cdot)f(\cdot)$ равна произведению спектральной характеристики A оператора умножения на функцию $a(\cdot)$ и спектральной характеристики F функции $f(\cdot)$:

$$\mathbb{S}[a(\cdot)f(\cdot)] = AF, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)]. \quad (1.73)$$

2. Умножение на константу [220–222].

Спектральная характеристика оператора умножения на константу $\alpha \in \mathbb{R}$ равна произведению этой константы на бесконечную единичную матрицу: $\mathbb{S}[\mathcal{A}] = \alpha E$, где $\mathcal{A}f(\cdot) = \alpha f(\cdot)$, $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$.

3. Симметричность [220–222].

Спектральная характеристика A оператора умножения является симметрической матрицей, т.е. $A = A^T$ ($\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ — самосопряженный оператор):

$$A_{ij} = A_{ji}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (1.74)$$

4. Сдвиг и масштабирование базисной системы.

Если $\{\tilde{q}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2([0, 1])$, а $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — соответствующая ей базисная система пространства $L_2([t_0, T])$ (см. п. 1 замечаний 1.1), то

$$A = \underset{qq}{A}^+, \quad (1.75)$$

где A и $\underset{qq}{A}^+$ — спектральные характеристики операторов умножения на функции $a(t) = a^+((t - t_0)(T - t_0))$ и $a^+(t)$ соответственно, что следует из определения элементов матрицы A (замена переменной интегрирования). Например, при $t_0 = 0$ и $a^+(t) = t$ имеем $\underset{qq}{A} = T \underset{\tilde{q}\tilde{q}}{A}$, так как $a(t) = a^+(t/T) = (1/T)a^+(t)$.

Приведем примеры спектральных характеристик A оператора умножения на функцию $a_1(t) = t$, определенных относительно различных базисных систем на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$ (см. разд. 1.1).

1. Полиномы Лежандра (1.5):

$$A = T \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2\sqrt{15}} & 0 & \ddots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{2}{2\sqrt{15}} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2\sqrt{35}} & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{35}} & \frac{1}{2} & \ddots & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{m-1,m} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{m,m-1} & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{mm} = \frac{1}{2}, \quad c_{m-1,m} = c_{m,m-1} = \frac{m}{2\sqrt{4m^2-1}} \quad (m \geq 1),$$

$$c_{m-k,m} = c_{m,m-k} = 0 \quad (m \geq k), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 2, 3, \dots, m.$$

2. Косинусоиды (1.6):

$$A = T \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{9\pi^2} & \dots & c_{0m} & \dots \\ -\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} & \frac{1}{2} & -\frac{20}{9\pi^2} & 0 & \ddots & c_{1m} & \dots \\ 0 & -\frac{20}{9\pi^2} & \frac{1}{2} & -\frac{52}{25\pi^2} & \ddots & c_{2m} & \dots \\ -\frac{2\sqrt{2}}{9\pi^2} & 0 & -\frac{52}{25\pi^2} & \frac{1}{2} & \ddots & c_{3m} & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{0m} = c_{m0} = \frac{\sqrt{2}[(-1)^m - 1]}{m^2\pi^2}, \quad c_{mm} = \frac{1}{2}, \quad c_{m-k,m} = c_{m,m-k} = \frac{2(m^2 + (m-k)^2)[(-1)^k - 1]}{k^2(k-2m)^2\pi^2},$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, m-1.$$

3. Функции Уолша (1.7):

$$A = T \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & \dots & c_{0i} & \dots \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{8} & \dots & c_{1i} & \dots \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \dots & c_{2i} & \dots \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \dots & c_{3i} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{i0} & c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \dots & c_{ii} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{ij} = c_{ji} = \begin{cases} 1/2, & i = j, \\ -1/2^{m+2}, & i \oplus j = 2^m, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad m, i, j = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь выражение $i \oplus j$ означает поразрядное сложение по модулю 2 чисел i и j в двоичном представлении [163].

Отметим, что выражение для элементов спектральной характеристики A оператора умножения на функцию $a_1(t) = t$ относительно функций Уолша $\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ является следствием мультипликативного свойства (при $T = 1$ функции Уолша образуют мультипликативную группу [40]):

$$\hat{W}(i, t)\hat{W}(j, t) = \frac{\hat{W}(i \oplus j, t)}{\sqrt{T}}. \quad (1.76)$$

Это свойство может быть использовано для выражения спектральных характеристик операторов умножения на произвольные функции $a(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ через спектральные характеристики этих функций.

4. Функции Хаара (1.8):

$$A = T \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8\sqrt{2}} & -\frac{1}{8\sqrt{2}} & \cdots & c_{0n} & \cdots \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8\sqrt{2}} & \frac{1}{8\sqrt{2}} & \cdots & c_{1n} & \cdots \\ -\frac{1}{8\sqrt{2}} & -\frac{1}{8\sqrt{2}} & \frac{1}{4} & 0 & \cdots & c_{2n} & \cdots \\ -\frac{1}{8\sqrt{2}} & \frac{1}{8\sqrt{2}} & 0 & \frac{3}{4} & \ddots & c_{3n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{n0} & c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} c_{00} = c_{11} = \frac{1}{2}, \quad c_{0,2^s+k} = c_{2^s+k,0} = -\frac{1}{4\sqrt{2^{3s}}}, \quad c_{2^s+k,2^m(2^s+k)+l} = c_{2^m(2^s+k)+l,2^s+k} = -\frac{1}{2^{s+2}\sqrt{2^{3m}}}, \\ c_{2^s+k,2^m(2^s+k)+2^{m-1}+l} = c_{2^m(2^s+k)+2^{m-1}+l,2^s+k} = \frac{1}{2^{s+2}\sqrt{2^{3m}}}, \\ c_{2(2^s+k),2(2^s+k)} = c_{2^s+k,2^s+k} - \frac{1}{2^{s+2}}, \quad c_{2(2^s+k)+l,2(2^s+k)+l} = c_{2^s+k,2^s+k} + \frac{1}{2^{s+2}}, \\ c_{ns} = 0 \quad \text{в остальных случаях,} \quad n, s = 0, 1, 2, \dots, \\ m = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^s - 1, \quad l = 0, 1, \dots, 2^{m-1} - 1. \end{aligned}$$

В приведенных соотношениях учтено, что произведение двух функций Хаара — это либо нуль, либо функция Хаара с весовым (числовым) коэффициентом, либо линейная комбинация функций Хаара [210].

5. Тригонометрические функции (1.9):

$$A = T \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4\pi} & \cdots & c_{0n} & \cdots \\ -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4\pi} & 0 & \ddots & c_{1n} & \cdots \\ 0 & -\frac{1}{4\pi} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3\pi} & \ddots & c_{2n} & \cdots \\ -\frac{\sqrt{2}}{4\pi} & 0 & -\frac{2}{3\pi} & \frac{1}{2} & \ddots & c_{3n} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ c_{n0} & c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{nn} = \frac{1}{2}, \quad c_{0,2k} = c_{2k,0} = -\frac{\sqrt{2}}{2k\pi},$$

$$c_{2k,2l-1} = c_{2l-1,2k} = \frac{l}{(k^2 - l^2)\pi} \quad (k \neq l), \quad c_{2k,2k-1} = c_{2k-1,2k} = -\frac{1}{2(k+2)\pi},$$

$$c_{ns} = 0 \quad \text{в остальных случаях,} \quad n, s = 0, 1, 2, \dots, \quad k, l = 1, 2, 3, \dots$$

Нетрудно видеть (см. примеры 1.2 и 1.3, а также замечание 1.3), что столбец спектральной характеристики A с номером $j = 0$ отличается от спектральной характеристики F функции $f_1(t) = t$ числовым коэффициентом \sqrt{T} , а при $T = 1$ совпадает с ней.

Функции одной переменной $a(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ можно поставить в соответствие две спектральные характеристики. Во-первых, спектральную характеристику $\mathbb{S}[a(\cdot)] = F$ — бесконечную матрицу-столбец, а во-вторых, спектральную характеристику оператора умножения \mathcal{A} на эту функцию — бесконечную (плоскую) матрицу, т.е. $\mathbb{S}[\mathcal{A}] = A$. Эти спектральные характеристики связаны линейным отображением, которое задается бесконечной трехмерной (пространственной) матрицей.

Введем понятие спектральной характеристики билинейного оператора умножения функций, которая и задает линейное отображение пространства спектральных характеристик функций одной переменной в пространство спектральных характеристик операторов умножения на эти функции для конкретной базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$. Бесконечная трехмерная матрица $V = (V_{ijk})$, элементы которой определяются формулой

$$V_{ijk} = (q(i, \cdot), q(j, \cdot)q(k, \cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t)q(j, t)q(k, t) dt, \quad i, j, k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.77)$$

называется спектральной характеристикой оператора умножения функций.

З а м е ч а н и я 1.10.

1. В работах [220–222] бесконечная матрица A называется двумерной нестационарной передаточной функцией усилительного звена, бесконечная трехмерная матрица V — трехмерной нестационарной передаточной функцией множительного звена (см. рис. 1.2). Они определяются относительно базисной системы, заданной на нестационарном отрезке \mathbb{T} (см. п. 1 замечаний 1.2 и 1.6).

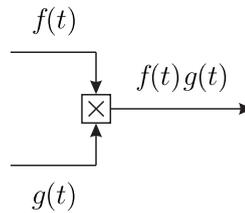


Рис. 1.2. Множительное звено

2. Как и для спектральных характеристик функций и линейных операторов (см. п. 2 замечаний 1.2, 1.6 и п. 3 замечаний 1.9), в обозначение спектральной характеристики оператора умножения функций может быть включено обозначение базисной системы, если это требуется: V_{qqq} .

3. Простое (однократное) сечение матрицы V , например полученное при фиксированном значении индекса k , представляет собой спектральную характеристику оператора умножения на базисную функцию $q(k, \cdot)$.

Двукратное сечение матрицы V , например полученное при фиксированных значениях индексов i и j , представляет собой спектральную характеристику произведения базисных функций $q(i, \cdot)q(j, \cdot)$.

4. Поскольку спектральная характеристика V оператора умножения функций образована спектральными характеристиками попарных произведений функций $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$, условие принадлежности этих функций пространству $L_2(\mathbb{T})$ можно усилить и потребовать, чтобы $q^2(i, \cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, или $q(i, \cdot) \in L_4(\mathbb{T})$, т.е.

$$\int_{\mathbb{T}} q^4(i, t) dt < \infty, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

причем для базисных систем (1.5)–(1.9) это условие справедливо. Тогда $q(i, \cdot)q(j, \cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, $i, j = 0, 1, 2, \dots$, что следует из неравенства Коши–Буняковского [21, 69]:

$$\|q(i, \cdot)q(j, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = (q^2(i, \cdot), q^2(j, \cdot))_{L_2(\mathbb{T})} \leq \|q^2(i, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \|q^2(j, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})},$$

и это обеспечивает выполнение условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| q(i, \cdot)q(j, \cdot) - \sum_{k=0}^n V_{ijk} q(k, \cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{T})} = 0, \quad \text{т.е.} \quad q(i, \cdot)q(j, \cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} V_{ijk} q(k, \cdot).$$

Для выполнения условия $a(\cdot)f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ при произвольной функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ достаточно, чтобы функция $a(\cdot)$ была ограниченной [270, 326]. Если $a(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, то нужно сужать область определения оператора умножения.

5. Далее в утверждениях и примерах требуется умножать бесконечную трехмерную матрицу на бесконечную матрицу-столбец либо на бесконечную плоскую матрицу. Теория конечных многомерных матриц детально изложена в работе [218], в частности в ней определено и умножение многомерных матриц. В контексте применения спектральной формы математического описания умножение рассмотрено в монографиях [107, 112, 177]. Вообще говоря, операцию умножения для многомерных матриц можно определить различными способами, количество которых растет с увеличением размерностей сомножителей.

Далее используется умножение трехмерной матрицы $V = (V_{ijk})$ и матрицы-столбца $F = (F_k)$, результат которого — плоская матрица $A = (A_{ij})$:

$$A_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{ijk} F_k, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots,$$

а также умножение трехмерной матрицы $V = (V_{ijk})$ и плоской матрицы $A = (A_{ij})$, результат которого — матрица-столбец $F = (F_i)$:

$$F_i = \sum_{j,k=0}^{\infty} V_{ijk} A_{jk}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Ограничимся обозначениями $A = VF$ и $F = VA$, так как другие способы умножения далее не используются и конкретная формула умножения определяются размерностью второго сомножителя.

Теорема 1.7 (см. [163]) Пусть A — спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, F — спектральная характеристика функции $a(\cdot)$, V — спектральная характеристика оператора умножения функций. Спектральные характеристики A ,

F и V определены относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$. Тогда спектральные характеристики A и F связаны соотношением

$$A = VF. \quad (1.78)$$

Теорема 1.8 (см. [163]) Пусть A — двумерная спектральная характеристика функции $a(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ и при почти всех $t \in \mathbb{T}$

$$f(t) = a(t, t) = \sum_{j,k=0}^{\infty} A_{jk} q(j, t) q(k, t),$$

F — спектральная характеристика функции $f(\cdot)$, V — спектральная характеристика оператора умножения функций. Спектральные характеристики A , F и V определены относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$. Тогда спектральные характеристики A и F связаны соотношением

$$F = VA. \quad (1.79)$$

Укажем свойства спектральных характеристик оператора умножения функций.

1. Спектральное преобразование произведения функций одной переменной [220–222].

Спектральная характеристика произведения функций $f(\cdot)g(\cdot)$ равна произведению спектральной характеристики V оператора умножения функций и спектральных характеристик F , G функций $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ соответственно:

$$\mathbb{S}[f(\cdot)g(\cdot)] = (VF)G = (VG)F, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)], \quad G = \mathbb{S}[g(\cdot)], \quad (1.80)$$

что следует из формулы (1.73) и теоремы 1.7.

2. Симметричность [220–222].

Спектральная характеристика V оператора умножения функций является симметрической матрицей относительно любой пары индексов:

$$V_{ijk} = V_{jki} = V_{kij} = V_{ikj} = V_{kji} = V_{jik}, \quad i, j, k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.81)$$

поскольку любое простое сечение спектральной характеристики V — это симметрическая матрица (см. п. 3 замечаний 1.10).

3. Сдвиг и масштабирование базисной системы.

Если $\{\tilde{q}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2([0, 1])$, а $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — соответствующая ей базисная система пространства $L_2([t_0, T])$ (см. п. 1 замечаний 1.1), то

$$V_{qqq} = \frac{1}{\sqrt{T-t_0}} V_{\tilde{q}\tilde{q}\tilde{q}}, \quad (1.82)$$

что следует из определения элементов матрицы V (замена переменной интегрирования).

На основе свойств (1.73) и (1.80) спектрального преобразования произведения функций одной переменной сформулируем следующую теорему.

Теорема 1.9. Пусть выполнены условия теоремы 1.7 и задана функция $g(\cdot): \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$g(t, x) = c_{\gamma}(t)x^{\gamma} + \dots + c_1(t)x + c_0(t), \quad \gamma \in \mathbb{N},$$

где $c_0(\cdot), c_1(\cdot), \dots, c_{\gamma}(\cdot)$ — интегрируемые функции. Кроме того, \tilde{C}_0 — спектральная характеристика функции $c_0(\cdot)$ и $C_0, C_1, \dots, C_{\gamma}$ — спектральные характеристики операторов умно-

жения на соответствующие функции $c_0(\cdot), c_1(\cdot), \dots, c_\gamma(\cdot)$, определенные относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$. Тогда спектральная характеристика \tilde{G} сложной функции $g(\cdot, a(\cdot))$ имеет вид

$$\tilde{G} = C_\gamma A^{\gamma-1} F + \dots + C_1 F + \tilde{C}_0 = C_\gamma (VF)^{\gamma-1} F + \dots + C_1 F + \tilde{C}_0 \quad (1.83)$$

при условии $g(\cdot, a(\cdot)) \in L_2(\mathbb{T})$, а спектральная характеристика G оператора умножения на функцию $g(\cdot, a(\cdot))$ представляется в форме

$$G = C_\gamma A^\gamma + \dots + C_1 A + C_0 = C_\gamma (VF)^\gamma + \dots + C_1 (VF) + C_0. \quad (1.84)$$

Доказательство. Согласно теореме 1.7 для спектральной характеристики оператора умножения \mathcal{A} на функцию $a(\cdot)$ справедливо равенство $A = VF$, аналогично $C_0 = V\tilde{C}_0$. Оператор умножения \mathcal{A}^l на функцию $a^l(\cdot)$ — это композиция l линейных операторов \mathcal{A} и можно применить свойство (1.64) спектрального преобразования композиции операторов для выражения ее спектральной характеристики A^l :

$$A^l = (VF)^l, \quad l = 1, \dots, \gamma.$$

Найдем спектральную характеристику \tilde{G} сложной функции $g(\cdot, a(\cdot))$, применяя свойство линейности (1.24), свойство (1.64) спектрального преобразования композиции операторов и свойство (1.73) спектрального преобразования произведения функций одной переменной:

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= \mathbb{S}[c_\gamma(\cdot)a(\cdot)^\gamma + \dots + c_1(\cdot)a(\cdot) + c_0(\cdot)] = \mathbb{S}[c_\gamma(\cdot)a(\cdot)^{\gamma-1}a(\cdot)] + \dots + \mathbb{S}[c_1(\cdot)a(\cdot)] + \mathbb{S}[c_0(\cdot)] = \\ &= C_\gamma A^{\gamma-1} F + \dots + C_1 F + \tilde{C}_0 = C_\gamma (VF)^{\gamma-1} F + \dots + C_1 F + \tilde{C}_0. \end{aligned}$$

Чтобы выразить спектральную характеристику G оператора умножения на функцию $g(\cdot, a(\cdot))$, применим формулу (1.78). Тогда $G = V\tilde{G} = VC_\gamma A^{\gamma-1} F + \dots + VC_1 F + V\tilde{C}_0$, где слагаемое $VC_l A^{l-1} F$ — это спектральная характеристика оператора умножения на функцию $c_l(\cdot)a^l(\cdot)$, $l = 1, \dots, \gamma$, т.е. $G = C_\gamma A^\gamma + \dots + C_1 A + C_0$.

Таким образом, справедливы формулы (1.83) и (1.84). ◀

Приведем *примеры спектральных характеристик V оператора умножения функций*, определенных относительно различных базисных систем на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$ (см. разд. 1.1).

Общая формула имеет вид

$$V = (V_{ijk}), \quad V_{ijk} = \frac{1}{\sqrt{T}} c_{ijk},$$

а далее она конкретизируется для каждой базисной системы.

1. Полиномы Лежандра (1.5):

$$c_{ijk} = \sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)} \frac{(i+j-k-1)!!}{(i+j-k)!!} \frac{(j+k-i-1)!!}{(j+k-i)!!} \frac{(k+i-j-1)!!}{(k+i-j)!!} \frac{(i+j+k)!!}{(i+j+k+1)!!},$$

если $i+j+k$ — четное число и $|i-j| \leq k \leq i+j$, и $c_{ijk} = 0$ в остальных случаях [298].

2. Косинусоиды (1.6):

$$c_{ijk} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+(i>0)(j>0)(k>0)}}, & |i-j| = k \quad \text{или} \quad i+j = k, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad i, j, k = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь $(i > 0) = 0$ при $i = 0$ и $(i > 0) = 1$ при $i > 0$, что можно записать как $(i > 0) = 1 - \delta_{i0}$, где δ_{i0} — символ Кронекера (1.4). Аналогично для выражений $(j > 0)$ и $(k > 0)$.

3. Функции Уолша (1.7):

$$c_{ijk} = \begin{cases} 1, & i \oplus j \oplus k = 0, \\ 0, & i \oplus j \oplus k \neq 0, \end{cases} \quad i, j, k = 0, 1, 2, \dots$$

4. Функции Хаара (1.8):

$$\begin{aligned} c_{00k} &= c_{11k} = \delta_{k0}, & c_{0,2^s+h,k} &= c_{2^s+h,0,k} = \delta_{2^s+h,k}, \\ c_{2^s+h,2^m(2^s+h)+l,k} &= c_{2^m(2^s+h)+l,2^s+h,k} = \sqrt{2^s} c_{0,2^m(2^s+h)+l,k}, \\ c_{2^s+h,2^m(2^s+h)+2^{m-1}+l,k} &= c_{2^m(2^s+h)+2^{m-1}+l,2^s+h,k} = -\sqrt{2^s} c_{0,2^m(2^s+h)+2^{m-1}+l,k}, \\ c_{2(2^s+h),2(2^s+h),k} &= c_{2^s+h,2^s+h,k} - \sqrt{2^s} c_{0,2^s+h,k}, & c_{2(2^s+h)+l,2(2^s+h)+l,k} &= c_{2^s+h,2^s+h,k} + \sqrt{2^s} c_{0,2^s+h,k}, \\ c_{nsk} &= 0 \quad \text{в остальных случаях,} & k, n, s &= 0, 1, 2, \dots, \\ m &= 1, 2, 3, \dots, & h &= 0, 1, \dots, 2^s - 1, & l &= 0, 1, \dots, 2^{m-1} - 1, \end{aligned}$$

где δ_{k0} и $\delta_{2^s+h,k}$ — символы Кронекера (1.4).

5. Тригонометрические функции (1.9):

$$c_{ijk} = c_{jik} = \begin{cases} \delta_{jk}, & i = 0, \\ \frac{\sqrt{1 + \delta_{ij}} \delta_{j-i,k} + \delta_{i+j,k}}{\sqrt{2}}, & i = 2n, \\ \frac{\delta_{i+j,k} - \delta_{j-i-2,k}}{\sqrt{2}}, & i = 2n - 1 \quad \text{и} \quad j = 2l, \\ \frac{\sqrt{1 + \delta_{ij}} \delta_{j-i,k} - \delta_{i+j+2,k}}{\sqrt{2}}, & i = 2n - 1 \quad \text{и} \quad j = 2l - 1, \end{cases} \quad \begin{aligned} & i, k = 0, 1, 2, \dots, \\ & j = i, i + 1, i + 2, \dots, \\ & n, l = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Пример 1.10. Найти спектральные характеристики A^n операторов умножения на функции $a_n(t) = t^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, относительно полиномов Лежандра (1.5), заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Как и в примере 1.2, воспользуемся следующим представлением для полиномов Лежандра (1.5):

$$\hat{P}(i, t) = \sqrt{\frac{2i+1}{T}} P_i\left(\frac{2t}{T} - 1\right),$$

где $\{P_i(\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — ненормированные полиномы Лежандра, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$, и рекуррентным соотношением для них:

$$t \hat{P}(i, t) = \frac{T}{2} \left[\frac{i+1}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}} \hat{P}(i+1, t) + \hat{P}(i, t) + \frac{i}{\sqrt{(2i-1)(2i+1)}} \hat{P}(i-1, t) \right].$$

Умножим левую и правую части этого соотношения на $t^{n-1} \hat{P}(j, t)$ и проинтегрируем по отрезку \mathbb{T} :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} t^n \hat{P}(i, t) \hat{P}(j, t) dt &= \frac{T}{2} \left[\frac{i+1}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}} \int_{\mathbb{T}} t^{n-1} \hat{P}(i+1, t) \hat{P}(j, t) dt + \right. \\ &\left. + \int_{\mathbb{T}} t^{n-1} \hat{P}(i, t) \hat{P}(j, t) dt + \frac{i}{\sqrt{(2i-1)(2i+1)}} \int_{\mathbb{T}} t^{n-1} \hat{P}(i-1, t) \hat{P}(j, t) dt \right]. \end{aligned}$$

Элементы спектральной характеристики A^n оператора умножения на функцию $a_n(t) = t^n$ задаются формулой (1.72):

$$A_{ij}^n = (q(i, \cdot), a_n(\cdot) q(j, \cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} t^n \hat{P}(i, t) \hat{P}(j, t) dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots,$$

следовательно,

$$A_{ij}^n = \frac{T}{2} \left[\frac{i+1}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}} A_{i+1,j}^{n-1} + A_{ij}^{n-1} + \frac{i}{\sqrt{(2i-1)(2i+1)}} A_{i-1,j}^{n-1} \right],$$

где спектральная характеристика A^0 оператора умножения на функцию $a_0(t) \equiv 1$ — это бесконечная единичная матрица: $A^0 = E$.

Такое рекуррентное соотношение позволяет получить искомые спектральные характеристики A^n . Для сокращения вычислений целесообразно использовать свойство симметричности (1.74): $A_{ij}^n = A_{ji}^n$. Кроме того, структура рекуррентного соотношения указывает на то, что матрица A^n является $(2n+1)$ -диагональной, т.е. $A = A^1$ — трехдиагональная матрица, A^2 — пятидиагональная матрица, A^3 — семидиагональная матрица и т.д. Это означает, что $A_{ij}^n = 0$ при $|i-j| > n$. ■

1.6. Спектральные характеристики операторов интегрирования

Рассмотрим операторы интегрирования. Пусть \mathcal{D}^{-1} — оператор интегрирования, определенный на пространстве $L_2(\mathbb{T})$:

$$\mathcal{D}^{-1}f(\cdot) = \int_{t_0}^{(\cdot)} f(\tau) d\tau,$$

где $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, а система функций $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базис пространства $L_2(\mathbb{T})$.

Бесконечная матрица $P^{-1} = (P_{ij}^{-1})$, элементы которой определяются формулой

$$P_{ij}^{-1} = \left(q(i, \cdot), \int_{t_0}^{(\cdot)} q(j, \tau) d\tau \right)_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \int_{t_0}^t q(j, \tau) d\tau dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.85)$$

называется спектральной характеристикой оператора интегрирования: $\mathbb{S}[\mathcal{D}^{-1}] = P^{-1}$.

По свойству спектрального преобразования композиции операторов (см. разд. 1.4) можно записать:

$$\mathcal{D}^{-k}f(\cdot) = \int_{t_0}^{(\cdot)} \dots \int_{t_0}^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_k, \quad \mathbb{S}[\mathcal{D}^{-k}] = P^{-k} = \underbrace{P^{-1} \dots P^{-1}}_{k \text{ сомножителей}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отметим некоторые свойства спектрального преобразования операторов интегрирования.

1. Спектральное преобразование интегралов от функций одной переменной [220–222].

Спектральная характеристика первообразной функции $f(\cdot)$ равна произведению спектральной характеристики P^{-1} оператора интегрирования \mathcal{D}^{-1} и спектральной характеристики F функции $f(\cdot)$:

$$\mathbb{S} \left[\int_{t_0}^{(\cdot)} f(\tau) d\tau \right] = P^{-1}F, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)]. \quad (1.86)$$

Спектральная характеристика повторного интеграла кратности k от функции $f(\cdot)$ равна произведению k -й степени спектральной характеристики P^{-1} оператора интегрирования \mathcal{D}^{-1} и спектральной характеристики F функции $f(\cdot)$:

$$\mathbb{S} \left[\int_{t_0}^{(\cdot)} \dots \int_{t_0}^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_k \right] = P^{-k}F, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)].$$

2. Связь спектральных характеристик оператора интегрирования и сопряженного с ним.

Спектральная характеристика P^{-1} оператора интегрирования \mathcal{D}^{-1} удовлетворяет соотношению

$$P^{-1} + [P^{-1}]^T = \Lambda = \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T, \quad (1.87)$$

где $[P^{-1}]^T$ — спектральная характеристика оператора, сопряженного с оператором интегрирования \mathcal{D}^{-1} , $\mathbf{1}$ — спектральная характеристика функции $f_0(t) \equiv 1$.

Доказательство. По определению (1.85) для элементов спектральной характеристики P^{-1} имеем

$$\begin{aligned} P_{ij}^{-1} + P_{ji}^{-1} &= \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \int_{t_0}^t q(j, \tau) d\tau dt + \int_{\mathbb{T}} q(j, t) \int_{t_0}^t q(i, \tau) d\tau dt = \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} q(i, t) q(j, \tau) \mathbf{1}(t - \tau) dt d\tau + \int_{\mathbb{T}^2} q(j, t) q(i, \tau) \mathbf{1}(t - \tau) dt d\tau = \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} q(i, t) q(j, \tau) \mathbf{1}(t - \tau) dt d\tau + \int_{\mathbb{T}^2} q(i, t) q(j, \tau) \mathbf{1}(\tau - t) dt d\tau = \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} q(i, t) q(j, \tau) dt d\tau = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) dt \int_{\mathbb{T}} q(j, t) dt = \Lambda_{ij}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{1}(t - \tau)$ — единичная ступенчатая функция (1.28), $\Lambda_{ij} = \mathbf{1}_i \mathbf{1}_j$, $i, j = 0, 1, 2, \dots$, а $\mathbf{1}_i$ — элементы спектральной характеристики $\mathbf{1}$:

$$\mathbf{1}_i = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Переходя к матричным обозначениям, получаем $P^{-1} + [P^{-1}]^T = \Lambda$, где Λ — симметрическая матрица $\Lambda = \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T$. ◀

3. Сдвиг и масштабирование базисной системы.

Если $\{\tilde{q}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2([0, 1])$, а $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — соответствующая ей базисная система пространства $L_2([t_0, T])$ (см. п. 1 замечаний 1.1), то

$$P_{qq}^{-1} = (T - t_0) P_{\tilde{q}\tilde{q}}^{-1}, \quad (1.88)$$

где P_{qq}^{-1} и $P_{\tilde{q}\tilde{q}}^{-1}$ — спектральные характеристики операторов интегрирования при условии, что нижний предел совпадает с левой границей отрезка, на котором задана соответствующая базисная система. Это следует из определения элементов матрицы P^{-1} (замена переменной интегрирования).

Замечания 1.11.

1. В работах [220–222] бесконечная матрица P^{-1} называется двумерной нестационарной передаточной функцией интегрирующего звена. В общем случае она определяется относительно базисной системы, заданной на нестационарном отрезке \mathbb{T} (см. п. 1 замечаний 1.2 и 1.6).

2. Для базисных систем (1.5)–(1.9) в примере 1.6 найдена матрица Λ — двумерная спектральная характеристика функции $f(t, \tau) \equiv 1$:

$$\Lambda = \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T = \begin{bmatrix} T & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что спектральную характеристику P^{-1} оператора интегрирования можно представить в виде [151]

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \Lambda + \bar{P}^{-1}, \quad (1.89)$$

где \bar{P}^{-1} — кососимметрическая матрица: $[\bar{P}^{-1}]^T = -\bar{P}^{-1}$, которая отличается от матрицы P^{-1} только тем, что $\bar{P}_{00}^{-1} = 0$. В этом можно убедиться на примерах спектральных характеристик P^{-1} оператора интегрирования, определенных относительно полиномов Лежандра (1.5), косинусоид (1.6), функций Уолша (1.7), функций Хаара (1.8) и тригонометрических функций (1.9), которые указаны далее.

Более того, формула (1.89) соответствует разложению матрицы на симметрическую и кососимметрическую. Она верна для произвольной базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$.

Приведем *примеры спектральных характеристик P^{-1} оператора интегрирования*, определенных относительно различных базисных систем на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$ (см. разд. 1.1).

1. Полиномы Лежандра (1.5):

$$P^{-1} = T \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{15}} & 0 & \ddots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{15}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{35}} & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{35}} & 0 & \ddots & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{m-1,m} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{m,m-1} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{00} = \frac{1}{2}, \quad c_{m-1,m} = -c_{m,m-1} = -\frac{1}{2\sqrt{4m^2-1}}, \quad c_{m-k,m} = c_{m,m-k} = 0, \\ m = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 0, 2, 3, \dots, m.$$

2. Косинусоиды (1.6):

$$P^{-1} = T \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{9\pi^2} & \dots & c_{0m} & \dots \\ -\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} & 0 & \frac{4}{3\pi^2} & 0 & \dots & c_{1m} & \dots \\ 0 & -\frac{4}{3\pi^2} & 0 & \frac{4}{5\pi^2} & \dots & c_{2m} & \dots \\ -\frac{2\sqrt{2}}{9\pi^2} & 0 & -\frac{4}{5\pi^2} & 0 & \dots & c_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{00} = \frac{1}{2}, \quad c_{0m} = -c_{m0} = \frac{\sqrt{2}(1 - (-1)^m)}{m^2\pi^2}, \quad c_{mm} = 0, \\ c_{m-k,m} = -c_{m,m-k} = \frac{2(1 - (-1)^k)}{k(2m-k)\pi^2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, m-1.$$

3. Функции Уолша (1.7):

$$P^{-1} = T \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \dots & c_{0m} & \dots \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \dots & c_{1m} & \dots \\ -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{2m} & \dots \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & \dots & c_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{00} = \frac{1}{2}, \quad c_{k,2^m+k} = -c_{2^m+k,k} = \frac{1}{2^{m+2}}, \quad c_{ml} = 0 \quad \text{в остальных случаях,}$$

$$m, l = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^m - 1.$$

4. Функции Хаара (1.8):

$$P^{-1} = T \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{16} & \frac{\sqrt{2}}{16} & \dots & c_{0m} & \dots \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{16} & -\frac{\sqrt{2}}{16} & \dots & c_{1m} & \dots \\ -\frac{\sqrt{2}}{16} & -\frac{\sqrt{2}}{16} & 0 & 0 & \dots & c_{2m} & \dots \\ -\frac{\sqrt{2}}{16} & \frac{\sqrt{2}}{16} & 0 & 0 & \dots & c_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{00} = \frac{1}{2}, \quad c_{0,2^s+k} = -c_{2^s+k,0} = \frac{\sqrt{2^s}}{2^{2(s+1)}},$$

$$c_{2^s+k,2^m(2^s+k)+l} = -c_{2^s+k,2^m(2^s+k)+2^{m-1}+l} = -c_{2^m(2^s+k)+l,2^s+k} = c_{2^m(2^s+k)+2^{m-1}+l,2^s+k} = \frac{\sqrt{2^m}}{2^{2(m+1)+s}},$$

$$c_{ns} = 0 \quad \text{в остальных случаях,} \quad n, s = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

$$k = 0, 1, \dots, 2^s - 1, \quad l = 0, 1, \dots, 2^{m-1} - 1.$$

5. Тригонометрические функции (1.9):

$$P^{-1} = T \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2\pi} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4\pi} & \dots & c_{0m} & \dots \\ -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} & 0 & \frac{1}{2\pi} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{1}{2\pi} & 0 & 0 & \dots & \vdots & \\ -\frac{\sqrt{2}}{4\pi} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & c_{m-1,m} & \dots \\ c_{m0} & 0 & \dots & 0 & c_{m,m-1} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{00} = \frac{1}{2}, \quad c_{0m} = -c_{m0} = \frac{\sqrt{2}}{(m+1)\pi}, \quad c_{l-1,l} = -c_{l,l-1} = \frac{1}{l\pi},$$

$$c_{ns} = 0 \quad \text{в остальных случаях,} \quad n, s = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 2k - 1, \quad l = 2k.$$

Отметим, что столбцы спектральных характеристик A оператора умножения на функцию $a_1(t) = t$ (см. примеры спектральных характеристик A) и P^{-1} с номером $j = 0$ совпадают. Эти столбцы — спектральные характеристики F функции $f_1(t) = t$ с точностью до числового коэффициента \sqrt{T} (см. примеры 1.2 и 1.3, а также замечание 1.3).

Пример 1.11. Выразить спектральные характеристики H и M двух линейных операторов \mathcal{H} и \mathcal{M} , определенных выражениями

$$\mathcal{H}g(\cdot) = \int_0^{(\cdot)} \tau g(\tau) d\tau, \quad \mathcal{M}g(\cdot) = (\cdot) \int_0^{(\cdot)} g(\tau) d\tau, \quad g(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}),$$

через спектральные характеристики операторов умножения и интегрирования относительно произвольной базисной системы, ортонормированной на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Элементы спектральных характеристик H и M операторов \mathcal{H} и \mathcal{M} соответственно задаются формулой (1.72):

$$H_{ij} = (q(i, \cdot), \mathcal{H}q(j, \cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \int_0^t \tau q(j, \tau) d\tau dt,$$

$$M_{ij} = (q(i, \cdot), \mathcal{M}q(j, \cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) t \int_0^t q(j, \tau) d\tau dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$.

Оператор \mathcal{H} является композицией оператора интегрирования \mathcal{D}^{-1} и оператора умножения \mathcal{A} на функцию $a_1(t) = t$, а оператор \mathcal{M} — композицией оператора умножения \mathcal{A} на функцию $a_1(t) = t$ и оператора интегрирования \mathcal{D}^{-1} (см. разд. 1.4–1.6):

$$\mathcal{H} = \mathcal{D}^{-1} \circ \mathcal{A}, \quad \mathcal{M} = \mathcal{A} \circ \mathcal{D}^{-1}.$$

Согласно свойству (1.64) спектрального преобразования композиции операторов спектральные характеристики H и M выражаются через произведения спектральных характеристик P^{-1} и A операторов \mathcal{D}^{-1} и \mathcal{A} соответственно, определенных относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$:

$$\mathbb{S}[\mathcal{H}] = H = P^{-1}A, \quad \mathbb{S}[\mathcal{M}] = M = AP^{-1}.$$

Отметим, что справедливо представление

$$\mathcal{H}g(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} h(\cdot, \tau) g(\tau) d\tau, \quad \mathcal{M}g(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} m(\cdot, \tau) g(\tau) d\tau,$$

в котором $h(t, \tau) = \tau 1(t - \tau)$ и $m(t, \tau) = t 1(t - \tau)$, и спектральные характеристики H и M — это двумерные спектральные характеристики функций $h(\cdot)$ и $m(\cdot)$. Например, относительно функций Уолша (1.7) и функции Хаара (1.8) они найдены в примере 1.8. ■

Пример 1.12. Выразить спектральную характеристику L линейного оператора \mathcal{L} , заданного формулой

$$\mathcal{L}g(\cdot) = \int_0^{(\cdot)} ((\cdot) - \tau) g(\tau) d\tau, \quad g(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}),$$

через спектральную характеристику оператора интегрирования относительно произвольной базисной системы, ортонормированной на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Оператор \mathcal{L} можно задать следующим образом:

$$\mathcal{L}g(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} l(\cdot, \tau) g(\tau) d\tau,$$

где $l(t, \tau) = (t - \tau)1(t - \tau)$.

Пользуясь результатом примера 1.11, имеем

$$l(t, \tau) = m(t, \tau) - h(t, \tau), \quad h(t, \tau) = \tau 1(t - \tau), \quad m(t, \tau) = t 1(t - \tau),$$

что соответствует равенству $\mathcal{L} = \mathcal{M} - \mathcal{H} = \mathcal{A} \circ \mathcal{D}^{-1} - \mathcal{D}^{-1} \circ \mathcal{A} = [\mathcal{A}, \mathcal{D}^{-1}]$, поэтому спектральная характеристика L оператора \mathcal{L} может быть представлена по свойству линейности (1.47) как

$$L = M - H = AP^{-1} - P^{-1}A = [A, P^{-1}],$$

где P^{-1} и A — спектральные характеристики оператора дифференцирования \mathcal{D}^{-1} и оператора умножения \mathcal{A} на функцию $a_1(t) = t$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$. Обозначение $[\mathcal{A}, \mathcal{D}^{-1}]$ отвечает коммутатору линейных операторов, а $[A, P^{-1}]$ — коммутатору их спектральных характеристик (см. разд. 1.4).

Далее представим спектральную характеристику L только с помощью матрицы P^{-1} . Для этого покажем, что $l(\cdot)$ — это импульсная переходная функция, соответствующая двум последовательно соединенным интегрирующим звеньям (см. разд. 1.4). Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка: $x''(t) = g(t)$, по отношению к которому импульсная переходная функция определяется как решение задачи Коши для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения с ненулевыми начальными значениями [105]: $k''(t) = 0$, $k(\tau+) = 0$, $k'(\tau+) = 1$.

Общее решение линейного однородного уравнения [115], очевидно, $k(t) = C_1 + C_2 t$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Из начальных значений находим $C_1 = C_1(\tau) = -\tau$, $C_2 = C_2(\tau) \equiv 1$, следовательно, $k(t, \tau) = t - \tau$, $t > \tau$, с учетом условия физической реализуемости: $k(t, \tau) = 0$ при $t \leq \tau$, т.е. $k(t, \tau) = l(t, \tau)$.

Далее остается применить свойство (1.64) спектрального преобразования композиции операторов и записать, что

$$L = \mathbb{S}[l(\cdot)], \quad L = P^{-2} = [P^{-1}]^2,$$

т.е. $\mathcal{L} = \mathcal{D}^{-2} = \mathcal{D}^{-1} \circ \mathcal{D}^{-1}$.

Дополнительно найдем явные формулы для элементов спектральной характеристики L , выбирая в качестве базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ полиномы Лежандра (1.5) и косинусоиды (1.6), заданные на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

Начнем с полиномов Лежандра. Матрица P^{-1} для них является трехдиагональной (см. примеры спектральных характеристик P^{-1} и пример 1.7), поэтому P^{-2} — пятидиагональная матрица:

$$\begin{aligned} (P^{-2})_{mm} &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{mk}^{-1} P_{km}^{-1} = \begin{cases} P_{00}^{-1} P_{00}^{-1} + P_{01}^{-1} P_{10}^{-1}, & m = 0, \\ P_{m,m-1}^{-1} P_{m-1,m}^{-1} + P_{m,m+1}^{-1} P_{m+1,m}^{-1}, & m > 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} (P_{00}^{-1})^2 - (P_{01}^{-1})^2, & m = 0, \\ -(P_{m,m-1}^{-1})^2 - (P_{m,m+1}^{-1})^2, & m > 0, \end{cases} \\ (P^{-2})_{m,m-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{mk}^{-1} P_{k,m-1}^{-1} = \begin{cases} P_{10}^{-1} P_{00}^{-1}, & m = 1, \\ 0, & m > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

$$(P^{-2})_{m-1,m} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{m-1,k}^{-1} P_{km}^{-1} = \begin{cases} P_{00}^{-1} P_{01}^{-1}, & m = 1, \\ 0, & m > 1, \end{cases}$$

$$(P^{-2})_{m,m-2} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{mk}^{-1} P_{k,m-2}^{-1} = P_{m,m-1}^{-1} P_{m-1,m-2}^{-1}, \quad m \geq 2,$$

$$(P^{-2})_{m-2,m} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{m-2,k}^{-1} P_{k,m}^{-1} = P_{m-2,m-1}^{-1} P_{m-1,m}^{-1}, \quad m \geq 2,$$

так как за исключением

$$P_{00}^{-1} = \frac{T}{2}, \quad P_{m-1,m}^{-1} = -P_{m,m-1}^{-1} = -T \frac{1}{2\sqrt{4m^2 - 1}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

остальные элементы матрицы P^{-1} нулевые.

Таким образом, учитывая выражения для элементов матрицы P^{-1} , находим

$$P^{-2} = T^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{4\sqrt{3}} & \frac{1}{4\sqrt{3}\sqrt{15}} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{1}{4\sqrt{3}} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{4\sqrt{15}\sqrt{35}} & \ddots & \vdots & \\ \frac{1}{4\sqrt{3}\sqrt{15}} & 0 & -\frac{1}{42} & 0 & \ddots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{4\sqrt{15}\sqrt{35}} & 0 & -\frac{1}{90} & \ddots & c_{m-2,m} & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & c_{m,m-2} & 0 & c_{mm} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{00} = \frac{1}{6}, \quad c_{mm} = -\frac{1}{2(2m-1)(2m+3)} \quad (m \geq 1),$$

$$c_{01} = -c_{10} = -\frac{1}{4\sqrt{3}}, \quad c_{m-1,m} = c_{m,m-1} = 0 \quad (m \geq 2),$$

$$c_{m-2,m} = c_{m,m-2} = \frac{1}{4\sqrt{[4(m-1)^2 - 1](4m^2 - 1)}} \quad (m \geq 2),$$

$$c_{m-k,m} = c_{m,m-k} = 0 \quad (m \geq 3), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 3, 4, \dots, m.$$

Перейдем к косинусоидам. Структура матрицы P^{-1} для них (см. примеры спектральных характеристик P^{-1}) указывает на то, что применять такой же подход, как в случае полиномов Лежандра, довольно сложно, так как придется находить суммы рядов. Наиболее оптимальный вариант — использовать определение (1.61):

$$P_{ij}^{-2} = \left(q(i, \cdot), \int_0^{(\cdot)} \int_0^{\tau_2} q(j, \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \right)_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \int_0^t \int_0^{\tau_2} q(j, \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

При $i = j = 0$ достаточно воспользоваться приведенным выше результатом (базисные функции систем (1.5) и (1.6) с номером $i = 0$ совпадают):

$$P_{00}^{-2} = \frac{T^2}{6}.$$

Найдем результат повторного интегрирования базисной функции с номером $j = 0$:

$$\int_0^t \int_0^{\tau_2} \hat{C}(0, \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 = \sqrt{\frac{1}{T}} \int_0^t \int_0^{\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 = \sqrt{\frac{1}{T}} \int_0^t \tau_2 d\tau_2 = \sqrt{\frac{1}{T}} \frac{t^2}{2},$$

поэтому при $i > 0$

$$P_{i0}^{-2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{T}} \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{\mathbb{T}} \cos \frac{j\pi t}{T} t^2 dt = T^2 \frac{\sqrt{2}(-1)^i}{i^2\pi^2},$$

что следует из примера 1.3.

Далее запишем результат повторного интегрирования базисной функции с номером $j > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^{\tau_2} \hat{C}(j, \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 &= \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^t \int_0^{\tau_2} \cos \frac{j\pi\tau_1}{T} d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \sqrt{\frac{2}{T}} \frac{T}{j\pi} \int_0^t \sin \frac{j\pi\tau_2}{T} d\tau_2 = \sqrt{\frac{2}{T}} \frac{T^2}{j^2\pi^2} \left(1 - \cos \frac{j\pi t}{T}\right) = \frac{T^2}{j^2\pi^2} (\sqrt{2}\hat{C}(0, t) - \hat{C}(j, t)), \end{aligned}$$

тогда при $i \geq 0$ с учетом равенства (1.3) получаем

$$\begin{aligned} P_{ij}^{-2} &= \int_{\mathbb{T}} \hat{C}(i, t) \frac{T^2}{j^2\pi^2} (\sqrt{2}\hat{C}(0, t) - \hat{C}(j, t)) dt = \\ &= \frac{T^2}{j^2\pi^2} \left(\sqrt{2} \int_{\mathbb{T}} \hat{C}(i, t) \hat{C}(0, t) dt - \int_{\mathbb{T}} \hat{C}(i, t) \hat{C}(j, t) dt \right) = \frac{T^2}{j^2\pi^2} (\sqrt{2}\delta_{i0} - \delta_{ij}), \end{aligned}$$

где δ_{i0} и δ_{ij} — символы Кронекера (1.4).

Следовательно,

$$P^{-2} = T^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} & \frac{\sqrt{2}}{4\pi^2} & \frac{\sqrt{2}}{9\pi^2} & \dots & c_{0i} & \dots \\ -\frac{\sqrt{2}}{\pi^2} & -\frac{1}{\pi^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{\sqrt{2}}{4\pi^2} & 0 & -\frac{1}{4\pi^2} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ -\frac{\sqrt{2}}{9\pi^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{9\pi^2} & \ddots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \dots \\ c_{i0} & 0 & \dots & \dots & 0 & c_{ii} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} c_{00} &= \frac{1}{6}, & c_{0i} &= \frac{\sqrt{2}}{i^2\pi^2}, & c_{i0} &= \frac{\sqrt{2}(-1)^i}{i^2\pi^2}, & c_{ii} &= -\frac{1}{i^2\pi^2}, \\ c_{ij} &= 0 & \text{в остальных случаях,} & & i, j &= 1, 2, 3, \dots \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 1.13. Найти спектральную характеристику X интеграла

$$x(t) = \int_0^t f_{n-1}(\tau) d\tau, \quad f_n(t) = t^n,$$

используя свойство спектрального преобразования интегралов от функций одной переменной и полиномы Лежандра (1.5), заданные на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Согласно свойству (1.86) спектрального преобразования интегралов от функций одной переменной имеем

$$X = P^{-1}F^{n-1},$$

где P^{-1} — спектральная характеристика оператора интегрирования. При выборе полиномов Лежандра (1.5) это трехдиагональная матрица с ненулевыми элементами:

$$P_{00}^{-1} = \frac{T}{2}, \quad P_{m-1, m}^{-1} = -P_{m, m-1}^{-1} = -T \frac{1}{2\sqrt{4m^2 - 1}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

а F^n — спектральная характеристика функции $f_n(t) = t^n$ (см. пример 1.2).

Следовательно,

$$X_i = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}^{-1} F_j^{n-1} = \begin{cases} P_{00}^{-1} F_0^{n-1} + P_{01}^{-1} F_1^{n-1}, & i = 0, \\ P_{i, i-1}^{-1} F_{i-1}^{n-1} + P_{i, i+1}^{-1} F_{i+1}^{n-1}, & i = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

или с учетом выражений для элементов матрицы P^{-1} :

$$X_i = \begin{cases} \frac{T}{2} \left[F_0^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{3}} F_1^{n-1} \right], & i = 0, \\ \frac{T}{2} \left[\frac{F_{i-1}^{n-1}}{\sqrt{(2i-1)(2i+1)}} - \frac{F_{i+1}^{n-1}}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}} \right], & i = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Принимая во внимание, что $nx(t) = f_n(t) = t^n$, получаем рекуррентную формулу для элементов F_i^n :

$$F_i^n = \begin{cases} \frac{Tn}{2} \left[F_0^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{3}} F_1^{n-1} \right], & i = 0, \\ \frac{Tn}{2\sqrt{2i+1}} \left[\frac{F_{i-1}^{n-1}}{\sqrt{2i-1}} - \frac{F_{i+1}^{n-1}}{\sqrt{2i+3}} \right], & i = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

которая может быть использована для нахождения спектральной характеристики F^n наряду с формулами, полученными в примере 1.2. ■

В заключительной части этого раздела обобщим один из результатов примера 1.12. Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 1.10. Пусть A — спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a_1(t) = t - t_0$ и P^{-1} — спектральная характеристика оператора интегрирования. Спектральные характеристики A и P^{-1} определены относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$. Тогда спектральная характеристика $P^{-n} = [P^{-1}]^n$, $n = 2, 3, 4, \dots$, представляется в виде

$$P^{-n} = \frac{1}{n-1} [A, P^{-(n-1)}] = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i A^{n-i-1} P^{-1} A^i, \quad (1.90)$$

где $[A, P^{-(n-1)}]$ — коммутатор (1.67) спектральных характеристик линейных операторов, C_{n-1}^i — биномиальный коэффициент.

Доказательство. Определим функцию

$$k(t, \tau) = \frac{(t - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} 1(t - \tau),$$

которая является решением задачи Коши для линейного однородного дифференциального уравнения с ненулевыми начальными значениями [105]:

$$k^{(n)}(t) = 0, \quad k^{(i)}(\tau+) = \begin{cases} 0, & i = 0, 1, \dots, n-2, \\ 1, & i = n-1, \end{cases}$$

и удовлетворяет условию физической реализуемости: $k(t, \tau) = 0$ при $t \leq \tau$, т.е. это импульсная переходная функция, соответствующая n последовательно соединенным интегрирующим звеньям.

На основе выражения

$$(t - \tau)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i t^{n-i-1} (-\tau)^i = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i t^{n-i-1} \tau^i$$

и того, что $t - \tau = t - t_0 - (\tau - t_0)$, получаем представление для линейного оператора \mathcal{D}^{-n} со спектральной характеристикой P^{-n} (см. формулу (1.68)):

$$\mathcal{D}^{-n} g(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} k(\cdot, \tau) g(\tau) d\tau = \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i ((\cdot) - t_0)^{n-i-1} (\tau - t_0)^i 1((\cdot) - \tau) g(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i ((\cdot) - t_0)^{n-i-1} \int_{t_0}^{(\cdot)} C_{n-1}^i (\tau - t_0)^i g(\tau) d\tau, \quad g(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}),$$

где каждое слагаемое в правой части задает композицию оператора интегрирования \mathcal{D}^{-1} и оператора умножения \mathcal{A} на функцию $a_1(t) = t - t_0$:

$$\mathcal{D}^{-n} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i \mathcal{A}^{n-i-1} \circ \mathcal{D}^{-1} \circ \mathcal{A}^i.$$

Тогда по свойству линейности (1.47) и свойству (1.64) спектрального преобразования композиции операторов получаем

$$P^{-n} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i A^{n-i-1} P^{-1} A^i.$$

Кроме того, $(t - \tau)^{n-1}/(n-1)! = (t - \tau)^{n-2}(t - \tau)/(n-2)!(n-1)$, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{-n} g(\cdot) &= \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{n-1} \frac{((\cdot) - \tau)^{n-2}}{(n-2)!} ((\cdot) - \tau) 1((\cdot) - \tau) g(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{n-1} ((\cdot) - t_0) \int_{t_0}^{(\cdot)} \frac{((\cdot) - \tau)^{n-2}}{(n-2)!} g(\tau) d\tau - \frac{1}{n-1} \int_{t_0}^{(\cdot)} \frac{((\cdot) - \tau)^{n-2}}{(n-2)!} (\tau - t_0) g(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части полученного равенства с точностью до постоянного множителя задает композицию оператора умножения \mathcal{A} и оператора интегрирования $\mathcal{D}^{-(n-1)}$, а второе слагаемое — композицию оператора интегрирования $\mathcal{D}^{-(n-1)}$ и оператора умножения \mathcal{A} (см. также пример 1.11):

$$\mathcal{D}^{-n} = \frac{1}{n-1} \mathcal{A} \circ \mathcal{D}^{-(n-1)} - \frac{1}{n-1} \mathcal{D}^{-(n-1)} \circ \mathcal{A} = \frac{1}{n-1} [\mathcal{A}, \mathcal{D}^{-(n-1)}].$$

Отсюда следует (см. также статью [134]), что

$$P^{-n} = \frac{1}{n-1} A P^{-(n-1)} - \frac{1}{n-1} P^{-(n-1)} A = \frac{1}{n-1} [A, P^{-(n-1)}],$$

т.е. получаем соотношение (1.90). ◀

Теорема 1.10 позволяет записать следующие формулы:

$$\begin{aligned} P^{-2} &= A P^{-1} - P^{-1} A, \quad P^{-3} = \frac{1}{2} A^2 P^{-1} - A P^{-1} A + \frac{1}{2} P^{-1} A^2, \\ P^{-4} &= \frac{1}{6} A^3 P^{-1} - \frac{1}{2} A^2 P^{-1} A + \frac{1}{2} A P^{-1} A^2 - \frac{1}{6} P^{-1} A^3, \quad \dots \end{aligned} \tag{1.91}$$

1.7. Спектральные характеристики операторов дифференцирования

Рассмотрим операторы дифференцирования. Пусть \mathcal{D} — оператор дифференцирования, определенный на пространстве $L_2(\mathbb{T})$ (вопросы, связанные с областью определения оператора дифференцирования, обсуждаются далее по тексту):

$$\mathcal{D}f(\cdot) = f'(\cdot),$$

где $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, а система функций $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базис пространства $L_2(\mathbb{T})$.

Бесконечная матрица $\mathcal{P} = (P_{ij})$, элементы которой задаются формулой

$$P_{ij} = (q(i, \cdot), q'(j, \cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) q'(j, t) dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \tag{1.92}$$

называется спектральной характеристикой оператора дифференцирования: $\mathbb{S}[\mathcal{D}] = \mathcal{P}$.

Используя свойство (1.64) спектрального преобразования композиции операторов, получаем

$$\mathcal{D}^k f(\cdot) = f^{(k)}(\cdot), \quad \mathbb{S}[\mathcal{D}^k] = \mathcal{P}^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Перечислим некоторые свойства спектрального преобразования операторов дифференцирования.

1. Спектральное преобразование производных функций одной переменной [220–222].

Спектральная характеристика производной функции $f(\cdot)$ равна произведению спектральной характеристики \mathcal{P} оператора дифференцирования \mathcal{D} и спектральной характеристики F функции $f(\cdot)$:

$$\mathbb{S}[f'(\cdot)] = \mathcal{P}F, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)]. \quad (1.93)$$

Спектральная характеристика производной функции $f(\cdot)$ порядка k равна произведению k -й степени спектральной характеристики \mathcal{P} оператора дифференцирования \mathcal{D} и спектральной характеристики F функции $f(\cdot)$:

$$\mathbb{S}[f^{(k)}(\cdot)] = \mathcal{P}^k F, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)].$$

2. Вырожденность.

Оператор дифференцирования \mathcal{D} не является инъективным, так как $(f(t) + c)' = f'(t) \forall c \in \mathbb{R}$, поэтому соответствующая ему спектральная характеристика \mathcal{P} — вырожденная матрица.

Действительно, с одной стороны, по свойству линейности (1.24) имеем $\mathbb{S}[(f(\cdot) + c)'] = \mathcal{P}(F + c\mathbf{1}) = \mathcal{P}F + c\mathcal{P}\mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — спектральная характеристика функции $f_0(t) \equiv 1$, определенная относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$, а с другой стороны, $\mathbb{S}[(f(\cdot) + c)'] = \mathbb{S}[f'(\cdot)] = \mathcal{P}F$, т.е. $\mathcal{P}\mathbf{1} = \bar{O}$ — бесконечная нулевая матрица-столбец. Это означает, что столбцы матрицы \mathcal{P} линейно зависимы, так как $\mathbf{1} \neq \bar{O}$.

Для базисных систем (1.5)–(1.9) это свойство очевидно, поскольку для них $q'(0, t) \equiv 0$ и столбец матрицы \mathcal{P} с номером $j = 0$ — нулевой.

3. Связь спектральных характеристик операторов дифференцирования и интегрирования [220–222].

Спектральная характеристика P^{-1} оператора интегрирования \mathcal{D}^{-1} является правосторонней обратной матрицей для спектральной характеристики \mathcal{P} оператора дифференцирования \mathcal{D} :

$$\mathcal{P}P^{-1} = E \quad (P^{-1}\mathcal{P} \neq E).$$

4. Связь спектральных характеристик оператора дифференцирования и сопряженного с ним [177].

Спектральная характеристика \mathcal{P} оператора дифференцирования \mathcal{D} удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{P} + \mathcal{P}^T = \Delta_{\theta, \theta} \Big|_{t_0}^T = \Delta_{T, T} - \Delta_{t_0, t_0}, \quad (1.94)$$

где $\Delta_{\theta, \theta} = \Delta_{\theta} \Delta_{\theta}^T$ — двумерная спектральная характеристика линейного функционала $\delta_{\theta, \theta}$, который ставит в соответствие функции двух переменных $f(\cdot) \in D(\mathbb{T}^2)$ значение этой функции в

точке $(\theta, \theta) \in \mathbb{T}^2$ (см. примеры линейных функционалов на множестве функций двух переменных в разд. 1.2), Δ_θ — спектральная характеристика дельта-функции $\delta((\cdot) - \theta)$ (см. примеры линейных функционалов на множестве функций одной переменной в разд. 1.1); Δ_{t_0, t_0} и $\Delta_{T, T}$ — матрицы начальных и конечных значений соответственно.

5. Сдвиг и масштабирование базисной системы.

Если $\{\tilde{q}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ — базисная система пространства $L_2([0, 1])$, а $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ — соответствующая ей базисная система пространства $L_2([t_0, T])$ (см. п. 1 замечаний 1.1), то

$$\mathcal{P} = \frac{1}{T - t_0} \mathcal{P}_{\tilde{q}q},$$

что следует из определения элементов матрицы \mathcal{P} (замена переменной интегрирования).

Приведем *примеры спектральных характеристик \mathcal{P} оператора дифференцирования*, определенных относительно различных базисных систем на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$ (см. разд. 1.1).

1. Полиномы Лежандра (1.5):

$$\mathcal{P} = \frac{1}{T} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{7} & \dots & c_{0m} & \dots \\ 0 & 0 & 2\sqrt{15} & 0 & \dots & c_{1m} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{35} & \dots & c_{2m} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{m-k, m} = [(-1)^{k+1} + 1] \sqrt{(2m - 2k + 1)(2m + 1)}, \quad c_{m, m-k} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

2. Косинусоиды (1.6):

$$\mathcal{P} = \frac{1}{T} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} & \dots & c_{0m} & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{16}{3} & 0 & \dots & c_{1m} & \dots \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & -\frac{36}{5} & \dots & c_{2m} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{16}{5} & 0 & \dots & c_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{0m} = 2(-1)^m \sqrt{[1 - (-1)^m]}, \quad c_{00} = c_{mm} = 0, \quad c_{m-k, m} = \frac{2m^2[(-1)^k - 1]}{k(2m - k)} \quad (m > k),$$

$$c_{m, m-k} = \frac{2(m - k)^2[(-1)^k - 1]}{k(k - 2m)}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

3. Функции Уолша (1.7):

$$\mathcal{P} = \frac{1}{T} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 & \dots & c_{0m} & \dots \\ 0 & 2 & -2 & -4 & \dots & c_{1m} & \dots \\ 0 & -2 & 6 & 0 & \dots & c_{2m} & \dots \\ 0 & 2 & -2 & 4 & \dots & c_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{00} = 0, \quad c_{2^m+k, 2^m+l} = c_{kl}, \quad c_{k, 2^m+l} = -c_{kl} - 2, \quad c_{2^m+k, 2^m+k} = 2^{m+2} - c_{kk} - 2, \\ c_{2^m+k, 2^m+l} = -c_{kl} - 2 \quad (k \neq l), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad k, l = 0, 1, \dots, 2^m - 1.$$

4. Функции Хаара (1.8)

$$\mathcal{P} = \frac{1}{T} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \dots & c_{0m} & \dots \\ 0 & 2 & -3\sqrt{2} & \sqrt{2} & \dots & c_{1m} & \dots \\ 0 & 0 & 4 & 0 & \dots & c_{2m} & \dots \\ 0 & -2\sqrt{2} & 2 & 6 & \dots & c_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{0, 2^{s+1}-1} = -\sqrt{2^s} - \delta_{s0}, \quad c_{0, 2^s} = -\sqrt{2^s} \quad (s > 0), \quad c_{2^r, 2^s} = -\sqrt{2^{s+r}} \quad (s > 1), \\ c_{2^s+k, 2^s+k} = (3 - \delta_{k0})2^s, \quad c_{2^s+k, 2^m(2^s+k)+2^{m-1}-1} = -2^s\sqrt{2^m}(2 + \delta_{k0}\delta_{m1}), \\ c_{2^m(2^s+k)+2^{m-1}, 2^s+k} = -2^{s+1}\sqrt{2^m}, \quad c_{2^s+k, 2^m(2^s+k+1)-1} = 2^s\sqrt{2^m}, \quad c_{2^m(2^s+k), 2^s+k} = 2^s\sqrt{2^m}(1 - \delta_{k0}), \\ c_{2^s+l+1, 2^m(2^s+l+1)-1} = c_{2^m(2^s+l+1), 2^s+l} = 2^s\sqrt{2^m} \quad (s > 0), \quad c_{ns} = 0 \quad \text{в остальных случаях,} \\ n, s = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad r = 0, 1, \dots, s - 2, \\ k = 0, 1, \dots, 2^s - 1, \quad l = 0, 1, \dots, 2^s - 2.$$

В приведенных соотношениях δ_{s0} , δ_{k0} , δ_{m1} — символы Кронекера (1.4).

5. Тригонометрические функции (1.9):

$$\mathcal{P} = \frac{1}{T} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -2\pi & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 2\pi & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{m, m-1} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{m-1, m} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{m-1,m} = -c_{m,m-1} = -m\pi, \quad c_{ns} = 0 \text{ в остальных случаях, } n, s = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 2, 4, 6, \dots$$

Как отмечено ранее, оператор дифференцирования \mathcal{D} не является инъективным. Он ставит в соответствие классу функций, которые отличаются на постоянную, одну и ту же производную. Покажем, как учитывать начальное значение функции $f(\cdot)$ — значение на левом конце отрезка $\mathbb{T} = [t_0, T]$, определив спектральную характеристику P оператора дифференцирования, обратную по отношению к спектральной характеристике P^{-1} оператора интегрирования (см. разд. 1.6):

$$PP^{-1} = P^{-1}P = E. \quad (1.95)$$

Пусть $x(t) = f'(t)$ и $f(t_0) = f_0$, или в интегральной форме

$$f(t) = f_0 + \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau.$$

Применим к левой и правой частям последнего соотношения спектральное преобразование. Учитывая свойство линейности (1.24), а также свойство (1.86) спектрального преобразования операторов интегрирования, получаем

$$\mathbb{S}[f(\cdot)] = f_0 \mathbb{S}[1((\cdot) - t_0)] + \mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} x(\tau) d\tau\right], \quad \text{или} \quad F = f_0 \mathbf{1}_{t_0} + P^{-1}X,$$

где F , X и $\mathbf{1}_{t_0}$ — это спектральные характеристики функций $f(\cdot)$, $x(\cdot)$ и $1((\cdot) - t_0)$ (единичной ступенчатой функции (1.28)) соответственно, определенные относительно базисной системы $\{g(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$, P^{-1} — спектральная характеристика оператора интегрирования относительно той же базисной системы. Используя свойство (1.95), можно записать $PF = f_0 P\mathbf{1}_{t_0} + X$, или $X = PF - f_0 P\mathbf{1}_{t_0}$.

Следуя работам [220–222], воспользуемся соотношением $f_0 P\mathbf{1}_{t_0} = \Delta_{t_0, t_0} F$, где $\Delta_{t_0, t_0} = \Delta_{t_0} \Delta_{t_0}^T$ — двумерная спектральная характеристика линейного функционала δ_{t_0, t_0} , ставящего в соответствие функции двух переменных $g(\cdot) \in D(\mathbb{T}^2)$ значение этой функции в точке (t_0, t_0) (см. примеры линейных функционалов на множестве функций двух переменных в разд. 1.2), Δ_{t_0} — спектральная характеристика дельта-функции $\delta((\cdot) - t_0)$ (см. примеры линейных функционалов на множестве функций одной переменной в разд. 1.1); Δ_{t_0, t_0} — матрица начальных значений.

Здесь принимается во внимание формальное определение дельта-функции (1.34) как обобщенной производной единичной ступенчатой функции (1.28) и его спектральный аналог:

$$\mathbf{1}_{t_0} = P^{-1} \Delta_{t_0}, \quad \text{или} \quad P\mathbf{1}_{t_0} = \Delta_{t_0}, \quad (1.96)$$

а также выражение (1.37): $f_0 = f(t_0) = \Delta_{t_0}^T F$, т.е.

$$f_0 P\mathbf{1}_{t_0} = \Delta_{t_0} \Delta_{t_0}^T F = \Delta_{t_0, t_0} F \quad \text{и} \quad X = PF - \Delta_{t_0, t_0} F = (P - \Delta_{t_0, t_0}) F.$$

Согласно свойству (1.93) дифференцирования функций одной переменной $X = \mathcal{P}F$, следовательно,

$$\mathcal{P} = P - \Delta_{t_0, t_0}, \quad \text{или} \quad P = \mathcal{P} + \Delta_{t_0, t_0}. \quad (1.97)$$

З а м е ч а н и я 1.12.

1. Напомним, что выражение (1.37) справедливо только при условии, что соответствующий числовой ряд сходится к значению функции $1(t - t_0)$. Однако это не так при выборе в качестве базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ тригонометрических функций (1.9) (см. замечание 1.5). Действительно, при $t_0 = 0$ несложно убедиться в том, что для этой базисной системы (см. примеры спектральных характеристик P^{-1} в разд. 1.6, примеры спектральных характеристик Δ_0 в разд. 1.1, а также пример 1.1)

$$P^{-1}\Delta_0 = \frac{1}{2}\mathbf{1}_0 \neq \mathbf{1}_0 \quad (\mathbf{1}_0 = \mathbf{1}),$$

поэтому в приведенных выражениях следует удваивать бесконечную матрицу-столбец Δ_{t_0} и бесконечную матрицу Δ_{t_0, t_0} [222], а далее также поступать для бесконечной матрицы-столбца Δ_T и бесконечной матрицы $\Delta_{T, T}$.

2. Вообще говоря, производная функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ необязательно принадлежит пространству $L_2(\mathbb{T})$, причем в качестве $f(\cdot)$ могут быть и функции базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$. Однако здесь оператор дифференцирования \mathcal{D} формально рассматривается на пространстве $L_2(\mathbb{T})$, а не на пространстве Соболева $W_2^1(\mathbb{T})$ [217]:

$$f(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T}) \iff f(\cdot), f'(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}),$$

так как спектральные характеристики определены в том числе и для обобщенных функций (см. разд. 1.1).

Бесконечная матрица $P = (P_{ij})$, элементы которой задаются формулой

$$\begin{aligned} P_{ij} &= (q(i, \cdot), q'(j, \cdot))_{L_2(\mathbb{T})} + q(i, t_0)q(j, t_0) = \\ &= \int_{\mathbb{T}} q(i, t)q'(j, t) dt + q(i, t_0)q(j, t_0), \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1.98)$$

называется спектральной характеристикой оператора дифференцирования с учетом начального значения.

Можно показать [112, 177, 200], что $\mathcal{P} = -P^T + \Delta_{T, T}$, или $-P^T = \mathcal{P} - \Delta_{T, T}$, где $\Delta_{T, T} = \Delta_T \Delta_T^T$ — матрица конечных значений, Δ_T — спектральная характеристика дельта-функции $\delta(T - (\cdot))$.

Введем новое обозначение: $D = \mathcal{P} - \Delta_{T, T}$. Бесконечная матрица $D = (D_{ij})$, элементы которой определяются формулой

$$\begin{aligned} D_{ij} &= (q(i, \cdot), q'(j, \cdot))_{L_2(\mathbb{T})} - q(i, T)q(j, T) = \\ &= \int_{\mathbb{T}} q(i, t)q'(j, t) dt - q(i, T)q(j, T), \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1.99)$$

называется спектральной характеристикой оператора дифференцирования с учетом конечного значения.

С ее помощью можно учитывать конечное значение функции $f(\cdot)$ — значение на правом конце отрезка $\mathbb{T} = [t_0, T]$, т.е. $f(T) = f_T$, при спектральном преобразовании ее производной.

При выборе тригонометрических функций (1.9) в качестве базисной системы формулы (1.98) и (1.99) модифицируются в соответствии с п. 1 замечаний 1.12.

Рассмотрим некоторые свойства спектрального преобразования операторов дифференцирования с учетом начального и конечного значений.

1. Спектральное преобразование производных функций одной переменной с учетом начальных значений [220–222].

Спектральная характеристика производной функции $f(t)$ с заданным начальным значением $f(t_0) = f_0$ выражается следующим образом:

$$\mathbb{S}[f'(\cdot)|_{f(t_0)=f_0}] = PF - f_0\Delta_{t_0}, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)], \quad (1.100)$$

где Δ_{t_0} — спектральная характеристика дельта-функции $\delta((\cdot) - t_0)$ (см. формулу (1.36)):

$$\Delta_{t_0} = [q(0, t_0) \ q(1, t_0) \ q(2, t_0) \ \dots]^T.$$

Спектральная характеристика производной функции $f(\cdot)$ порядка k с заданными начальными значениями $f(t_0) = f_0$, $f'(t_0) = f'_0$, \dots , $f^{(k-1)}(t_0) = f_0^{(k-1)}$ определяется в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[f^{(k)}(\cdot)|_{f(t_0)=f_0, f'(t_0)=f'_0, \dots, f^{(k-1)}(t_0)=f_0^{(k-1)}}] = \\ = P^k F - f_0 P^{k-1} \Delta_{t_0} - f'_0 P^{k-2} \Delta_{t_0} - \dots - f_0^{(k-1)} \Delta_{t_0}, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)]. \end{aligned}$$

2. Спектральное преобразование производных функций одной переменной с учетом конечных значений [112, 177, 200].

Спектральная характеристика производной функции $f(\cdot)$ с заданным конечным значением $f(T) = f_T$ выражается формулой

$$\mathbb{S}[f'(\cdot)|_{f(T)=f_T}] = DF + f_T \Delta_T, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)], \quad (1.101)$$

где Δ_T — спектральная характеристика дельта-функции $\delta(T - (\cdot))$:

$$\Delta_T = [q(0, T) \ q(1, T) \ q(2, T) \ \dots]^T.$$

Спектральная характеристика производной функции $f(\cdot)$ порядка k с заданными конечными значениями $f(T) = f_T$, $f'(T) = f'_T$, \dots , $f^{(k-1)}(T) = f_T^{(k-1)}$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[f^{(k)}(\cdot)|_{f(T)=f_T, f'(T)=f'_T, \dots, f^{(k-1)}(T)=f_T^{(k-1)}}] = \\ = D^k F + f_T D^{k-1} \Delta_T + f'_T D^{k-2} \Delta_T + \dots + f_T^{(k-1)} \Delta_T, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)]. \end{aligned}$$

3. Связь спектральных характеристик оператора дифференцирования с учетом начального и конечного значений.

Спектральные характеристики P и D оператора дифференцирования с учетом начального и конечного значений связаны соотношением

$$P = -D^T, \quad (1.102)$$

что вытекает из формулы (1.94), которую можно переписать в виде $\mathcal{P} + \Delta_{t_0, t_0} = -\mathcal{P}^T + \Delta_{T, T}$, или $\mathcal{P} + \Delta_{t_0, t_0} = -(\mathcal{P} - \Delta_{T, T})^T$, так как матрица конечных значений $\Delta_{T, T}$ является симметрической. Отсюда следует справедливость соотношения (1.102).

4. Сдвиг и масштабирование базисной системы.

Если $\{\tilde{q}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2([0, 1])$, а $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — соответствующая ей базисная система пространства $L_2([t_0, T])$ (см. п. 1 замечаний 1.1), то

$$P = \frac{1}{q\tilde{q}} \frac{P}{T - t_0} \frac{P}{\tilde{q}\tilde{q}} \quad \text{и} \quad D = \frac{1}{q\tilde{q}} \frac{D}{T - t_0} \frac{D}{\tilde{q}\tilde{q}},$$

что следует из определения элементов матриц P и D (замена переменной интегрирования).

З а м е ч а н и я 1.13.

1. В работах [220–222] спектральная характеристика \mathcal{P} оператора дифференцирования \mathcal{D} называется двумерной нестационарной передаточной функцией дифференцирующего звена второго рода, а спектральная характеристика P оператора дифференцирования с учетом начального значения — двумерной нестационарной передаточной функцией дифференцирующего звена первого рода (см. также замечание 1.9).

2. Операторы дифференцирования неограничены и поэтому нахождение спектральных характеристик \mathcal{P}^k , P^k и D^k с помощью возведения соответствующих матриц в степень k , например для спектральной характеристики оператора дифференцирования порядка k :

$$\mathcal{P}^k = \underbrace{\mathcal{P} \dots \mathcal{P}}_{k \text{ сомножителей}},$$

может привести к появлению расходящихся рядов. В этом случае нужно ориентироваться на определение (1.61) для расчета элементов \mathcal{P}_{ij}^k , $i, j = 0, 1, 2, \dots$. Матрицу P^k можно определить как обратную по отношению к матрице P^{-k} — спектральной характеристике оператора интегрирования кратности k . Для матрицы D^k достаточно использовать связь (1.102) спектральных характеристик оператора дифференцирования с учетом начального и конечного значений.

3. Свойства, позволяющие учитывать начальные и конечные значения функций при спектральном преобразовании их производных, более подробно описаны в работах [177, 200].

Приведем *примеры спектральных характеристик P оператора дифференцирования с учетом начального значения*, определенных относительно различных базисных систем на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$ (см. разд. 1.1).

1. Полиномы Лежандра (1.5):

$$P = \frac{1}{T} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{7} & \dots & c_{0m} & \dots \\ -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{15} & \sqrt{21} & \dots & c_{1m} & \dots \\ \sqrt{5} & -\sqrt{15} & 5 & \sqrt{35} & \dots & c_{2m} & \dots \\ -\sqrt{7} & \sqrt{21} & -\sqrt{35} & 7 & \dots & c_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{m-k,m} = (-1)^k c_{m,m-k} = \sqrt{(2m-2k+1)(2m+1)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

2. Косинусоиды (1.6):

$$P = \frac{1}{T} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \dots & c_{0m} & \dots \\ \sqrt{2} & 2 & -\frac{10}{3} & 2 & \dots & c_{1m} & \dots \\ \sqrt{2} & \frac{10}{3} & 2 & -\frac{26}{5} & \dots & c_{2m} & \dots \\ \sqrt{2} & 2 & \frac{26}{5} & 2 & \dots & c_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{00} = 1, \quad c_{0m} = (-1)^m \sqrt{2}, \quad c_{m0} = \sqrt{2}, \quad c_{mm} = 2, \quad c_{m-k,m} = \frac{2[(m-k)^2 - (-1)^k m^2]}{(m-k)^2 - m^2},$$

$$c_{m,m-k} = \frac{2[(-1)^k (m-k)^2 - m^2]}{(m-k)^2 - m^2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, m-1.$$

3. Функции Уолша (1.7):

$$P = \frac{1}{T} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & \dots & c_{0m} & \dots \\ 1 & 3 & -1 & -3 & \dots & c_{1m} & \dots \\ 1 & -1 & 7 & 1 & \dots & c_{2m} & \dots \\ 1 & 3 & -1 & 5 & \dots & c_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{00} = 1, \quad c_{2^m+k,l} = c_{kl}, \quad c_{k,2^m+l} = -c_{kl}, \quad c_{2^m+k,2^m+k} = 2^{m+2} - c_{kk}, \quad c_{2^m+k,2^m+l} = -c_{kl} \quad (k \neq l),$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad k, l = 0, 1, \dots, 2^m - 1.$$

4. Функции Хаара (1.8):

$$P = \frac{1}{T} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} & \dots & c_{0m} & \dots \\ 1 & 3 & -2\sqrt{2} & \sqrt{2} & \dots & c_{1m} & \dots \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 6 & 0 & \dots & c_{2m} & \dots \\ 0 & -2\sqrt{2} & 2 & 6 & \dots & c_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{00} = 1, \quad c_{0,2^{s+1}-1} = -c_{2^s,0} = -\sqrt{2^s}, \quad c_{2^s+k,2^s+k} = 3 \cdot 2^s,$$

$$c_{2^s+k,2^m(2^s+k)+2^{m-1}-1} = c_{2^m(2^s+k)+2^{m-1},2^s+k} = -2^{s+1} \sqrt{2^m},$$

$$c_{2^s+k,2^m(2^s+k+1)-1} = c_{2^m(2^s+k),2^s+k} = 2^s \sqrt{2^m},$$

$$c_{2^s+l+1,2^m(2^s+l+1)-1} = c_{2^m(2^s+l+1),2^s+l} = 2^s \sqrt{2^m} \quad (s > 0), \quad c_{ns} = 0 \quad \text{в остальных случаях,}$$

$$n, s = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^s - 1, \quad l = 0, 1, \dots, 2^s - 2.$$

5. Тригонометрические функции (1.9):

$$P = \frac{1}{T} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2\sqrt{2} & 0 & \dots & c_{0m} & \dots \\ 0 & 0 & -2\pi & 0 & \dots & c_{1m} & \dots \\ 2\sqrt{2} & 2\pi & 4 & 0 & \dots & c_{2m} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{3m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{m0} & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{00} = 2, \quad c_{0m} = c_{m0} = 2\sqrt{2}, \quad c_{ml} = 4, \quad c_{m-1,m} = -c_{m,m-1} = -m\pi, \\ c_{ns} = 0 \quad \text{в остальных случаях,} \quad n, s = 0, 1, 2, \dots, \quad m, l = 2, 4, 6, \dots$$

Спектральная характеристика P оператора дифференцирования с учетом начального значения относительно тригонометрических функций получена согласно п. 1 замечаний 1.12. При выборе базисных систем (1.5)–(1.8) можно убедиться в справедливости соотношения (1.96), так как столбец спектральной характеристики P с номером $j = 0$ с точностью до числового коэффициента $1/\sqrt{T}$ совпадает со спектральной характеристикой дельта-функции (см. примеры спектральных характеристик Δ_0 в разд. 1.1).

1.8. Линейные преобразования функций времени

Разд. 1.4 дает некоторое представление о линейных системах управления, а именно об их описании импульсными переходными функциями $k(\cdot)$ и связи вход–выход для сигналов $f(\cdot)$ и $x(\cdot)$ во временной области при детерминированных воздействиях и нулевых начальных условиях в форме соотношения (1.69). В спектральной форме математического описания соотношение (1.70) связывает спектральные характеристики F и X входного и выходного сигналов соответственно, а также спектральную характеристику A линейного оператора (1.68).

Известно [105, 220], что если входной и выходной сигналы линейной стационарной системы управления связаны дифференциальным уравнением

$$a_n x^{(n)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = b_m f^{(m)}(t) + \dots + b_1 f'(t) + b_0 f(t), \\ x(t_0) = x'(t_0) = \dots = x^{(n-1)}(t_0) = 0,$$

где a_0, a_1, \dots, a_n и b_0, b_1, \dots, b_m — заданные действительные числа, $n, m \in \mathbb{N}$ — порядки дифференциальных операторов, определяющих левую и правую части дифференциального уравнения, то спектральная характеристика A задается формулой

$$A = (a_n P^n + \dots + a_1 P + a_0 E)^{-1} (b_m P^m + \dots + b_1 P + b_0 E) = \\ = P^{-n} (a_n E + \dots + a_1 P^{-n+1} + a_0 P^{-n})^{-1} (b_m P^m + \dots + b_1 P + b_0 E), \quad (1.103)$$

т.е. матрицу A можно представить с помощью спектральных характеристик P^{-1} и P операторов интегрирования и дифференцирования (см. разд. 1.6 и 1.7), а также бесконечной единичной матрицы E , которая соответствует тождественному оператору.

Для линейных нестационарных систем управления, когда коэффициенты левой и правой частей дифференциального уравнения — это функции $a_0(\cdot), a_1(\cdot), \dots, a_n(\cdot)$ и $b_0(\cdot), b_1(\cdot), \dots, b_m(\cdot)$, которые зависят от времени, матрица A выражается аналогично, но с использованием спектральных характеристик операторов умножения A_0, A_1, \dots, A_n и B_0, B_1, \dots, B_m на эти функции соответственно (см. разд. 1.5). Более общий вариант предполагает ненулевые начальные условия, а соответствующее соотношение, связывающее спектральные характеристики F и X , приведено в работах [115, 211].

Импульсная переходная функция $k(\cdot)$ сама является выходным сигналом линейной системы управления, если входной сигнал — импульсное воздействие $f(t) = \delta(t - \tau)$, при нулевых

начальных условиях [105, 209, 211, 220–222], где τ — параметр. Если линейная система управления стационарна, то ее импульсная переходная функция может рассматриваться как функция $k(\eta) = k(t - \tau)$ одной переменной $\eta = t - \tau$ со спектральной характеристикой K : $K = A\Delta_0$, $K = \mathbb{S}[k(\cdot)]$, где Δ_0 — спектральная характеристика дельта-функции $\delta(\cdot)$ (см. разд. 1.1).

В результате спектральные характеристики элементарных функций, которые представляют собой решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [115], выражаются с помощью трех спектральных характеристик Δ_0 , P^{-1} , P и матрицы E . В общем случае к ним следует добавить спектральные характеристики A_0, A_1, \dots, A_n и B_0, B_1, \dots, B_m .

Пример 1.14. Выразить двумерную спектральную характеристику импульсной переходной функции линейной системы управления $k(t, \tau) = \sigma e^{\mu(t-\tau)} 1(t - \tau)$, где μ и σ — числовые параметры, $1(t - \tau)$ — единичная ступенчатая функция (1.28), через спектральную характеристику оператора дифференцирования с учетом начального значения относительно произвольной базисной системы, ортонормированной на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Запишем дифференциальное уравнение, связывающее входной сигнал $f(\cdot)$ и выходной сигнал $x(\cdot)$ линейной стационарной системы управления при нулевом начальном условии:

$$\dot{x}(t) - \mu x(t) = \sigma f(t), \quad x(0) = 0.$$

Оно соответствует интегральному соотношению (1.69), или последовательному соединению усилительного звена с постоянным коэффициентом усиления σ/μ и апериодического звена с постоянной времени $1/\mu$ [105]. Применим спектральное преобразование к левой и правой частям дифференциального уравнения в предположении, что $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$, относительно которой далее определены все используемые спектральные характеристики:

$$\mathbb{S}[\dot{x}(\cdot)|_{x(0)=0} - \mu x(\cdot)] = \mathbb{S}[\sigma f(\cdot)],$$

или, учитывая линейность спектрального преобразования (см. разд. 1.1),

$$\mathbb{S}[\dot{x}(\cdot)|_{x(0)=0}] - \mu \mathbb{S}[x(\cdot)] = \sigma \mathbb{S}[f(\cdot)].$$

Обозначая спектральные характеристики входного и выходного сигналов F и X соответственно, а спектральную характеристику оператора дифференцирования с учетом начального значения P , имеем

$$PX - \mu X = \sigma F, \quad (P - \mu E)X = \sigma F, \quad \text{или} \quad X = \sigma(P - \mu E)^{-1} F,$$

где E — бесконечная единичная матрица.

Сравнивая полученное соотношение и соотношение (1.70), находим выражение для спектральной характеристики A линейного оператора (1.68) с заданной импульсной переходной функцией $k(\cdot)$, т.е. искомую двумерную спектральную характеристику:

$$A = \sigma(P - \mu E)^{-1}.$$

Этот же результат можно получить непосредственно из формулы (1.103), полагая в ней $n = 1$, $m = 0$, $a_0 = -\mu$, $a_1 = 1$ и $b_0 = \sigma$.

В качестве побочного результата находим соотношение для спектральной характеристики K показательной функции $k(\eta) = e^{a\eta}$ ($\mu = a$, $\sigma = 1$):

$$K = (P - aE)^{-1}\Delta_0,$$

где Δ_0 — спектральная характеристика дельта-функции $\delta(\cdot)$.

В частном случае при условии $\mu = 0$ и $\sigma = 1$ получаем: $A = P^{-1}$ — спектральная характеристика оператора интегрирования, соответствующая импульсной переходной функции $k(t, \tau) = 1(t - \tau)$, и $K = \mathbf{1} = P^{-1}\Delta_0$ — спектральная характеристика функции $f_0(t) \equiv 1$. ■

В табл. 1.1 собраны формулы, которые позволяют выразить описанным способом спектральные характеристики X некоторых элементарных функций $x(\cdot)$, в том числе и для сравнения с соответствующими этим элементарным функциям изображениями по Лапласу $X(s)$ (s — комплексная переменная, формула (1.103) — это спектральный аналог формулы, выражающей передаточную функцию $W(s)$ по коэффициентам дифференциального уравнения) [114, 115]. Эту таблицу можно существенно расширить, если не ограничиваться только линейными стационарными системами. Тогда появится возможность добавить в нее функции, которые могут быть решениями линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, например полиномиальными. Их спектральные характеристики будут выражаться с помощью спектральных характеристик Δ_0 , P^{-1} , P и спектральных характеристик операторов умножения на коэффициенты дифференциального уравнения.

1.9. Матричные и интегральные следы

В замечании 1.5 определен усредняющий оператор в пространстве $L_2(\mathbb{T})$. Здесь же рассмотрим усредняющий оператор в пространстве $L_2(\mathbb{T}^2)$.

Пусть $\mathcal{S}^\varepsilon: L_2(\mathbb{T}^2) \rightarrow C(\mathbb{T}^2)$, $\mathbb{T} = [t_0, T]$, — усредняющий оператор [253]:

$$\mathcal{S}^\varepsilon f(\cdot) = \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{D_\varepsilon(\cdot)} f(\theta, \vartheta) d\theta d\vartheta, \quad \varepsilon > 0,$$

где $D_\varepsilon(t, \tau) = \{(\theta, \vartheta) \in \mathbb{T}^2: \max\{|t - \theta|, |\tau - \vartheta|\} < \varepsilon\}$, т.е. \mathcal{S}^ε — линейный оператор, ставящий в соответствие функции $f(\cdot)$ непрерывную функцию, значение которой в каждой точке определяется как среднее значение $f(\cdot)$ на квадрате $D_\varepsilon(t, \tau) \subset \mathbb{R}^2$ с центром в точке (t, τ) и стороной 2ε , если доопределить функцию $f(\cdot)$ вне квадрата \mathbb{T}^2 нулем.

Тогда $\bar{f}(t, \tau) = f(t, \tau)$ при почти всех $(t, \tau) \in \mathbb{T}^2$, где

$$\bar{f}(\cdot) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{S}^\varepsilon f(\cdot),$$

причем $\mathcal{S}^\varepsilon f(\cdot)$ можно рассматривать как непрерывную функцию параметра $\varepsilon \in [0, +\infty)$.

Далее определим интегральный след $\text{tr } f(\cdot)$:

$$\text{tr } f(\cdot) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{T}} \mathcal{S}^\varepsilon f(t, t) dt, \quad (1.104)$$

где запись $\mathcal{S}^\varepsilon f(t, t)$ означает функцию $f_\varepsilon^\circ(t) = f_\varepsilon(t, t)$, $f_\varepsilon(\cdot) = \mathcal{S}^\varepsilon f(\cdot)$, а интеграл по множеству нулевой меры в \mathbb{T}^2 понимается однозначно.

Таблица 1.1. Соответствие преобразования Лапласа и спектрального преобразования

$x(t)$	$X(s)$	X
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$P^{-1}\Delta_0$
$\delta(t)$	1	Δ_0
$\delta^{(n)}(t)$	s^n	$P^n\Delta_0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$n!P^{-(n+1)}\Delta_0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$(P-aE)^{-1}\Delta_0$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$n!(P-aE)^{-(n+1)}\Delta_0$
$1 - e^{at}$	$\frac{a}{s(s-a)}$	$(P^{-1} - [P-aE]^{-1})\Delta_0$
$e^{at} - e^{bt}$	$\frac{a-b}{(s-a)(s-b)}$	$([P-aE]^{-1} - [P-bE]^{-1})\Delta_0$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$(P^2 + \omega^2 E)^{-1}P\Delta_0$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\omega(P^2 + \omega^2 E)^{-1}\Delta_0$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{\omega \cos \varphi + s \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$	$(P^2 + \omega^2 E)^{-1}(\omega \sin \varphi E + \cos \varphi P)\Delta_0$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{(s-a)^2 + \omega^2}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$[(P-aE)^2 + \omega^2 E]^{-1}(P-aE)\Delta_0$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$\omega[(P-aE)^2 + \omega^2 E]^{-1}\Delta_0$
$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$(P^2 + \omega^2 E)^{-2}(P^2 - \omega^2 E)\Delta_0$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$2\omega(P^2 + \omega^2 E)^{-2}P\Delta_0$
$\operatorname{ch} at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$(P^2 - a^2 E)^{-1}P\Delta_0$
$\operatorname{sh} at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$a(P^2 - a^2 E)^{-1}\Delta_0$
$t \operatorname{ch} at$	$\frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$	$(P^2 - a^2 E)^{-2}(P^2 - a^2 E)\Delta_0$
$t \operatorname{sh} at$	$\frac{2as}{(s^2 - a^2)^2}$	$2a(P^2 - a^2 E)^{-1}P\Delta_0$
$1 - \cos at$	$\frac{a^2}{s(s^2 + a^2)}$	$a^2[P(P^2 + a^2 E)]^{-1}\Delta_0$
$1 - 2 \sin at$	$\frac{(s-a)^2}{s(s^2 + a^2)}$	$[P(P^2 + a^2 E)]^{-1}(P-aE)^2\Delta_0$

Теорема 1.11 (см. [24, 253]). Пусть интегральный оператор $\mathcal{F}: L_2(\mathbb{T}) \rightarrow L_2(\mathbb{T})$ с ядром $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ является ядерным, $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$. Тогда

$$\operatorname{tr} \mathcal{F} = \sum_{i=0}^{\infty} F_{ii} = \operatorname{tr} f(\cdot), \quad (1.105)$$

где F_{ij} — коэффициенты разложения (1.42) функции $f(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot)\}_{i,j=0}^{\infty}$.

Числовой ряд в формуле (1.105) называется матричным следом оператора \mathcal{F} . Интегральный след — это линейный функционал на множестве функций, а матричный след — это линейный функционал на множестве операторов или бесконечных матриц.

Теорема 1.11 придает строгий смысл формуле (1.58). На ее основе можно получить следу-

ющий результат.

Следствие 1.1. Пусть $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ — такая функция, что интегральный оператор с симметризованным ядром

$$f_s(t, \tau) = \frac{f(t, \tau) + f(\tau, t)}{2}, \quad (t, \tau) \in \mathbb{T}^2,$$

является ядерным, $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{\infty} F_{ii} = \text{tr } f(\cdot), \quad (1.106)$$

где F_{ij} — коэффициенты разложения (1.42) функции $f(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot)\}_{i,j=0}^{\infty}$.

Доказательство. Согласно теореме 1.11 имеем

$$\text{tr } f_s(\cdot) = \sum_{i=0}^{\infty} (F_s)_{ii},$$

где $(F_s)_{ij}$ — коэффициенты разложения (1.42) функции $f_s(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot)\}_{i,j=0}^{\infty}$.

Нетрудно видеть, что $\mathcal{S}^\varepsilon f(t, t) = \mathcal{S}^\varepsilon f^*(t, t)$, где $f^*(t, \tau) = f(\tau, t)$, поэтому

$$\mathcal{S}^\varepsilon f_s(t, t) = \frac{\mathcal{S}^\varepsilon f(t, t) + \mathcal{S}^\varepsilon f^*(t, t)}{2} = \mathcal{S}^\varepsilon f(t, t),$$

т.е. симметризация сохраняет интегральный след: $\text{tr } f_s(\cdot) = \text{tr } f(\cdot)$.

Кроме того, коэффициенты разложения F_{ij}^* функции $f^*(\cdot)$ выражаются формулой $F_{ij}^* = F_{ji}$ по свойству симметричности (1.51). Следовательно,

$$\sum_{i=0}^{\infty} (F_s)_{ii} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{F_{ii} + F_{ii}^*}{2} = \sum_{i=0}^{\infty} F_{ii}.$$

Отсюда следует справедливость формулы (1.106). ◀

З а м е ч а н и я 1.14.

1. Числовые ряды в формулах (1.105) и (1.106) сходятся абсолютно и это необходимое условие того, что соответствующая функция $f(\cdot)$ определяет ядерный оператор [41].

2. Коэффициенты разложения F_{ij} образуют двумерную спектральную характеристику F функции $f(\cdot)$ (см. разд. 1.2), или спектральную характеристику оператора Гильберта – Шмидта (1.71) с ядром $f(\cdot)$. Формулы (1.105) и (1.106) определяют след матрицы F согласно выражению (1.50).

Матричный след $\text{tr } F$ определен не для всех операторов с ядрами $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$. Например, зададим функцию

$$f(t, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} q(i, t) q(i, \tau),$$

которая является элементом пространства $L_2(\mathbb{T}^2)$:

$$\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \text{но} \quad \text{tr } F = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty.$$

Величина $\text{tr } F$ может зависеть от базисной системы. В частности,

$$f(t, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} q(i, t) q(i, \tau), \quad \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \frac{\pi^2}{6}, \quad \text{tr } F = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} < \infty,$$

однако перестановкой функций базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ можно добиться любого значения $\text{tr } F$, включая $\pm\infty$ [233].

3. Теорема 1.11 обобщается на ядерные операторы $\mathcal{F}: L_2(\mathbb{T}^\gamma) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^\gamma)$ при $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$, $k = 2\gamma$, $\gamma \in \mathbb{N}$. Отметим также, что в статье [339] сформулирована отчасти аналогичная следствию 1.1 теорема.

Один из критериев того, что можно применить теорему 1.11, — это представление функции $f(\cdot)$ следующим образом [24, 41]:

$$f(t, \tau) = \int_{\mathbb{T}} f_1(t, \xi) f_2(\xi, \tau) d\xi, \quad f_1(\cdot), f_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2). \quad (1.107)$$

Пример 1.15. Показать, что интегральный оператор \mathcal{F} с вырожденным ядром

$$f(t, \tau) = \varphi(t)\psi(\tau), \quad \varphi(\cdot), \psi(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}), \quad (1.108)$$

является ядерным.

□ Достаточно показать, что функция $f(\cdot)$ представляется в виде (1.107). Для этого положим $f_1(t, \tau) = \varphi(t)/\sqrt{T-t_0}$ и $f_2(t, \tau) = \psi(\tau)/\sqrt{T-t_0}$. Тогда

$$f(t, \tau) = \frac{1}{T-t_0} \int_{\mathbb{T}} \varphi(t)\psi(\tau) d\xi = \frac{\varphi(t)\psi(\tau)}{T-t_0} \int_{t_0}^T d\xi = \varphi(t)\psi(\tau).$$

В частности, отсюда следует, что справедливо выражение (1.105). Но в данном случае его нетрудно доказать и другим способом. Пусть $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$, а Φ и Ψ — спектральные характеристики функций $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ относительно этой базисной системы (см. разд. 1.1). Тогда согласно теореме 1.4 двумерная спектральная характеристика F функции $f(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ представляется с помощью формулы (1.44), т.е. $F = \Phi\Psi^T$. Эквивалентная форма: $F_{ij} = \Phi_i\Psi_j$, где F_{ij} , Φ_i и Ψ_j — элементы спектральных характеристик F , Φ и Ψ соответственно, $i, j = 0, 1, 2, \dots$. Тогда

$$\text{tr } F = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i\Psi_i = \Phi^T\Psi$$

и по свойству (1.26) сохранения скалярного произведения $\text{tr } F = (\varphi(\cdot), \psi(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \text{tr } f(\cdot)$, так как $f(t, t) = \varphi(t)\psi(t)$, $t \in \mathbb{T}$. ■

Ядерные операторы $\mathcal{F}: L_2(\mathbb{T}) \rightarrow L_2(\mathbb{T})$ образуют линейное пространство [41], т.е. линейная комбинация ядерных операторов представляет собой ядерный оператор. Отсюда следует, что если интегральный оператор с ядром $f_1(t, \tau) = \varphi(t)\psi(\tau)1(t-\tau)$ является ядерным, то ядерным является и оператор с ядром $f_2(t, \tau) = \varphi(t)\psi(\tau)1(\tau-t)$, так как $f(t, \tau) = f_1(t, \tau) + f_2(t, \tau) = \varphi(t)\psi(\tau)$, в котором $1(\cdot)$ — единичная ступенчатая функция (1.28).

Пример 1.16. Показать, что интегральные операторы \mathcal{F} с ядрами

$$f(t, \tau) = t^n \tau^{m+n} 1(t-\tau) + \tau^n t^{m+n} 1(\tau-t) = f(\tau, t), \quad (1.109)$$

$$f(t, \tau) = t^{m+n} \tau^n 1(t-\tau) + \tau^{m+n} t^n 1(\tau-t) = f(\tau, t), \quad (1.110)$$

где $m \in \mathbb{N}$ и $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, являются ядерными.

□ Решим более общую задачу. Положим $f_1(t, \tau) = mt^l \tau^{m-1} 1(t-\tau)$ и $f_2(t, \tau) = \tau^n 1(\tau-t)$,

где $m \geq 1$ и $l, n > -1/2$, и воспользуемся представлением (1.107). Тогда

$$\begin{aligned} f(t, \tau) &= mt^l \tau^n \int_{\mathbb{T}} \xi^{m-1} 1(t-\xi) 1(\tau-\xi) d\xi = mt^l \tau^n \int_{t_0}^{\min\{t, \tau\}} \xi^{m-1} d\xi = \\ &= t^l \tau^n \min\{t^m, \tau^m\} - t^l \tau^n t_0^m = t^l \tau^{m+n} 1(t-\tau) + t^{l+m} \tau^n 1(\tau-t) - t^l \tau^n t_0^m. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое $\tau^n t^l t_0^m$ определяет интегральный оператор с вырожденным ядром (1.108). Кроме того, можно ограничиться условием $m \in \mathbb{N}$ и $l = n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, поэтому функция (1.109) задает ядерный оператор.

Далее положим $f_1(t, \tau) = mt^l \tau^{m-1} 1(\tau-t)$ и $f_2(t, \tau) = \tau^n 1(t-\tau)$, $m \geq 1$ и $l, n > -1/2$, следовательно,

$$\begin{aligned} f(t, \tau) &= mt^l \tau^n \int_{\mathbb{T}} \xi^{m-1} 1(\xi-t) 1(\xi-\tau) d\xi = mt^l \tau^n \int_{\max\{t, \tau\}}^T \xi^{m-1} d\xi = \\ &= t^l \tau^n T^m - t^l \tau^n \max\{t^m, \tau^m\} = t^l \tau^n T^m - t^{l+m} \tau^n 1(t-\tau) - \tau^{m+n} t^l 1(\tau-t). \end{aligned}$$

Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что функция (1.110) также задает ядерный оператор.

Этот пример можно дополнить. В частности, выбирая $f_1(t, \tau) = mt^l \tau^{m-1} 1(t-\tau)$ и $f_2(t, \tau) = \tau^n 1(t-\tau)$, $m \geq 1$ и $l, n > -1/2$, получаем

$$\begin{aligned} f(t, \tau) &= mt^l \tau^n \int_{\mathbb{T}} \xi^{m-1} 1(t-\xi) 1(\xi-\tau) d\xi = \\ &= mt^l \tau^n 1(t-\tau) \int_{\tau}^t \xi^{m-1} d\xi = t^l (t^m - \tau^m) \tau^n 1(t-\tau). \end{aligned}$$

При $f_1(t, \tau) = mt^l \tau^{m-1} 1(\tau-t)$ и $f_2(t, \tau) = \tau^n 1(\tau-t)$, $m \geq 1$ и $l, n > -1/2$, находим

$$\begin{aligned} f(t, \tau) &= mt^l \tau^n \int_{\mathbb{T}} \xi^{m-1} 1(\xi-t) 1(\tau-\xi) d\xi = \\ &= mt^l \tau^n 1(\tau-t) \int_t^{\tau} \xi^{m-1} d\xi = t^l (\tau^m - t^m) \tau^n 1(\tau-t). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 1.17. Найти композицию двух интегральных операторов с ядрами $f_1(t, \tau) = \chi_{\theta}(t) \lambda(\tau) 1(t-\tau)$ и $f_2(t, \tau) = \chi_{\theta}(\tau) 1(\tau-t)$, где $\chi_{\theta}(t) = \chi_{[t_0, \theta]}(t)$ — индикатор множества (1.14), $\theta \in \mathbb{T}$, $\lambda(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$.

□ Нетрудно видеть, что $f_1(\cdot), f_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$. Этим функциям соответствуют интегральные операторы \mathcal{F}_1 и \mathcal{F}_2 , а ядро $f(\cdot)$ для их композиции $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$ определяется формулой (1.107):

$$\begin{aligned} f(t, \tau) &= \chi_{\theta}(t) \chi_{\theta}(\tau) \int_{\mathbb{T}} \lambda(\xi) 1(t-\xi) 1(\tau-\xi) d\xi = \chi_{\theta}(t) \chi_{\theta}(\tau) \int_{t_0}^{\min\{t, \tau\}} \lambda(\xi) d\xi = \\ &= \chi_{\theta}(t) \chi_{\theta}(\tau) 1(t-\tau) \int_{t_0}^{\tau} \lambda(\xi) d\xi + \chi_{\theta}(t) \chi_{\theta}(\tau) 1(\tau-t) \int_{t_0}^t \lambda(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Оператор \mathcal{F} является ядерным, для него справедлива теорема 1.11:

$$\mathcal{F}g(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} f(\cdot, \tau) g(\tau) d\tau, \quad g(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}),$$

и, кроме того, можно применить следствие 1.1 для функции $f(t, \tau) = \varphi(t) \psi(\tau) 1(t-\tau)$, где

$$\varphi(t) = \chi_{\theta}(t) \quad \text{и} \quad \psi(t) = \chi_{\theta}(t) \int_{t_0}^t \lambda(\xi) d\xi.$$

Тогда справедлива формула (1.106), в которой

$$F_{ii} = (q(i, \cdot) \otimes q(i, \cdot), f(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \int_{\mathbb{T}} \varphi(t) q(i, t) \int_{t_0}^t \psi(\tau) q(i, \tau) d\tau dt =$$

$$= \int_{t_0}^{\theta} q(i, t) \int_{t_0}^t q(i, \tau) \int_{t_0}^{\tau} \lambda(\xi) d\xi d\tau dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

а также

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{S}^\varepsilon f(t, t) &= \frac{1}{2} \varphi(t) \psi(t) = \frac{1}{2} \chi_\theta(t) \int_{t_0}^t \lambda(\xi) d\xi, \\ \text{tr } f(\cdot) &= \frac{1}{2} (\varphi(\cdot), \psi(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \chi_\theta(t) \int_{t_0}^t \lambda(\xi) d\xi dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\theta} \int_{t_0}^t \lambda(\xi) d\xi dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(\theta \int_{t_0}^{\theta} \lambda(\xi) d\xi - \int_{t_0}^{\theta} t \lambda(t) dt \right) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\theta} (\theta - \xi) \lambda(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Аналогично, если $f_1(t, \tau) = \chi_\theta(t) \lambda(\tau) 1(t - \tau)$ и $f_2(t, \tau) = \chi_\theta(\tau) 1(t - \tau)$, то

$$\begin{aligned} f(t, \tau) &= \chi_\theta(t) \chi_\theta(\tau) \int_{\mathbb{T}} \lambda(\xi) 1(t - \xi) 1(\xi - \tau) d\xi = \chi_\theta(t) \chi_\theta(\tau) 1(t - \tau) \int_{\tau}^t \lambda(\xi) d\xi = \\ &= \chi_\theta(t) \chi_\theta(\tau) 1(t - \tau) \int_{t_0}^t \lambda(\xi) d\xi - \chi_\theta(t) \chi_\theta(\tau) 1(t - \tau) \int_{t_0}^{\tau} \lambda(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

т.е. формула (1.106) применима в случае

$$\varphi(t) = \chi_\theta(t) \int_{t_0}^t \lambda(\xi) d\xi \quad \text{и} \quad \psi(t) = \chi_\theta(t). \quad \blacksquare$$

Лемма 1.1. Пусть $\varphi(\cdot), \psi(\cdot)$ — полиномы. Тогда интегральный оператор $\mathcal{F}: L_2(\mathbb{T}) \rightarrow L_2(\mathbb{T})$ с ядром

$$f(t, \tau) = \varphi(t) \psi(\tau) 1(t - \tau) + \varphi(\tau) \psi(t) 1(\tau - t) = f(\tau, t)$$

является ядерным.

Доказательство. На основе примеров 1.15 и 1.16 делаем вывод, что интегральный оператор \mathcal{F}_* с ядром $g(\cdot)$ является ядерным, если

$$g(t, \tau) = t^{n_1} \tau^{n_2} 1(t - \tau) + \tau^{n_1} t^{n_2} 1(\tau - t) = g(\tau, t), \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$$

Действительно, при $n_1 = n_2$ получаем вырожденное ядро $g(t, \tau) = (t\tau)^{n_1}$ (см. пример 1.15). При $n_1 \neq n_2$ нужный результат следует из примера 1.16: для функции (1.109) полагаем $n = n_1 < n_2 = m + n$, а для функции (1.110) — $m + n = n_1 > n_2 = n$.

Функция $f(\cdot)$ представляется как линейная комбинация функций вида $g(\cdot)$ и она задает ядерный оператор \mathcal{F} , поскольку пространство ядерных операторов линейно. \blacktriangleleft

Теорема 1.12. Пусть $\varphi(\cdot), \psi(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} \varphi(t) q(i, t) \int_{t_0}^t \psi(\tau) q(i, \tau) d\tau dt = \frac{1}{2} (\varphi(\cdot), \psi(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})}. \quad (1.111)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функции $g(\cdot), g^*(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$:

$$g(t, \tau) = \varphi(t) \psi(\tau) 1(t - \tau), \quad g^*(t, \tau) = \psi(t) \varphi(\tau) 1(\tau - t) = g(\tau, t),$$

тогда коэффициенты разложения G_{ij} и G_{ij}^* этих функции относительно базисной системы $\{q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot)\}_{i,j=0}^{\infty}$ определяются формулой (1.42):

$$\begin{aligned} G_{ij} &= (q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot), g(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \int_{\mathbb{T}} \varphi(t) q(i, t) \int_{t_0}^t \psi(\tau) q(j, \tau) d\tau dt, \\ G_{ij}^* &= (q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot), g^*(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \int_{\mathbb{T}} \psi(t) q(i, t) \int_t^{\tau} \varphi(\tau) q(j, \tau) d\tau dt, \end{aligned}$$

и для них выполняется условие $G_{ij} = G_{ji}^*$ по свойству симметричности (1.51), $i, j = 0, 1, 2, \dots$

Пусть

$$f(t, \tau) = g(t, \tau) + g^*(t, \tau) = g(t, \tau) + g(\tau, t) = f(\tau, t), \quad f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2),$$

тогда коэффициенты разложения F_{ij} функции $f(\cdot)$ определяются по свойству линейности (1.47):

$$F_{ij} = G_{ij} + G_{ij}^* = G_{ij} + G_{ji} \quad \text{и} \quad F_{ii} = 2G_{ii}.$$

Кроме того, можно записать интегральный след для функции $f(\cdot)$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{S}^\varepsilon f(t, t) = \varphi(t) \psi(t) \quad \text{и} \quad \text{tr} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \varphi(t) \psi(t) dt = (\varphi(\cdot), \psi(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})},$$

и это означает, что равенство (1.111) эквивалентно выражению (1.105), которое верно для ядерного оператора \mathcal{F} с некоторым ядром $f(\cdot)$ согласно теореме 1.11.

Если $\varphi(\cdot), \psi(\cdot)$ — это полиномы, то согласно лемме 1.1 интегральный оператор $\mathcal{F}: L_2(\mathbb{T}) \rightarrow L_2(\mathbb{T})$ с ядром $f(\cdot)$ является ядерным. С помощью полиномов сколь угодно точно приближаются произвольные функции из пространства $L_2(\mathbb{T})$.

Далее, пусть $\varphi(\cdot), \psi(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ и

$$\varphi(\cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\cdot), \quad \psi(\cdot) = \lim_{m \rightarrow \infty} \psi_m(\cdot),$$

где

$$\varphi_n(\cdot) = \sum_{i=0}^n \Phi_i \hat{P}(i, \cdot) \quad \text{и} \quad \psi_m(\cdot) = \sum_{i=0}^m \Psi_i \hat{P}(i, \cdot), \quad n, m \in \{0, 1, 2, \dots\},$$

а Φ_i и Ψ_i — коэффициенты разложения (1.11) функций $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ соответственно по полиномам Лежандра (см. п. 1 замечаний 1.1). Тогда устанавливаем справедливость следующего равенства для произвольных n и m :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \left[\int_{\mathbb{T}} \varphi_n(t) q(i, t) \int_{t_0}^t \psi_m(\tau) q(i, \tau) d\tau dt + \right. \\ & \left. + \int_{\mathbb{T}} \psi_m(t) q(i, t) \int_t^T \varphi_n(\tau) q(i, \tau) d\tau dt \right] = (\varphi_n(\cdot), \psi_m(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})}, \end{aligned} \quad (1.112)$$

где числовой ряд в левой части записанного выражения сходится абсолютно, его сумма не зависит от выбора базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$.

Зафиксируем n в формуле (1.112). Тогда она определяет ограниченный, а значит и непрерывный линейный функционал в пространстве $L_2(\mathbb{T})$, который задается функцией $\varphi_n(\cdot)$ (в левой части формулы непрерывный функционал в пространстве ядерных операторов [41], но его можно рассматривать как линейный функционал в пространстве $L_2(\mathbb{T})$, используя продолжение по непрерывности [52, 123]). Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем непрерывный линейный функционал, заданный функцией $\psi(\cdot)$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left[\int_{\mathbb{T}} \varphi_n(t) q(i, t) \int_{t_0}^t \psi(\tau) q(i, \tau) d\tau dt + \int_{\mathbb{T}} \psi(t) q(i, t) \int_t^T \varphi_n(\tau) q(i, \tau) d\tau dt \right] = (\varphi_n(\cdot), \psi(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})}.$$

Остается перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$, в результате получаем выражение (1.105), что доказывает равенство (1.111). ◀

Рассмотрим простейший пример применения теоремы 1.12. Пусть $\varphi(t) = \psi(t) = \chi_\theta(t) = \chi_{[t_0, \theta]}(t)$ — индикатор множества (1.14), $\theta \in \mathbb{T}$. Тогда формула (1.111) примет вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} \varphi(t) q(i, t) \int_{t_0}^t \psi(\tau) q(i, \tau) d\tau dt &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t_0}^{\theta} q(i, t) \int_{t_0}^t q(i, \tau) d\tau dt = \\ &= \frac{1}{2} (\varphi(\cdot), \psi(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\theta} dt = \frac{1}{2} (\theta - t_0). \end{aligned} \quad (1.113)$$

Замечания 1.15.

1. Числовой ряд в правой части формулы (1.111) сходится абсолютно, это следствие независимости от выбора базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$.

2. Для функций вида $f(t, \tau) = \varphi(t)\psi(\tau)1(t - \tau)$ при условии $\varphi(t) = t^{n_1}$ и $\psi(t) = t^{n_2}$, где $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$, равенство матричного и интегрального следов можно получить с помощью следствия 1.1. При этом в явном виде не требуется, чтобы интегральный оператор \mathcal{F} с ядром $f(\cdot)$ был ядерным.

Например, пусть $f(t, \tau) = 1(t - \tau)$, т.е. $n_1 = n_2 = 0$, тогда сингулярные числа соответствующего оператора, а это оператор интегрирования \mathcal{D}^{-1} (см. разд. 1.6), определяются выражением [41, 253] (см. также пример 2.4):

$$\lambda_i^{-1} = \left(i + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{T}, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

при этом числовой ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i$ расходится, т.е. \mathcal{D}^{-1} не является ядерным оператором. Однако справедлива формула

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \int_{t_0}^t q(i, \tau) d\tau dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T dt = \frac{1}{2} (T - t_0). \quad (1.114)$$

Рассмотрим более общий случай, не используя в явном виде свойства ядерных операторов. Пусть $\psi(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ и

$$f(t, \tau) = \psi(t)\psi(\tau)1(t - \tau), \quad f^*(t, \tau) = \psi(t)\psi(\tau)1(\tau - t) = f(\tau, t).$$

Тогда коэффициенты разложения F_{ij} и F_{ij}^* этих функций относительно базисной системы $\{q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot)\}_{i, j=0}^{\infty}$ определяются формулой (1.42):

$$F_{ij} = \int_{\mathbb{T}} \psi(t) q(i, t) \int_{t_0}^t \psi(\tau) q(j, \tau) d\tau dt, \quad F_{ij}^* = \int_{\mathbb{T}} \psi(t) q(i, t) \int_t^T \psi(\tau) q(j, \tau) d\tau dt,$$

и для них выполняется условие $F_{ij} = F_{ji}^*$ по свойству симметричности (1.51), $i, j = 0, 1, 2, \dots$, следовательно,

$$\begin{aligned} F_{ii} + F_{ii}^* &= \int_{\mathbb{T}} \psi(t) q(i, t) \left[\int_{t_0}^t \psi(\tau) q(i, \tau) d\tau + \int_t^T \psi(\tau) q(i, \tau) d\tau \right] dt = \\ &= \int_{\mathbb{T}} \psi(t) q(i, t) \int_{\mathbb{T}} \psi(\tau) q(i, \tau) d\tau dt = \left[\int_{\mathbb{T}} q(i, t) \psi(t) dt \right]^2 = \Psi_i^2, \end{aligned}$$

где Ψ_i — коэффициенты разложения (1.11) функции $\psi(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$, поэтому

$$\sum_{i=0}^{\infty} (F_{ii} + F_{ii}^*) = 2 \sum_{i=0}^{\infty} F_{ii} = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i^2,$$

а по свойству (1.25) сохранения нормы $2 \sum_{i=0}^{\infty} F_{ii} = \|\psi(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2$.

Отсюда получаем частный случай формулы (1.111):

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} \psi(t) q(i, t) \int_{t_0}^t \psi(\tau) q(i, \tau) d\tau dt = \frac{1}{2} \|\psi(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2, \quad (1.115)$$

где коэффициент $1/2$ соответствует усреднению функции $f(\cdot)$ на диагонали квадрата \mathbb{T}^2 :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{S}^\varepsilon f(t, t) = \frac{1}{2} \psi^2(t).$$

Формула (1.114) — это частный случай равенства (1.115) при $\psi(t) \equiv 1$, ее также можно трактовать как частный случай равенства (1.113) при $\theta = T$.

3. Один из результатов примера 1.17 состоит в следующем:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_{t_0}^{\theta} q(i, t) \int_{t_0}^t q(i, \tau) \int_{t_0}^{\tau} \lambda(\xi) d\xi d\tau dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\theta} (\theta - \xi) \lambda(\xi) d\xi,$$

что соответствует формуле (1.106). Но это же равенство можно получить непосредственно из теоремы 1.12.

4. Найденные соотношения записываются в терминах спектральных характеристик функций одной и двух переменных (см. разд. 1.1 и 1.2). Пусть $\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}$ — спектральные характеристики функций $\varphi(\cdot), \psi(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$, а F — двумерная спектральная характеристика функции $f(t, \tau) = \varphi(t)\psi(\tau)1(t - \tau)$. Тогда формула (1.111) примет вид

$$\text{tr } F = \frac{1}{2} \tilde{\Phi}^T \tilde{\Psi}.$$

Функция $f(\cdot)$ — это ядро оператора Гильберта–Шмидта (1.71). Этот оператор является композицией операторов умножения \mathcal{A}_φ и \mathcal{A}_ψ на функции $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ со спектральными характеристиками Φ и Ψ соответственно, а также оператора интегрирования \mathcal{D}^{-1} со спектральной характеристикой P^{-1} : $\mathcal{F} = \mathcal{A}_\varphi \circ \mathcal{D}_{-1} \circ \mathcal{A}_\psi$, следовательно, по свойству (1.64) спектрального преобразования композиции операторов для спектральной характеристики оператора \mathcal{F} верно соотношение $F = \Phi P^{-1} \Psi$. Тогда с учетом выражения (1.32) и теорем 1.7, 1.8 находим

$$\text{tr } \Phi P^{-1} \Psi = \mathbf{1}^T (V(\Phi P^{-1} \Psi)) = \frac{1}{2} \tilde{\Phi}^T \tilde{\Psi}, \quad \Phi = V \tilde{\Phi}, \quad \Psi = V \tilde{\Psi}.$$

Также можно дополнить соотношение (1.107). Если обозначить через F, F_1 и F_2 двумерные спектральные характеристики функций $f(\cdot), f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot)\}_{i,j=0}^{\infty}$ (эти же матрицы являются спектральными характеристиками соответствующих линейных операторов $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1$ и \mathcal{F}_2 , причем $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$), то по свойству (1.64) спектрального преобразования композиции операторов $F = F_1 F_2$. Пусть также F_1^T — спектральная характеристика сопряженного оператора \mathcal{F}_1^* с ядром $f^*(t, \tau) = f(\tau, t)$. Следовательно, согласно формуле (1.49) имеем

$$(F_1^T, F_2)_{\mathcal{M}_2} = \text{tr } F_1 F_2 = \text{tr } F < \infty.$$

Пример 1.18. Найти ядро оператора Гильберта–Шмидта (1.71) со спектральной характеристикой $U = P^{-1} A^n P^{-1}$ при условии $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ и $\mathbb{T} = [0, T]$, где P^{-1} и A — спектральные характеристики оператора интегрирования и оператора умножения на функцию $a_1(t) = t$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$. Кроме того, найти след матрицы U .

□ Согласно свойству (1.64) спектрального преобразования композиции операторов произведению спектральных характеристик $U = P^{-1}A^n P^{-1}$ соответствует композиция оператора интегрирования \mathcal{D}^{-1} и оператора умножения \mathcal{A} на функцию $a_1(t) = t$:

$$\mathcal{U} = \mathcal{D}^{-1} \circ \mathcal{A}^n \circ \mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}^{-1} \circ \underbrace{\mathcal{A} \circ \dots \circ \mathcal{A}}_{n \text{ элементов}} \circ \mathcal{D}^{-1},$$

Ядро оператора \mathcal{U} — это импульсная переходная функция $k(\cdot)$ последовательного соединения трех звеньев: интегрирующего звена, усилительного звена с коэффициентом усиления $a_n(t) = t^n$ и еще одного интегрирующего звена. Импульсные переходные функции этих звеньев указаны в разд. 1.4, они выражаются через единичную ступенчатую функцию (1.28) и дельта-функцию: $k_1(t, \tau) = k_3(t, \tau) = 1(t - \tau)$, $k_2(t, \tau) = t^n \delta(t - \tau)$, причем линейный оператор \mathcal{A}^n с ядром $k_2(\cdot)$ — оператор умножения на функцию $a_n(t) = t^n$ — не является оператором Гильберта – Шмидта.

Далее применим правила нахождения импульсных переходных функций соединений [105]. Последовательному соединению звеньев с импульсными переходными функциями $k_2(\cdot)$ и $k_3(\cdot)$ соответствует импульсная переходная функция

$$k_{23}(t, \tau) = \int_{\tau}^t k_3(t, \xi) k_2(\xi, \tau) d\xi = \int_{\tau}^t 1(t - \xi) \xi^n \delta(\xi - \tau) d\xi = \tau^n 1(t - \tau),$$

а последовательному соединению звеньев с импульсными переходными функциями $k_1(\cdot)$ и $k_{23}(\cdot)$ — импульсная переходная функция

$$k(t, \tau) = \int_{\tau}^t k_{23}(t, \xi) k_1(\xi, \tau) d\xi = \int_{\tau}^t 1(t - \xi) \xi^n 1(\xi - \tau) d\xi = 1(t - \tau) \int_{\tau}^t \xi^n d\xi = \frac{t^{n+1} - \tau^{n+1}}{n+1} 1(t - \tau),$$

где приведенные выражения являются аналогом формулы (1.107).

Отметим, что такой же результат получится, если искать импульсную переходную функцию как решение задачи Коши для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с ненулевыми начальными значениями [105]. Действительно, запишем сначала дифференциальное уравнение, задающее связь вход – выход для рассматриваемого последовательного соединения звеньев. Так как

$$x(t) = \int_0^t \theta^n \int_0^{\theta} g(\tau) d\tau d\theta,$$

имеем

$$x'(t) = t^n \int_0^t g(\tau) d\tau, \quad (t^{-n} x'(t))' = g(t), \quad t^{-n} x''(t) - n t^{-n-1} x'(t) = g(t).$$

Тогда импульсная переходная функция является решением следующей задачи: $t^{-n} k''(t) - n t^{-n-1} k'(t) = 0$, $k(\tau+) = 0$, $k'(\tau+) = \tau^n$, а это функция $k(\cdot)$, найденная выше. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{U}g(\cdot) &= \int_{\mathbb{T}} \frac{(\cdot)^{n+1} - \tau^{n+1}}{n+1} 1((\cdot) - \tau) g(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{n+1} (\cdot)^{n+1} \int_0^{(\cdot)} g(\tau) d\tau - \frac{1}{n+1} \int_0^{(\cdot)} \tau^{n+1} g(\tau) d\tau, \quad g(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}), \end{aligned}$$

и первое слагаемое в правой части полученного равенства с точностью до постоянного множителя задает композицию оператора умножения \mathcal{A}^{n+1} и оператора интегрирования \mathcal{D}^{-1} , а второе слагаемое — композицию оператора интегрирования \mathcal{D}^{-1} и оператора умножения \mathcal{A}^{n+1}

(см. также пример 1.11):

$$\mathcal{U} = \frac{1}{n+1} \mathcal{A}^{n+1} \circ \mathcal{D}^{-1} - \frac{1}{n+1} \mathcal{D}^{-1} \circ \mathcal{A}^{n+1} = \frac{1}{n+1} [\mathcal{A}^{n+1}, \mathcal{D}^{-1}],$$

где $[\mathcal{A}^{n+1}, \mathcal{D}^{-1}]$ — коммутатор линейных операторов.

Следовательно, на основе свойства (1.67) спектрального преобразования коммутатора операторов получаем

$$U = P^{-1} A^n P^{-1} = \frac{1}{n+1} A^{n+1} P^{-1} - \frac{1}{n+1} P^{-1} A^{n+1} = \frac{1}{n+1} [A^{n+1}, P^{-1}],$$

что при $n = 0$ совпадает с одним из результатов примера 1.12.

Перейдем к нахождению следа матрицы U — спектральной характеристики линейного оператора \mathcal{U} с элементами, которые задаются в виде (1.72):

$$\begin{aligned} U_{ij} &= (q(i, \cdot), \mathcal{U}q(j, \cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \frac{1}{n+1} \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \int_0^t (t^{n+1} - \tau^{n+1}) q(j, \tau) d\tau dt = \\ &= \frac{1}{n+1} \int_{\mathbb{T}} t^{n+1} q(i, t) \int_0^t q(j, \tau) d\tau dt - \frac{1}{n+1} \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \int_0^t \tau^{n+1} q(j, \tau) d\tau dt, \end{aligned}$$

при условии $i, j = 0, 1, 2, \dots$. Применяя теорему 1.12, находим

$$\begin{aligned} \text{tr } U &= \sum_{i=0}^{\infty} U_{ii} = \frac{1}{n+1} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} t^{n+1} q(i, t) \int_0^t q(i, \tau) d\tau dt - \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \int_0^t \tau^{n+1} q(i, \tau) d\tau dt \right] = \\ &= \frac{1}{n+1} \left[\frac{1}{2} (f_{n+1}(\cdot), f_0(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} - \frac{1}{2} (f_0(\cdot), f_{n+1}(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} \right] = 0, \end{aligned}$$

где $f_n(t) = t^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ■

Пример 1.19. Найти след матрицы $P^{-n} = [P^{-1}]^n$, где P^{-1} — спектральная характеристика оператора интегрирования относительно произвольной базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$, при условии $n \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Матрица P^{-n} представляет собой спектральную характеристику оператора \mathcal{D}^{-n} повторного интегрирования (см. разд. 1.6), но это оператор Гильберта — Шмидта с ядром

$$k(t, \tau) = \frac{(t - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} 1(t - \tau),$$

которое приведено в доказательстве теоремы 1.10.

Если $n = 1$, то $k(t, \tau) = 1(t - \tau)$ — единичная ступенчатая функция (1.28). Используя связь (1.87) спектральных характеристик оператора интегрирования и сопряженного с ним, получаем $\text{tr } P^{-1} + \text{tr}[P^{-1}]^T = \text{tr } \Lambda = \text{tr}(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T)$, где Λ — двумерная спектральная характеристика функции $f(t, \tau) = f_0(t)f_0(\tau) \equiv 1$, $\mathbf{1}$ — спектральная характеристика функции $f_0(t) \equiv 1$. При транспонировании матрицы ее след не меняется, поэтому

$$\text{tr } P^{-1} = \frac{1}{2} \text{tr } \Lambda.$$

Интегральный оператор с ядром $f(\cdot)$ является ядерным (см. пример 1.15). Тогда из теоремы 1.11 следует, что

$$\text{tr } \Lambda = \text{tr } f(\cdot) = \int_0^T dt = T,$$

поэтому $\text{tr } P^{-1} = T/2$ (см. также п. 2 замечаний 1.15 и формулу (1.114)).

Если $n > 1$, то интегральный оператор с ядром $k(t, \tau) = (t - \tau)^{n-1} 1(t - \tau)/(n-1)!$ является ядерным, поскольку для функции $k(\cdot)$ справедливо представление (1.107), что следует

из определения оператора \mathcal{D}^{-n} как композиции операторов Гильберта–Шмидта (см. п. 3 замечаний 1.9). Тогда можно применить теорему 1.11: $\text{tr } P^{-n} = \text{tr } k(\cdot)$, и в данном случае $k(\cdot)$ — непрерывная функция, равная нулю на диагонали квадрата \mathbb{T}^2 , следовательно, $\text{tr } P^{-n} = 0$. Отметим, что у любого ядерного оператора Вольтерра нулевой след [21].

Этот же результат получается на основе теоремы 1.10:

$$\text{tr } P^{-n} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i \text{tr } A^{n-i-1} P^{-1} A^i,$$

в котором спектральная характеристика $A^{n-i-1} P^{-1} A^i$ соответствует композиции оператора интегрирования \mathcal{D}^{-1} и оператора умножения \mathcal{A} на функцию $a_1(t) = t$, а именно $\mathcal{A}^{n-i-1} \circ \mathcal{D}^{-1} \circ \mathcal{A}^i$, но это интегральный оператор с ядром $k_i(t, \tau) = t^{n-i-1} \tau^i 1(t - \tau)$ (см. доказательство теоремы 1.10). Тогда по теореме 1.12 находим

$$\text{tr } P^{-n} = \frac{1}{2(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i (\varphi_i(\cdot), \psi_i(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})},$$

где $\varphi_i(t) = t^{n-i-1}$ и $\psi_i(t) = t^i$. Таким образом, принимая во внимание свойства биномиальных коэффициентов, имеем

$$\text{tr } P^{-n} = \frac{1}{2(n-1)!} \int_0^T t^{n-1} dt \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i = \frac{T^n}{2n!} \cdot 0 = 0.$$

Кроме того, след матрицы P^{-n} можно найти непосредственно по определению, выбирая конкретную базисную систему. Продемонстрируем это для значений $n = 1$ и $n = 2$.

Спектральные характеристики P^{-1} относительно базисных систем (1.5)–(1.9) приведены в разд. 1.6. Их главные диагонали совпадают, они имеют единственный ненулевой элемент $P_{00}^{-1} = T/2$, следовательно, $\text{tr } P^{-1} = T/2$.

Аналогично, относительно базисных систем (1.5)–(1.9) двумерная спектральная характеристика Λ найдена в примере 1.6. Она имеет единственный ненулевой элемент $\Lambda_{00} = T$, откуда следует искомый результат (см. также пример 1.9, замечание 1.7 и формулу (1.89)). Такой же вывод справедлив для любых других базисных систем, так как след матрицы не меняется при ортогональных преобразованиях, а изменение базисной системы — это ортогональное преобразование (см. свойства матриц изменения базисных систем в разд. 1.3).

Спектральные характеристики P^{-2} найдены относительно полиномов Лежандра (1.5) и косинусоид (1.6). Согласно примеру 1.12 при выборе полиномов Лежандра диагональные элементы матрицы P^{-2} задаются формулами

$$P_{00}^{-2} = \frac{T^2}{6}, \quad P_{mm}^{-2} = -\frac{T^2}{2(2m-1)(2m+3)}, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

следовательно,

$$\text{tr } P^{-2} = T^2 \left(\frac{1}{6} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2(2m-1)(2m+3)} \right) = T^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1/2)(m+3/2)} \right).$$

Используя таблицу рядов [42], записываем

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1/2)(m+3/2)} &= \frac{1}{3/2+1/2} \int_0^1 \frac{x^{-1/2} - x^{3/2}}{1-x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1-x^2}{\sqrt{x}(1-x)} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) dx = \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

т.е. $\text{tr } P^{-2} = 0$.

При выборе косинусоид результат будет таким же, как и для любой другой базисной системы (как отмечено выше, след матрицы не меняется при изменении базисной системы). Действительно, диагональные элементы матрицы P^{-2} определяются следующим образом (они найдены в примере 1.12):

$$P_{00}^{-2} = \frac{T^2}{6}, \quad P_{ii}^{-2} = -\frac{T^2}{i^2\pi^2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

поэтому

$$\text{tr } P^{-2} = T^2 \left(\frac{1}{6} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2\pi^2} \right) = T^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \right), \quad \text{но} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

согласно [42] (это ряд обратных квадратов, см. также п. 2 замечаний 1.14), т.е. $\text{tr } P^{-2} = 0$. ■

1.10. Приближенное представление функций

Рассмотрим задачу приближенного представления функции одной переменной $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ в виде частичной суммы ряда (1.10):

$$f(t) \approx \tilde{f}(t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad \tilde{f}(\cdot) = \sum_{i=0}^{L-1} F_i q(i, \cdot), \quad (1.116)$$

где коэффициенты разложения F_i вычисляются согласно (1.11). Эту задачу будем также называть задачей аппроксимации функции. Ее решение предполагает при заданной величине L нахождение коэффициентов разложения F_i , $i = 0, 1, \dots, L-1$, и использование (1.116).

Элементы спектральной характеристики \tilde{F} функции $\tilde{f}(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$ удовлетворяют условию:

$$\tilde{F}_i = \begin{cases} F_i, & i = 0, 1, \dots, L-1, \\ 0, & i = L, L+1, \dots, \end{cases}$$

и эту спектральную характеристику целесообразно представлять конечной матрицей-столбцом размеров $L \times 1$ — усеченной спектральной характеристикой F (L -мерным вектором):

$$\tilde{F} = [F_0 \ F_1 \ \dots \ F_{L-1}]^T,$$

где L называется порядком усечения спектральных характеристик.

Погрешность аппроксимации функции одной переменной $f(\cdot)$ в смысле нормы пространства $L_2(\mathbb{T})$ можно вычислить точно:

$$\begin{aligned} \varepsilon_f &= \|f(\cdot) - \tilde{f}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \|F - \tilde{F}\|_{\ell_2} = \left\{ \sum_{i=L}^{\infty} F_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} F_i^2 - \sum_{i=0}^{L-1} F_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \sqrt{\|F\|_{\ell_2}^2 - \|\tilde{F}\|^2} = \sqrt{\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 - \|\tilde{F}\|^2}, \end{aligned} \quad (1.117)$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма [30]:

$$\|\tilde{F}\| = \left\{ \sum_{i=0}^{L-1} F_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Если погрешность аппроксимации функции связана не только с усечением спектральной характеристики, но и с неточным нахождением коэффициентов разложения (1.11), то форму-

лу для погрешности следует скорректировать. Обозначим усеченную спектральную характеристику функции $f(\cdot)$ через \bar{F} , в предположении, что ее элементы \bar{F}_i найдены неточно. Ей соответствует функция

$$\bar{f}(\cdot) = \sum_{i=0}^{L-1} \bar{F}_i q(i, \cdot),$$

тогда

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_f &= \|f(\cdot) - \bar{f}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \|F - \bar{F}\|_{\ell_2} = \left\{ \sum_{i=0}^{L-1} (F_i - \bar{F}_i)^2 + \sum_{i=L}^{\infty} F_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \sqrt{\|F\|_{\ell_2}^2 - \|\tilde{F}\|^2 + \|\tilde{F} - \bar{F}\|^2} = \sqrt{\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 - \|\tilde{F}\|^2 + \|\tilde{F} - \bar{F}\|^2}. \end{aligned} \quad (1.118)$$

Из неравенства Коши – Буняковского [21, 69] можно получить оценку точности для линейных функционалов (1.30):

$$|\mathcal{Z}f(\cdot) - \mathcal{Z}\bar{f}(\cdot)| = |(z(\cdot), f(\cdot) - \bar{f}(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})}| \leq \|z(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \|f(\cdot) - \bar{f}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \varepsilon_f \|z(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}. \quad (1.119)$$

Аналогично

$$|\mathcal{Z}f(\cdot) - \mathcal{Z}\bar{f}(\cdot)| \leq \bar{\varepsilon}_f \|z(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}. \quad (1.120)$$

Пример 1.20. Найти погрешности аппроксимации функции $f_1(t) = t$ при ее приближенном представлении в виде частичной суммы ряда (1.10), используя базисные системы (1.5) – (1.9), $\mathbb{T} = [0, 1]$. Порядки усечения спектральных характеристик: $L = 4, 8, \dots, 256$.

□ Найдем квадрат нормы функции $f_1(\cdot)$:

$$\|f_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

Для этой функции спектральные характеристики F найдены ранее: относительно полиномов Лежандра (1.5) и косинусов (1.6) в примерах 1.2 и 1.3 соответственно. В замечании 1.3 приведены спектральные характеристики F относительно функций Уолша (1.7), функций Хаара (1.8) и тригонометрических функций (1.9).

Применим формулу (1.117) для вычисления погрешностей аппроксимации ε_{f_1} функции $f_1(\cdot)$ при заданных значениях L , когда она приближенно представляется в виде частичной суммы (1.116) — функции $\tilde{f}_1(\cdot)$, что соответствует усечению ее спектральной характеристики с порядком L . Выбор величин L обусловлен использованием в качестве базисных систем функций Уолша и Хаара, для которых значения $L = 2^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, оптимальны (см., например, п. 4 замечаний 1.1). Результаты вычислений приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2. Погрешности аппроксимации ε_{f_1}

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.013840	0.005093	0.001821	0.000646	0.000228	0.000081	0.000029
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.072169	0.036084	0.018042	0.009021	0.004511	0.002255	0.001128
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.072169	0.036084	0.018042	0.009021	0.004511	0.002255	0.001128
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.141448	0.105888	0.077157	0.055402	0.039480	0.028025	0.019856

Нулевая погрешность при выборе полиномов Лежандра (1.5) связана с тем, что для точного представления функции $f_1(\cdot)$ достаточно первых двух полиномов Лежандра (они приведены в примере 1.7).

Проанализируем полученные результаты. В этом примере полиномы Лежандра обеспечивают точное представление заданной функции, высокую точность дают косинусоиды, далее следуют функции Уолша и Хаара (при выбранных порядках усечения погрешность аппроксимации для них одинакова). Худший результат при выборе тригонометрических функций, что обусловлено особенностями сходимости тригонометрических рядов Фурье, описанными в замечании 1.5.

По данным из табл. 1.2 можно сделать следующий вывод: $\varepsilon_{f_1} \approx c/L^\gamma$, где $c > 0$ — константа, зависящая от базисной системы; $\gamma = 3/2$ для косинусоид, $\gamma = 1$ для функций Уолша и Хаара, $\gamma = 1/2$ для тригонометрических функций. В этом примере по условию $\mathbb{T} = [0, 1]$, т.е. $T = 1$, а для произвольного $T > 0$ погрешности аппроксимации в табл. 1.2 следует умножить на коэффициент $T\sqrt{T}$. ■

Аналогичным образом формулируется задача приближенного представления функции двух переменных $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ в виде частичной суммы ряда (1.41):

$$f(t, \tau) \approx \tilde{f}(t, \tau), \quad (t, \tau) \in \mathbb{T}^2, \quad \tilde{f}(\cdot) = \sum_{i=0}^{L_1-1} \sum_{j=0}^{L_2-1} F_{ij} q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot), \quad (1.121)$$

где коэффициенты разложения F_{ij} вычисляются согласно (1.42). Эту задачу будем также называть задачей аппроксимации функции. Решение предполагает при заданных значениях L_1 и L_2 нахождение коэффициентов разложения F_{ij} , $i = 0, 1, \dots, L_1 - 1$ и $j = 0, 1, \dots, L_2 - 1$, и использование (1.121).

Далее для краткости положим $L = L_1 = L_2$, т.е.

$$\tilde{f}(\cdot) = \sum_{i,j=0}^{L-1} F_{ij} q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot). \quad (1.122)$$

Элементы двумерной спектральной характеристики \tilde{F} функции $\tilde{f}(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$ удовлетворяют условию:

$$\tilde{F}_{ij} = \begin{cases} F_{ij}, & i, j = 0, 1, \dots, L-1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

она представляется квадратной матрицей размеров $L \times L$ — усеченной двумерной спектральной характеристикой F :

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} F_{00} & F_{01} & \dots & F_{0,L-1} \\ F_{10} & F_{11} & \dots & F_{1,L-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{L-1,0} & F_{L-1,1} & \dots & F_{L-1,L-1} \end{bmatrix},$$

а величина L , как и ранее, называется порядком усечения спектральных характеристик.

Формула для погрешности аппроксимации функции двух переменных $f(\cdot)$ в смысле нормы пространства $L_2(\mathbb{T}^2)$ отличается от формулы (1.117) аргументами функций и выбором

пространства квадратично интегрируемых функций:

$$\varepsilon_f = \|f(\cdot) - \tilde{f}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \sqrt{\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 - \|\tilde{F}\|^2}, \quad (1.123)$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма матрицы (норма Фробениуса) [30]:

$$\|\tilde{F}\| = \left\{ \sum_{i,j=0}^{L-1} F_{ij}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Аналог формулы (1.118) для погрешности аппроксимации функции двух переменных:

$$\bar{\varepsilon}_f = \|f(\cdot) - \bar{f}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \sqrt{\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 - \|\tilde{F}\|^2 + \|\tilde{F} - \bar{F}\|^2}, \quad (1.124)$$

где \bar{F} — усеченная двумерная спектральная характеристика функции $f(\cdot)$ при условии, что ее коэффициенты разложения (1.42) найдены неточно. Двумерная спектральная характеристика с элементами \bar{F}_{ij} отвечает функции

$$\bar{f}(\cdot) = \sum_{i,j=0}^{L-1} \bar{F}_{ij} q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot).$$

Для линейных функционалов (1.55) можно записать формулы, аналогичные (1.119) и (1.120).

Пример 1.21. Найти погрешности аппроксимации единичной ступенчатой функции $f(t, \tau) = 1(t - \tau)$ при ее приближенном представлении в виде частичной суммы ряда (1.41), используя полиномы Лежандра (1.5), $\mathbb{T} = [0, 1]$. Порядки усечения спектральной характеристики: $L = 4, 8, \dots, 256$.

□ Воспользуемся результатами, полученными в примере 1.7:

$$\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \frac{1}{2},$$

а также выражениями для элементов двумерной спектральной характеристики F функции $f(\cdot)$ относительно полиномов Лежандра (1.5).

По формуле (1.123) вычислим погрешности аппроксимации ε_f функции $f(\cdot)$ при заданных значениях L в предположении, что она приближенно представляется в виде частичной суммы (1.122) — функции $\tilde{f}(\cdot)$. Таким образом, двумерная спектральная характеристика F усекается с порядком L . В табл. 1.3 указаны погрешности ε_f . По условию $\mathbb{T} = [0, 1]$, т.е. $T = 1$, а для произвольного $T > 0$ найденные погрешности аппроксимации следует умножить на коэффициент T . ■

Таблица 1.3. Погрешности аппроксимации ε_f

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.188982	0.129099	0.089803	0.062994	0.044368	0.031311	0.022119

Пример 1.22. Найти погрешности аппроксимации единичной ступенчатой функции $f(t, \tau) = 1(t - \tau)$ при ее приближенном представлении в виде частичной суммы ряда (1.41), используя базисные системы (1.6)–(1.9), $\mathbb{T} = [0, 1]$. Порядки усечения спектральных характеристик: $L = 4, 8, \dots, 256$.

□ В примере 1.21 рассматривалось приближенное представление единичной ступенчатой функции с помощью полиномов Лежандра (1.5). Здесь предлагается использовать четыре другие базисные системы из разд. 1.1.

Двумерная спектральная характеристика функции $f(t, \tau) = 1(t - \tau)$ — это спектральная характеристика P^{-1} оператора интегрирования \mathcal{D}^{-1} (см. разд. 1.4): $\mathbb{S}[f(\cdot)] = \mathbb{S}[\mathcal{D}^{-1}] = P^{-1}$, и для базисных систем (1.5)–(1.9) спектральные характеристики P^{-1} приведены в разд. 1.6 (в примере 1.7 эта спектральная характеристика обозначена F). Остается применить формулу (1.123) для вычисления погрешностей аппроксимации ε_f функции $f(\cdot)$ при заданных значениях L в предположении, что она приближенно представляется в виде частичной суммы (1.122) — функции $\tilde{f}(\cdot)$. Таким образом, спектральные характеристики $F = P^{-1}$ усекаются с порядком L . Все результаты вычислений, включая результаты примера 1.21, отражены в табл. 1.4.

Таблица 1.4. Погрешности аппроксимации ε_f

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.188982	0.129099	0.089803	0.062994	0.044368	0.031311	0.022119
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.184593	0.122217	0.083284	0.057691	0.040332	0.028342	0.019973
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.250000	0.176777	0.125000	0.088388	0.062500	0.044194	0.031250
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.250000	0.176777	0.125000	0.088388	0.062500	0.044194	0.031250
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.269607	0.191842	0.136570	0.096985	0.068742	0.048669	0.034436

Результаты вычислений указывают на то, что $\varepsilon_f \approx c/L^\gamma$, где $c > 0$ — константа, зависящая от базисной системы, $\gamma = 1/2$ для всех используемых базисных систем. Здесь справедливо такое же замечание, как и в случае применения только полиномов Лежандра (1.5): при $\mathbb{T} = [0, T]$ найденные погрешности аппроксимации следует умножить на коэффициент T (это верно для произвольной базисной системы). ■

Пример 1.23. Найти погрешности аппроксимации функций $h(t, \tau) = \tau 1(t - \tau)$ и $m(t, \tau) = t 1(t - \tau)$ при их приближенном представлении в виде частичной суммы ряда (1.41), используя функции Уолша (1.7) и функции Хаара (1.8), $\mathbb{T} = [0, 1]$. Порядки усекаения спектральных характеристик: $L = 4, 8, \dots, 256$.

□ Погрешности аппроксимации ε_h и ε_m функций $h(\cdot)$ и $m(\cdot)$ с учетом их приближенного представления в виде частичных сумм вида (1.122) при заданных значениях L , т.е. функций $\tilde{h}(\cdot)$ и $\tilde{m}(\cdot)$, определяются формулой (1.123). Соответствующие двумерные спектральные характеристики H и M найдены в примере 1.8, здесь они усекаются с порядком L .

Чтобы применить формулу (1.123), требуется вычислить квадраты норм заданных функций:

$$\|h(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \int_{\mathbb{T}^2} [\tau 1(t - \tau)]^2 dt d\tau = \int_0^1 \left[\int_0^t \tau^2 d\tau \right] dt = \int_0^1 \frac{t^3}{3} dt = \frac{1}{12},$$

$$\|m(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \int_{\mathbb{T}^2} [t 1(t - \tau)]^2 dt d\tau = \int_0^1 \left[t^2 \int_0^t d\tau \right] dt = \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4}.$$

Двумерные спектральные характеристики H и M функций $h(\cdot)$ и $m(\cdot)$ можно представить

как произведение спектральных характеристик A и P^{-1} операторов умножения на функцию $a_1(t) = t$ и интегрирования (они приведены в разд. 1.5 и 1.6 для различных базисных систем). Но при усечении спектральных характеристик A и P^{-1} коэффициенты разложения, образующие двумерные спектральные характеристики H и M , вычисляются неточно, поэтому необходимо воспользоваться формулой (1.124) для погрешностей аппроксимации $\bar{\varepsilon}_h$ и $\bar{\varepsilon}_m$ при заданных значениях L и таком представлении.

Погрешности ε_h и ε_m содержатся в табл. 1.5 и 1.6, а погрешности $\bar{\varepsilon}_h$ и $\bar{\varepsilon}_m$ — в табл. 1.7 и 1.8.

Таблица 1.5. Погрешности аппроксимации ε_h

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.142826	0.101796	0.072122	0.051023	0.036083	0.025515	0.018042
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.142826	0.101796	0.072122	0.051023	0.036083	0.025515	0.018042

Таблица 1.6. Погрешности аппроксимации ε_m

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.160024	0.108002	0.074344	0.051814	0.036364	0.025615	0.018077
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.160024	0.108002	0.074344	0.051814	0.036364	0.025615	0.018077

Таблица 1.7. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_h$

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.143205	0.101863	0.072134	0.051025	0.036083	0.025515	0.018042
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.143205	0.101863	0.072134	0.051025	0.036083	0.025515	0.018042

Таблица 1.8. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_m$

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.160363	0.108065	0.074356	0.051816	0.036364	0.025615	0.018077
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.160363	0.108065	0.074356	0.051816	0.036364	0.025615	0.018077

Анализируя приведенные данные вычислительного эксперимента, получаем оценку $\varepsilon_h, \varepsilon_m \approx c/L^\gamma$, где $c > 0$ — константа, а $\gamma = 1/2$. При аппроксимации функций $h(\cdot)$ и $m(\cdot)$ на квадрате \mathbb{T}^2 , где $\mathbb{T} = [0, T]$, указанные погрешности аппроксимации достаточно умножить на коэффициент T^2 . Погрешности для функций Уолша и Хаара совпадают благодаря выбору порядков усечения спектральных характеристик. При условии $L \neq 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, погрешности будут отличаться. ■

1.11. Учет ограничений на значения функций

В задачах оптимального управления часто вводятся ограничения на управляющие воздействия (входные сигналы). Для учета этих ограничений целесообразно построить аналог множества допустимых управлений как множество соответствующих спектральных характеристик функций, чтобы проверка на допустимость закона управления осуществлялась со спектральной характеристикой без перехода к функции с помощью формулы обращения (см. разд. 1.1).

Такой подход полностью соответствует принципам спектральной формы математического описания систем управления [220–222].

Будем предполагать, что задана функция $u(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ и $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$. Далее рассматриваются часто используемые геометрические ограничения вида $|u(t)| \leq v$, $t \in \mathbb{T}$. Многие соотношения в этом разделе включают максимальные значения функций, в том числе базисных. Это означает, что функции должны быть определены однозначно в каждой точке отрезка \mathbb{T} , например с применением усредняющего оператора (см. замечание 1.5).

Так как $u(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, из теоремы 1.1 следует, что

$$u(\cdot) = \sum_{i=0}^{\infty} U_i q(i, \cdot), \quad (1.125)$$

где U_i — коэффициенты разложения (1.11) функции $u(\cdot)$, образующие спектральную характеристику U этой функции относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$:

$$U = \mathbb{S}[u(\cdot)], \quad u(\cdot) = \mathbb{S}^{-1}[U].$$

Наряду с точным представлением функции $u(\cdot)$ в виде ряда (1.125) можно рассматривать задачу ее приближенного представления в виде частичной суммы (1.116):

$$u(t) \approx u_L(t) = \sum_{i=0}^{L-1} u_i q(i, t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad (1.126)$$

где L — порядок усечения спектральных характеристик (см. разд. 1.10). В этом случае спектральную характеристику представляют матрицей-столбцом размеров $L \times 1$ — усеченной спектральной характеристикой \tilde{U} : $\tilde{U} = [U_0 \ U_1 \ \dots \ U_{L-1}]^T \in \mathbb{R}^L$, которую далее будем обозначать для удобства через U .

Конечномерное подпространство $L_2(\mathbb{T})_L$, образованное первыми L базисными функциями $q(0, \cdot)$, $q(1, \cdot)$, \dots , $q(L-1, \cdot)$, линейно по построению, т.е.

$$L_2(\mathbb{T})_L = \text{Lin}\{q(0, \cdot), q(1, \cdot), \dots, q(L-1, \cdot)\},$$

поэтому множество всех спектральных характеристик функций из $L_2(\mathbb{T})_L$ совпадает с \mathbb{R}^L , в то время как для функций из $L_2(\mathbb{T})$ множество всех спектральных характеристик — это пространство квадратично суммируемых последовательностей ℓ_2 (см. разд. 1.1).

Предположим, что для функции $u(\cdot)$ заданы дополнительные условия вида $|u(t)| \leq v$, где $t \in \mathbb{T}$ и v — заданное положительное число. Например, $u(\cdot)$ — допустимое программное управление некоторой линейной или нелинейной системой (см. также п. 1 замечаний 1.2) [104, 105].

Задача построения множества спектральных характеристик функций с ограничениями при заданном порядке усечения L состоит в нахождении множества $\mathbb{U}_L \subset \mathbb{R}^L$, соответствующего функциям из $L_2(\mathbb{T})_L \cap \{u(\cdot) : |u(t)| \leq v\}$ при спектральном преобразовании. Далее все спектральные характеристики полагаются усеченными.

Перечислим свойства множества спектральных характеристик функций с ограничениями, которые необходимы для приближенного построения этого множества [138, 141].

1. Вышуклость.

Если $U, V \in \mathbb{U}_L$, то $\alpha U + \beta V \in \mathbb{U}_L$ для любых $\alpha, \beta \geq 0$, удовлетворяющих условию $\alpha + \beta = 1$.

Действительно, если $u(\cdot) = \mathbb{S}^{-1}[U]$, $v(\cdot) = \mathbb{S}^{-1}[V]$, то $|u(t)| \leq v$, $|v(t)| \leq v$. Следовательно, $|\alpha u(t) + \beta v(t)| \leq v$, поскольку $|\alpha u(t) + \beta v(t)| \leq \alpha |u(t)| + \beta |v(t)|$. Таким образом,

$$\mathbb{S}[\alpha u(\cdot) + \beta v(\cdot)] = \alpha \mathbb{S}[u(\cdot)] + \beta \mathbb{S}[v(\cdot)] = \alpha U + \beta V \in \mathbb{U}_L.$$

2. Симметричность.

Если $U \in \mathbb{U}_L$, то $-U \in \mathbb{U}_L$.

Доказательство этого свойства аналогично предыдущему доказательству, а именно пусть $u(\cdot) = \mathbb{S}^{-1}[U]$, $|u(t)| \leq v$. Очевидно, что и $|-u(t)| \leq v$. Таким образом,

$$\mathbb{S}[-u(\cdot)] = -\mathbb{S}[u(\cdot)] = -U \in \mathbb{U}_L.$$

3. Замкнутость.

Множество \mathbb{U}_L замкнуто.

Рассмотрим такую функцию $u(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})_L \cap \{u(\cdot): |u(t)| \leq v\}$, что найдется $t^* \in \mathbb{T}$, для которого $u(t^*) = v$ ($\max |u(t)| = v$; здесь и далее при аналогичной записи подразумевается, что максимум берется по $t \in \mathbb{T}$). Определим ε -окрестность точки $U = \mathbb{S}[u(\cdot)]$ в \mathbb{R}^L , т.е. множество $U_\varepsilon = \{U': \|U' - U\| < \varepsilon\}$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta \in (0, \min\{\varepsilon/\|U\|, 1\})$, что

$$\mathbb{S}[(1 - \delta)u(\cdot)] = (1 - \delta)\mathbb{S}[u(\cdot)] = (1 - \delta)U \in \mathbb{U}_L, \quad (1 - \delta)U \in U_\varepsilon,$$

и найдется такое $\vartheta \in (0, \varepsilon/\|U\|)$, что

$$\mathbb{S}[(1 + \vartheta)u(\cdot)] = (1 + \vartheta)\mathbb{S}[u(\cdot)] = (1 + \vartheta)U \notin \mathbb{U}_L, \quad (1 + \vartheta)U \in U_\varepsilon,$$

так как $|(1 - \delta)u(t)| < v$ и $|(1 + \vartheta)u(t)| > v$. Следовательно, $U \in \mathbb{U}_L$ — граничная точка множества \mathbb{U}_L . Аналогично можно показать, что если $U \in \mathbb{U}_L$ — граничная точка множества \mathbb{U}_L , то функция $u(\cdot) = \mathbb{S}^{-1}[U]$ достигает заданного ограничения v .

Нетрудно видеть, что

$$\max_{|u(t)| \leq v} \|u(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left\{ \int_{\mathbb{T}} v^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} = v\zeta = R, \quad \zeta = \|f_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}, \quad f_0(t) \equiv 1,$$

и если среди функций базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ есть такая функция $q(i, \cdot)$, что $|q(i, t)| = C = \text{const} \forall t \in \mathbb{T}$, где $i < L$ и $C\zeta = 1$, то множество \mathbb{U}_L содержится в замкнутом шаре $\{U: \|U\| \leq R\} \subset \mathbb{R}^L$, имея с ним по крайней мере две общие точки. Иначе множество \mathbb{U}_L содержится в открытом шаре $\{U: \|U\| < R\}$, так как усеченная спектральная характеристика функции $g(t) \equiv v$ имеет меньшую норму, чем $R = v\sqrt{T - t_0}$ [138].

4. Сдвиг и масштабирование базисной системы.

Пусть $\{\tilde{q}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ — базисная система пространства $L_2([0, 1])$, а $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ — соответствующая ей базисная система пространства $L_2([t_0, T])$ (см. п. 1 замечаний 1.1). Далее, \mathbb{V}_L и \mathbb{U}_L — образы множеств

$$L_2([0, 1])_L \cap \{v(\cdot): |v(t)| \leq 1\} \quad \text{и} \quad L_2(\mathbb{T})_L \cap \{u(\cdot): |u(t)| \leq v\}$$

соответственно при спектральном преобразовании. Тогда если $u(t) = vv((t - t_0)(T - t_0))$, то

$$U_q = v\sqrt{T - t_0} V_{\tilde{q}}, \quad V_{\tilde{q}} \in \mathbb{V}_L, \quad U_q \in \mathbb{U}_L,$$

где U и V — спектральные характеристики функций $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, что обусловлено свойством линейности (1.24) и связью (1.27) спектральных характеристик при сдвиге и масштабировании базисной системы.

Таким образом, множество \mathbb{U}_L — выпуклое, замкнутое, ограниченное подмножество \mathbb{R}^L , симметричное относительно нуля $\bar{0} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$, соответствующего функции $u(t) \equiv 0$. Граница множества \mathbb{U}_L является образом функций, достигающих заданного ограничения v .

Кроме того, зная множество \mathbb{V}_L , нетрудно получить и \mathbb{U}_L , используя преобразование подобия (гомотетию) с коэффициентом $v\sqrt{T-t_0}$. Множество спектральных характеристик \mathbb{V}_L не изменяется при преобразованиях, для которых $v\sqrt{T-t_0} = 1$. Множество \mathbb{U}_L является образом целого класса $L_2(\mathbb{T})_L \cap \{u(\cdot): |u(t)| \leq v\}$, определяемого равенством $v\sqrt{T-t_0} = \text{const}$.

З а м е ч а н и е 1.16. Дополнительно можно рассмотреть множество функций, удовлетворяющих ограничению вида $v_0 \leq u(t) \leq v_1$, $t \in \mathbb{T}$. Определяя новую функцию $w(t) = u(t) - \bar{u}$, $\bar{u} = (v_0 + v_1)/2$, получаем ограничение $|w(t)| \leq \omega$, где $\omega = (v_1 - v_0)/2$. Обозначим соответствующее ему множество спектральных характеристик функций с ограничениями через \mathbb{W}_L , а спектральную характеристику функции $\bar{u}(t) \equiv \bar{u}$ через \bar{U} . Она представляется в виде $\bar{U} = \bar{u}\mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — усеченная спектральная характеристика функции $f_0(t) \equiv 1$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$.

Согласно свойству линейности (1.24) спектральные характеристики W и U функций $w(\cdot)$ и $u(\cdot)$ связаны соотношением $W = U - \bar{U}$. Это означает, что множество \mathbb{U}_L можно получить из \mathbb{W}_L с помощью движения вдоль вектора $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^L$.

Следовательно, для нахождения множества спектральных характеристик функций с ограничениями $v_0 \leq u(t) \leq v_1$, достаточно найти множество \mathbb{V}_L — образ множества $L_2([0, 1])_L \cap \{v(\cdot): |v(t)| \leq 1\}$ при спектральном преобразовании для каждой из применяемых базисных систем.

Для приближенного построения множества спектральных характеристик функций с ограничениями выберем конечное множество функций, достигающих ограничения v . Выпуклая комбинация их спектральных характеристик образует замкнутую многогранную область, граница которой — выпуклый многогранник. Этот выпуклый многогранник может быть задан множеством вершин и плоскостями граней [13]. Найдем для некоторых классов функций соответствующие им множества вершин (вообще говоря, правильнее называть их граничными точками, поскольку может оказаться, например, что часть из них лежит в одной гиперплоскости).

Выберем функции $a_i(t) = \alpha_i q(i, t)$, где величины α_i определяются из условия $\max |a_i(t)| = v$, $i = 0, 1, \dots, L-1$. Тогда для их спектральных характеристик справедливо соотношение $A_i = \mathbb{S}[a_i(\cdot)] = \alpha_i E_i$, где E_i — столбцы единичной матрицы порядка L , что является следствием ортогональности функций $\{q(i', \cdot)\}_{i'=0,1,\dots,L-1; i' \neq i}$ и $a_i(\cdot)$. Итак, первое приближение для множества \mathbb{U}_L — это выпуклая оболочка точек A_i и симметричных им, т.е.

$$\mathbb{U}_L^{(1)} = \text{Conv}\{\pm A_i, i = 0, 1, \dots, L-1\}, \quad \mathbb{U}_L^{(1)} \subseteq \mathbb{U}_L.$$

Далее рассмотрим функции $a_{j_1 j_2}^\pm(t) = \gamma_{j_1 j_2}^\pm(a_{j_1}(t) \pm a_{j_2}(t))$, где величины $\gamma_{j_1 j_2}^\pm$ определяются из условия $\max |a_{j_1 j_2}^\pm(t)| = \nu$, $j_1, j_2 = 0, 1, \dots, L-1$, $j_1 \neq j_2$. Нетрудно видеть, что их спектральные характеристики выражаются следующим образом:

$$A_{j_1 j_2}^\pm = \mathbb{S}[a_{j_1 j_2}^\pm(\cdot)] = \gamma_{j_1 j_2}^\pm(A_{j_1} \pm A_{j_2}) = \gamma_{j_1 j_2}^\pm(\alpha_{j_1} E_{j_1} \pm \alpha_{j_2} E_{j_2}).$$

Выпуклая оболочка точек, полученных ранее, а также точек $\{\pm A_{j_1 j_2}^\pm, j_1, j_2 = 0, 1, \dots, L-1, j_1 \neq j_2\}$ дает приближение, которое не хуже $\mathbb{U}_L^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_L^{(2)} = \text{Conv}\{ & \{\pm A_i, i = 0, 1, \dots, L-1\} \cup \\ & \cup \{\pm A_{j_1 j_2}^\pm, j_1, j_2 = 0, 1, \dots, L-1, j_1 \neq j_2\}\}, \quad \mathbb{U}_L^{(1)} \subseteq \mathbb{U}_L^{(2)} \subseteq \mathbb{U}_L. \end{aligned}$$

Для более точной аппроксимации имеет смысл брать суммы двух и более функций $a_i(\cdot)$ с разными весовыми коэффициентами. Перейдем к общему случаю, для этого введем множество мультииндексов

$$J = J(m, r) = \left\{ (j_0 j_1 \dots j_{L-1}) : j_i \in \mathbb{Z} \cap [-m, m], \sum_{i=0}^{L-1} |j_i| = r \right\} \quad (1.127)$$

и функции $a_j(t) = \gamma_j \sum_{i=0}^{L-1} j_i a_i(t)$, $j \in J(m, r)$, где величины γ_j определяются из условия $\max |a_j(t)| = \nu$, m и r — натуральные числа, $m \leq r \leq Lm$.

Например, множество функций $\mathfrak{A}_{1,1} = \{\pm a_i(\cdot), i = 0, 1, \dots, L-1\}$, введенных выше, совпадает с $\{a_j(\cdot), j \in J = J(1, 1)\}$, при этом $\gamma_j = 1$ для всех $j \in J = J(1, 1)$. Множество функций $\mathfrak{A}_{1,2} = \{\pm a_{j_1 j_2}^\pm(\cdot), j_1, j_2 = 0, 1, \dots, L-1, j_1 \neq j_2\}$ совпадает с $\{a_j(\cdot), j \in J = J(1, 2)\}$. Объединение $\mathfrak{A}_{2,2} = \mathfrak{A}_{1,1} \cup \mathfrak{A}_{1,2}$ дает $\{a_j(\cdot), j \in J = J(2, 2)\}$. Для общего случая введем обозначение $\mathfrak{A}_{m,r} = \{a_j(\cdot), j \in J = J(m, r)\}$.

Множество мультииндексов J необязательно определять в форме (1.127). Одним из вариантов может быть множество

$$J = J(m) = \left\{ (j_0 j_1 \dots j_{L-1}) : j_i \in \mathbb{Z} \cap [-m, m], \sum_{i=0}^{L-1} |j_i| \neq 0 \right\}, \quad (1.128)$$

в котором дополнительно отождествляются пропорциональные индексы, например, множеству J принадлежит только один из мультииндексов с условием $j_0 = j_1 = \dots = j_{L-1}$, т.е. либо $(1, 1, \dots, 1)$, либо $(-m, -m, \dots, -m)$, поскольку они задают одну и ту же функцию $a_j(\cdot)$. Фактически, здесь вместо множества $J(m)$ нужно рассматривать его факторизацию по отношению эквивалентности: $j^1 \sim j^2$, $j^1, j^2 \in J(m)$, если $j^1 = \lambda j^2$, где λ — некоторое ненулевое рациональное число. Отметим, что $J(m, r) \subseteq J(m)$, и введем обозначение $\mathfrak{A}_m = \{a_j(\cdot), j \in J = J(m)\}$. Тогда $\mathfrak{A}_{m,r} \subset \mathfrak{A}_m$.

Далее найдем спектральные характеристики функций $a_j(\cdot)$, $j \in J$, пользуясь свойством линейности (1.24):

$$A_j = \mathbb{S}[a_j(\cdot)] = \gamma_j [j_0 \alpha_0 \ j_1 \alpha_1 \ \dots \ j_{L-1} \alpha_{L-1}]^T = \gamma_j \sum_{i=0}^{L-1} j_i \alpha_i E_i.$$

Они образуют множество граничных точек многогранной области, аппроксимирующей множество \mathbb{U}_L :

$$\mathbb{U}_L^{(m)} = \text{Conv}\{A_j, j \in J\}, \quad \mathbb{U}_L^{(m)} \subseteq \mathbb{U}_L, \quad (1.129)$$

где множества $J = J(m, r)$ или $J = J(m)$ задаются формулами (1.127) или (1.128) соответственно.

Рассмотрим другой класс функций — функций, порожденных кусочно-постоянными функциями. Выберем натуральное число $n: 2^n \geq 2L$, и зададим функции

$$b_i(t) = v \chi_{[0, h)}(t - t_0 - ih), \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad h = \frac{T - t_0}{n},$$

$\chi_{[0, h)}(\cdot)$ — индикатор множества (1.14).

Далее определим множество мультииндексов

$$K = K(n) = \{(k_0 k_1 \dots k_{n-1}) : k_i \in \{\pm 1\}\}, \quad (1.130)$$

а также функции $\hat{b}_k(t) = \sum_{i=0}^{n-1} k_i b_i(t)$ и $b_k(t) = \beta_k \hat{b}_k(t)$, $k \in K$, где величины β_k определяются из условия $\max |\mathbb{S}^{-1}[\hat{B}_k]| = v$, в котором \hat{B}_k — усеченная спектральная характеристика функции $\hat{b}_k(\cdot)$. Мультииндексы k , для которых \hat{B}_k — нулевой вектор, т.е. когда функция $\hat{b}_k(\cdot)$ ортогональна первым L функциям базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$, не рассматриваются.

Введение вспомогательных функций $\hat{b}_k(\cdot)$ связано с тем, что если построить проекцию множества $L_2(\mathbb{T}) \cap \{u(\cdot) : |u(t)| \leq v\}$ на $L_2(\mathbb{T})_L$, то она, вообще говоря, не совпадет с $L_2(\mathbb{T})_L \cap \{u(\cdot) : |u(t)| \leq v\}$, поскольку при обратном спектральном преобразовании усеченной спектральной характеристики результат может не удовлетворять исходным ограничениям или не достигать заданного ограничения v . С ростом n величина $\|b_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}$ будет уменьшаться, а соответствующие им усеченные спектральные характеристики — приближаться к нулю $\bar{0}$ при том, что $\max |b_i(t)| = v$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Для спектральных характеристик функций $b_k(\cdot)$ справедливо следующее соотношение:

$$B_k = \mathbb{S}[b_k(\cdot)] = \beta_k \sum_{i=0}^{n-1} k_i \mathbb{S}[b_i(\cdot)], \quad k \in K.$$

Они образуют множество граничных точек многогранной области, аппроксимирующей множество \mathbb{U}_L :

$$\mathbb{U}_L^{(n)} = \text{Conv}\{B_k, k \in K\}, \quad \mathbb{U}_L^{(n)} \subseteq \mathbb{U}_L, \quad (1.131)$$

где множество $K = K(n)$ определяется формулой (1.130).

Функции $\mathfrak{B}_n = \{b_k(\cdot), k \in K = K(n)\}$ в общем случае уже не являются кусочно-постоянными и не ортогональны при непересекающихся носителях ($b_i(\cdot)$ таким свойством обладают, $i = 0, 1, \dots, n-1$), поэтому они не так удобны, как введенные ранее функции $a_j(\cdot)$, $j \in J$, вычисление их спектральных характеристик более трудоемко. Тем не менее, допустимо их использование для построения множества спектральных характеристик функций с ограничениями. Можно даже указать базисную систему функций Уолша (1.7), для которой оба подхода дают одно и то же приближение множества \mathbb{U}_L при соответствующем выборе параметров m, r, n : $m = r$ и $n = 2^s$, где $s \in \mathbb{N}$.

Для построения множества граничных точек многогранной области допустимо и объединение $\{A_j, j \in J\}$ и $\{B_k, k \in K\}$:

$$\mathbb{U}_L^{(m, n)} = \text{Conv}\{\{A_j, j \in J\} \cup \{B_k, k \in K\}\}, \quad \mathbb{U}_L^{(m, n)} \subseteq \mathbb{U}_L,$$

где $J = J(m, r)$ или $J = J(m)$, $K = K(n)$, а также добавление к ним граничных точек, полученных другим способом, в том числе и на основе моделирования случайных функций из $L_2(\mathbb{T})_L \cap \{u(\cdot) : \max |u(t)| = v\}$.

Выпуклую многогранную область можно построить как пересечение полупространств, заданных граничными плоскостями. Построение плоскостей граней по известному множеству вершин многогранника осуществляется методами вычислительной геометрии [119].

Уравнение гиперплоскости в \mathbb{R}^L , проходящей через вершины $U_0, U_1, \dots, U_{L-1} \in \mathbb{R}^L$, задается в виде $\det(X - U_0, U_1 - U_0, U_2 - U_0, \dots, U_{L-1} - U_0) = 0$, где $X = [x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{L-1}]^T \in \mathbb{R}^L$. Чтобы гиперплоскость была граничной, очевидно, остальные точки, являющиеся вершинами многогранника, и нуль должны быть по одну сторону этой гиперплоскости. Раскрывая определитель, уравнение гиперплоскости переписывается следующим образом:

$$n_0 x_0 + n_1 x_1 + \dots + n_{L-1} x_{L-1} - d = 0, \quad (1.132)$$

где $d > 0$, тогда $N = [n_0 \ n_1 \ \dots \ n_{L-1}]^T$ — внешняя нормаль к гиперплоскости [13]. Все точки X , для которых

$$(N, X) - d = n_0 x_0 + n_1 x_1 + \dots + n_{L-1} x_{L-1} - d < 0,$$

лежат в полупространстве, содержащем нуль.

Заметим, что если $\det(U_0, U_1 - U_0, U_2 - U_0, \dots, U_{L-1} - U_0) = 0$, то либо гиперплоскость проходит через нуль, либо U_0, U_1, \dots, U_{L-1} линейно зависимы и не могут задавать граничную гиперплоскость.

Таким образом, можно перейти от задания выпуклого многогранника множеством вершин к заданию его плоскостями граней \mathbb{P}^l , где индекс l принимает значения из конечного множества. Каждая из этих плоскостей определяется внешней нормалью N^l и числом d^l , а именно уравнением $(N^l, X) - d^l = 0$. Тогда проверка принадлежности точки $U \in \mathbb{R}^L$, которая соответствует некоторой функции $u(\cdot) = \mathbb{S}^{-1}[U]$, сводится к проверке условия $(N^l, U) - d^l \leq 0$ для каждого l .

Пример 1.24. Построить множества \mathbb{V}_L спектральных характеристик функций с ограничениями (при $\mathbb{T} = [0, 1]$ и $v = 1$) для базисных систем (1.5)–(1.9). Порядок усечения $L = 3$.

□ Применим описанную выше методику построения множеств спектральных характеристик функций с ограничениями. На рис. 1.3 показаны проекции граничных точек искомого множества при заданном порядке усечения L на координатные плоскости при использовании многогранной области $\mathbb{V}_3^{(8)}$, $J = J(8, 8)$ (см. формулы (1.127) и (1.129)): 258 граничных точек. Первая строка на рис. 1.3 соответствует полиномам Лежандра (1.5) (96 граней), вторая строка — косинусоидам (1.6) (116 граней), третья строка — функциям Уолша (1.7) (8 граней), четвертая строка — функциям Хаара (1.8) (6 граней), пятая строка — тригонометрическим функциям (1.9) (116 граней). Для первого столбца на рис. 1.3 элементы спектральных характеристик с номерами 0 и 1 по оси абсцисс и оси ординат, что соответствует порядку усечения $L = 2$, для второго столбца — 0 и 2, для третьего столбца — 1 и 2:

$$(0, 1), \quad (0, 2), \quad (1, 2).$$

Знаком \blacklozenge — обозначены граничные точки, принадлежащие соответствующей координатной плоскости, а знаком \diamond — проекции остальных граничных точек.

Различие в числе граней при одном и том же множестве граничных точек говорит лишь о том, что не все граничные точки являются вершинами соответствующих многогранников.

Ограничимся уравнениями плоскостей граней в случае функций Уолша и Хаара, поскольку их число невелико. Для функций Уолша имеем

$$\begin{array}{ll} x_0 + x_1 + x_2 - 1 = 0, & -x_0 + x_1 + x_2 - 1 = 0, \\ x_0 + x_1 - x_2 - 1 = 0, & -x_0 + x_1 - x_2 - 1 = 0, \\ x_0 - x_1 + x_2 - 1 = 0, & -x_0 - x_1 + x_2 - 1 = 0, \\ x_0 - x_1 - x_2 - 1 = 0, & -x_0 - x_1 - x_2 - 1 = 0, \end{array}$$

а для функций Хаара плоскости граней задаются следующим образом:

$$\begin{array}{ll} x_0 + x_1 + \sqrt{2}x_2 - 1 = 0, & -x_0 - x_1 + \sqrt{2}x_2 - 1 = 0, \\ x_0 + x_1 - \sqrt{2}x_2 - 1 = 0, & -x_0 - x_1 - \sqrt{2}x_2 - 1 = 0, \\ x_0 - x_1 - 1 = 0, & -x_0 + x_1 - 1 = 0. \end{array}$$

Многогранная область $\mathbb{V}_3^{(8)}$, $J = J(8)$ (см. формулы (1.128) и (1.129)), характеризуется существенно большим числом граничных точек: их 4912, при этом усложняется нахождение граней, а многогранная область $\mathbb{V}_3^{(8)}$, $K = K(8)$ (см. формулу (1.130)), не обеспечивает такого «равномерного распределения» вершин, при этом число граничных точек невелико: $2^8 = 256$. На рис. 1.4 изображены иллюстрации к последнему случаю, их расположение соответствует рис. 1.3. ■

З а м е ч а н и я 1.17.

1. Изменение базисной системы (см. разд. 1.3) для построения множества спектральных характеристик функций с ограничениями для одной базисной системы по такому множеству для другой базисной системы вряд ли оправдано, поскольку координаты граничных точек преобразуются согласно формулам (1.59), т.е. применяется невырожденное линейное преобразование — композиция поворотов, растяжений или сжатий, а также отражений [30]. Оно сохраняет количество вершин и плоскостей граней для многогранной области. Однако приведенный пример 1.24 показывает, насколько отличаются множества спектральных характеристик функций с ограничениями для разных базисных систем.

2. С ростом порядка усечения L спектральных характеристик и ростом значений m или n при построении выпуклых многогранных областей $\mathbb{U}_L^{(m)}$ или $\mathbb{U}_L^{(n)}$ соответственно (см. формулы (1.129) и (1.131)) существенно возрастает объем вычислений. Даже для первого приближения множества \mathbb{U}_L множеством $\mathbb{U}_L^{(m)}$ при $m = 1$ требуется построить 2^L плоскостей граней, для последующих приближений число граней только возрастает, что хорошо видно из результатов примера 1.24. Поэтому предложенная методика применима для небольших значений L , m и n . С ростом L , видимо, необходимо использовать другие подходы для аппроксимации множества спектральных характеристик функций с ограничениями.

3. В работе [144] описано применение методики построения множества спектральных ха-

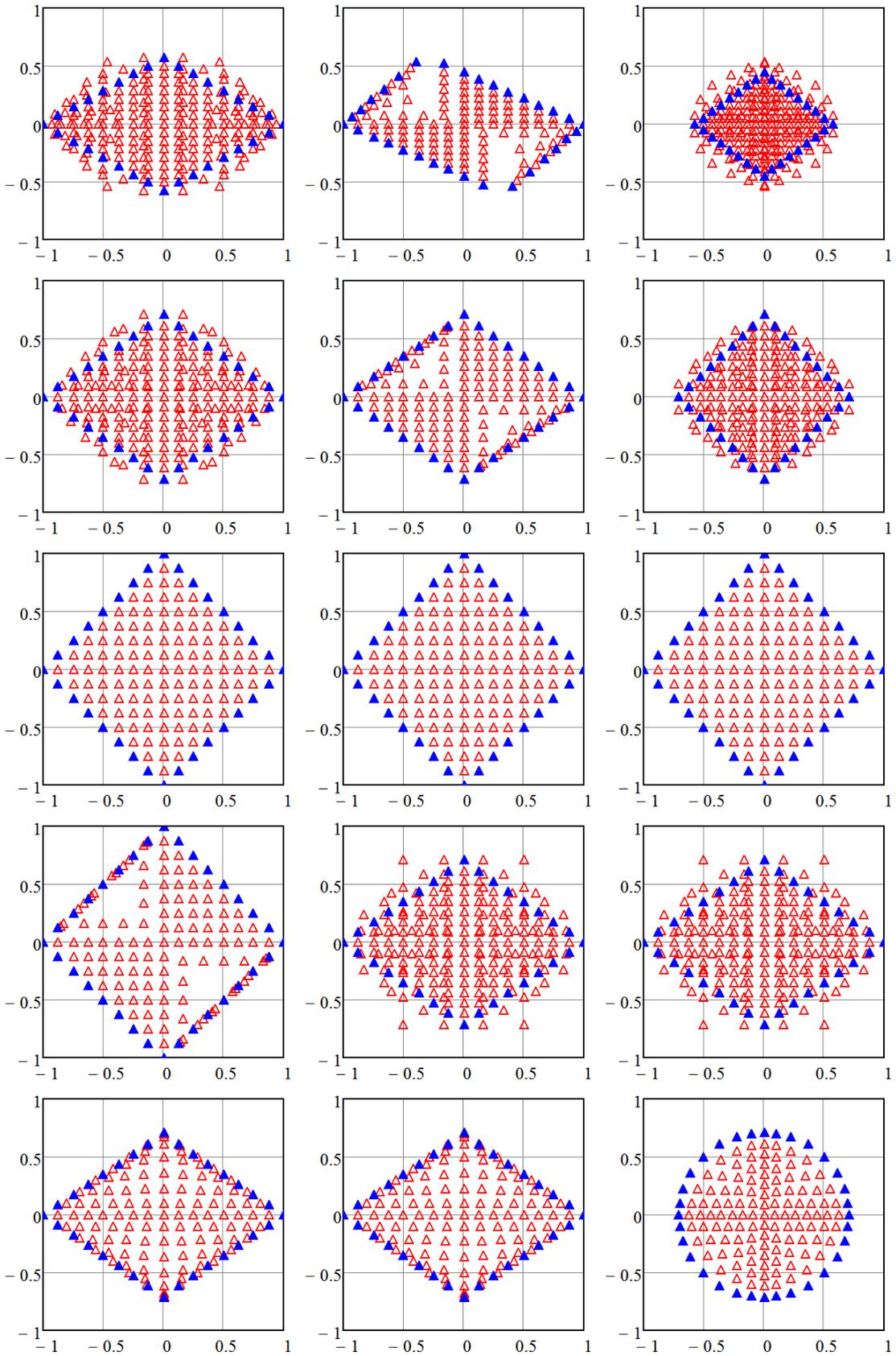


Рис. 1.3. Проекция множеств $\mathbb{V}_3^{(8)}$, $J = J(8, 8)$, на координатные плоскости

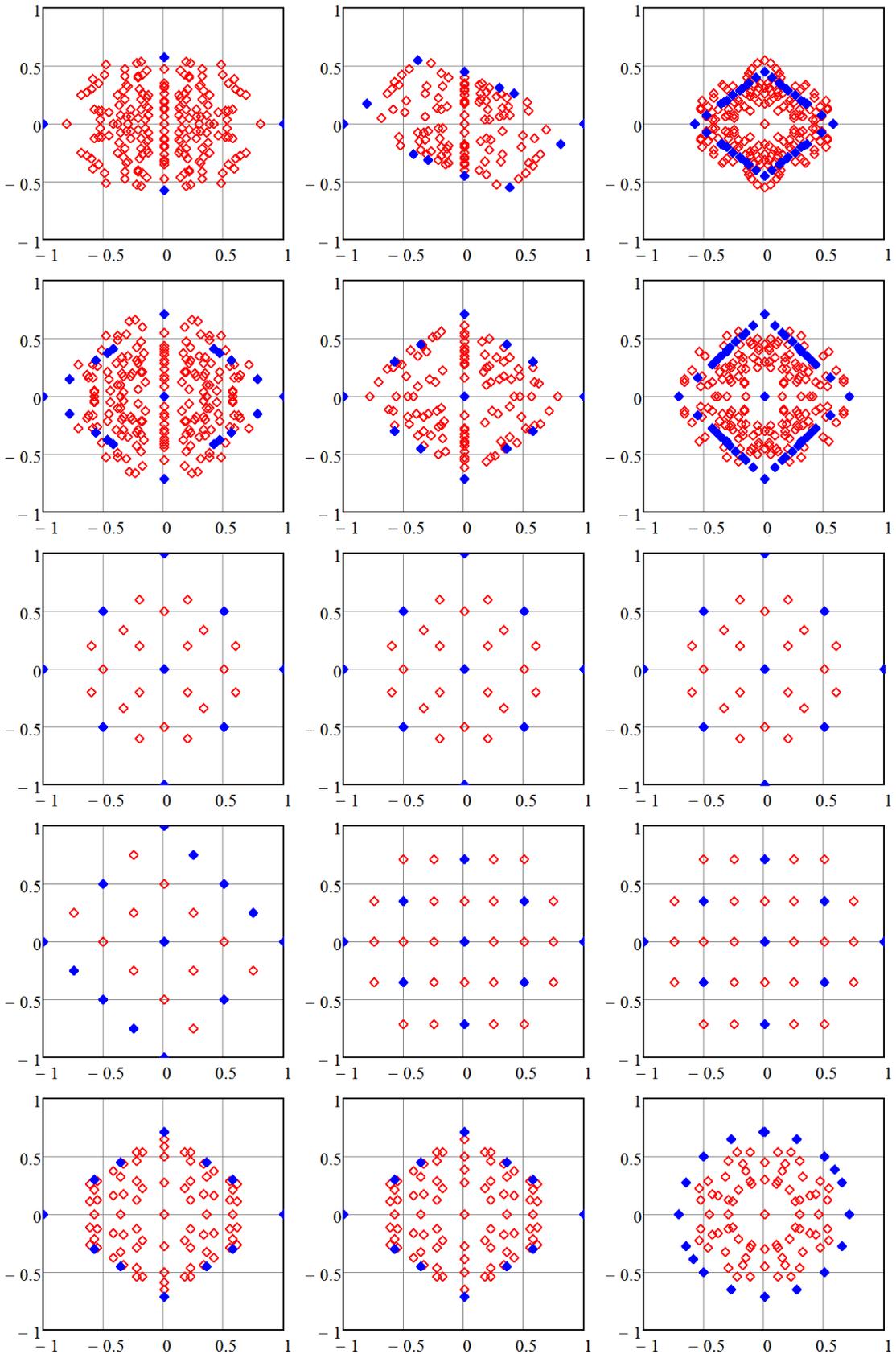


Рис. 1.4. Проекция множеств $V_3^{(8)}$, $K = K(8)$, на координатные плоскости

рактических функций с ограничениями для учета ограничений на вектор-функции в предположении, что их значения принадлежат множеству, ограниченному q -мерным параллелепипедом или q -мерным эллипсоидом, где q — размерность вектор-функции.

Для значений $L \geq 5$ существует только три правильных многогранника в пространстве \mathbb{R}^L : L -мерный симплекс, L -мерный куб (гиперкуб) и L -мерный октаэдр (гипероктаэдр, кокуб). Интересно, что последним двум из них соответствуют конечные ортонормированные системы функций, т.е. функции $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{L-1}$, относительно которых множество спектральных характеристик функций с ограничениями имеет границу в форме правильного многогранника. Первый из указанных правильных многогранников — L -мерный симплекс — не может быть границей множества спектральных характеристик функций с ограничениями, так как он не является симметричным относительно нуля в \mathbb{R}^L (см. свойства множества спектральных характеристик функций с ограничениями).

Положим $\mathbb{T} = [0, 1]$ и $v = 1$ и рассмотрим блочно-импульсные функции (1.15). Они принимают только два значения: 0 и $1/\sqrt{h}$, где $h = 1/L$. Следовательно,

$$\max |\hat{\Pi}(i, t)| = \frac{1}{\sqrt{h}}, \quad i = 0, 1, \dots, L-1; \quad \max \left| \sum_{i=0}^{L-1} \alpha_i \hat{\Pi}(i, t) \right| = \frac{1}{\sqrt{h}} \quad \forall \alpha_i \in \{0, \pm 1\}: \sum_{i=0}^{L-1} |\alpha_i| \neq 0,$$

и при их применении упрощается проверка ограничений для спектральных характеристик, а именно коэффициенты разложения (1.11) функции $u(\cdot)$ с учетом их конечного числа достаточно проверять независимо друг от друга. Это означает, что граница соответствующего множества спектральных характеристик функций с ограничениями — L -мерный куб со стороной $2\sqrt{h}$. Проверка допустимости функции сводится к вычислению кубической нормы вектора коэффициентов разложения функции $u(\cdot)$ по блочно-импульсным функциям:

$$v(\cdot) \in L_2([0, 1])_L \cap \{v(\cdot): |v(t)| \leq 1\} \iff V = \mathbb{S}[v(\cdot)] \in \mathbb{V}_L^\square = \{V: \|V\|_\square \leq \sqrt{h}\}, \quad h = \frac{1}{L},$$

где $\|V\|_\square = \max\{|V_0|, |V_1|, \dots, |V_{L-1}|\}$ — кубическая норма вектора в \mathbb{R}^L .

Напомним (см. п. 4 замечаний 1.1), что функции Уолша (1.7) и функции Хаара (1.8) выражаются как линейные комбинации блочно-импульсных функций, поэтому представленный результат нетрудно перенести на спектральные характеристики функций относительно этих базисных систем при условии $L = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда, учитывая п. 3 замечаний 1.8 и применяя соотношения (1.59), для функций Уолша и Хаара соответственно получаем

$$v(\cdot) \in L_2([0, 1])_L \cap \{v(\cdot): |v(t)| \leq 1\} \iff V = \mathbb{S}[v(\cdot)] \in \mathbb{V}_L = \{V: \|\Delta^{\text{T}} V\|_{\hat{\Pi}} \leq \sqrt{h}\}$$

$$v(\cdot) \in L_2([0, 1])_L \cap \{v(\cdot): |v(t)| \leq 1\} \iff V = \mathbb{S}[v(\cdot)] \in \mathbb{V}_L = \{V: \|\Delta^{\text{T}} V\|_{\hat{X}\hat{\Pi}} \leq \sqrt{h}\}.$$

Далее перейдем к нормированным функциям Радемахера (1.20), определенным таким образом, что $\max |\hat{R}(i, t)| = 1$, $i = 0, 1, \dots, L-1$, т.е. $a_i(t) = \hat{R}(i, t)$ и $A_i = \mathbb{S}[a_i(\cdot)] = E_i$.

Для функций $\hat{R}(i, \cdot)$ найдется интервал $\Theta \subset \mathbb{T}$, на котором они принимают заданные значения ω_i из множества $\{\pm 1\}$, например, $\hat{R}(i, t^*) = 1$, $\hat{R}(i, t^*) = -1$ или $\hat{R}(i, t^*) = (-1)^i \forall t^* \in \Theta$. Исходя из этого, имеем

$$\max \left| \sum_{i=0}^{L-1} \alpha_i \hat{R}(i, t) \right| = 1 \quad \forall \alpha_i \in [-1, 1]: \sum_{i=0}^{L-1} |\alpha_i| = 1,$$

так как найдется такое $t^* \in \Theta$, что $R(i, t^*) = \text{sign } \alpha_i$.

Выберем L точек $X_i = [x_{i,0} \ x_{i,1} \ \dots \ x_{i,L-1}]^T$ из множества $\{\pm E_i, i = 0, 1, \dots, L-1\}$: $X_i = \omega_i E_i$, где $\omega_i \in \{\pm 1\}$. Тогда, подставляя значения $x_{ik} = \omega_i \delta_{ik}$ в уравнение (1.132), где δ_{ik} — символ Кронекера (1.4), и полагая $d = 1$, получаем систему линейных уравнений относительно координат n_k вектора внешней нормали N к гиперплоскости, проходящей через точки $X_i, i = 0, 1, \dots, L-1$. Ее решение: $n_k = \omega_k$, т.е. $N = [\omega_0 \ \omega_1 \ \dots \ \omega_{L-1}]^T$.

Множество всех таких комбинаций X_i порождает всевозможные векторы N^l для $d^l = 1$, $l = 0, 1, \dots, 2^L - 1$, с координатами из множества $\{\pm 1\}$. Таким образом, для нормированных функций Радемахера граница множества спектральных характеристик функций с ограничениями — L -мерный октаэдр, который совпадает с первым приближением $\mathbb{V}_L^{(m)}$ при $m = 1$, а именно $\mathbb{V}_L^{(1)} = \text{Conv}\{\pm E_i, i = 0, 1, \dots, L-1\}$, $\mathbb{V}_L^{(1)} = \mathbb{V}_L$. Его можно задать плоскостями граней \mathbb{P}^l с векторами внешних нормалей N^l , определяемыми, например, двоичным представлением $(l_L \dots l_1)_2$ числа l , и значениями $d^l = 1$. Тогда координата n_k^l вектора N^l принимает значение -1 или 1 в зависимости от коэффициента $l_k \in \{0, 1\}$: $n_k^l = 2l_k - 1$.

Далее рассмотрим условие принадлежности спектральной характеристики U множеству \mathbb{V}_L : $(N^l, U) - 1 \leq 0$, $l = 0, 1, \dots, 2^L - 1$, где координаты n_k^l внешних нормалей N^l принимают значения из множества $\{\pm 1\}$. Но это условие эквивалентно неравенству $\|U\|_\diamond = |U_0| + |U_1| + \dots + |U_{L-1}| \leq 1$, так как $\max_l (N^l, U) = \|U\|_\diamond$, где $\|U\|_\diamond$ — октаэдрическая норма вектора в \mathbb{R}^L .

Таким образом, для нормированных функций Радемахера, заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, 1]$, множество спектральных характеристик функций с ограничениями при $v = 1$ задается матрицами-столбцами с октаэдрической нормой, не превосходящей единицы:

$$v(\cdot) \in L_2([0, 1])_L \cap \{v(\cdot) : |v(t)| \leq 1\} \iff V = \mathbb{S}[v(\cdot)] \in \mathbb{V}_L^\diamond = \{V : \|V\|_\diamond \leq 1\}.$$

Рис. 1.5 содержит проекции граничных точек множеств с порядком усечения $L = 3$ на координатные плоскости при использовании многогранной области $\mathbb{V}_3^{(6)}$, $J = J(6, 6)$ (см. формулы (1.127) и (1.129)): 146 граничных точек. Первая строка на этом рисунке соответствует блочно-импульсным функциям (1.15) (6 граней), а вторая строка — нормированным функциям Радемахера (1.20) (8 граней). Порядок проекций и обозначения соответствуют рисункам из примера 1.24, но в данной ситуации все проекции одинаковы, т.е. не зависят от выбора координатной плоскости.

Выводы по главе 1

1. Приведены определения спектральных характеристик функций одной и двух переменных и соответствующих им линейных функционалов, приведены их основные свойства.
2. Приведены определения спектральных характеристик линейных операторов, рассмотрены их основные свойства на примере операторов умножения, интегрирования и дифференцирования. Приведено определение спектральной характеристики билинейного оператора, ставящего в соответствие двум функциям их произведение.

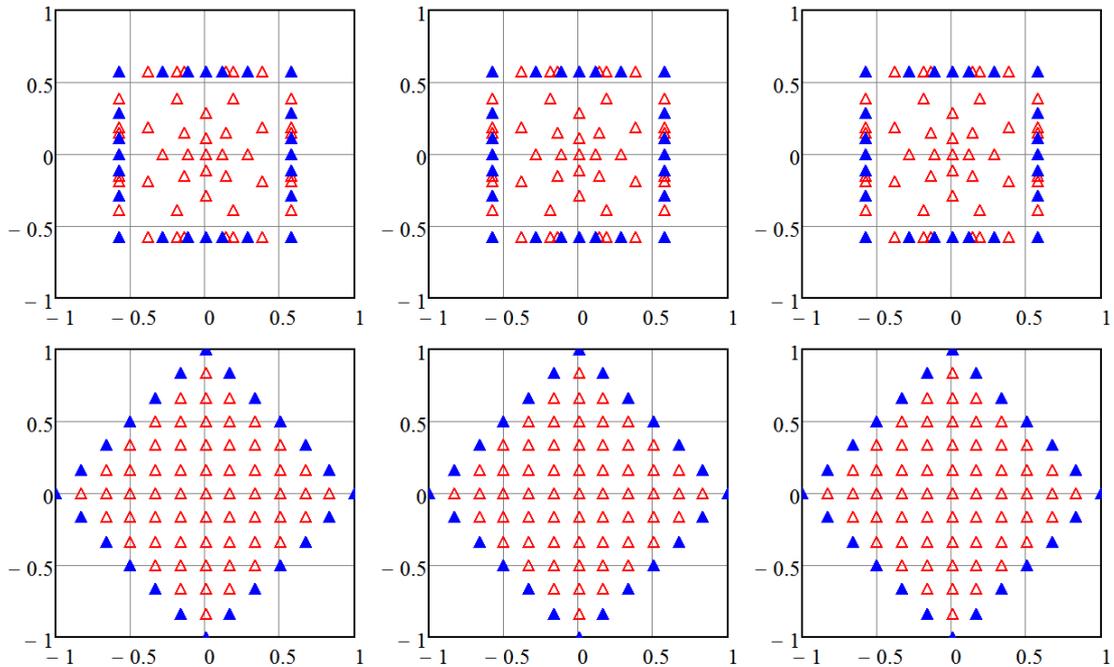


Рис. 1.5. Проекция множеств $\mathbb{V}_3^{(6)}$, $J = J(6, 6)$, на координатные плоскости

3. Приведены алгоритмы расчета спектральных характеристик типовых функций и линейных функционалов, алгоритмы расчета спектральных характеристик типовых линейных операторов относительно перечисленных выше базисных систем, т.е. необходимый справочный материал для практической реализации соответствующих программ.
4. Доказана теорема о представлении спектральной характеристики сложной функции специального вида. Доказана теорема о представлении спектральной характеристики оператора интегрирования n -го порядка.
5. Рассмотрена связь матричных следов линейных операторов и интегральных следов функций, которые эти операторы задают, в том числе и с точки зрения применения спектральной формы математического описания. Доказана теорема о следе спектральной характеристики композиции двух операторов умножения и оператора интегрирования.
6. Разработан метод аппроксимации множества спектральных характеристик функций одной переменной с ограничениями (типовые ограничения на управляющие воздействия или входные/выходные сигналы).

Основные результаты опубликованы в работах [60, 133, 135–141, 144, 154, 163, 165, 176, 180, 181, 185, 348, 349].

ГЛАВА 2

СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

2.1. Описание случайных процессов в рамках корреляционной теории

Пусть $(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ — полное вероятностное пространство [37, 124], где Ω — пространство элементарных событий, \mathfrak{G} — σ -алгебра его подмножеств, P — вероятностная мера (вероятность). Под случайным процессом будем понимать функцию $F(\cdot): \mathbb{T} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ двух переменных t и ω , где $\mathbb{T} = [t_0, T]$, \mathfrak{G} -измеримую при каждом $t \in \mathbb{T}$, записывая ее для краткости как функцию одной переменной t .

Будем рассматривать случайные процессы $F(\cdot): \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, для которых выполняется условие

$$E \int_{\mathbb{T}} F^2(t) dt < \infty,$$

где E означает математическое ожидание.

Такие случайные процессы образуют нормированное пространство $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$. Фактически, $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ — это гильбертово пространство $L_2(\mathbb{T} \times \Omega)$ квадратично интегрируемых функций двух переменных $F(\cdot)$ с нормой

$$\|F(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{T})} = \left\{ \int_{\mathbb{T} \times \Omega} F^2(t, \omega) dt P(d\omega) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

которое отличается от рассмотренного в разд. 1.2 пространства $L_2(\mathbb{T}^2)$ тем, что здесь интеграл по произведению меры Лебега на прямой и вероятностной меры, а не по мере Лебега на плоскости.

Для случайных процессов $F(\cdot)$ справедливы условия

$$\int_{\mathbb{T}} F^2(t) dt < \infty \quad \text{и} \quad EF^2(t) < \infty,$$

где интеграл понимается в среднеквадратическом смысле, первое из условий выполняется с вероятностью 1 (P-п.н., почти наверное), а второе — при почти всех $t \in \mathbb{T}$.

Обозначим математическое ожидание, корреляционную функцию и моментную функцию второго порядка случайного процесса $F(\cdot)$ через $m_F(\cdot)$, $R_F(\cdot)$ и $B_F(\cdot)$ соответственно (моменты первого и второго порядков):

$$\begin{aligned} m_F(t) &= EF(t), \quad R_F(t, \tau) = \text{cov}(F(t), F(\tau)) = E\check{F}(t)\check{F}(\tau), \\ B_F(t, \tau) &= EF(t)F(\tau) = R_F(t, \tau) + m_F(t)m_F(\tau), \end{aligned}$$

где $\check{F}(t) = F(t) - m_F(t)$ — центрированный случайный процесс: $E\check{F}(t) = 0$. Также введем обозначение $D_F(\cdot)$ для дисперсии случайного процесса $F(\cdot)$:

$$D_F(t) = E\check{F}^2(t) = R_F(t, t), \quad EF^2(t) = B_F(t, t) = D_F(t) + m_F^2(t), \quad D_F(t) \leq B_F(t, t).$$

Чтобы случайный процесс $F(\cdot)$ принадлежал $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$, достаточно непрерывности функции $B_F(\cdot)$ в точке (t, t) при почти всех $t \in \mathbb{T}$ [37]. Тогда

$$\int_{\mathbb{T}} D_F(t) dt \leq \int_{\mathbb{T}} B_F(t, t) dt < \infty.$$

Из неравенств

$$m_F^2(t) \leq EF^2(t), \quad R_F^2(t, \tau) \leq D(t)D(\tau) \quad \forall (t, \tau) \in \mathbb{T}^2,$$

$$\int_{\mathbb{T}} m_F^2(t) dt \leq E \int_{\mathbb{T}} F^2(t) dt < \infty,$$

$$\int_{\mathbb{T}^2} R_F^2(t, \tau) dt d\tau \leq \int_{\mathbb{T}} D_F(t) dt \int_{\mathbb{T}} D_F(\tau) d\tau = \left[\int_{\mathbb{T}} D_F(t) dt \right]^2 < \infty$$

следует, что $m_F(\cdot)$, $R_F(\cdot)$ и $D_F(\cdot)$ — квадратично интегрируемые функции: $m_F(\cdot), D_F(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ и $R_F(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$. Из непрерывности функции $B_F^\circ(t) = B_F(t, t)$ следует, что $B_F(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$.

Приведем примеры случайных процессов [37, 102, 239], $t \in [0, T]$.

1. Стандартный винеровский процесс (броуновское движение) $W(\cdot)$:

$$m_W(t) = EW(t) \equiv 0, \quad R_W(t, \tau) = \text{cov}(W(t), W(\tau)) = \min\{t, \tau\}.$$

2. Броуновский мост $Y(\cdot)$:

$$m_Y(t) = EY(t) \equiv 0, \quad R_Y(t, \tau) = \text{cov}(Y(t), Y(\tau)) = \min\{t, \tau\} - \frac{t\tau}{T}.$$

3. Процесс Орнштейна–Уленбека $X(\cdot)$:

$$m_X(t) = EX(t) \equiv 0, \quad R_X(t, \tau) = \text{cov}(X(t), X(\tau)) = \frac{\sigma^2}{2\mu} (e^{\mu(t+\tau)} - e^{\mu|t-\tau|}),$$

где $\mu \neq 0$ и $\sigma > 0$ — числовые параметры.

4. Пуассоновский процесс $P(\cdot)$:

$$m_P(t) = EP(t) = \lambda t, \quad R_P(t, \tau) = \text{cov}(P(t), P(\tau)) = \lambda \min\{t, \tau\},$$

и центрированный пуассоновский процесс $\Pi(\cdot)$, т.е. $\Pi(\cdot) = P(\cdot) - \lambda t$:

$$m_\Pi(t) = E\Pi(t) \equiv 0, \quad R_\Pi(t, \tau) = \text{cov}(\Pi(t), \Pi(\tau)) = \lambda \min\{t, \tau\},$$

где $\lambda > 0$ — числовой параметр (интенсивность).

Случайные процессы $W(\cdot)$, $Y(\cdot)$ и $X(\cdot)$ являются гауссовскими [37]. Дополнительно отметим, что случайный процесс $W(\cdot)$ имеет независимые приращения и для него выполняются условия

$$W(0) = 0, \quad W(t) - W(\tau) \sim \mathcal{N}_{\text{law}}(0, |t - \tau|), \quad t, \tau \geq 0,$$

т.е. приращение $W(t) - W(\tau)$ имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $|t - \tau|$. Далее случайный процесс $W(\cdot)$ будем называть винеровским процессом, опуская слово стандартный. Пуассоновский процесс $P(\cdot)$ интенсивности λ — это также случайный процесс с независимыми приращениями, для которого

$$P(0) = 0, \quad P(t) - P(\tau) \sim \mathcal{P}_{\text{law}}(\lambda(t - \tau)), \quad t > \tau \geq 0,$$

т.е. приращение $P(t) - P(\tau)$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda(t - \tau)$. Именно свойство независимости приращений винеровского и пуассоновского процессов обеспечивает такой вид их корреляционных функций [37].

Определим спектральные характеристики первых двух моментов, используя введенные ранее обозначения: $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базис пространства $L_2(\mathbb{T})$ (см. разд. 1.1), $\{q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot)\}_{i,j=0}^{\infty}$ — базис пространства $L_2(\mathbb{T}^2)$ (см. разд. 1.2).

Согласно [220–222] первой нестационарной спектральной плотностью ${}^1S^F$ случайного процесса $F(\cdot)$ называется спектральная характеристика его математического ожидания $m_F(\cdot)$, т.е. ${}^1S^F$ — бесконечная матрица-столбец ${}^1S^F = ({}^1S_i^F)$, элементы которой представляют собой коэффициенты разложения (1.11) функции $m_F(\cdot)$ в ряд по функциям базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$:

$$\mathbb{S}[m_F(\cdot)] = {}^1S^F = [{}^1S_0^F \ {}^1S_1^F \ {}^1S_2^F \ \dots]^T.$$

Второй нестационарной спектральной плотностью S^F случайного процесса $F(\cdot)$ называется двумерная спектральная характеристика его корреляционной функции $R_F(\cdot)$, т.е. S^F — бесконечная матрица $S^F = (S_{ij}^F)$, элементы которой представляют собой коэффициенты разложения (1.42) функции $R_F(\cdot)$ в ряд по функциям базисной системы $\{q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot)\}_{i,j=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T}^2)$:

$$\mathbb{S}[R_F(\cdot)] = S^F = \begin{bmatrix} S_{00}^F & S_{01}^F & S_{02}^F & \dots \\ S_{10}^F & S_{11}^F & S_{12}^F & \dots \\ S_{20}^F & S_{21}^F & S_{22}^F & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом определяется вторая начальная нестационарная спектральная плотность — двумерная спектральная характеристика $B^F = (B_{ij}^F)$ моментной функции второго порядка $B_F(\cdot)$:

$$\mathbb{S}[B_F(\cdot)] = B^F = \begin{bmatrix} B_{00}^F & B_{01}^F & B_{02}^F & \dots \\ B_{10}^F & B_{11}^F & B_{12}^F & \dots \\ B_{20}^F & B_{21}^F & B_{22}^F & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где числа B_{ij}^F задаются формулой (1.42) и являются коэффициентами разложения функции $B_F(\cdot)$ в ряд по функциям базисной системы $\{q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot)\}_{i,j=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T}^2)$.

По формулам обращения (1.21) и (1.43) получаем

$$m_F(\cdot) = \mathbb{S}^{-1}[{}^1S^F] = \sum_{i=0}^{\infty} {}^1S_i^F q(i, \cdot),$$

$$R_F(\cdot) = \mathbb{S}^{-1}[S^F] = \sum_{i,j=0}^{\infty} S_{ij}^F q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot), \quad B_F(\cdot) = \mathbb{S}^{-1}[B^F] = \sum_{i,j=0}^{\infty} B_{ij}^F q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot).$$

Нестационарные спектральные плотности — это спектральные характеристики функций одной и двух переменных, поэтому для них выполняются свойства, перечисленные в разд. 1.1 и 1.2. В частности, сформулируем *свойство симметричности*: вторые нестационарные спектральные плотности являются симметрическими матрицами, т.е. $S^F = [S^F]^T$ и $B^F = [B^F]^T$. Это

следствие симметричности корреляционной функции и моментной функции второго порядка: $R_F(t, \tau) = R_F(\tau, t)$ и $B_F(t, \tau) = B_F(\tau, t) \forall t, \tau \in \mathbb{T}$.

Также укажем, как связаны вторые нестационарные спектральные плотности [222]:

$$B^F = S^F + {}^1S^F [{}^1S^F]^\top, \quad (2.1)$$

что следует из свойства линейности (1.47) и теоремы 1.4. Для центрированных случайных процессов $B^F = S^F$.

В рамках корреляционной теории достаточно описывать случайный процесс парой $(m_F(\cdot), R_F(\cdot))$ либо парой $(m_F(\cdot), B_F(\cdot))$, а в спектральной форме математического описания — одной из пар $({}^1S^F, S^F)$, $({}^1S^F, B^F)$.

З а м е ч а н и я 2.1.

1. В этой работе функции времени и случайные процессы задаются на стационарном отрезке $\mathbb{T} = [t_0, T]$, что позволяет использовать термин спектральная характеристика вместо нестационарная спектральная характеристика (см. п. 1 замечаний 1.2). Однако для ${}^1S^F$, S^F и B^F используются термины первая нестационарная спектральная плотность и вторая (начальная) нестационарная спектральная плотность, чтобы не путать их со спектральной плотностью стационарного случайного процесса — преобразованием Фурье корреляционной функции $R(\eta) = R(t - \tau)$ как функции одной переменной $\eta = t - \tau$ [37].

2. Наряду с первой и второй нестационарными спектральными плотностями в работах [220–222] определена нестационарная взаимная спектральная плотность S^{XF} — двумерная спектральная характеристика взаимной корреляционной функции

$$R_{XF}(t, \tau) = \text{cov}(X(t), F(\tau)) = E\check{X}(t)\check{F}(\tau)$$

случайных процессов $X(\cdot), F(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$, т.е. S^{XF} — бесконечная матрица $S^{XF} = (S_{ij}^{XF})$, элементы которой представляют собой коэффициенты разложения (1.42) функции $R_{XF}(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ в ряд по функциям базисной системы $\{q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot)\}_{i,j=0}^\infty$ пространства $L_2(\mathbb{T}^2)$:

$$\mathbb{S}[R_{XF}(\cdot)] = S^{XF} = \begin{bmatrix} S_{00}^{XF} & S_{01}^{XF} & S_{02}^{XF} & \cdots \\ S_{10}^{XF} & S_{11}^{XF} & S_{12}^{XF} & \cdots \\ S_{20}^{XF} & S_{21}^{XF} & S_{22}^{XF} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Пример 2.1. Найти первую нестационарную спектральную плотность случайного процесса $F(\cdot)$ с математическим ожиданием $m_F(t) = \alpha e^{\mu t}$ относительно косинусоид (1.6), ортонормированных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$, где α и μ — числовые параметры.

□ Первая нестационарная спектральная плотность ${}^1S^F$ — это спектральная характеристика математического ожидания $m_F(\cdot)$, поэтому применим формулу (1.11) для определения элементов спектральной характеристики ${}^1S^F = \mathbb{S}[m_F(\cdot)]$:

$${}^1S_i^F = (q(i, \cdot), m_F(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \alpha e^{\mu t} dt = \alpha \int_{\mathbb{T}} q(i, t) e^{\mu t} dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

При $i = 0$ получаем

$${}^1S_0^F = \alpha \sqrt{\frac{1}{T}} \int_0^T e^{\mu t} dt = \alpha \sqrt{T} \frac{e^{\mu T} - 1}{\mu T},$$

а при $i > 0$ применим табличную формулу [42]:

$${}^1S_i^F = \alpha \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T \cos \frac{i\pi t}{T} e^{\mu t} dt = \alpha \mu T \sqrt{2T} \frac{(-1)^i e^{\mu T} - 1}{\mu^2 T^2 + i^2 \pi^2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} {}^1S^F &= \left[\alpha \sqrt{T} \frac{e^{\mu T} - 1}{\mu T} \quad \alpha \mu T \sqrt{2T} \frac{-e^{\mu T} - 1}{\mu^2 T^2 + \pi^2} \quad \alpha \mu T \sqrt{2T} \frac{e^{\mu T} - 1}{\mu^2 T^2 + 4\pi^2} \quad \dots \right]^T = \\ &= \alpha \mu T \sqrt{T} \cdot \left[\frac{e^{\mu T} - 1}{\mu^2 T^2} \quad -\sqrt{2} \frac{e^{\mu T} + 1}{\mu^2 T^2 + \pi^2} \quad \sqrt{2} \frac{e^{\mu T} - 1}{\mu^2 T^2 + 4\pi^2} \quad \dots \right]^T. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 2.2. Выразить вторую нестационарную спектральную плотность винеровского процесса $W(\cdot)$ через спектральные характеристики операторов умножения и интегрирования относительно произвольной базисной системы, ортонормированной на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Винеровский процесс $W(\cdot)$ — случайный процесс с математическим ожиданием $m_W(t) \equiv 0$ и корреляционной функцией $R_W(t, \tau) = \min\{t, \tau\}$ (см. примеры случайных процессов).

Пусть $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ — базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$. Первая нестационарная спектральная плотность ${}^1S^W$ винеровского процесса $W(\cdot)$, или спектральная характеристика математического ожидания $m_W(\cdot)$, представляет собой бесконечную нулевую матрицу-столбец, поскольку $m_W(t) \equiv 0$:

$${}^1S^W = [0 \ 0 \ 0 \ \dots]^T.$$

Так как

$$\tau 1(t - \tau) + t 1(\tau - t) = \begin{cases} \tau, & t > \tau, \\ 0, & t = \tau, \\ t, & t < \tau, \end{cases}$$

получаем, что при почти всех $(t, \tau) \in \mathbb{T}^2$ справедливо равенство $R_W(t, \tau) = h(t, \tau) + h(\tau, t)$, где $h(t, \tau) = \tau 1(t - \tau)$.

В примере 1.11 показано, что двумерная спектральная характеристика H функции $h(\cdot)$, определяющей линейный оператор \mathcal{H} — оператор Гильберта–Шмидта (1.71) с ядром $h(\cdot)$, равна произведению спектральных характеристик P^{-1} и A оператора интегрирования и оператора умножения на функцию $a_1(t) = t$ соответственно (см. разд. 1.5 и 1.6): $\mathbb{S}[h(\cdot)] = \mathbb{S}[\mathcal{H}] = H = P^{-1}A$.

Функция $h^*(t, \tau) = h(\tau, t)$ задает сопряженный оператор \mathcal{H}^* и по свойству (1.65) спектрального преобразования сопряженного оператора $\mathbb{S}[h^*(\cdot)] = \mathbb{S}[\mathcal{H}^*] = H^T = [P^{-1}A]^T = A[P^{-1}]^T$.

Далее остается применить свойство линейности (1.47):

$$S^W = \mathbb{S}[h(\cdot)] + \mathbb{S}[h^*(\cdot)] = H + H^T = P^{-1}A + A[P^{-1}]^T.$$

Это соотношение выражает вторую нестационарную спектральную плотность S^W винеровского процесса $W(\cdot)$, или двумерную спектральную характеристику корреляционной функции $R_W(\cdot)$, через спектральные характеристики операторов умножения и интегрирования. Оно также иллюстрирует свойство симметричности второй нестационарной спектральной плотности, так как, очевидно, $S^W = [S^W]^T$.

Далее найдем явные формулы для элементов второй нестационарной спектральной плотности S^W , выбирая в качестве базисной системы полиномы Лежандра (1.5), заданные на отрезке $T = [0, T]$.

Матрицы P^{-1} и A являются трехдиагональными (см. примеры спектральных характеристик A в разд. 1.5 и спектральных характеристик P^{-1} оператора интегрирования в разд. 1.6), поэтому произведения $P^{-1}A$ и $A[P^{-1}]^T$ — пятидиагональные матрицы. Также при нахождении элементов матрицы S^W полезно использовать свойство симметричности, как и свойство (1.74) симметричности матрицы A :

$$\begin{aligned} S_{mm}^W &= \sum_{k=0}^{\infty} (P_{mk}^{-1}A_{km} + A_{mk}P_{mk}^{-1}) = 2(P_{m,m-1}^{-1}A_{m-1,m} + P_{mm}^{-1}A_{mm} + P_{m,m+1}^{-1}A_{m+1,m}), \\ S_{m-1,m}^W &= \sum_{k=0}^{\infty} (P_{m-1,k}^{-1}A_{km} + A_{m-1,k}P_{mk}^{-1}) = \\ &= P_{m-1,m-1}^{-1}A_{m-1,m} + A_{m-1,m-1}P_{m,m-1}^{-1} + P_{m-1,m}^{-1}A_{mm} + A_{m-1,m}P_{mm}^{-1}, \\ S_{m-2,m}^W &= \sum_{k=0}^{\infty} (P_{m-2,k}^{-1}A_{km} + A_{m-2,k}P_{mk}^{-1}) = P_{m-2,m-1}^{-1}A_{m-1,m} + A_{m-2,m-1}P_{m,m-1}^{-1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{mm} &= \frac{T}{2}, \quad A_{m-1,m} = A_{m,m-1} = T \frac{m}{2\sqrt{4m^2-1}} \quad (m \geq 1), \\ P_{00}^{-1} &= \frac{T}{2}, \quad P_{mm}^{-1} = 0, \quad P_{m-1,m}^{-1} = -P_{m,m-1}^{-1} = -T \frac{1}{2\sqrt{4m^2-1}} \quad (m \geq 1), \end{aligned}$$

причем формулу для элементов $A_{m-1,m} = A_{m,m-1}$ можно применять и при $m = 0$, как и ранее (см. пример 1.10).

Таким образом, подставляя выражения для элементов матриц P^{-1} и A , получаем

$$S^W = T^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4\sqrt{3}} & \frac{1}{4\sqrt{3}\sqrt{15}} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{1}{4\sqrt{3}} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{4\sqrt{15}\sqrt{35}} & \ddots & \vdots & \\ \frac{1}{4\sqrt{3}\sqrt{15}} & 0 & \frac{1}{42} & 0 & \ddots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{4\sqrt{15}\sqrt{35}} & 0 & \frac{1}{90} & \ddots & c_{m-2,m} & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & c_{m,m-2} & 0 & c_{mm} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} c_{00} &= \frac{1}{3}, \quad c_{mm} = \frac{1}{2(2m-1)(2m+3)} \quad (m \geq 1), \\ c_{01} = c_{10} &= \frac{1}{4\sqrt{3}}, \quad c_{m-1,m} = c_{m,m-1} = 0 \quad (m \geq 2), \\ c_{m-2,m} = c_{m,m-2} &= -\frac{1}{4\sqrt{[4(m-1)^2-1](4m^2-1)}} \quad (m \geq 2), \end{aligned}$$

$$c_{m-k,m} = c_{m,m-k} = 0 \quad (m \geq 3), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 3, 4, \dots, m. \quad \blacksquare$$

Пример 2.3. Выразить нестационарные спектральные плотности пуассоновского и центрального пуассоновского процессов $P(\cdot)$ и $\Pi(\cdot)$ интенсивности λ через спектральные ха-

рактеристики типовых функций и линейных операторов относительно произвольной базисной системы, ортонормированной на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Пуассоновский процесс $P(\cdot)$ — случайный процесс с математическим ожиданием $m_P(t) = \lambda t$ и корреляционной функцией $R_P(t, \tau) = \lambda \min\{t, \tau\}$ (см. примеры случайных процессов).

Пусть $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$, относительно которой определены: F — спектральная характеристика функции $f_1(t) = t$ и S^W — вторая нестационарная спектральная плотность винеровского процесса $W(\cdot)$ (двумерная спектральная характеристика корреляционной функции $R_W(t, \tau) = \min\{t, \tau\}$), причем последняя выражается через спектральные характеристики P^{-1} и A оператора интегрирования и оператора умножения на функцию $a_1(t) = t$ соответственно (см. разд. 1.1, 1.5 и 1.6, а также пример 2.2):

$$S^W = P^{-1}A + A[P^{-1}]^T.$$

Применяя свойства линейности (1.24) и (1.47), для первой и второй нестационарных спектральных плотностей пуассоновского процесса $P(\cdot)$ имеем

$${}^1S^P = \mathbb{S}[m_P(\cdot)] = \mathbb{S}[\lambda f_1(\cdot)] = \lambda \mathbb{S}[f_1(\cdot)] = \lambda F,$$

$$S^P = \mathbb{S}[R_P(\cdot)] = \mathbb{S}[\lambda R_W(\cdot)] = \lambda \mathbb{S}[R_W(\cdot)] = \lambda S^W = \lambda(P^{-1}A + A[P^{-1}]^T),$$

а соотношение (2.1) дает вторую начальную нестационарную спектральную плотность:

$$B^P = S^P + {}^1S^P[{}^1S^P]^T = \lambda(P^{-1}A + A[P^{-1}]^T) + \lambda^2 FF^T.$$

Первая нестационарная спектральная плотность ${}^1S^\Pi$ централизованного пуассоновского процесса $\Pi(\cdot)$ — это нулевая матрица-столбец:

$${}^1S^\Pi = [0 \ 0 \ 0 \ \dots]^T,$$

а его вторые нестационарные спектральные плотности, очевидно, выражаются в виде

$$S^\Pi = B^\Pi = \lambda S^W = \lambda(P^{-1}A + A[P^{-1}]^T).$$

Например, для базисной системы полиномов Лежандра (1.5), заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$, с учетом примеров 1.2 и 2.2 получаем

$${}^1S^P = \lambda T \sqrt{T} \cdot \left[\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{6} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \right]^T,$$

$$S^P = S^\Pi = \lambda T^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4\sqrt{3}} & \frac{1}{4\sqrt{3}\sqrt{15}} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{1}{4\sqrt{3}} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{4\sqrt{15}\sqrt{35}} & \ddots & \vdots & \dots \\ \frac{1}{4\sqrt{3}\sqrt{15}} & 0 & \frac{1}{42} & 0 & \ddots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{4\sqrt{15}\sqrt{35}} & 0 & \frac{1}{90} & \ddots & c_{m-2,m} & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & c_{m,m-2} & 0 & c_{mm} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{00} = \frac{1}{3}, \quad c_{mm} = \frac{1}{2(2m-1)(2m+3)} \quad (m \geq 1),$$

$$c_{01} = c_{10} = \frac{1}{4\sqrt{3}}, \quad c_{m-1,m} = c_{m,m-1} = 0 \quad (m \geq 2),$$

$$c_{m-2,m} = c_{m,m-2} = -\frac{1}{4\sqrt{[4(m-1)^2 - 1](4m^2 - 1)}} \quad (m \geq 2),$$

$$c_{m-k,m} = c_{m,m-k} = 0 \quad (m \geq 3), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 3, 4, \dots, m. \quad \blacksquare$$

В заключительной части этого раздела сформулируем теорему, связывающую спектральные характеристики корреляционной функции и дисперсии случайного процесса.

Теорема 2.1. Пусть S^F — вторая нестационарная спектральная плотность случайного процесса $F(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$, D^F — спектральная характеристика дисперсии случайного процесса $F(\cdot)$, V — спектральная характеристика оператора умножения функций. Спектральные характеристики S^F , D^F и V определены относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$. Тогда спектральные характеристики S^F и D^F связаны соотношением

$$D^F = VS^F. \quad (2.2)$$

Доказательство непосредственно следует из теоремы 1.8.

Соотношение (2.2) позволяет выразить интеграл от дисперсии $D_F(\cdot)$. Действительно, пусть $\mathbf{1}$ — спектральная характеристика линейного функционала $\mathcal{J}_\mathbb{T}$, ставящего в соответствие функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ интеграл от этой функции по отрезку \mathbb{T} (см. примеры линейных функционалов на множестве функций одной переменной в разд. 1.1). Она совпадает со спектральной характеристикой функции $f_0(t) \equiv 1$. Тогда согласно выражению (1.32) и теореме 2.1 имеем

$$\mathcal{J}_\mathbb{T} D_F(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} D_F(t) dt = \mathbf{1}^\top D^F = \mathbf{1}^\top (VS^F). \quad (2.3)$$

Точно так же устанавливается связь между спектральными характеристиками моментной функции второго порядка $B_F(\cdot)$ и второго начального момента $EF^2(\cdot)$. А соответствующий аналог формулы (2.3) позволяет выразить интеграл от второго начального момента:

$$\mathcal{J}_\mathbb{T} EF^2(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} EF^2(t) dt = \mathbf{1}^\top (VB^F), \quad (2.4)$$

где B^F — вторая начальная нестационарная спектральная плотность случайного процесса $F(\cdot)$.

2.2. Спектральные характеристики случайных процессов

В разд. 2.1 рассмотрено описание случайных процессов в рамках корреляционной теории, т.е. с помощью первых двух моментов: математического ожидания, корреляционной функции и моментной функции второго порядка. Для их спектральных аналогов используются понятия первой и второй (начальной) нестационарных спектральных плотностей — спектральной характеристики математического ожидания и двумерной спектральной характеристики корреляционной функции (моментной функции второго порядка) [220–222]. Однако спектральные характеристики можно ввести не только для функций, но и для случайных процессов.

Пусть, как и ранее (см. разд. 1.1 и 2.1), $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ — базис пространства $L_2(\mathbb{T})$. Можно рассмотреть задачу представления случайного процесса в виде ряда, она аналогична задаче

представления функции одной переменной (см. теорему 1.1). Отличие состоит в том, что коэффициенты разложения \mathcal{F}_i случайного процесса $F(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ — это случайные величины. Они задаются формулой

$$\mathcal{F}_i = (q(i, \cdot), F(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) F(t) dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

в которой интеграл понимается в среднеквадратическом смысле [37], а равенство

$$F(\cdot) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i q(i, \cdot), \quad (2.6)$$

выполняется почти всюду на \mathbb{T} и понимается следующим образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\| F(\cdot) - \sum_{i=0}^n \mathcal{F}_i q(i, \cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = 0, \quad \text{или} \quad \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \left\| F(\cdot) - \sum_{i=0}^n \mathcal{F}_i q(i, \cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{T})} = 0.$$

Коэффициенты разложения (2.5) однозначно задают случайный процесс $F(\cdot)$, т.е. упорядоченную совокупность этих коэффициентов можно рассматривать как его характеристику.

Бесконечная случайная матрица-столбец $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_i)$, элементы которой представляют собой коэффициенты разложения (2.5) случайного процесса $F(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ в ряд по функциям базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$, называется спектральной характеристикой случайного процесса $F(\cdot)$.

Отображение, ставящее в соответствие случайному процессу $F(\cdot)$ его спектральную характеристику \mathcal{F} , называется спектральным преобразованием случайного процесса $F(\cdot)$ и обозначается \mathbb{S} :

$$\mathbb{S}[F(\cdot)] = \mathcal{F} = [\mathcal{F}_0 \ \mathcal{F}_1 \ \mathcal{F}_2 \ \dots]^T,$$

а обратный переход от спектральной характеристики к соответствующему случайному процессу осуществляется по формуле обращения:

$$F(\cdot) = \mathbb{S}^{-1}[\mathcal{F}] = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i q(i, \cdot). \quad (2.7)$$

Перечислим некоторые свойства спектрального преобразования случайных процессов.

1. Линейность.

Пусть $F(\cdot), G(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$, $\mathbb{S}[F(\cdot)] = \mathcal{F}$ и $\mathbb{S}[G(\cdot)] = \mathcal{G}$. Тогда

$$\mathbb{S}[\alpha F(\cdot) + \beta G(\cdot)] = \alpha \mathcal{F} + \beta \mathcal{G} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Справедливость этого свойства очевидна.

2. Связь спектральной характеристики случайного процесса с нестационарными спектральными плотностями.

Пусть $F(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$, $\mathbb{S}[F(\cdot)] = \mathcal{F}$, ${}^1S^F$ и S^F — первая и вторая нестационарные спектральные плотности случайного процесса $F(\cdot)$ соответственно (см. разд. 2.1). Тогда

$${}^1S^F = \mathbb{E}\mathcal{F}, \quad (2.9)$$

$$S^F = \text{cov } \mathcal{F} = \mathbb{E}\check{\mathcal{F}}\check{\mathcal{F}}^T, \quad (2.10)$$

$$B^F = \mathbb{E}\mathcal{F}\mathcal{F}^T, \quad (2.11)$$

где $\check{\mathcal{F}} = \mathcal{F} - {}^1S^F$ — центрированная спектральная характеристика, т.е. первая нестационарная спектральная плотность ${}^1S^F$ случайного процесса $F(\cdot)$ — это математическое ожидание его спектральной характеристики \mathcal{F} , вторая нестационарная спектральная плотность S^F случайного процесса $F(\cdot)$ — это корреляционная матрица его спектральной характеристики \mathcal{F} , а вторая начальная нестационарная спектральная плотность B^F случайного процесса $F(\cdot)$ — это второй начальный момент его спектральной характеристики \mathcal{F} , где \mathcal{F} , ${}^1S^F$, S^F и B^F определены относительно одной и той же базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$.

Доказательство. Для элементов первой нестационарной спектральной плотности имеем

$$\begin{aligned} {}^1S_i^F &= (q(i, \cdot), \mathbb{E}F(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \left(q(i, \cdot), \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \mathbb{E}\mathcal{F}_j q(j, \cdot) \right)_{L_2(\mathbb{T})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n (q(i, \cdot), q(j, \cdot))_{L_2(\mathbb{T})} \mathbb{E}\mathcal{F}_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \delta_{ij} \mathbb{E}\mathcal{F}_j = \mathbb{E}\mathcal{F}_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера (1.4).

Таким образом, справедливо соотношение (2.9).

Для элементов второй нестационарной спектральной плотности можно записать

$$\begin{aligned} S_{ij}^F &= (q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot), \text{cov}(F(\cdot), F(\cdot)))_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \\ &= \left(q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot), \lim_{n, m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^n \check{\mathcal{F}}_k q(k, \cdot) \otimes \sum_{l=0}^m \check{\mathcal{F}}_l q(l, \cdot) \right] \right)_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \\ &= \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m (q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot), q(k, \cdot) \otimes q(l, \cdot))_{L_2(\mathbb{T}^2)} \mathbb{E}\check{\mathcal{F}}_k \check{\mathcal{F}}_l = \\ &= \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \delta_{ik} \delta_{jl} \text{cov}(\mathcal{F}_k, \mathcal{F}_l) = \text{cov}(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j), \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

Следовательно, получаем соотношение (2.10).

Соотношение (2.11) доказывается аналогично, также оно следует из соотношения (2.1), устанавливающего связь между вторыми нестационарными спектральными плотностями. ◀

3. Сохранение нормы.

Пусть $F(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$, $\mathbb{S}[F(\cdot)] = \mathcal{F}$, ${}^1S^F$ и S^F — первая и вторая нестационарные спектральные плотности случайного процесса $F(\cdot)$ соответственно, B^F — вторая начальная нестационарная спектральная плотность случайного процесса $F(\cdot)$. Тогда

$$\|F(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \|\mathcal{F}\|_{\ell_2}^2 = \mathcal{F}^T \mathcal{F} \quad \text{P-п.н.}, \quad (2.14)$$

$$\mathbb{E}\|F(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \mathbb{E}\|\mathcal{F}\|_{\ell_2}^2 = \mathbb{E}\mathcal{F}^T \mathcal{F} = \text{tr } B^F. \quad (2.15)$$

Первое из приведенных соотношений следует из свойств спектрального преобразования функций одной переменной (см. разд. 1.1). Доказательство второго соотношения основано на утверждении [37]

$$\mathbb{E}\|F(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \int_{\mathbb{T}} B_F(t, t) dt,$$

связи (2.11) спектральной характеристики случайного процесса со второй начальной нестационарной спектральной плотностью и соотношении (1.58). Свойства функций $R_F(\cdot)$ и $B_F(\cdot)$ таковы [37, 41], что они задают ядерные операторы, для которых справедлива теорема 1.11.

Для центрированных случайных процессов ($EF(t) \equiv 0$) имеем

$$E\|F(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \text{tr } S^F$$

и из этого свойства следует [222], что

$$\int_{\mathbb{T}} D_F(t) dt = \text{tr } S^F,$$

где $D_F(\cdot)$ — дисперсия случайного процесса $F(\cdot)$.

В общем случае из формулы (2.1), связывающей вторые нестационарные спектральные плотности S^F и B^F , получаем

$$\text{tr } B^F = \text{tr } S^F + \|S^F\|_{\ell_2}^2,$$

что является спектральным аналогом соотношения, связывающего нормы случайного процесса $F(\cdot)$, соответствующего центрированного случайного процесса $\check{F}(\cdot)$ и математического ожидания $m_F(\cdot)$:

$$E\|F(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = E\|\check{F}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 + \|m_F(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2. \quad (2.16)$$

4. Сдвиг и масштабирование базисной системы.

Если $\{\check{q}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2([0, 1])$, а $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — соответствующая ей базисная система пространства $L_2([t_0, T])$ (см. п. 1 замечаний 1.1), то

$$\mathcal{F}_q = \sqrt{T - t_0} \mathcal{F}_{\check{q}}^+,$$

где \mathcal{F}_q и $\mathcal{F}_{\check{q}}^+$ — спектральные характеристики случайных процессов $F(t) = F^+((t - t_0)(T - t_0))$ и $F^+(t)$ соответственно, что следует из определения элементов случайной матрицы-столбца \mathcal{F} (замена переменной интегрирования). Соответствующие нестационарные спектральные плотности подчиняются связям (1.27) и (1.53) спектральных характеристик при сдвиге и масштабировании базисной системы.

З а м е ч а н и я 2.2.

1. Если $F(\cdot)$ — гауссовский случайный процесс, то его коэффициенты разложения (2.5) — случайные величины, имеющие нормальное распределение, а ряд в (2.6) сходится с вероятностью 1 [37].

2. Частным случаем представления случайного процесса $F(\cdot)$ в виде ряда по функциям базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ является разложение Карунена–Лоэва [37, 39, 294, 314] — разложение в ряд по собственным функциям линейного интегрального оператора с ядром $B_F(\cdot)$ (это оператор Гильберта–Шмидта (1.71)), т.е. система функций $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ формируется из условия

$$\int_{\mathbb{T}} B_F(t, \tau) q(i, \tau) d\tau = \lambda_i q(i, t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

При таком выборе базисной системы вторая начальная нестационарная спектральная плотность B^F — это диагональная матрица, образованная собственными значениями λ_i , а спектральная характеристика \mathcal{F} состоит из некоррелированных случайных величин с единичной дисперсией и множителями $\sqrt{\lambda_i}$. Для центрированных случайных процессов аналогичные соотношения можно записать с помощью корреляционной функции $R_F(\cdot)$ и второй нестационарной спектральной плотности S^F .

Однако разложение Карунена – Лоэва сопряжено с нахождением собственных функций и собственных значений линейного оператора, поэтому предлагается использовать универсальные системы функций, например базисные системы для представления функций времени, приведенные в разд. 1.1. При этом базисные системы из разд. 1.1 могут соответствовать некоторым случайным процессам $F(\cdot)$ в смысле разложения Карунена – Лоэва, т.е. являться собственными функциями линейных интегральных операторов с соответствующими ядрами $B_F(\cdot)$.

3. Если представить случайный процесс $F(\cdot)$ в виде суммы $m_F(\cdot) + \check{F}(\cdot)$, то несложно установить связь с каноническим представлением [83, 122, 126, 214]:

$$F(t) = m_F(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \check{\mathcal{F}}_i q(i, t),$$

где $\check{\mathcal{F}}_i$ — некоррелированные случайные величины с нулевым математическим ожиданием, упорядоченный набор $\check{\mathcal{F}}$ которых образует спектральную характеристику случайного процесса $\check{F}(\cdot)$:

$$\mathbb{S}[\check{F}(\cdot)] = \check{\mathcal{F}}, \quad \check{F}(\cdot) = \mathbb{S}^{-1}[\check{\mathcal{F}}],$$

следовательно, $\mathcal{F} = {}^1S^F + \check{\mathcal{F}}$ и $F(\cdot) = m_F(\cdot) + \mathbb{S}^{-1}[\check{\mathcal{F}}]$.

4. Если требуется подчеркнуть, что используется конкретная базисная система для спектральной характеристики случайного процесса $F(\cdot)$, то эту базисную систему можно указать, как и для спектральных характеристик функций одной переменной (см. п. 2 замечаний 1.2), а именно $\mathcal{F}_q, \mathbb{S}_q$ и \mathbb{S}_q^{-1} :

$$\mathbb{S}_q[F(\cdot)] = \mathcal{F}_q, \quad F(\cdot) = \mathbb{S}_q^{-1}[\mathcal{F}_q].$$

Найдем спектральную характеристику \mathcal{W} винеровского процесса $W(\cdot)$ (см. примеры случайных процессов в разд. 2.1). Формальное применение определения позволяет записать:

$$\mathbb{S}[W(\cdot)] = \mathcal{W} = (\mathcal{W}_i),$$

где элементы спектральной характеристики \mathcal{W} (случайные величины, имеющие нормальное распределение) задаются в виде

$$\mathcal{W}_i = (q(i, \cdot), W(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) W(t) dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Пример 2.4. Представить винеровский процесс $W(\cdot)$ в виде ряда по собственным функциям линейного интегрального оператора с ядром $R_W(t, \tau) = \min\{t, \tau\}$, $t, \tau \in \mathbb{T} = [0, T]$. Найти соответствующую спектральную характеристику \mathcal{W} .

□ Запишем условие, которому удовлетворяют собственные функции линейного интегрального оператора с ядром $R_W(\cdot)$ (см. п. 2 замечаний 2.2):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} R_W(t, \tau) q(i, \tau) d\tau &= \int_{\mathbb{T}} \min\{t, \tau\} q(i, \tau) d\tau = \\ &= \int_0^t \tau q(i, \tau) d\tau + \int_t^T t q(i, \tau) d\tau = \lambda_i q(i, t), \quad \lambda_i > 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Из этого уравнения следует, что $q(i, 0) = 0$. Дифференцируя его левую и правую части по t , находим

$$\int_t^T q(i, \tau) d\tau = \lambda_i q'(i, t) \quad \text{и} \quad q'(i, T) = 0.$$

Дифференцируя по t еще раз, получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\lambda_i q''(i, t) + q(i, t) = 0, \quad (2.17)$$

общее решение [115] которого

$$q(i, t) = C_1 \cos \frac{t}{\sqrt{\lambda_i}} + C_2 \sin \frac{t}{\sqrt{\lambda_i}}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.18)$$

Из краевых условий и условия нормировки $\|q(i, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = 1$ находим [37]

$$q(i, t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(i + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi t}{T}, \quad \lambda_i^{-1} = \left(i + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{T^2}, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

и получаем искомое представление случайного процесса $W(\cdot)$ в виде ряда:

$$W(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{T}{\pi} \left(i + \frac{1}{2}\right)^{-1} \zeta_i q(i, t),$$

где ζ_i — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение.

Далее будем обозначать такую базисную систему $\{\hat{\Sigma}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$. Следовательно, элементы спектральной характеристики \mathcal{W} винеровского процесса $W(\cdot)$ относительно базисной системы $\{\hat{\Sigma}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ представляются в виде

$$\mathcal{W}_i = \frac{2T}{(2i+1)\pi} \zeta_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

поэтому

$$\mathcal{W} = \frac{2T}{\pi} \cdot \begin{bmatrix} \zeta_0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \dots \end{bmatrix}^T.$$

Из формул (2.9) и (2.10) с учетом равенств $E\zeta_i = 0$ и $E\zeta_i^2 = 1$ получаем первую и вторую нестационарные спектральные плотности винеровского процесса $W(\cdot)$:

$${}^1S^W = E\mathcal{W} = [0 \ 0 \ 0 \ \dots]^T \quad \text{и} \quad S^W = E\mathcal{W}\mathcal{W}^T = \frac{4T^2}{\pi^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{25} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Проверим, сохраняется ли норма при спектральном преобразовании. Для этого найдем квадрат нормы корреляционной функции $R_W(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \|R_W(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 &= \int_0^T \int_0^T \min\{t^2, \tau^2\} dt d\tau = \\ &= \int_0^T \left[\int_0^t \tau^2 d\tau + \int_t^T t^2 d\tau \right] dt = \int_0^T \left[\frac{t^3}{3} + t^2(1-t) \right] dt = \frac{T^4}{6}. \end{aligned}$$

Далее

$$\|S^W\|_{\mathcal{M}_2}^2 = \sum_{i,j=0}^{\infty} (S_{ij}^W)^2 = \frac{16T^4}{\pi^4} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^4},$$

где сумма ряда в правой части равенства равна $\pi^4/96$ [42], поэтому

$$\|R_W(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \|S^W\|_{\mathcal{M}_2}^2 = \frac{T^4}{6}.$$

В заключение отметим, что аналогичный результат справедлив для центрированных случайных процессов с такой же корреляционной функцией, отличия будут только в законе распределения случайных величин ζ_i , но не в собственных функциях $\hat{\Sigma}(i, \cdot)$ и собственных значениях λ_i . ■

Таким же образом определяется спектральная характеристика \mathcal{S} централизованного пуассоновского процесса $\Pi(\cdot)$ (см. примеры случайных процессов в разд. 2.1), а именно

$$\mathbb{S}[\Pi(\cdot)] = \mathcal{S} = (\mathcal{S}_i),$$

где элементы спектральной характеристики \mathcal{S} удовлетворяют соотношению

$$\mathcal{S}_i = (q(i, \cdot), \Pi(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \Pi(t) dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Прежде чем перейти далее, введем понятие спектральных характеристик обобщенных случайных процессов (случайных линейных функционалов). Пусть \mathcal{Z} — случайный линейный функционал, определенный на пространстве основных функций $D(\mathbb{T})$ (см. разд. 1.1), $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базис пространства $L_2(\mathbb{T})$.

Бесконечная случайная матрица-столбец $Z = (Z_i)$, элементы которой определяются формулой

$$Z_i = \mathcal{Z}q(i, \cdot), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.19)$$

называется спектральной характеристикой случайного линейного функционала \mathcal{Z} .

Отображение, ставящее в соответствие случайному линейному функционалу \mathcal{Z} его спектральную характеристику Z , называется спектральным преобразованием и также обозначается \mathbb{S} , т.е.

$$\mathbb{S}[\mathcal{Z}] = Z = [Z_0 \ Z_1 \ Z_2 \ \dots]^T,$$

где случайные величины z_i задаются формулой (2.19).

Напомним, что если функции базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ не принадлежат $D(\mathbb{T})$, то необходимо рассматривать функционал \mathcal{Z} на множестве функций, включающих $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ (см. п. 1 замечаний 1.4).

Теорема 2.2. Пусть \mathcal{Z} — случайный линейный функционал, определенный на пространстве $L_2(\mathbb{T})$; $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ — функция одной переменной; Z и F — спектральные характеристики функционала \mathcal{Z} и функции $f(\cdot)$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$. Тогда

$$\mathcal{Z}f(\cdot) = Z^T F \quad \text{P-н.н.} \quad (2.20)$$

Эта теорема является аналогом теоремы 1.2 для неслучайных линейных функционалов.

Также можно определить двумерную спектральную характеристику случайного линейного функционала \mathcal{Z} , заданного на пространстве основных функций $D(\mathbb{T}^2)$ (см. разд. 1.2). Для следующего определения будем использовать систему функций $\{q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot)\}_{i,j=0}^{\infty}$ в качестве базиса пространства $L_2(\mathbb{T}^2)$.

Бесконечная случайная матрица $Z = (Z_{ij})$, элементы которой определяются формулой

$$Z_{ij} = \mathcal{Z}q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot), \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.21)$$

называется двумерной спектральной характеристикой случайного линейного функционала \mathcal{Z} .

Для отображения, ставящего в соответствие случайному линейному функционалу \mathcal{Z} его двумерную спектральную характеристику Z , используется обозначение \mathbb{S} и термин спектраль-

ное преобразование:

$$\mathbb{S}[\mathcal{Z}] = Z = \begin{bmatrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} & \dots \\ Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} & \dots \\ Z_{20} & Z_{21} & Z_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где случайные величины Z_{ij} задаются формулой (2.21).

Естественно, не любой функционал $\mathcal{Z}: D(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ можно продолжить на все пространство $L_2(\mathbb{T})$, такие функционалы рассматриваются либо на пространстве основных функций $D(\mathbb{T})$, либо на некотором подпространстве пространства $L_2(\mathbb{T})$. Для функционалов $\mathcal{Z}: D(\mathbb{T}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ справедливо такое же замечание.

2.3. Представление стохастических интегралов

В качестве важнейшего *примера случайного линейного функционала* рассмотрим интегрирование по винеровскому процессу $W(\cdot)$. Определим линейный функционал $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^W$, ставящий в соответствие функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ стохастический интеграл по отрезку $\mathbb{T} = [t_0, T]$:

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^W f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} f(t) dW(t).$$

При $t_0 = 0$ винеровский процесс определен ранее (см. примеры случайных процессов в разд. 2.1). Если $t_0 \neq 0$, то винеровский процесс определяется следующим образом:

$$W(t_0) = 0, \quad W(t) - W(\tau) \sim \mathcal{N}_{\text{law}}(0, |t - \tau|), \quad t, \tau \geq t_0.$$

Тогда

$$m_W(t) = \mathbb{E}W(t) \equiv 0, \quad R_W(t, \tau) = \text{cov}(W(t), W(\tau)) = \min\{t, \tau\} - t_0.$$

Пусть $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ — это разбиение отрезка \mathbb{T} :

$$\mathbb{T} = \bigcup_{i=1}^n \bar{\Delta}_i, \quad \Delta_{i'} \cap \Delta_{i''} = \emptyset \quad \forall i', i'' \in \{1, \dots, n\}: i' \neq i'', \quad (2.22)$$

где $\Delta_i = [\vartheta_{i-1}, \vartheta_i)$, $t_0 = \vartheta_0 < \vartheta_1 < \dots < \vartheta_n = T$. Для ступенчатой функции

$$f(t) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{\Delta_i}(t), \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad (2.23)$$

с учетом определения (1.14) стохастическим интегралом по винеровскому процессу называется случайная величина

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^W f(\cdot) = \sum_{i=1}^n a_i W(\Delta_i), \quad (2.24)$$

для которой

$$W(\Delta_i) = \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^W \chi_{\Delta_i}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \chi_{\Delta_i}(t) dW(t) = W(\vartheta_i) - W(\vartheta_{i-1}).$$

Стохастическим интегралом по винеровскому процессу от функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ называется случайная величина

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^W f(\cdot) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^W f^{(n)}(\cdot),$$

где последовательность ступенчатых функций $f^{(n)}(\cdot)$ сходится к функции $f(\cdot)$ по норме пространства $L_2(\mathbb{T})$ [37, 102].

Воспользуемся определением спектральной характеристики случайного линейного функционала: $\mathbb{S}[\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^W] = \mathcal{V}$, где элементы спектральной характеристики \mathcal{V} задаются соотношением

$$\mathcal{V}_i = \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^W q(i, \cdot) = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) dW(t) = \zeta_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.25)$$

а ζ_i — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение [77, 120]:

$$\mathcal{V} = [\zeta_0 \ \zeta_1 \ \zeta_2 \ \dots]^T. \quad (2.26)$$

Для этой спектральной характеристики можно формально применить соотношения, полученные для элементов первой и второй нестационарных спектральных плотностей, обозначая соответствующий обобщенный случайный процесс через $V(\cdot)$:

$${}^1S_i^V = \mathbb{E}\mathcal{V}_i = 0, \quad S_{ij}^V = \text{cov}(\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера (1.4). Таким образом, первая нестационарная спектральная плотность ${}^1S^V$ обобщенного случайного процесса $V(\cdot)$ — бесконечная нулевая матрица-столбец, а его вторая нестационарная спектральная плотность S^V — бесконечная единичная матрица:

$${}^1S^V = \mathbb{E}\mathcal{V} = \bar{O}, \quad S^V = \text{cov} \mathcal{V} = \mathbb{E}\mathcal{V}\mathcal{V}^T = E,$$

что соответствует тому, что $m_V(t) \equiv 0$ и $R_V(t, \tau) = \delta(t - \tau)$, поскольку двумерная спектральная характеристика дельта-функции $\delta(\cdot)$ равна бесконечной единичной матрице E вне зависимости от базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.2), т.е. $V(\cdot)$ — стандартный гауссовский белый шум [39, 116], или кратко — гауссовский белый шум.

Спектральную характеристику \mathcal{V} случайного линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^W$, или обобщенного случайного процесса $V(\cdot)$, будем называть спектральной характеристикой гауссовского белого шума. Она не зависит от выбора базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$. Этот обобщенный случайный процесс рассматривают как производную винеровского процесса [39, 106, 125]:

$$\frac{dW(t)}{dt} = V(t), \quad (2.27)$$

где производная понимается формально, так как траектории винеровского процесса с вероятностью 1 недифференцируемы при любом $t \geq t_0$.

Значение функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^W$ определяется следующим выражением:

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^W f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} f(t) dW(t) = \mathcal{V}^T F, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)]. \quad (2.28)$$

З а м е ч а н и я 2.3.

1. Независимость распределения спектральной характеристики гауссовского белого шума от выбора базисной системы можно связать с преобразованием спектральных характеристик функций при изменении базисной системы (см. разд. 1.3). Спектральная характеристика гауссовского белого шума представляет собой бесконечную матрицу-столбец, элементы которой — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Матрица изменения базисной системы является ортогональной матрицей (см. свойства матриц изменения базисных систем в разд. 1.3), поэтому результат ортогонального преобразования

спектральной характеристики белого шума — это также бесконечная матрица-столбец, элементы которой обладают такими же вероятностными свойствами.

2. Стохастические интегралы вида (2.28) — это гауссовские случайные величины с конечным моментом второго порядка. Обозначим $I_f = \mathcal{J}_T^W f(\cdot)$, тогда $E I_f = 0$ и $E I_f^2 < \infty$, т.е. это гильбертовы случайные величины [37]. Гильбертовы случайные величины образуют гильбертово пространство $\mathcal{L}_2 = L_2(\Omega)$ — пространство квадратично интегрируемых функций $I_f(\omega)$, $\omega \in \Omega$, по вероятностной мере P , в котором норма и скалярное произведение задаются формулами $\|I_f\|_{\mathcal{L}_2} = \{E I_f^2\}^{\frac{1}{2}}$, $(I_f, I_g)_{\mathcal{L}_2} = E I_f I_g$, где $I_f, I_g \in \mathcal{L}_2$.

Независимые случайные величины $\{\zeta_i\}_{i=0}^{\infty}$, имеющие стандартное нормальное распределение, образуют ортонормированную систему в пространстве \mathcal{L}_2 : $(\zeta_i, \zeta_j)_{\mathcal{L}_2} = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера (1.4).

Перепишывая выражение (2.28) в форме

$$I_f = \sum_{i=0}^{\infty} F_i \zeta_i, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)],$$

получаем представление случайной величины I_f в виде ряда по базисной системе $\{\zeta_i\}_{i=0}^{\infty}$ подпространства $\mathcal{L}'_2 = \{\mathcal{J}_T^W f(\cdot) : f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})\}$, F_i — коэффициенты разложения стохастического интеграла.

Таким образом, \mathcal{J}_T^W можно рассматривать как линейный оператор, определенный на пространстве $L_2(\mathbb{T})$ со значениями в \mathcal{L}_2 . Он устанавливает изоморфизм пространств $L_2(\mathbb{T})$ и \mathcal{L}'_2 с сохранением нормы и скалярного произведения:

$$\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \|I_f\|_{\mathcal{L}_2}^2, \quad (f(\cdot), g(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = (I_f, I_g)_{\mathcal{L}_2}.$$

Пример 2.5. Найти стохастические интегралы

$$\int_{\mathbb{T}} t^n dW(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

используя спектральную форму математического описания и полиномы Лежандра (1.5), заданные на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Воспользуемся выражением (2.28):

$$\mathcal{J}_T^W f_n(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} f_n(t) dW(t) = \mathcal{V}^T F^n,$$

где \mathcal{V} — спектральная характеристика (2.26) белого шума, F^n — спектральные характеристики функций $f_n(t) = t^n$ относительно полиномов Лежандра (1.5), найденные в примерах 1.1 и 1.2.

Произведение в правой части последнего равенства представляется следующим образом:

$$\mathcal{V}^T F^n = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i F_i^n,$$

где ζ_i — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение.

При $n = 0$ спектральная характеристика $F_0 = \mathbf{1}$ функции $f_0(t) \equiv 1$ найдена в примере 1.1:

$$\mathbf{1}_i = \begin{cases} \sqrt{T}, & i = 0, \\ 0, & i = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

поэтому

$$\int_{\mathbb{T}} dW(t) = \sqrt{T} \zeta_0$$

и эта формула справедлива в том числе и при использовании базисных систем (1.6)–(1.9), а не только полиномов Лежандра.

С учетом значений F_i^n , найденных в примере 1.2, получаем

$$\int_{\mathbb{T}} t dW(t) = T\sqrt{T} \left(\frac{1}{2} \zeta_0 + \frac{\sqrt{3}}{6} \zeta_1 \right), \quad \int_{\mathbb{T}} t^2 dW(t) = T^2\sqrt{T} \left(\frac{1}{3} \zeta_0 + \frac{\sqrt{3}}{6} \zeta_1 + \frac{\sqrt{5}}{30} \zeta_2 \right),$$

$$\int_{\mathbb{T}} t^3 dW(t) = T^3\sqrt{T} \left(\frac{1}{4} \zeta_0 + \frac{3\sqrt{3}}{20} \zeta_1 + \frac{\sqrt{5}}{20} \zeta_2 + \frac{\sqrt{7}}{140} \zeta_3 \right).$$

Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{\mathbb{T}} t^n dW(t) = \sum_{i=0}^n \zeta_i F_i^n, \quad F_i^n = T^n \sqrt{T} \sqrt{2i+1} \sum_{k=0}^i \frac{l_{ik}}{k+n+1},$$

а величины l_{ik} определены после формулы (1.5). ■

В дополнение рассмотрим интегрирование по винеровскому процессу $W(\cdot)$ сужения функции $f(\cdot)$ двух переменных. Определим линейный функционал $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*W}$, ставящий в соответствие функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ стохастический интеграл от функции $f^\diamond(t) = f(t, t)$ по отрезку \mathbb{T} :

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*W} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} f(t, t) dW(t),$$

при условии, что этот интеграл существует, например $f^\diamond(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$. Однозначного определения функции $f(\cdot)$ на диагонали квадрата \mathbb{T}^2 можно достичь применением усредняющего оператора (см. разд. 1.9).

По определению двумерной спектральной характеристики случайного линейного функционала: $\mathbb{S}[\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*W}] = E^{\mathcal{V}}$, где элементы спектральной характеристики $E^{\mathcal{V}}$ задаются соотношением

$$E_{ij}^{\mathcal{V}} = \mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*W} q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot) = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) q(j, t) dW(t), \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

Нетрудно видеть, что $E^{\mathcal{V}}$ — симметрическая случайная матрица.

Пример 2.6. Найти двумерную спектральную характеристику $E^{\mathcal{V}}$ случайного линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*W}$ относительно функций Уолша (1.7), заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Запишем соотношение (2.29) для элементов двумерной спектральной характеристики $E^{\mathcal{V}}$ и применим мультипликативное свойство функций Уолша (1.76):

$$E_{ij}^{\mathcal{V}} = \mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*W} q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot) = \int_{\mathbb{T}} \hat{W}(i, t) \hat{W}(j, t) dW(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{\mathbb{T}} \hat{W}(i \oplus j, t) dW(t),$$

где операция \oplus определена ранее (см. примеры спектральных характеристик A в разд. 1.5).

Для интеграла в правой части последнего равенства воспользуемся выражением (2.25):

$$E_{ij}^{\mathcal{V}} = \frac{1}{\sqrt{T}} \mathcal{V}_{i \oplus j} = \frac{1}{\sqrt{T}} \zeta_{i \oplus j},$$

где ζ_i — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение.

Таким образом, двумерная спектральная характеристика $E^{\mathcal{V}}$ представляется в виде (матрицы с такой структурой называют матрицами Уолша–Теплица [326])

$$E^{\mathcal{V}} = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot \begin{bmatrix} \zeta_0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \dots \\ \zeta_1 & \zeta_0 & \zeta_3 & \dots \\ \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

В общем случае для представления двумерной спектральной характеристики $E^{\mathcal{V}}$ случайного линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*W}$ можно сформулировать теорему, аналогичную по смыслу теореме 1.7.

Теорема 2.3. Пусть $E^{\mathcal{V}}$ — двумерная спектральная характеристика случайного линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*W}$, \mathcal{V} — спектральная характеристика гауссовского белого шума, V — спектральная характеристика оператора умножения функций. Спектральные характеристики $E^{\mathcal{V}}$ и V определены относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$. Тогда спектральные характеристики $E^{\mathcal{V}}$ и \mathcal{V} связаны соотношением

$$E^{\mathcal{V}} = V\mathcal{V}. \quad (2.30)$$

Доказательство. Подставим вместо произведения $q(i, \cdot)q(j, \cdot)$ в соотношении (2.29), которому удовлетворяют элементы двумерной спектральной характеристики $E^{\mathcal{V}}$, его представление в виде ряда по функциям базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ (см. п. 4 замечаний 1.10): $q(i, \cdot)q(j, \cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} V_{ijk}q(k, \cdot)$.

Принимая во внимание выражения (2.25) и (2.26), находим

$$\begin{aligned} E_{ij}^{\mathcal{V}} &= \mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*W} q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot) = \int_{\mathbb{T}} q(i, t)q(j, t)dW(t) = \int_{\mathbb{T}} \sum_{k=0}^{\infty} V_{ijk}q(k, t)dW(t) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n V_{ijk} \int_{\mathbb{T}} q(k, t)dW(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n V_{ijk} \zeta_k, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где ζ_k — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, или в матричной форме $E^{\mathcal{V}} = V\mathcal{V}$, т.е. получаем соотношение (2.30). ◀

Пример 2.7. Найти двумерную спектральную характеристику $E^{\mathcal{V}}$ случайного линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*W}$ относительно косинусоид (1.7), заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Воспользуемся теоремой 2.3. Согласно соотношениям (2.26) и (2.30) имеем

$$E_{ij}^{\mathcal{V}} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{ijk}\mathcal{V}_k = \sum_{k=0}^{\infty} V_{ijk}\zeta_k,$$

где ζ_k — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение.

Запишем формулы для ненулевых элементов спектральной характеристики V оператора умножения функций относительно косинусоид (1.6) (см. примеры спектральных характеристик V в разд. 1.5):

$$V_{ijk} = \frac{1}{\sqrt{T(1 + (i > 0)(j > 0)(k > 0))}}, \quad |i - j| = k \quad \text{или} \quad i + j = k, \quad i, j, k = 0, 1, 2, \dots,$$

следовательно, при $j \geq i = 0$

$$E_{0j}^{\mathcal{V}} = \frac{\zeta_j}{\sqrt{T}},$$

так как $V_{ijk} = 0$, если $k \neq j$, а при $j \geq i > 0$

$$E_{ij}^{\mathcal{V}} = \frac{\zeta_{j-i}}{\sqrt{T(1 + (i \neq j))}} + \frac{\zeta_{i+j}}{\sqrt{2T}},$$

поскольку $V_{ijk} = 0$, если $k \neq j - i$ или $k \neq i + j$, где $(i \neq j) = 0$ при $i = j$ и $(i \neq j) = 1$ при $i \neq j$.

При $i > j$ достаточно применить свойство симметричности матрицы $E^{\mathcal{V}}$, т.е. $E_{ij}^{\mathcal{V}} = E_{ji}^{\mathcal{V}}$.

В результате получаем двумерную спектральную характеристику $E^{\mathcal{V}}$:

$$E^{\mathcal{V}} = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot \begin{bmatrix} \zeta_0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \dots \\ \zeta_1 & \zeta_0 + \frac{\zeta_2}{\sqrt{2}} & \frac{\zeta_1 + \zeta_3}{\sqrt{2}} & \dots \\ \zeta_2 & \frac{\zeta_1 + \zeta_3}{\sqrt{2}} & \zeta_0 + \frac{\zeta_4}{\sqrt{2}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \blacksquare$$

Вернемся к нахождению спектральной характеристики \mathcal{W} винеровского процесса $W(\cdot)$ относительно произвольной базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$.

Положим

$$W(t) = \int_{t_0}^t dW(\tau) = \int_{\mathbb{T}} 1(t - \tau) dW(\tau)$$

и представим единичную ступенчатую функцию $k(t, \tau) = 1(t - \tau)$ (импульсную переходную функцию интегрирующего звена), пользуясь тем, что ее двумерная спектральная характеристика — это спектральная характеристика P^{-1} оператора интегрирования \mathcal{D}^{-1} (см. разд. 1.4 и 1.6), в виде ряда по функциям базисной системы $\{q(j, \cdot) \otimes q(k, \cdot)\}_{j,k=0}^{\infty}$:

$$k(\cdot) = \sum_{j,k=0}^{\infty} P_{jk}^{-1} q(j, \cdot) \otimes q(k, \cdot).$$

Тогда для элементов \mathcal{W}_i спектральной характеристики \mathcal{W} винеровского процесса можно записать

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_i &= \int_{\mathbb{T}} q(i, t) W(t) dt = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \int_{\mathbb{T}} 1(t - \tau) dW(\tau) dt = \\ &= \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \int_{\mathbb{T}} \sum_{j,k=0}^{\infty} P_{jk}^{-1} q(j, t) q(k, \tau) dW(\tau) dt = \\ &= \text{l.i.m.}_{n,m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m P_{jk}^{-1} \int_{\mathbb{T}} q(i, t) q(j, t) dt \int_{\mathbb{T}} q(k, \tau) dW(\tau) = \\ &= \text{l.i.m.}_{n,m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m \delta_{ij} P_{jk}^{-1} \zeta_k = \text{l.i.m.}_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m P_{ik}^{-1} \zeta_k, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера (1.4), а ζ_i — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение и образующие спектральную характеристику \mathcal{V} белого шума $V(\cdot)$ согласно (2.26).

Используя матричные обозначения, имеем

$$\mathcal{W} = P^{-1}\mathcal{V}, \tag{2.31}$$

или в виде спектрального аналога выражения (2.27): $P\mathcal{W} = \mathcal{V}$.

Полученное выражение соответствует известному представлению винеровского процесса в виде функционального ряда со случайными коэффициентами [87, 120, 333]:

$$W(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_j \int_{t_0}^t q(j, \tau) d\tau, \tag{2.32}$$

на основе которого строится доказательство существования винеровского процесса [87].

Кроме того, представление винеровского процесса (2.32) можно рассматривать как частный

случай выражения (2.28):

$$W(t) = \int_{\mathbb{T}} 1(t - \tau) dW(\tau) = \mathcal{V}^T \mathbf{1}_t^*, \quad \mathbf{1}_t^* = \mathbb{S}[1(t - (\cdot))], \quad (2.33)$$

т.е. $\mathbf{1}_t^*$ — спектральная характеристика единичной ступенчатой функции $f^*(\tau) = 1(t - \tau)$ как функции переменной τ (спектральная характеристика индикатора множества $[t_0, t]$, см. пример 1.4).

Дополнительно можно отметить, что $\mathcal{V}^T \mathbf{1}_t^* = H_t \mathcal{V}$, где $H_t = [\mathbf{1}_t^*]^T$ — нестационарная сопряженная передаточная функция интегрирующего звена (см. п. 1 замечаний 1.9).

Пример 2.8. Найти спектральную характеристику \mathcal{W} винеровского процесса $W(\cdot)$ относительно полиномов Лежандра (1.5), заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$. Вычислить $\mathbb{E}\|W(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2$.

□ Воспользуемся представлением (2.31), в котором P^{-1} — спектральная характеристика оператора интегрирования относительно полиномов Лежандра (1.5) (см. примеры спектральных характеристик P^{-1} в разд. 1.6), а \mathcal{V} — спектральная характеристика (2.26) белого шума:

$$\mathcal{W}_i = \begin{cases} T \left(\frac{\zeta_0}{2} - \frac{\zeta_1}{2\sqrt{3}} \right), & i = 0, \\ T \left(\frac{\zeta_{i-1}}{2\sqrt{4i^2 - 1}} - \frac{\zeta_{i+1}}{2\sqrt{4(i+1)^2 - 1}} \right), & i = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= T \cdot \left[\begin{array}{cccc} \frac{\zeta_0}{2} - \frac{\zeta_1}{2\sqrt{3}} & \frac{\zeta_0}{2\sqrt{3}} - \frac{\zeta_2}{2\sqrt{15}} & \frac{\zeta_1}{2\sqrt{15}} - \frac{\zeta_3}{2\sqrt{35}} & \dots \end{array} \right]^T = \\ &= \frac{T}{2} \cdot \left[\begin{array}{cccc} \zeta_0 - \frac{\zeta_1}{\sqrt{3}} & \frac{\zeta_0}{\sqrt{3}} - \frac{\zeta_2}{\sqrt{15}} & \frac{\zeta_1}{\sqrt{15}} - \frac{\zeta_3}{\sqrt{35}} & \dots \end{array} \right]^T, \end{aligned}$$

где ζ_i — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение.

Можно найти элементы S_{ij}^W второй нестационарной спектральной плотности S^W винеровского процесса $W(\cdot)$, используя формулу (2.13). Для этого требуется отыскать математические ожидания произведений $\mathcal{W}_i \mathcal{W}_j$, $i, j = 0, 1, 2, \dots$. Это проделано в книге [163] и полученный результат полностью соответствует примеру 2.2. В частности,

$$\mathbb{E}\mathcal{W}_0^2 = \frac{T^2}{3}, \quad \mathbb{E}\mathcal{W}_i^2 = T^2 \left(\frac{1}{4(4i^2 - 1)} + \frac{1}{4[4(i+1)^2 - 1]} \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Чтобы найти величину $\mathbb{E}\|W(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2$, применим свойство (2.14) сохранения нормы:

$$\mathbb{E}\|W(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \mathbb{E}\|\mathcal{W}\|_{\ell_2}^2 = \mathbb{E}\mathcal{W}^T \mathcal{W} = \text{tr } S^W,$$

где

$$\text{tr } S^W = \frac{T^2}{3} + T^2 \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4(4i^2 - 1)} + \frac{1}{4[4(i+1)^2 - 1]} \right) = T^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4i^2 - 1} \right).$$

Сумма ряда в правой части равенства равна $1/2$ [42, 163], поэтому

$$\text{tr } S^W = \frac{T^2}{2}$$

и такое же значение можно получить следующим образом:

$$\int_{\mathbb{T}} R_W(t, t) dt = \int_0^T t dt = \frac{T^2}{2}. \quad \blacksquare$$

Пример 2.9. Представить броуновский мост $Y(\cdot)$ в виде ряда по собственным функциям линейного интегрального оператора с ядром $R_Y(t, \tau) = \min\{t, \tau\} - t\tau/T$, $t, \tau \in \mathbb{T} = [0, T]$. Найти соответствующую спектральную характеристику \mathcal{Y} .

□ Броуновский мост $Y(\cdot)$ — случайный процесс с математическим ожиданием $m_Y(t) \equiv 0$ и корреляционной функцией $R_Y(t, \tau) = \min\{t, \tau\} - t\tau/T$ (см. примеры случайных процессов в разд. 2.1).

Запишем условие, которому удовлетворяют собственные функции линейного интегрального оператора с ядром $R_Y(\cdot)$ (см. п. 2 замечаний 2.2):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} R_Y(t, \tau) q(i, \tau) d\tau &= \int_{\mathbb{T}} \left(\min\{t, \tau\} - \frac{t\tau}{T} \right) q(i, \tau) d\tau = \int_0^t \tau q(i, \tau) d\tau + \\ &+ \int_t^T tq(i, \tau) d\tau - \frac{1}{T} \int_0^T t\tau q(i, \tau) d\tau = \lambda_i q(i, t), \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

следовательно, $q(i, 0) = q(i, T) = 0$. Дифференцируя дважды по t , получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка (2.17) и общее решение (2.18), как и в примере 2.4.

Из краевых условий и условия нормировки $\|q(i, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = 1$ находим [120]

$$q(i, t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{i\pi t}{T}, \quad \lambda_i^{-1} = \left(\frac{i\pi}{T} \right)^2, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

т.е. получаем искомое представление случайного процесса $Y(\cdot)$ в виде ряда:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{T}{i\pi} \zeta_i q(i, t),$$

где ζ_i — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение (для удобства нумерация функций базисной системы здесь начинается с единицы).

Далее будем обозначать эту базисную систему $\{\hat{S}(i, \cdot)\}_{i=1}^{\infty}$. Она дополняет косинусоиды $\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ до базисной системы тригонометрических функций, ортонормированной на отрезке $[-T, T]$ (см. п. 2 замечаний 1.1).

Следовательно, элементы спектральной характеристики \mathcal{Y} броуновского моста $Y(\cdot)$ относительно базисной системы $\{S(i, \cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ представляются в форме

$$\mathcal{Y}_i = \frac{T}{i\pi} \zeta_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

поэтому

$$\mathcal{Y} = \frac{T}{\pi} \cdot \left[\zeta_1 \quad \frac{\zeta_2}{2} \quad \frac{\zeta_3}{3} \quad \dots \right]^T.$$

Применим формулы (2.9) и (2.10), принимая во внимание соотношения $E\zeta_i = 0$ и $E\zeta_i^2 = 1$. Тогда первая и вторая нестационарные спектральные плотности броуновского моста $Y(\cdot)$ имеют вид

$${}^1S^Y = E\mathcal{W} = [0 \ 0 \ 0 \ \dots]^T \quad \text{и} \quad S^Y = E\mathcal{W}\mathcal{W}^T = \frac{T^2}{\pi^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Используя связь винеровского процесса и броуновского моста [120, 239]:

$$Y(t) = W(t) - \frac{t}{T} W(T),$$

получаем следующее представление винеровского процесса $W(\cdot)$:

$$W(t) = W(T) \frac{t}{T} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{T}{i\pi} \zeta_i q(i, t) = \frac{W(T)}{\sqrt{T}} \int_0^t \hat{C}(0, \tau) d\tau + \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i \int_0^t \hat{C}(i, \tau) d\tau, \quad (2.34)$$

где случайная величина $W(T)$ имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией T , а $W(T)/\sqrt{T}$ — стандартное нормальное распределение. Таким образом, представление винеровского процесса $W(\cdot)$ в виде ряда по собственным функциям линейного интегрального оператора, ядро которого — корреляционная функция $R_Y(\cdot)$ броуновского моста $Y(\cdot)$, согласуется с представлениями (2.32) и (2.33), где в качестве базисной системы применяются косинусоиды (1.6).

Используем представление (2.33), т.е. $W(t) = \mathcal{V}^T \mathbf{1}_t^*$, в котором \mathcal{V} — спектральная характеристика (2.26) белого шума, образованная независимыми случайными величинами $\{\zeta_i\}_{i=0}^\infty$, имеющими стандартное нормальное распределение, а $\mathbf{1}_t^*$ — спектральная характеристика единичной ступенчатой функции $f^*(\tau) = 1(t - \tau)$ как функции переменной τ (спектральная характеристика индикатора множества $[0, t]$) относительно косинусоид (1.6). С учетом результатов примера 1.4 находим

$$W(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i (\mathbf{1}_t^*)_i, \quad (\mathbf{1}_t^*)_i = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{T}}, & i = 0, \\ \frac{\sqrt{2T}}{i\pi} \sin \frac{i\pi t}{T}, & i = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

т.е.

$$W(t) = \frac{t\zeta_0}{\sqrt{T}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2T}\zeta_i}{i\pi} \sin \frac{i\pi t}{T},$$

что эквивалентно представлению (2.34) с точностью до обозначения $\zeta_0 = W(T)/\sqrt{T}$. ■

Линейные функционалы, о которых шла речь в разд. 1.1, можно рассматривать на пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ или на некотором подпространстве пространства $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$, так как случайный процесс $F(\cdot) = F(\cdot, \omega) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ при фиксированном $\omega \in \Omega$ — это элемент пространства $L_2(\mathbb{T})$. В частности, рассмотрим функционал $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}$, ставящий в соответствие функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ интеграл от этой функции по отрезку \mathbb{T} . Значение такого функционала при условии, что $\mathbf{1}$ — его спектральная характеристика, совпадающая со спектральной характеристикой функции $f_0(t) \equiv 1$, задается формулой (1.32):

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}} F(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} F(t) dt = \mathbf{1}^T \mathcal{F} \quad \text{P-п.н.}, \quad \mathcal{F} = \mathbb{S}[F(\cdot)]. \quad (2.35)$$

Пример 2.10. Найти интеграл

$$\int_{\mathbb{T}} W(t) dt, \quad \mathbb{T} = [0, T],$$

используя спектральную форму математического описания и полиномы Лежандра (1.5).

□ Применим формулу (2.35):

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}} W(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} W(t) dt = \mathbf{1}^T \mathcal{W},$$

где $\mathbf{1}$ и \mathcal{W} — спектральные характеристики функции $f_0(t) \equiv 1$ и винеровского процесса $W(\cdot)$ соответственно относительно полиномов Лежандра (1.5). Они получены ранее в примерах 1.1 и 2.8. Тогда

$$\mathbf{1}^T \mathcal{W} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{1}_i \mathcal{W}_i,$$

где

$$\mathbf{1}_i = \begin{cases} \sqrt{T}, & i = 0, \\ 0, & i = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad \text{и} \quad \mathcal{W}_i = \begin{cases} T \left(\frac{\zeta_0}{2} - \frac{\zeta_1}{2\sqrt{3}} \right), & i = 0, \\ T \left(\frac{\zeta_{i-1}}{2\sqrt{4i^2 - 1}} - \frac{\zeta_{i+1}}{2\sqrt{4(i+1)^2 - 1}} \right), & i = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

а ζ_i — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение.

Таким образом,

$$\int_{\mathbb{T}} W(t) dt = \frac{T\sqrt{T}}{2} \left(\zeta_0 - \frac{\zeta_1}{\sqrt{3}} \right). \quad \blacksquare$$

Пример 2.11. Найти интеграл

$$\int_{\mathbb{T}} Y(t) dt, \quad \mathbb{T} = [0, T],$$

используя спектральную форму математического описания и базисную систему $\{\hat{S}(i, \cdot)\}_{i=1}^{\infty}$, сформированную в примере 2.9.

□ Напомним, что $Y(\cdot)$ — броуновский мост, для которого в примере 2.9 получено представление в виде ряда по собственным функциям линейного интегрального оператора с ядром $R_Y(t, \tau) = \min\{t, \tau\} - t\tau/T$.

Согласно формуле (2.35)

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}} Y(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} Y(t) dt = \mathbf{1}^T \mathcal{Y},$$

где $\mathbf{1}$ и \mathcal{Y} — спектральные характеристики функции $f_0(t) \equiv 1$ и броуновского моста $Y(\cdot)$ соответственно относительно базисной системы $\{\hat{S}(i, \cdot)\}_{i=1}^{\infty}$.

Спектральная характеристика \mathcal{Y} получена в примере 2.9, а спектральную характеристику $\mathbf{1}$ требуется найти. Ее элементы заданы формулой (1.11):

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_i &= (q(i, \cdot), f_0(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} \hat{S}(i, t) dt = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T \sin \frac{i\pi t}{T} dt = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{T}} \frac{T}{i\pi} \cos \frac{i\pi t}{T} \Big|_0^T = \frac{\sqrt{2T}}{i\pi} (1 - \cos i\pi) = \frac{\sqrt{2T}}{i\pi} (1 - (-1)^i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

т.е.

$$\mathbf{1} = \frac{\sqrt{2T}}{\pi} \cdot \left[2 \quad 0 \quad \frac{2}{3} \quad 0 \quad \frac{2}{5} \quad 0 \quad \dots \right]^T.$$

Проверим свойство сохранения нормы (1.25), применяя табличную формулу из [42]:

$$\|\mathbf{1}\|_{\ell_2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_i^2 = \frac{2T}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^i)^2}{i^2} = \frac{8T}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = T \quad \text{и} \quad \|f_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \int_0^T dt = T.$$

Тогда

$$\mathbf{1}^T \mathcal{Y} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_i \mathcal{Y}_i,$$

где

$$\mathcal{Y}_i = \frac{T}{i\pi} \zeta_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

а ζ_i — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение.

Следовательно,

$$\int_{\mathbb{T}} Y(t) dt = \frac{T\sqrt{2T}}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^i) \zeta_i}{i^2} = \frac{(2T)^{3/2}}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_{2k-1}}{(2k-1)^2}. \quad \blacksquare$$

В общем случае можно выразить первые два момента случайной величины $\mathcal{Z}F(\cdot)$, где \mathcal{Z} — линейный функционал, определенный на пространстве $L_2(\mathbb{T})$, через нестационарные спектральные плотности случайного процесса $F(\cdot)$. Пусть Z — спектральная характеристика линейного функционала \mathcal{Z} , или спектральная характеристика функции $z(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, задающей функционал \mathcal{Z} формулой (1.30). Тогда математическое ожидание, дисперсия и второй начальный момент выражаются следующим образом:

$$m_{\mathcal{Z}F(\cdot)} = \mathbb{E}\mathcal{Z}F(\cdot) = Z^T {}^1S^F, \quad D_{\mathcal{Z}F(\cdot)} = \mathbb{E}[\mathcal{Z}F(\cdot) - m_{\mathcal{Z}F(\cdot)}]^2 = Z^T S^F Z, \\ \mathbb{E}[\mathcal{Z}F(\cdot)]^2 = D_{\mathcal{Z}F(\cdot)} + m_{\mathcal{Z}F(\cdot)}^2 = Z^T B^F Z,$$

где ${}^1S^F$ и S^F — первая и вторая нестационарные спектральные плотности случайного процесса $F(\cdot)$ соответственно, B^F — вторая начальная нестационарная спектральная плотность случайного процесса $F(\cdot)$ (см. разд. 2.1).

Действительно, согласно свойствам математического ожидания и теореме 1.2 имеем

$$m_{\mathcal{Z}F(\cdot)} = \mathbb{E}\mathcal{Z}F(\cdot) = \mathbb{E}(z(\cdot), F(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = (z(\cdot), \mathbb{E}F(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = (z(\cdot), m_F(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = Z^T {}^1S^F.$$

Далее,

$$D_{\mathcal{Z}F(\cdot)} = \mathbb{E}[\mathcal{Z}F(\cdot) - m_{\mathcal{Z}F(\cdot)}]^2 = \mathbb{E}(z(\cdot), F(\cdot) - m_F(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \mathbb{E}(z(\cdot), \check{F}(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \\ = \mathbb{E}(z(\cdot) \otimes z(\cdot), \check{F}(\cdot) \otimes \check{F}(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^2)} = (z(\cdot) \otimes z(\cdot), \mathbb{E}[\check{F}(\cdot) \otimes \check{F}(\cdot)])_{L_2(\mathbb{T}^2)} = (z(\cdot) \otimes z(\cdot), R_F(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^2)},$$

или с учетом теоремы 1.5

$$D_{\mathcal{Z}F(\cdot)} = \text{tr} ZZ^T S^F = Z^T S^F Z,$$

где ZZ^T — спектральная характеристика функции $z(\cdot) \otimes z(\cdot)$ (см. теорему 1.4 и формулу (1.55)). Аналогичным образом можно доказать соотношение для второго начального момента случайной величины $\mathcal{Z}F(\cdot)$, либо воспользоваться соотношением (2.1), которое устанавливает связь между вторыми нестационарными спектральными плотностями.

Случайный линейный функционал \mathcal{J}_T^W , ставящий в соответствие функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ стохастический интеграл по отрезку \mathbb{T} , можно определить и для случайных процессов $F(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$, однако при этом важно, в каком смысле понимается стохастический интеграл. Стохастический интеграл от случайного процесса $F(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ определяется как среднеквадратический предел последовательности интегральных сумм [4, 106]:

$$\int_{\mathbb{T}} F(t) d_{\theta}W(t) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n ((1-\theta)F(\vartheta_{i-1}) + \theta F(\vartheta_i))(W(\vartheta_i) - W(\vartheta_{i-1})),$$

где $\theta \in [0, 1]$, $\{\vartheta_i\}_{i=0}^n$ — разбиение отрезка \mathbb{T} с условием

$$t_0 = \vartheta_0 < \vartheta_1 < \dots < \vartheta_n = T, \quad \max_{1 \leq i \leq n} \{\vartheta_i - \vartheta_{i-1}\} = 0. \quad (2.36)$$

При $\theta = 1/2$ получаем определение (симметризованного) стохастического интеграла Стратоновича, а при $\theta = 0$ — определение стохастического интеграла Ито:

$$\int_{\mathbb{T}} F(t) d_{1/2}W(t) = \int_{\mathbb{T}} F(t) \circ dW(t), \quad \int_{\mathbb{T}} F(t) d_0W(t) = \int_{\mathbb{T}} F(t) dW(t).$$

Если стохастический интеграл рассматривать как стохастический интеграл Стратоновича, то соотношение (2.28) остается в силе, поскольку определение интеграла Стратоновича дает

возможность применять те же правила интегрирования, что и для функций $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$:

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^W F(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} F(t) \circ dW(t) = \mathcal{V}^T \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} = \mathbb{S}[F(\cdot)], \quad (2.37)$$

где \mathcal{V} — спектральная характеристика (2.26) белого шума. Более того, такое представление можно принять за определение стохастического интеграла — это стохастический интеграл Огавы [332, 333]:

$${}^O \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^W F(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} F(t) \diamond dW(t) = \mathcal{V}^T \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} = \mathbb{S}[F(\cdot)].$$

Стохастический интеграл Ито связан с интегралом Стратоновича [4, 77, 102, 106]:

$$\int_{t_0}^t F(t) dW(t) = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \sigma(t) dt + \int_{t_0}^t F(t) \circ dW(t), \quad t > t_0, \quad (2.38)$$

в предположении, что случайный процесс $F(\cdot)$ представляется в виде

$$F(t) = \int_{t_0}^t \sigma(\tau) dW(\tau), \quad (2.39)$$

где $\sigma(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$. Например, если $F(\cdot) = W(\cdot)$, то $\sigma(t) \equiv 1$.

В общем случае $F(\cdot)$ — процесс Ито [77, 102], заданный формулой

$$F(t) = F_0 + \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \sigma(\tau) dW(\tau),$$

в которой $EF_0^2 < \infty$ и $a(\cdot), \sigma(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$.

Первое слагаемое в правой части равенства (2.38) при $t = T$ содержит значение линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}$ на случайном процессе $\sigma(\cdot)$:

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}} \sigma(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \sigma(t) dt = \mathbf{1}^T \Sigma, \quad \Sigma = \mathbb{S}[\sigma(\cdot)].$$

Тогда

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^W F(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} F(t) dW(t) = -\frac{1}{2} \mathbf{1}^T \Sigma + \mathcal{V}^T \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} = \mathbb{S}[F(\cdot)], \quad (2.40)$$

где $\mathbf{1}$ — спектральная характеристика линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}$, совпадающая со спектральной характеристикой функции $f_0(t) \equiv 1$, определенной относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.1).

В приведенных соотношениях функционалы, соответствующие стохастическим интегралам Стратоновича и Ито, обозначены ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^W$ и ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^W$. Соотношения (2.37) и (2.40) справедливы с вероятностью 1.

Математическое ожидание стохастического интеграла Ито (2.40) равно нулю [32, 37, 102]. Это означает, что

$$\mathbb{E}[{}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^W F(\cdot)] = \mathbb{E}\left[-\frac{1}{2} \mathbf{1}^T \Sigma + \mathcal{V}^T \mathcal{F}\right] = -\frac{1}{2} \mathbf{1}^T \mathbb{E} \Sigma + \mathbb{E} \mathcal{V}^T \mathcal{F} = 0, \quad \text{или} \quad \mathbb{E} \mathcal{V}^T \mathcal{F} = \frac{1}{2} \mathbf{1}^T \mathbb{E} \Sigma,$$

причем последнее выражение — это математическое ожидание стохастического интеграла Стратоновича (2.37):

$$\mathbb{E}[{}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^W F(\cdot)] = \frac{1}{2} \mathbf{1}^T \mathbb{E} \Sigma.$$

Дисперсия стохастического интеграла Ито совпадает со вторым начальным моментом и выражается соотношением (изометрия Ито [32, 37, 102])

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{T}} F(t) dW(t)\right]^2 = \mathbb{E} \int_{\mathbb{T}} F^2(t) dt = \mathbb{E} \|F(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2, \quad (2.41)$$

т.е. согласно свойству сохранения нормы (см. свойства спектрального преобразования случайных процессов в разд. 2.2 и формулу (2.4))

$$\mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{T}} F(t) dW(t) \right]^2 = \text{tr } B^F. \quad (2.42)$$

Пример 2.12. Найти стохастические интегралы Стратоновича и Ито

$$\int_{\mathbb{T}} W(t) \circ dW(t) \quad \text{и} \quad \int_{\mathbb{T}} W(t) dW(t),$$

используя спектральную форму математического описания и полиномы Лежандра (1.5), заданные на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Винеровский процесс выражается формулой (2.39) при $\sigma(t) \equiv 1$ (см. также формулу (2.33)). Следовательно, $\Sigma = \mathbf{1}$ — спектральная характеристика функции $f_0(t) \equiv 1$, найденная в примере 1.1.

Согласно соотношениям (2.37) и (2.40)

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^W W(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} W(t) \circ dW(t) = \mathcal{V}^T \mathcal{W}, \quad {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^W W(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} W(t) dW(t) = -\frac{1}{2} \mathbf{1}^T \mathbf{1} + \mathcal{V}^T \mathcal{W},$$

где \mathcal{V} — спектральная характеристика (2.26) белого шума, а спектральная характеристика \mathcal{W} винеровского процесса $W(\cdot)$ относительно полиномов Лежандра (1.5) представлена в примере 2.8. Тогда

$$\mathcal{V}^T \mathcal{W} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{V}_i \mathcal{W}_i,$$

где

$$\mathcal{V}_i = \zeta_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{и} \quad \mathcal{W}_i = \begin{cases} T \left(\frac{\zeta_0}{2} - \frac{\zeta_1}{2\sqrt{3}} \right), & i = 0, \\ T \left(\frac{\zeta_{i-1}}{2\sqrt{4i^2-1}} - \frac{\zeta_{i+1}}{2\sqrt{4(i+1)^2-1}} \right), & i = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

а ζ_i — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, т.е.

$$\int_{\mathbb{T}} W(t) \circ dW(t) = \frac{T}{2} \text{l.i.m.}_{i \rightarrow \infty} \left(\zeta_0^2 - \frac{\zeta_0 \zeta_1}{\sqrt{3}} + \frac{\zeta_0 \zeta_1}{\sqrt{3}} - \frac{\zeta_1 \zeta_2}{\sqrt{15}} + \frac{\zeta_1 \zeta_2}{\sqrt{15}} - \frac{\zeta_2 \zeta_3}{\sqrt{35}} + \dots - \frac{\zeta_i \zeta_{i+1}}{\sqrt{4(i+1)^2-1}} \right) = \frac{T}{2} \zeta_0^2.$$

Далее, $\mathbf{1}^T \mathbf{1} = T$ согласно свойству (1.25) сохранения нормы (см. пример 1.2), следовательно,

$$\int_{\mathbb{T}} W(t) dW(t) = -\frac{T}{2} + \frac{T}{2} \zeta_0^2 = \frac{T}{2} (\zeta_0^2 - 1).$$

В заключение найдем дисперсию стохастического интеграла Ито:

$$\mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{T}} W(t) dW(t) \right]^2 = \frac{T^2}{4} \mathbb{E} (\zeta_0^2 - 1)^2 = \frac{T^2}{4} (\mathbb{E} \zeta_0^4 - 2\mathbb{E} \zeta_0^2 + 1).$$

Моменты четного порядка p для случайной величины ζ_0 , имеющей стандартное нормальное распределение, определяются формулой $\mathbb{E} \zeta_0^p = (p-1)!!$ (моменты нечетного порядка равны нулю). Для $p = 4$ имеем $\mathbb{E} \zeta_0^4 = 3$, т.е.

$$\mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{T}} W(t) dW(t) \right]^2 = \frac{T^2}{2}.$$

Полученное значение совпадает с величиной $E\|W(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2$, найденной в примере 2.8, что является следствием изометрии Ито (2.41) (кроме того, см. формулу (2.42)):

$$E\left[\int_{\mathbb{T}} W(t)dW(t)\right]^2 = E\int_{\mathbb{T}} W^2(t)dt = E\|W(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2. \quad \blacksquare$$

Можно рассмотреть общий случай стохастических θ -интегралов по винеровскому процессу. Стохастический θ -интеграл связан с интегралом Ито соотношением

$$\int_{t_0}^t F(\tau)dW(\tau) = -\theta \int_{t_0}^t \sigma(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t F(\tau)d_{\theta}W(\tau), \quad t > t_0, \quad (2.43)$$

где случайный процесс $F(t)$ представляется в виде (2.39). Следовательно,

$$\int_{\mathbb{T}} F(t)d_{\theta}W(t) = \left[\theta - \frac{1}{2}\right] \int_{\mathbb{T}} \sigma(t)dt + \int_{\mathbb{T}} F(t) \circ dW(t)$$

и

$${}^{\theta}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^W F(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} F(t)d_{\theta}W(t) = \left[\theta - \frac{1}{2}\right] \mathbf{1}^T \Sigma + \mathcal{V}^T \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} = \mathbb{S}[F(\cdot)], \quad (2.44)$$

где $\mathbf{1}$ — спектральная характеристика линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}$, совпадающая со спектральной характеристикой функции $f_0(t) \equiv 1$, определенной относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.1). Если $F(\cdot) = W(\cdot)$, то $\mathcal{F} = \mathcal{W}$ и $\Sigma = \mathbf{1}$.

В соотношении (2.44) функционал, соответствующий стохастическому θ -интегралу, обозначен ${}^{\theta}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^W$. Это соотношение совпадает с (2.37) при $\theta = 1/2$ (стохастический интеграл Стратоновича) и с (2.40) при $\theta = 0$ (стохастический интеграл Ито), оно справедливо с вероятностью 1.

Опираясь на решение примера 2.12, можно записать

$${}^{\theta}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^W W(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} W(t)d_{\theta}W(t) = \left[\theta - \frac{1}{2}\right] \mathbf{1}^T \mathbf{1} + \mathcal{V}^T \mathcal{W},$$

где \mathcal{V} — спектральная характеристика (2.26) белого шума, $\mathbf{1}$ и \mathcal{W} — спектральные характеристики функции $f_0(t) \equiv 1$ и винеровского процесса $W(\cdot)$ соответственно, определенные относительно полиномов Лежандра (1.5) (см. примеры 1.1 и 2.8), т.е.

$$\int_{\mathbb{T}} W(t)d_{\theta}W(t) = T\left[\theta - \frac{1}{2}\right] + \frac{T}{2} \zeta_0^2 = \frac{T}{2} (\zeta_0^2 + 2\theta - 1), \quad \mathbb{T} = [0, T],$$

или в более привычной форме [106]

$$\int_{\mathbb{T}} W(t)d_{\theta}W(t) = \frac{W^2(T)}{2} + T\left[\theta - \frac{1}{2}\right],$$

$$\int_{\mathbb{T}} W(t) \circ dW(t) = \frac{W^2(T)}{2} \left(\theta = \frac{1}{2}\right), \quad \int_{\mathbb{T}} W(t)dW(t) = \frac{W^2(T) - T}{2} \quad (\theta = 0).$$

Другой пример случайного линейного функционала — интегрирование по центрированному пуассоновскому процессу $\Pi(\cdot)$ интенсивности $\lambda > 0$ [37]. Определим линейный функционал $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\Pi}$, ставящий в соответствие функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ стохастический интеграл по отрезку $\mathbb{T} = [t_0, T]$:

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\Pi} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} f(t)d\Pi(t).$$

Если $t_0 \neq 0$, то пуассоновский процесс задается условиями

$$P(t_0) = 0, \quad P(t) - P(\tau) \sim \mathcal{P}_{\text{law}}(\lambda(t - \tau)), \quad t, \tau \geq t_0,$$

а в случае $t_0 = 0$ он определен ранее (см. примеры случайных процессов в разд. 2.1). Для центрированного пуассоновского процесса

$$\Pi(t) = P(t) - EP(t) = P(t) - \lambda(t - t_0),$$

поэтому

$$m_{\Pi}(t) = \mathbb{E}\Pi(t) \equiv 0, \quad R_{\Pi}(t, \tau) = \text{cov}(\Pi(t), \Pi(\tau)) = \lambda(\min\{t, \tau\} - t_0).$$

Стохастический интеграл по центрированному пуассоновскому процессу от функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ определяется аналогично стохастическому интегралу по винеровскому процессу, т.е. сначала для ступенчатой функции (2.23) (в формуле (2.24) достаточно заменить обозначение $W(\cdot)$ на $\Pi(\cdot)$), а затем

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\Pi} f(\cdot) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\Pi} f^{(n)}(\cdot),$$

где последовательность ступенчатых функций $f^{(n)}(\cdot)$ сходится к функции $f(\cdot)$ по норме пространства $L_2(\mathbb{T})$.

Для функций $f(\cdot)$, определенных однозначно в каждой точке отрезка \mathbb{T} стохастический интеграл по центрированному пуассоновскому процессу можно определить следующим образом [279]:

$$\int_{\mathbb{T}} f(t) dP(t) = \begin{cases} 0, & P(T) = 0, \\ \sum_{i=1}^{P(T)} f(\vartheta_i - 0), & P(T) > 0, \end{cases} \quad \int_{\mathbb{T}} f(t) d\Pi(t) = \int_{\mathbb{T}} f(t) dP(t) - \lambda \int_{\mathbb{T}} f(t) dt,$$

где ϑ_i — точки пуассоновского потока при $i > 0$, а величины $\vartheta_i - \vartheta_{i-1}$ с учетом условия $\vartheta_0 = t_0$ имеют показательное распределение с параметром λ и $P(t) = i - 1$ для всех $t \in [\vartheta_{i-1}, \vartheta_i)$.

Воспользуемся определением спектральной характеристики случайного линейного функционала: $\mathbb{S}[\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\Pi}] = \mathcal{N}$, где элементы спектральной характеристики \mathcal{N} задаются соотношением

$$\mathcal{N}_i = \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\Pi} q(i, \cdot) = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) d\Pi(t) = \eta_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.45)$$

а η_i — центрированные и попарно некоррелированные случайные величины [281, 334]:

$$\mathcal{N} = [\eta_0 \ \eta_1 \ \eta_2 \ \dots]^T. \quad (2.46)$$

Если $q(i, t) \equiv 1$, то η_i — случайная величина, имеющая центрированное пуассоновское распределение с параметром λ .

Элементы первой и второй нестационарных спектральных плотностей, соответствующие спектральной характеристике \mathcal{N} обобщенного случайного процесса $N(\cdot)$, по сравнению со спектральной характеристикой винеровского процесса отличаются только множителем λ :

$${}^1S_i^N = \mathbb{E}\mathcal{N}_i = 0, \quad S_{ij}^N = \text{cov}(\mathcal{N}_i, \mathcal{N}_j) = \lambda\delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера (1.4). Следовательно, $m_N(t) \equiv 0$ и $R_N(t, \tau) = \lambda\delta(t - \tau)$, поскольку именно таким функциям отвечают нулевая первая нестационарная спектральная плотность ${}^1S^N$ и вторая нестационарная спектральная плотность S^N , которая задается как бесконечная единичная матрица с коэффициентом λ :

$${}^1S^N = \mathbb{E}\mathcal{N} = \bar{O}, \quad S^N = \text{cov} \mathcal{N} = \mathbb{E}\mathcal{N}\mathcal{N}^T = \lambda E,$$

т.е. $N(\cdot)$ — пуассоновский белый шум интенсивности λ [116].

Спектральную характеристику \mathcal{N} случайного линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\Pi}$, или обобщенного случайного процесса $N(\cdot)$, будем называть спектральной характеристикой пуассоновского

белого шума. Этот обобщенный случайный процесс рассматривают как производную центрированного пуассоновского процесса [276]:

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} = N(t), \quad (2.47)$$

где производная понимается формально, так как траектории последнего имеют разрывы (они кусочно-линейные).

Значение функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\Pi}$ вычисляется по формуле

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\Pi} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} f(t) d\Pi(t) = \mathcal{N}^T F, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)]. \quad (2.48)$$

Замечания 2.4.

1. Спектральная характеристика пуассоновского белого шума зависит от выбора базисной системы и этим она отличается от спектральной характеристики гауссовского белого шума (см. п. 1 замечаний 2.3).

2. Стохастические интегралы вида (2.48), как и стохастические интегралы вида (2.28), — это случайные величины с конечным моментом второго порядка, т.е. гильбертовы случайные величины (см. п. 2 замечаний 2.3), но в отличие от интегралов (2.28) они характеризуются другим распределением.

Независимые случайные величины $\{\eta_i\}_{i=0}^{\infty}$, определенные соотношением (2.45), образуют ортогональную, а при $\lambda = 1$ ортонормированную систему в пространстве \mathcal{L}_2 [279]: $(\eta_i, \eta_j)_{\mathcal{L}_2} = \lambda \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера (1.4).

Соотношение (2.48) можно представить в виде формулы

$$I_f = \sum_{i=0}^{\infty} F_i \eta_i, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)],$$

в которой $I_f = \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\Pi} f(\cdot)$, и трактовать ее правую часть как ряд по базисной системе $\{\eta_i\}_{i=0}^{\infty}$ подпространства $\mathcal{L}'_2 = \{\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\Pi} f(\cdot) : f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})\}$, F_i — коэффициенты разложения стохастического интеграла.

Следовательно, $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\Pi}$ можно рассматривать как линейный оператор, определенный на пространстве $L_2(\mathbb{T})$ со значениями в \mathcal{L}_2 . Он устанавливает изоморфизм пространств $L_2(\mathbb{T})$ и \mathcal{L}'_2 и для него справедливы условия

$$\lambda \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \|I_f\|_{\mathcal{L}_2}^2, \quad \lambda (f(\cdot), g(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = (I_f, I_g)_{\mathcal{L}_2}.$$

Пример 2.13. Найти стохастические интегралы

$$\int_{\mathbb{T}} t^n d\Pi(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

используя спектральную форму математического описания и полиномы Лежандра (1.5), заданные на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Сравнивая выражения (2.28) и (2.48), делаем вывод, что искомым результатом можно получить из примера 2.5 заменой спектральной характеристики (2.26) гауссовского белого шума на спектральную характеристику (2.46) пуассоновского белого шума и, следовательно, заменой случайных величин ζ_i , имеющих стандартное нормальное распределение, на случайные величины η_i , определенные соотношением (2.45) и зависящие в том числе от λ — интенсивности центрированного пуассоновского процесса $\Pi(\cdot)$.

Таким образом,

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\Pi} f_n(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} f_n(t) d\Pi(t) = \mathcal{N}^{\top} F^n = \sum_{i=0}^{\infty} \eta_i F_i^n,$$

где \mathcal{N} — спектральная характеристика (2.46) белого шума, F^n — спектральные характеристики функций $f_n(t) = t^n$ относительно полиномов Лежандра (1.5), которые достаточно взять из примеров 1.1 и 1.2.

Ориентируясь на пример 2.5, находим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} d\Pi(t) &= \sqrt{T} \eta_0, & \int_{\mathbb{T}} t d\Pi(t) &= T\sqrt{T} \left(\frac{1}{2} \eta_0 + \frac{\sqrt{3}}{6} \eta_1 \right), \\ \int_{\mathbb{T}} t^2 d\Pi(t) &= T^2 \sqrt{T} \left(\frac{1}{3} \eta_0 + \frac{\sqrt{3}}{6} \eta_1 + \frac{\sqrt{5}}{30} \eta_2 \right), \\ \int_{\mathbb{T}} t^3 d\Pi(t) &= T^3 \sqrt{T} \left(\frac{1}{4} \eta_0 + \frac{3\sqrt{3}}{20} \eta_1 + \frac{\sqrt{5}}{20} \eta_2 + \frac{\sqrt{7}}{140} \eta_3 \right), \end{aligned}$$

а в общем случае

$$\int_{\mathbb{T}} t^n d\Pi(t) = \sum_{i=0}^n \eta_i F_i^n, \quad F_i^n = T^n \sqrt{T} \sqrt{2i+1} \sum_{k=0}^i \frac{l_{ik}}{k+n+1},$$

где величины l_{ik} определены после формулы (1.5). ■

Как и для винеровского процесса $W(\cdot)$, для центрированного пуассоновского процесса $\Pi(\cdot)$ интенсивности $\lambda > 0$ можно определить линейный функционал $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*\Pi}$, ставящий в соответствие функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ стохастический интеграл от функции $f^\diamond(t) = f(t, t)$ по отрезку \mathbb{T} :

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*\Pi} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} f(t, t) d\Pi(t),$$

т.е. интеграл от сужения функции $f(\cdot)$ двух переменных на диагональ квадрата \mathbb{T}^2 (см. также разд. 1.9).

Применим определение двумерной спектральной характеристики случайного линейного функционала: $\mathbb{S}[\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*\Pi}] = E^{\mathcal{N}}$. Тогда элементы спектральной характеристики $E^{\mathcal{N}}$ — симметрической случайной матрицы — задаются соотношением

$$E_{ij}^{\mathcal{N}} = \mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*\Pi} q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot) = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) q(j, t) d\Pi(t), \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.49)$$

Представление двумерной спектральной характеристики $E^{\mathcal{N}}$ случайного линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*\Pi}$ отличается от представления двумерной спектральной характеристики $E^{\mathcal{V}}$ случайного линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*W}$ только обозначениями. Сформулируем соответствующую теорему, доказательство которого проводится так же, как и доказательство теоремы 2.3.

Теорема 2.4. Пусть $E^{\mathcal{N}}$ — двумерная спектральная характеристика случайного линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*\Pi}$, \mathcal{N} — спектральная характеристика пуассоновского белого шума, V — спектральная характеристика оператора умножения функций. Спектральные характеристики $E^{\mathcal{N}}$ и V определены относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$. Тогда спектральные характеристики $E^{\mathcal{N}}$ и \mathcal{N} связаны соотношением

$$E^{\mathcal{N}} = V\mathcal{N}. \quad (2.50)$$

Пример 2.14. Найти двумерную спектральную характеристику $E^{\mathcal{N}}$ случайного линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*\Pi}$ относительно косинусоид (1.6) и функций Уолша (1.7), заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Опираясь на решение примеров 2.6 и 2.7, записываем искомые двумерные спектральные характеристики $E^{\mathcal{N}}$ относительно косинусоид (1.6) и функций Уолша (1.7):

$$E^{\mathcal{N}} = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot \begin{bmatrix} \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 & \cdots \\ \eta_1 & \eta_0 + \frac{\eta_2}{\sqrt{2}} & \frac{\eta_1 + \eta_3}{\sqrt{2}} & \cdots \\ \eta_2 & \frac{\eta_1 + \eta_3}{\sqrt{2}} & \eta_0 + \frac{\eta_4}{\sqrt{2}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad E^{\mathcal{N}} = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot \begin{bmatrix} \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 & \cdots \\ \eta_1 & \eta_0 & \eta_3 & \cdots \\ \eta_2 & \eta_3 & \eta_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где η_i — центрированные и попарно некоррелированные случайные величины (2.45), которые зависят в том числе от λ — интенсивности центрированного пуассоновского процесса $\Pi(\cdot)$.

Первый из представленных результатов несложно получить, применяя теорему 2.4 и соотношение (2.50), а для второго результата (матрица Уолша – Теплица) проще воспользоваться соотношением (2.49) и мультипликативным свойством функций Уолша (1.76). ■

Центрированный пуассоновский процесс $\Pi(\cdot)$ интенсивности $\lambda > 0$ допустимо представить в форме

$$\Pi(t) = \int_{t_0}^t d\Pi(\tau) = \int_{\mathbb{T}} 1(t - \tau) d\Pi(\tau)$$

и далее, проводя такие же рассуждения, как и для винеровского процесса $W(\cdot)$, записать следующее представление для его спектральной характеристики:

$$\mathcal{S} = P^{-1}\mathcal{N}, \quad (2.51)$$

или в виде спектрального аналога выражения (2.47): $P\mathcal{S} = \mathcal{N}$, где \mathcal{N} — спектральная характеристика (2.46) белого шума $N(\cdot)$, образованная центрированными и попарно некоррелированными случайными величинами η_i , которые заданы соотношением (2.45).

Дополнительно центрированный пуассоновский процесс можно рассматривать как частный случай выражения (2.48):

$$\Pi(t) = \int_{\mathbb{T}} 1(t - \tau) d\Pi(\tau) = \mathcal{N}^T \mathbf{1}_t^*, \quad \mathbf{1}_t^* = \mathbb{S}[1(t - (\cdot))], \quad (2.52)$$

т.е. $\mathbf{1}_t^*$ — спектральная характеристика единичной ступенчатой функции $f^*(\tau) = 1(t - \tau)$ как функции переменной τ (спектральная характеристика индикатора множества $[t_0, t]$, см. пример 1.4). Кроме того, $\mathcal{N}^T \mathbf{1}_t^* = H_t \mathcal{N}$, где $H_t = [\mathbf{1}_t^*]^T$ — нестационарная сопряженная передаточная функция интегрирующего звена (см. п. 1 замечаний 1.9).

З а м е ч а н и е 2.5. Определения спектральных характеристик случайных процессов и случайных линейных функционалов, естественно, позволяют не ограничиваться центрированным пуассоновским процессом $\Pi(\cdot)$.

Действительно, для пуассоновского процесса $P(\cdot)$ имеем $\mathbb{S}[P(\cdot)] = \mathcal{S}^* = (\mathcal{S}_i^*)$, где элементы спектральной характеристики \mathcal{S}^* пуассоновского процесса удовлетворяют соотношению

$$\mathcal{S}_i^* = (q(i, \cdot), P(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) P(t) dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Аналогично, для линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^P$, который ставит в соответствие функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ стохастический интеграл по отрезку $\mathbb{T} = [t_0, T]$:

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^P f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} f(t) dP(t),$$

получаем $\mathbb{S}[\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^P] = \mathcal{N}^*$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_i^* &= \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^P q(i, \cdot) = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) dP(t) = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) d(\Pi(t) + \lambda t) = \\ &= \int_{\mathbb{T}} q(i, t) d\Pi(t) + \lambda \int_{\mathbb{T}} q(i, t) dt = \mathcal{N}_i + \lambda \mathbf{1}_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

или в матричной форме $\mathcal{N}^* = \mathcal{N} + \lambda \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — спектральная характеристика линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}$, ставящего в соответствие функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ интеграл от этой функции по отрезку \mathbb{T} , совпадающая со спектральной характеристикой функции $f_0(t) \equiv 1$ (см. разд. 1.1).

Для базисных систем (1.5)–(1.9) спектральная характеристика $\mathbf{1}$ получена в примере 1.1 и согласно этому результату

$$\mathcal{N}^* = [\eta_0 + \lambda\sqrt{T} \quad \eta_1 \quad \eta_2 \quad \dots]^T \quad (\mathbf{1} = \sqrt{T} \cdot [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots]^T).$$

Достаточно рассматривать \mathcal{N}^* как спектральную характеристику обобщенного случайного процесса $N^*(t) = N(t) + \lambda$, но она зависит от выбора базисной системы. Так, для базисной системы $\{\hat{S}(i, \cdot)\}_{i=1}^{\infty}$, сформированной в примере 2.9, спектральные характеристики $\mathbf{1}$ и \mathcal{N}^* отличаются от приведенных выше (см. также пример 2.11).

Умножая левую и правую части предпоследнего равенства на спектральную характеристику P^{-1} оператора интегрирования (см. разд. 1.6), находим

$$P^{-1}\mathcal{N}^* = P^{-1}\mathcal{N} + \lambda P^{-1}\mathbf{1} = P^{-1}\mathcal{N} + \lambda F,$$

где F — спектральная характеристика функции $f_1(t) = t - t_0$, что следует из свойства (1.86) спектрального преобразования интегралов от функций одной переменной и теоремы 1.7 (см. дополнительно пример 1.13). Здесь предполагается, что спектральные характеристики $\mathbf{1}$, F и P^{-1} определены относительно одной и той же базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$.

С другой стороны, случайные процессы $P(\cdot)$ и $\Pi(\cdot)$ связаны соотношением $P(t) = \Pi(t) + \lambda t$ (см. примеры случайных процессов в разд. 2.1), поэтому

$$\mathcal{S}^* = \mathbb{S}[P(\cdot)] = \mathbb{S}[\Pi(\cdot) + \lambda f_1(\cdot)] = \mathbb{S}[\Pi(\cdot)] + \lambda \mathbb{S}[f_1(\cdot)] = \mathcal{S} + \lambda F \quad \text{и} \quad \mathcal{S}^* = P^{-1}\mathcal{N}^*, \quad P\mathcal{S}^* = \mathcal{N}^*.$$

Пример 2.15. Найти интегралы

$$\int_{\mathbb{T}} P(t) dt \quad \text{и} \quad \int_{\mathbb{T}} \Pi(t) dt, \quad \mathbb{T} = [0, T],$$

используя спектральную форму математического описания и полиномы Лежандра (1.5).

□ Найдем спектральную характеристику \mathcal{S} центрированного пуассоновского процесса $\Pi(\cdot)$ интенсивности λ на основе представления (2.51) (см. также пример 2.8):

$$\mathcal{S}_i = \begin{cases} T \left(\frac{\eta_0}{2} - \frac{\eta_1}{2\sqrt{3}} \right), & i = 0, \\ T \left(\frac{\eta_{i-1}}{2\sqrt{4i^2 - 1}} - \frac{\eta_{i+1}}{2\sqrt{4(i+1)^2 - 1}} \right), & i = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

т.е.

$$\mathcal{S} = \frac{T}{2} \cdot \left[\eta_0 - \frac{\eta_1}{\sqrt{3}} \quad \frac{\eta_0}{\sqrt{3}} - \frac{\eta_2}{\sqrt{15}} \quad \frac{\eta_1}{\sqrt{15}} - \frac{\eta_3}{\sqrt{35}} \quad \dots \right]^T,$$

где η_i — центрированные и попарно некоррелированные случайные величины (2.45), а именно

$$\eta_i = \int_{\mathbb{T}} \hat{P}(i, t) d\Pi(t), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Далее воспользуемся формулой (2.35):

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}}\Pi(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \Pi(t) dt = \mathbf{1}^T \mathcal{S},$$

в которой $\mathbf{1}$ — спектральная характеристика функции $f_0(t) \equiv 1$ относительно полиномов Лежандра (1.5) (см. примеры 1.1 и 2.10). Тогда

$$\mathbf{1}^T \mathcal{S} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{1}_i \mathcal{S}_i, \quad \mathbf{1} = \sqrt{T} \cdot [1 \ 0 \ 0 \ \dots]^T,$$

т.е.

$$\int_{\mathbb{T}} \Pi(t) dt = \frac{T\sqrt{T}}{2} \left(\eta_0 - \frac{\eta_1}{\sqrt{3}} \right).$$

Перейдем к представлению спектральной характеристики \mathcal{S}^* пуассоновского процесса $P(\cdot)$ той же интенсивности λ . Согласно замечанию 2.5 имеем $\mathcal{S}^* = \mathcal{S} + \lambda F$, где F — спектральная характеристика функции $f_1(t) = t$ относительно полиномов Лежандра (см. пример 1.2):

$$F = T\sqrt{T} \cdot \left[\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{6} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \right]^T,$$

следовательно,

$$\mathcal{S}^* = \frac{T}{2} \cdot \left[\eta_0 - \frac{\eta_1}{\sqrt{3}} + \lambda\sqrt{T} \quad \frac{\eta_0}{\sqrt{3}} - \frac{\eta_2}{\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda\sqrt{T} \quad \frac{\eta_1}{\sqrt{15}} - \frac{\eta_3}{\sqrt{35}} \quad \dots \right]^T,$$

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}}P(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} P(t) dt = \mathbf{1}^T \mathcal{S}^* = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{1}_i \mathcal{S}_i^*,$$

т.е.

$$\int_{\mathbb{T}} P(t) dt = \frac{T\sqrt{T}}{2} \left(\eta_0 - \frac{\eta_1}{\sqrt{3}} + \lambda\sqrt{T} \right). \quad \blacksquare$$

Область определения случайного линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\Pi}$, который ставит в соответствие функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ стохастический интеграл по отрезку \mathbb{T} , можно расширить на пространство $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$. Формальный перенос определения стохастического интеграла по винеровскому процессу встречает затруднения. Вообще говоря, можно определить стохастические θ -интегралы от случайного процесса $F(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ по пуассоновским процессам как среднеквадратические пределы последовательностей интегральных сумм [260, 273]:

$$\int_{\mathbb{T}} F(t) d_{\theta}P(t) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n ((1-\theta)F(\vartheta_{i-1}) + \theta F(\vartheta_i))(P(\vartheta_i) - P(\vartheta_{i-1})),$$

$$\int_{\mathbb{T}} F(t) d_{\theta}\Pi(t) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n ((1-\theta)F(\vartheta_{i-1}) + \theta F(\vartheta_i))(\Pi(\vartheta_i) - \Pi(\vartheta_{i-1})),$$

где $\theta \in [0, 1]$, $\{\vartheta_i\}_{i=0}^n$ — разбиение отрезка \mathbb{T} с условием (2.36).

Значение θ существенным образом влияет на результат интегрирования. Положим для краткости $\mathbb{T} = [0, T]$, тогда при $\theta = 1/2$ (стохастический интеграл Стратоновича, или симметризованный стохастический интеграл) получаем [268, 273]

$$\int_{\mathbb{T}} P(t) d_{1/2}P(t) = \frac{P^2(T)}{2}, \quad \int_{\mathbb{T}} \Pi(t) d_{1/2}\Pi(t) = \frac{\Pi^2(T)}{2},$$

а при $\theta = 0$ (стохастический интеграл Ито) имеем [279]

$$\int_{\mathbb{T}} P(t) d_0 P(t) = \frac{P^2(T) - P(T)}{2}, \quad \int_{\mathbb{T}} \Pi(t) d_0 \Pi(t) = \frac{\Pi^2(T) - \Pi(T) - \lambda T}{2}.$$

Несмотря на первые две формулы, в общем случае правила интегрирования отличаются от обычных, т.е. соответствующих функциям $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, при любых допустимых значениях θ , включая и $\theta = 1/2$. В частности,

$$\int_{\mathbb{T}} P^2(t) d_{1/2} P(t) = \frac{P^3(T)}{3} + \frac{P(T)}{6} \neq \frac{P^3(T)}{3}, \quad \int_{\mathbb{T}} P^2(t) d_0 P(t) = \frac{P^3(T)}{3} - \frac{P^2(T)}{2} + \frac{P(T)}{6}.$$

Однако существуют и другие определения стохастических интегралов по пуассоновским процессам и далее, используя обозначение \circ , интегралы Стратоновича будем понимать следующим образом [269] (аналогичное определение имеется для стохастических интегралов по винеровским процессам [95, 330, 357], см. также понятие усредняющего оператора в замечание 1.5):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} F(t) \circ dP(t) &= \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\vartheta_i - \vartheta_{i-1}} \int_{\vartheta_{i-1}}^{\vartheta_i} F(\tau) d\tau (P(\vartheta_i) - P(\vartheta_{i-1})), \\ \int_{\mathbb{T}} F(t) \circ d\Pi(t) &= \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\vartheta_i - \vartheta_{i-1}} \int_{\vartheta_{i-1}}^{\vartheta_i} F(\tau) d\tau (\Pi(\vartheta_i) - \Pi(\vartheta_{i-1})). \end{aligned}$$

Кроме того, можно определить стохастический интеграл Огавы [333], как обобщение формулы (2.48):

$$\circ \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\Pi} F(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} F(t) \diamond d\Pi(t) = \mathcal{N}^{\text{T}} \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} = \mathbb{S}[F(\cdot)], \quad (2.53)$$

где \mathcal{N} — спектральная характеристика (2.46) белого шума. В общем случае он не совпадает со стохастическим интегралом Стратоновича и, кроме того, он может зависеть от выбора базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$.

2.4. Линейные преобразования случайных процессов

В разд. 1.4 представлена связь вход–выход во временной области для линейных систем управления при детерминированных воздействиях и нулевых начальных условиях: входной сигнал $f(\cdot)$, выходной сигнал $x(\cdot)$ и импульсная переходная функция $k(\cdot)$ связаны интегральным соотношением (1.69). В спектральной форме математического описания ему отвечает соотношение (1.70) для спектральных характеристик F и X входного и выходного сигналов соответственно, а также спектральной характеристики A линейного оператора (1.68).

Если входной и выходной сигналы линейной системы управления — случайные процессы $F(\cdot)$ и $X(\cdot)$ (см. разд. 2.1), то связи вход–выход записываются для их математических ожиданий и корреляционных функций [105]:

$$m_X(t) = \int_{t_0}^t k(t, \tau) m_F(\tau) d\tau, \quad (2.54)$$

$$R_X(t, \tau) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} k(t, \theta) k(\tau, \vartheta) R_F(\theta, \vartheta) d\theta d\vartheta, \quad (2.55)$$

где $m_F(t) = \mathbb{E}F(t)$, $m_X(t) = \mathbb{E}X(t)$, $R_F(t, \tau) = \text{cov}(F(t), F(\tau))$, $R_X(t, \tau) = \text{cov}(X(t), X(\tau))$.

Тогда в спектральной форме математического описания получаем соотношения для первых и вторых нестационарных спектральных плотностей входного и выходного сигналов [220–222]:

$${}^1S^X = A {}^1S^F, \quad {}^1S^F = \mathbb{S}[m_F(\cdot)], \quad {}^1S^X = \mathbb{S}[m_X(\cdot)], \quad (2.56)$$

$$S^X = A S^F A^T, \quad S^F = \mathbb{S}[R_F(\cdot)], \quad S^X = \mathbb{S}[R_X(\cdot)], \quad (2.57)$$

а из них, в свою очередь, с учетом формулы (2.1) следует, что

$$B^X = A B^F A^T, \quad B^F = \mathbb{S}[B_F(\cdot)], \quad B^X = \mathbb{S}[B_X(\cdot)], \quad (2.58)$$

где $B_F(t, \tau) = E F(t) F(\tau)$, $B_X(t, \tau) = E X(t) X(\tau)$.

В частном случае если $F(\cdot) = V(\cdot)$ — гауссовский белый шум (см. разд. 2.3), то

$${}^1S^X = \bar{O}, \quad S^X = B^X = A A^T, \quad (2.59)$$

так как ${}^1S^V = \bar{O}$ — бесконечная нулевая матрица-столбец, $S^V = E$ — бесконечная единичная матрица.

Из соотношения (2.55) при $k(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ с учетом корреляционной функции $R_V(t, \tau) = \delta(t - \tau)$ гауссовского белого шума и условия физической реализуемости ($k(t, \tau) = 0$ при $t \leq \tau$) получаем

$$\begin{aligned} D_X(t) = R_X(t, t) &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t k(t, \theta) k(t, \vartheta) \delta(\theta - \vartheta) d\theta d\vartheta = \int_{t_0}^t k^2(t, \theta) d\theta = \int_{\mathbb{T}} k^2(t, \theta) d\theta, \\ \int_{\mathbb{T}} D_X(t) dt &= \int_{\mathbb{T}^2} k^2(t, \theta) dt d\theta = \|k(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Здесь могут быть рассмотрены две задачи. Первая задача состоит в построении формирующего фильтра — линейной системы, преобразующей гауссовский белый шум в случайный процесс $X(\cdot)$ с заданной корреляционной функцией $R_X(\cdot)$. В спектральной форме математического описания она сводится к нахождению такой бесконечной матрицы A , что выполнено второе из равенств (2.59).

Например, для винеровского процесса $W(\cdot)$ такой матрицей является спектральная характеристика P^{-1} оператора интегрирования (см. разд. 1.6), а также любая матрица A , для которой $S^W = A A^T$. Поэтому вторая нестационарная спектральная плотность винеровского процесса выражается следующим образом:

$$S^W = P^{-1} [P^{-1}]^T, \quad (2.61)$$

и такое представление проще по сравнению с найденным в примере 2.2.

Наряду с этим получаем (см. пример 1.7)

$$E \|W(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \int_{\mathbb{T}} D_W(t) dt = \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \frac{(T - t_0)^2}{2}, \quad (2.62)$$

где $D_W(t) = R_W(t, t) = t - t_0$ — дисперсия винеровского процесса, $f(t, \tau) = 1(t - \tau)$.

Вторая задача, которую можно считать обратной к первой, состоит в построении выбеливающего фильтра — линейной системы, преобразующей случайный процесс $X(\cdot)$ с корреляционной функцией $R_X(\cdot)$ в гауссовский белый шум. В спектральной форме математического описания эта задача сводится к нахождению такой бесконечной матрицы C , что выполнено равенство

$$E = C S^X C^T.$$

Умножая последнее равенство слева на матрицу C^{-1} и справа на матрицу $[C^{-1}]^T$, можно показать, что если невырожденная матрица A определяет в спектральной области формирующий фильтр для случайного процесса $X(\cdot)$, то обратная матрица $C = A^{-1}$ задает выбеливающий фильтр. Например, для винеровского процесса $W(\cdot)$ выбеливающий фильтр можно задать спектральной характеристикой P оператора дифференцирования с учетом начального значения (см. разд. 1.7 и свойство (1.95)).

Традиционно для решения подобных задач используется описание линейных систем с помощью передаточных функций и связанных с ними частотных характеристик — изображений по Лапласу и Фурье импульсных переходных функций, если система стационарна и преобразуются стационарные случайные процессы [91, 225]. Спектральная форма математического описания сложнее, но она позволяет описывать линейные нестационарные системы.

Можно рассмотреть другой частный случай, когда $F(\cdot) = N(\cdot)$ — пуассоновский белый шум (см. разд. 2.3). Здесь соотношения (2.59) корректируются для учета интенсивности λ :

$${}^1S^X = \bar{O}, \quad S^X = B^X = \lambda A A^T,$$

поскольку $S^N = \lambda E$. Тогда

$$D_X(t) = \lambda \int_{\mathbb{T}} k^2(t, \theta) d\theta \quad \text{и} \quad \int_{\mathbb{T}} D_X(t) dt = \lambda \|k(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2.$$

Аналогично ставится задача построения формирующего фильтра — линейной системы, преобразующей пуассоновский белый шум в случайный процесс $X(\cdot)$ с заданной корреляционной функцией $R_X(\cdot)$, и обратная задача построения выбеливающего фильтра — линейной системы, преобразующей случайный процесс $X(\cdot)$ с корреляционной функцией $R_X(\cdot)$ в пуассоновский белый шум.

Пример 2.16. Найти вторую нестационарную спектральную плотность винеровского процесса $W(\cdot)$ относительно тригонометрических функций (1.9), ортонормированных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Применим выражение (2.61), для этого запишем формулы для ненулевых элементов спектральной характеристики P^{-1} оператора интегрирования относительно тригонометрических функций (1.9) (см. примеры спектральных характеристик P^{-1} в разд. 1.6):

$$P_{00}^{-1} = \frac{T}{2}, \quad P_{0m}^{-1} = -P_{m0}^{-1} = \frac{\sqrt{2}T}{(m+1)\pi}, \quad P_{l-1,l}^{-1} = -P_{l,l-1}^{-1} = \frac{T}{l\pi},$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 2k - 1, \quad l = 2k.$$

Тогда элементы второй нестационарной спектральной плотности S_W определяются в форме

$$S_{ij}^W = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{-1} P_{jk}^{-1}.$$

Ограничимся случаем $i \leq j$, так как $S_{ij}^W = S_{ji}^W$.

Если $i = j = 0$, то элемент S_{ij}^W совпадает со значением квадрата нормы функции

$$\int_0^t \hat{F}(0, \tau) d\tau = \sqrt{\frac{1}{T}} t = \sqrt{\frac{1}{T}} f_1(t),$$

поскольку столбец матрицы P^{-1} с номером j — это спектральная характеристика образа ба-

зисной функции $\hat{F}(j, \cdot)$. С учетом связи (1.87) находим

$$S_{00}^W = \sum_{k=0}^{\infty} (P_{0k}^{-1})^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (P_{k0}^{-1})^2 = \left\| \sqrt{\frac{1}{T}} f_1(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T t^2 dt = \frac{T^2}{3}.$$

Далее пусть $i = 0$ и $j > 0$:

$$S_{0j}^W = \sum_{k=0}^{\infty} P_{0k}^{-1} P_{jk}^{-1} = \begin{cases} P_{0,j-1}^{-1} P_{j,j-1}^{-1}, & j = 2l, \\ P_{00}^{-1} P_{j0}^{-1}, & j = 2l - 1, \end{cases}$$

а при $i = j > 0$

$$S_{ii}^W = \sum_{k=0}^{\infty} (P_{ik}^{-1})^2 = \begin{cases} P_{i,i-1}^{-1} P_{i,i-1}^{-1}, & i = 2k, \\ P_{i0}^{-1} P_{i0}^{-1}, & i = 2k - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Наконец, при $i > 0$ и $i \neq j$ получаем

$$S_{ij}^W = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{-1} P_{jk}^{-1} = \begin{cases} P_{i0}^{-1} P_{j0}^{-1}, & i = 2k \text{ и } j = 2l, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Подставляя выражения для элементов спектральной характеристики P^{-1} , находим

$$S^W = T^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{4\pi} & -\frac{\sqrt{2}}{4\pi^2} & -\frac{\sqrt{2}}{8\pi} & \dots & c_{0s} & \dots \\ -\frac{\sqrt{2}}{4\pi} & \frac{3}{4\pi^2} & 0 & \frac{1}{4\pi^2} & \dots & c_{1s} & \dots \\ -\frac{\sqrt{2}}{4\pi^2} & 0 & \frac{1}{4\pi^2} & 0 & \dots & c_{2s} & \dots \\ -\frac{\sqrt{2}}{8\pi} & \frac{1}{4\pi^2} & 0 & \frac{3}{16\pi^2} & \dots & c_{3s} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{n0} & c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{ns} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{00} = \frac{1}{3}, \quad c_{0l} = c_{l0} = -\frac{\sqrt{2}}{l^2\pi^2}, \quad c_{0m} = c_{m0} = -\frac{\sqrt{2}}{2(m+1)\pi}, \quad c_{ll} = \frac{1}{l^2\pi^2},$$

$$c_{mm} = \frac{3}{(m+1)^2\pi^2}, \quad c_{sm} = c_{ms} = \frac{2}{(m+1)(s+1)\pi^2}, \quad c_{kn} = 0 \quad \text{в остальных случаях,}$$

$$k, n = 1, 2, 3, \dots, \quad l = 2k, \quad m = 2k - 1, \quad s = 2n - 1. \quad \blacksquare$$

Пример 2.17. Выразить вторую нестационарную спектральную плотность выходного сигнала линейной системы управления, на вход которой подается гауссовский белый шум, через спектральную характеристику оператора дифференцирования с учетом начального значения относительно произвольной базисной системы, ортонормированной на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$. Импульсная переходная функция системы задана в виде

$$k(t, \tau) = \sigma e^{\mu(t-\tau)} 1(t-\tau),$$

где μ и σ — числовые параметры, $1(t-\tau)$ — функция Хевисайда (1.28).

□ Согласно примеру 1.14 выражение для спектральной характеристики A линейного оператора (1.68) с заданной импульсной переходной функцией $k(\cdot)$ имеет вид

$$A = \sigma(P - \mu E)^{-1},$$

где P — спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом начального значения, а E — бесконечная единичная матрица. Здесь предполагается, что все использу-

емые спектральные характеристики определены относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$.

Если входной сигнал $F(\cdot) = V(\cdot)$ — это гауссовский белый шум, то выходным сигналом $X(\cdot)$ является процесс Орнштейна–Уленбека [102] с корреляционной функцией $R_X(t, \tau) = \sigma^2(e^{\mu(t+\tau)} - e^{\mu|t-\tau|})/(2\mu)$ (см. примеры случайных процессов в разд. 2.1). Таким образом, спектральная характеристика A задает формирующий фильтр процесса Орнштейна–Уленбека в спектральной форме математического описания.

Далее согласно формуле (2.59) находим выражение для второй нестационарной спектральной плотности S^X , соответствующей выходному сигналу линейной системы управления с заданной импульсной переходной функцией, на вход которой подается гауссовский белый шум, т.е. для двумерной спектральной характеристики корреляционной функции $R_X(\cdot)$:

$$S^X = AA^T = \sigma^2(P - \mu E)^{-1}[(P - \mu E)^{-1}]^T.$$

Также можно получить явные формулы для элементов спектральной характеристики A и второй нестационарной спектральной плотности S^X . И в том, и в другом случае достаточно воспользоваться формулой (1.42), определяющей коэффициенты разложения функции двух переменных — элементы соответствующих двумерных спектральных характеристик функций $k(\cdot)$ и $R_X(\cdot)$. В работе [341] они получены относительно косинусоид (1.6):

$$A = (A_{ij}), \quad A_{ij} = \sigma c_{ij},$$

где

$$c_{00} = \frac{e^{\mu T} - \mu T - 1}{\mu^2 T}, \quad c_{0i} = \sqrt{2}T \frac{e^{\mu T} - (-1)^i}{\mu^2 T^2 + i^2 \pi^2}, \quad c_{i0} = (-1)^i c_{0i},$$

$$c_{ij} = 2T \left(\mu^2 T^2 \frac{(-1)^i e^{\mu T} - 1}{(\mu^2 T^2 + i^2 \pi^2)(\mu^2 T^2 + j^2 \pi^2)} + \frac{\gamma_{ij}}{\mu^2 T^2 + j^2 \pi^2} \right), \quad c_{ji} = (-1)^{i+j} c_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots,$$

и

$$S^X = (S_{ij}^X), \quad S_{ij}^X = \sigma^2 c_{ij},$$

где

$$c_{00} = \frac{1}{2\mu^3 T} ((e^{\mu T} - 1)^2 + 2(\mu T - e^{\mu T} + 1)), \quad c_{0i} = c_{i0} = \frac{T}{\sqrt{2}\mu} \frac{(-1)^i (e^{\mu T} - 1) - 2}{\mu^2 T^2 + i^2 \pi^2},$$

$$c_{ij} = c_{ji} = T^2 \left(\mu T \frac{(-1)^{i+j} (e^{2\mu T} + 1) - 2[(-1)^i + (-1)^j] e^{\mu T} + 2}{(\mu^2 T^2 + i^2 \pi^2)(\mu^2 T^2 + j^2 \pi^2)} + \frac{\delta_{ij}}{\mu^2 T^2 + j^2 \pi^2} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots$$

В этих формулах

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} -\frac{\mu}{2}, & i = j, \\ \frac{j^2 [(-1)^{i+j} - 1]}{i^2 - j^2}, & i \neq j, \end{cases}$$

а δ_{ij} — символ Кронекера (1.4). ■

2.5. Спектральные характеристики случайных линейных операторов

Введем понятие спектральных характеристик случайных линейных операторов по аналогии с неслучайными линейными операторами (см. разд. 1.4). Пусть $\mathcal{R}: D_{\mathcal{R}} \subseteq L_2(\mathbb{T}) \rightarrow \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$

— случайный линейный оператор, определенный на пространстве $L_2(\mathbb{T})$ или на его некотором подпространстве, $\mathbb{T} = [t_0, T]$, $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базис этого пространства (см. разд. 1.1).

Бесконечная случайная матрица $R = (R_{ij})$, элементы которой определяются формулой

$$R_{ij} = (q(i, \cdot), \mathcal{R}q(j, \cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \mathcal{R}q(j, t) dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.63)$$

называется спектральной характеристикой случайного линейного оператора \mathcal{R} .

Эта формула совпадает с (1.61), а отображение, ставящее в соответствие случайному линейному оператору его спектральную характеристику, также будем называть спектральным преобразованием и обозначать \mathbb{S} :

$$\mathbb{S}[\mathcal{R}] = R = \begin{bmatrix} R_{00} & R_{01} & R_{02} & \dots \\ R_{10} & R_{11} & R_{12} & \dots \\ R_{20} & R_{21} & R_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где случайные величины R_{ij} определяются формулой (2.63).

Установим связь между спектральными характеристиками функции $f(\cdot) \in D_{\mathcal{R}}$ и случайного процесса $\mathcal{R}f(\cdot)$.

Теорема 2.5. Пусть \mathcal{R} — случайный линейный оператор, определенный на пространстве $L_2(\mathbb{T})$ или на его некотором подпространстве, т.е. $\mathcal{R}: D_{\mathcal{R}} \subseteq L_2(\mathbb{T}) \rightarrow L_2(\mathbb{T})$; $f(\cdot) \in D_{\mathcal{R}}$; R и F — спектральные характеристики оператора \mathcal{R} и функции $f(\cdot)$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$. Тогда

$$\mathbb{S}[\mathcal{R}f(\cdot)] = RF. \quad (2.64)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.6.

Далее рассмотрим линейные операторы, определенные на пространстве $L_2(\mathbb{T})$ и заданные следующим соотношением:

$$\mathcal{A}_W f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} k(\cdot, \tau) f(\tau) dW(\tau), \quad (2.65)$$

где $k(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ — ядро оператора (см. разд. 1.2 и соотношение (1.71)), а $W(\cdot)$ — винеровский процесс (см. разд. 2.3).

Теорема 2.6. Пусть $A^{\mathcal{V}}$ — спектральная характеристика случайного линейного оператора \mathcal{A}_W с ядром $k(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$, A — спектральная характеристика оператора Гильберта–Шмидта \mathcal{A} с тем же ядром, V — спектральная характеристика оператора умножения функций, \mathcal{V} — спектральная характеристика гауссовского белого шума. Спектральные характеристики $A^{\mathcal{V}}$, A и V определены относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$. Тогда спектральные характеристики $A^{\mathcal{V}}$ и A связаны соотношением

$$A^{\mathcal{V}} = A(V\mathcal{V}). \quad (2.66)$$

Доказательство. Запишем формулу (2.63) для элементов спектральной характеристики $A^{\mathcal{V}}$ случайного линейного оператора \mathcal{A}_W :

$$A_{ij}^{\mathcal{V}} = (q(i, \cdot), \mathcal{A}_W q(j, \cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \int_{\mathbb{T}} k(t, \tau) q(j, \tau) dW(\tau) dt,$$

и представим функцию $k(\cdot)$ в виде ряда по функциям базисной системы $\{q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot)\}_{i,j=0}^{\infty}$ (см. разд. 1.2). Напомним, что спектральная характеристика A оператора Гильберта – Шмидта (1.71) — это двумерная спектральная характеристика его ядра, поэтому по формуле обращения (1.43) имеем $k(\cdot) = \sum_{k,l=0}^{\infty} A_{kl} q(k, \cdot) \otimes q(l, \cdot)$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} A_{ij}^{\mathcal{V}} &= \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \int_{\mathbb{T}} \sum_{k,l=0}^{\infty} A_{kl} q(k, t) q(l, \tau) q(j, \tau) dW(\tau) dt = \\ &= \text{l.i.m.}_{n,m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m A_{kl} \int_{\mathbb{T}} q(i, t) q(k, t) dt \int_{\mathbb{T}} q(l, \tau) q(j, \tau) dW(\tau) = \\ &= \text{l.i.m.}_{n,m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m A_{kl} \delta_{ik} \int_{\mathbb{T}} q(l, \tau) q(j, \tau) dW(\tau) = \\ &= \text{l.i.m.}_{m \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^m A_{il} \int_{\mathbb{T}} q(l, \tau) q(j, \tau) dW(\tau), \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где δ_{ik} — символ Кронекера (1.4).

Далее представим произведение $q(l, \cdot)q(j, \cdot)$ в виде ряда по функциям базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ (см. п. 4 замечаний 1.10): $q(l, \cdot)q(j, \cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} V_{ljk} q(k, \cdot)$, тогда с помощью формулы (1.11) записываем

$$\begin{aligned} A_{ij}^{\mathcal{V}} &= \text{l.i.m.}_{m \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^m A_{il} \int_{\mathbb{T}} \sum_{k=0}^{\infty} V_{ljk} q(k, \tau) dW(\tau) = \\ &= \text{l.i.m.}_{n,m \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^m A_{il} \sum_{k=0}^n V_{ljk} \int_{\mathbb{T}} q(k, \tau) dW(\tau) = \text{l.i.m.}_{n,m \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^m A_{il} \sum_{k=0}^n V_{ljk} \zeta_k, \end{aligned}$$

где ζ_k — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение и образующие спектральную характеристику \mathcal{V} гауссовского белого шума (см. формулы (2.25) и (2.26)).

Согласно определению произведения матриц [110, 112] получаем равенство $A^{\mathcal{V}} = A(V\mathcal{V})$, т.е. соотношение (2.66). ◀

Аналогично определяется линейный оператор \mathcal{A}_{Π} :

$$\mathcal{A}_{\Pi} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} k(\cdot, \tau) f(\tau) d\Pi(\tau), \quad (2.67)$$

где $k(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ — ядро оператора (см. разд. 1.2 и соотношение (1.71)), а $\Pi(\cdot)$ — центрированный пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$ (см. разд. 2.3).

Сформулируем теорему о представлении спектральной характеристики случайного линейного оператора \mathcal{A}_{Π} , доказательство которой отличается от доказательства теоремы 2.6 только обозначениями.

Теорема 2.7. Пусть $A^{\mathcal{N}}$ — спектральная характеристика случайного линейного оператора \mathcal{A}_{Π} с ядром $k(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$, A — спектральная характеристика оператора Гильберта – Шмидта \mathcal{A} с тем же ядром, V — спектральная характеристика оператора умножения функций, \mathcal{N} — спектральная характеристика пуассоновского белого шума интенсивности λ . Спектральные характеристики $A^{\mathcal{N}}$, A и V определены относительно базисной системы

$\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$. Тогда спектральные характеристики $A^{\mathcal{N}}$ и A связаны соотношением

$$A^{\mathcal{N}} = A(V\mathcal{N}). \quad (2.68)$$

Приведем свойства спектрального преобразования случайных линейных операторов, определенных на пространстве $L_2(\mathbb{T})$.

1. Спектральное преобразование композиции операторов.

Спектральная характеристика композиции случайных линейных операторов \mathcal{R} и \mathcal{Q} равна произведению их спектральных характеристик:

$$\mathbb{S}[\mathcal{R} \circ \mathcal{Q}] = RQ, \quad R = \mathbb{S}[\mathcal{R}], \quad Q = \mathbb{S}[\mathcal{Q}]. \quad (2.69)$$

2. Спектральное преобразование сопряженного оператора.

Спектральная характеристика сопряженного оператора \mathcal{R}^* к оператору \mathcal{R} равна транспонированной спектральной характеристике оператора \mathcal{R} :

$$\mathbb{S}[\mathcal{R}^*] = R^T, \quad R = \mathbb{S}[\mathcal{R}]. \quad (2.70)$$

3. Спектральное преобразование обратного оператора.

Если для линейного оператора \mathcal{R} существует обратный оператор \mathcal{R}^{-1} , то спектральная характеристика обратного оператора равна обратной спектральной характеристике оператора \mathcal{R} :

$$\mathbb{S}[\mathcal{R}^{-1}] = R^{-1}, \quad R = \mathbb{S}[\mathcal{R}]. \quad (2.71)$$

Замечания 2.6.

1. Используя представление (2.30) двумерной спектральной характеристики $E^{\mathcal{V}}$ случайного линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*W}$ (см. разд. 2.3), соотношение (2.66) можно переписать в форме

$$A^{\mathcal{V}} = AE^{\mathcal{V}}, \quad (2.72)$$

где $A^{\mathcal{V}}$ — спектральная характеристика случайного линейного оператора \mathcal{A}_W с ядром $k(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$, A — спектральная характеристика оператора Гильберта – Шмидта \mathcal{A} с тем же ядром. Спектральные характеристики $A^{\mathcal{V}}$, A и $E^{\mathcal{V}}$ определены относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$.

Формально меняя обозначения в соотношении (2.72), имеем

$$A^{\mathcal{N}} = AE^{\mathcal{N}}, \quad (2.73)$$

где $A^{\mathcal{N}}$ — спектральная характеристика случайного линейного оператора \mathcal{A}_{Π} с ядром $k(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$, $E^{\mathcal{N}}$ — двумерная спектральная характеристика случайного линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*\Pi}$ (см. разд. 2.3 и формулу (2.50)).

2. При формулировании свойств спектрального преобразования случайных линейных операторов предполагалось, что эти операторы можно рассматривать на пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ или на некотором подпространстве пространства $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$, так как случайный процесс $F(\cdot) = F(\cdot, \omega)$ при фиксированном $\omega \in \Omega$ — это элемент пространства $L_2(\mathbb{T})$ (см. разд. 2.2). При этом для операторов \mathcal{A}_W и \mathcal{A}_{Π} важно, в каком смысле понимаются стохастические интегралы (2.65) и (2.67). Более подробно этот вопрос рассмотрен далее для операторов стохастического интегрирования.

3. Столбец спектральной характеристики R случайного линейного оператора \mathcal{R} с номером j представляет собой спектральную характеристику случайного процесса — образа базисной функции $q(j, \cdot)$ при применении оператора \mathcal{R} (см. также п. 2 замечаний 1.9), т.е.

$$\mathbb{S}[\mathcal{R}] = R = [\mathbb{S}[\mathcal{R}q(0, \cdot)] \quad \mathbb{S}[\mathcal{R}q(1, \cdot)] \quad \mathbb{S}[\mathcal{R}q(2, \cdot)] \quad \dots].$$

4. Если требуется, то в обозначение спектральной характеристики случайного линейного оператора может быть включено обозначение базисной системы (см. п. 3 замечаний 1.9): R_{qq} .

В следующих разделах более подробно рассмотрим операторы умножения на случайный процесс и операторы стохастического интегрирования.

2.6. Спектральные характеристики операторов умножения

Пусть $R(\cdot)$ — случайный процесс, траектории которого интегрируемы на отрезке $\mathbb{T} = [t_0, T]$ с вероятностью 1, $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базис пространства $L_2(\mathbb{T})$. Оператор умножения на случайный процесс $R(\cdot)$ задается следующим образом:

$$\mathcal{R}f(\cdot) = R(\cdot)f(\cdot),$$

где $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$.

Бесконечная случайная матрица $R = (R_{ij})$, элементы которой определяются формулой

$$R_{ij} = (q(i, \cdot), R(\cdot)q(j, \cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} R(t)q(i, t)q(j, t)dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.74)$$

называется спектральной характеристикой оператора умножения на случайный процесс $R(\cdot)$, т.е. $\mathbb{S}[\mathcal{R}] = R$.

Определение спектральной характеристики для такого случайного линейного оператора не отличается от определения спектральной характеристики оператора умножения на неслучайную функцию (см. разд. 1.5). Аналогичны и свойства спектрального преобразования таких операторов: свойство спектрального преобразования произведения случайных процессов, представление спектральной характеристики оператора умножения на случайную величину, симметричность, сдвиг и масштабирование базисной системы. Будем считать их очевидными (см. свойства спектрального преобразования операторов умножения в разд. 1.5).

З а м е ч а н и е 2.7. Допустимо обобщить теоремы 1.7 и 1.9 (см. также теорему 2.3). Например,

$$R = V\mathcal{F}, \quad (2.75)$$

где V — спектральная характеристика оператора умножения функций и \mathcal{F} — спектральная характеристика случайного процесса $R(\cdot)$. Спектральные характеристики V и \mathcal{F} определены относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$.

Сравнивая эту формулу с формулой (2.30), можно считать матрицу $E^{\mathcal{V}}$ спектральной характеристикой оператора умножения на гауссовский белый шум $V(\cdot)$ (см. разд. 2.3). Матрица $E^{\mathcal{N}}$ в этом контексте согласно формуле (2.50) — это спектральная характеристика оператора умножения на пуассоновский белый шум $N(\cdot)$.

Пример 2.18. Найти спектральную характеристику W оператора умножения на винеровский процесс $W(\cdot)$ относительно функций Уолша (1.7), заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Сначала найдем спектральную характеристику \mathcal{W} винеровского процесса $W(\cdot)$ относительно функций Уолша (1.7) по аналогии с примером 2.8.

Воспользуемся представлением (2.31), в котором P^{-1} — спектральная характеристика оператора интегрирования относительно функций Уолша (1.7) (см. примеры спектральных характеристик P^{-1} в разд. 1.6), а \mathcal{V} — спектральная характеристика (2.26) белого шума. Тогда

$$\mathcal{W}_i = \begin{cases} T \left(\frac{\zeta_0}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta_{2^m}}{2^{m+2}} \right), & i = 0, \\ T \left(-\frac{\zeta_l}{2^{s+2}} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta_{2^{m+2^s+l}}}{2^{m+2}} \right), & i = 2^s + l, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \\ & l = 0, 1, \dots, 2^s - 1, \end{cases}$$

где

$$\mathcal{W} = T \cdot \left[\begin{array}{cccc} \frac{\zeta_0}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta_{2^m}}{2^{m+2}} & -\frac{\zeta_0}{4} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta_{2^{m+1}}}{2^{m+2}} & -\frac{\zeta_0}{8} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta_{2^{m+2}}}{2^{m+2}} & \dots \end{array} \right]^T,$$

а ζ_i — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение.

Далее запишем формулу (2.74) для элементов спектральной характеристики W оператора умножения на винеровский процесс и применим мультипликативное свойство функций Уолша (1.76) (см. также пример 2.6):

$$\begin{aligned} W_{ij} &= (q(i, \cdot), W(\cdot)q(j, \cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} W(t) \hat{W}(i, t) \hat{W}(j, t) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{\mathbb{T}} \hat{W}(i \oplus j, t) W(t) dt = \frac{1}{\sqrt{T}} (\hat{W}(i \oplus j, \cdot), W(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})}, \end{aligned}$$

где операция \oplus определена ранее (см. примеры спектральных характеристик A в разд. 1.5).

Скалярное произведение в правой части последнего равенства согласно формуле (2.5) — это коэффициент разложения винеровского процесса $W(\cdot)$ в ряд относительно функции Уолша с номером $i \oplus j$, т.е. случайная величина $\mathcal{W}_{i \oplus j}$. В результате находим

$$W_{ij} = \frac{1}{\sqrt{T}} \mathcal{W}_{i \oplus j},$$

поэтому искомая спектральная характеристика W имеет вид (матрица Уолша — Теплица)

$$W = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{W}_0 & \mathcal{W}_1 & \mathcal{W}_2 & \dots \\ \mathcal{W}_1 & \mathcal{W}_0 & \mathcal{W}_3 & \dots \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{W}_3 & \mathcal{W}_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

2.7. Спектральные характеристики операторов стохастического интегрирования

Операторы стохастического интегрирования, или операторы интегрирования по процессам с независимыми приращениями, представляют значительный интерес и их исследование более содержательно по сравнению с операторами умножения [216].

Пусть \mathcal{D}_W^{-1} — оператор стохастического интегрирования по винеровскому процессу $W(\cdot)$,

определенный на пространстве $L_2(\mathbb{T})$:

$$\mathcal{D}_W^{-1} f(\cdot) = \int_{t_0}^{(\cdot)} f(\tau) dW(\tau),$$

где $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, а система функций $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базис пространства $L_2(\mathbb{T})$.

Бесконечная случайная матрица $P^{-1, \mathcal{V}} = (P_{ij}^{-1, \mathcal{V}})$ с элементами

$$P_{ij}^{-1, \mathcal{V}} = \left(q(i, \cdot), \int_{t_0}^{(\cdot)} q(j, \tau) dW(\tau) \right)_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \int_{t_0}^t q(j, \tau) dW(\tau) dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.76)$$

называется спектральной характеристикой оператора стохастического интегрирования по винеровскому процессу: $\mathbb{S}[\mathcal{D}_W^{-1}] = P^{-1, \mathcal{V}}$.

В качестве другого примера полезно определить оператор стохастического интегрирования \mathcal{D}_{Π}^{-1} по центрированному пуассоновскому процессу $\Pi(\cdot)$ интенсивности $\lambda > 0$:

$$\mathcal{D}_{\Pi}^{-1} f(\cdot) = \int_{t_0}^{(\cdot)} f(\tau) d\Pi(\tau),$$

где $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$.

Бесконечная случайная матрица $P^{-1, \mathcal{N}} = (P_{ij}^{-1, \mathcal{N}})$ с элементами

$$P_{ij}^{-1, \mathcal{N}} = \left(q(i, \cdot), \int_{t_0}^{(\cdot)} q(j, \tau) d\Pi(\tau) \right)_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i, t) \int_{t_0}^t q(j, \tau) d\Pi(\tau) dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.77)$$

называется спектральной характеристикой оператора стохастического интегрирования по центрированному пуассоновскому процессу: $\mathbb{S}[\mathcal{D}_{\Pi}^{-1}] = P^{-1, \mathcal{N}}$.

Операторы \mathcal{D}_W^{-1} и \mathcal{D}_{Π}^{-1} — это примеры случайных линейных операторов \mathcal{A}_W и \mathcal{A}_{Π} , заданных формулами (2.65) и (2.67) с ядром $k(t, \tau) = 1(t - \tau)$ — единичной ступенчатой функцией (1.28). Представление этих спектральных характеристик дают теоремы 2.6 и 2.7 с учетом п. 1 замечаний 2.6. Согласно соотношениям (2.66), (2.68) и (2.72), (2.73) имеем

$$P^{-1, \mathcal{V}} = P^{-1}(V\mathcal{V}) = P^{-1}E^{\mathcal{V}}, \quad (2.78)$$

$$P^{-1, \mathcal{N}} = P^{-1}(V\mathcal{N}) = P^{-1}E^{\mathcal{N}}, \quad (2.79)$$

где P^{-1} — спектральная характеристика оператора интегрирования \mathcal{D}^{-1} (см. разд. 1.6), V — спектральная характеристика оператора умножения функций (см. разд. 1.5), \mathcal{V} и \mathcal{N} — спектральные характеристики (2.26) и (2.46) соответствующих белых шумов, а $E^{\mathcal{V}}$ и $E^{\mathcal{N}}$ — двумерные спектральные характеристики случайных линейных функционалов $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*W}$ и $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*\Pi}$ (см. разд. 2.3).

Перечислим некоторые свойства спектрального преобразования операторов стохастического интегрирования по винеровскому процессу.

1. Спектральное преобразование интеграла от неслучайной функции.

Спектральная характеристика интеграла от функции $f(\cdot)$ равна произведению спектральной характеристики $P^{-1, \mathcal{V}}$ оператора стохастического интегрирования \mathcal{D}_W^{-1} и спектральной характеристики F функции $f(\cdot)$:

$$\mathbb{S} \left[\int_{t_0}^{(\cdot)} f(\tau) dW(\tau) \right] = P^{-1, \mathcal{V}} F = P^{-1}(V\mathcal{V}) F. \quad (2.80)$$

Свойство следует из теоремы 2.5.

2. Сдвиг и масштабирование базисной системы.

Если $\{\tilde{q}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2([0, 1])$, а $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — соответствующая ей базисная система пространства $L_2([t_0, T])$ (см. п. 1 замечаний 1.1), то

$$P_{qq}^{-1, \nu} = \sqrt{T - t_0} P_{\tilde{q}\tilde{q}}^{-1, \nu},$$

что следует из свойства спектрального преобразования операторов интегрирования (см. разд. 1.6) и свойства спектральных характеристик оператора умножения функций (см. разд. 1.5) при сдвиге и масштабировании базисной системы:

$$P_{qq}^{-1, \nu} = P_{qq}^{-1} (V \mathcal{V}) = (T - t_0) P_{\tilde{q}\tilde{q}}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{T - t_0}} V \mathcal{V} \right) = \sqrt{T - t_0} P_{\tilde{q}\tilde{q}}^{-1} (V \mathcal{V}) = \sqrt{T - t_0} P_{\tilde{q}\tilde{q}}^{-1, \nu}.$$

Далее перейдем к интегрированию случайных процессов — элементов пространства $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$. Интегрирование случайных процессов $F(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ по отрезку \mathbb{T} рассматривалось в разд. 2.3. Напомним, что существенное значение имеет то, какой стохастический интеграл используется: интеграл Стратоновича или интеграл Ито [4, 77, 102, 226].

Продолжим свойства спектрального преобразования операторов стохастического интегрирования по винеровскому процессу. В них используются обозначения, введенные выше, а также $\mathcal{F} = \mathbb{S}[F(\cdot)]$.

3. Спектральное преобразование стохастического интеграла Стратоновича.

Спектральная характеристика стохастического интеграла Стратоновича от случайного процесса $F(\cdot)$ представляется в виде

$$\mathbb{S} \left[\int_{t_0}^{(\cdot)} F(\tau) \circ dW(\tau) \right] = P^{-1, \nu} \mathcal{F} = P^{-1} (V \mathcal{V}) \mathcal{F}. \quad (2.81)$$

Здесь учтено то, что определение интеграла Стратоновича дает возможность применять те же правила интегрирования, что и для функций $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$. Соответствующий оператор будем обозначать ${}^S \mathcal{D}_W^{-1}$:

$${}^S \mathcal{D}_W^{-1} F(\cdot) = \int_{t_0}^{(\cdot)} F(\tau) \circ dW(\tau).$$

4. Спектральное преобразование стохастического интеграла Ито.

Спектральная характеристика стохастического интеграла Ито от случайного процесса $F(\cdot)$ представляется в виде

$$\mathbb{S} \left[\int_{t_0}^{(\cdot)} F(\tau) dW(\tau) \right] = -\frac{1}{2} P^{-1} \Sigma + P^{-1, \nu} \mathcal{F} = P^{-1} \left(-\frac{1}{2} \Sigma + (V \mathcal{V}) \mathcal{F} \right), \quad (2.82)$$

где Σ — спектральная характеристика случайного процесса $\sigma(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$, который связан с $F(\cdot)$ соотношением (2.39). Соответствующий оператор будем обозначать ${}^I \mathcal{D}_W^{-1}$:

$${}^I \mathcal{D}_W^{-1} F(\cdot) = \int_{t_0}^{(\cdot)} F(\tau) dW(\tau).$$

Доказательство. Стохастический интеграл Ито связан с интегралом Стратоновича соотношением (2.38). Применим спектральное преобразование к его левой и правой частям, учитывая свойство линейности (2.8):

$$\begin{aligned} \mathbb{S} \left[\int_{t_0}^{(\cdot)} F(\tau) dW(\tau) \right] &= \mathbb{S} \left[-\frac{1}{2} \int_{t_0}^{(\cdot)} \sigma(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{(\cdot)} F(\tau) \circ dW(\tau) \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \mathbb{S} \left[\int_{t_0}^{(\cdot)} \sigma(\tau) d\tau \right] + \mathbb{S} \left[\int_{t_0}^{(\cdot)} F(\tau) \circ dW(\tau) \right]. \end{aligned}$$

Далее используем свойство (1.86) спектрального преобразования интегралов от функций одной переменной и свойство спектрального преобразования интеграла Стратоновича:

$$\mathbb{S} \left[\int_{t_0}^{(\cdot)} F(\tau) dW(\tau) \right] = -\frac{1}{2} P^{-1} \Sigma + P^{-1, \nu} \mathcal{F} = -\frac{1}{2} P^{-1} \Sigma + P^{-1} (V \mathcal{V}) \mathcal{F} = P^{-1} \left(-\frac{1}{2} \Sigma + (V \mathcal{V}) \mathcal{F} \right),$$

т.е. получаем соотношение (2.82). ◀

Пользуясь тем, что математическое ожидание стохастического интеграла Ито (2.82) равно нулю [32, 37, 102], имеем

$$\mathbb{E} \mathbb{S} \left[{}^I \mathcal{D}_W^{-1} F(\cdot) \right] = \mathbb{E} \left[-\frac{1}{2} P^{-1} \Sigma + P^{-1, \nu} \mathcal{F} \right] = -\frac{1}{2} P^{-1} \mathbb{E} \Sigma + \mathbb{E} P^{-1, \nu} \mathcal{F} = 0,$$

$$\text{или } \mathbb{E} P^{-1, \nu} \mathcal{F} = \mathbb{E} P^{-1} (V \mathcal{V}) \mathcal{F} = \frac{1}{2} P^{-1} \mathbb{E} \Sigma, \quad \mathbb{E} (V \mathcal{V}) \mathcal{F} = \frac{1}{2} \mathbb{E} \Sigma,$$

где предпоследнее выражение — это математическое ожидание спектральной характеристики стохастического интеграла Стратоновича (2.81):

$$\mathbb{E} \mathbb{S} \left[{}^S \mathcal{D}_W^{-1} F(\cdot) \right] = \frac{1}{2} P^{-1} \mathbb{E} \Sigma.$$

Согласно свойству изометрии Ито [32, 37, 102] дисперсия стохастического интеграла Ито от случайного процесса $F(\cdot)$ совпадает с нормой этого процесса на отрезке $[t_0, t]$ (см. также формулы (2.33) и (2.41)):

$$\mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{(\cdot)} F(\tau) dW(\tau) \right]^2 = \mathbb{E} \int_{t_0}^t F^2(\tau) d\tau = \mathbb{E} \|1(t - (\cdot)) F(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2.$$

Определим спектральную характеристику $\mathbf{1}_t^*$ оператора умножения на единичную ступенчатую функцию $f^*(\tau) = 1(t - \tau)$ как функцию переменной τ (спектральная характеристика оператора умножения на индикатор множества $[t_0, t]$). Представляя эту функцию как в примере 1.4 и используя теорему 1.7, можно показать, что

$$\mathbf{1}_\tau^* = E - V \mathbf{1}_\tau, \quad \mathbf{1}_t^* = \mathbf{1}_\tau^* \Big|_{\tau=t},$$

где E — бесконечная единичная матрица, $\mathbf{1}_\tau$ — спектральная характеристика единичной ступенчатой функции $f(t) = 1(t - \tau)$. Матрица $\mathbf{1}_\tau^*$ является симметрической по свойству (1.74).

Поэтому согласно свойству (2.15) сохранения нормы и формуле (2.58) получаем

$$\mathbb{E} \left[\int_{t_0}^t F(\tau) dW(\tau) \right]^2 = \text{tr } \mathbf{1}_t^* B^F \mathbf{1}_t^*. \quad (2.83)$$

5. Спектральное преобразование стохастического θ -интеграла.

Спектральная характеристика стохастического θ -интеграла от случайного процесса $F(\cdot)$, $\theta \in [0, 1]$, представляется в виде

$$\mathbb{S} \left[\int_{t_0}^{(\cdot)} F(\tau) d_\theta W(\tau) \right] = \left[\theta - \frac{1}{2} \right] P^{-1} \Sigma + P^{-1, \nu} \mathcal{F} = P^{-1} \left(\left[\theta - \frac{1}{2} \right] \Sigma + (V \mathcal{V}) \mathcal{F} \right), \quad (2.84)$$

где Σ — спектральная характеристика, определенная ранее. Соответствующий оператор обозначим ${}^\theta \mathcal{D}_W^{-1}$:

$${}^\theta \mathcal{D}_W^{-1} F(\cdot) = \int_{t_0}^{(\cdot)} F(\tau) d_\theta W(\tau).$$

Доказательство проводится аналогично с учетом соотношения (2.43), которое связывает стохастический θ -интеграл с интегралом Ито (см. также разд. 2.3).

В частных случаях соотношение (2.84) совпадает с (2.81) при $\theta = 1/2$ (стохастический интеграл Стратоновича) и с (2.82) при $\theta = 0$ (стохастический интеграл Ито).

Учитывая формулу (2.78), соотношения для спектральных характеристик стохастических интегралов можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbb{S} \left[\int_{t_0}^{(\cdot)} f(\tau) dW(\tau) \right] &= P^{-1} E^{\mathcal{V}} F, & \mathbb{S} \left[\int_{t_0}^{(\cdot)} F(\tau) \circ dW(\tau) \right] &= P^{-1} E^{\mathcal{V}} \mathcal{F}, \\ \mathbb{S} \left[\int_{t_0}^{(\cdot)} F(\tau) dW(\tau) \right] &= P^{-1} \left(-\frac{1}{2} \Sigma + E^{\mathcal{V}} \mathcal{F} \right), & \mathbb{S} \left[\int_{t_0}^{(\cdot)} F(\tau) d_{\theta} W(\tau) \right] &= P^{-1} \left(\left[\theta - \frac{1}{2} \right] \Sigma + E^{\mathcal{V}} \mathcal{F} \right). \end{aligned}$$

Пример 2.19. Найти спектральную характеристику $P^{-1, \mathcal{V}}$ оператора стохастического интегрирования по винеровскому процессу относительно тригонометрических функций (1.9), заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Будем использовать соотношение (2.78), но сначала найдем двумерную спектральную характеристику $E^{\mathcal{V}}$ случайного линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*W}$ (см. разд. 2.3).

Запишем соотношение (2.29) для элементов двумерной спектральной характеристики $E^{\mathcal{V}}$:

$$E_{ij}^{\mathcal{V}} = \mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*W} q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot) = \int_{\mathbb{T}} \hat{F}(i, t) \hat{F}(j, t) dW(t),$$

а затем применим тождества, позволяющие представить произведение пары базисных функций $\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ как линейную комбинацию другой пары базисных функций. Эти тождества приведены в книге [163]. Тогда с учетом соотношения (2.25) при $i \leq j$ получаем

$$E_{ij}^{\mathcal{V}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} \zeta_j, & i = 0, \\ \frac{\sqrt{1 + \delta_{ij}} \zeta_{j-i} + \zeta_{i+j}}{\sqrt{2T}}, & i = 2k, \\ \frac{\zeta_{i+j} - \zeta_{j-i-2}}{\sqrt{2T}}, & i = 2k - 1 \text{ и } j = 2l, \\ \frac{\sqrt{1 + \delta_{ij}} \zeta_{j-i} - \zeta_{i+j+2}}{\sqrt{2T}}, & i = 2k - 1 \text{ и } j = 2l - 1, \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 0, 1, 2, \dots, \\ j = i, i + 1, i + 2, \dots, \\ k, l = 1, 2, 3, \dots, \end{matrix}$$

где ζ_i — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, а δ_{ij} — символ Кронекера (1.4). При $i > j$ достаточно воспользоваться свойством симметричности матрицы $E^{\mathcal{V}}$, т.е. $E_{ij}^{\mathcal{V}} = E_{ji}^{\mathcal{V}}$. Следовательно,

$$E^{\mathcal{V}} = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot \begin{bmatrix} \zeta_0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \dots \\ \zeta_1 & \frac{\sqrt{2}\zeta_0 - \zeta_4}{\sqrt{2}} & \frac{\zeta_3}{\sqrt{2}} & \dots \\ \zeta_2 & \frac{\zeta_3}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}\zeta_0 + \zeta_4}{\sqrt{2}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Такой же результат получится, если применить теорему 2.3 (см. пример 2.7).

Далее найдем спектральную характеристику $P^{-1, \mathcal{V}}$ как произведение матриц P^{-1} и $E^{\mathcal{V}}$, где P^{-1} — спектральная характеристика оператора интегрирования (см. примеры спектральных характеристик P^{-1} в разд. 1.6). Запишем ненулевые элементы матрицы P^{-1} для тригонометрических функций (1.9):

$$P_{00}^{-1} = \frac{T}{2}, \quad P_{0m}^{-1} = -P_{m0}^{-1} = \frac{\sqrt{2}T}{(m+1)\pi}, \quad P_{l-1,l}^{-1} = -P_{l,l-1}^{-1} = \frac{T}{l\pi},$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 2k - 1, \quad l = 2k.$$

Для $i = 0$ получаем

$$P_{0j}^{-1,\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} P_{0m}^{-1} E_{mj}^{\nu} = T \left(\frac{E_{0j}^{\nu}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} E_{2k,j}^{\nu}}{2k\pi} \right),$$

а для $i \neq 0$ выражения элементов спектральной характеристики $P^{-1,\nu}$ значительно проще, так как они содержат одно или два слагаемых в зависимости от четности или нечетности индекса i :

$$P_{ij}^{-1,\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} P_{im}^{-1} E_{mj}^{\nu} = T \frac{E_{i+1,j}^{\nu} - \sqrt{2} E_{0j}^{\nu}}{(i+1)\pi}, \quad i = 2k - 1,$$

$$P_{ij}^{-1,\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} P_{im}^{-1} E_{mj}^{\nu} = -T \frac{E_{i-1,j}^{\nu}}{i\pi}, \quad i = 2k, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad i, k = 1, 2, 3, \dots,$$

т.е.

$$P^{-1,\nu} = \sqrt{T} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\zeta_0}{2} + \frac{2\sqrt{2}\zeta_2 + \sqrt{2}\zeta_4}{4\pi} + \dots & \frac{\zeta_1}{2} + \frac{-\zeta_1 + 2\zeta_3}{4\pi} + \dots & \frac{\zeta_2}{2} + \frac{2\sqrt{2}\zeta_0 + \zeta_2}{4\pi} + \dots & \dots & \dots \\ \frac{-\sqrt{2}\zeta_0 + \zeta_2}{2\pi} & \frac{-2\sqrt{2}\zeta_1 + \sqrt{2}\zeta_3}{4\pi} & \frac{2\zeta_0 - 2\sqrt{2}\zeta_2 + \sqrt{2}\zeta_4}{4\pi} & \dots & \dots \\ -\frac{\zeta_1}{2\pi} & \frac{-2\zeta_0 + \sqrt{2}\zeta_2}{4\pi} & -\frac{\sqrt{2}\zeta_3}{4\pi} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \blacksquare$$

Далее укажем некоторые свойства спектрального преобразования операторов стохастического интегрирования по центрированному пуассоновскому процессу. Фактически, они отличаются от свойств спектрального преобразования операторов стохастического интегрирования по винеровскому процессу только обозначениями, поэтому приводятся без дополнительных пояснений.

1. Спектральное преобразование интеграла от неслучайной функции.

Спектральная характеристика интеграла от функции $f(\cdot)$ равна произведению спектральной характеристики $P^{-1,\mathcal{N}}$ оператора стохастического интегрирования \mathcal{D}_{Π}^{-1} и спектральной характеристики F функции $f(\cdot)$:

$$\mathbb{S} \left[\int_{t_0}^{(\cdot)} f(\tau) d\Pi(\tau) \right] = P^{-1,\mathcal{N}} F = P^{-1}(V\mathcal{N})F. \quad (2.85)$$

2. Сдвиг и масштабирование базисной системы.

Если $\{\tilde{q}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2([0, 1])$, а $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — соответствующая ей базисная система пространства $L_2([t_0, T])$ (см. п. 1 замечаний 1.1), то

$$P_{qq}^{-1,\mathcal{N}} = \sqrt{T - t_0} P_{\tilde{q}\tilde{q}}^{-1,\mathcal{N}}.$$

Далее перейдем к интегрированию случайных процессов — элементов пространства $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$. Интегрирование случайных процессов $F(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ по отрезку \mathbb{T} рассматривалось в разд. 2.3.

3. Спектральное преобразование стохастического интеграла Огавы.

Спектральная характеристика стохастического интеграла Огавы от случайного процесса $F(\cdot)$ со спектральной характеристикой \mathcal{F} представляется в виде (такое же соотношение справедливо и для стохастического интеграла Стратоновича при условии, что он совпадает со стохастическим интегралом Огавы)

$$\mathbb{S} \left[\int_{t_0}^{(\cdot)} F(\tau) \diamond d\Pi(\tau) \right] = P^{-1,\mathcal{N}} \mathcal{F} = P^{-1}(V\mathcal{N})\mathcal{F}. \quad (2.86)$$

Соответствующий оператор обозначим ${}^{\circ}\mathcal{D}_{\Pi}^{-1}$, т.е.

$${}^{\circ}\mathcal{D}_{\Pi}^{-1}F(\cdot) = \int_{t_0}^{(\cdot)} F(\tau) \diamond d\Pi(\tau).$$

Формула (2.79) позволяет записать соотношения для спектральных характеристик стохастических интегралов в виде

$$\mathbb{S} \left[\int_{t_0}^{(\cdot)} f(\tau) d\Pi(\tau) \right] = P^{-1} E^{\mathcal{N}} F, \quad \mathbb{S} \left[\int_{t_0}^{(\cdot)} F(\tau) \diamond d\Pi(\tau) \right] = P^{-1} E^{\mathcal{N}} \mathcal{F}.$$

Пример 2.20. Найти спектральную характеристику $P^{-1, \mathcal{N}}$ оператора стохастического интегрирования по центрированному пуассоновскому процессу интенсивности λ относительно полиномов Лежандра (1.5), заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Определим двумерную спектральную характеристику $E^{\mathcal{N}}$ случайного линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*\Pi}$ (см. разд. 2.3), применяя соотношение (2.30) для нахождения ее элементов:

$$E_{ij}^{\mathcal{N}} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{ijk} \mathcal{N}_k = \sum_{k=0}^{\infty} V_{ijk} \eta_k,$$

где V_{ijk} — элементы спектральной характеристики оператора умножения функций V относительно полиномов Лежандра (1.5), а η_k — центрированные и некоррелированные случайные величины (2.45).

Известно (см. примеры спектральных характеристик V в разд. 1.5), что

$$V_{ijk} = \sqrt{\frac{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}{T}} \frac{(i+j-k-1)!!}{(i+j-k)!!} \frac{(j+k-i-1)!!}{(j+k-i)!!} \frac{(k+i-j-1)!!}{(k+i-j)!!} \frac{(i+j+k)!!}{(i+j+k+1)!!},$$

если $i+j+k$ — четное число и $|i-j| \leq k \leq i+j$, и $V_{ijk} = 0$ в остальных случаях. Поэтому

$$E_{ij}^{\mathcal{N}} = \sum_{k=|i-j|}^{i+j} V_{ijk} \eta_k.$$

Теперь выразим спектральную характеристику $P^{-1, \mathcal{N}}$ согласно формуле (2.79), т.е. как произведение матриц P^{-1} и $E^{\mathcal{N}}$, где P^{-1} — спектральная характеристика оператора интегрирования (см. примеры спектральных характеристик P^{-1} в разд. 1.6), имеющая следующие ненулевые элементы:

$$P_{00}^{-1} = \frac{T}{2}, \quad P_{i-1,i}^{-1} = -P_{i,i-1}^{-1} = -T \frac{1}{2\sqrt{4i^2-1}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Отсюда для $j = 0, 1, 2, \dots$ получаем искомый результат:

$$P_{0j}^{-1, \mathcal{N}} = \sum_{m=0}^{\infty} P_{0m}^{-1} E_{mj}^{\mathcal{V}} = P_{00}^{-1} E_{0j}^{\mathcal{N}} + P_{01}^{-1} E_{1j}^{\mathcal{N}} = \frac{T}{2} V_{0jj} \eta_j - \frac{T}{2\sqrt{3}} \sum_{k=|1-j|}^{1+j} V_{1jk} \eta_k,$$

$$\begin{aligned} P_{ij}^{-1, \mathcal{N}} &= \sum_{m=0}^{\infty} P_{im}^{-1} E_{mj}^{\mathcal{N}} = P_{i,i-1}^{-1} E_{i-1,j}^{\mathcal{N}} + P_{i,i+1}^{-1} E_{i+1,j}^{\mathcal{N}} = \\ &= \frac{T}{2\sqrt{4i^2-1}} \sum_{k=|i-j-1|}^{i+j-1} V_{i-1,j,k} \eta_k - \frac{T}{2\sqrt{4(i+1)^2-1}} \sum_{k=|i-j+1|}^{i+j+1} V_{i+1,j,k} \eta_k, \quad i > 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.8. Приближенное представление случайных процессов

Как и для функций одной переменной (см. разд. 1.10), для случайных процессов $F(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ можно рассмотреть задачу приближенного представления в виде частичной сум-

мы ряда (2.6):

$$F(t) \approx \tilde{F}(t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad \tilde{F}(\cdot) = \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{F}_i q(i, \cdot), \quad (2.87)$$

где коэффициенты разложения \mathcal{F}_i заданы формулой (2.5). Решение такой задачи аппроксимации состоит в нахождении коэффициентов разложения \mathcal{F}_i , $i = 0, 1, \dots, L-1$, и использовании (2.87) при заданной величине L .

Элементы спектральной характеристики $\tilde{\mathcal{F}}$ случайного процесса $\tilde{F}(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$ удовлетворяют условию:

$$\tilde{\mathcal{F}}_i = \begin{cases} \mathcal{F}_i, & i = 0, 1, \dots, L-1, \\ 0, & i = L, L+1, \dots, \end{cases}$$

и ее следует представлять конечной случайной матрицей-столбцом размеров $L \times 1$ — усеченной спектральной характеристикой \mathcal{F} (L -мерным случайным вектором):

$$\tilde{\mathcal{F}} = [\mathcal{F}_0 \ \mathcal{F}_1 \ \dots \ \mathcal{F}_{L-1}]^T,$$

где L , как и ранее (см. разд. 1.10), — порядок усечения спектральных характеристик.

Прежде рассмотрим описание случайных процессов в рамках корреляционной теории (см. разд. 2.1). Пусть ${}^1S^F$ и S^F — первая и вторая нестационарные спектральные плотности случайного процесса $F(\cdot)$ соответственно, а B^F — вторая начальная нестационарная спектральная плотность случайного процесса $F(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$, т.е. это спектральные характеристики его математического ожидания $m_F(\cdot)$, корреляционной функции $R_F(\cdot)$ и моментной функции второго порядка $B_F(\cdot)$.

Случайному процессу $\tilde{F}(\cdot)$ отвечают математическое ожидание $m_{\tilde{F}}(\cdot)$ и корреляционная функция $R_{\tilde{F}}(\cdot)$. Первую и вторую нестационарные спектральные плотности ${}^1S^{\tilde{F}}$ и $S^{\tilde{F}}$ случайного процесса $\tilde{F}(\cdot)$ удобно представлять конечной матрицей-столбцом размеров $L \times 1$ и квадратной матрицей размеров $L \times L$ соответственно, т.е. усеченными нестационарными спектральными плотностями ${}^1S^{\tilde{F}}$ и $S^{\tilde{F}}$ с элементами, которые определены выражениями (2.9) и (2.10). Таким образом,

$${}^1S^{\tilde{F}} = [{}^1S_0^{\tilde{F}} \ {}^1S_1^{\tilde{F}} \ \dots \ {}^1S_{L-1}^{\tilde{F}}]^T, \quad S^{\tilde{F}} = \begin{bmatrix} S_{00}^{\tilde{F}} & S_{01}^{\tilde{F}} & \dots & S_{0,L-1}^{\tilde{F}} \\ S_{10}^{\tilde{F}} & S_{11}^{\tilde{F}} & \dots & S_{1,L-1}^{\tilde{F}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{L-1,0}^{\tilde{F}} & S_{L-1,1}^{\tilde{F}} & \dots & S_{L-1,L-1}^{\tilde{F}} \end{bmatrix}.$$

Из формул (1.117) и (1.123) находим выражения для погрешностей аппроксимации математического ожидания и корреляционной функции:

$$\varepsilon_{m_F} = \|m_F(\cdot) - m_{\tilde{F}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \sqrt{\|m_F(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 - \|{}^1S^{\tilde{F}}\|^2}, \quad (2.88)$$

$$\varepsilon_{R_F} = \|R_F(\cdot) - R_{\tilde{F}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \sqrt{\|R_F(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 - \|S^{\tilde{F}}\|^2}, \quad (2.89)$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора или матрицы (см. разд. 1.10).

Эти выражения справедливы, если элементы усеченных нестационарных спектральных плотностей вычислены точно. Если это не так, то, обозначая усеченные нестационарные спектральные плотности с неточно найденными элементами ${}^1S^{\tilde{F}}$ и $S^{\tilde{F}}$ (они соответствуют случай-

ному процессу $\tilde{F}(\cdot)$ с математическим ожиданием $m_{\tilde{F}}(\cdot)$ и корреляционной функцией $R_{\tilde{F}}(\cdot)$, на основе формул (1.118) и (1.124) получаем

$$\bar{\varepsilon}_{m_F} = \|m_F(\cdot) - m_{\tilde{F}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \sqrt{\|m_F(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 - \|{}^1S^{\tilde{F}}\|^2 + \|{}^1S^{\tilde{F}} - {}^1S^{\tilde{F}}\|^2}, \quad (2.90)$$

$$\bar{\varepsilon}_{R_F} = \|R_F(\cdot) - R_{\tilde{F}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \sqrt{\|R_F(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 - \|S^{\tilde{F}}\|^2 + \|S^{\tilde{F}} - S^{\tilde{F}}\|^2}. \quad (2.91)$$

Выражения для погрешностей аппроксимации моментной функции второго порядка $B_F(\cdot)$ отличаются от выражений (2.89) и (2.91) только обозначениями. Погрешности аппроксимации дисперсии $D_F(\cdot)$ и второго начального момента $EF^2(\cdot)$ вычисляются так же, как и погрешности аппроксимации математического ожидания $m_F(\cdot)$. При этом для нахождения спектральной характеристики дисперсии можно применить теорему 2.1.

Наряду с погрешностями аппроксимации первых двух моментов важное значение имеет среднеквадратическая погрешность аппроксимации случайного процесса $F(\cdot)$:

$$E\|F(\cdot) - \tilde{F}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2.$$

Так как эта величина является выражается через норму разности $F(\cdot) - \tilde{F}(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$, а спектральное преобразование сохраняет норму (см. свойства спектрального преобразования случайных процессов в разд. 2.2), для центрированных случайных процессов можно записать:

$$\varepsilon_F = E\|F(\cdot) - \tilde{F}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = E\|F(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 - E\|\tilde{F}\|^2 = \int_{\mathbb{T}} D_F(t) dt - \text{tr } S^{\tilde{F}}. \quad (2.92)$$

Для случайных процессов с ненулевым математическим ожиданием формула для среднеквадратической погрешности аппроксимации аналогична формуле (2.92), она включает усеченную вторую начальную нестационарную спектральную плотность B^F случайного процесса $F(\cdot)$. Кроме того, можно воспользоваться соотношением (2.16), из которого следует:

$$\varepsilon_F = E\|F(\cdot) - \tilde{F}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \int_{\mathbb{T}} D_F(t) dt - \text{tr } S^{\tilde{F}} + \varepsilon_{m_F}^2.$$

Чтобы оценить норму случайного процесса $F(\cdot)$ с помощью погрешности аппроксимации дисперсии $D_F(\cdot)$ для центрированных случайных процессов и второго начального момента $EF^2(\cdot)$ для случайных процессов с ненулевым математическим ожиданием, можно применить формулы (1.119) и (1.120), в которых в качестве функции $z(\cdot)$ берется $z_0(t) \equiv 1$, что соответствует линейному функционалу $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}$, ставящему в соответствие функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ интеграл от этой функции по отрезку \mathbb{T} (см. примеры линейных функционалов на множестве функций одной переменной в разд. 1.1), $\|z_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \sqrt{T - t_0}$.

Если $X(\cdot)$ — выходной сигнал линейной системы управления, входным сигналом для которой служит гауссовский белый шум $F(\cdot) = V(\cdot)$ (см. разд. 2.4), и эта система описывается импульсной переходной функцией $k(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ с двумерной спектральной характеристикой A — спектральной характеристикой линейного оператора (1.68), то

$$\varepsilon_X \approx \|k(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 - \|\tilde{A}\|^2, \quad (2.93)$$

или

$$\bar{\varepsilon}_X \approx \|k(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 - \|\tilde{A}\|^2 + \|\tilde{A} - \bar{A}\|^2, \quad (2.94)$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма матрицы, а \tilde{A} и \bar{A} — усеченные спектральные характеристики A , у последней из которых неточно найдены элементы (см. разд. 1.10). Приближенное равен-

ство в формулах (2.93) и (2.94) обусловлено тем, что $\text{tr } S^{\tilde{F}} \geq \|\tilde{A}\|^2$, поскольку диагональные элементы матрицы $S^{\tilde{F}}$ — это квадраты норм образов первых L функций базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ при применении линейного оператора (1.68) и они не меньше квадратов норм соответствующих столбцов матрицы \tilde{A} .

Матрицы \tilde{A} и \bar{A} задают линейные системы управления. Для первой из них выходной сигнал $\tilde{X}(\cdot)$ с усеченной спектральной характеристикой, а для второй — $\bar{X}(\cdot)$ с усеченной спектральной характеристикой, элементы которой определены неточно. Здесь использованы соотношения (2.59) и (2.60), а также $\|A\|_{\mathcal{M}_2}^2 = \text{tr } AA^T$. Формулы (2.93) и (2.94) — это частные случаи формул (1.123) и (1.124) соответственно.

Норму разности $\|\tilde{A} - \bar{A}\|$ можно выразить через усеченные вторые нестационарные спектральные плотности $S^{\tilde{X}}$ и $S^{\bar{X}}$ случайного процесса $X(\cdot)$. Согласно (2.59) имеем

$$S^{\tilde{X}} = \tilde{A}\tilde{A}^T \quad \text{и} \quad S^{\bar{X}} = \bar{A}\bar{A}^T. \quad (2.95)$$

При заданных матрицах $S^{\tilde{X}}$ и $S^{\bar{X}}$ матрицы \tilde{A} и \bar{A} определяются неоднозначно. Они, в свою очередь, однозначно определяют матрицы $S^{\tilde{X}}$ и $S^{\bar{X}}$, а для их нахождения можно использовать разложение Холецкого (метод квадратного корня [30]), тогда формула (2.94) преобразуется:

$$\bar{\varepsilon}_X = \|k(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 - \|\tilde{A}^*\|^2 + \|\tilde{A}^* - \bar{A}^*\|^2, \quad (2.96)$$

где \tilde{A}^* и \bar{A}^* — матрицы, удовлетворяющие равенствам (2.95) и найденные из разложения Холецкого матриц $S^{\tilde{X}}$ и $S^{\bar{X}}$. Формула (2.96) может применяться, когда матрица $S^{\bar{X}}$ получается в результате вычислительного эксперимента.

Пример 2.21. Вычислить погрешности аппроксимации математического ожидания $m_F(t) = \alpha e^{\mu t}$ случайного процесса $F(\cdot)$ при его приближенном представлении в виде частичной суммы ряда (1.10), используя косинусоиды (1.6), $t \in \mathbb{T} = [0, 1]$, $\alpha = 1$ и $\mu = \pm 1, \pm 2, \pm 3$. Порядки усечения спектральных характеристик (нестационарных спектральных плотностей): $L = 4, 8, \dots, 256$.

□ Найдем квадрат нормы математического ожидания $m_F(\cdot)$ с учетом заданного значения α :

$$\|m_F(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \int_0^1 e^{2\mu t} dt = \frac{e^{2\mu} - 1}{2\mu}.$$

Первая нестационарная спектральная плотность ${}^1S^F$ случайного процесса $F(\cdot)$ относительно косинусоид (1.6) получена в примере 2.1 для произвольных α и $\mu \neq 0$.

Применим формулу (2.88) для вычисления погрешности аппроксимации ε_{m_F} математического ожидания $m_F(\cdot)$ при заданных значениях L , когда функция приближенно представляется в виде частичной суммы (1.116) — функции $\tilde{m}_F(\cdot)$, что соответствует усечению первой нестационарной спектральной плотности (спектральной характеристики математического ожидания) с порядком L . Результаты вычислений приведены в табл. 2.1.

На рис. 2.1 показаны графики функций $m_F(\cdot)$ (тонкая линия), $\tilde{m}_F(\cdot)$ при $L = 8$ (толстая линия) и $\tilde{m}_F(\cdot)$ при $L = 32$ (толстая пунктирная линия) для значений $\mu = \pm 1$.

Анализ данных в табл. 2.1 показывает, что $\varepsilon_{m_F} \approx c/L^\gamma$, где $c > 0$ — константа, зависящая от параметра μ ; $\gamma = 3/2$, как и в примере 1.20. Для произвольного α погрешности аппроксимации в табл. 2.1 умножаются на этот параметр. ■

Таблица 2.1. Погрешности аппроксимации ε_{m_F}

	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\mu = -3$	0.035079	0.011817	0.004039	0.001401	0.000490	0.000172	0.000061
$\mu = -2$	0.023313	0.007850	0.002695	0.000938	0.000329	0.000116	0.000041
$\mu = -1$	0.011436	0.003992	0.001397	0.000491	0.000173	0.000061	0.000022
$\mu = 1$	0.031087	0.010852	0.003798	0.001334	0.000470	0.000166	0.000059
$\mu = 2$	0.172260	0.058005	0.019917	0.006931	0.002430	0.000856	0.000302
$\mu = 3$	0.704571	0.237353	0.081132	0.028142	0.009850	0.003465	0.001222

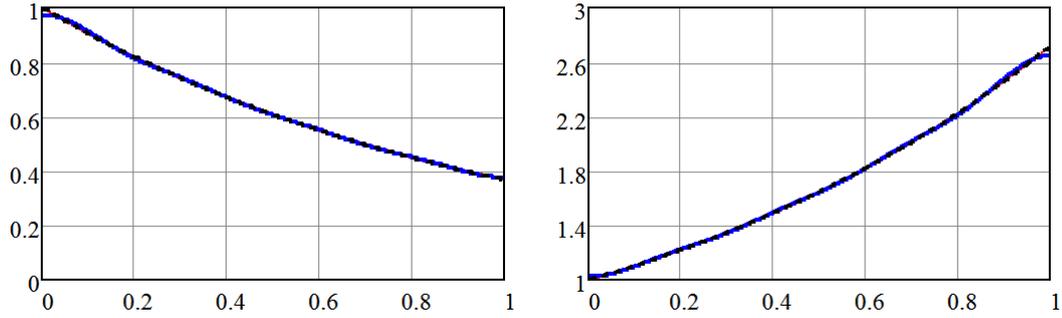


Рис. 2.1. Графики математического ожидания $m_F(\cdot)$ и его аппроксимаций $\tilde{m}_F(\cdot)$ при $\mu = -1$ (слева) и при $\mu = 1$ (справа)

Пример 2.22. Вычислить погрешности аппроксимации корреляционной функции $R_W(t, \tau) = \min\{t, \tau\}$ и среднеквадратическую погрешность аппроксимации винеровского процесса $W(\cdot)$ при его приближенном представлении в виде частичной суммы ряда (2.6), используя базисные системы (1.5)–(1.9) и базисную систему $\{\hat{\Sigma}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ из примера 2.4; $t, \tau \in \mathbb{T} = [0, 1]$. Порядки усечения спектральных характеристик (нестационарных спектральных плотностей): $L = 4, 8, \dots, 256$.

□ Квадрат нормы корреляционной функции $R_W(\cdot)$ согласно решению из примера 2.4 равен

$$\|R_W(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \frac{1}{6}.$$

Для элементов второй нестационарной спектральной плотности S^W винеровского процесса $W(\cdot)$ относительно полиномов Лежандра (1.5) и тригонометрических функций (1.9) воспользуемся результатами примеров 2.2 и 2.16 соответственно. Кроме того, рассмотрим базисную систему $\{\hat{\Sigma}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ собственных функций линейного интегрального оператора с ядром $R_W(\cdot)$ из примера 2.4. В том же примере получена вторая нестационарная спектральная плотность S^W — диагональная матрица, образованная соответствующими собственными значениями (см. п. 2 замечаний 2.2).

Чтобы найти вторую нестационарную спектральную плотность S^W относительно косинусов (1.6), применим определение, а именно соотношение (1.42) для нахождения ее элементов. В качестве множества \mathbb{T} возьмем отрезок $[0, T]$:

$$S_{ij}^W = (q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot), R_W(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \int_{\mathbb{T}^2} \hat{C}(i, t) \hat{C}(j, \tau) \min\{t, \tau\} dt d\tau =$$

$$= \int_{\mathbb{T}} \hat{C}(i, t) \left[\int_0^t \tau \hat{C}(j, \tau) d\tau + t \int_t^T \hat{C}(j, \tau) d\tau \right] dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

При $i = j = 0$ значение S_{ij}^W достаточно взять из примеров 2.2 и 2.16, так как базисные функции систем (1.5), (1.6) и (1.9) с номером $i = 0$ совпадают:

$$S_{00}^W = \frac{T^2}{3}.$$

Далее, при $j > 0$

$$\int_0^t \tau \hat{C}(j, \tau) d\tau + t \int_t^T \hat{C}(j, \tau) d\tau = \frac{T\sqrt{T}}{j^2\pi^2} \left(\cos \frac{j\pi t}{T} - 1 \right),$$

тогда при $i = 0$ и $j > 0$ находим

$$S_{0j}^W = \frac{T}{j^2\pi^2} \int_0^T \left(\cos \frac{j\pi t}{T} - 1 \right) dt = -\frac{\sqrt{2}T^2}{j^2\pi^2},$$

а из свойства симметричности $S_{0j}^W = S_{j0}^W$ (см. разд. 2.1).

Наконец, при $i, j > 0$ имеем

$$S_{ij}^W = S_{ji}^W = \frac{\sqrt{2}T}{j^2\pi^2} \int_0^T \cos \frac{i\pi t}{T} \left(\cos \frac{j\pi t}{T} - 1 \right) dt = \frac{T^2\delta_{ij}}{j^2\pi^2},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера (1.4).

Следовательно,

$$S^W = T^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{\pi^2} & -\frac{\sqrt{2}}{4\pi^2} & -\frac{\sqrt{2}}{9\pi^2} & \dots & c_{0j} & \dots \\ -\frac{\sqrt{2}}{\pi^2} & \frac{1}{\pi^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ -\frac{\sqrt{2}}{4\pi^2} & 0 & \frac{1}{4\pi^2} & 0 & & \vdots & \\ -\frac{\sqrt{2}}{9\pi^2} & 0 & 0 & \frac{1}{9\pi^2} & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \dots \\ c_{j0} & 0 & \dots & \dots & 0 & c_{jj} & \dots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{00} = \frac{1}{3}, \quad c_{0j} = c_{j0} = -\frac{\sqrt{2}}{j^2\pi^2}, \quad c_{jj} = \frac{1}{j^2\pi^2}, \quad c_{ij} = 0 \quad \text{в остальных случаях,} \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

Для вычисления элементов второй нестационарной спектральной плотности S^W относительно функций Уолша (1.7) воспользуемся подходом из примера 1.8. Дополнительно опираясь на пример 2.2, сначала найдем величины

$$\tilde{S}_{ij}^W = \int_{\mathbb{T}^2} \hat{\Pi}(i, t) \hat{\Pi}(j, \tau) \min\{t, \tau\} dt d\tau, \quad i, j = 0, 1, \dots, L-1,$$

в виде суммы $\tilde{S}_{ij}^W = \tilde{H}_{ij} + \tilde{H}_{ji}$, где $\{\hat{\Pi}(i, \cdot)\}_{i=0}^{L-1}$ — блочно-импульсные функции (1.15), $L = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Элементы \tilde{H}_{ij} получены в примере 1.8, отсюда

$$\tilde{S}_{ij}^W = \begin{cases} h^2 \left(i + \frac{1}{3} \right), & i = j, \\ h^2 \left(\min\{i, j\} + \frac{1}{2} \right), & i \neq j, \end{cases} \quad \text{или} \quad \tilde{S}_{ij}^W = h^2 \left(\min\{i, j\} + \frac{1}{2 + \delta_{ij}} \right), \quad h = \frac{T}{L}.$$

Далее с учетом связи (1.17) между блочно-импульсными функциями и функциями Уолша остается записать, что

$$S_{ij}^W = \sum_{k, l=0}^{L-1} \Delta_{\hat{W}\hat{\Pi}}^{ik} \Delta_{\hat{W}\hat{\Pi}}^{jl} \tilde{S}_{kl}^W,$$

или в матричной форме

$$\underline{S^W} = \underset{\hat{w}\hat{\Pi}}{\Delta} \tilde{S}^W \underset{\hat{w}\hat{\Pi}}{\Delta}^T,$$

где $\underline{S^W}$ — это квадратная матрица размеров $L \times L$, образованная элементами бесконечной матрицы S^W из первых L строк и столбцов с сохранением порядка.

Точно так же вычисляются элементы второй нестационарной спектральной плотности S^W относительно функций Хаара (1.8):

$$S_{ij}^W = \sum_{k,l=0}^{L-1} \underset{\hat{x}\hat{\Pi}}{\Delta} ik \underset{\hat{x}\hat{\Pi}}{\Delta} jl \tilde{S}_{kl}^W,$$

или в матричной форме

$$\underline{S^W} = \underset{\hat{x}\hat{\Pi}}{\Delta} \tilde{S}^W \underset{\hat{x}\hat{\Pi}}{\Delta}^T,$$

но здесь используется связь (1.19) блочно-импульсных функций и функций Хаара.

Следующий шаг — применение формулы (2.89), по которой можно найти погрешность аппроксимации ε_{R_W} корреляционной функции $R_W(\cdot)$ при заданных значениях L , когда функция приближенно представляется в виде частичной суммы (1.121) — функции $\tilde{R}_W(\cdot)$, что соответствует усечению второй нестационарной спектральной плотности (двумерной спектральной характеристики корреляционной функции) с порядком L . Результаты вычислений содержатся в табл. 2.2.

Графики функций $R_W(\cdot)$ (точки) и $\tilde{R}_W(\cdot)$ (линии) при $L = 64$ изображены на рис. 2.2 для полиномов Лежандра (для косинусоид и базисной системы $\{\hat{\Sigma}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ графики аналогичны) и на рис. 2.3 для тригонометрических функций. Причина такой ошибки аппроксимации на границе квадрата $\mathbb{T}^2 = [0, 1] \times [0, 1]$, хорошо заметной на рис. 2.3, описана в замечании 1.5 (см. также пример 1.9).

Если использовать для второй нестационарной спектральной плотности S^W соотношение (2.61), в котором P^{-1} — усеченная спектральная характеристика оператора интегрирования (см. разд. 1.6), то следует применять формулу (2.91) для погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{R_W}$ корреляционной функции $R_W(\cdot)$ при заданных значениях L , когда функция приближенно представляется в виде частичной суммы (1.121) при неточном вычислении коэффициентов разложения — функции $\bar{R}_W(\cdot)$ (см. разд. 1.10). Эти погрешности приведены в табл. 2.3 для тех же базисных систем за исключением $\{\hat{\Sigma}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$.

Далее по данным из табл. 2.2 и 2.3 получаем оценку: $\varepsilon_{R_W}, \bar{\varepsilon}_{R_W} \approx c/L^\gamma$, где $c > 0$ — константа, зависящая от базисной системы; $\gamma = 3/2$ для полиномов Лежандра, косинусоид и базисной системы $\{\hat{\Sigma}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ собственных функций (они обеспечивают минимальную погрешность), $\gamma = 1$ для функций Уолша и Хаара (погрешности для них ожидаемо совпадают), $\gamma = 1/2$ для тригонометрических функций. В данном примере при $\mathbb{T} = [0, T]$ найденные погрешности аппроксимации требуется умножить на коэффициент T^2 , как и в примерах 1.21 и 1.22.

Среднеквадратические погрешности аппроксимации ε_W винеровского процесса $W(\cdot)$ указаны в табл. 2.4. Они найдены по формуле (2.92) при заданных значениях L , т.е. в предположении, что винеровский процесс представляется в виде частичной суммы (2.87) — случайного

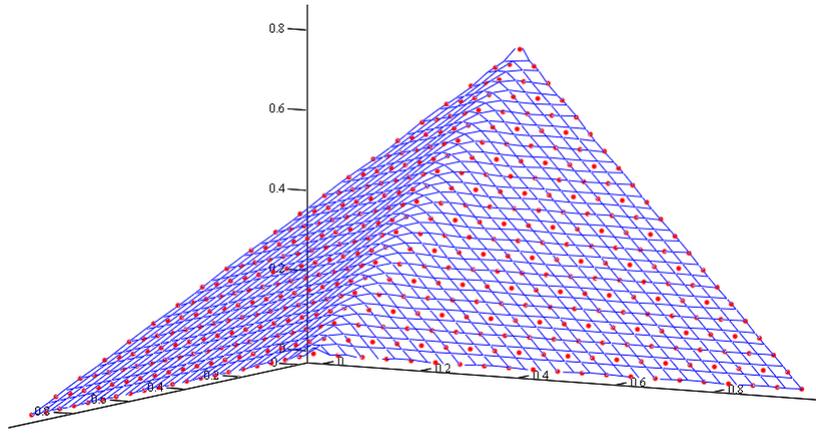


Рис. 2.2. Графики корреляционной функции $R_W(\cdot)$ и ее аппроксимации $\tilde{R}_W(\cdot)$ с помощью полиномов Лежандра

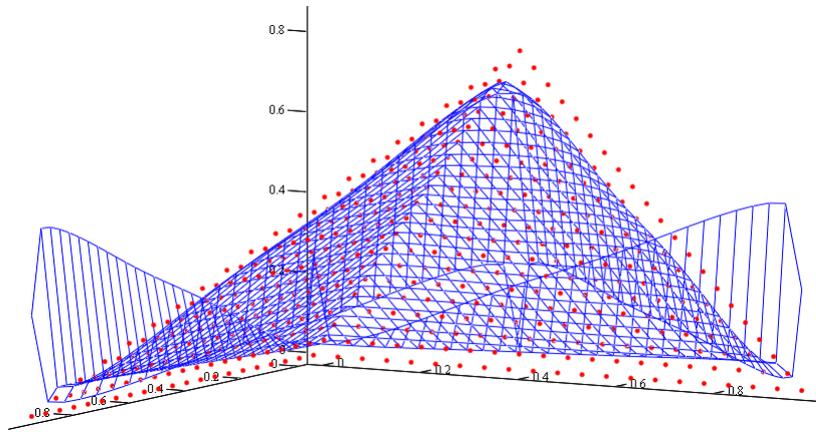


Рис. 2.3. Графики корреляционной функции $R_W(\cdot)$ и ее аппроксимации $\tilde{R}_W(\cdot)$ с помощью тригонометрических функций

процесса $\tilde{W}(\cdot)$, а это соответствует усечению его спектральной характеристики с порядком L . Точное значение квадрата нормы дает формула (2.62) (см. также примеры 2.8 и 2.12), при $T = 1$ оно равно $1/2$.

Из этих данных находим, что $\varepsilon_W \approx c/L^\gamma$, где $c > 0$ — константа, зависящая от базисной системы; $\gamma = 1$ для всех применяемых базисных систем. При условии $\mathbb{T} = [0, T]$ можно показать, что эта погрешность зависит от T так же, как и погрешности ε_{R_W} и $\bar{\varepsilon}_{R_W}$.

Дополнительно проиллюстрируем теорему 2.1, согласно которой спектральную характеристику дисперсии $D_W(t) = t$ винеровского процесса можно выразить формулой (2.2): $D^W = VS^W$, где V — спектральная характеристика оператора умножения функций относительно той же базисной системы, что и спектральные характеристики D^W и S^W (см. разд. 1.5). Здесь интересна погрешность $\bar{\varepsilon}_{D_W}$ аппроксимации дисперсии при заданных значениях L , когда она приближенно представляется в виде частичной суммы (1.116) при неточном вычислении коэффициентов разложения — функции $\bar{D}_W(\cdot)$ (см. разд. 1.10). Для вычисления $\bar{\varepsilon}_{D_W}$ достаточно применить формулу (1.118) и учесть, что

$$\|D_W(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

Таблица 2.2. Погрешности аппроксимации ε_{R_W}

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.013515	0.004230	0.001431	0.000496	0.000174	0.000061	0.000022
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.019591	0.006340	0.002141	0.000740	0.000258	0.000091	0.000032
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.069096	0.035325	0.017853	0.008974	0.004499	0.002252	0.001127
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.069096	0.035325	0.017853	0.008974	0.004499	0.002252	0.001127
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.115177	0.085934	0.062750	0.045137	0.032199	0.022869	0.016207
$\{\hat{\Sigma}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.007203	0.002575	0.000913	0.000323	0.000114	0.000040	0.000014

Таблица 2.3. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{R_W}$

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.014086	0.004342	0.001451	0.000500	0.000175	0.000061	0.000022
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.020134	0.006448	0.002163	0.000744	0.000259	0.000091	0.000032
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.069877	0.035516	0.017901	0.008986	0.004502	0.002253	0.001127
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.069877	0.035516	0.017901	0.008986	0.004502	0.002253	0.001127
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.117073	0.086677	0.063033	0.045242	0.032236	0.022883	0.016212

Результаты вычислений указаны в табл. 2.5. В примере 1.20 приведены погрешности аппроксимации дисперсии, соответствующие точному вычислению коэффициентов разложения, — это величины ε_{f_1} .

Таблица 2.4. Погрешности аппроксимации ε_W

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.031746	0.015686	0.007820	0.003907	0.001953	0.000977	0.000488
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.028757	0.013490	0.006535	0.003216	0.001596	0.000795	0.000397
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.041667	0.020833	0.010417	0.005208	0.002604	0.001302	0.000651
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.041667	0.020833	0.010417	0.005208	0.002604	0.001302	0.000651
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.046348	0.024008	0.012302	0.006238	0.003142	0.001577	0.000790
$\{\hat{\Sigma}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.025201	0.012649	0.006331	0.003166	0.001583	0.000792	0.000396

Таблица 2.5. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{D_W}$

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.036287	0.017010	0.008284	0.004098	0.002039	0.001017	0.000508
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.031914	0.014419	0.006784	0.003280	0.001612	0.000799	0.000398
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.083333	0.041667	0.020833	0.010417	0.005208	0.002604	0.001302
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.083333	0.041667	0.020833	0.010417	0.005208	0.002604	0.001302
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.153098	0.114959	0.084823	0.061725	0.044480	0.031840	0.022691

На рис. 2.4 показаны графики функций $D_W(\cdot)$ (тонкая линия), $\bar{D}_W(\cdot)$ при $L = 8$ (толстая линия) и $\bar{D}_W(\cdot)$ при $L = 32$ (толстая пунктирная линия) для полиномов Лежандра и тригонометрических функций. В отличие от примера 1.20 здесь даже при выборе полиномов Лежандра не получается точного представления функции $D_W(\cdot)$ из-за усечения спектральных характеристик V и S^W .

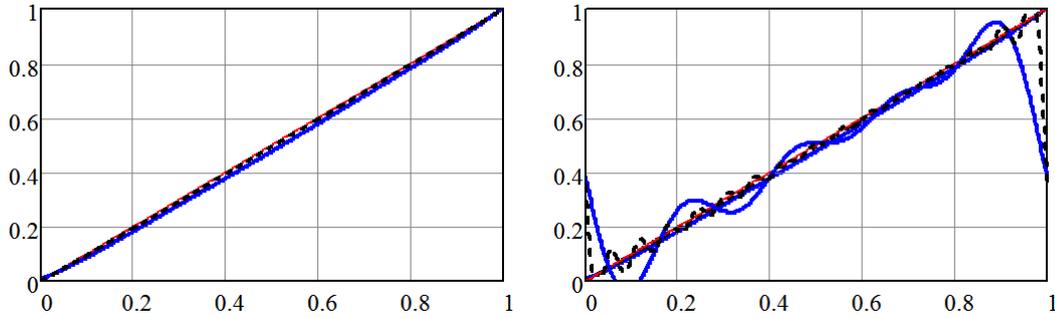


Рис. 2.4. Графики дисперсии $D_W(\cdot)$ и ее аппроксимаций $\bar{D}_W(\cdot)$ с помощью полиномов Лежандра (слева) и тригонометрических функций (справа)

Находим следующую оценку погрешности: $\bar{\varepsilon}_{D_W} \approx c/L^\gamma$, где $c > 0$ — константа, зависящая от базисной системы; $\gamma = 1$ для полиномов Лежандра, косинусоид, а также функций Уолша и Хаара, $\gamma = 1/2$ для тригонометрических функций. Последнее значение обусловлено оценкой ε_{f_1} из примера 1.20. ■

Пример 2.23. Вычислить погрешности аппроксимации корреляционной функции $R_Y(t, \tau) = \min\{t, \tau\} - t\tau/T$ и среднеквадратическую погрешность аппроксимации броуновского моста $Y(\cdot)$ при его приближенном представлении в виде частичной суммы ряда (2.6), используя базисные системы (1.5)–(1.9) и базисную систему $\{\hat{S}(i, \cdot)\}_{i=1}^\infty$ из примера 2.9; $t, \tau \in \mathbb{T} = [0, 1]$ ($T = 1$). Порядки усечения спектральных характеристик (нестационарных спектральных плотностей): $L = 4, 8, \dots, 256$.

□ Как и в примере 2.22, сначала найдем квадрат нормы заданной корреляционной функции при $T = 1$:

$$\begin{aligned} \|R_Y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 &= \int_0^1 \int_0^1 (\min\{t, \tau\} - t\tau)^2 dt d\tau = \int_0^1 \left[(1-t)^2 \int_0^t \tau^2 d\tau + t^2 \int_t^1 (1-\tau)^2 d\tau \right] dt = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{t^3(1-t)^2}{3} + \frac{t^2(1-t)^3}{3} \right] dt = \frac{1}{3} \int_0^1 t^2(1-t)^2 dt = \frac{1}{90}. \end{aligned}$$

Базисная система $\{\hat{S}(i, \cdot)\}_{i=1}^\infty$ собственных функций линейного интегрального оператора с ядром $R_Y(\cdot)$ получена в примере 2.9. Там же представлена вторая нестационарная спектральная плотность S^Y — диагональная матрица, образованная соответствующими собственными значениями (см. п. 2 замечаний 2.2), — двумерная спектральная характеристика корреляционной функции $R_Y(\cdot)$. Для других базисных систем вторую нестационарную спектральную плотность S^Y найдем из свойства линейности (1.47):

$$S^Y = \mathbb{S}[R_Y(\cdot)] = \mathbb{S}[R_W(\cdot) - f_1(\cdot) \otimes f_1(\cdot)] = \mathbb{S}[R_W(\cdot)] - \mathbb{S}[f_1(\cdot) \otimes f_1(\cdot)],$$

где первое слагаемое в правой части последнего равенства — это вторая нестационарная спектральная плотность S^W винеровского процесса, а второе слагаемое можно выразить согласно теореме 1.4 через спектральную характеристику F функции $f_1(t) = t$. Тогда $S^Y = S^W - FF^T$.

Например, для полиномов Лежандра (1.5) имеем

$$S^Y = T^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{4\sqrt{3}\sqrt{15}} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{60} & 0 & \frac{1}{4\sqrt{15}\sqrt{35}} & \ddots & \vdots & \\ \frac{1}{4\sqrt{3}\sqrt{15}} & 0 & \frac{1}{42} & 0 & \ddots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{4\sqrt{15}\sqrt{35}} & 0 & \frac{1}{90} & \ddots & c_{m-2,m} & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & c_{m,m-2} & 0 & c_{mm} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

где

$$c_{00} = \frac{1}{12}, \quad c_{01} = c_{10} = 0, \quad c_{11} = \frac{1}{60}, \quad c_{mm} = \frac{1}{2(2m-1)(2m+3)}, \quad c_{m-1,m} = c_{m,m-1} = 0,$$

$$c_{m-2,m} = c_{m,m-2} = -\frac{1}{4\sqrt{[4(m-1)^2-1](4m^2-1)}},$$

$$c_{m-k,m} = c_{m,m-k} = 0 \quad (m \geq 3), \quad m = 2, 3, 4, \dots, \quad k = 3, 4, \dots, m,$$

т.е. матрицы S^W и S^Y отличаются только элементами с индексами $i, j = 0, 1$.

Таким образом, элементы второй нестационарной спектральной плотности S^Y относительно базисных систем (1.5)–(1.9) получаются на основе примеров 2.2, 2.16 и 2.22 для второй нестационарной спектральной плотности S^W , а также примеров 1.2, 1.3 и замечания 1.3 для спектральной характеристики F .

Далее можно воспользоваться формулой (2.89) для погрешности аппроксимации ε_{R_Y} корреляционной функции $R_Y(\cdot)$ при заданных значениях L , когда функция приближенно представляется в виде частичной суммы (1.121) — функции $\tilde{R}_Y(\cdot)$, что соответствует усечению второй нестационарной спектральной плотности (двумерной спектральной характеристики корреляционной функции) с порядком L . Результаты вычислений приведены в табл. 2.6.

Таблица 2.6. Погрешности аппроксимации ε_{R_Y}

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.013515	0.004230	0.001431	0.000496	0.000174	0.000061	0.000022
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.017852	0.005613	0.001865	0.000639	0.000222	0.000078	0.000027
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.036309	0.019514	0.010089	0.005127	0.002584	0.001297	0.000650
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.036309	0.019514	0.010089	0.005127	0.002584	0.001297	0.000650
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.016638	0.005126	0.001691	0.000578	0.000201	0.000071	0.000025
$\{\hat{S}(i, \cdot)\}_{i=1}^{\infty}$	0.006055	0.002352	0.000872	0.000316	0.000113	0.000040	0.000014

Из результатов вычислений, приведенных в табл. 2.6, находим $\varepsilon_{R_Y} \approx c/L^\gamma$, где $c > 0$ — константа, зависящая от базисной системы, $\gamma = 1$ для функций Уолша и Хаара и $\gamma = 3/2$ для остальных применяемых базисных систем. Минимальная погрешность достигается при выборе базисной системы $\{\hat{S}(i, \cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ собственных функций. При $T = [0, T]$ найденные погрешности аппроксимации достаточно умножить на коэффициент T^2 , что следует из примеров 1.20 и 2.22.

Добавим, что погрешность, соответствующая тригонометрическим функциям, сопоставима

с остальными погрешностями в отличие от примера 2.22. Здесь важно, что на границе квадрата $\mathbb{T}^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ значения функции $R_Y(\cdot)$ равны нулю. Графики функций $R_Y(\cdot)$ (точки) и $\tilde{R}_Y(\cdot)$ (линии) при $L = 32$ изображены на рис. 2.5.

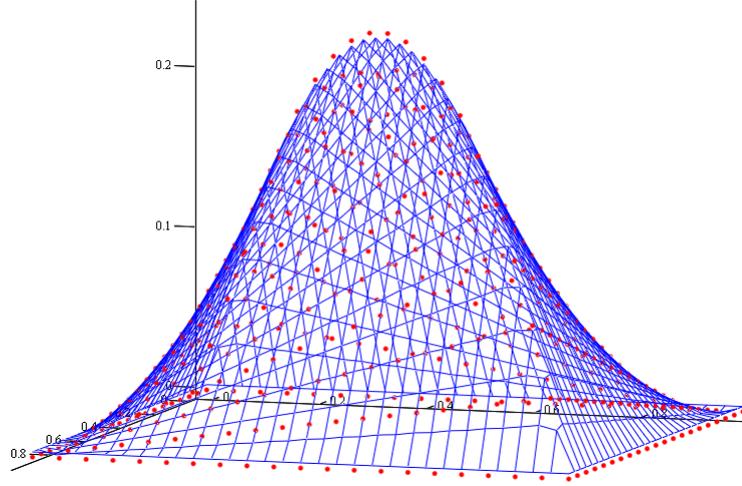


Рис. 2.5. Графики корреляционной функции $R_Y(\cdot)$ и ее аппроксимации $\tilde{R}_Y(\cdot)$ с помощью тригонометрических функций

Перейдем к среднеквадратическим погрешностям аппроксимации ε_Y броуновского моста $Y(\cdot)$ (см. табл. 2.7). Они получены с помощью формулы (2.92) при заданных значениях L , т.е. в предположении, что броуновский мост представляется в виде частичной суммы (2.87) — случайного процесса $\tilde{Y}(\cdot)$, а это соответствует усечению его спектральной характеристики с порядком L . При вычислении данных погрешностей нужно вычислить квадрат нормы случайного процесса $Y(\cdot)$ при $T = 1$ (см. свойства спектрального преобразования случайных процессов в разд. 2.2):

$$\int_0^1 D_Y(t) dt = \int_0^1 R_Y(t, t) dt = \int_0^1 (t - t^2) dt = \frac{1}{6}.$$

Таблица 2.7. Погрешности аппроксимации ε_Y

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.031746	0.015686	0.007820	0.003907	0.001953	0.000977	0.000488
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.028566	0.013464	0.006531	0.003216	0.001596	0.000795	0.000397
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.036458	0.019531	0.010091	0.005127	0.002584	0.001297	0.000650
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.036458	0.019531	0.010091	0.005127	0.002584	0.001297	0.000650
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.026340	0.012795	0.006349	0.003168	0.001583	0.000792	0.000396
$\{\hat{S}(i, \cdot)\}_{i=1}^\infty$	0.022425	0.011906	0.006139	0.003117	0.001571	0.000788	0.000395

Из данных в табл. 2.7 находим, что $\varepsilon_Y \approx c/L^\gamma$, где $c > 0$ — константа, зависящая от базисной системы; $\gamma = 1$ для всех применяемых базисных систем. При условии $\mathbb{T} = [0, T]$ можно показать, что эта погрешность зависит от T так же, как и погрешности ε_{R_Y} и $\bar{\varepsilon}_{R_Y}$. ■

Пример 2.24. Вычислить погрешности аппроксимации корреляционной функции $R_X(t, \tau) = \sigma^2(e^{\mu(t+\tau)} - e^{\mu|t-\tau|})/(2\mu)$ и среднеквадратическую погрешность аппроксимации

процесса Орнштейна – Уленбека $X(\cdot)$ при его приближенном представлении в виде частичной суммы ряда (2.6), используя косинусоиды (1.6); $t, \tau \in \mathbb{T} = [0, 1]$, $\mu = \pm 1, \pm 2, \pm 3$, $\sigma = 1$. Порядки усечения спектральных характеристик (нестационарных спектральных плотностей): $L = 4, 8, \dots, 256$.

□ Найдем квадрат нормы корреляционной функции $R_X(\cdot)$ при $T = 1$ и заданном значении σ :

$$\begin{aligned} \|R_X(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{(e^{\mu(t+\tau)} - e^{\mu|t-\tau|})^2}{4\mu^2} dt d\tau = \frac{1}{2\mu^2} \int_0^1 \left[\int_0^t (e^{\mu(t+\tau)} - e^{\mu(t-\tau)})^2 d\tau \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\mu^2} \int_0^1 \frac{e^{4\mu t} - 4\mu t e^{2\mu t} - 1}{2\mu} dt = \frac{e^{4\mu} - 4(2\mu - 1)e^{2\mu} - 4\mu - 5}{16\mu^4}. \end{aligned}$$

Применим результаты примера 2.17, в котором представлена вторая нестационарная спектральная плотность S^X процесса Орнштейна – Уленбека $X(\cdot)$ относительно косинусоид при произвольных μ и σ .

Как и ранее (см. примеры 2.22 и 2.23), воспользуемся формулой (2.89) для погрешности аппроксимации ε_{R_X} корреляционной функции $R_X(\cdot)$ при заданных значениях L , когда функция приближенно представляется в виде частичной суммы (1.121) — функции $\tilde{R}_X(\cdot)$, что соответствует усечению второй нестационарной спектральной плотности (двумерной спектральной характеристики корреляционной функции) с порядком L . Результаты вычислений приведены в табл. 2.8, а графики функций $R_X(\cdot)$ (точки) и $\tilde{R}_X(\cdot)$ (линии) при $\mu = -1$ и $L = 32$ показаны на рис. 2.6.

Таблица 2.8. Погрешности аппроксимации ε_{R_X}

	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\mu = -3$	0.011304	0.003809	0.001295	0.000448	0.000156	0.000055	0.000019
$\mu = -2$	0.013029	0.004246	0.001429	0.000492	0.000172	0.000060	0.000021
$\mu = -1$	0.015698	0.004991	0.001666	0.000572	0.000199	0.000070	0.000025
$\mu = 1$	0.035851	0.013043	0.004642	0.001643	0.000581	0.000205	0.000073
$\mu = 2$	0.202646	0.070305	0.024489	0.008580	0.003018	0.001064	0.000376
$\mu = 3$	1.318793	0.449076	0.154296	0.053654	0.018802	0.006617	0.002334

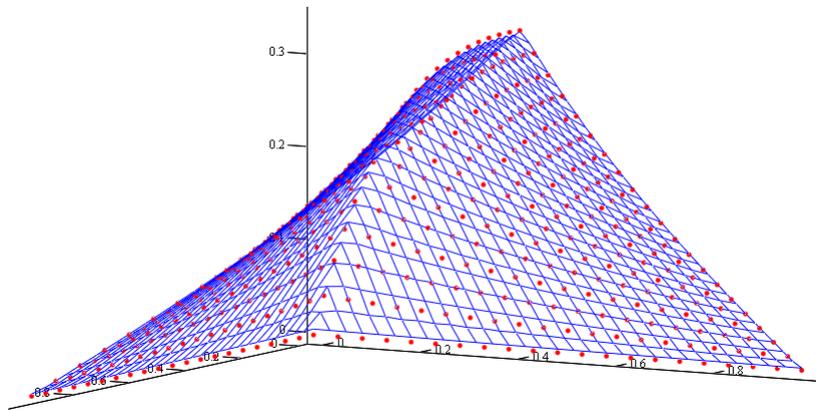


Рис. 2.6. Графики корреляционной функции $R_X(\cdot)$ и ее аппроксимации $\tilde{R}_X(\cdot)$ с помощью косинусоид

Вторую нестационарную спектральную плотность S^X можно выразить по формуле (2.59), в которой $A = (P - \mu E)^{-1}$ (см. пример 2.17). Здесь P — усеченная спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом начального значения (см. разд. 1.7), а E — единичная матрица. В этом случае применяется формула (2.91) для погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{R_X}$ корреляционной функции $R_X(\cdot)$ при заданных значениях L , когда функция приближенно представляется в виде частичной суммы (1.121) при неточном вычислении коэффициентов разложения — функции $\bar{R}_X(\cdot)$ (см. разд. 1.10). Эти погрешности приведены в табл. 2.9.

Таблица 2.9. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{R_X}$

	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\mu = -3$	0.017225	0.007243	0.002746	0.000982	0.000342	0.000118	0.000041
$\mu = -2$	0.022293	0.008657	0.003150	0.001110	0.000386	0.000134	0.000047
$\mu = -1$	0.030114	0.010615	0.003678	0.001268	0.000438	0.000152	0.000053
$\mu = 1$	0.083916	0.030087	0.011138	0.004163	0.001559	0.000583	0.000217
$\mu = 2$	1.078444	0.346388	0.107223	0.035799	0.012635	0.004582	0.001680
$\mu = 3$	9.398972	5.197821	1.659714	0.446938	0.124428	0.037719	0.012380

Погрешности $\bar{\varepsilon}_{R_X}$ больше, чем соответствующие погрешности ε_{R_X} . Но из результатов вычислений, приведенных в табл. 2.8 и 2.9, можно сделать следующий вывод: $\varepsilon_{R_X}, \bar{\varepsilon}_{R_X} \approx c/L^\gamma$, где $c > 0$ — константа, зависящая от параметра μ ; $\gamma = 3/2$.

Далее рассмотрим среднеквадратические погрешности аппроксимации ε_X и $\bar{\varepsilon}_X$ процесса Орнштейна–Уленбека $X(\cdot)$ (см. табл. 2.10 и 2.11). Они получены с помощью формул (2.92) и (2.94) при заданных значениях L , т.е. в предположении, что процесс Орнштейна–Уленбека представляется в виде частичной суммы (2.87). В первом варианте речь идет о случайном процессе $\tilde{X}(\cdot)$, его спектральная характеристика — это усеченная спектральная характеристика случайного процесса $X(\cdot)$, а во втором варианте — о случайном процессе $\bar{X}(\cdot)$, элементы его усеченной спектральной характеристики определяются неточно. При вычислении $\bar{\varepsilon}_X$ предполагается, что у усеченной спектральной характеристики A неточно найдены элементы. Это типичная ситуация, когда в формулу $A = (P - \mu E)^{-1}$ подставляется усеченная спектральная характеристика P (спектральная характеристика A относительно косинусоид при произвольных $\mu \neq 0$ и σ представлена в примере 2.17). Для вычисления этих погрешностей требуется квадрат нормы случайного процесса $X(\cdot)$ при $T = 1$ и заданном значении σ (см. свойства спектрального преобразования случайных процессов в разд. 2.2):

$$\int_0^1 D_X(t) dt = \int_0^1 R_X(t, t) dt = \int_0^1 \frac{e^{2\mu t} - 1}{2\mu} dt = \frac{e^{2\mu} - 2\mu - 1}{4\mu^2}.$$

Из данных в табл. 2.10 и 2.11 находим, что $\varepsilon_Y, \bar{\varepsilon}_Y \approx c/L^\gamma$ за исключением малых значений L при $\mu > 0$, где $c > 0$ — константа, зависящая от параметра μ ; $\gamma = 1$.

При другом выборе параметра σ погрешности аппроксимации в табл. 2.8 и 2.9 нужно взять с коэффициентом σ^2 , а погрешности аппроксимации в табл. 2.10 и 2.11 — с коэффициентом σ^4 . ■

Таблица 2.10. Погрешности аппроксимации ε_X

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\mu = -3$	0.027472	0.013348	0.006518	0.003214	0.001595	0.000795	0.000397
$\mu = -2$	0.028039	0.013411	0.006525	0.003215	0.001595	0.000795	0.000397
$\mu = -1$	0.028484	0.013459	0.006531	0.003216	0.001596	0.000795	0.000397
$\mu = 1$	0.029161	0.013548	0.006542	0.003217	0.001596	0.000795	0.000397
$\mu = 2$	0.035363	0.014285	0.006631	0.003228	0.001597	0.000795	0.000397
$\mu = 3$	0.108179	0.022673	0.007618	0.003347	0.001612	0.000797	0.000397

Таблица 2.11. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_X$

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\mu = -3$	0.039110	0.018856	0.008629	0.003939	0.001828	0.000867	0.000418
$\mu = -2$	0.043484	0.019779	0.008802	0.003969	0.001834	0.000868	0.000418
$\mu = -1$	0.049158	0.020833	0.008987	0.004000	0.001839	0.000868	0.000419
$\mu = 1$	0.072186	0.024361	0.009535	0.004086	0.001852	0.000870	0.000419
$\mu = 2$	0.316653	0.052320	0.012767	0.004495	0.001907	0.000878	0.000420
$\mu = 3$	5.069663	1.030873	0.104306	0.012289	0.002680	0.000967	0.000431

Выводы по главе 2

1. Приведены определения спектральных характеристик математического ожидания, корреляционной функции и моментной функции второго порядка случайного процесса.
2. Определены спектральные характеристики случайных процессов и случайных линейных функционалов, приведены их основные свойства.
3. Получены спектральные представления винеровского и центрированного пуассоновского процессов, а также связанных с ними случайных линейных функционалов: гауссовского и пуассоновского белых шумов.
4. Разработано алгоритмическое обеспечение представления случайных процессов в спектральной форме математического описания систем управления.
5. Получены спектральные представления стохастических интегралов: интегралов Стратоновича и Ито по винеровскому процессу и интеграла Огавы по центрированному пуассоновскому процессу, также приведен общий случай стохастического θ -интеграла по винеровскому процессу.
6. Определены спектральные характеристики случайных линейных операторов на примере оператора умножения на случайный процесс и операторов стохастического интегрирования.

Основные результаты опубликованы в работах [151, 159, 163, 341, 346].

ГЛАВА 3

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА И СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

3.1. Описание стохастических систем дифференциальными уравнениями

Стохастическим дифференциальным уравнением Ито называется следующее соотношение [37, 84, 102]:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (3.1)$$

в котором $X(\cdot)$ — n -мерный случайный процесс, $t \in \mathbb{T} = [t_0, T]$ — время, $W(\cdot)$ — s -мерный стандартный винеровский процесс, X_0 — случайный вектор (X_0 и $W(\cdot)$ независимы), $f(\cdot): \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — вектор-функция, $\sigma(\cdot): \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times s}$ — матричная функция:

$$X(t) = [X_1(t) \ X_2(t) \ \dots \ X_n(t)]^T, \quad W(t) = [W_1(t) \ W_2(t) \ \dots \ W_s(t)]^T,$$
$$f(t, x) = [f_1(t, x) \ f_2(t, x) \ \dots \ f_n(t, x)]^T, \quad \sigma(t, x) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(t, x) & \sigma_{12}(t, x) & \dots & \sigma_{1s}(t, x) \\ \sigma_{21}(t, x) & \sigma_{22}(t, x) & \dots & \sigma_{2s}(t, x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1}(t, x) & \sigma_{n2}(t, x) & \dots & \sigma_{ns}(t, x) \end{bmatrix},$$

где $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$.

Как и ранее, $[\cdot]^T$ означает транспонирование вектора или матрицы.

Решением уравнения (3.1) называется векторный случайный процесс $X(\cdot)$, который представляется в виде

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, X(\tau))d\tau + \int_{t_0}^t \sigma(\tau, X(\tau))dW(\tau),$$

где первый интеграл в правой части понимается в среднеквадратическом смысле, а второй представляет собой стохастический интеграл Ито (см. разд. 2.3).

Наряду с уравнение (3.1) будем использовать симметризованное стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича [84, 102]:

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t)) \circ dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (3.2)$$

для которого добавляется обозначение вектор-функции $a(\cdot): \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$a(t, x) = [a_1(t, x) \ a_2(t, x) \ \dots \ a_n(t, x)]^T.$$

Решением уравнения (3.2) называется векторный случайный процесс $X(\cdot)$, который представляется в виде

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t a(\tau, X(\tau)) d\tau + \int_{t_0}^t \sigma(\tau, X(\tau)) \circ dW(\tau),$$

где первый интеграл в правой части, как и ранее, понимается в среднеквадратическом смысле, а второй — стохастический интеграл Стратоновича (см. разд. 2.3).

Связь между стохастическими интегралами Ито и Стратоновича выражается формулой [4, 102, 106] (см. также формулу (2.38)):

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \sigma_{i*}(\tau, X(\tau)) \circ dW(\tau) &= \int_{t_0}^t \sigma_{i*}(\tau, X(\tau)) dW(\tau) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \text{tr} \left[\sigma^T(\tau, X(\tau)) \frac{\partial \sigma_{i*}(\tau, X(\tau))}{\partial x} \right] d\tau, \quad t > t_0, \end{aligned}$$

в которой $\sigma_{i*}(\cdot)$ — строка матричной функции $\sigma(\cdot)$ с номером i , $\text{tr}[\cdot]$ — след матрицы (сумма диагональных элементов). Таким образом,

$$f(t, x) = a(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^s \frac{\partial \sigma_{*l}(t, x)}{\partial x} \sigma_{*l}(t, x), \quad a(t, x) = f(t, x) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^s \frac{\partial \sigma_{*l}(t, x)}{\partial x} \sigma_{*l}(t, x), \quad (3.3)$$

где $\sigma_{*l}(\cdot)$ — столбец матричной функции $\sigma(\cdot)$ с номером l .

Дополнительно отметим, что если функция $\sigma(\cdot)$ зависит только от времени, то функции $f(\cdot)$ и $a(\cdot)$ совпадают. В этом случае не будем оговаривать, в каком смысле понимается уравнение, задающее случайный процесс $X(\cdot)$.

Уравнения (3.1) или (3.2) описывают поведение нелинейной стохастической системы управления, для которой $X = X(t)$ — вектор состояния.

Определим матричную функцию $g(\cdot): \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$: $g(t, x) = \sigma(t, x) \sigma^T(t, x)$, т.е.

$$g(t, x) = \begin{bmatrix} g_{11}(t, x) & g_{12}(t, x) & \dots & g_{1n}(t, x) \\ g_{21}(t, x) & g_{22}(t, x) & \dots & g_{2n}(t, x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}(t, x) & g_{n2}(t, x) & \dots & g_{nn}(t, x) \end{bmatrix}, \quad g_{ij}(t, x) = \sum_{l=1}^s \sigma_{il}(t, x) \sigma_{jl}(t, x),$$

$i, j = 1, 2, \dots, n.$

Функции $f_i(\cdot)$, $a_i(\cdot)$ и $g_{ij}(\cdot)$ называются соответственно коэффициентами сноса и диффузии, $i, j = 1, 2, \dots, n$; функции $f(\cdot)$ и $a(\cdot)$ называются векторами сноса, а $g(\cdot)$ — матрицей диффузии, или диффузионной матрицей.

Коэффициенты сноса и диффузии — это локальные вероятностные характеристики координат случайного процесса $X(\cdot)$, а именно локальная скорость изменения математического ожидания и ковариационной матрицы вектора состояния [25, 105, 229].

Остановимся на условиях существования и единственности решений стохастических дифференциальных уравнений на примере уравнения Ито (3.1). Как правило [102], достаточно полагать, что функции $f_i(\cdot)$ и $\sigma_{il}(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots, n$ и $l = 1, 2, \dots, s$, измеримы на множестве $\mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$, удовлетворяют условию линейного роста: существует такая постоянная $C_1 > 0$, что

$$|f(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C_1(1 + |x|), \quad t \in \mathbb{T}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

и условию Липшица: существует такая постоянная $C_2 > 0$, что

$$|f(t, x) - f(t, y)| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq C_2|x - y|, \quad t \in \mathbb{T}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

где

$$|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad |f(t, x)|^2 = \sum_{i=1}^n f_i^2(t, x), \quad \|\sigma(t, x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^s \sigma_{il}^2(t, x).$$

Эти условия можно усиливать, например полагать, что функция $f(\cdot)$ непрерывна по времени и непрерывно дифференцируема по координатам вектора состояния, а функция $\sigma(\cdot)$ непрерывна по времени и дважды непрерывно дифференцируема по координатам вектора состояния. Можно, напротив, использовать более слабые условия, а именно измеримость и ограниченность.

Ограничения на функции $f(\cdot)$ и $\sigma(\cdot)$ связаны, в первую очередь, с тем, в каком смысле понимается решение уравнения (3.1): сильном или слабом. Ослабление условий на функцию $f(\cdot)$, как правило, приводит к усилению условий на функцию $\sigma(\cdot)$ и наоборот. Кроме того, существенно, является ли стохастическая система управления одномерной или нет (при $n = 1$ некоторые условия могут быть ослаблены по сравнению со случаем $n > 1$). Более подробно и строго вопросы существования и единственности решений стохастических дифференциальных уравнений Ито изложены в работах [15, 37, 71, 96, 102]. Связи этих условий с существованием и единственностью решений стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича обсуждаются в книге [84].

3.2. Уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова

Наиболее полно случайный вектор X характеризуется функцией распределения $F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ [71]: $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n\}$, где P — вероятностная мера (вероятность) (см. разд. 2.1).

Функция распределения не слишком удобна для дальнейшего изложения, поэтому будем предполагать, что она представляется в виде

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

т.е.

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n},$$

где $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — плотность вероятности (плотность распределения вероятностей) случайного вектора X .

Плотность вероятности $\varphi(\cdot)$ вектора состояния X стохастической системы управления, которая задана уравнением Ито (3.1), удовлетворяет уравнению Фоккера – Планка – Колмогорова, или прямому уравнению Колмогорова [25, 71, 102, 106, 125, 229]. Оно является дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка параболического типа:

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x) \varphi(t, x)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x) \varphi(t, x)]. \quad (3.4)$$

Плотность вероятности начального вектора состояния X_0 обозначим $\varphi_0(\cdot)$, предполагая, что она задана. Эта функция определяет начальное условие для уравнения (3.4):

$$\varphi(t_0, x) = \varphi_0(x). \quad (3.5)$$

Кратко соотношения (3.4), (3.5) будем записывать в форме

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi(t, x), \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x), \quad (3.6)$$

где \mathcal{A} — дифференциальный оператор, заданный выражением

$$\mathcal{A}\varphi(t, x) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x) \varphi(t, x)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x) \varphi(t, x)], \quad (3.7)$$

и дополнительно определим сопряженный дифференциальный оператор \mathcal{A}^* :

$$\mathcal{A}^*\psi(t, x) = \sum_{i=1}^n f_i(t, x) \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (3.8)$$

Оператор \mathcal{A} называется прямым производящим оператором, а \mathcal{A}^* — обратным производящим оператором случайного процесса $X(\cdot)$ [71, 102, 106, 229].

Уравнение (3.6) является уравнением сохранения вероятности [229]. Это означает, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t, x) dx = 1 \quad \forall t \in \mathbb{T}, \quad (3.9)$$

следовательно, выполняется краевое условие $\varphi(t, x)|_{x=\infty} = 0$.

Условия на функции $f(\cdot)$ и $\sigma(\cdot)$, указанные в разд. 3.1, тесно связаны с условиями существования решения уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова и с тем, в каком смысле это решение определяется [25, 258]. Если в классическом смысле, то $\varphi(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемая по времени и дважды непрерывно дифференцируемая по координатам вектора состояния функция. Если же решение понимается в обобщенном смысле, то функция $\varphi(\cdot)$ может быть негладкой и допускать разрывы первого рода [106].

3.3. Спектральный метод решения линейных стохастических дифференциальных уравнений

Одномерный случай. Применим спектральную форму математического описания для представления решения линейного стохастического дифференциального уравнения Стратоновича:

$$dX(t) = (a(t)X(t) + b(t)g(t))dt + (c(t)X(t) + d(t)) \circ dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (3.10)$$

где $X(\cdot)$ — случайный процесс, $t \in \mathbb{T} = [t_0, T]$; $a(\cdot)$, $b(\cdot)$, $c(\cdot)$, $d(\cdot)$ и $g(\cdot)$ — заданные интегрируемые функции, $d(\cdot), g(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$; $W(\cdot)$ — стандартный винеровский процесс; X_0 — случайная величина с конечным моментом второго порядка: $EX_0^2 < \infty$.

Будем использовать интегральную форму записи уравнения (3.10):

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t (a(\tau)X(\tau) + b(\tau)g(\tau))d\tau + \int_{t_0}^t (c(\tau)X(\tau) + d(\tau)) \circ dW(\tau), \quad (3.11)$$

где первый интеграл в правой части понимается в среднеквадратическом смысле, а второй — стохастический интеграл Стратоновича [4, 77]. Кроме того, в некоторых ситуациях удобно применять форму Ланжевена [300]:

$$\dot{X}(t) = a(t)X(t) + b(t)g(t) + (c(t)X(t) + d(t))V(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (3.12)$$

где $V(\cdot)$ — гауссовский белый шум, соответствующий винеровскому процессу $W(\cdot)$ в смысле соотношения (2.27). Уравнения (3.10)–(3.12) будем считать эквивалентными.

Линейность уравнения (3.10) и конечность второго момента случайной величины X_0 обеспечивает существование и единственность решения, а также условие $EX^2(t) < \infty$ [37, 102]. Уравнение (3.10) служит математической моделью одномерной линейной стохастической системы управления, для которой $g(\cdot)$ — детерминированный входной сигнал, $X(\cdot)$ — случайный выходной сигнал.

Задача анализа выходных процессов одномерной линейной стохастической системы управления состоит в нахождении выходного сигнала $X(\cdot)$ по заданной математической модели (3.10)–(3.12) и входному сигналу $g(\cdot)$ (на рис. 3.1 показана соответствующая структурная схема). Таким образом, задача анализа выходных процессов заключается в нахождении решения стохастического дифференциального уравнения (3.10).

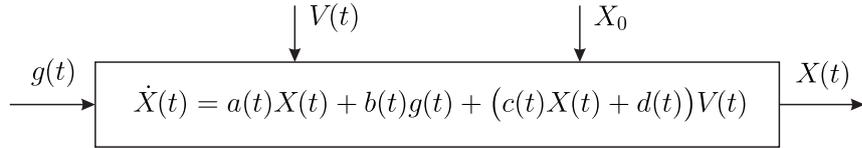


Рис. 3.1. Структурная схема линейной стохастической системы

Использование в качестве математической модели стохастического дифференциального уравнения Стратоновича обеспечивает возможность формального применения таких же правил интегрирования и дифференцирования для случайного процесса $X(\cdot)$, как если бы $X(\cdot)$ была гладкой неслучайной функцией, что упрощает применение спектрального преобразования.

При $c(t) \equiv 0$ и $d(t) \neq 0$ уравнения (3.10)–(3.12) задают линейную стохастическую систему с аддитивным шумом, а при $c(t) \neq 0$ и $d(t) \equiv 0$ — линейную стохастическую систему с мультипликативным шумом. Отметим, что если трактовать гауссовский белый шум $V(\cdot)$ как входной сигнал, то при $c(t) \neq 0$ систему следует называть билинейной.

Пусть $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$ (см. разд. 1.1). Воспользуемся для решения стохастического дифференциального уравнения (3.10), т.е. задачи анализа выходных процессов, спектральной формой математического описания, представляя все элементы уравнения (3.11) спектральными характеристиками. Введем следующие обозначения для спектральных характеристик, определенных относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$:

- 1) $\mathbf{1}_{t_0}$ — спектральная характеристика единичной ступенчатой функции $1((\cdot) - t_0)$ (см. разд. 1.1 и формулу (1.28));
- 2) Δ_{t_0} — спектральная характеристика дельта-функции $\delta((\cdot) - t_0)$ (см. разд. 1.1 и формулу (1.34));
- 3) G и D — спектральные характеристики функции $g(\cdot)$, т.е. входного сигнала, и функции $d(\cdot)$ соответственно (см. разд. 1.1);
- 4) A , B и C — спектральные характеристики операторов умножения на функции $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ и $c(\cdot)$ соответственно (см. разд. 1.5);
- 5) V — спектральная характеристика оператора умножения функций (см. разд. 1.5);

- 6) P^{-1} — спектральная характеристика оператора интегрирования (см. разд. 1.6);
- 7) P — спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом начального значения (см. разд. 1.7);
- 8) \mathcal{X} — спектральная характеристика случайного процесса $X(\cdot)$, т.е. выходного сигнала (см. разд. 2.2);
- 9) \mathcal{V} — спектральная характеристика гауссовского белого шума $V(\cdot)$ (см. разд. 2.3 и выражение (2.26));
- 10) $P^{-1,\mathcal{V}}$ — спектральная характеристика оператора стохастического интегрирования по винеровскому процессу (см. разд. 2.7).

Применим спектральное преобразование к левой и правой частям уравнения (3.11) с учетом свойства линейности (2.8):

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[X(\cdot)] &= \mathbb{S}\left[X_0 + \int_{t_0}^{(\cdot)} (a(\tau)X(\tau) + b(\tau)g(\tau))d\tau + \int_{t_0}^{(\cdot)} (c(\tau)X(\tau) + d(\tau)) \circ dW(\tau)\right] = \\ &= X_0 \mathbb{S}[1((\cdot) - t_0)] + \mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} (a(\tau)X(\tau) + b(\tau)g(\tau))d\tau\right] + \\ &+ \mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} (c(\tau)X(\tau) + d(\tau)) \circ dW(\tau)\right], \end{aligned} \quad (3.13)$$

тогда по свойству (1.73) спектрального преобразования произведения функций одной переменной

$$\mathbb{S}[a(\cdot)X(\cdot) + b(\cdot)g(\cdot)] = \mathbb{S}[a(\cdot)X(\cdot)] + \mathbb{S}[b(\cdot)g(\cdot)] = A\mathcal{X} + BG,$$

а по свойству (1.86) спектрального преобразования интегралов от функций одной переменной

$$\mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} (a(\tau)X(\tau) + b(\tau)g(\tau))d\tau\right] = P^{-1}(A\mathcal{X} + BG).$$

Далее, по свойству (1.73) спектрального преобразования произведения функций одной переменной

$$\mathbb{S}[c(\cdot)X(\cdot) + d(\cdot)] = \mathbb{S}[c(\cdot)X(\cdot)] + \mathbb{S}[d(\cdot)] = C\mathcal{X} + D,$$

а с учетом формулы (2.78) и свойства (2.81) спектрального преобразования стохастического интеграла Стратоновича

$$\mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} (c(\tau)X(\tau) + d(\tau)) \circ dW(\tau)\right] = P^{-1,\mathcal{V}}(C\mathcal{X} + D) = P^{-1}(V\mathcal{V})(C\mathcal{X} + D),$$

следовательно, соотношение (3.13) можно записать в форме

$$\mathcal{X} = X_0 \mathbf{1}_{t_0} + P^{-1}(A\mathcal{X} + BG) + P^{-1}(V\mathcal{V})(C\mathcal{X} + D).$$

Умножая его слева на спектральную характеристику P и принимая во внимание свойство (1.95) и соотношение (1.96), находим

$$P\mathcal{X} - X_0 \Delta_{t_0} = A\mathcal{X} + BG + (V\mathcal{V})(C\mathcal{X} + D). \quad (3.14)$$

Отметим, что соотношение (3.14) получено в работах [155, 341] с помощью формального применения спектрального преобразования к левой и правой частям уравнения (3.12):

$$\mathbb{S}[\dot{X}(\cdot)|_{X(t_0)=X_0}] = \mathbb{S}[a(\cdot)X(\cdot) + b(\cdot)g(\cdot) + (c(\cdot)X(\cdot) + d(\cdot))V(\cdot)] =$$

$$= \mathbb{S}[a(\cdot)X(\cdot) + b(\cdot)g(\cdot)] + \mathbb{S}[(c(\cdot)X(\cdot) + d(\cdot))V(\cdot)].$$

Действительно, пусть $E^{\mathcal{V}} = V\mathcal{V}$ — двумерная спектральная характеристика случайного линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*W}$, которая может рассматриваться как спектральная характеристика оператора умножения на гауссовский белый шум $V(\cdot)$ (см. теорему 2.3). Тогда

$$\mathbb{S}[(c(\cdot)X(\cdot) + d(\cdot))V(\cdot)] = E^{\mathcal{V}}(C\mathcal{X} + D) = (V\mathcal{V})(C\mathcal{X} + D).$$

Кроме того, по свойству спектрального преобразования производных функций одной переменной с учетом начальных значений можно записать:

$$\mathbb{S}[\dot{X}(\cdot)|_{X(t_0)=X_0}] = P\mathcal{X} - X_0\Delta_{t_0},$$

следовательно, получаем соотношение (3.14).

Таким образом, спектральная характеристика \mathcal{X} решения линейного стохастического дифференциального уравнения Стратоновича (3.10) удовлетворяет уравнению

$$P\mathcal{X} - A\mathcal{X} - (V\mathcal{V})C\mathcal{X} = X_0\Delta_{t_0} + BG + (V\mathcal{V})D, \quad (3.15)$$

поэтому

$$\mathcal{X} = (P - A - (V\mathcal{V})C)^{-1}(X_0\Delta_{t_0} + BG + (V\mathcal{V})D). \quad (3.16)$$

Если $c(t) \equiv 0$, то выражения (3.15) и (3.16) можно упростить и обойтись без спектральной характеристики V оператора умножения функций. К уже введенным обозначениям добавим \tilde{D} — спектральную характеристику оператора умножения на функцию $d(\cdot)$. Согласно теореме 1.7 спектральные характеристики \tilde{D} и D связаны соотношением (1.78): $\tilde{D} = VD$, и по свойству симметричности спектральной характеристики V имеем $(V\mathcal{V})D = (VD)\mathcal{V} = \tilde{D}\mathcal{V}$. Отсюда переходим к уравнению

$$P\mathcal{X} - A\mathcal{X} = X_0\Delta_{t_0} + BG + \tilde{D}\mathcal{V} \quad (3.17)$$

и его решению

$$\mathcal{X} = (P - A)^{-1}(X_0\Delta_{t_0} + BG + \tilde{D}\mathcal{V}). \quad (3.18)$$

Применяя обратное спектральное преобразование, получаем решение уравнения (3.10), т.е. решение задачи анализа выходных процессов, в виде ряда. Согласно формуле обращения (2.7)

$$X(\cdot) = \mathbb{S}^{-1}[\mathcal{X}] = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{X}_i q(i, \cdot), \quad (3.19)$$

где коэффициенты разложения \mathcal{X}_i зависят от элементов спектральной характеристики (2.26) белого шума, т.е. от счетного числа независимых случайных величин $\{\zeta_i\}_{i=0}^{\infty}$, имеющих стандартное нормальное распределение, а также от случайной величины X_0 .

Приведем алгоритм решения стохастического дифференциального уравнения (3.10), или анализа выходных процессов одномерных линейных стохастических систем спектральным методом.

Алгоритм 3.1.

1. Выбрать базисную систему $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$.

2. Найти спектральную характеристику G входного сигнала $g(\cdot)$; спектральную характеристику \mathcal{V} белого шума $V(\cdot)$; спектральные характеристики A , B и C операторов умножения на функции $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ и $c(\cdot)$ соответственно; спектральную характеристику P оператора дифференцирования с учетом начального значения; спектральную характеристику Δ_{t_0} дельта-функции $\delta((\cdot) - t_0)$. Дополнительно при $c(t) \neq 0$ определить спектральную характеристику D функции $d(\cdot)$ и спектральную характеристику V оператора умножения функций, а при $c(t) \equiv 0$ — спектральную характеристику \tilde{D} оператора умножения на функцию $d(\cdot)$.
3. При $c(t) \neq 0$ записать уравнение (3.15) для спектральной характеристики \mathcal{X} выходного сигнала $X(\cdot)$ и найти его решение (3.16). При $c(t) \equiv 0$ записать уравнение (3.17) для спектральной характеристики \mathcal{X} и найти его решение (3.18).
4. Применить обратное спектральное преобразование: найти выходной сигнал $X(\cdot)$ по спектральной характеристике \mathcal{X} , используя формулу обращения (3.19).

Выполнение операций с бесконечными матрицами затрудняет нахождение выходного сигнала точно, особенно это касается умножения и обращения бесконечных матриц [81, 107]. Поэтому перейдем к приближенному решению, используя тот же подход, что и при анализе выходных процессов линейных детерминированных систем, а именно усечение всех спектральных характеристик до некоторого выбранного порядка L [220–222]. Это означает, что все матрицы, входящие в соотношения (3.14)–(3.18), являются конечными размера L по каждому измерению: L для матриц-столбцов, $L \times L$ для плоских и $L \times L \times L$ для пространственных матриц. Тогда получается приближенное решение задачи анализа выходных процессов в виде частичной суммы ряда (см. разд. 2.8):

$$X(t) \approx \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{X}_i q(i, t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad (3.20)$$

где коэффициенты \mathcal{X}_i зависят от элементов усеченной спектральной характеристики \mathcal{V} , т.е. от конечного числа L независимых случайных величин $\{\zeta_i\}_{i=0}^{L-1}$, имеющих стандартное нормальное распределение, а также от случайной величины X_0 .

При приближенном решении задачи анализа выходных процессов дополнительно задается порядок усечения спектральных характеристик L и на шаге 4 алгоритма 3.1 применяется формула (3.20) вместо (3.19). Чтобы получить реализацию спектральной характеристики \mathcal{X} и выборочную траекторию выходного сигнала $X(\cdot)$, достаточно воспользоваться алгоритмом для реализаций спектральной характеристики \mathcal{V} и случайной величины X_0 .

По ансамблю реализаций спектральной характеристики \mathcal{X} могут быть получены оценки первой и вторых нестационарных спектральных плотностей случайного процесса $X(\cdot)$ на основе формул (2.9)–(2.11). Выбирая количество реализаций M (объем выборки) и обозначая эти реализации, соответствующие реализациям \mathcal{V}^k спектральной характеристики \mathcal{V} и X_0^k случайной величины X_0 , через \mathcal{X}^k , где $k = 1, 2, \dots, M$, имеем

$${}_1\hat{S}^X = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \mathcal{X}^k, \quad (3.21)$$

$$\hat{S}^X = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (\mathcal{X}^k - {}^1\hat{S}^X)(\mathcal{X}^k - {}^1\hat{S}^X)^\top, \quad \hat{B}^X = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \mathcal{X}^k [\mathcal{X}^k]^\top. \quad (3.22)$$

Эти же соотношения применяются для усеченных спектральных характеристик. В свою очередь, по ним можно найти погрешности аппроксимации математического ожидания и корреляционной функции (см. разд. 2.8).

Оценка квадрата нормы случайного процесса $X(\cdot)$ в этом случае может быть записана следующим образом:

$$\mathbb{E} \|\widehat{X(\cdot)}\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \text{tr } \hat{B}^X, \quad (3.23)$$

а для центрированного случайного процесса

$$\mathbb{E} \|\widehat{X(\cdot)}\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \text{tr } \hat{S}^X. \quad (3.24)$$

Далее рассмотрим применение спектральной формы математического описания для представления решения линейного стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$dX(t) = (a^0(t)X(t) + b(t)g(t) + b^0(t))dt + (c(t)X(t) + d(t))dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (3.25)$$

где отличие от уравнения (3.10) состоит в использовании интегрируемой функции $a^0(\cdot)$ вместо $a(\cdot)$ и дополнительной функции $b^0(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$.

Такие уравнения также являются математическими моделями одномерных линейных стохастических систем управления. Интегральная форма записи уравнения (3.25):

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t (a^0(\tau)X(\tau) + b(\tau)g(\tau) + b^0(\tau))d\tau + \int_{t_0}^t (c(\tau)X(\tau) + d(\tau))dW(\tau), \quad (3.26)$$

где первый интеграл в правой части понимается в среднеквадратическом смысле, а второй — стохастический интеграл Ито [4, 37, 77].

Отметим, что при $c(t) \equiv 0$, $a^0(t) = a(t)$ и $b^0(t) \equiv 0$ уравнения (3.10) и (3.25) эквивалентны (имеют одно решение), а при $c(t) \neq 0$ эти уравнения эквивалентны, когда выполнены условия

$$a^0(t) = a(t) + \frac{1}{2}c^2(t) \quad \text{и} \quad b^0(t) = \frac{1}{2}c(t)d(t).$$

Если ввести обозначение A^0 для спектральной характеристики оператора умножения на функцию $a^0(\cdot)$ и обозначение B^0 для спектральной характеристики функции $b^0(\cdot)$, то

$$A^0 = A + \frac{1}{2}C^2 \quad \text{и} \quad B^0 = \frac{1}{2}CD,$$

а для представления решения можно модифицировать формулу (3.16):

$$\mathcal{X} = \left(P - A^0 + \frac{1}{2}C^2 - (V\mathcal{V})C \right)^{-1} (X_0\Delta_{t_0} + BG + (V\mathcal{V})D).$$

При спектральном преобразовании левой и правой частей уравнения (3.26) все шаги аналогичны приведенным выше за исключением следующего:

$$\mathbb{S} \left[\int_{t_0}^{(\cdot)} (c(\tau)X(\tau) + d(\tau))dW(\tau) \right] = -\frac{1}{2}P^{-1}\Sigma + P^{-1}\mathcal{V}(C\mathcal{X} + D) = P^{-1} \left(-\frac{1}{2}\Sigma + (V\mathcal{V})(C\mathcal{X} + D) \right),$$

где Σ — спектральная характеристика случайного процесса $\sigma(t) = c^2(t)X(t) + c(t)d(t)$, что следует из свойства спектрального преобразования стохастического интеграла Ито (2.82), т.е. $\Sigma = C^2\mathcal{X} + CD$.

Спектральную форму математического описания можно применять и для представления решения линейного стохастического дифференциального уравнения с θ -дифференциалом [106, 125], $\theta \in [0, 1]$:

$$d_{\theta}X(t) = (a^{\theta}(t)X(t) + b(t)g(t) + b^{\theta}(t))dt + (c(t)X(t) + d(t))d_{\theta}W(t), \quad X(t_0) = X_0,$$

или в интегральной форме

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t (a^{\theta}(\tau)X(\tau) + b(\tau)g(\tau) + b^{\theta}(\tau))d\tau + \int_{t_0}^t (c(\tau)X(\tau) + d(\tau))d_{\theta}W(\tau),$$

где первый интеграл в правой части понимается в среднеквадратическом смысле, а второй — стохастический θ -интеграл [4, 106, 125, 229], $a^{\theta}(\cdot)$ — заданная интегрируемая функция и $b^{\theta}(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ — дополнительная функция. Тогда при $c(t) \equiv 0$, $a^{\theta}(t) = a(t)$ и $b^{\theta}(t) \equiv 0$ эти уравнения эквивалентны уравнению (3.10), а при $c(t) \neq 0$ для эквивалентности требуется, чтобы

$$a^{\theta}(t) = a(t) + \left[\frac{1}{2} - \theta \right] c^2(t) \quad \text{и} \quad b^{\theta}(t) = \left[\frac{1}{2} - \theta \right] c(t)d(t).$$

Обозначим через A^{θ} спектральную характеристику оператора умножения на функцию $a^{\theta}(\cdot)$ и через B^{θ} спектральную характеристику функции $b^{\theta}(\cdot)$. Тогда

$$A^{\theta} = A + \left[\frac{1}{2} - \theta \right] C^2 \quad \text{и} \quad B^{\theta} = \left[\frac{1}{2} - \theta \right] CD,$$

а для представления решения можно применить аналог формулы (3.16):

$$\mathcal{X} = \left(P - A^{\theta} + \left[\frac{1}{2} - \theta \right] C^2 - (V\mathcal{V})C \right)^{-1} (X_0 \Delta_{t_0} + BG + (V\mathcal{V})D).$$

В основе приведенных формул лежит соотношение (2.43), связывающее стохастический θ -интеграл с интегралом Ито (см. разд. 2.3 и 2.7), а также свойство спектрального преобразования стохастического θ -интеграла (2.84). Последнюю из них можно рассматривать как общий случай, позволяющий при $\theta = 1/2$ и $\theta = 0$ найти решение линейных стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича и Ито соответственно.

З а м е ч а н и я 3.1.

1. Все рассуждения остаются в силе, если функцию $g(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ в уравнениях (3.10)–(3.12) заменить на случайный процесс $G(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$. Тогда при спектральном преобразовании следует подставить его спектральную характеристику \mathcal{G} (см. разд. 2.2), определенную относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$.

2. Для решения стохастического дифференциального уравнения Ито или уравнения с θ -дифференциалом применяется алгоритм 3.1 с учетом связей спектральных характеристик A , A^{θ} и A^{θ} , а также с учетом спектральных характеристик B^0 и B^{θ} .

Многомерный случай. Рассмотрим векторное линейное стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича:

$$dX(t) = (a(t)X(t) + b(t)g(t))dt + \sum_{j=1}^s (c^j(t)X(t) + d^j(t)) \circ dW_j(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (3.27)$$

где $X(\cdot)$ — n -мерный случайный процесс, $t \in \mathbb{T} = [t_0, T]$; $a(\cdot)$, $b(\cdot)$, $c^j(\cdot)$, $d^j(\cdot)$ и $g(\cdot)$ — заданные матричные и векторные интегрируемые функции размеров $n \times n$, $n \times q$, $n \times n$, $n \times 1$ и

$q \times 1$ соответственно; $d_l^j(\cdot), g_r^j(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, $l = 1, 2, \dots, n$ и $r = 1, 2, \dots, q$; $W_j(\cdot)$ — независимые стандартные винеровские процессы, $j = 1, 2, \dots, s$; X_0 — случайный вектор с конечными моментами второго порядка: $E|X_0|^2 < \infty$.

Приведем интегральную форму записи уравнения (3.27):

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t (a(\tau)X(\tau) + b(\tau)g(\tau))d\tau + \sum_{j=1}^s \int_{t_0}^t (c^j(\tau)X(\tau) + d^j(\tau)) \circ dW_j(\tau), \quad (3.28)$$

где первый интеграл в правой части понимается в среднеквадратическом смысле, а второй — стохастический интеграл Стратоновича [4, 77]. Также укажем форму Ланжевена [300]:

$$\dot{X}(t) = a(t)X(t) + b(t)g(t) + \sum_{j=1}^s (c^j(t)X(t) + d^j(t))V_j(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (3.29)$$

где $V_j(\cdot)$ — независимые гауссовские белые шумы, соответствующие винеровским процессам $W_j(\cdot)$ в смысле соотношения (2.27). Уравнения (3.27)–(3.29) будем считать эквивалентными.

Как и в одномерном случае, линейность уравнения (3.27) и конечность вторых моментов случайного вектора X_0 обеспечивает существование и единственность решения, а также условие $E|X(t)|^2 < \infty$ [37, 102]. Уравнение (3.27) — математическая модель многомерной линейной стохастической системы управления, для которой $g(\cdot)$ — детерминированный входной сигнал, $X(\cdot)$ — случайный выходной сигнал:

$$X(t) = [X_1(t) \ X_2(t) \ \dots \ X_n(t)]^T, \quad X_0 = [X_{10} \ X_{20} \ \dots \ X_{n0}]^T, \quad g(t) = [g_1(t) \ g_2(t) \ \dots \ g_q(t)]^T.$$

Задача анализа выходных процессов многомерной линейной стохастической системы управления состоит в нахождении выходного сигнала $X(\cdot)$ по заданной математической модели (3.27)–(3.29) и входному сигналу $g(\cdot)$. Структурная схема совпадает с изображенной на рис. 3.1, если ввести обозначение $V(t) = [V_1(t) \ V_2(t) \ \dots \ V_s(t)]^T$ и понимать $(c(t)X(t) + d(t))V(t)$ как сумму $\sum_{j=1}^s (c^j(t)X(t) + d^j(t))V_j(t)$. Таким образом, задача анализа выходных процессов заключается в нахождении решения векторного стохастического дифференциального уравнения (3.27).

Для удобства запишем уравнения (3.27) и (3.28) в координатной форме:

$$dX_l(t) = \left(\sum_{m=1}^n a_{lm}(t)X_m(t) + \sum_{r=1}^q b_{lr}(t)g_r(t) \right) dt + \sum_{j=1}^s \left(\sum_{m=1}^n c_{lm}^j(t)X_m(t) + d_l^j(t) \right) \circ dW_j(t) \quad (3.30)$$

и

$$X_l(t) = X_{l0} + \int_{t_0}^t \left(\sum_{m=1}^n a_{lm}(\tau)X_m(\tau) + \sum_{r=1}^q b_{lr}(\tau)g_r(\tau) \right) d\tau + \sum_{j=1}^s \int_{t_0}^t \left(\sum_{m=1}^n c_{lm}^j(\tau)X_m(\tau) + d_l^j(\tau) \right) \circ dW_j(\tau), \quad (3.31)$$

где $a_{lm}(\cdot)$, $b_{lr}(\cdot)$, $c_{lm}^j(\cdot)$ и $d_l^j(\cdot)$ — элементы матричных и векторных функций $a(\cdot)$, $b(\cdot)$, $c^j(\cdot)$ и $d^j(\cdot)$ соответственно. Здесь и далее индексы принимают следующие значения: $l, m = 1, 2, \dots, n$; $r = 1, 2, \dots, q$; $j = 1, 2, \dots, s$.

Пусть $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$ (см. разд. 1.1). Применим для решения векторного стохастического дифференциального уравнения (3.27), т.е. задачи анализа выходных процессов, спектральную форму математического описания, представляя все эле-

менты уравнения (3.31) спектральными характеристиками. Введем следующие обозначения для спектральных характеристик, определенных относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$:

- 1) $\mathbf{1}_{t_0}$ — спектральная характеристика единичной ступенчатой функции $1((\cdot) - t_0)$ (см. разд. 1.1 и формулу (1.28));
- 2) Δ_{t_0} — спектральная характеристика дельта-функции $\delta((\cdot) - t_0)$ (см. разд. 1.1 и формулу (1.34));
- 3) G_r и D_l^j — спектральные характеристики функций $g_r(\cdot)$, т.е. координат входного сигнала, и функций $d_l^j(\cdot)$ соответственно (см. разд. 1.1);
- 4) A_{lm} , B_{lr} и C_{lm}^j — спектральные характеристики операторов умножения на функции $a_{lm}(\cdot)$, $b_{lr}(\cdot)$ и $c_{lm}^j(\cdot)$ соответственно (см. разд. 1.5);
- 5) V — спектральная характеристика оператора умножения функций (см. разд. 1.5);
- 6) P^{-1} — спектральная характеристика оператора интегрирования (см. разд. 1.6);
- 7) P — спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом начального значения (см. разд. 1.7);
- 8) \mathcal{X}_l — спектральные характеристики случайных процессов $X_l(\cdot)$, т.е. координат выходного сигнала (см. разд. 2.2);
- 9) \mathcal{V}_j — спектральные характеристики белых шумов $V_j(\cdot)$ (см. разд. 2.3 и выражение (2.26));
- 10) $P^{-1}\mathcal{V}_j$ — спектральные характеристики операторов стохастического интегрирования по винеровским процессам (см. разд. 2.7).

Далее применим спектральное преобразование к левой и правой частям каждого уравнения системы (3.31) с учетом свойства линейности (2.8):

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}[X_l(\cdot)] &= \mathbb{S}\left[X_{l0} + \int_{t_0}^{(\cdot)} \left(\sum_{m=1}^n a_{lm}(\tau) X_m(\tau) + \sum_{r=1}^q b_{lr}(\tau) g_r(\tau) \right) d\tau + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^s \int_{t_0}^{(\cdot)} \left(\sum_{m=1}^n c_{lm}^j(\tau) X_m(\tau) + d_l^j(\tau) \right) \circ dW_j(\tau) \right] = \\
&= X_{l0} \mathbb{S}[1((\cdot) - t_0)] + \mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} \left(\sum_{m=1}^n a_{lm}(\tau) X_m(\tau) + \sum_{r=1}^q b_{lr}(\tau) g_r(\tau) \right) d\tau \right] + \\
&\quad + \sum_{j=1}^s \mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} \left(\sum_{m=1}^n c_{lm}^j(\tau) X_m(\tau) + d_l^j(\tau) \right) \circ dW_j(\tau) \right]. \tag{3.32}
\end{aligned}$$

С учетом свойств спектрального преобразования произведения функций одной переменной и интегралов от функций одной переменной получаем

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}[a_{lm}(\cdot) X_m(\cdot)] &= A_{lm} \mathcal{X}_m, \quad \mathbb{S}[b_{lr}(\cdot) g_r(\cdot)] = B_{lr} G_r, \\
\mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} \left(\sum_{m=1}^n a_{lm}(\tau) X_m(\tau) + \sum_{r=1}^q b_{lr}(\tau) g_r(\tau) \right) d\tau \right] &= P^{-1} \left(\sum_{m=1}^n A_{lm} \mathcal{X}_m + \sum_{r=1}^q B_{lr} G_r \right).
\end{aligned}$$

По свойству спектрального преобразования произведения функций одной переменной и свойству стохастического интеграла Стратоновича (2.81), а также принимая во внимание фор-

мулу (2.78), имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[c_{lm}^j(\cdot)X_m(\cdot)] &= C_{lm}^j \mathcal{X}_m, \quad \mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} \left(\sum_{m=1}^n c_{lm}^j(\tau)X_m(\tau) + d_l^j(\tau)\right) \circ dW_j(\tau)\right] = \\ &= P^{-1}\mathcal{V}_j \left(\sum_{m=1}^n C_{lm}^j \mathcal{X}_m + D_l^j\right) = P^{-1}(V\mathcal{V}_j) \left(\sum_{m=1}^n C_{lm}^j \mathcal{X}_m + D_l^j\right). \end{aligned}$$

Следовательно, система уравнений (3.32) преобразуется к виду

$$\mathcal{X}_l = X_{l0} \mathbf{1}_{t_0} + P^{-1} \left(\sum_{m=1}^n A_{lm} \mathcal{X}_m + \sum_{r=1}^q B_{lr} G_r \right) + \sum_{j=1}^s P^{-1}(V\mathcal{V}_j) \left(\sum_{m=1}^n C_{lm}^j \mathcal{X}_m + D_l^j \right) \quad (3.33)$$

и ее можно переписать следующим образом:

$$P\mathcal{X}_l - X_{l0} \Delta_{t_0} = \sum_{m=1}^n A_{lm} \mathcal{X}_m + \sum_{r=1}^q B_{lr} G_r + \sum_{j=1}^s (V\mathcal{V}_j) \left(\sum_{m=1}^n C_{lm}^j \mathcal{X}_m + D_l^j \right), \quad (3.34)$$

умножая каждое уравнение системы (3.33) слева на спектральную характеристику P и используя свойство (1.95) и соотношение (1.96). Эта система получена в работе [155] с помощью формального применения спектрального преобразования к левой и правой частям уравнения (3.29), записанного в координатной форме.

Как и в одномерном случае, при $c^j(t) \equiv 0$ полученные соотношения можно упростить и не использовать спектральную характеристику V оператора умножения функций. Из формулы (1.78) получаем $\tilde{D}_l^j = V D_l^j$ и $(V\mathcal{V}_j) D_l^j = (V D_l^j) \mathcal{V}_j = \tilde{D}_l^j \mathcal{V}_j$, где \tilde{D}_l^j — спектральные характеристики операторов умножения на функции $d_l^j(\cdot)$. Следовательно,

$$P\mathcal{X}_l - X_{l0} \Delta_{t_0} = \sum_{m=1}^n A_{lm} \mathcal{X}_m + \sum_{r=1}^q B_{lr} G_r + \sum_{j=1}^s \tilde{D}_l^j \mathcal{V}_j. \quad (3.35)$$

Опишем подробнее частный случай: $n = 2$ и $q = s = 1$, когда системы уравнений (3.30) и (3.34) имеют вид

$$\begin{aligned} dX_l(t) &= (a_{l1}(t)X_1(t) + a_{l2}(t)X_2(t) + b_l(t)g(t))dt + \\ &+ (c_{l1}(t)X_1(t) + c_{l2}(t)X_2(t) + d_l(t)) \circ dW(t), \quad X_l(t_0) = X_{l0}, \end{aligned}$$

и

$$P\mathcal{X}_l - X_{l0} \Delta_{t_0} = A_{l1} \mathcal{X}_1 + A_{l2} \mathcal{X}_2 + B_l G + (V\mathcal{V})(C_{l1} \mathcal{X}_1 + C_{l2} \mathcal{X}_2 + D_l), \quad l = 1, 2.$$

Решение последней системы двух уравнений несложно получить методом исключения неизвестных:

$$\mathcal{X}_l = (Z_{ll} - Z_{lm} Z_{mm}^{-1} Z_{ml})^{-1} (Q_l - Z_{lm} Z_{mm}^{-1} Q_m), \quad (3.36)$$

где

$$\begin{aligned} Z_{ll} &= P - A_{ll} - (V\mathcal{V})C_{ll}, \quad Z_{lm} = -A_{lm} - (V\mathcal{V})C_{lm}, \\ Q_l &= X_{l0} \Delta_{t_0} + B_l G + (V\mathcal{V})D_l, \quad l, m = 1, 2, \quad l \neq m, \end{aligned}$$

или при $c(t) \equiv 0$:

$$Z_{ll} = P - A_{ll}, \quad Z_{lm} = -A_{lm}, \quad Q_l = X_{l0} \Delta_{t_0} + B_l G + \tilde{D}_l \mathcal{V}, \quad l, m = 1, 2, \quad l \neq m.$$

Если размерность n больше двух и матричные функции $a(\cdot)$ и $c^j(\cdot)$ имеют специальный вид, например это треугольные или трехдиагональные матрицы, то решение систем уравнений (3.34) и (3.35) несложно получить методом исключения неизвестных. Если матричные

функции $a(\cdot)$ и $c^j(\cdot)$ общего вида, то при применении спектрального метода можно воспользоваться специальными операциями для матриц: агрегированием и декомпозицией [43, 112].

Операция агрегирования здесь состоит в построении квадратной четырехмерной матрицы Z , а также двумерных матриц-столбцов \mathcal{X} и Q :

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{X}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{X}_n \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix},$$

где при $c^j(t) \neq 0$

$$Z_{lm} = \begin{cases} P - A_{ll} - \sum_{j=1}^s (V\mathcal{V}_j)C_{ll}^j, & l = m, \\ -A_{lm} - \sum_{j=1}^s (V\mathcal{V}_j)C_{lm}^j, & l \neq m, \end{cases} \quad Q_l = X_{l0}\Delta_{t_0} + \sum_{r=1}^q B_{lr}G_r + \sum_{j=1}^s (V\mathcal{V}_j)D_l^j,$$

или при $c^j(t) \equiv 0$

$$Z_{lm} = \begin{cases} P - A_{ll}, & l = m, \\ -A_{lm}, & l \neq m, \end{cases} \quad Q_l = X_{l0}\Delta_{t_0} + \sum_{r=1}^q B_{lr}G_r + \sum_{j=1}^s \tilde{D}_l^j \mathcal{V}_j.$$

Тогда системы уравнений (3.34), (3.35) и их решение могут быть записаны в форме

$$Z\mathcal{X} = Q, \quad \mathcal{X} = Z^{-1}Q, \quad (3.37)$$

а спектральные характеристики \mathcal{X}_l получаются как простые сечения двумерной матрицы-столбца \mathcal{X} , т.е. в результате декомпозиции.

Применяя обратное спектральное преобразование, находим решение системы уравнений (3.30), а значит, и уравнения (3.27), т.е. решение задачи анализа выходных процессов, в виде рядов. По формуле обращения (2.7)

$$X_l(\cdot) = \mathbb{S}^{-1}[\mathcal{X}_l] = \sum_{i=0}^{\infty} (\mathcal{X}_l)_i q(i, \cdot), \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad (3.38)$$

где коэффициенты разложения $(\mathcal{X}_l)_i$ зависят от элементов спектральных характеристик (2.26) белых шумов, т.е. от счетного числа независимых случайных величин $\{\zeta_i^{(j)}\}_{i=0}^{\infty}$, имеющих стандартное нормальное распределение, а также от координат случайного вектора X_0 .

Приведем алгоритм решения векторного стохастического дифференциального уравнения (3.27), или анализа выходных процессов многомерных линейных стохастических систем спектральным методом.

Алгоритм 3.2.

1. Выбрать базисную систему $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$.
2. Найти спектральные характеристики G_r координат входного сигнала $g_r(\cdot)$; спектральные характеристики \mathcal{V}_j гауссовских белых шумов $V_j(\cdot)$; спектральные характеристики A_{lm} , B_{lr} и C_{lm}^j операторов умножения на функции $a_{lm}(\cdot)$, $b_{lr}(\cdot)$ и $c_{lm}^j(\cdot)$ соответственно; спектральную характеристику P оператора дифференцирования с учетом начального значения; спектральную характеристику Δ_{t_0} дельта-функции $\delta((\cdot) - t_0)$. Дополнительно

при $c^j(t) \neq 0$ определить спектральные характеристики D_l^j функций $d_l^j(\cdot)$ и спектральную характеристику V оператора умножения функций, а при $c^j(t) \equiv 0$ — спектральные характеристики \tilde{D}_l^j операторов умножения на функции $d_l^j(\cdot)$.

3. При $c^j(t) \neq 0$ записать систему уравнений (3.34), а при $c^j(t) \equiv 0$ — систему уравнений (3.35) для спектральных характеристик \mathcal{X}_l координат выходного сигнала $X_l(\cdot)$ и найти ее решение: при $n = 2$ воспользоваться формулой (3.36), а в общем случае — формулой (3.37).
4. Применить обратное спектральное преобразование: найти координаты выходного сигнала $X_l(\cdot)$ по спектральным характеристикам \mathcal{X}_l , используя формулу обращения (3.38).

Приближенное решение задачи анализа выходных процессов получается при усечении всех используемых спектральных характеристик до некоторого выбранного порядка L [220–222], т.е. все матрицы, входящие в соотношения (3.34)–(3.36), являются конечными размера L по каждому измерению: L для матриц-столбцов, $L \times L$ для плоских и $L \times L \times L$ для пространственных матриц. Это приближенное решение представляется в виде частичных сумм рядов (см. разд. 2.8):

$$X_l(t) \approx \sum_{i=0}^{L-1} (\mathcal{X}_l)_i q(i, t), \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad (3.39)$$

где коэффициенты $(\mathcal{X}_l)_i$ зависят от элементов усеченных спектральных характеристик \mathcal{V}_j , т.е. от конечного числа sL независимых случайных величин $\{\zeta_i^{(j)}\}_{i=0}^{L-1}$, имеющих стандартное нормальное распределение, а также от координат случайного вектора X_0 .

Приближенное решение задачи анализа выходных процессов предполагает, что в алгоритме 3.2 дополнительно задается порядок усечения спектральных характеристик L и на шаге 4 применяется формула (3.39) вместо (3.38). Чтобы получить реализации спектральных характеристик \mathcal{X}_l и выборочные траектории координат выходного сигнала $X_l(t)$, достаточно воспользоваться этим алгоритмом для реализаций спектральных характеристик \mathcal{V}_j и координат случайного вектора X_0 .

Оценки первой и вторых нестационарных спектральных плотностей координат случайного процесса $X(\cdot)$ можно найти по ансамблю реализаций спектральных характеристик \mathcal{X}_l с помощью формул (3.21) и (3.22) для каждого значения l . Для этого нужно выбрать количество реализаций M (объем выборки) и набору реализаций \mathcal{V}_j^k спектральных характеристик \mathcal{V}_j и X_0^k случайного вектора X_0 будет соответствовать набор реализаций \mathcal{X}_l^k , где $k = 1, 2, \dots, M$. Более полный анализ предполагает оценивание нестационарных взаимных спектральных плотностей координат случайного процесса $X(\cdot)$ (см. п. 2 замечаний 2.1). Для оценки квадратов норм случайных процессов $X_l(\cdot)$ используются формулы (3.23) и (3.24).

Математические модели многомерных линейных стохастических систем управления могут задаваться в форме векторного линейного стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$dX(t) = (a^0(t)X(t) + b(t)g(t) + b^0(t))dt + \sum_{j=1}^s (c^j(t)X(t) + d^j(t))dW_j(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (3.40)$$

где по сравнению с уравнением (3.27) используется функция $a^0(\cdot)$ вместо $a(\cdot)$ — заданная интегрируемая матричная функция размеров $n \times n$ с элементами $a_{lm}^0(\cdot)$, а также добавляется функция $b^0(\cdot)$ — заданная вектор-функция размеров $n \times 1$ с элементами $b_l^0(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$. В интегральной форме это уравнение записывается следующим образом:

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t (a^0(\tau)X(\tau) + b(\tau)g(\tau) + b^0(\tau))d\tau + \sum_{j=1}^s \int_{t_0}^t (c^j(\tau)X(\tau) + d^j(\tau))dW_j(\tau), \quad (3.41)$$

где первый интеграл в правой части понимается в среднеквадратическом смысле, а второй — стохастический интеграл Ито [4, 37, 77].

Если $c^j(t) \equiv 0$, $a(t) = a^0(t)$ и $b^0(t) \equiv 0$, то уравнения (3.27) и (3.40) эквивалентны (имеют одно решение), а при $c^j(t) \neq 0$ эти уравнения эквивалентны при условии

$$a_{lm}^0(t) = a_{lm}(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{\gamma=1}^n c_{l\gamma}^j(t) c_{\gamma m}^j(t) \quad \text{и} \quad b_l^0(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{\gamma=1}^n c_{l\gamma}^j(t) d_{\gamma}^j(t).$$

Если обозначить через A_{lm}^0 спектральные характеристики операторов умножения на функции $a_{lm}^0(\cdot)$, а через B_l^0 — спектральные характеристики функций $b_l^0(\cdot)$, то

$$A_{lm}^0 = A_{lm} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{\gamma=1}^n C_{l\gamma}^j C_{\gamma m}^j \quad \text{и} \quad B_l^0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{\gamma=1}^n C_{l\gamma}^j D_{\gamma}^j.$$

Соответствующая система уравнений, которым удовлетворяют спектральные характеристики \mathcal{X}_l , с учетом свойства спектрального преобразования стохастического интеграла Ито (2.82) записывается в форме

$$\begin{aligned} P\mathcal{X}_l - X_{l0}\Delta_{t_0} = & \sum_{m=1}^n \left(A_{lm}^0 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{\gamma=1}^n C_{l\gamma}^j C_{\gamma m}^j \right) \mathcal{X}_m + \\ & + \sum_{r=1}^q B_{lr} G_r + \sum_{j=1}^s (V\mathcal{V}_j) \left(\sum_{m=1}^n C_{lm}^j \mathcal{X}_m + D_l^j \right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Эта система уравнений и ее решение представляются в виде (3.37), где

$$\begin{aligned} Z_{lm} = & \begin{cases} P - A_{lm}^0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{\gamma=1}^n C_{l\gamma}^j C_{\gamma m}^j - \sum_{j=1}^s (V\mathcal{V}_j) C_{ll}^j, & l = m, \\ -A_{lm}^0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{\gamma=1}^n C_{l\gamma}^j C_{\gamma m}^j - \sum_{j=1}^s (V\mathcal{V}_j) C_{lm}^j, & l \neq m, \end{cases} \\ Q_l = & X_{l0}\Delta_{t_0} + \sum_{r=1}^q B_{lr} G_r + \sum_{j=1}^s (V\mathcal{V}_j) D_l^j. \end{aligned}$$

В заключительной части рассмотрим применение спектральной формы математического описания для представления решения векторного линейного стохастического дифференциального уравнения с θ -дифференциалом:

$$d_{\theta}X(t) = (a^{\theta}(t)X(t) + b(t)g(t) + b^{\theta}(t))dt + \sum_{j=1}^s (c^j(t)X(t) + d^j(t))d_{\theta}W_j(t), \quad X(t_0) = X_0,$$

или в интегральной форме

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t (a^{\theta}(\tau)X(\tau) + b(\tau)g(\tau) + b^{\theta}(\tau))d\tau + \sum_{j=1}^s \int_{t_0}^t (c^j(\tau)X(\tau) + d^j(\tau))dW_j(\tau),$$

где первый интеграл в правой части понимается в среднеквадратическом смысле, а второй — стохастический θ -интеграл [4, 106, 125, 229], $a^{\theta}(\cdot)$ и $b^{\theta}(\cdot)$ — заданные матричная и векторная

интегрируемые функции размеров $n \times n$ и $n \times 1$ с элементами $a_{lm}^\theta(\cdot)$ и $b_l^\theta(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ соответственно.

При выполнении условий $c^j(t) \equiv 0$, $a(t) = a^\theta(t)$ и $b^\theta(t) \equiv 0$ приведенные выше уравнения эквивалентны уравнению (3.27). Если же $c^j(t) \neq 0$, то условия эквивалентности имеют вид

$$a_{lm}^\theta(t) = a_{lm}(t) + \left[\frac{1}{2} - \theta \right] \sum_{j=1}^s \sum_{\gamma=1}^n c_{l\gamma}^j(t) c_{\gamma m}^j(t) \quad \text{и} \quad b_l^\theta(t) = \left[\frac{1}{2} - \theta \right] \sum_{j=1}^s \sum_{\gamma=1}^n c_{l\gamma}^j(t) d_\gamma^j(t).$$

Пусть A_{lm}^θ — спектральные характеристики операторов умножения на функции $a_{lm}^\theta(\cdot)$, B_l^θ — спектральные характеристики функций $b_l^\theta(\cdot)$, тогда

$$A_{lm}^\theta = A_{lm} + \left[\frac{1}{2} - \theta \right] \sum_{j=1}^s \sum_{\gamma=1}^n C_{l\gamma}^j C_{\gamma m}^j \quad \text{и} \quad B_l^\theta = \left[\frac{1}{2} - \theta \right] \sum_{j=1}^s \sum_{\gamma=1}^n C_{l\gamma}^j D_\gamma^j,$$

и система уравнений для спектральных характеристик \mathcal{X}_l записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} P\mathcal{X}_l - X_{l0}\Delta_{t_0} &= \sum_{m=1}^n \left(A_{lm}^\theta - \left[\frac{1}{2} - \theta \right] \sum_{j=1}^s \sum_{\gamma=1}^n C_{l\gamma}^j C_{\gamma m}^j \right) \mathcal{X}_m + \\ &+ \sum_{r=1}^q B_{lr} G_r + \sum_{j=1}^s (V\mathcal{V}_j) \left(\sum_{m=1}^n C_{lm}^j \mathcal{X}_m + D_l^j \right), \end{aligned}$$

что следует из свойства спектрального преобразования стохастического θ -интеграла (2.84) (см. также соотношение (2.43), связывающее стохастический θ -интеграл с интегралом Ито, и разд. 2.3 и 2.7). Полученная система уравнений переходит в систему (3.34) при $\theta = 1/2$ и в систему (3.42) при $\theta = 0$. Эта система уравнений и ее решение также представляются в виде (3.37), если

$$\begin{aligned} Z_{lm} &= \begin{cases} P - A_{lm}^\theta + \left[\frac{1}{2} - \theta \right] \sum_{j=1}^s \sum_{\gamma=1}^n C_{l\gamma}^j C_{\gamma m}^j - \sum_{j=1}^s (V\mathcal{V}_j) C_{ll}^j, & l = m, \\ -A_{lm}^\theta + \left[\frac{1}{2} - \theta \right] \sum_{j=1}^s \sum_{\gamma=1}^n C_{l\gamma}^j C_{\gamma m}^j - \sum_{j=1}^s (V\mathcal{V}_j) C_{lm}^j, & l \neq m, \end{cases} \\ Q_l &= X_{l0}\Delta_{t_0} + \sum_{r=1}^q B_{lr} G_r + \sum_{j=1}^s (V\mathcal{V}_j) D_l^j. \end{aligned}$$

Замечания 3.2.

1. По аналогии с одномерным случаем (см. п. 1 замечаний 3.1), вместо вектор-функции $g(\cdot)$ в уравнения (3.27)–(3.29) можно подставить векторный случайный процесс $G(\cdot)$. Тогда при спектральном преобразовании следует использовать спектральные характеристики \mathcal{G}_r его координат $G_r(\cdot)$ (см. разд. 2.2), определенные относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$.

2. Алгоритм 3.2 может применяться для решения векторного стохастического дифференциального уравнения Ито или уравнения с θ -дифференциалом, но с учетом связей спектральных характеристик A_{lm} , A_{lm}^0 и A_{lm}^θ , а также с учетом спектральных характеристик B_l^0 и B_l^θ .

3. При усечении всех спектральных характеристик матрицу Z можно рассматривать как блочную квадратную матрицу размеров $nL \times nL$, а матрицы-столбцы \mathcal{X} и Q — как блочные матрицы-столбцы размеров $nL \times 1$, при этом соотношения (3.37) остаются справедливыми.

3.4. Применение в теории оценивания

Одномерный случай. Добавим к уравнению (3.10) еще одно стохастическое дифференциальное уравнение (см. разд. 3.3):

$$dY(t) = \lambda(t, X(t))dt + \zeta(t)dR(t), \quad Y(t_0) = 0, \quad (3.43)$$

в котором $Y(\cdot)$ — случайный процесс; $\lambda(\cdot)$ — полином заданной степени γ с известными коэффициентами: $\lambda(t, x) = \lambda_\gamma(t)x^\gamma + \dots + \lambda_1(t)x + \lambda_0(t)$, $\zeta(t) \neq 0$ — заданная интегрируемая функция; $R(\cdot)$ — стандартный винеровский процесс (случайные процессы $W(\cdot)$ и $R(\cdot)$ независимы). В форме Ланжевена уравнение (3.43) записывается следующим образом:

$$Z(t) = \lambda(t, X(t)) + \zeta(t)Q(t), \quad (3.44)$$

где $Z(\cdot) = \dot{Y}(\cdot)$ — случайный процесс, $Q(\cdot)$ — гауссовский белый шум, соответствующий винеровскому процессу $R(\cdot)$ в смысле соотношения (2.27).

Предполагается, что случайный процесс $X(\cdot)$, относительно которого записано уравнение (3.10), является ненаблюдаемым, а случайные процессы $Y(\cdot)$ и $Z(\cdot)$ — наблюдаемые.

Уравнения (3.10) и (3.43) (или уравнения (3.10) и (3.44)) задают математическую модель одномерной стохастической системы наблюдения, для которой $g(\cdot)$ — известный детерминированный входной сигнал, $X(\cdot)$ — случайный выходной сигнал, $Y(\cdot)$ (или $Z(\cdot)$) — измерения. Уравнение (3.10) описывает объект наблюдения, а уравнение (3.43) (или уравнение (3.44)) — измерительную систему. Далее будем основным уравнением измерительной системы считать (3.44).

Задача оптимального оценивания для одномерной линейной стохастической системы наблюдения состоит в нахождении оценки $\hat{X}(\theta)$ по заданной математической модели (3.10), (3.44), входному сигналу $g(\cdot)$ и измерениям $Z_0^t = \{Z(\tau), \tau \in [t_0, t]\}$ (на рис. 3.2 показана соответствующая структурная схема) при условии

$$\hat{X}(\theta) = \psi(\theta, Z_0^t), \quad \text{ЕП}(\mathcal{E}(\theta)) \rightarrow \min_{\psi(\theta, \cdot)} \quad \forall \theta \in \mathbb{T}, \quad (3.45)$$

в котором $\mathcal{E}(\theta) = X(\theta) - \hat{X}(\theta)$ — ошибка оценивания, а $\Pi(\cdot)$ — функция потерь [106, 225].

Если $\Pi(\cdot)$ — квадратичная функция потерь, т.е. $\Pi(\varepsilon) = \varepsilon^2$, то оптимальная оценка представляется как условное математическое ожидание:

$$\hat{X}(\theta) = \psi(\theta, Z_0^t) = \text{E}[X(\theta)|Z_0^t].$$

Это несмещенная оценка, обеспечивающая минимум среднеквадратического отклонения.

При условии $\theta = t$ задача оценивания называется задачей фильтрации, а при $\theta < t$ и $\theta > t$ — задачами сглаживания (интерполяции) и прогнозирования (экстраполяции) соответственно [267]. Искомая оптимальная оценка $\hat{X}(\theta)$ представляется в виде

$$\hat{X}(\theta) = \frac{\text{E}[\omega(t)X(\theta)]}{\text{E}\omega(t)},$$

т.е. как математическое ожидание случайного процесса $X(\cdot)$ с учетом весовой функции $\omega(\cdot)$, которая определяется следующим образом:

$$\omega(t) = \exp \left\{ \int_{t_0}^t \lambda(\tau, X(\tau)) \psi(\tau) \left(Z(\tau) - \frac{1}{2} \lambda(\tau, X(\tau)) \right) d\tau \right\},$$

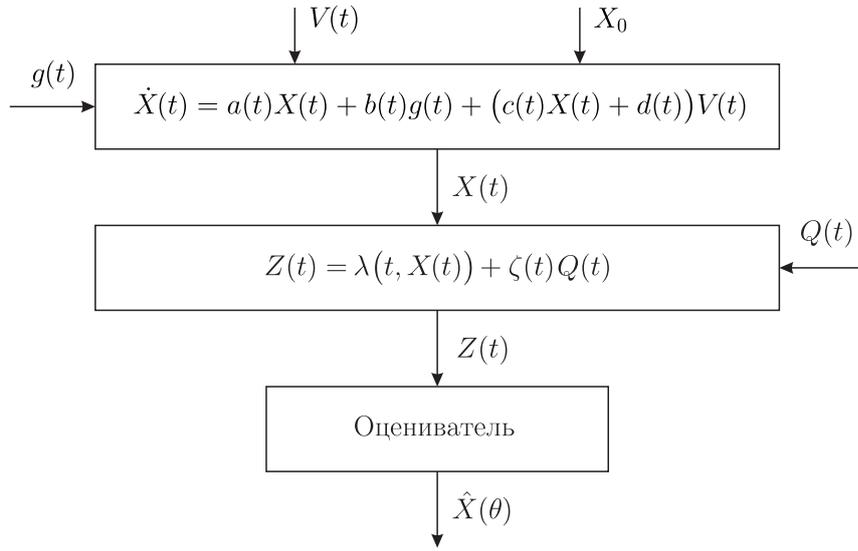


Рис. 3.2. Структурная схема стохастической системы наблюдения

или

$$\omega(t) = \exp \left\{ \int_{t_0}^t \lambda(\tau, X(\tau)) \psi(\tau) dY(\tau) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \lambda^2(\tau, X(\tau)) \psi(\tau) d\tau \right\},$$

где $\psi(t) = \zeta^{-2}(t)$.

Применение спектрального метода к решению стохастического дифференциального уравнения (3.10), т.е. задачи анализа выходных процессов, описано в разд. 3.3. Здесь же воспользуемся спектральной формой математического описания для решения задачи оптимального оценивания. Как и ранее, $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$ (см. разд. 1.1). В дополнение к обозначениям разд. 3.3 будем использовать новые обозначения спектральных характеристик, определенных относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$:

- 11) $\tilde{\Lambda}_0$ — спектральная характеристика функции $\lambda_0(\cdot)$ (см. разд. 1.1);
- 12) Λ_i, Ξ и Ψ — спектральные характеристики операторов умножения на функции $\lambda_i(\cdot)$, $\zeta(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ соответственно (см. разд. 1.5), $i = 1, \dots, \gamma$; $\mathbf{1}_t^*$ — спектральная характеристика оператора умножения на единичную ступенчатую функцию $f^*(\tau) = 1(t - \tau)$ как функцию переменной τ , т.е. спектральная характеристика оператора умножения на индикатор множества $[t_0, t]$;
- 13) \mathcal{Z} — спектральная характеристика случайного процесса $Z(\cdot)$, т.е. измерений (см. разд. 2.2);
- 14) \mathcal{Q} — спектральная характеристика белого шума $Q(\cdot)$ (см. разд. 2.3 и выражение (2.26)).

Применим спектральное преобразование к левой и правой частям уравнения (3.44) с учетом свойства линейности (2.8):

$$\mathbb{S}[Z(\cdot)] = \mathbb{S}[\lambda(\cdot, X(\cdot)) + \zeta(\cdot)Q(\cdot)] = \mathbb{S}[\lambda(\cdot, X(\cdot))] + \mathbb{S}[\zeta(\cdot)Q(\cdot)].$$

Далее воспользуемся теоремой 1.9. Она сформулировано для неслучайных функций, однако здесь предполагается, что случайный процесс $X(\cdot) = X(\cdot, \omega) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ при фиксированном

$\omega \in \Omega$ — это элемент пространства $L_2(\mathbb{T})$, поэтому

$$\mathbb{S}[\lambda(\cdot, X(\cdot))] = \Lambda_\gamma(V\mathcal{X})^{\gamma-1}\mathcal{X} + \dots + \Lambda_1\mathcal{X} + \tilde{\Lambda}_0, \quad \mathbb{S}[\zeta(\cdot)Q(\cdot)] = \Xi\mathcal{Q},$$

следовательно,

$$\mathcal{Z} = \Lambda_\gamma(V\mathcal{X})^{\gamma-1}\mathcal{X} + \dots + \Lambda_1\mathcal{X} + \tilde{\Lambda}_0 + \Xi\mathcal{Q}. \quad (3.46)$$

Согласно свойству (1.73) спектрального преобразования произведения функций одной переменной и свойству (1.74) симметричности спектральной характеристики оператора умножения получаем

$$\mathbb{S}[\lambda(\cdot, X(\cdot))\psi(\cdot)] = \Psi\Lambda(\mathcal{X}) = \Psi^T\Lambda(\mathcal{X}),$$

где $\Lambda(\mathcal{X})$ — спектральная характеристика случайного процесса $\lambda(\cdot, X(\cdot))$:

$$\Lambda(\mathcal{X}) = \Lambda_\gamma(V\mathcal{X})^{\gamma-1}\mathcal{X} + \dots + \Lambda_1\mathcal{X} + \tilde{\Lambda}_0. \quad (3.47)$$

Затем представим интеграл

$$\int_{t_0}^t \lambda(\tau, X(\tau))\psi(\tau) \left(Z(\tau) - \frac{1}{2} \lambda(\tau, X(\tau)) \right) d\tau$$

при условии $t = T$, используя спектральную форму математического описания. Для этого формально воспользуемся свойством (1.26) сохранения скалярного произведения

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}} \lambda(t, X(t))\psi(t) \left(Z(t) - \frac{1}{2} \lambda(t, X(t)) \right) dt = \\ & = \left(\lambda(\cdot, X(\cdot))\psi(\cdot), Z(\cdot) - \frac{1}{2} \lambda(\cdot, X(\cdot)) \right)_{L_2(\mathbb{T})} = \Lambda^T(\mathcal{X})\Psi \left(\mathcal{Z} - \frac{1}{2} \Lambda(\mathcal{X}) \right), \end{aligned}$$

т.е.

$$\omega(T) = \exp \left\{ \Lambda^T(\mathcal{X})\Psi \left(\mathcal{Z} - \frac{1}{2} \Lambda(\mathcal{X}) \right) \right\}. \quad (3.48)$$

Для решения задачи оптимального оценивания необходимо получить ансамбль реализаций спектральной характеристики \mathcal{X} выходного сигнала $X(\cdot)$ по формулам (3.16) или (3.18) и для имеющейся реализации спектральной характеристики \mathcal{Z} измерений $Z(\cdot)$ найти соответствующие весовые коэффициенты $\omega(T)$ по формуле (3.48). Выбирая количество реализаций M (объем выборки) и обозначая эти реализации, соответствующие реализациям \mathcal{V}^k спектральной характеристики \mathcal{V} и X_0^k случайной величины X_0 , через \mathcal{X}^k и ω^k , где $k = 1, 2, \dots, M$, находим спектральную характеристику $\hat{\mathcal{X}}$ оптимальной оценки выходного сигнала $\hat{X}(\theta)$ как взвешенное среднее реализаций \mathcal{X}^k с весами ω^k/Ω по аналогии с методом частиц [146, 245]:

$$\hat{\mathcal{X}} = \frac{1}{\Omega} \sum_{k=1}^M \omega^k \mathcal{X}^k, \quad \Omega = \sum_{k=1}^M \omega^k. \quad (3.49)$$

Наконец, остается применить обратное спектральное преобразование и записать приближенное решение задачи оптимального оценивания в виде ряда с помощью формулы обращения (2.7):

$$\hat{X}(\theta) \approx \mathbb{S}^{-1}[\hat{\mathcal{X}}] = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\mathcal{X}}_i q(i, \theta), \quad \theta \in \mathbb{T}, \quad (3.50)$$

где приближенность оценки обусловлена конечностью выборки. В рассмотренном случае $t = T$, т.е. оценка $\hat{X}(\theta)$ дает приближенное решение задачи фильтрации при $\theta = T$ и решение задачи сглаживания при $\theta < T$.

Далее перейдем к случаю $t_0 < t < T$ и здесь потребуется спектральная характеристика $\mathbf{1}_t^*$ оператора умножения на индикатор множества $[t_0, t]$. Воспользуемся свойством (1.73) спектрального преобразования произведения функций одной переменной и свойством (1.74) симметричности спектральной характеристики оператора умножения:

$$\mathbb{S}[1(t - (\cdot))\lambda(\cdot, X(\cdot))\psi(\cdot)] = \mathbf{1}_t^* \Psi \Lambda(\mathcal{X}) = [\mathbf{1}_t^* \Psi]^T \Lambda(\mathcal{X}),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \lambda(\tau, X(\tau))\psi(\tau) \left(Z(\tau) - \frac{1}{2} \lambda(\tau, X(\tau)) \right) d\tau = \\ & = \int_{\mathbb{T}} 1(t - \tau) \lambda(\tau, X(\tau))\psi(\tau) \left(Z(\tau) - \frac{1}{2} \lambda(\tau, X(\tau)) \right) d\tau = \Lambda^T(\mathcal{X}) \mathbf{1}_t^* \Psi \left(\mathcal{Z} - \frac{1}{2} \Lambda(\mathcal{X}) \right), \end{aligned}$$

т.е.

$$\omega(t) = \exp \left\{ \Lambda^T(\mathcal{X}) \mathbf{1}_t^* \Psi \left(\mathcal{Z} - \frac{1}{2} \Lambda(\mathcal{X}) \right) \right\}, \quad (3.51)$$

причем формулы (3.48) и (3.51) совпадают при условии $t = T$, так как $\mathbf{1}_T^* = E$ — бесконечная единичная матрица, т.е. спектральная характеристика оператора умножения на функцию $1(T - (\cdot)) = 1$. Дополнительно укажем, что в доказательстве свойства (2.82) спектрального преобразования стохастического интеграла Ито приведено представление спектральной характеристики $\mathbf{1}_t^*$, использующее спектральные характеристики V оператора умножения функций и $\mathbf{1}_\tau$ функции $f(t) = 1(t - \tau)$, где τ — параметр (см. также пример 1.4).

Решение задачи оптимального оценивания получается по тем же формулам (3.49) и (3.50), но с одним отличием: ω^k — это реализации весового коэффициента $\omega(t)$, а не $\omega(T)$, где $k = 1, 2, \dots, M$ и t — заданное значение. Тогда оценка $\hat{X}(\theta)$ дает приближенное решение задачи фильтрации при $\theta = t$, решение задачи сглаживания при $\theta < t$ и решение задачи прогнозирования при $\theta > t$.

Приведем алгоритм решения задачи оптимального оценивания для одномерных стохастических систем наблюдения (3.10) и (3.44) спектральным методом.

Алгоритм 3.3.

1. Выбрать базисную систему $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ пространства $L_2(\mathbb{T})$.
2. Найти спектральные характеристики G и $\tilde{\Lambda}_0$ входного сигнала $g(\cdot)$ и функции $\lambda_0(\cdot)$; спектральные характеристики \mathcal{V} и \mathcal{Q} гауссовских белых шумов $V(\cdot)$ и $Q(\cdot)$; спектральные характеристики A, B, C, Λ_i, Ξ и Ψ операторов умножения на функции $a(\cdot), b(\cdot), c(\cdot), \lambda_i(\cdot), \zeta(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ соответственно, $i = 1, \dots, \gamma$; спектральную характеристику P оператора дифференцирования с учетом начального значения; спектральную характеристику Δ_{t_0} дельта-функции $\delta((\cdot) - t_0)$. Дополнительно при $c(t) \neq 0$ определить спектральную характеристику D функции $d(\cdot)$, а при $c(t) \equiv 0$ — спектральную характеристику \tilde{D} оператора умножения на функцию $d(\cdot)$. При $c(t) \neq 0$ или $\gamma > 1$ определить спектральную характеристику V оператора умножения функций, а при $t < T$ найти спектральную характеристику $\mathbf{1}_t^*$ оператора умножения на индикатор множества $[t_0, t]$.
3. Задать объем выборки M .

4. При $c(t) \neq 0$ записать уравнение (3.15) для спектральной характеристики \mathcal{X} выходного сигнала $X(\cdot)$ и найти его решение (3.16). При $c(t) \equiv 0$ записать уравнение (3.17) для спектральной характеристики \mathcal{X} и найти его решение (3.18). Смоделировать M реализаций \mathcal{X}^k спектральной характеристики \mathcal{X} по реализациям \mathcal{V}^k спектральной характеристики \mathcal{V} и X_0^k случайной величины X_0 , $k = 1, 2, \dots, M$.
5. Выразить весовой коэффициент $\omega(T)$ по формуле (3.48) при $t = T$ или весовой коэффициент $\omega(t)$ по формуле (3.51) при $t < T$. Найти весовые коэффициенты ω^k , соответствующие реализациям \mathcal{X}^k и известной спектральной характеристике \mathcal{Z} измерений $Z(\cdot)$, $k = 1, 2, \dots, M$.
6. Найти спектральную характеристику $\hat{\mathcal{X}}$ оптимальной оценки выходного сигнала $\hat{X}(\theta)$ согласно выражению (3.49).
7. Применить обратное спектральное преобразование: найти оценку выходного сигнала $\hat{X}(\theta)$ по спектральной характеристике $\hat{\mathcal{X}}$, используя формулу обращения (3.50).

Как и в случае решения задачи анализа выходных процессов (см. разд. 3.3), при расчетах осуществляется переход к усеченным спектральным характеристикам с заданным порядком L [220–222]. Тогда все матрицы в соотношениях (3.14)–(3.18), (3.46)–(3.48) и (3.51) являются конечными размера L по каждому измерению: L для матриц-столбцов, $L \times L$ для плоских и $L \times L \times L$ для пространственных матриц, следовательно,

$$\hat{X}(\theta) \approx \mathbb{S}^{-1}[\hat{\mathcal{X}}] = \sum_{i=0}^{L-1} \hat{\mathcal{X}}_i q(i, \theta), \quad \theta \in \mathbb{T}, \quad (3.52)$$

т.е. приближенное решение задачи оптимального оценивания представляется в виде частичной суммы ряда (см. разд. 2.8).

При приближенном решении задачи оптимального оценивания требуется задать порядок усечения спектральных характеристик L и на шаге 7 алгоритма 3.3 и использовать формулу (3.52) вместо (3.50).

Замечания 3.3.

1. В работе [341] получена другая формула для весового коэффициента $\omega(t)$ на основе свойства (1.73) спектрального преобразования произведения функций одной переменной и свойства (1.86) спектрального преобразования интегралов от функций одной переменной:

$$\begin{aligned} & \mathbb{S} \left[\int_{t_0}^{(\cdot)} \frac{\lambda(\tau, X(\tau))}{\zeta^2(\tau)} \left(Z(\tau) - \frac{1}{2} \lambda(\tau, X(\tau)) \right) d\tau \right] = \\ & = P^{-1} \mathbb{S} \left[\frac{\lambda(\cdot, X(\cdot))}{\zeta^2(\cdot)} \left(Z(\cdot) - \frac{1}{2} \lambda(\cdot, X(\cdot)) \right) \right] = P^{-1} (V \Lambda_{\zeta}(\mathcal{X})) \left[\Xi^{-1} \mathcal{Z} - \frac{1}{2} \Lambda_{\zeta}(\mathcal{X}) \right] \end{aligned}$$

и

$$\omega(t) = \exp \left\{ \Delta_t^{\top} P^{-1} (V \Lambda_{\zeta}(\mathcal{X})) \left[\Xi^{-1} \mathcal{Z} - \frac{1}{2} \Lambda_{\zeta}(\mathcal{X}) \right] \right\},$$

где $\Lambda_{\zeta}(\mathcal{X}) = \Xi^{-1} \Lambda(\mathcal{X})$, P^{-1} — спектральная характеристика оператора интегрирования (см. разд. 1.6), а Δ_t — это спектральная характеристика дельта-функции $\delta(\cdot - t)$ (см. примеры линейных функционалов на множестве функций одной переменной в разд. 1.1). Отметим также, что для спектральных характеристик Ξ и Ψ выполняется очевидное соотношение $\Psi = \Xi^{-2}$.

Выражение в фигурных скобках — это матричная запись формулы обращения (1.21), которая в общем случае справедлива при почти всех $t \in \mathbb{T}$, а не в каждой точке (см. также формулу (1.37)).

Еще один вариант формулы для весового коэффициента $\omega(t)$ представлен в статье [342]:

$$\omega(t) = \exp \left\{ [\tilde{\mathbf{1}}_t^*]^\top (V \Lambda_\zeta(\mathcal{X})) \left[\Xi^{-1} \mathcal{Z} - \frac{1}{2} \Lambda_\zeta(\mathcal{X}) \right] \right\},$$

где $\tilde{\mathbf{1}}_t^*$ — спектральная характеристика индикатора множества $[t_0, t]$, связанная со спектральной характеристикой $\mathbf{1}_t^*$ соотношением (1.78): $\mathbf{1}_t^* = V \tilde{\mathbf{1}}_t^*$.

2. Действуя по аналогии с работой [74], можно скорректировать формулу (3.48). Если умножить числитель и знаменатель дроби, которая выражает оптимальную оценку $\hat{X}(\theta)$, на детерминированную величину, то эта оценка не изменится. В качестве такой величины можно взять

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathcal{Z}^\top \Psi \mathcal{Z} \right\},$$

считая измерения $Z(\cdot)$, а значит и спектральную характеристику \mathcal{Z} , зафиксированными.

Тогда

$$\hat{X}(\theta) = \frac{\mathbb{E}[\omega^*(t) X(\theta)]}{\mathbb{E}\omega^*(t)},$$

где при $t = T$

$$\begin{aligned} \omega^*(T) &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathcal{Z}^\top \Psi \mathcal{Z} \right\} \omega(T) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathcal{Z}^\top \Psi \mathcal{Z} + \Lambda^\top(\mathcal{X}) \Psi \mathcal{Z} - \frac{1}{2} \Lambda^\top(\mathcal{X}) \Psi \Lambda(\mathcal{X}) \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathcal{Z} - \Lambda(\mathcal{X}))^\top \Psi (\mathcal{Z} - \Lambda(\mathcal{X})) \right\}, \end{aligned}$$

а в общем случае

$$\omega^*(t) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathcal{Z} - \Lambda(\mathcal{X}))^\top \mathbf{1}_t^* \Psi (\mathcal{Z} - \Lambda(\mathcal{X})) \right\}.$$

Последний вариант весовой функции позволяет обойти некоторые трудности реализации алгоритма оценивания. Более подробно они описаны в работах [74, 303].

3. В алгоритме 3.3 спектральная характеристика \mathcal{Q} гауссовского белого шума $Q(\cdot)$ требуется только для моделирования спектральной характеристики \mathcal{Z} измерений $Z(\cdot)$ при апробации. Это же замечание касается спектральной характеристики Ξ оператора умножения на функцию $\zeta(\cdot)$. В реальной задаче оценивания достаточно известной спектральной характеристики \mathcal{Z} .

4. Спектральная характеристика оптимальной оценки выражается как взвешенное среднее реализаций \mathcal{X}^k с весами ω^k/Ω согласно формуле (3.49). Аналогичным образом можно получить вторую нестационарную спектральную плотность ошибки оценивания $\mathcal{E}(\theta) = X(\theta) - \hat{X}(\theta)$:

$$\hat{S}^{\mathcal{E}} = \frac{1}{\Omega} \sum_{k=1}^M \omega^k (\mathcal{X}^k - \hat{\mathcal{X}}) (\mathcal{X}^k - \hat{\mathcal{X}})^\top, \quad \Omega = \sum_{k=1}^M \omega^k.$$

Тогда, применяя формулу обращения (1.43), для корреляционной функции ошибки оценивания получаем выражение

$$R_{\mathcal{E}}(\theta, \vartheta) = \mathbb{S}^{-1}[\hat{S}^{\mathcal{E}}] = \sum_{i,j=0}^{\infty} \hat{S}_{ij}^{\mathcal{E}} q(i, \theta) q(j, \vartheta), \quad (\theta, \vartheta) \in \mathbb{T}^2,$$

и, естественно, при усечении спектральных характеристик с порядком L верхний предел суммирования требуется заменить на $L - 1$.

5. С вычислительной точки зрения в задаче оптимального оценивания наиболее предпочтителен вариант $t = T$, поскольку для него формула расчета весовых коэффициентов более простая. Кроме того, спектральный метод предполагает, что используются спектральные характеристики функций и случайных процессов, заданных на отрезке $[t_0, T]$.

Для решения задач фильтрации и сглаживания может оказаться полезной идея использования нестационарного отрезка и нестационарных спектральных характеристик (см. п. 1 замечаний 1.2).

Многомерный случай. Перейдем к уравнениям более общего вида по сравнению с уравнениями (3.43) и (3.44), а именно

$$dY(t) = \lambda(t, X(t))dt + \sum_{w=1}^h \zeta^w(t) dR_w(t), \quad Y(t_0) = 0, \quad (3.53)$$

где $Y(\cdot)$ — m -мерный случайный процесс; $\lambda(\cdot)$ — вектор-полином заданной степени размеров $m \times 1$ с известными коэффициентами:

$$\lambda_u(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{l=1}^n (\lambda_{ul, \gamma_u}(t) x_l^{\gamma_u} + \dots + \lambda_{ul, 1}(t) x_l) + \lambda_{u, 0}(t), \quad u = 1, 2, \dots, m;$$

$\zeta^w(\cdot)$ — заданные вектор-функции размеров $m \times 1$, элементы которых интегрируемы; $R_w(\cdot)$ — независимые стандартные винеровские процессы, $w = 1, 2, \dots, h$. Эквивалентное уравнение в форме Ланжевена имеет вид

$$Z(t) = \lambda(t, X(t)) + \sum_{w=1}^h \zeta^w(t) Q_w(t), \quad (3.54)$$

где $Z(\cdot) = \dot{Y}(\cdot)$ — m -мерный случайный процесс, $Q_w(\cdot)$ — независимые гауссовские белые шумы, соответствующие винеровским процессам $R_w(\cdot)$ (см. соотношение (2.27)).

Дополнительные условия состоят в том, что квадратная матрица $\eta(t) = \zeta(t) \zeta^T(t)$, где матричная функция $\zeta(\cdot)$ образована столбцами $\zeta^w(\cdot)$, является невырожденной: $\det \eta(t) \neq 0$, а случайные процессы $W_j(\cdot)$ и $R_w(\cdot)$ независимы в совокупности, $j = 1, 2, \dots, s$ и $w = 1, 2, \dots, h$ (см. уравнение (3.27)).

Векторный случайный процесс $X(\cdot)$, удовлетворяющий уравнению (3.27), является ненаблюдаемым, а векторные случайные процессы $Y(\cdot)$ и $Z(\cdot)$ — наблюдаемые:

$$Y(t) = [Y_1(t) \ Y_2(t) \ \dots \ Y_m(t)]^T, \quad Z(t) = [Z_1(t) \ Z_2(t) \ \dots \ Z_m(t)]^T.$$

Уравнения (3.27) и (3.53) (или уравнения (3.27) и (3.54)) формируют математическую модель многомерной стохастической системы наблюдения. Как и ранее, в этой модели $g(\cdot)$ — известный детерминированный входной сигнал, $X(\cdot)$ — случайный выходной сигнал, $Y(\cdot)$ (или $Z(\cdot)$) — измерения. Уравнение (3.27) задает объект наблюдения, а уравнение (3.53) (или уравнение (3.54)) — измерительную систему, причем основным уравнением измерительной системы будем считать (3.54).

Задача оптимального оценивания для многомерной линейной стохастической системы наблюдения состоит в нахождении оценки $\hat{X}(\theta)$ по заданной математической модели (3.27), (3.54), входному сигналу $g(\cdot)$ и измерениям $Z_0^t = \{Z(\tau), \tau \in [t_0, t]\}$ при аналогичном условии (3.45), но в предположении, что $\mathcal{E}(\theta) = X(\theta) - \hat{X}(\theta)$ — вектор ошибки оценивания, а $\Pi(\cdot)$ — функция потерь векторного аргумента [106, 225].

Для иллюстрации можно ограничиться рис. 3.2, если использовать обозначение $R(t) = [R_1(t) R_2(t) \dots R_h(t)]^T$ и понимать $\zeta(t)R(t)$ как сумму $\sum_{w=1}^h \zeta^w(t)R_w(t)$ по аналогии с задачей анализа выходных процессов многомерной линейной стохастической системы управления (см. разд. 3.3).

Для квадратичной функции потерь $\Pi(\varepsilon) = \varepsilon^T \varepsilon$ оптимальная оценка (она является несмещенной и гарантирует минимум среднеквадратического отклонения) выражается следующим образом:

$$\hat{X}(\theta) = \psi(\theta, Z_0^t) = E[X(\theta)|Z_0^t].$$

При условии $\theta = t$ задача оценивания называется задачей фильтрации, а при $\theta < t$ и $\theta > t$ — задачами сглаживания (интерполяции) и прогнозирования (экстраполяции) соответственно [267]. Оптимальная оценка $\hat{X}(\theta)$ представляется в виде

$$\hat{X}(\theta) = \frac{E[\omega(t)X(\theta)]}{E\omega(t)},$$

т.е. как взвешенное математическое ожидание случайного процесса $X(\cdot)$. В данном случае весовая функция определяется формулой

$$\omega(t) = \exp \left\{ \sum_{u,v=1}^m \int_{t_0}^t \lambda_u(\tau, X(\tau)) \psi_{uv}(\tau) \left(Z_v(\tau) - \frac{1}{2} \lambda_v(\tau, X(\tau)) \right) d\tau \right\},$$

или

$$\omega(t) = \exp \left\{ \sum_{u,v=1}^m \int_{t_0}^t \lambda_u(\tau, X(\tau)) \psi_{uv}(\tau) dY_v(\tau) - \frac{1}{2} \sum_{u,v=1}^m \int_{t_0}^t \lambda_u(\tau, X(\tau)) \psi_{uv}(\tau) \lambda_v(\tau, X(\tau)) d\tau \right\},$$

где $\psi(t) = \eta^{-1}(t)$ — матричная функция размеров $m \times m$ с элементами $\psi_{uv}(\cdot)$; $u, v = 1, 2, \dots, m$.

Дополнительно запишем уравнение (3.54) в координатной форме:

$$Z_u(t) = \lambda_u(t, X_1(t), \dots, X_n(t)) + \sum_{w=1}^h \zeta_u^w(t) Q_w(t), \quad (3.55)$$

где в дополнение к введенным выше обозначениям $\zeta_u^w(\cdot)$ — элементы векторных функций $\zeta^w(\cdot)$. Далее индексы принимают следующие значения: $l = 1, 2, \dots, n$; $u, v = 1, 2, \dots, m$; $w = 1, 2, \dots, h$.

Будем использовать спектральную форму математического описания для решения задачи оптимального оценивания, взяв за основу спектральный метод решения стохастического дифференциального уравнения (3.27), т.е. задачи анализа выходных процессов. Наряду с обозначениями разд. 3.3 введем следующие обозначения спектральных характеристик, определенных относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$:

11) $\tilde{\Lambda}_{u,0}$ — спектральные характеристики функций $\lambda_{l0}(\cdot)$ (см. разд. 1.1);

- 12) $\Lambda_{ul,i}$, Ξ_u^w и Ψ_{uv} — спектральные характеристики операторов умножения на функции $\lambda_{ul,i}(\cdot)$, $\zeta_u^w(\cdot)$ и $\psi_{uv}(\cdot)$ соответственно (см. разд. 1.5), $i = 1, \dots, \gamma_u$; $\mathbf{1}_i^*$ — спектральная характеристика оператора умножения на единичную ступенчатую функцию $f^*(\tau) = 1(t - \tau)$ как функцию переменной τ , т.е. спектральная характеристика оператора умножения на индикатор множества $[t_0, t]$;
- 13) \mathcal{Z}_u — спектральные характеристики случайных процессов $Z_u(\cdot)$, т.е. координат вектора измерений (см. разд. 2.2);
- 14) \mathcal{Q}_w — спектральные характеристики белых шумов $Q_w(\cdot)$ (см. разд. 2.3 и выражение (2.26)).

Применим спектральное преобразование к левой и правой частям каждого уравнения системы (3.54), принимая во внимание свойство линейности (2.8):

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[Z_u(\cdot)] &= \mathbb{S}\left[\lambda_u(\cdot, X_1(\cdot), \dots, X_n(\cdot)) + \sum_{w=1}^h \zeta_u^w(\cdot) Q_w(\cdot)\right] = \\ &= \mathbb{S}[\lambda_u(\cdot, X_1(\cdot), \dots, X_n(\cdot))] + \sum_{w=1}^h \mathbb{S}[\zeta_u^w(\cdot) Q_w(\cdot)], \end{aligned}$$

а также учтем теорему 1.9:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[\lambda_u(\cdot, X_1(\cdot), \dots, X_n(\cdot))] &= \mathbb{S}\left[\sum_{l=1}^n (\lambda_{ul,\gamma_u}(\cdot) X_l^{\gamma_u}(\cdot) + \dots + \lambda_{ul,1}(\cdot) X_l(\cdot)) + \lambda_{u,0}(\cdot)\right] = \\ &= \sum_{l=1}^n \mathbb{S}[\lambda_{ul,\gamma_u}(\cdot) X_l^{\gamma_u}(\cdot) + \dots + \lambda_{ul,1}(\cdot) X_l(\cdot)] + \mathbb{S}[\lambda_{u,0}(\cdot)] = \\ &= \sum_{l=1}^n (\Lambda_{ul,\gamma_u}(V \mathcal{X}_l^{\gamma_u-1}) \mathcal{X}_l + \dots + \Lambda_{ul,1} \mathcal{X}_l) + \tilde{\Lambda}_{u,0}, \quad \mathbb{S}[\zeta_u^w(\cdot) Q_w(\cdot)] = \Xi_u^w \mathcal{Q}_w, \end{aligned}$$

т.е.

$$\mathcal{Z}_u = \sum_{l=1}^n (\Lambda_{ul,\gamma_u}(V \mathcal{X}_l^{\gamma_u-1}) \mathcal{X}_l + \dots + \Lambda_{ul,1} \mathcal{X}_l) + \tilde{\Lambda}_{u,0} + \sum_{w=1}^h \Xi_u^w \mathcal{Q}_w. \quad (3.56)$$

Далее применим свойство (1.73) спектрального преобразования произведения функций одной переменной и свойство (1.74) симметричности спектральной характеристики оператора умножения:

$$\mathbb{S}[\lambda_u(\cdot, X_1(\cdot), \dots, X_n(\cdot)) \psi_{uv}(\cdot)] = \Psi_{uv} \Lambda_u(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n) = \Psi_{uv}^T \Lambda_u(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n),$$

где $\Lambda_u(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n)$ — это спектральная характеристика случайного процесса $\lambda_u(\cdot, X_1(\cdot), \dots, X_n(\cdot))$, выражение для которой получено выше, а именно

$$\Lambda_u(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n) = \sum_{l=1}^n (\Lambda_{ul,\gamma_u}(V \mathcal{X}_l^{\gamma_u-1}) \mathcal{X}_l + \dots + \Lambda_{ul,1} \mathcal{X}_l) + \tilde{\Lambda}_{u,0}. \quad (3.57)$$

Записанных соотношений достаточно, чтобы представить интеграл

$$\int_{t_0}^t \lambda_u(\tau, X(\tau)) \psi_{uv}(\tau) \left(Z_v(\tau) - \frac{1}{2} \lambda_v(\tau, X(\tau)) \right) d\tau$$

при условии $t = T$ на основе спектральной формы математического описания (с применением свойства (1.26) сохранения скалярного произведения):

$$\int_{\mathbb{T}} \lambda_u(t, X(t)) \psi_{uv}(t) \left(Z_v(t) - \frac{1}{2} \lambda_v(t, X(t)) \right) dt =$$

$$= \left(\lambda_u(\cdot, X(\cdot)) \psi_{uv}(\cdot), Z_v(\cdot) - \frac{1}{2} \lambda_v(\cdot, X(\cdot)) \right)_{L_2(\mathbb{T})} = \Lambda_u^T(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n) \Psi_{uv} \left(Z_v - \frac{1}{2} \Lambda_v(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n) \right),$$

следовательно,

$$\omega(T) = \exp \left\{ \sum_{u,v=1}^m \Lambda_u^T(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n) \Psi_{uv} \left(Z_v - \frac{1}{2} \Lambda_v(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n) \right) \right\}. \quad (3.58)$$

Соотношение (3.58) можно представить компактнее, применяя операцию агрегирования матриц [43, 112], т.е. построение квадратной четырехмерной матрицы Ψ , а также двумерных матриц-столбцов \mathcal{Z} и $\Lambda(\mathcal{X})$:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \dots & \Psi_{1m} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \dots & \Psi_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{m1} & \Psi_{m2} & \dots & \Psi_{mm} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_m \end{bmatrix}, \quad \Lambda(\mathcal{X}) = \begin{bmatrix} \Lambda_1(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n) \\ \Lambda_2(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n) \\ \vdots \\ \Lambda_m(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n) \end{bmatrix},$$

тогда

$$\omega(T) = \exp \left\{ \Lambda^T(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n) \Psi \left(\mathcal{Z} - \frac{1}{2} \Lambda(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n) \right) \right\}.$$

Чтобы найти решение задачи оптимального оценивания, нужно сформировать ансамбль реализаций двумерной матрицы-столбца \mathcal{X} , которая включает спектральные характеристики \mathcal{X}_l координат выходного сигнала $X_l(\cdot)$. Их можно получить по формуле (3.37) с дополнительной декомпозицией [43, 112], или построением простых сечений двумерной матрицы-столбца \mathcal{X} . При $n = 2$ достаточно применить формулу (3.36). Также требуются весовые коэффициенты $\omega(T)$ (см. формулу (3.48)), зависящие от реализации матрицы-столбца \mathcal{Z} , образованной реализациями спектральных характеристик координат вектора измерений $Z_u(\cdot)$. Выбирая количество реализаций M (объем выборки) и обозначая эти реализации, соответствующие реализациям \mathcal{V}^k спектральной характеристики \mathcal{V} и X_0^k случайного вектора X_0 , через \mathcal{X}^k и ω^k , где $k = 1, 2, \dots, M$, находим двумерную матрицу-столбец $\hat{\mathcal{X}}$, отвечающую оптимальной оценке выходного сигнала $\hat{X}(\theta)$, как взвешенное среднее реализаций \mathcal{X}^k с весами ω^k/Ω согласно методу частиц [146, 245]:

$$\hat{\mathcal{X}} = \frac{1}{\Omega} \sum_{k=1}^M \omega^k \mathcal{X}^k, \quad \Omega = \sum_{k=1}^M \omega^k. \quad (3.59)$$

Остается получить спектральные характеристики $\hat{\mathcal{X}}_l$ оптимальных оценок координат выходного сигнала $\hat{X}_l(\theta)$ с помощью декомпозиции. Операцию декомпозиции можно применить сразу после нахождения двумерной матрицы-столбца \mathcal{X} для получения спектральных характеристик \mathcal{X}_l . Тогда

$$\hat{\mathcal{X}}_l = \frac{1}{\Omega} \sum_{k=1}^M \omega^k \mathcal{X}_l^k, \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad \Omega = \sum_{k=1}^M \omega^k. \quad (3.60)$$

На заключительном шаге применяется обратное спектральное преобразование и приближенное решение задачи оптимального оценивания записывается в виде рядов по формуле обращения (2.7):

$$\hat{X}_l(\theta) \approx \mathbb{S}^{-1}[\hat{\mathcal{X}}_l] = \sum_{i=0}^{\infty} (\hat{\mathcal{X}}_l)_i q(i, \theta), \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad \theta \in \mathbb{T}, \quad (3.61)$$

где, как и в одномерном случае, приближенность оценки связана с конечностью выборки. Приведенные соотношения согласованы с условием $t = T$. Это означает, что оценка $\hat{X}(\theta)$ является приближенным решением задачи фильтрации ($\theta = T$) и задачи сглаживания ($\theta < T$).

Следом рассмотрим условие $t_0 < t < T$. Здесь достаточно воспользоваться тем же приемом, что и в одномерном случае, а именно

$$\omega(t) = \exp \left\{ \sum_{u,v=1}^m \Lambda_u^T(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n) \mathbf{1}_t^* \Psi_{uv} \left(\mathcal{Z}_v - \frac{1}{2} \Lambda_v(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n) \right) \right\}, \quad (3.62)$$

или $\omega(t) = \exp \left\{ \Lambda^T(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n) \Psi^* \left(\mathcal{Z} - \frac{1}{2} \Lambda(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n) \right) \right\},$

где

$$\Psi^* = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_t^* \Psi_{11} & \mathbf{1}_t^* \Psi_{12} & \dots & \mathbf{1}_t^* \Psi_{1m} \\ \mathbf{1}_t^* \Psi_{21} & \mathbf{1}_t^* \Psi_{22} & \dots & \mathbf{1}_t^* \Psi_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{1}_t^* \Psi_{m1} & \mathbf{1}_t^* \Psi_{m2} & \dots & \mathbf{1}_t^* \Psi_{mm} \end{bmatrix}.$$

Для решения задачи оптимального оценивания применяются те же формулы (3.59) и (3.61), но с учетом того, что ω^k — это реализации весового коэффициента $\omega(t)$ вместо $\omega(T)$, где $k = 1, 2, \dots, M$, а t — заданное значение. Тогда оценка $\hat{X}(\theta)$ дает приближенное решение задачи фильтрации при $\theta = t$, решение задачи сглаживания при $\theta < t$ и решение задачи прогнозирования при $\theta > t$.

Приведем алгоритм решения задачи оптимального оценивания для многомерных стохастических систем наблюдения (3.27) и (3.54) спектральным методом.

Алгоритм 3.4.

1. Выбрать базисную систему $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$.
2. Найти спектральные характеристики G_r и $\tilde{\Lambda}_{u,0}$ координат входного сигнала $g_r(\cdot)$ и функций $\lambda_{u,0}(\cdot)$; спектральные характеристики \mathcal{V}_j и \mathcal{Q}_w гауссовских белых шумов $V_j(\cdot)$ и $Q_w(\cdot)$; спектральные характеристики A_{lm} , B_{lr} , C_{lm}^j , $\Lambda_{ul,i}$, Ξ_u^w и Ψ_{uv} операторов умножения на функции $a_{lm}(\cdot)$, $b_{lr}(\cdot)$, $c_{lm}^j(\cdot)$, $\lambda_{ul,i}(\cdot)$, $\zeta_u^w(\cdot)$ и $\psi_{uv}(\cdot)$ соответственно, $i = 1, \dots, \gamma_u$; спектральную характеристику P оператора дифференцирования с учетом начального значения; спектральную характеристику Δ_{t_0} дельта-функции $\delta((\cdot) - t_0)$. Дополнительно при $c^j(t) \neq 0$ определить спектральные характеристики D_l^j функций $d_l^j(\cdot)$, а при $c^j(t) \equiv 0$ — спектральные характеристики \tilde{D}_l^j операторов умножения на функции $d_l^j(\cdot)$. При $c^j(t) \neq 0$ или $\max \gamma_i > 1$ определить спектральную характеристику V оператора умножения функций, а при $t < T$ определить спектральную характеристику $\mathbf{1}_t^*$ оператора умножения на индикатор множества $[t_0, t]$.
3. Задать объем выборки M .
4. При $c^j(t) \neq 0$ записать систему уравнений (3.34), а при $c^j(t) \equiv 0$ — систему уравнений (3.35) для спектральных характеристик \mathcal{X}_l координат выходного сигнала $X_l(\cdot)$ и найти ее решение: при $n = 2$ воспользоваться формулой (3.36), а в общем случае — формулой

(3.37). Смоделировать M реализаций \mathcal{X}_l^k спектральных характеристик \mathcal{X}_l по реализациям \mathcal{V}_j^k спектральных характеристик \mathcal{V}_j и X_0^k случайного вектора X_0 , $k = 1, 2, \dots, M$.

5. Выразить весовой коэффициент $\omega(T)$ по формуле (3.58) при $t = T$ или весовой коэффициент $\omega(t)$ по формуле (3.62) при $t < T$. Найти весовые коэффициенты ω^k , соответствующие реализациям \mathcal{X}_l^k и известным спектральным характеристикам \mathcal{Z}_u координат вектора измерений $Z_u(\cdot)$, $k = 1, 2, \dots, M$.
6. Найти спектральные характеристики $\hat{\mathcal{X}}_l$ оптимальных оценок координат выходного сигнала $\hat{X}_l(\theta)$ согласно выражениям (3.59) или (3.60).
7. Применить обратное спектральное преобразование: найти оценки координат выходного сигнала $\hat{X}_l(\theta)$ по спектральным характеристикам $\hat{\mathcal{X}}_l$, используя формулу обращения (3.61).

В разд. 3.3 отмечено, что операции с бесконечными матрицами сложно реализовать на практике, поэтому целесообразно усечение всех спектральных характеристик до некоторого выбранного порядка L [220–222], т.е. все матрицы, которые формируют соотношения (3.34) – (3.36), (3.56) – (3.58) и (3.62), являются конечными размера L по каждому измерению: L для матриц-столбцов, $L \times L$ для плоских и $L \times L \times L$ для пространственных матриц, поэтому

$$\hat{X}_l(\theta) \approx \mathbb{S}^{-1}[\hat{\mathcal{X}}_l] = \sum_{i=0}^{L-1} (\hat{\mathcal{X}}_l)_i q(i, \theta), \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad \theta \in \mathbb{T}, \quad (3.63)$$

и приближенное решение задачи оптимального оценивания представляется в виде частичных сумм рядов (см. разд. 2.8).

Чтобы получить такое приближенное решение задачи оптимального оценивания необходимо задать порядок усечения спектральных характеристик L и на шаге 7 алгоритма 3.4 и использовать формулу (3.63) вместо (3.61).

З а м е ч а н и я 3.4.

1. Можно предложить другие варианты формулы для весовой функции $\omega(\cdot)$ по аналогии с п. 1 замечаний 3.3, однако формулы (3.58) и (3.62) более предпочтительны, возможно, за исключением выражения (см. п. 2 замечаний 3.3)

$$\omega^*(t) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathcal{Z} - \Lambda(\mathcal{X}))^T \Psi^* (\mathcal{Z} - \Lambda(\mathcal{X})) \right\},$$

которое в координатной форме имеет вид

$$\omega^*(t) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{u,v=1}^m (\mathcal{Z}_u - \Lambda_u(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n))^T \mathbf{1}_t^* \Psi_{uv} (\mathcal{Z}_v - \Lambda_v(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n)) \right\}.$$

При $t = T$ указанные выражения несколько проще, так как $\mathbf{1}_t^* = E$ и, следовательно, $\Psi^* = \Psi$, где E — бесконечная единичная матрица.

2. В алгоритме 3.4 спектральные характеристики Q_w гауссовских белых шумов $Q_w(\cdot)$ требуются для апробации, когда возникает необходимость в моделировании спектральных характеристик \mathcal{Z}_u координат вектора измерений $Z_u(\cdot)$. Аналогичное замечание справедливо для спектральных характеристик Ξ_u^w операторов умножения на функции $\zeta_u^w(\cdot)$. Но, вообще говоря,

задача оценивания предполагает, что спектральные характеристики \mathcal{Z}_u известны (см. также п. 3 замечаний 3.3).

3. По реализациям \mathcal{X}_l^k можно найти вторые нестационарные спектральные плотности координат $\mathcal{E}_l(\theta) = X_l(\theta) - \hat{X}_l(\theta)$ вектора ошибки оценивания (см. п. 4 замечаний 3.3):

$$\hat{S}^{\mathcal{E}_l} = \frac{1}{\Omega} \sum_{k=1}^M \omega^k (\mathcal{X}_l^k - \hat{\mathcal{X}}_l) (\mathcal{X}_l^k - \hat{\mathcal{X}}_l)^\top, \quad \Omega = \sum_{k=1}^M \omega^k,$$

и соответствующие им корреляционные функции (при усечении спектральных характеристик с порядком L верхний предел суммирования заменяется на $L - 1$):

$$R_{\mathcal{E}_l}(\theta, \vartheta) = \mathbb{S}^{-1}[\hat{S}^{\mathcal{E}_l}] = \sum_{i,j=0}^{\infty} \hat{S}_{ij}^{\mathcal{E}_l} q(i, \theta) \otimes q(j, \vartheta), \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad (\theta, \vartheta) \in \mathbb{T}^2.$$

Наряду с ними при необходимости допустимо находить нестационарные взаимные спектральные плотности координат вектора ошибки оценивания (см. п. 2 замечаний 2.1).

3.5. Моделирование типовых случайных процессов

В этом разделе применим алгоритмы решения стохастических дифференциальных уравнений спектральным методом для моделирования типовых случайных процессов: винеровского процесса (броуновского движения), броуновского моста и процесса Орнштейна – Уленбека (см. примеры случайных процессов в разд. 2.1). Кроме того, приведем примеры моделирования геометрического броуновского движения [239], осциллятора Кубо [302] и вращательной диффузии [53, 255], а также пример решения задачи оценивания траектории процесса Орнштейна – Уленбека.

Пример 3.1. Оценить погрешности аппроксимации математического ожидания $m_W(\cdot)$ и корреляционной функции $R_W(\cdot)$ винеровского процесса $W(\cdot)$, а также оценить его норму на отрезке $\mathbb{T} = [0, 1]$, применяя спектральный метод решения стохастического дифференциального уравнения

$$\dot{W}(t) = V(t), \quad W(0) = W_0 = 0, \quad (3.64)$$

где $V(\cdot)$ — гауссовский белый шум. В качестве базисных систем использовать функции (1.5) – (1.9). Порядки усечения спектральных характеристик: $L = 4, 8, \dots, 256$.

□ Уравнение (3.64) эквивалентно уравнению (2.27) и представляет собой частный случай уравнения (3.12) при $a(t) = b(t) = c(t) \equiv 0$ и $d(t) \equiv 1$.

Применим для решения стохастического дифференциального уравнения (3.64) спектральный метод и алгоритм 3.1 (см. разд. 3.3). Формула (3.18) здесь принимает наиболее простой вид, а именно (2.31): $\mathcal{W} = P^{-1}\mathcal{V}$, где \mathcal{W} — спектральная характеристика винеровского процесса, P^{-1} — спектральная характеристика оператора интегрирования, а \mathcal{V} — спектральная характеристика (2.26) белого шума, т.е. $A = B = C = O$, $D = E$. Здесь O и E — бесконечные нулевая и единичная матрицы соответственно. Спектральные характеристики P^{-1} для базисных систем (1.5)–(1.9) приведены в разд. 1.6.

Напомним (см. разд. 2.4), что $S^W = \text{cov } \mathcal{W} = P^{-1}[P^{-1}]^T$ согласно соотношению (2.57) для вторых нестационарных спектральных плотностей входного и выходного сигналов линейной системы управления. Это вторая нестационарная спектральная плотность винеровского процесса, т.е. матрица P^{-1} определяет линейное преобразование спектральной характеристики \mathcal{V} , результат которого — спектральная характеристика \mathcal{W} .

Далее приведем результаты вычислительного эксперимента, в котором проведено моделирование усеченной спектральной характеристики \mathcal{W} и траекторий винеровского процесса $W(\cdot)$ на основе соотношений (3.18) и (3.20) для заданных базисных систем и порядков усечения L .

Несколько выборочных траекторий винеровского процесса показаны на рис. 3.3. Они соответствуют выбору полиномов Лежандра (1.5) в качестве базисной системы и порядку усечения $L = 64$.

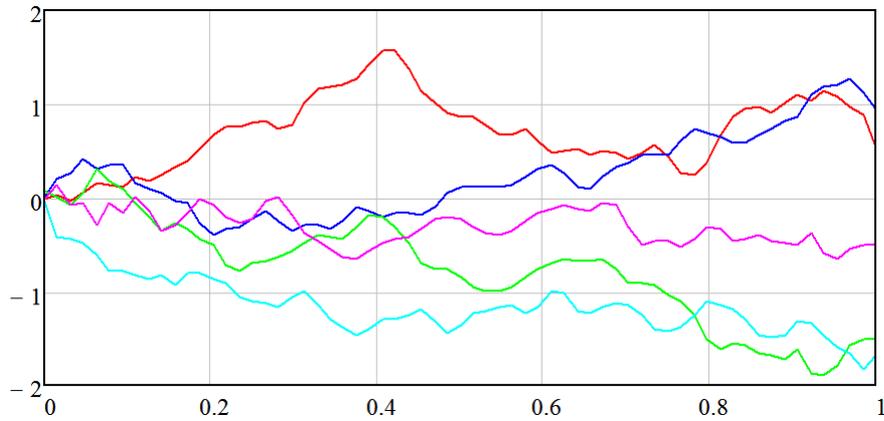


Рис. 3.3. Выборочные траектории винеровского процесса

Для каждой базисной системы и каждого порядка усечения моделировались реализации $\{\mathcal{W}^k\}_{k=1}^M$ усеченной спектральной характеристики \mathcal{W} , где $M = 10^6$ — объем выборки. Далее по формулам (3.21) и (3.22) оценивались первая и вторая нестационарные спектральные плотности, а с помощью формулы (3.24) — квадрат нормы усеченной спектральной характеристики \mathcal{W} , равный квадрату нормы приближенного решения уравнения (3.64).

На основе этих оценок вычислены погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{m_W}$ и $\bar{\varepsilon}_{R_W}$ математического ожидания $m_W(\cdot)$ и корреляционной функции $R_W(\cdot)$ при заданных значениях L , когда эти функции приближенно представляются в виде частичных сумм (1.116) и (1.121) соответственно при неточном вычислении их коэффициентов разложения (см. пример 2.22). Эти погрешности приведены в табл. 3.1 и 3.2, а квадраты норм усеченных спектральных характеристик \mathcal{W} — в табл. 3.3. Согласно формуле (2.62) точное значение квадрата нормы равно $1/2$ (см. также примеры 2.8 и 2.12).

Для погрешностей аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{R_W}$ при выборе полиномов Лежандра и косинусоид данные из табл. 3.2 согласуются с данными из табл. 2.3 вплоть до порядка усечения $L = 16$, а для тригонометрических функций — для всех заданных значений L . Данное обстоятельство связано с тем, что погрешность аппроксимации складывается из двух составляющих: методической погрешности спектрального метода, причина которой — усечение спектральных характери-

Таблица 3.1. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{m_W}$

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000671	0.001112	0.000311	0.000569	0.000407	0.000540	0.000436
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000769	0.000706	0.000897	0.001042	0.001000	0.000254	0.000315
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.001019	0.000530	0.001003	0.000488	0.000685	0.000664	0.000528
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000513	0.000559	0.000776	0.000470	0.000548	0.001226	0.000539
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.001206	0.000485	0.001114	0.001035	0.001150	0.001376	0.000791

Таблица 3.2. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{R_W}$

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.014107	0.004378	0.001486	0.000539	0.000359	0.000269	0.000595
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.020183	0.006458	0.002199	0.001869	0.000375	0.000447	0.001079
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.069943	0.035512	0.017901	0.009013	0.004515	0.002342	0.001741
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.069975	0.035501	0.017899	0.009017	0.004508	0.002276	0.001144
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.117126	0.086660	0.063060	0.045335	0.032215	0.022876	0.016214

Таблица 3.3. Квадраты норм усеченных спектральных характеристик \mathcal{W}

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.464994	0.483939	0.492193	0.496020	0.498414	0.498847	0.499106
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.464913	0.485261	0.492811	0.494959	0.498271	0.499541	0.498462
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.436687	0.468915	0.484554	0.492874	0.496338	0.498588	0.497766
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.436327	0.469312	0.484730	0.493071	0.495933	0.498365	0.499072
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.426896	0.463326	0.481137	0.489199	0.496365	0.498057	0.499147

стик (см. разд. 2.8), и статистической погрешности, обусловленной конечностью выборки для расчета статистических характеристик [94]. Методическая погрешность зависит от значения L , а статистическая — от объема выборки M .

Методическая погрешность аппроксимации математического ожидания нулевая, поэтому данные из табл. 3.1 содержат только статистическую погрешность, она же влияет на результаты, приведенные в табл. 3.2 для полиномов Лежандра и косинусоид при условии $L > 16$. В книге [163] показано, что увеличение объема выборки M приводит к уменьшению погрешностей $\bar{\varepsilon}_{m_W}$ и $\bar{\varepsilon}_{R_W}$.

В работе [158] численно исследовалась точность аппроксимации математического ожидания и корреляционной функции винеровского процесса по результатам обращения реализаций $\{\mathcal{W}^k\}_{k=1}^M$ усеченной спектральной характеристики \mathcal{W} . По соответствующим выборочным траекториям винеровского процесса оценивались первые два момента в узлах разбиения отрезка $\mathbb{T} = [0, 1]$ с шагом h . Для сравнительного анализа моделирование траекторий винеровского процесса осуществлялось с помощью дискретной аппроксимации:

$$W_{j+1} = W_j + \sqrt{h} \Delta W_j, \quad W_0 = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$$

т.е. наиболее часто используемым способом, на котором основаны численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений [4, 77, 321]. Здесь $h = T/N$, ΔW_j — независи-

мые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, N — заданное натуральное число, которое выбиралось равным L , чтобы при моделировании одной траектории винеровского процесса спектральным и численным методами число обращений к датчику случайных чисел было одним и тем же. Погрешность аппроксимации моментов вычислялась как максимум модулей отклонений приближенного решения от точного в точках $t_j = jh$. ■

Пример 3.2. Оценить вероятность достижения винеровским процессом $W(\cdot)$ границ $W_{\pm} = \pm v$, где $v = 1/3, 1/2, 1, 2, 3$, применяя спектральный метод. В качестве базисной системы использовать полиномы Лежандра (1.5) и косинусоиды (1.6). Порядки усечения спектральных характеристик: $L = 4, 8$, $\mathbb{T} = [0, 1]$.

□ Спектральная характеристика \mathcal{W} винеровского процесса выражается с помощью формулы (2.31) (см. также пример 3.1)

$$\mathcal{W} = P^{-1}\mathcal{V},$$

в которой P^{-1} — спектральная характеристика оператора интегрирования (см. разд. 1.6), а \mathcal{V} — спектральная характеристика (2.26) белого шума.

С помощью методики построения множеств спектральных характеристик функций с ограничениями из разд. 1.11 (см. формулы (1.127) и (1.129)) для $L = 4$ найдены многогранные области $\mathbb{V}_4^{(6)}$, $J = J(6, 6)$: 608 граничных точек. Количество граней зависит от базисной системы: при выборе полиномов Лежандра — 400 граней, а при выборе косинусоид — 522 грани. Для $L = 8$ построены многогранные области $\mathbb{V}_8^{(3)}$, $J = J(3, 3)$: 688 граничных точек. Количество граней также зависит от базисной системы: при выборе полиномов Лежандра — 130394 грани, а при выборе косинусоид — 101020 граней (см. п. 2 замечаний 1.17). Подчеркнем, что для минимизации ошибок округления при вычислениях, плоскости граней с нормальными, кубическая норма разности между которыми не превосходит $\varepsilon = 10^{-8}$ (см. разд. 1.11), отождествляются. При другом значении ε число граней может отличаться от приведенных выше значений.

На рис. 3.4 и 3.5 показаны проекции граничных точек множества $\mathbb{V}_4^{(6)}$ на координатные плоскости при выборе полиномов Лежандра и косинусоид в следующем порядке:

$$\begin{array}{ccc} (0, 1), & (0, 2), & (1, 2), \\ (0, 3), & (1, 3), & (2, 3), \end{array}$$

где (i_1, i_2) означает выбор элементов спектральных характеристик с номерами i_1 и i_2 по оси абсцисс и оси ординат для построения проекции. Первая проекция $(0, 1)$ в первой строке соответствует порядку усечения $L = 2$, а первая строка $(0, 1), (0, 2), (1, 2)$ — порядку усечения $L = 3$. Здесь используются такие же обозначения на рисунках, как и в примере 1.24.

Условие $|W(t^*)| \geq v$, где $t^* \in \mathbb{T}$, достижения винеровским процессом границ W_{\pm} можно связать с принадлежностью спектральной характеристики \mathcal{W} множествам $\mathbb{V}_4^{(6)}$ и $\mathbb{V}_8^{(3)}$.

Чтобы оценить вероятность P_v достижения винеровским процессом $W(\cdot)$ границ $W_{\pm} = \pm v$, для каждой базисной системы и каждого порядка усечения моделировались реализации $\{\mathcal{W}^k\}_{k=1}^M$ усеченной спектральной характеристики \mathcal{W} , где $M = 10^6$ — объем выборки. Для каждой реализации проверялось условие $v^{-1}\mathcal{W}^k \in \mathbb{V}_4^{(6)}$ или $v^{-1}\mathcal{W}^k \in \mathbb{V}_8^{(3)}$ в зависимости от

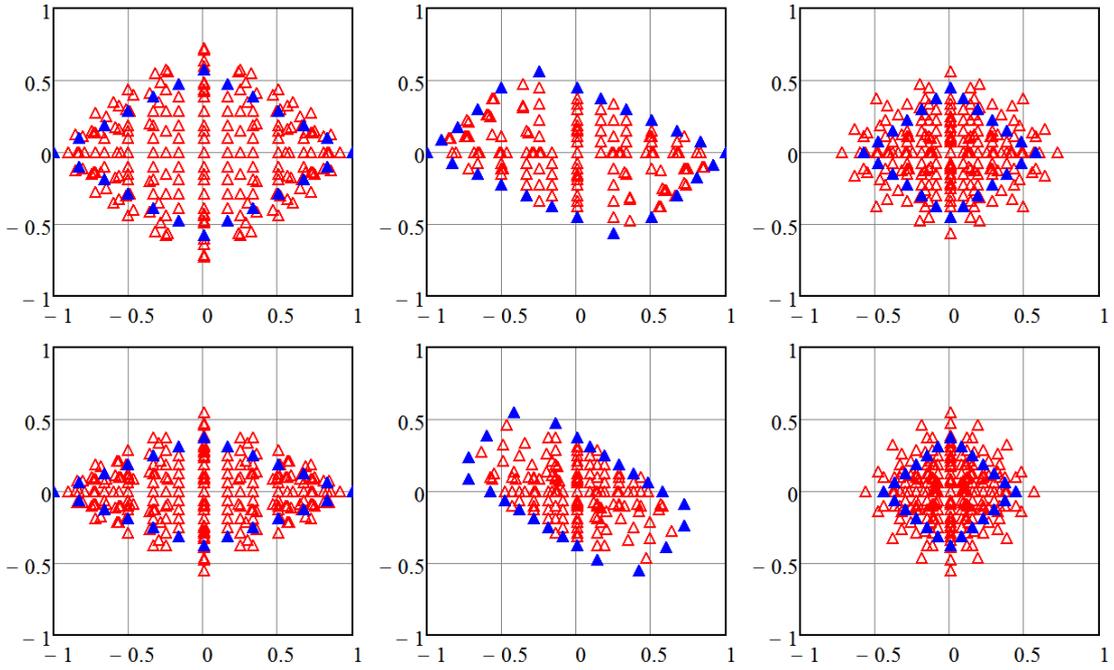


Рис. 3.4. Проекция множеств $\mathbb{V}_4^{(6)}$, $J = J(6, 6)$, на координатные плоскости (полиномы Лежандра)

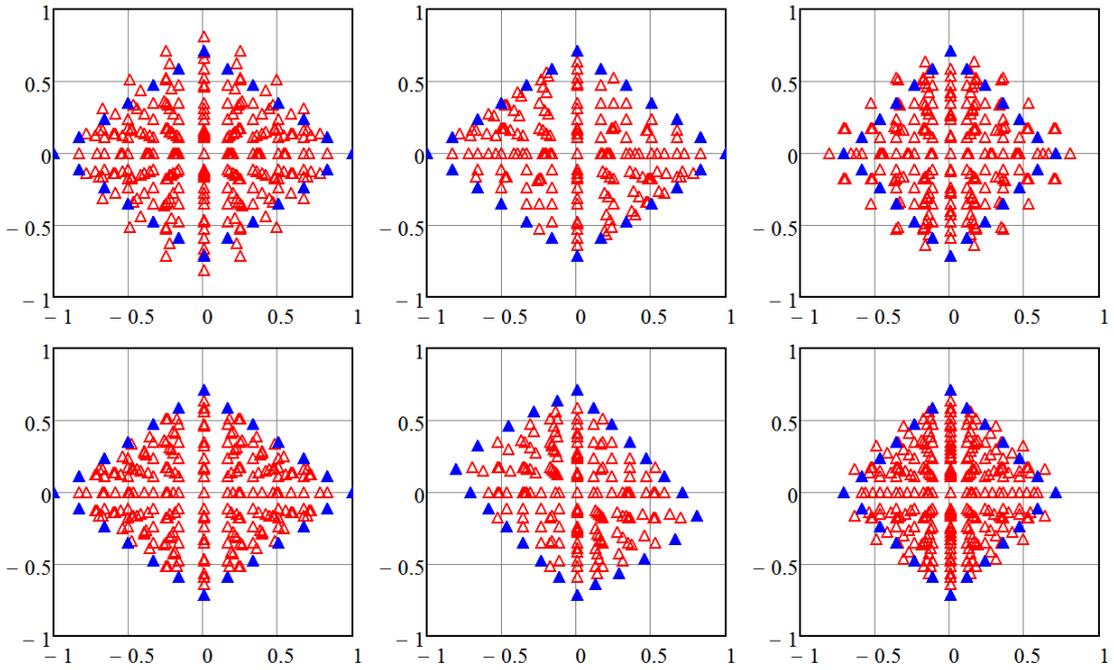


Рис. 3.5. Проекция множеств $\mathbb{V}_4^{(6)}$, $J = J(6, 6)$, на координатные плоскости (косинусоиды)

порядка усежения L , $k = 1, 2, \dots, M$, и полагалось, что

$$P_v = 1 - \frac{|\{v^{-1}\mathcal{W}^k : \mathcal{W}^k \in \mathbb{V}_4^{(6)}\}|}{M} \quad \text{или} \quad P_v = 1 - \frac{|\{\mathcal{W}^k : v^{-1}\mathcal{W}^k \in \mathbb{V}_8^{(3)}\}|}{M},$$

где применяется обозначение $|\cdot|$ для количества элементов, или мощности, множества.

Вообще говоря, вместо условия $v^{-1}\mathcal{W}^k \in \mathbb{V}_4^{(6)}$ или $v^{-1}\mathcal{W}^k \in \mathbb{V}_8^{(3)}$ должно проверяться другое условие, что $v^{-1}\mathcal{W}^k$ — это внутренняя точка соответствующего множества. Действительно, если $v^{-1}\mathcal{W}^k$ — граничная точка множества, то соответствующая траектория $\mathbb{S}^{-1}[\mathcal{W}^k]$ достигла границы W_{\pm} , но поскольку граница множества $\mathbb{V}_4^{(6)}$ имеет нулевую меру в \mathbb{R}^4 , а граница множества $\mathbb{V}_8^{(3)}$ имеет нулевую меру в \mathbb{R}^8 , такая замена условий допустима.

Добавим необходимый комментарий: условие $v^{-1}\mathcal{W}^k \in \mathbb{V}_L$ эквивалентно условию $\mathcal{W}^k \in \mathbb{U}_L$, где множество \mathbb{U}_L получено из \mathbb{V}_L с помощью преобразования подобия с коэффициентом v (см. свойства множества спектральных характеристик функций с ограничениями в разд. 1.11).

Результаты вычислений указаны в табл. 3.4 и 3.5. Они сравнимы только на качественном уровне: с ростом величины v уменьшается вероятность достижения винеровским процессом обозначенных границ. Различия в приведенных данных обусловлены тем, что для порядка усечения $L = 8$ построить множества $\mathbb{V}_8^{(4)}, \mathbb{V}_8^{(5)}, \dots$ довольно трудоемко с вычислительной точки зрения, поэтому пришлось ограничиться множеством $\mathbb{V}_8^{(3)}$ (см. п. 2 замечаний 1.17), а порядок усечения $L = 4$ слишком мал для получения хорошей аппроксимации траекторий винеровского процесса (см. пример 3.1). ■

Таблица 3.4. Вероятность P_v достижения границ, $\mathbb{V}_4^{(6)}$, $J = J(6, 6)$

Базис	$v = 1/3$	$v = 1/2$	$v = 1$	$v = 2$	$v = 3$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.892712	0.739855	0.334805	0.034579	0.001380
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.907685	0.767325	0.356446	0.036416	0.001395

Таблица 3.5. Вероятность P_v достижения границ, $\mathbb{V}_8^{(3)}$, $J = J(3, 3)$

Базис	$v = 1/3$	$v = 1/2$	$v = 1$	$v = 2$	$v = 3$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.990274	0.933436	0.532571	0.085093	0.006395
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.983692	0.905129	0.480068	0.066007	0.003816

Пример 3.3. Оценить погрешности аппроксимации математического ожидания $m_Y(\cdot)$, корреляционной функции $R_Y(\cdot)$ и среднеквадратическую погрешность аппроксимации броуновского моста $Y(\cdot)$ на отрезке $\mathbb{T} = [0, 1]$, т.е. при $T = 1$, применяя спектральный метод решения стохастического дифференциального уравнения

$$dY(t) = \frac{Y_T - Y(t)}{T - t} dt + dW(t), \quad Y(0) = Y_0 = 0, \quad Y_T = 1, \quad (3.65)$$

где $W(\cdot)$ — винеровский процесс. В качестве базисных систем использовать функции (1.5) — (1.9). Порядки усечения спектральных характеристик: $L = 4, 8, \dots, 256$.

□ Сравнивая уравнение (3.65) с уравнением (3.10), получаем

$$a(t) = -\frac{1}{T-t}, \quad b(t) = \frac{Y_T}{T-t}, \quad c(t) \equiv 0 \quad \text{и} \quad d(t) = g(t) \equiv 1.$$

Решение этого уравнения — гауссовский случайный процесс с математическим ожиданием и корреляционной функцией [239]:

$$m_Y(t) = Y_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right) + Y_T \frac{t}{T} = t, \quad R_Y(t, \tau) = \min\{t, \tau\} - \frac{t\tau}{T} = \min\{t, \tau\} - t\tau,$$

и при выбранных значениях Y_0 , Y_T и T его моментная функция второго порядка $B_Y(\cdot)$ совпадает с корреляционной функцией $R_W(t, \tau) = \min\{t, \tau\}$ винеровского процесса $W(\cdot)$.

Значения Y_0 и Y_T задают краевые условия для случайного процесса $Y(\cdot)$ на отрезке $[0, T]$. Таким образом, помимо начального условия $Y(0) = Y_0$, здесь справедливо и конечное условие $Y(T) = Y_T$. Броуновский мост, рассмотренный ранее в примерах 2.9, 2.11 и 2.23 (см. также

примеры случайных процессов в разд. 2.1), — это центрированный случайный процесс $\check{Y}(\cdot)$ в сравнении с решением уравнения (3.65).

Применим для решения стохастического дифференциального уравнения (3.65) спектральный метод и алгоритм 3.1 (см. разд. 3.3). Запишем формулу (3.18) для спектральной характеристики \mathcal{Y} броуновского моста $Y(\cdot)$, не подставляя конкретные значения Y_0 , Y_T и T :

$$\mathcal{Y} = (P + U)^{-1}(Y_0 \Delta_0 + Y_T UG + \mathcal{V}),$$

где P — спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом начального значения, U — спектральная характеристика оператора умножения на функцию $1/(T - t)$, Δ_0 — спектральная характеристика дельта-функции $\delta(\cdot)$, G — спектральная характеристика функции $g(\cdot)$, \mathcal{V} — спектральная характеристика (2.26) белого шума.

Для нахождения спектральной характеристики U используем соотношение $U = (TE - A)^{-1}$, в котором A — спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a_1(t) = t$, т.е. U — это обратная матрица для спектральной характеристики оператора умножения на функцию $f(t) = T - t$. Следовательно, $A = -U$, $B = Y_T U$, $C = O$, $D = E$, где O и E — бесконечные нулевая и единичная матрицы соответственно. Для базисных систем (1.5)–(1.9) спектральные характеристики A и P приведены в разд. 1.5 и 1.7, спектральные характеристики Δ_0 — в разд. 1.1, а спектральные характеристики $G = \mathbf{1}$ — в примере 1.1.

Согласно соотношению (2.57) для вторых нестационарных спектральных плотностей входного и выходного сигналов линейной системы управления для броуновского моста получаем $S^Y = \text{cov } \mathcal{Y} = (P + U)^{-1}[(P + U)^{-1}]^T$. В этом примере матрица $(P + U)^{-1}$ определяет линейное преобразование спектральной характеристики \mathcal{V} , результат которого — центрированная спектральная характеристика $\check{\mathcal{Y}}$ по отношению к \mathcal{Y} .

Далее приведем результаты моделирования усеченной спектральной характеристики \mathcal{Y} и траекторий броуновского моста $Y(\cdot)$ с помощью формул (3.18) и (3.20) для заданных базисных систем и порядков усечения L .

На рис. 3.6 приведены выборочные траектории броуновского моста. Они соответствуют выбору тригонометрических функций в качестве базисной системы и порядку усечения $L = 64$. Начальное и конечное условия здесь не выполняются, но это характерно только при выборе тригонометрических функций (см. замечание 1.5).

Выборочные траектории, полученные с помощью разложения броуновского моста по полиномам Лежандра и косинусоидам, ведут себя иначе. Для них начальное и конечное условия выполнены, но при усечении спектральных характеристик появляется погрешность. При условии $L = 64$ несколько выборочных траекторий изображены на рис. 3.7.

Для каждой базисной системы и каждого порядка усечения моделировались реализации $\{\mathcal{Y}^k\}_{k=1}^M$ усеченной спектральной характеристики \mathcal{Y} , где $M = 10^6$ — объем выборки. По формулам (3.21) и (3.22) оценивались первая и вторая нестационарные спектральные плотности.

На основе этих оценок вычислены погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{m_Y}$ и $\bar{\varepsilon}_{R_Y}$ математического ожидания $m_Y(\cdot)$ и корреляционной функции $R_Y(\cdot)$ при заданных значениях L , когда эти функции приближенно представляются частичными суммами (1.116) и (1.121) соответственно

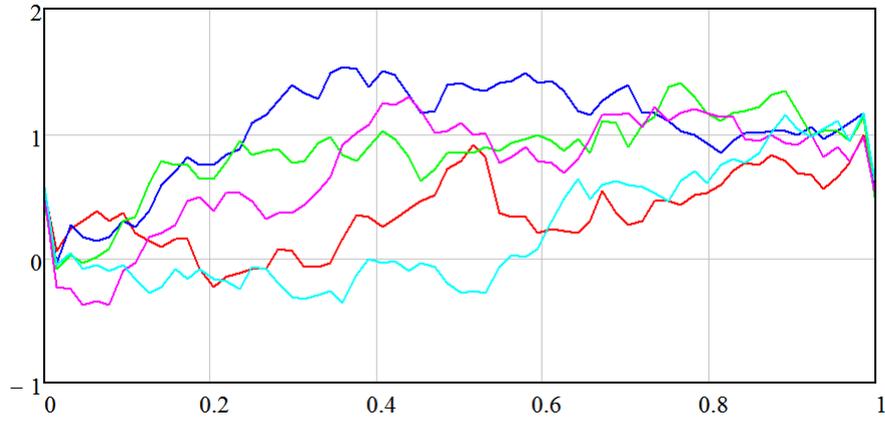


Рис. 3.6. Выборочные траектории броуновского моста (тригонометрические функции)

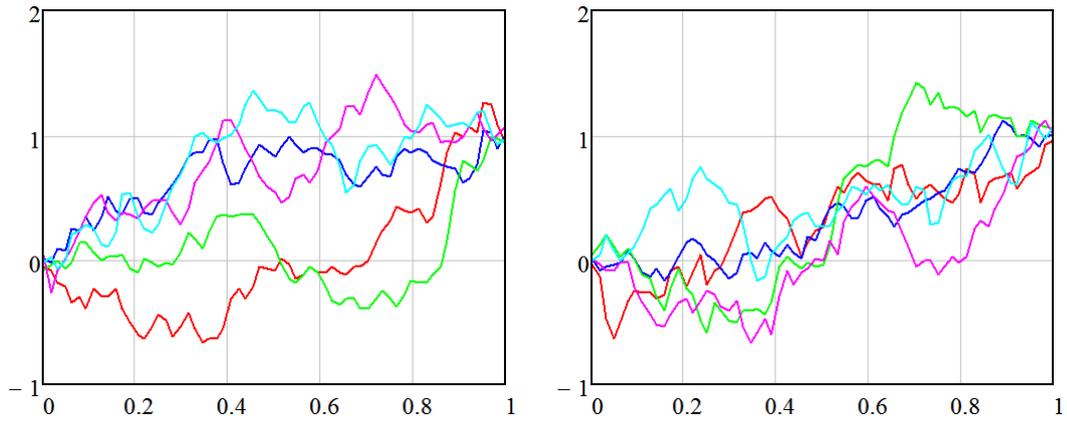


Рис. 3.7. Выборочные траектории броуновского моста (слева — полиномы Лежандра, справа — косинусы)

при неточном вычислении их коэффициентов разложения (см. также пример 2.23). Эти погрешности приведены в табл. 3.6 и 3.7. Среднеквадратические погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{\check{Y}}$ центрированного броуновского моста, рассчитанные по формуле (2.96), содержатся в табл. 3.8.

Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{m_Y}$ из табл. 3.6 имеет смысл сравнить с данными табл. 1.2, где указаны погрешности аппроксимации функции $f_1(t) = t$. В этом примере при выборе базисных систем (1.5)–(1.8) погрешности больше. Это связано с тем, что в примере 1.20 погрешность является следствием только усечения спектральных характеристик, здесь же присутствует неточность нахождения усеченной первой нестационарной спектральной плотности, в том числе из-за статистической погрешности. Отличия в погрешностях в случае, когда для аппроксимации применяются тригонометрические функции (1.9), минимальны: они в значительной мере обусловлены свойствами этой базисной системы, описанными в замечании 1.5.

Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{R_Y}$ из табл. 3.7 больше тех, что приведены в табл. 2.6, поскольку в этом примере, как и для $\bar{\varepsilon}_{m_Y}$, нужно учитывать неточность вычисления элементов усеченной второй нестационарной спектральной плотности и влияние статистической погрешности. Данные из табл. 3.8 и 2.7 для среднеквадратических погрешностей аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{\check{Y}}$ отличаются незначительно.

При увеличении объема выборки M погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{m_Y}$ и $\bar{\varepsilon}_{R_Y}$ уменьшаются, а среднеквадратические погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{\check{Y}}$ практически не меняются [163]. В итоге можно сделать вывод о такой же зависимости методических составляющих погрешностей $\bar{\varepsilon}_{m_Y}$, $\bar{\varepsilon}_{R_Y}$ и $\bar{\varepsilon}_{\check{Y}}$ от L , как и в примерах 1.20 и 2.23.

Таблица 3.6. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{m_Y}$

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000431	0.000340	0.000331	0.000417	0.000314	0.000231	0.000280
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.018627	0.007395	0.003005	0.001311	0.000531	0.000334	0.000259
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.096325	0.049530	0.025072	0.012430	0.006390	0.003023	0.001837
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.096338	0.049586	0.025075	0.012494	0.006286	0.003239	0.001545
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.141448	0.105889	0.077158	0.055402	0.039483	0.028031	0.019858

Таблица 3.7. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{R_Y}$

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.014848	0.004459	0.001474	0.000592	0.000210	0.000195	0.000126
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.032320	0.011768	0.004260	0.001538	0.000577	0.000248	0.000145
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.045968	0.025835	0.013735	0.007063	0.003643	0.001900	0.000902
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.046048	0.025836	0.013704	0.007127	0.003632	0.001824	0.000913
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.020431	0.007729	0.003167	0.001489	0.000579	0.000292	0.000166

Таблица 3.8. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{\check{Y}}$

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.034017	0.016426	0.008058	0.003980	0.001975	0.000983	0.000490
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.040201	0.018507	0.008404	0.003851	0.001799	0.000858	0.000416
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.044652	0.024435	0.012525	0.006236	0.003083	0.001521	0.000752
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.043757	0.023763	0.012168	0.006092	0.003028	0.001505	0.000750
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.030996	0.014640	0.006976	0.003363	0.001641	0.000809	0.000401

Исследование точности аппроксимации математического ожидания и корреляционной функции броуновского моста по результатам обращения реализаций $\{\mathcal{Y}^k\}_{k=1}^M$ усеченной спектральной характеристики \mathcal{Y} проведено в работе [158]. Сравнение базировалось в том числе и на численном решении уравнения (3.65) методом Эйлера – Маруямы. ■

Пример 3.4. Оценить погрешности аппроксимации математического ожидания $m_X(\cdot)$, корреляционной функции $R_X(\cdot)$ и среднеквадратическую погрешность аппроксимации процесса Орнштейна – Уленбека $X(\cdot)$ на отрезке $\mathbb{T} = [0, 1]$, применяя спектральный метод решения стохастического дифференциального уравнения

$$dX(t) = \mu X(t) dt + \sigma dW(t), \quad X(0) = X_0, \quad (3.66)$$

при $\mu = \pm 1, \pm 2, \pm 3$, $\sigma = 1$ и $X_0 = 1$, где $W(\cdot)$ — винеровский процесс. В качестве базисной системы использовать косинусоиды (1.6). Порядки усечения спектральных характеристик: $L = 4, 8, \dots, 256$.

□ Сравнивая уравнение (3.66) с уравнением (3.10), имеем

$$a(t) \equiv \mu, \quad b(t) = c(t) \equiv 0 \quad \text{и} \quad d(t) \equiv \sigma.$$

Решение этого уравнения — гауссовский случайный процесс с математическим ожиданием и корреляционной функцией [102, 239]:

$$m_X(t) = X_0 e^{\mu t} = e^{\mu t}, \quad R_X(t, \tau) = \frac{\sigma^2}{2\mu} (e^{\mu(t+\tau)} - e^{\mu|t-\tau|}) = \frac{1}{2\mu} (e^{\mu(t+\tau)} - e^{\mu|t-\tau|}).$$

В примере 2.24 рассматривался центрированный процесс Орнштейна–Уленбека $\check{X}(\cdot)$ (см. примеры случайных процессов в разд. 2.1), если сравнивать его с решением уравнения (3.66).

Применим для решения стохастического дифференциального уравнения (3.66) спектральный метод и алгоритм 3.1 (см. разд. 3.3). Для этого запишем формулу (3.18), позволяющую найти спектральную характеристику \mathcal{X} процесса Орнштейна–Уленбека $X(\cdot)$ в общем виде, включая параметры μ , σ и X_0 :

$$\mathcal{X} = (P - \mu E)^{-1} (X_0 \Delta_0 + \sigma \mathcal{V}),$$

где P — спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом начального значения, Δ_0 — спектральная характеристика дельта-функции $\delta(\cdot)$, \mathcal{V} — спектральная характеристика (2.26) белого шума.

Таким образом, $A = \mu E$, $B = C = O$, $D = \sigma E$, где O и E — бесконечные нулевая и единичная матрицы соответственно. Спектральные характеристики Δ_0 и P относительно косинусоид можно найти в разд. 1.1 и 1.7, спектральная характеристика \mathcal{V} не зависит от выбора базисной системы (см. п. 1 замечаний 2.3).

Применяя соотношение (2.57) для вторых нестационарных спектральных плотностей входного и выходного сигналов линейной системы управления, для процесса Орнштейна–Уленбека находим $S^X = \text{cov } \mathcal{X} = \sigma^2 (P - \mu E)^{-1} [(P - \mu E)^{-1}]^T$. Здесь $\sigma (P - \mu E)^{-1}$ — матрица линейного преобразования спектральной характеристики \mathcal{V} в центрированную спектральную характеристику $\check{\mathcal{X}}$ по отношению к \mathcal{X} .

Далее приведем результаты моделирования усеченной спектральной характеристики \mathcal{X} и траекторий процесса Орнштейна–Уленбека $X(\cdot)$, используя соотношения (3.18) и (3.20) для заданных порядков усечения L .

На рис. 3.8 изображены выборочные траектории процесса Орнштейна–Уленбека, соответствующие значению $\mu = -1$ и порядку усечения $L = 64$.

Для каждой базисной системы и каждого порядка усечения моделировались реализации $\{\mathcal{X}^k\}_{k=1}^M$ усеченной спектральной характеристики \mathcal{X} , где $M = 10^6$ — объем выборки. Далее по формулам (3.21) и (3.22) оценивались первая и вторая нестационарные спектральные плотности.

На основе этих оценок найдены погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{m_X}$ и $\bar{\varepsilon}_{R_X}$ математического ожидания $m_X(\cdot)$ и корреляционной функции $R_X(\cdot)$ при заданных значениях L , когда эти функции приближенно представляются частичными суммами (1.116) и (1.121) соответственно при неточном вычислении их коэффициентов разложения (см. дополнительно примеры 2.21 и 2.24). Эти погрешности приведены в табл. 3.9 и 3.10. Среднеквадратические погрешности ап-

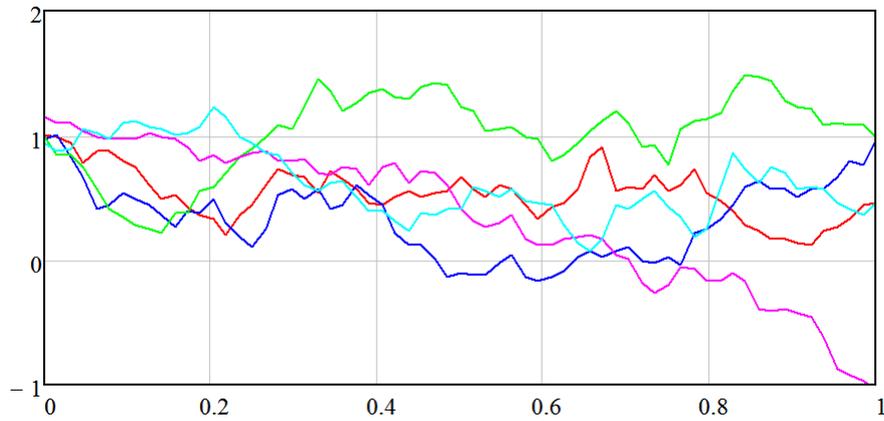


Рис. 3.8. Выборочные траектории процесса Орнштейна–Уленбека

проксимации $\bar{\varepsilon}_{\check{X}}$ централизованного процесса Орнштейна–Уленбека, рассчитанные по формуле (2.96), можно найти в табл. 3.11.

Сравним погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{m_X}$ из табл. 3.9 с погрешностями из табл. 2.1. Конечно, в рассматриваемом случае погрешность больше, особенно при $\mu > 0$. Но в примере 2.21 погрешность возникает только из-за усечения первой нестационарной спектральной плотности, а здесь дополнительно элементы этой спектральной характеристики вычислены неточно, кроме того, оказывает влияние статистическая погрешность.

Аналогичная ситуация с погрешностями аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{R_X}$ из табл. 3.10 и 2.8, поскольку в этом примере, как и для $\bar{\varepsilon}_{m_X}$, нужно учитывать неточность при определении усеченной второй нестационарной спектральной плотности и влияние статистической погрешности. Погрешности, приведенные в табл. 3.10 и 2.9, при малых L похожи, но с ростом L большее влияние оказывает именно статистическая погрешность.

Данные для среднеквадратических погрешностей аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{\check{X}}$ из табл. 3.11 сопоставимы с результатами из табл. 2.11. Соответствующие погрешности в табл. 3.11 меньше, несмотря на статистическую погрешность, но здесь стоит напомнить, что используемая в примере 2.24 формула (2.94) дает оценку сверху для среднеквадратической погрешности аппроксимации. Погрешности из табл. 2.10 значительно меньше — они учитывают только усечение спектральной характеристики случайного процесса.

Как и в примерах 3.1 и 3.3, увеличение объема выборки M приведет к уменьшению статистической погрешности и улучшению результатов при больших значениях L . Оценка методической составляющей погрешности $\bar{\varepsilon}_{m_X}$, $\bar{\varepsilon}_{R_X}$ и $\bar{\varepsilon}_{\check{X}}$ как функций порядка усечения L аналогична той, что получена в примерах 2.21 и 2.24.

В работе [158] есть сравнительный анализ точности аппроксимации математического ожидания и корреляционной функции процесса Орнштейна–Уленбека спектральным методом и методом Эйлера–Маруямы. ■

Пример 3.5. Оценить погрешности аппроксимации математического ожидания $m_X(\cdot)$ и дисперсии $D_X(\cdot)$ геометрического броуновского движения $X(\cdot)$, а также оценить его норму на отрезке $\mathbb{T} = [0, 1]$, применяя спектральный метод решения стохастического дифференциаль-

Таблица 3.9. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{m_X}$, $M = 10^6$

	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\mu = -3$	0.041684	0.014733	0.005222	0.001856	0.000788	0.000486	0.000470
$\mu = -2$	0.026829	0.009204	0.003276	0.001175	0.000649	0.000514	0.000581
$\mu = -1$	0.012544	0.004690	0.001870	0.000714	0.000613	0.000578	0.000769
$\mu = 1$	0.107404	0.037087	0.013410	0.004937	0.001947	0.001006	0.001722
$\mu = 2$	0.925988	0.280734	0.087194	0.029810	0.010737	0.003879	0.003305
$\mu = 3$	5.499605	2.403916	0.698498	0.191278	0.057563	0.018082	0.009328

Таблица 3.10. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{R_X}$, $M = 10^6$

	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\mu = -3$	0.017244	0.007268	0.002755	0.000993	0.000372	0.000161	0.000108
$\mu = -2$	0.022344	0.008694	0.003172	0.001122	0.000428	0.000190	0.000134
$\mu = -1$	0.030224	0.010672	0.003722	0.001288	0.000500	0.000231	0.000186
$\mu = 1$	0.083722	0.029863	0.011004	0.004265	0.001691	0.000744	0.000742
$\mu = 2$	1.081615	0.342099	0.107350	0.035023	0.012246	0.004579	0.002842
$\mu = 3$	9.400125	5.182736	1.659223	0.441183	0.115142	0.034043	0.017162

Таблица 3.11. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{\ddot{X}}$, $M = 10^6$

	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\mu = -3$	0.032955	0.017090	0.008192	0.003836	0.001803	0.000860	0.000417
$\mu = -2$	0.036514	0.018026	0.008384	0.003871	0.001809	0.000861	0.000417
$\mu = -1$	0.041620	0.019147	0.008594	0.003907	0.001815	0.000862	0.000417
$\mu = 1$	0.062057	0.022517	0.009140	0.003995	0.001828	0.000865	0.000418
$\mu = 2$	0.226127	0.039443	0.011026	0.004226	0.001859	0.000869	0.000419
$\mu = 3$	4.584433	0.904572	0.086403	0.009772	0.002299	0.000914	0.000427

ного уравнения Ито:

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t), \quad X(0) = X_0, \quad (3.67)$$

при $\mu = 1$, $\sigma = 1/2$ и $X_0 = 1$, где $W(\cdot)$ — винеровский процесс. В качестве базисной системы использовать косинусоиды (1.6), функции Уолша (1.7) и функции Хаара (1.8). Порядки усечения спектральных характеристик: $L = 4, 8, \dots, 256$.

□ Сравнивая уравнение (3.67) с уравнением (3.25), имеем

$$a^0(t) \equiv \mu, \quad b(t) \equiv 0, \quad c(t) \equiv \sigma \quad \text{и} \quad d(t) \equiv 0.$$

Решение этого уравнения — случайный процесс с математическим ожиданием и дисперсией [239]:

$$m_X(t) = X_0 e^{\mu t}, \quad D_X(t) = X_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1).$$

Отметим, что в отличие от примеров 3.1–3.4 геометрическое броуновское движение описывается линейным стохастическим дифференциальным уравнением с мультипликативным шумом. И здесь важно, что оно понимается в смысле Ито, а эквивалентное стохастическое

дифференциальное уравнение Стратоновича имеет вид

$$dX(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) X(t) dt + \sigma X(t) dW(t), \quad X(0) = X_0,$$

поэтому

$$a(t) = a^0(t) - \frac{1}{2} c^2(t) \equiv \mu - \frac{\sigma^2}{2}.$$

Применим для решения стохастического дифференциального уравнения (3.67) спектральный метод и алгоритм 3.1 (см. разд. 3.3 и п. 1 замечаний 3.1). Для этого запишем формулу (3.16), позволяющую найти спектральную характеристику \mathcal{X} геометрического броуновского движения $X(\cdot)$ в общем виде, включая параметры μ , σ и X_0 :

$$\mathcal{X} = \left(P - \left[\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right] E - \sigma V \mathcal{V} \right)^{-1} (X_0 \Delta_0),$$

где P — спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом начального значения, V — спектральная характеристика оператора умножения функций, Δ_0 — спектральная характеристика дельта-функции $\delta(\cdot)$, \mathcal{V} — спектральная характеристика (2.26) белого шума.

Таким образом, $A^0 = \mu E$, $A = (\mu - \sigma^2/2)E$, $B = O$, $C = \sigma E$, $D = \bar{O}$, где O и E — бесконечные нулевая и единичная матрицы соответственно, \bar{O} — бесконечная нулевая матрица-столбец. Для базисных систем (1.6)–(1.8) спектральные характеристики V и P приведены в разд. 1.5 и 1.7, спектральные характеристики Δ_0 — в разд. 1.1. Спектральная характеристика \mathcal{V} не зависит от выбора базисной системы (см. п. 1 замечаний 2.3).

Далее приведем результаты моделирования усеченной спектральной характеристики \mathcal{X} и траекторий геометрического броуновского движения $X(t)$, используя соотношения (3.16) и (3.20) для заданных базисных систем и порядков усечения L .

На рис. 3.9 изображены выборочные траектории геометрического броуновского движения, соответствующие функциям Уолша и порядку усечения $L = 64$.

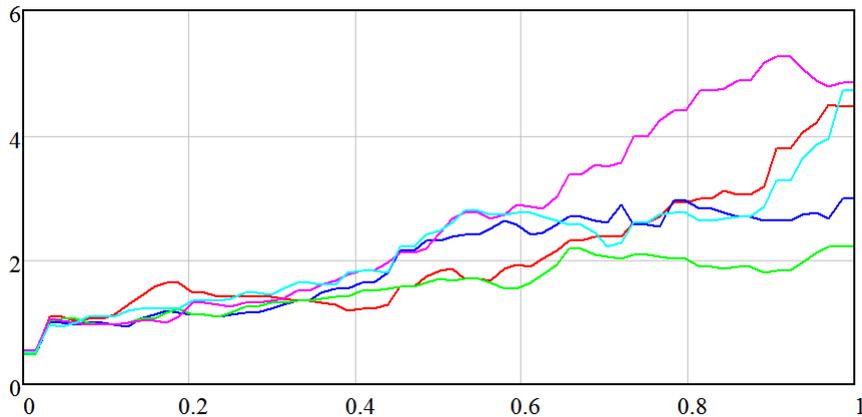


Рис. 3.9. Выборочные траектории геометрического броуновского движения

Для каждой базисной системы и каждого порядка усечения моделировались реализации $\{\mathcal{X}^k\}_{k=1}^M$ усеченной спектральной характеристики \mathcal{X} , где $M = 10^6$ — объем выборки. Далее по формулам (3.21) и (3.22) оценивались первая и вторая нестационарные спектральные плотно-

сти. Оценка \hat{D}^X спектральной характеристики дисперсии следует из формулы (2.2) на основе оценки \hat{S}^X второй нестационарной спектральной плотности: $\hat{D}^X = V\hat{S}^X$.

Формула (3.23) позволяет оценить квадрат нормы усеченной спектральной характеристики \mathcal{X} , т.е. квадрат нормы приближенного решения уравнения (3.67). Отметим, что при выборе в качестве базисной системы функций Уолша и Хаара для большей вычислительной устойчивости вместо матрицы P использовался результат обращения матрицы P^{-1} — усеченной спектральной характеристики оператора интегрирования.

По этим оценкам найдены погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{m_X}$ и $\bar{\varepsilon}_{D_X}$ математического ожидания $m_X(\cdot)$ и дисперсии $D_X(\cdot)$ при заданных значениях L , когда эти функции приближенно представляются частичными суммами вида (1.116) при неточном вычислении их коэффициентов разложения. Эти погрешности приведены в табл. 3.12 и 3.13.

Математические ожидания геометрического броуновского движения и процесса Орнштейна–Уленбека совпадают — это показательные функции (см. пример 3.4), а дисперсия геометрического броуновского движения — линейная комбинация показательных функций, поэтому здесь можно использовать результаты примеров 2.1 и 2.21 при $\alpha = X_0$. Дополнительно требуются соотношения для первой нестационарной спектральной плотности ${}^1S^X$ — спектральной характеристики математического ожидания $m_X(\cdot)$ относительно функций Уолша и Хаара. Элемент ${}^1S_0^X$ найден в примере 2.1, поскольку базисные функции систем (1.6)–(1.8) с номером $i = 0$ совпадают:

$${}^1S_0^X = X_0 \sqrt{\frac{1}{T}} \int_0^T e^{\mu t} dt = X_0 \sqrt{T} \frac{e^{\mu T} - 1}{\mu T}.$$

Для остальных элементов воспользуемся справочным материалом [210, 222]. Для функций Уолша

$${}^1S_i^X = \frac{X_0}{\mu} \sum_{j=1}^{2^{m+1}} (-1)^{j+1} \hat{W} \left(k, \frac{2j-1}{2^{m+2}} T \right) \left(e^{\frac{j\mu T}{2^{m+1}}} - e^{\frac{(j-1)\mu T}{2^{m+1}}} \right), \quad i = 2^m + k,$$

а для функций Хаара

$${}^1S_i^X = -\frac{X_0}{\mu} \sqrt{\frac{2^m}{T}} e^{\frac{k\mu T}{2^m}} \left(e^{\frac{\mu T}{2^{m+1}}} - 1 \right)^2, \quad i = 2^m + k,$$

где $i = 1, 2, 3, \dots$, $m = 0, 1, 2, \dots$ и $k = 0, 1, \dots, 2^m - 1$.

Если ввести обозначение F^μ для спектральной характеристики функции $f_\mu(t) = e^{\mu t}$ (см. разд. 1.1), то ее элементы относительно косинусоид можно взять из примера 2.1 при $\alpha = 1$, а для функций Уолша и Хаара достаточно положить $X_0 = 1$ в приведенных выше формулах:

$${}^1S^X = X_0 F^\mu \quad \text{и} \quad D^X = X_0^2 (F^{2\mu+\sigma^2} - F^{2\mu}),$$

где D^X — спектральная характеристика дисперсии $D_X(\cdot)$, полученная по свойству линейности (1.24). Эти спектральные характеристики нужны для точного вычисления погрешностей аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{m_X}$ и $\bar{\varepsilon}_{D_X}$ (см. разд. 2.8).

Квадраты норм усеченных спектральных характеристик \mathcal{X} указаны в табл. 3.14. Точное значение нормы можно найти на основе второго начального момента (см. разд. 2.2):

$$EX^2(t) = D_X(t) + m_X^2(t) = X_0^2 e^{(2\mu+\sigma^2)t},$$

и при заданных значениях μ , σ и X_0 имеем

$$\mathbb{E}\|X(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \int_0^1 \mathbb{E}X^2(t) dt = \int_0^1 e^{\frac{9}{4}t} dt = \frac{4}{9} (e^{\frac{9}{4}} - 1) \approx 3.772327.$$

Таблица 3.12. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{m_X}$, $M = 10^6$

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.118328	0.049493	0.021362	0.008173	0.003713	0.002656	0.000968
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.345420	0.217469	0.141080	0.094607	0.064706	0.045001	0.031602
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.345673	0.217518	0.140902	0.094880	0.064849	0.045008	0.031495

Таблица 3.13. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{D_X}$, $M = 10^6$

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	599.334181	0.820815	0.036732	0.008525	0.009335	0.004117	0.003392
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.343616	0.200037	0.105813	0.055266	0.030606	0.014653	0.007002
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.344245	0.199720	0.107748	0.061167	0.025722	0.013965	0.007338

Таблица 3.14. Квадраты норм усеченных спектральных характеристик \mathcal{X} , $M = 10^6$

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	473.447437	4.475107	3.846382	3.796108	3.788522	3.783686	3.777515
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	2.789409	3.220469	3.480054	3.619067	3.694041	3.733208	3.750691
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	2.786965	3.220294	3.480843	3.611186	3.694841	3.733574	3.754420

Сравним погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{m_X}$ из табл. 3.12 с погрешностями из табл. 2.1 и 3.9 при $\mu = 1$. Для косинусоид погрешность в этом примере оказывается больше, но это неудивительно для линейной системы с мультипликативным шумом. При выборе функций Уолша и Хаара точность аппроксимации снижается.

Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{D_X}$ достаточно большие при малых значениях L , что является следствием применения формулы (2.2) и влияния статистической погрешности. При точном нахождении элементов соответствующей спектральной характеристики закон убывания этих погрешностей будет таким же, как и в табл. 2.1 и 3.9.

Оценки квадратов норм усеченных спектральных характеристик \mathcal{X} из табл. 3.14 приближаются к соответствующему точному значению с ростом порядка усечения L .

Оценить методические составляющие погрешностей $\bar{\varepsilon}_{m_X}$ и $\bar{\varepsilon}_{D_X}$ для косинусоид по данным из таблиц здесь затруднительно, но для математического ожидания она должна соответствовать примеру 2.1. Для косинусоид порядок усечения $L = 4$ дает неудовлетворительный результат при аппроксимации дисперсии и оценке квадрата нормы, но из-за большей скорости сходимости точность аппроксимации быстро растет с увеличением значения L . В случае выбора функций Уолша и Хаара получаем $\bar{\varepsilon}_{m_X}, \bar{\varepsilon}_{D_X} \approx c/L^\gamma$, где $c > 0$ — некоторая константа, $\gamma = 1/2$ для математического ожидания и $\gamma = 1$ для дисперсии.

Сравнение точности аппроксимации математического ожидания и дисперсии геометрического броуновского движения, как и для других типовых случайных процессов, спектральным методом и численным методом (методом Эйлера – Маруямы) проведено в работе [158]. ■

Пример 3.6. Оценить среднеквадратическую погрешность аппроксимации первого интеграла $X_1^2(t) + X_2^2(t) = 2$ для системы стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича, описывающих осциллятор Кубо [302], на отрезке $\mathbb{T} = [0, 1]$:

$$dX_1(t) = X_2(t)dt + \sqrt{2}X_2(t) \circ dW(t), \quad X_1(0) = X_{10} = 1, \quad (3.68)$$

$$dX_2(t) = -X_1(t)dt - \sqrt{2}X_1(t) \circ dW(t), \quad X_2(0) = X_{20} = 1,$$

где $W(\cdot)$ — винеровский процесс, применяя спектральный метод и базисные системы (1.5)–(1.9). Порядки усечения спектральных характеристик: $L = 4, 8, \dots, 64$.

□ Сравнивая систему уравнений (3.67) с системой (3.30), находим

$$n = 2, \quad q = s = 1, \quad X(t) = [X_1(t) \ X_2(t)]^T,$$

$$a_{11}(t) = a_{22}(t) \equiv 0, \quad a_{12}(t) = -a_{21}(t) \equiv 1, \quad b_1(t) = b_2(t) \equiv 0,$$

$$c_{11}(t) = c_{22}(t) \equiv 0, \quad c_{12}(t) = -c_{21}(t) \equiv \sqrt{2}, \quad d_1(t) = d_2(t) \equiv 0,$$

т.е.

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C(t) = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad D(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решение заданной системы уравнений удовлетворяет соотношению

$$X_1^2(t) + X_2^2(t) = X_1^2(0) + X_2^2(0) \quad \text{P-п.н.}, \quad t > 0.$$

Это означает, что траектории случайного процесса $X(\cdot)$ с вероятностью 1 принадлежат круговому цилиндру $x_1^2 + x_2^2 = 2$ [47, 53, 242].

Применим для решения системы стохастических дифференциальных уравнений (3.68) спектральный метод и алгоритм 3.2 (см. разд. 3.3). В спектральной форме математического описания решение задается формулой (3.36), в которой нужно положить

$$Z_{11} = Z_{22} = P, \quad Z_{12} = -Z_{21} = -E - \sqrt{2}V\mathcal{V} \quad \text{и} \quad Q_1 = Q_2 = \Delta_0,$$

где P — спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом начального значения, V — спектральная характеристика оператора умножения функций, Δ_0 — спектральная характеристика дельта-функции $\delta(\cdot)$, \mathcal{V} — спектральная характеристика (2.26) белого шума. Здесь

$$A_{11} = A_{22} = O, \quad A_{12} = -A_{21} = E, \quad B_1 = B_2 = O,$$

$$C_{11} = C_{22} = O, \quad C_{12} = -C_{21} = \sqrt{2}E, \quad D_1 = D_2 = \bar{O},$$

где O и E — бесконечные нулевая и единичная матрицы соответственно, \bar{O} — бесконечная нулевая матрица-столбец. Для базисных систем (1.5)–(1.9) спектральные характеристики V и P приведены в разд. 1.5 и 1.7, спектральные характеристики Δ_0 — в разд. 1.1.

С помощью свойства (1.80) спектрального преобразования произведения функций одной переменной (здесь оно применяется для случайных процессов, см. также теорему 1.9) можно записать

$$\mathbb{S}[X_1^2(\cdot) + X_2^2(\cdot)] = \mathbb{S}[X_1^2(\cdot)] + \mathbb{S}[X_2^2(\cdot)] = (V\mathcal{X}_1)\mathcal{X}_1 + (V\mathcal{X}_2)\mathcal{X}_2.$$

Далее введем обозначение $\mathbf{1}$ для спектральной характеристики функции $f_0(t) \equiv 1$. Напомним, что эта спектральная характеристика относительно базисных систем (1.5)–(1.9) найдена

в примере 1.1. Тогда, учитывая свойство линейности (2.8) и свойство сохранения нормы (2.15), получаем

$$\mathbb{E}\|X_1^2(\cdot) + X_2^2(\cdot) - 2\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \mathbb{E}\|(V\mathcal{X}_1)\mathcal{X}_1 + (V\mathcal{X}_2)\mathcal{X}_2 - 2 \cdot \mathbf{1}\|_{\ell_2}^2 = 0.$$

Перейдем к результатам моделирования усеченных спектральных характеристик \mathcal{X}_1 и \mathcal{X}_2 и траекторий соответствующих случайных процессов $X_1(\cdot)$ и $X_2(\cdot)$, полученным с применением соотношений (3.36) и (3.39) для заданных базисных систем и порядков усечения L .

На рис. 3.10 изображены выборочные траектории векторного случайного процесса $X(\cdot)$, соответствующие полиномам Лежандра (1.5) и порядку усечения $L = 64$.

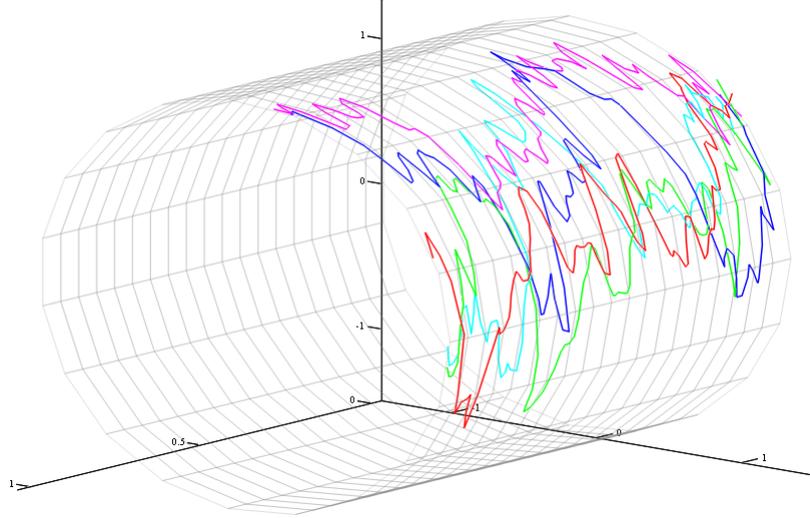


Рис. 3.10. Выборочные траектории осциллятора Кубо

Для каждой базисной системы и каждого порядка усечения моделировались реализации $\{\mathcal{X}_1^k, \mathcal{X}_2^k\}_{k=1}^M$ усеченных спектральных характеристик \mathcal{X}_1 и \mathcal{X}_2 , где $M = 10^6$ — объем выборки. За оценку среднеквадратической погрешности аппроксимации первого интеграла примем величину

$$\bar{\varepsilon}_X = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \|(V\mathcal{X}_1^k)\mathcal{X}_1^k + (V\mathcal{X}_2^k)\mathcal{X}_2^k - 2 \cdot \mathbf{1}\|^2,$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора (см. разд. 1.10), в этой формуле спектральные характеристики V и $\mathbf{1}$ также усечены. Результаты расчетов приведены в табл. 3.15. Как и в примере 3.5, при выборе в качестве базисной системы функций Уолша (1.7) и функций Хаара (1.8), а также тригонометрических функций (1.9) для большей вычислительной устойчивости вместо матрицы P использовался результат обращения матрицы P^{-1} — усеченной спектральной характеристики оператора интегрирования.

Анализ данных из табл. 3.15 позволяет сделать следующий вывод: $\bar{\varepsilon}_X \approx c/L^\gamma$, где $c > 0$ — константа, $\gamma \geq 1$ для полиномов Лежандра и косинусоид (чтобы идентифицировать это значение, требуются более точные расчеты, однако для полиномов Лежандра оно больше), $\gamma = 1$ для функций Уолша и Хаара, а также для тригонометрических функций.

Численный анализ системы стохастических дифференциальных уравнений (3.68) можно найти в работах [10, 242], включая анализ точности оценивания первых двух моментов. ■

Таблица 3.15. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_X$, $M = 10^6$

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.234822	0.069203	0.019210	0.005164	0.001329
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.514241	0.218083	0.085587	0.030859	0.010447
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.784347	0.363860	0.166653	0.077726	0.037140
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.784507	0.363777	0.166616	0.077726	0.037143
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.680733	0.242517	0.093329	0.039825	0.018395

Пример 3.7. Оценить среднеквадратическую погрешность аппроксимации первого интеграла $|X(t)|^2 = 5$ для векторного стохастического дифференциального уравнения Ито, описывающего вращательную диффузию в \mathbb{R}^3 [53, 255], при условии $t \in \mathbb{T} = [0, 1]$:

$$dX(t) = -\mu X(t)dt + \alpha(C^1 X(t)dW_1(t) + C^2 X(t)dW_2(t) + C^3 X(t)dW_3(t)),$$

$$X(0) = X_0 = [0 \ 1 \ 2]^T, \quad (3.69)$$

где

$$\mu = \alpha = 1, \quad C^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

а $W_1(\cdot), W_2(\cdot), W_3(\cdot)$ — независимые стандартные винеровские процессы, применяя спектральный метод и базисные системы (1.5)–(1.9). Порядки усечения спектральных характеристик: $L = 4, 8, \dots, 64$.

□ Результат сравнения уравнения (3.7) с уравнением (3.40):

$$n = s = 3, \quad q = 1, \quad X(t) = [X_1(t) \ X_2(t) \ X_3(t)]^T, \quad W(t) = [W_1(t) \ W_2(t) \ W_3(t)]^T,$$

$$a^0(t) = -\mu E_3, \quad b(t) = b^0(t) = \bar{O}_3, \quad c^j(t) = \alpha C^j, \quad d^j(t) = \bar{O}_3,$$

где E_3 — единичная матрица порядка 3, \bar{O}_3 — нулевая матрица-столбец размеров 3×1 ; $j = 1, 2, 3$.

Сравнение с уравнением (3.1) показывает, что

$$f(t, x) = -\mu \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \sigma(t, x) = \alpha \begin{bmatrix} 0 & -x_2 & x_1 \\ x_2 & 0 & -x_0 \\ -x_1 & x_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g(t, x) = \alpha^2 \begin{bmatrix} x_2^2 + x_3^2 & -x_1 x_2 & -x_1 x_3 \\ -x_1 x_2 & x_1^2 + x_3^2 & -x_2 x_3 \\ -x_1 x_3 & -x_2 x_3 & x_1^2 + x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Для решения $X(\cdot)$ рассматриваемого уравнения справедлива формула

$$X_1^2(t) + X_2^2(t) + X_3^2(t) = X_1^2(0) + X_2^2(0) + X_3^2(0) \quad \text{P-п.н.}, \quad t > 0,$$

т.е. траектории случайного процесса $X(\cdot)$ с вероятностью 1 принадлежат сфере $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = |X_0|^2 = 5$ [53, 255].

Отметим, что кососимметрическая матрица $\alpha^{-1}\sigma(t, x)$ определяет оператор векторного умножения в правом ортонормированном базисе (C^1, C^2, C^3 — базисные матрицы в пространстве кососимметрических операторов) [103]. Это означает, что $\sigma(t, X(t))dW(t) =$

$= \alpha X(t) \times dW(t)$ и уравнение для векторного случайного процесса $X(\cdot)$ можно представить в форме $dX(t) = -\mu X(t)dt + \alpha X(t) \times d_0W(t)$.

Для применения спектрального метода и алгоритма 3.2 (см. разд. 3.3) необходимо привести заданное стохастическое дифференциальное уравнение к форме Стратоновича, используя формулы (3.3). Таким образом,

$$dX(t) = (\alpha^2 - \mu)X(t)dt + \alpha(C^1X(t) \circ dW_1(t) + C^2X(t) \circ dW_2(t) + C^3X(t) \circ dW_3(t)),$$

или $dX(t) = (\alpha^2 - \mu)X(t)dt + \alpha X(t) \times d_{1/2}W(t)$, так как $(C^1)^2 + (C^2)^2 + (C^3)^2 = -2E_3$.

При заданных параметрах μ и α получаем, что $a(t) = O_3$ — нулевая матрица порядка 3 и $a(t, x) = \bar{O}_3$ (см. формулы (3.2) и (3.27)). Вне зависимости от выбранной базисной системы спектральные характеристики операторов умножения на элементы матричных функций $a(\cdot)$ и $c^1(\cdot), c^2(\cdot), c^3(\cdot)$ — это либо бесконечные единичные матрицы E , либо бесконечные нулевые матрицы O . Не выписывая эти спектральные характеристики отдельно, сформируем с помощью агрегирования квадратную четырехмерную матрицу Z , а также двумерные матрицы-столбцы \mathcal{X} и Q для их подстановки в формулы (3.37):

$$Z = \begin{bmatrix} P & -V\mathcal{V}_2 & V\mathcal{V}_1 \\ V\mathcal{V}_2 & P & -V\mathcal{V}_0 \\ -V\mathcal{V}_1 & V\mathcal{V}_0 & P \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{X}_2 \\ \mathcal{X}_3 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \bar{O} \\ \Delta_0 \\ 2\Delta_0 \end{bmatrix},$$

где P — спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом начального значения (см. разд. 1.7), V — спектральная характеристика оператора умножения функций (см. разд. 1.5), Δ_0 — спектральная характеристика дельта-функции $\delta(\cdot)$ (см. разд. 1.1), $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$ — спектральные характеристики белых шумов вида (2.26), \bar{O} — бесконечная нулевая матрица-столбец. Следовательно, $\mathcal{X} = Z^{-1}Q$ и искомые спектральные характеристики $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ получаются в результате декомпозиции двумерной матрицы-столбца \mathcal{X} . Операции агрегирования и декомпозиции описаны в книге [112].

Воспользуемся тем же приемом, что и при решении примера 3.6, а именно свойством (1.80) спектрального преобразования произведения функций одной переменной:

$$\mathbb{S}[X_1^2(\cdot) + X_2^2(\cdot) + X_3^2(\cdot)] = \mathbb{S}[X_1^2(\cdot)] + \mathbb{S}[X_2^2(\cdot)] + \mathbb{S}[X_3^2(\cdot)] = (V\mathcal{X}_1)\mathcal{X}_1 + (V\mathcal{X}_2)\mathcal{X}_2 + (V\mathcal{X}_3)\mathcal{X}_3,$$

тогда согласно свойству линейности (2.8) и свойству сохранения нормы (2.15) имеем

$$\mathbb{E}\|X_1^2(\cdot) + X_2^2(\cdot) + X_3^2(\cdot) - 5\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \mathbb{E}\|(V\mathcal{X}_1)\mathcal{X}_1 + (V\mathcal{X}_2)\mathcal{X}_2 + (V\mathcal{X}_3)\mathcal{X}_3 - 5 \cdot \mathbf{1}\|_{\ell_2}^2 = 0,$$

где $\mathbf{1}$ — спектральная характеристика функции $f_0(t) \equiv 1$ (см. разд. 1.1 и пример 1.1).

Соотношений, которые приведены выше, достаточно для моделирования усеченных спектральных характеристик $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ и траекторий соответствующих случайных процессов $X_1(\cdot), X_2(\cdot), X_3(\cdot)$ с применением соотношений (3.37) и (3.39) для заданных базисных систем и порядков усечения L .

На рис. 3.11 изображены выборочные траектории векторного случайного процесса $X(\cdot)$, соответствующие косинусоидам (1.6) и порядку усечения $L = 64$.

Для каждой базисной системы и каждого порядка усечения моделировались реализации $\{\mathcal{X}_1^k, \mathcal{X}_2^k, \mathcal{X}_3^k\}_{k=1}^M$ усеченных спектральных характеристик $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$, где $M = 10^6$ — объем вы-

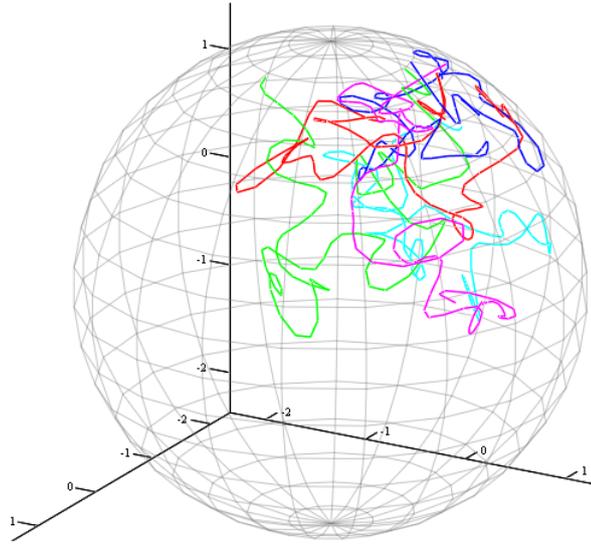


Рис. 3.11. Выборочные траектории на сфере

борки. В качестве оценки среднеквадратической погрешности аппроксимации первого интеграла использована величина

$$\bar{\varepsilon}_X = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \|(V\mathcal{X}_1^k)\mathcal{X}_1^k + (V\mathcal{X}_2^k)\mathcal{X}_2^k + (V\mathcal{X}_3^k)\mathcal{X}_3^k - 5 \cdot \mathbf{1}\|^2,$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора (см. разд. 1.10). Результаты расчетов приведены в табл. 3.16. В данном случае (см. также примеры 3.5 и 3.6, при выборе в качестве базисной системы функций Уолша (1.7) и функций Хаара (1.8), а также тригонометрических функций (1.9) использован результат обращения матрицы P^{-1} (усеченной спектральной характеристики оператора интегрирования) вместо матрицы P .

Таблица 3.16. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_X$, $M = 10^6$

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	1.101208	0.327714	0.090666	0.023826	0.006119
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	2.270871	0.986093	0.387953	0.139181	0.046608
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	4.597545	2.162598	1.006453	0.475487	0.229353
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	4.597322	2.162943	1.006559	0.475533	0.229349
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	3.450879	1.119716	0.401232	0.162357	0.072147

На качественном уровне из данных, приведенных в табл. 3.16, можно сделать такой же вывод, как и в примере 3.6: $\bar{\varepsilon}_X \approx c/L^\gamma$, где $c > 0$ — константа, $\gamma \geq 1$ для полиномов Лежандра и косинусоид (необходимы более точные расчеты для идентификации величины γ), $\gamma = 1$ для функций Уолша и Хаара, а также для тригонометрических функций. Полиномы Лежандра, очевидно, обеспечивают лучший результат. ■

Пример 3.8. Оценить траекторию процесса Орнштейна–Уленбека $X(\cdot)$, который описывается стохастическим дифференциальным уравнением (3.66) при $\mu = -1$, $\sigma = 1$ и $X_0 = 1$ на отрезке $\mathbb{T} = [0, 1]$, применяя спектральный метод, если измерительная система задается урав-

нением

$$Z(t) = \lambda X^\gamma(t) + \zeta Q(t), \quad (3.70)$$

где $\lambda = 5$, $\zeta = 0.2$, а $Q(\cdot)$ — гауссовский белый шум, соответствующий винеровскому процессу $R(\cdot)$. Случайные процессы $W(\cdot)$ и $R(\cdot)$ независимы.

Рассмотреть три варианта задания параметра γ : а) $\gamma = 1$ (линейный измеритель), б) $\gamma = 2$ (квадратичный измеритель), в) $\gamma = 3$ (кубический измеритель), и два случая для величины t , определяющей измерения Z_0^t : $t = T = 1$ и $t = T/2 = 0.5$. В качестве базисной системы использовать косинусоиды (1.6), порядок усечения спектральных характеристик: $L = 64$.

□ При решении задачи оценивания составной частью является решение задачи анализа выходных процессов и эта часть подробно описана в примере 3.4, поэтому сосредоточим основное внимание на новых обозначениях и соотношениях.

Сравнивая уравнение (3.70) с уравнением (3.44), записываем

$$\lambda(t, x) = \lambda x^\gamma, \quad \zeta(t) \equiv \zeta \quad \text{и} \quad \psi(t) \equiv \zeta^{-2}.$$

Воспользуемся для оценивания траектории случайного процесса $X(\cdot)$ спектральным методом и алгоритмом 3.3 (см. разд. 3.4). Спектральный аналог уравнения (3.70) для спектральной характеристики \mathcal{Z} измерений $Z(\cdot)$ имеет вид

$$\mathcal{Z} = \lambda(V\mathcal{X})^{\gamma-1}\mathcal{X} + \zeta\mathcal{Q}$$

согласно соотношению (3.46), где V — спектральная характеристика оператора умножения функций, \mathcal{Q} — спектральная характеристика (2.26) белого шума. Напомним (см. пример 3.4), что в приведенном уравнении \mathcal{X} — это спектральная характеристика процесса Орнштейна–Уленбека $X(\cdot)$:

$$\mathcal{X} = (P - \mu E)^{-1}(X_0 \Delta_0 + \sigma \mathcal{V}).$$

Следовательно, $\Lambda_\gamma = \lambda E$. Далее $\Lambda_{\gamma-1} = \Lambda_{\gamma-2} = O$ при $\gamma = 3$ и $\Lambda_{\gamma-1} = O$ при $\gamma = 2$, $\tilde{\Lambda}_0 = \bar{O}$, $\Xi = \zeta E$ и $\Psi = \zeta^{-2} E$, где O и E — бесконечные нулевая и единичная матрицы соответственно, \bar{O} — бесконечная нулевая матрица-столбец. Кроме того,

$$\Lambda(\mathcal{X}) = \lambda(V\mathcal{X})^{\gamma-1}\mathcal{X}.$$

Спектральная характеристика V относительно косинусоид описана в разд. 1.5, а спектральная характеристика \mathcal{Q} , как и спектральная характеристика \mathcal{V} , не зависит от выбора базисной системы (см. п. 1 замечаний 2.3).

Наконец, приведем выражения для весовых коэффициентов. При $t = T = 1$ согласно формуле (3.48) получаем

$$\omega(T) = \exp\left\{\frac{\lambda}{\zeta^2} \mathcal{X}^T (V\mathcal{X})^{\gamma-1} \left(\mathcal{Z} - \frac{\lambda}{2} (V\mathcal{X})^{\gamma-1} \mathcal{X}\right)\right\},$$

а при $t < T$, в том числе и при $t = T/2 = 0.5$, применяем формулу (3.51):

$$\omega(t) = \exp\left\{\frac{\lambda}{\zeta^2} \mathcal{X}^T (V\mathcal{X})^{\gamma-1} \mathbf{1}_t^* \left(\mathcal{Z} - \frac{\lambda}{2} (V\mathcal{X})^{\gamma-1} \mathcal{X}\right)\right\},$$

где $\mathbf{1}_t^*$ — спектральная характеристика оператора умножения на единичную ступенчатую функцию $f^*(\tau) = 1(t - \tau)$ как функцию переменной τ , т.е. спектральная характеристика оператора умножения на индикатор $\chi_{[t_0, t]}(\cdot)$ множества $[t_0, t]$.

Найдем спектральную характеристику $\mathbf{1}_t^*$ относительно косинусоид (1.6). Ее элементы задаются формулой (1.72):

$$(\mathbf{1}_t^*)_{ij} = (q(i, \cdot), \chi_{[t_0, t]}(\cdot)q(j, \cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{t_0}^t \hat{C}(i, t) \hat{C}(j, t) dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

Воспользуемся тождествами, которые позволяют представить произведение пары базисных функций $\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ в более удобном для дальнейших действий виде [163]:

$$\hat{C}(i, t) \hat{C}(j, t) = \frac{\sqrt{1 + \delta_{ij}(i > 0)} \hat{C}(j - i, t) + (i > 0) \hat{C}(i + j, t)}{\sqrt{(1 + (i > 0))T}},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера (1.4), $(i > 0) = 0$ при $i = 0$ и $(i > 0) = 1$ при $i > 0$.

Тогда при условии $j \geq i$ получаем

$$(\mathbf{1}_t^*)_{ij} = \frac{\sqrt{1 + \delta_{ij}(i > 0)} (\tilde{\mathbf{1}}_t^*)_{j-i} + (i > 0) (\tilde{\mathbf{1}}_t^*)_{i+j}}{\sqrt{(1 + (i > 0))T}},$$

где $(\tilde{\mathbf{1}}_t^*)_i$ — элементы спектральной характеристики $\tilde{\mathbf{1}}_t^*$ функции $\chi_{[t_0, t]}(\cdot)$, выражение для которых найдено в примере 1.4, а именно

$$(\tilde{\mathbf{1}}_t^*)_i = \begin{cases} t, & i = 0, \\ \frac{\sqrt{T}}{i\pi} \sin \frac{i\pi t}{T}, & i = 1, 2, \dots \end{cases}$$

При $i > j$ используется свойство симметричности (1.74): $(\mathbf{1}_t^*)_{ij} = (\mathbf{1}_t^*)_{ji}$.

Формула для весового коэффициента $\omega(t)$ применима и для $t = T$. Действительно, найдем элементы $(\mathbf{1}_T^*)_{ij}$. При $i < j$

$$(\mathbf{1}_T^*)_{ij} = \frac{(\tilde{\mathbf{1}}_T^*)_{j-i} + (i > 0) (\tilde{\mathbf{1}}_T^*)_{i+j}}{\sqrt{(1 + (i > 0))T}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1 + (i > 0))}} \left(\frac{\sin(j-i)\pi}{(j-i)\pi} + (i > 0) \frac{\sin(i+j)\pi}{(i+j)\pi} \right) = 0,$$

а при $i = j$

$$(\mathbf{1}_T^*)_{ij} = \frac{\sqrt{1 + (i > 0)} (\tilde{\mathbf{1}}_T^*)_0 + (i > 0) (\tilde{\mathbf{1}}_T^*)_{2i}}{\sqrt{(1 + (i > 0))T}} = \frac{\sqrt{(1 + (i > 0))T} + (i > 0) \sqrt{2T} (\sin 2i\pi) / (2i\pi)}{\sqrt{(1 + (i > 0))T}} = 1,$$

т.е. $(\mathbf{1}_T^*)_{ij} = \delta_{ij}$ и $\mathbf{1}_T^* = E$.

Для заданного порядка усечения L и значений $\mu, \sigma, X_0, \lambda, \gamma$ и ζ смоделирована реализация спектральной характеристики \mathcal{X} (она соответствует оцениваемой траектории), по ней получена реализация спектральной характеристики \mathcal{Z} (она соответствует измерениям). Затем моделировались реализации $\{\mathcal{X}^k\}_{k=1}^M$ усеченной спектральной характеристики \mathcal{X} , а также весовые коэффициенты ω^k , соответствующие реализациям \mathcal{X}^k и известной спектральной характеристике \mathcal{Z} , $k = 1, 2, \dots, M$, где $M = 10^4$ — объем выборки.

Далее с помощью формул (3.49) и (3.50) получены оценки траектории случайного процесса $X(\cdot)$. Описанные действия проведены для трех заданных вариантов параметра γ и двух случаев: $t = 1$ и $t = 0.5$.

Результаты моделирования и оценивания представлены в виде графиков. Оцениваемая траектория случайного процесса $X(\cdot)$ (сплошная линия) и ее оценки для разных значений γ ($\gamma = 1$ — линия из точек, $\gamma = 2$ — пунктирная линия, $\gamma = 3$ — штрихпунктирная линия) и $t = 1$ изображены на рис. 3.12, а при $t = 0.5$ — на рис. 3.13. Соответствующие измерения показаны на рис. 3.14.

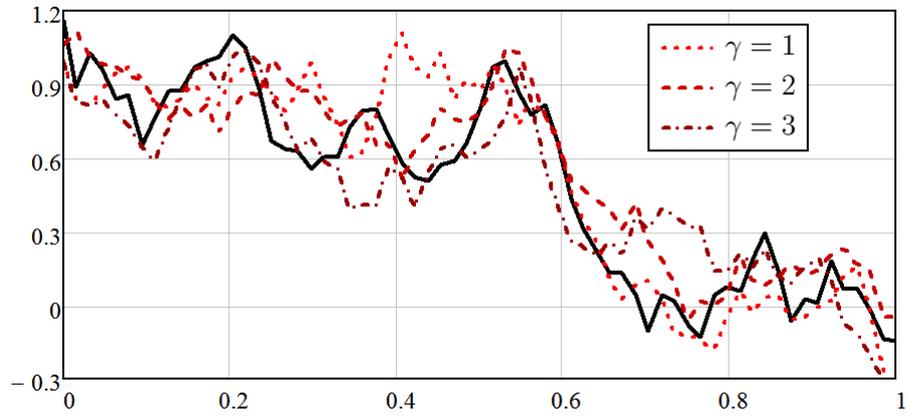


Рис. 3.12. Траектория процесса Орнштейна–Уленбека и ее оценки при $t = 1$, соответствующие значениям $\gamma = 1, 2, 3$

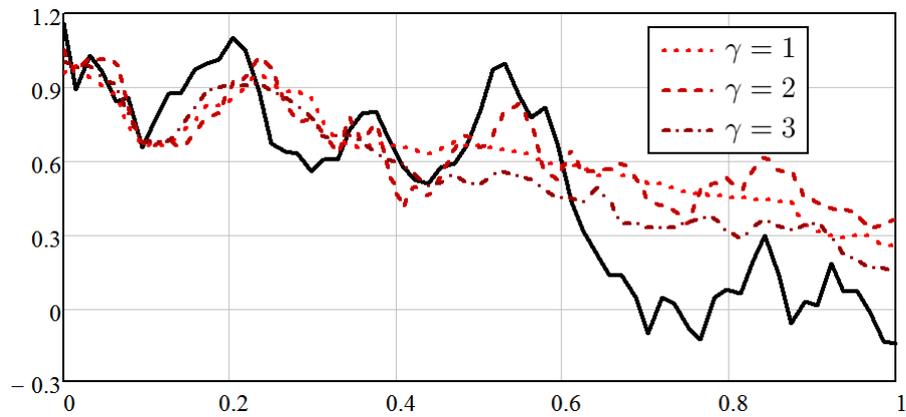


Рис. 3.13. Траектория процесса Орнштейна–Уленбека и ее оценки при $t = 0.5$, соответствующие значениям $\gamma = 1, 2, 3$

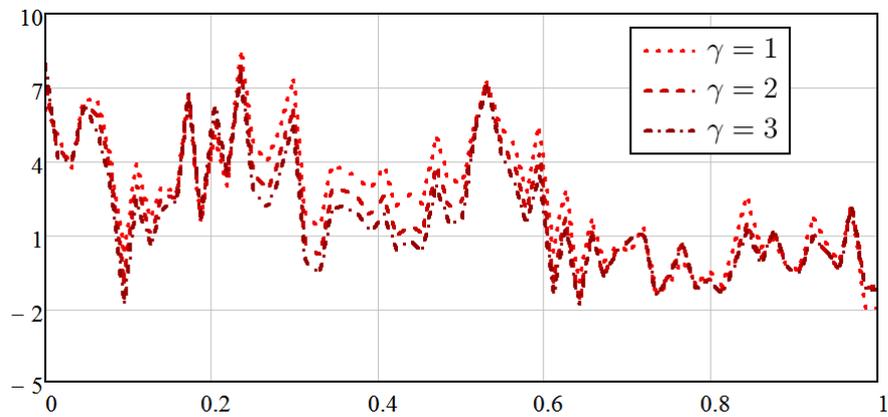


Рис. 3.14. Измерения, соответствующие значениям $\gamma = 1, 2, 3$

На рис. 3.12 и 3.13 хорошо видна разница в оценках при $t = 1$ и $t = 0.5$ для промежутка $[0.5, 1] \ni \theta$. В случае $t = 1$ это результат решения задачи сглаживания (фильтрации для $\theta = 1$), а при $t = 0.5$ — задачи прогнозирования (фильтрации для $\theta = 0.5$).

Дополнительно можно сравнить представленные здесь графики с результатом примера 2.21, в котором решена задача аппроксимации математического ожидания процесса Орнштейна–Уленбека. Это математическое ожидание — решение задачи прогнозирования в отсутствие

измерений, т.е. при $t = 0$. ■

3.6. Моделирование турбулентного ветра

Пример 3.9. Оценить плотность вероятности скорости ветра, который моделируется с помощью формирующего фильтра Драйдена:

$$\dot{X}(t) = -\nu X(t) + \sigma V(t), \quad X(0) = X_0, \quad \nu = \frac{V_t}{L_t}, \quad \sigma = \sqrt{2\nu}\sigma_0, \quad (3.71)$$

где V_t — продольная скорость полета, L_t — масштаб турбулентности, σ_0 — среднеквадратическое отклонение скорости ветра, $V(\cdot)$ — стандартный гауссовский белый шум, $t \in \mathbb{T} = [0, T]$.

Значения параметров: $T = 100$ с, $V_t = 60$ м/с, $L_t = 1000$ м, $\sigma_0 = 1.5$ м/с.

Рассмотреть два варианта: а) X_0 — случайная величина, имеющая нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией σ_0^2 ; б) X_0 — случайная величина, имеющая равномерное распределение на отрезке $[-\sqrt{3}\sigma_0, \sqrt{3}\sigma_0]$.

□ Формирующий фильтр Драйдена применяется моделирования продольного турбулентного ветра [44, 266]. В простейшем случае он задается стохастическим дифференциальным уравнением Ланжевена (3.71), т.е. скорость ветра $X(\cdot)$ — это процесс Орнштейна–Уленбека с параметрами $\mu = -\nu$ и σ (см. примеры случайных процессов в разд. 2.1 и пример 3.4).

Примем за основу решение примера 3.4, в котором спектральный метод использовался для оценки погрешностей аппроксимации математического ожидания, корреляционной функции и среднеквадратической погрешности аппроксимации процесса Орнштейна–Уленбека с помощью алгоритма 3.1 (см. разд. 3.3). Тогда согласно формуле (3.18) спектральная характеристика \mathcal{X} случайного процесса $X(\cdot)$ выражается следующим образом:

$$\mathcal{X} = (P + \nu E)^{-1}(X_0 \Delta_0 + \sigma \mathcal{V}),$$

где P — спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом начального значения, E — бесконечная единичная матрица, Δ_0 — спектральная характеристика дельта-функции $\delta(\cdot)$, \mathcal{V} — спектральная характеристика (2.26) белого шума.

Для заданных вариантов начальное значение X_0 — это случайная величина, имеющая нулевое математическое ожидание и дисперсию σ_0^2 , причем такое значение дисперсии соответствует стационарному решению, поэтому при подобном выборе начального распределения скорость ветра имеет постоянную дисперсию σ_0^2 [155].

Выберем в качестве базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$ полиномы Лежандра (1.5), а также порядок усечения спектральных характеристик $L = 64$. Соответствующие спектральные характеристики Δ_0 и P приведены в разд. 1.1 и 1.7.

Для моделирования скорости ветра достаточно применить соотношения (3.17) и (3.20) при заданном порядке усечения L для реализаций спектральной характеристики \mathcal{V} и случайной величины X_0 . Пример траектории случайного процесса $X(\cdot)$ приведен на рис. 3.15.

Чтобы оценить плотность вероятности скорости ветра, необходимо сформировать ансамбль траекторий $X^k(\cdot)$ случайного процесса $X(\cdot)$ при условии $k = 1, 2, \dots, M$. Для этого нужно за-

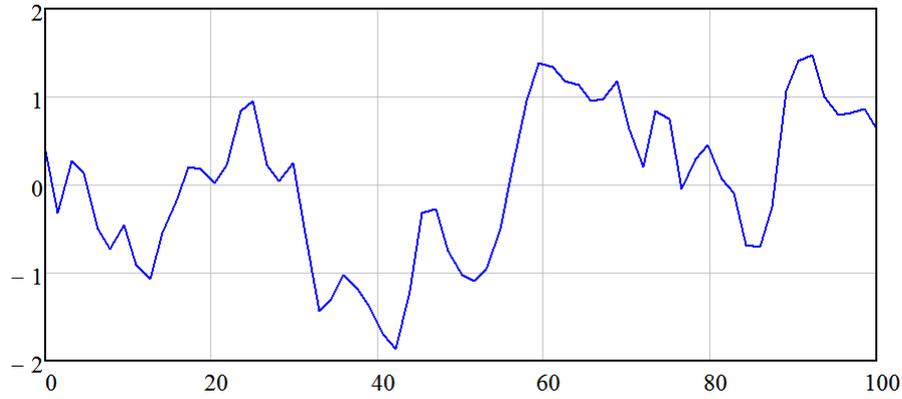


Рис. 3.15. Пример траектории скорости ветра для формирующего фильтра Драйдена

дать количество траекторий M (объем выборки) и найти реализации \mathcal{X}^k усеченной спектральной характеристики \mathcal{X} , полагая

$$X^k(t) \approx \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{X}_i^k q(i, t).$$

Далее применяется формула для ядерной оценки плотности вероятности [155, 356]:

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{Mh} \sum_{k=1}^M p\left(\frac{x - X^k(t)}{h}\right),$$

в которой $p(\cdot)$ — ядро, т.е. функция, обладающая свойствами плотности вероятности (неотрицательность, условие нормировки), $h > 0$ — параметр сглаживания. Например, если $p(\cdot)$ — плотность вероятности случайной величины, имеющей стандартное нормальное распределение, то используется полигауссовская аппроксимация.

На рис. 3.16 и 3.17 показаны оценки плотности вероятности скорости ветра для двух вариантов задания случайной величины X_0 , объем выборки $M = 10^6$ и параметр сглаживания $h = 0.25$. На этих рисунках приняты следующие обозначения: Δ соответствует моменту времени $t = 5$ с, а \square — моменту времени $t = T = 100$ с.

Для первого варианта плотность вероятности является стационарной, для второго она эволюционирует со временем. Отметим также, что есть возможность оценить плотность вероятности другим способом, применяя спектральный метод. Для этого достаточно найти решение уравнения обобщенной характеристической функции — спектрального аналога уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова [107, 110, 112]. ■

Пример 3.10. Оценить плотность вероятности скорости ветра, который моделируется с помощью модифицированного формирующего фильтра Драйдена:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= X_2(t), & X_1(0) &= X_{10}, \\ \dot{X}_2(t) &= -\lambda\nu X_1(t) - (\lambda + \nu)X_2(t) + \sigma^*V(t), & X_2(0) &= X_{20}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

где используются обозначения примера 3.9, а также новые обозначения: $\lambda = 10\nu$, $\sigma^* = \sqrt{2\lambda\nu(\lambda + \nu)}\sigma_0$.

Значения параметров такие же, как и в примере 3.9, а X_{10} и X_{20} — случайные величины, имеющие нормальное распределение с нулевым средним и дисперсиями σ_0^2 и $\lambda\nu\sigma_0^2$ соответственно.

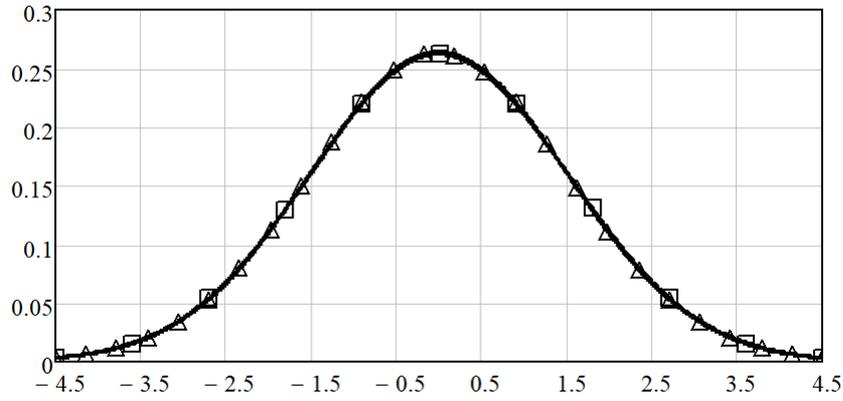


Рис. 3.16. Оценки плотности вероятности скорости ветра при нормальном начальном распределении (в моменты времени $t = 5$ с и $t = T = 100$ с)

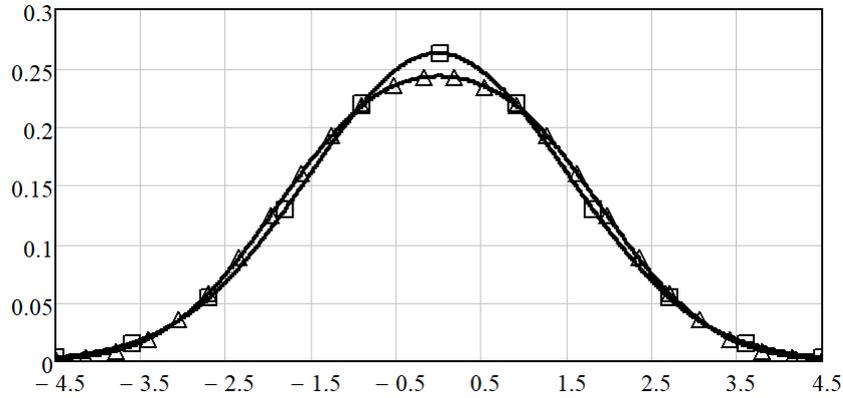


Рис. 3.17. Оценки плотности вероятности скорости ветра при равномерном начальном распределении (в моменты времени $t = 5$ с и $t = T = 100$ с)

□ В этом примере рассматривается модифицированный вариант формирующего фильтра Драйдена [82], заданный системой линейных стохастических дифференциальных уравнений Ланжевена (3.72). Здесь траектории скорости ветра $X_1(\cdot)$ получаются сглаженными в сравнении с траекториями, которые формирует фильтр Драйдена из примера 3.9. При этом сохраняется значение σ_0^2 для дисперсии скорости ветра в установившемся режиме и при заданном законе распределения начальных значений X_{10} и X_{20} дисперсия скорости ветра постоянна и равна σ_0^2 [155].

Сравнивая систему уравнений (3.72) с системой (3.30), получаем

$$\begin{aligned} n = 2, \quad q = s = 1, \quad X(t) &= [X_1(t) \ X_2(t)]^T, \\ a_{11}(t) &\equiv 0, \quad a_{12}(t) \equiv 1, \quad a_{21}(t) \equiv -\lambda\nu, \quad a_{22}(t) \equiv -(\lambda + \nu), \\ b_1(t) = b_2(t) &\equiv 0, \quad c_{11}(t) = c_{12}(t) = c_{21}(t) = c_{22}(t) \equiv 0, \quad d_1(t) \equiv 0, \quad d_2(t) \equiv \sigma^*, \end{aligned}$$

т.е.

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda\nu & -(\lambda + \nu) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma^* \end{bmatrix}.$$

Для решения системы стохастических дифференциальных уравнений (3.72) воспользуемся спектральным методом, применив алгоритм 3.2 (см. разд. 3.3). В спектральной форме мате-

матического описания это решение задается формулой (3.36), в которой нужно положить

$$Z_{11} = P, \quad Z_{12} = -E, \quad Z_{21} = \lambda\nu E, \quad Z_{22} = P + (\lambda + \nu)E, \quad Q_1 = x_{10}\Delta_0, \quad Q_2 = x_{20}\Delta_0 + \sigma^*\mathcal{V},$$

где P — спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом начального значения, Δ_0 — спектральная характеристика дельта-функции $\delta(\cdot)$, \mathcal{V} — спектральная характеристика (2.26) белого шума. Таким образом,

$$\begin{aligned} A_{11} &= O, & A_{12} &= E, & A_{21} &= -\lambda\nu E, & A_{22} &= -(\lambda + \nu)E, \\ B_1 &= B_2 = O, & C_{11} &= C_{12} = -C_{21} = C_{22} = O, & \tilde{D}_1 &= \bar{O}, & \tilde{D}_2 &= \sigma^*E, \end{aligned}$$

где O и E — бесконечные нулевая и единичная матрицы соответственно, \bar{O} — бесконечная нулевая матрица-столбец.

В явном виде спектральная характеристика \mathcal{X}_1 случайного процесса $X_1(\cdot)$ представляется выражением

$$\mathcal{X}_1 = (P^2 + (\lambda + \nu)P + \lambda\nu E)^{-1} [x_{10}(P + (\lambda + \nu)E)\Delta_0 + x_{20}\Delta_0 + \sigma^*\mathcal{V}]. \quad (3.73)$$

Выбор базисной системы и порядок усечения спектральных характеристик оставим неизменными по сравнению с примером 3.9, т.е. используемая базисная система — это полиномы Лежандра (1.5) и порядок усечения $L = 64$. Спектральные характеристики Δ_0 и P приведены в разд. 1.1 и 1.7 соответственно. И для моделирования скорости ветра достаточно применить соотношение (3.73), а затем формулу (3.39) при заданном порядке усечения L для реализаций спектральной характеристики \mathcal{V} , а также случайных величин X_{10} и X_{20} .

Пример траектории случайного процесса $X_1(\cdot)$ приведен на рис. 3.18. Дополнительно на нем пунктиром показана траектория из примера 3.9 для сравнения (они получены по одной реализации спектральной характеристики \mathcal{V}).

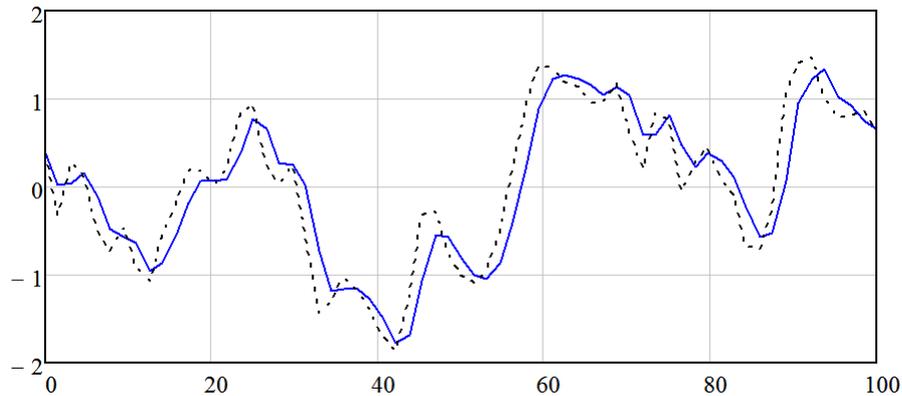


Рис. 3.18. Пример траектории скорости ветра для модифицированного формирующего фильтра Драйдена

Для плотности вероятности скорости ветра применим ядерную оценку (см. пример 3.9):

$$\varphi(t, x_1) = \frac{1}{Mh} \sum_{k=1}^M p\left(\frac{x_1 - X_1^k(t)}{h}\right), \quad X_1^k(t) \approx \sum_{i=0}^{L-1} (\mathcal{X}_1^k)_i q(i, t).$$

Здесь каждая траектория $X_1^k(\cdot)$ случайного процесса $X_1(\cdot)$ приближенно представляется как результат обратного спектрального преобразования реализации \mathcal{X}_1^k усеченной спектральной характеристики \mathcal{X}_1 , $k = 1, 2, \dots, M$, M — количество траекторий (объем выборки).

Рис. 3.19 демонстрирует оценку плотности вероятности скорости ветра при объеме выборки $M = 10^6$ и параметре сглаживания $h = 0.25$ в момент времени $t = T/2 = 50$ с. Дополнительно она отмечена на графике знаком \circ .

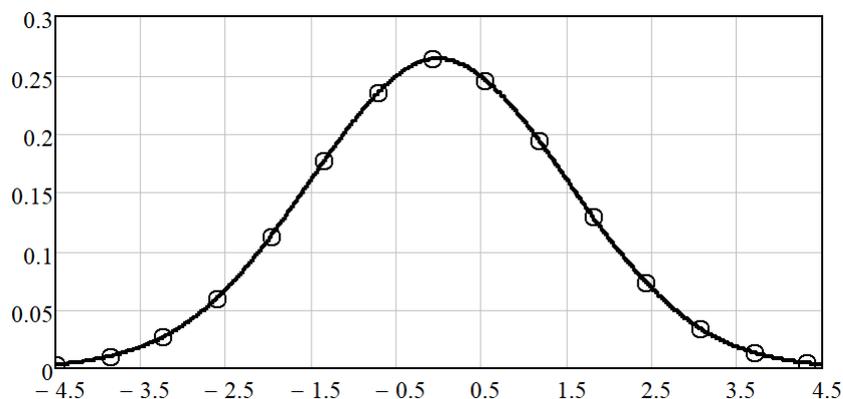


Рис. 3.19. Оценка плотности вероятности скорости ветра (в момент времени $t = 50$ с)

Искомая плотность вероятности также может быть получена спектральным методом как решение уравнения обобщенной характеристической функции, т.е. спектрального аналога уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова [107, 110, 112]. ■

Выводы по главе 3

1. Спектральный метод анализа выходных процессов и статистического моделирования одномерных и многомерных линейных непрерывных стохастических систем, которые могут быть заданы линейными стохастическими дифференциальными уравнениями Стратоновича и Ито (а в общем случае уравнениями с θ -дифференциалом).
2. Спектральный метод оценивания состояний (фильтрация, сглаживание и прогнозирование) одномерных и многомерных линейных непрерывных стохастических систем, которые могут быть заданы линейными стохастическими дифференциальными уравнениями Стратоновича и Ито (а в общем случае уравнениями с θ -дифференциалом) с полиномиальными измерителями.
3. Получены спектральные представления некоторых случайных процессов: броуновского моста, процесса Орнштейна – Уленбека, геометрического броуновского движения, осциллятора Кубо и вращательной диффузии. Они использовались для апробации спектрального метода статистического моделирования и оценивания состояний, а также для моделирования турбулентного ветра на основе формирующего фильтра Драйдена и его модификации.

Основные результаты опубликованы в работах [147, 148, 155, 156, 158, 163, 242, 341, 343, 350].

ГЛАВА 4

СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

4.1. Базисные системы и спектральные характеристики функций многих переменных

Рассмотрим представление функции многих переменных в виде ряда по функциям базисной системы как обобщение материала, изложенного в разд. 1.1 и 1.2.

Пусть $L_2(\mathbb{T}^k)$ — гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций многих переменных $f(\cdot): \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}$, где $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} \times \dots \times \mathbb{T}$ и $\mathbb{T} = [t_0, T]$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{T}^k} f^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k < \infty.$$

Норма в пространстве $L_2(\mathbb{T}^k)$ определяется выражением

$$\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \left\{ \int_{\mathbb{T}^k} f^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (4.1)$$

а скалярное произведение задается формулой

$$(f(\cdot), g(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \int_{\mathbb{T}^k} f(t_1, \dots, t_k) g(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k, \quad (4.2)$$

где $f(\cdot), g(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ [21, 69].

Функции $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ называются ортогональными при условии, что их скалярное произведение равно нулю. Система попарно ортогональных функций $\{Q(i_1, \dots, i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty}$, принадлежащих пространству $L_2(\mathbb{T}^k)$, называется ортонормированной на множестве \mathbb{T}^k , если справедливо равенство

$$(Q(i_1, \dots, i_k, \cdot), Q(j_1, \dots, j_k, \cdot))_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \delta_{i_1 j_1} \dots \delta_{i_k j_k} = \begin{cases} 1, & i_1 = j_1, \dots, i_k = j_k, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\delta_{i_1 j_1}, \dots, \delta_{i_k j_k}$ — символы Кронекера (1.4).

Полная ортонормированная система функций называется базисом пространства $L_2(\mathbb{T}^k)$, или базисной системой.

Как и в разд. 1.2, сосредоточим внимание на базисных системах, для которых $Q(i_1, \dots, i_k, t_1, \dots, t_k) = q(i_1, t_1) \dots q(i_k, t_k)$, где $i_1, \dots, i_k = 0, 1, 2, \dots$ и функции $q(i, \cdot)$ образуют базисную систему $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$ (см. разд. 1.1). Под записью $f(\cdot) = f_1(\cdot) \otimes \dots \otimes f_k(\cdot)$ будем понимать функцию, значение которой в точке $(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{T}^k$ равно $f_1(t_1) \dots f_k(t_k)$. В частности, $Q(i_1, \dots, i_k, \cdot) = q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot)$.

Примеры базисных систем, ортонормированных на гиперкубе $\mathbb{T}^k = [0, T] \times \dots \times [0, T]$, т.е. при условии $t_0 = 0$, можно построить на основе базисных систем из разд. 1.1, т.е. на основе полиномов Лежандра (1.5), косинусоид (1.6), функций Уолша (1.7), функций Хаара (1.8) и тригонометрических функций (1.9):

$$\{\hat{P}(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes \hat{P}(i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty, \quad \{\hat{C}(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes \hat{C}(i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty, \\ \{\hat{W}(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes \hat{W}(i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty, \quad \{\hat{X}(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes \hat{X}(i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty, \quad \{\hat{F}(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes \hat{F}(i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty.$$

Задача представления функции многих переменных в виде ряда формулируется и решается как для произвольной базисной системы, а именно $\{Q(i_1, \dots, i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty$, так и для частного случая базисной системы вида $\{q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty$.

Теорема 4.1 (см. [21, 69]). Пусть система функций $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ образует базис пространства $L_2(\mathbb{T})$. Тогда любая функция $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ представляется в виде ряда по функциям базисной системы $\{q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty$:

$$f(\cdot) = \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty F_{i_1 \dots i_k} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot), \quad (4.3)$$

где

$$F_{i_1 \dots i_k} = (q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot), f(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \\ = \int_{\mathbb{T}^k} q(i_1, t_1) \dots q(i_k, t_k) f(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k, \quad i_1, \dots, i_k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

Числа $F_{i_1 \dots i_k}$ называются коэффициентами разложения функции $f(\cdot)$.

Следовательно, решение задачи представления функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ в виде ряда по функциям выбранной базисной системы состоит в определении коэффициентов разложения $F_{i_1 \dots i_k}$ и использовании (4.3). Так как коэффициенты разложения (4.4) однозначно задают функцию $f(\cdot)$, их упорядоченную совокупность можно рассматривать как характеристику функции $f(\cdot)$. Равенство (4.3) выполняется при почти всех $(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{T}^k$ и понимается аналогично соотношению (1.12). Ряд в правой части (4.3) сходится абсолютно и не зависит от порядка суммирования, т.е. является суммируемым [237].

Введем понятие спектральной характеристики функции многих переменных. Бесконечная k -мерная матрица-столбец $F = (F_{i_1 \dots i_k})$, элементы которой — это коэффициенты разложения (4.4) функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ в ряд по функциям базисной системы $\{q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty$ пространства $L_2(\mathbb{T}^k)$, называется спектральной характеристикой функции $f(\cdot)$. Как и для функций двух переменных (см. разд. 1.2), для краткости будем говорить, что спектральная характеристика определена относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$.

Отображение, ставящее в соответствие функции $f(\cdot)$ ее спектральную характеристику F , называется спектральным преобразованием функции $f(\cdot)$ и обозначается \mathbb{S} : $\mathbb{S}[f(\cdot)] = F$, где элементы $F_{i_1 \dots i_k}$ бесконечной матрицы F определяются формулой (4.4).

Обратный переход от спектральной характеристики к соответствующей функции многих

переменных осуществляется по формуле обращения:

$$f(\cdot) = \mathbb{S}^{-1}[F] = \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} F_{i_1 \dots i_k} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot). \quad (4.5)$$

Теорема 4.2. Пусть функция $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ удовлетворяет условию $f(\cdot) = f_1(\cdot) \otimes \dots \otimes f_k(\cdot)$, F — спектральная характеристика функции $f(\cdot)$, определенная относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$, а F_1, \dots, F_k — спектральные характеристики функций $f_1(\cdot), \dots, f_k(\cdot)$ соответственно, определенные относительно той же базисной системы. Тогда

$$F = F_1 \otimes \dots \otimes F_k, \quad (4.6)$$

где \otimes — тензорное (прямое) произведение.

Доказательство. Запишем формулу (4.4) для вычисления элементов спектральной характеристики F функции $f(\cdot)$:

$$\begin{aligned} F_{i_1 \dots i_k} &= (q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot), f(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \int_{\mathbb{T}^k} q(i_1, t_1) \dots q(i_k, t_k) f(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k = \\ &= \int_{\mathbb{T}} q(i_1, t) f_1(t) dt \dots \int_{\mathbb{T}} q(i_k, t) f_k(t) dt = (F_1)_{i_1} \dots (F_k)_{i_k}, \quad i_1, \dots, i_k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где $(F_1)_{i_1}, \dots, (F_k)_{i_k}$ — элементы спектральных характеристик F_1, \dots, F_k функций $f_1(\cdot), \dots, f_k(\cdot)$ соответственно согласно определению спектральных характеристик функций одной переменной (см. разд. 1.1 и формулу (1.11)).

Отсюда следует, что $F = F_1 \otimes \dots \otimes F_k$, т.е. соотношение (4.6). ◀

З а м е ч а н и я 4.1.

1. Спектральные характеристики функций одной и двух переменных представляются бесконечной матрицей-столбцом и бесконечной матрицей соответственно (см. разд. 1.1 и 1.2). Кроме того, в разд. 1.5 определена спектральная характеристика оператора умножения функций, которая представляется бесконечной трехмерной (пространственной) матрицей. Спектральные характеристики функций многих переменных, следуя [112, 223, 355], представляются в виде бесконечной k -мерной матрицы-столбца F , т.е. индексы i_1, \dots, i_k у ее элементов $F_{i_1 \dots i_k}$ полагаются строчными (указывают на номер строки в соответствующем сечении).

Разделение множества индексов на строчные и столбцовые задает структуру многомерной матрицы, в частности можно выделить гиперстолбцовые, гиперстрочные и гиперквадратные матрицы, что позволяет достаточно легко представлять их с помощью табличной (блочнo-иерархической) формы [112]. Например, при $k = 2$

$$F = \left[\left[F_{00} \ F_{01} \ F_{02} \ \dots \right] \left[F_{10} \ F_{11} \ F_{12} \ \dots \right] \left[F_{20} \ F_{21} \ F_{22} \ \dots \right] \ \dots \right]^T$$

и при $k = 3$

$$\begin{aligned} F &= \left[\left[\left[F_{000} \ F_{001} \ F_{002} \ \dots \right] \left[F_{010} \ F_{011} \ F_{012} \ \dots \right] \left[F_{020} \ F_{021} \ F_{022} \ \dots \right] \ \dots \right] \right. \\ &\quad \left[\left[F_{100} \ F_{101} \ F_{102} \ \dots \right] \left[F_{110} \ F_{111} \ F_{112} \ \dots \right] \left[F_{120} \ F_{121} \ F_{122} \ \dots \right] \ \dots \right] \\ &\quad \left. \left[\left[F_{200} \ F_{201} \ F_{202} \ \dots \right] \left[F_{210} \ F_{211} \ F_{212} \ \dots \right] \left[F_{220} \ F_{221} \ F_{222} \ \dots \right] \ \dots \right] \ \dots \right]^T, \end{aligned}$$

где операция транспонирования нужна для перехода от бесконечной k -мерной матрицы-строки (гиперстрочной матрицы) к бесконечной k -мерной матрице-столбцу (гиперстолбцовой матри-

це). Представление в виде бесконечной k -мерной матрицы-строки требуется исключительно для компактной записи.

Структура многомерной матрицы имеет существенное значение при определении различных алгебраических операций. Более подробно это изложено в книге [112].

2. Двумерная спектральная характеристика функции двух переменных, введенная в разд. 1.2, — это частный случай определенной выше спектральной характеристики функции $f(\cdot)$ при $k = 2$ с поправкой на то, что двумерные спектральные характеристики представлялись бесконечными матрицами, однако упорядоченную совокупность коэффициентов разложения (1.42) функции двух переменных можно представлять в виде двумерной матрицы-столбца, т.е. приведенные ниже матрицы в этом смысле эквивалентны:

$$\begin{bmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & \dots \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & \dots \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \left[[F_{00} \ F_{01} \ F_{02} \ \dots] [F_{10} \ F_{11} \ F_{12} \ \dots] [F_{20} \ F_{21} \ F_{22} \ \dots] \ \dots \right]^T.$$

Ее можно называть многомерной спектральной характеристикой, однако это представляется избыточным. Если \mathbb{T} — нестационарный отрезок (см. п. 1 замечаний 1.2), то спектральную характеристику функции $f(\cdot)$ следует называть нестационарной спектральной характеристикой [112].

3. Разумеется, спектральные характеристики функции $f(\cdot)$ могут быть определены относительно различных базисных систем и их обозначение при необходимости может быть включено в обозначение спектральной характеристики: $F_{q \dots q}$. Аналогичное замечание справедливо и для обозначений прямого и обратного спектральных преобразований (см. п. 2 замечаний 1.2 и 1.6): $\mathbb{S}_{q \dots q}$ и $\mathbb{S}_{q \dots q}^{-1}$, т.е. $\mathbb{S}_{q \dots q}[f(\cdot)] = F_{q \dots q}$, $f(\cdot) = \mathbb{S}_{q \dots q}^{-1}[F_{q \dots q}]$.

Множество всех спектральных характеристик F функций $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ образует линейное гильбертово пространство ℓ_2^k — пространство бесконечных k -мерных матриц-столбцов, удовлетворяющих условию $\sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} F_{i_1 \dots i_k}^2 < \infty$, с нормой

$$\|F\|_{\ell_2^k} = \left\{ \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} F_{i_1 \dots i_k}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.7)$$

и скалярным произведением

$$(F, G)_{\ell_2^k} = \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} F_{i_1 \dots i_k} G_{i_1 \dots i_k}, \quad (4.8)$$

где $F, G \in \ell_2^k$.

Спектральное преобразование \mathbb{S} является взаимно однозначным и устанавливает изоморфизм пространств $L_2(\mathbb{T}^k)$ и ℓ_2^k .

Перечислим некоторые свойства спектрального преобразования функций многих переменных, аналогичные приведенным в разд. 1.1 и 1.2.

1. Линейность [112].

Пусть $f(\cdot), g(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$, $\mathbb{S}[f(\cdot)] = F$, $\mathbb{S}[g(\cdot)] = G$. Тогда

$$\mathbb{S}[\alpha f(\cdot) + \beta g(\cdot)] = \alpha F + \beta G \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (4.9)$$

2. Сохранение нормы и скалярного произведения [112].

Пусть $f(\cdot), g(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$, $\mathbb{S}[f(\cdot)] = F$, $\mathbb{S}[g(\cdot)] = G$. Тогда

$$\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 = \|F\|_{\ell_2^k}^2 = F^T F, \quad (4.10)$$

$$(f(\cdot), g(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^k)} = (F, G)_{\ell_2^k} = F^T G. \quad (4.11)$$

3. Симметричность.

Пусть $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ и $f^*(t_1, \dots, t_l, \dots, t_m, \dots, t_k) = f(t_1, \dots, t_m, \dots, t_l, \dots, t_k)$, $l, m \in \{1, \dots, k\}$, при почти всех $(t_1, \dots, t_l, \dots, t_m, \dots, t_k) \in \mathbb{T}^k$, $\mathbb{S}[f(\cdot)] = F$, $\mathbb{S}[f^*(\cdot)] = F^*$. Тогда

$$F_{i_1 \dots i_l \dots i_m \dots i_k}^* = F_{i_1 \dots i_m \dots i_l \dots i_k}, \quad i_1, \dots, i_l, \dots, i_m, \dots, i_k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.12)$$

что следует из определения элементов матриц F и F^* .

Очевидно, что если $f(t_1, \dots, t_l, \dots, t_m, \dots, t_k) = f(t_1, \dots, t_m, \dots, t_l, \dots, t_k)$, $l, m \in \{1, \dots, k\}$, то $F_{i_1 \dots i_l \dots i_m \dots i_k} = F_{i_1 \dots i_m \dots i_l \dots i_k}$, $i_1, \dots, i_l, \dots, i_m, \dots, i_k = 0, 1, 2, \dots$

4. Сдвиг и масштабирование базисной системы.

Если $\{\tilde{q}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ — базисная система пространства $L_2([0, 1])$, а $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ — соответствующая ей базисная система пространства $L_2([t_0, T])$ (см. п. 1 замечаний 1.1), то

$$F_{q \dots q} = \sqrt{(T - t_0)^k} F_{\tilde{q} \dots \tilde{q}}^+,$$

где $F_{q \dots q}$ и $F_{\tilde{q} \dots \tilde{q}}^+$ — спектральные характеристики функций $f(t_1, \dots, t_k) = f^+((t_1 - t_0)(T - t_0), \dots, (t_k - t_0)(T - t_0))$ и $f^+(t_1, \dots, t_k)$ соответственно, что следует из определения элементов матрицы F (замена переменных интегрирования).

5. Изменение базисной системы.

Пусть $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ и $\{p(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ — разные базисные системы пространства $L_2(\mathbb{T})$, а Δ_{qp} и Δ_{pq} — матрицы изменения базисной системы (см. разд. 1.3). Кроме того, $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$, $\mathbb{S}_{q \dots q}[f(\cdot)] = F_{q \dots q}$ и $\mathbb{S}_{p \dots p}[f(\cdot)] = F_{p \dots p}$. Тогда

$$F_{q \dots q} = \Delta_{qp}^{\otimes k} F_{p \dots p}, \quad F_{p \dots p} = \Delta_{pq}^{\otimes k} F_{q \dots q}, \quad (4.13)$$

где бесконечные $2k$ -мерные матрицы определяются как тензорные (прямые) произведения:

$$\Delta_{qp}^{\otimes k} = \underbrace{\Delta_{qp} \otimes \dots \otimes \Delta_{qp}}_{k \text{ множителей}}, \quad \Delta_{pq}^{\otimes k} = \underbrace{\Delta_{pq} \otimes \dots \otimes \Delta_{pq}}_{k \text{ множителей}}.$$

Доказательство. Согласно формуле (4.4) элементы спектральной характеристики $F_{q \dots q}$ даются в виде

$$F_{q \dots q}^{i_1 \dots i_k} = (q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot), f(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^k)}, \quad i_1, \dots, i_k = 0, 1, 2, \dots$$

Далее напомним (см. п. 1 замечаний 1.8), что строка матрицы изменения базисной системы Δ_{qp} с номером i — это транспонированная спектральная характеристика базисной функции $q(i, \cdot)$ относительно базисной системы $\{p(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$, следовательно,

$$\begin{aligned} F_{q \dots q}^{i_1 \dots i_k} &= \left(\sum_{j_1=0}^{\infty} \Delta_{qp}^{i_1 j_1} p(j_1, \cdot) \otimes \dots \otimes \sum_{j_k=0}^{\infty} \Delta_{qp}^{i_k j_k} p(j_k, \cdot), f(\cdot) \right)_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \\ &= \left(\lim_{n_1 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{n_1} \Delta_{qp}^{i_1 j_1} p(j_1, \cdot) \otimes \dots \otimes \lim_{n_k \rightarrow \infty} \sum_{j_k=0}^{n_k} \Delta_{qp}^{i_k j_k} p(j_k, \cdot), f(\cdot) \right)_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \dots \lim_{n_k \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_k=0}^{n_k} \Delta_{qp}^{i_1 j_1} \dots \Delta_{qp}^{i_k j_k} (p(j_1, \cdot) \otimes \dots \otimes p(j_k, \cdot), f(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \\
&= \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \dots \lim_{n_k \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_k=0}^{n_k} \Delta_{qp}^{\otimes k} F_{p \dots p}^{j_1 \dots j_k},
\end{aligned}$$

где $\Delta_{qp}^{\otimes k}$ — это элементы матрицы $\Delta_{qp}^{\otimes k}$:

$$\Delta_{qp}^{\otimes k} = \Delta_{qp}^{i_1 j_1} \dots \Delta_{qp}^{i_k j_k}, \quad i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k = 0, 1, 2, \dots,$$

что следует из определения тензорного произведения матриц [110, 112]. Отсюда получаем первое соотношение в (4.13). Второе соотношение в (4.13) получается из первого перестановкой базисных систем $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{p(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$. ◀

Пример 4.1. Найти спектральную характеристику $\mathbf{1}^{\otimes k}$ функции k переменных $f(t_1, \dots, t_k) \equiv 1$ относительно базисных систем (1.5)–(1.9), заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Применим теорему 4.2, так как функция $f(t_1, \dots, t_k) \equiv 1$ удовлетворяет условию $f(\cdot) = f_1(\cdot) \otimes \dots \otimes f_k(\cdot)$:

$$\mathbb{S}[f(\cdot)] = F = \mathbf{1}^{\otimes k} = \underbrace{\mathbf{1} \otimes \dots \otimes \mathbf{1}}_{k \text{ сомножителей}},$$

где $\mathbf{1}$ — спектральная характеристика функции $f_0(t) \equiv 1$, причем спектральные характеристики $\mathbf{1}$ и $\mathbf{1}^{\otimes k}$ определены относительно одной и той же базисной системы.

Спектральная характеристика $\mathbf{1}$ относительно базисных систем (1.5)–(1.9), заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$, найдена в примере 1.1: $\mathbf{1} = [\sqrt{T} \ 0 \ 0 \ \dots]^T = \sqrt{T} \cdot [1 \ 0 \ 0 \ \dots]^T$, поэтому

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}^{\otimes 2} &= \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = T \cdot \left[[1 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] \dots \right]^T, \\
\mathbf{1}^{\otimes 3} &= \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = T\sqrt{T} \cdot \left[\left[[1 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] \dots \right] \right. \\
&\quad \left. \left[[0 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] \dots \right] \right. \\
&\quad \left. \left[[0 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] \dots \right] \dots \right]^T,
\end{aligned}$$

$$\mathbf{1}^{\otimes 4} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} =$$

$$\begin{aligned}
&= T^2 \cdot \left[\left[\left[[1 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] \dots \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left[[0 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] \dots \right] \right. \\
&\quad \left. \left[[0 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] \dots \right] \dots \right] \\
&\quad \left[\left[[0 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] \dots \right] \right. \\
&\quad \left. \left[[0 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] \dots \right] \right. \\
&\quad \left. \left[[0 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] \dots \right] \dots \right] \\
&\quad \left[\left[[0 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] \dots \right] \right. \\
&\quad \left. \left[[0 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] \dots \right] \right. \\
&\quad \left. \left[[0 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] [0 \ 0 \ 0 \ \dots] \dots \right] \dots \right] \dots \right]^T \quad \text{и т.д.}
\end{aligned}$$

Таким образом, для произвольного $k \in \mathbb{N}$ среди коэффициентов разложения $\mathbf{1}_{i_1 \dots i_k}^{\otimes k}$ только один ненулевой элемент $\mathbf{1}_{0 \dots 0}^{\otimes k} = \sqrt{T^k}$ для полиномов Лежандра (1.5), косинусоид (1.6), функций Уолша (1.7), функций Хаара (1.8) и тригонометрических функций (1.9). ■

Пример 4.2. Найти спектральные характеристики F и F^* двух функций $f(t_1, t_2) = 1(t_2 - t_1)$ и $f^*(t_1, t_2) = 1(t_1 - t_2)$ относительно полиномов Лежандра (1.5), заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Функция $f^*(\cdot)$ — это единичная ступенчатая функция (1.28) (см. пример 1.4), ее двумерная спектральная характеристика F^* найдена в примере 1.7. Записывая ее как двумерную матрицу-столбец (см. п. 2 замечаний 4.1), получаем искомую спектральную характеристику:

$$F^* = T \cdot \left[\left[\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2\sqrt{3}} \quad 0 \quad 0 \quad \dots \right] \left[0 \quad \frac{1}{2\sqrt{15}} \quad 0 \quad -\frac{1}{2\sqrt{35}} \quad \dots \right] \left[0 \quad 0 \quad \frac{1}{2\sqrt{35}} \quad 0 \quad \dots \right] \dots \right]^T,$$

или $F_{00}^* = \frac{T}{2}, \quad F_{m-1,m}^* = -F_{m,m-1}^* = -\frac{T}{2\sqrt{4m^2-1}}, \quad F_{m-k,m}^* = F_{m,m-k}^* = 0,$

$$m = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 0, 2, 3, \dots, m.$$

Спектральную характеристику F функции $f(\cdot)$ найдем, применяя свойство симметричности (4.12). Тогда

$$F = T \cdot \left[\left[\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad 0 \quad 0 \quad \dots \right] \left[0 \quad -\frac{1}{2\sqrt{15}} \quad 0 \quad \frac{1}{2\sqrt{35}} \quad \dots \right] \left[0 \quad 0 \quad -\frac{1}{2\sqrt{35}} \quad 0 \quad \dots \right] \dots \right]^T,$$

или $F_{00} = \frac{T}{2}, \quad F_{m-1,m} = -F_{m,m-1} = \frac{T}{2\sqrt{4m^2-1}}, \quad F_{m-k,m} = F_{m,m-k} = 0,$

$$m = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 0, 2, 3, \dots, m.$$

Для произвольной базисной системы элементы спектральных характеристик F и F^* выражаются через элементы спектральной характеристики P^{-1} оператора интегрирования (см. разд. 1.6, там же приведены спектральные характеристики P^{-1} для базисных систем (1.5)–(1.9)):

$$F_{i_1 i_2} = F_{i_2 i_1}^* = P_{i_2 i_1}^{-1}, \quad i_1, i_2 = 0, 1, 2, \dots \quad \blacksquare$$

Пример 4.3. Найти спектральную характеристику функции

$$f(t_1, t_2, t_3) = 1(t_2 - t_1)1(t_3 - t_2) = \begin{cases} 1, & t_1 < t_2 < t_3, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

относительно полиномов Лежандра (1.5) и косинусоид (1.6), заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Применим формулу (4.4) для элементов спектральной характеристики $\mathbb{S}[f(\cdot)] = F$ при $k = 3$:

$$F_{i_1 i_2 i_3} = (q(i_1, \cdot) \otimes q(i_2, \cdot) \otimes q(i_3, \cdot), f(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^3)} = \int_{\mathbb{T}^3} q(i_1, t_1) q(i_2, t_2) q(i_3, t_3) f(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 =$$

$$= \int_{\mathbb{T}} q(i_3, t_3) \int_0^{t_3} q(i_2, t_2) \int_0^{t_2} q(i_1, t_1) dt_1 dt_2 dt_3, \quad i_1, i_2, i_3 = 0, 1, 2, \dots$$

Для полиномов Лежандра (1.5) имеем

$$F_{i_1 i_2 i_3} = \int_{\mathbb{T}} \hat{P}(i_3, t_3) \int_0^{t_3} \hat{P}(i_2, t_2) \int_0^{t_2} \hat{P}(i_1, t_1) dt_1 dt_2 dt_3$$

и вычисление этих элементов можно свести к представлению первообразных полиномов Лежандра и произведений двух полиномов Лежандра линейными комбинациями полиномов Лежандра.

Пусть $H = P^{-1}$ — двумерная спектральная характеристика функции $h(t, \tau) = 1(t - \tau)$ относительно полиномов Лежандра (1.5), найденная в примере 1.7, или спектральная характеристика оператора интегрирования (см. примеры спектральных характеристик P^{-1} в разд. 1.6). Ее ненулевые элементы имеют вид

$$H_{00} = \frac{T}{2}, \quad H_{i-1,i} = -H_{i,i-1} = -T \frac{1}{2\sqrt{4i^2 - 1}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

тогда

$$\int_0^t \hat{P}(i, \tau) d\tau = \begin{cases} H_{00} \hat{P}(0, t) + H_{10} \hat{P}(1, t), & i = 0, \\ H_{i-1,i} \hat{P}(i-1, t) + H_{i+1,i} \hat{P}(i+1, t), & i > 0. \end{cases}$$

Кроме того, пусть V — спектральная характеристика оператора умножения функций относительно полиномов Лежандра (см. примеры спектральных характеристик V в разд. 1.5). Тогда [298]

$$\hat{P}(i, t) \hat{P}(j, t) = \sum_{k=|i-j|}^{i+j} V_{ijk} \hat{P}(k, t), \quad (4.14)$$

где

$$V_{ijk} = \sqrt{\frac{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}{T}} \frac{(i+j-k-1)!!}{(i+j-k)!!} \frac{(j+k-i-1)!!}{(j+k-i)!!} \frac{(k+i-j-1)!!}{(k+i-j)!!} \frac{(i+j+k)!!}{(i+j+k+1)!!},$$

для четной суммы $i+j+k$ и $V_{ijk} = 0$ для нечетной суммы $i+j+k$.

Умножим левую и правую части первообразной полинома $\hat{P}(i_1, \cdot)$ при $i_1 > 0$ на $\hat{P}(i_2, \cdot)$:

$$\begin{aligned} \hat{P}(i_2, t) \int_0^t \hat{P}(i_1, \tau) d\tau &= H_{i_1-1, i_1} \hat{P}(i_1-1, t) \hat{P}(i_2, t) + H_{i_1+1, i_1} \hat{P}(i_1+1, t) \hat{P}(i_2, t) = \\ &= H_{i_1-1, i_1} \sum_{k=|i_1-i_2-1|}^{i_1+i_2-1} V_{i_1-1, i_2, k} \hat{P}(k, t) + H_{i_1+1, i_1} \sum_{k=|i_1-i_2+1|}^{i_1+i_2+1} V_{i_1+1, i_2, k} \hat{P}(k, t), \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} \int_0^t \hat{P}(i_2, \tau_2) \int_0^{\tau_2} \hat{P}(i_1, \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 &= \\ &= H_{i_1-1, i_1} \sum_{k=|i_1-i_2-1|}^{i_1+i_2-1} V_{i_1-1, i_2, k} \int_0^t \hat{P}(k, \tau) d\tau + H_{i_1+1, i_1} \sum_{k=|i_1-i_2+1|}^{i_1+i_2+1} V_{i_1+1, i_2, k} \int_0^t \hat{P}(k, \tau) d\tau = \\ &= H_{i_1-1, i_1} \sum_{k=|i_1-i_2-1|}^{i_1+i_2-1} V_{i_1-1, i_2, k} (P^*(k-1, t) + H_{k+1, k} \hat{P}(k+1, t)) + \\ &+ H_{i_1+1, i_1} \sum_{k=|i_1-i_2+1|}^{i_1+i_2+1} V_{i_1+1, i_2, k} (P^*(k-1, t) + H_{k+1, k} \hat{P}(k+1, t)), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \hat{P}(i_3, t_3) \int_0^{t_3} \hat{P}(i_2, t_2) \int_0^{t_2} \hat{P}(i_1, t_1) dt_1 dt_2 dt_3 &= \\ &= H_{i_1-1, i_1} \sum_{k=|i_1-i_2-1|}^{i_1+i_2-1} V_{i_1-1, i_2, k} (\Delta_{i_3, k-1} + H_{k+1, k} \delta_{i_3, k+1}) + \end{aligned}$$

$$+ H_{i_1+1, i_1} \sum_{k=|i_1-i_2+1}^{i_1+i_2+1} V_{i_1+1, i_2, k} (\Delta_{i_3, k-1} + H_{k+1, k} \delta_{i_3, k+1}),$$

где

$$P^*(k-1, t) = \begin{cases} H_{00} \hat{P}(0, t), & k = 0, \\ H_{k-1, k} \hat{P}(k-1, t), & k > 0, \end{cases} \quad \Delta_{i, k-1} = \begin{cases} H_{00} \delta_{i0}, & k = 0, \\ H_{k-1, k} \delta_{i, k-1}, & k > 0, \end{cases}$$

а δ_{ij} , как и ранее, — символ Кронекера (1.4).

При $i_1 = 0$ получаем

$$\hat{P}(i_2, t) \int_0^t \hat{P}(0, \tau) d\tau = H_{00} \hat{P}(0, t) \hat{P}(i_2, t) + H_{10} \hat{P}(1, t) \hat{P}(i_2, t) = \frac{H_{00}}{\sqrt{T}} \hat{P}(i_2, t) + H_{10} \sum_{k=|1-i_2|}^{i_2+1} V_{1i_2k} \hat{P}(k, t),$$

тогда при $i_2 > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^t \hat{P}(i_2, \tau_2) \int_0^{\tau_2} \hat{P}(0, \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 &= \frac{H_{00}}{\sqrt{T}} \int_0^t \hat{P}(i_2, \tau) d\tau + H_{10} \sum_{k=|1-i_2|}^{i_2+1} V_{1i_2k} \int_0^t \hat{P}(k, \tau) d\tau = \\ &= \frac{H_{00}}{\sqrt{T}} (H_{i_2-1, i_2} \hat{P}(i_2-1, t) + H_{i_2+1, i_2} \hat{P}(i_2+1, t)) + \\ &+ H_{10} \sum_{k=|1-i_2|}^{i_2+1} V_{1i_2k} (P^*(k-1, t) + H_{k+1, k} \hat{P}(k+1, t)), \end{aligned}$$

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \hat{P}(i_3, t_3) \int_0^{t_3} \hat{P}(i_2, t_2) \int_0^{t_2} \hat{P}(0, t_1) dt_1 dt_2 dt_3 &= \\ &= \frac{H_{00}}{\sqrt{T}} (H_{i_2-1, i_2} \delta_{i_3, i_2-1} + H_{i_2+1, i_2} \delta_{i_3, i_2+1}) + H_{10} \sum_{k=|1-i_2|}^{i_2+1} V_{1i_2k} (\Delta_{i_3, k-1} + H_{k+1, k} \delta_{i_3, k+1}), \end{aligned}$$

а при $i_2 = 0$

$$\begin{aligned} \int_0^t \hat{P}(0, \tau_2) \int_0^{\tau_2} \hat{P}(0, \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 &= \frac{H_{00}}{\sqrt{T}} \int_0^t \hat{P}(0, \tau) d\tau + \frac{H_{10}}{\sqrt{T}} \int_0^t \hat{P}(1, \tau) d\tau = \\ &= \frac{H_{00}}{\sqrt{T}} (P_{00}^{-1} \hat{P}(0, t) + H_{10} \hat{P}(1, t)) + \frac{H_{10}}{\sqrt{T}} (H_{01} \hat{P}(0, t) + H_{21} \hat{P}(2, t)) = \\ &= \frac{(H_{00}^2 + H_{10} H_{01}) \hat{P}(0, t) + H_{00} H_{10} \hat{P}(1, t) + H_{10} H_{21} \hat{P}(2, t)}{\sqrt{T}}, \end{aligned}$$

ПОЭТОМУ

$$\int_{\mathbb{T}} \hat{P}(i_3, t_3) \int_0^{t_3} \hat{P}(0, t_2) \int_0^{t_2} \hat{P}(0, t_1) dt_1 dt_2 dt_3 = \frac{(H_{00}^2 + H_{10} H_{01}) \delta_{i_3 0} + H_{00} H_{10} \delta_{i_3 1} + H_{10} H_{21} \delta_{i_3 2}}{\sqrt{T}}.$$

Таким образом, не проводя дополнительных упрощений, получаем

$$F_{i_1 i_2 i_3} = \begin{cases} H_{i_1-1, i_1} \sum_{k=|i_1-i_2-1|}^{i_1+i_2-1} V_{i_1-1, i_2, k} (\Delta_{i_3, k-1} + H_{k+1, k} \delta_{i_3, k+1}) + \\ + H_{i_1+1, i_1} \sum_{k=|i_1-i_2+1|}^{i_1+i_2+1} V_{i_1+1, i_2, k} (\Delta_{i_3, k-1} + H_{k+1, k} \delta_{i_3, k+1}), & i_1 > 0, \\ \frac{H_{00}}{\sqrt{T}} (H_{i_2-1, i_2} \delta_{i_3, i_2-1} + H_{i_2+1, i_2} \delta_{i_3, i_2+1}) + \\ + H_{10} \sum_{k=|1-i_2|}^{i_2+1} V_{1i_2k} (\Delta_{i_3, k-1} + H_{k+1, k} \delta_{i_3, k+1}), & i_1 = 0, \quad i_2 > 0, \\ \frac{(H_{00}^2 + H_{10} H_{01}) \delta_{i_3 0} + H_{00} H_{10} \delta_{i_3 1} + H_{10} H_{21} \delta_{i_3 2}}{\sqrt{T}}, & i_1 = i_2 = 0. \end{cases}$$

Перейдем к косинусоидам (1.6):

$$F_{i_1 i_2 i_3} = \int_{\mathbb{T}} \hat{C}(i_3, t_3) \int_0^{t_3} \hat{C}(i_2, t_2) \int_0^{t_2} \hat{C}(i_1, t_1) dt_1 dt_2 dt_3,$$

и умножим первообразную функции $\hat{C}(i_1, \cdot)$ на $\hat{C}(i_2, \cdot)$ при $i_1, i_2 > 0$:

$$\begin{aligned} \hat{C}(i_2, t) \int_0^t \hat{C}(i_1, \tau) d\tau &= \frac{2}{T} \cos \frac{i_2 \pi t}{T} \int_0^t \cos \frac{i_1 \pi \tau}{T} d\tau = \frac{2}{i_1 \pi} \cos \frac{i_2 \pi t}{T} \sin \frac{i_1 \pi t}{T} = \\ &= \frac{1}{i_1 \pi} \left(\sin \frac{(i_1 + i_2) \pi t}{T} + \sin \frac{(i_1 - i_2) \pi t}{T} \right). \end{aligned}$$

Тогда при $i_1 \neq i_2$

$$\begin{aligned} \int_0^t \hat{C}(i_2, \tau_2) \int_0^{\tau_2} \hat{C}(i_1, \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 &= \frac{1}{i_1 \pi} \int_0^t \left(\sin \frac{(i_1 + i_2) \pi \tau}{T} + \sin \frac{(i_1 - i_2) \pi \tau}{T} \right) d\tau = \\ &= -\frac{1}{i_1 \pi} \left(\frac{T}{(i_1 + i_2) \pi} \left[\cos \frac{(i_1 + i_2) \pi t}{T} - 1 \right] + \frac{T}{(i_1 - i_2) \pi} \left[\cos \frac{(i_1 - i_2) \pi t}{T} - 1 \right] \right) = \\ &= \frac{T\sqrt{T}}{i_1 \pi^2} \left(\frac{\hat{C}(0, t)}{i_1 + i_2} - \frac{\hat{C}(i_1 + i_2, t)}{\sqrt{2}(i_1 + i_2)} + \frac{\hat{C}(0, t)}{i_1 - i_2} - \frac{\hat{C}(|i_1 - i_2|, t)}{\sqrt{2}(i_1 - i_2)} \right) \end{aligned}$$

и при $i_1 = i_2$

$$\int_0^t \hat{C}(i_2, \tau_2) \int_0^{\tau_2} \hat{C}(i_1, \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 = \frac{T\sqrt{T}}{i_1 \pi^2} \left(\frac{\hat{C}(0, t)}{i_1 + i_2} - \frac{\hat{C}(i_1 + i_2, t)}{\sqrt{2}(i_1 + i_2)} \right).$$

Отсюда согласно (1.3) получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \hat{C}(i_3, t_3) \int_0^{t_3} \hat{C}(i_2, t_2) \int_0^{t_2} \hat{C}(i_1, t_1) dt_1 dt_2 dt_3 &= \\ &= \begin{cases} \frac{T\sqrt{T}}{i_1 \pi^2} \left(\frac{\delta_{0i_3}}{i_1 + i_2} - \frac{\delta_{i_1 + i_2, i_3}}{\sqrt{2}(i_1 + i_2)} + \frac{\delta_{0i_3}}{i_1 - i_2} - \frac{\delta_{|i_1 - i_2|, i_3}}{\sqrt{2}(i_1 - i_2)} \right), & i_1 \neq i_2, \\ \frac{T\sqrt{T}}{i_1 \pi^2} \left(\frac{\delta_{0i_3}}{i_1 + i_2} - \frac{\delta_{i_1 + i_2, i_3}}{\sqrt{2}(i_1 + i_2)} \right), & i_1 = i_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Нужный результат при $i_2 = 0$ получается несколько проще, а именно

$$\begin{aligned} \hat{C}(0, t) \int_0^t \hat{C}(i_1, \tau) d\tau &= \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^t \cos \frac{i_1 \pi \tau}{T} d\tau = \frac{\sqrt{2}}{i_1 \pi} \sin \frac{i_1 \pi t}{T}, \\ \int_0^t \hat{C}(0, \tau_2) \int_0^{\tau_2} \hat{C}(i_1, \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 &= \frac{\sqrt{2}}{i_1 \pi} \int_0^t \sin \frac{i_1 \pi \tau}{T} d\tau = \\ &= -\frac{\sqrt{2}T}{i_1^2 \pi^2} \left[\cos \frac{i_1 \pi t}{T} - 1 \right] = \frac{T\sqrt{T}}{i_1^2 \pi^2} (\sqrt{2}\hat{C}(0, t) - \hat{C}(i_1, t)), \end{aligned}$$

ПОЭТОМУ

$$\int_{\mathbb{T}} \hat{C}(i_3, t_3) \int_0^{t_3} \hat{C}(i_2, t_2) \int_0^{t_2} \hat{C}(i_1, t_1) dt_1 dt_2 dt_3 = \frac{T\sqrt{T}}{i_1^2 \pi^2} (\sqrt{2}\delta_{0i_3} - \delta_{i_1 i_3}).$$

Далее, для значений $i_1 = 0$ и $i_2 > 0$ находим

$$\begin{aligned} \hat{C}(i_2, t) \int_0^t \hat{C}(0, \tau) d\tau &= \frac{\sqrt{2}}{T} \cos \frac{i_2 \pi t}{T} \int_0^t d\tau = \frac{\sqrt{2}}{T} t \cos \frac{i_2 \pi t}{T}, \\ \int_0^t \hat{C}(i_2, \tau_2) \int_0^{\tau_2} \hat{C}(0, \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 &= \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^t \tau \cos \frac{i_2 \pi \tau}{T} d\tau = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{i_2 \pi} \left(t \sin \frac{i_2 \pi t}{T} - \int_0^t \sin \frac{i_2 \pi \tau}{T} d\tau \right) = \frac{\sqrt{2}}{i_2 \pi} \left(t \sin \frac{i_2 \pi t}{T} + \frac{T}{i_2 \pi} \left[\cos \frac{i_2 \pi t}{T} - 1 \right] \right), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\hat{C}(i_3, t) \int_0^t \hat{C}(i_2, \tau_2) \int_0^{\tau_2} \hat{C}(0, \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2(1+\delta_{0i_3})}}{i_2\pi\sqrt{T}} t \cos \frac{i_3\pi t}{T} \sin \frac{i_2\pi t}{T} + \frac{\sqrt{2}T}{i_2^2\pi^2} \hat{C}(i_3, t) \left[\cos \frac{i_2\pi t}{T} - 1 \right] = \\
&= \frac{1}{i_2\pi\sqrt{T(1+\delta_{0i_3})}} \left(t \sin \frac{(i_2+i_3)\pi t}{T} + t \sin \frac{(i_2-i_3)\pi t}{T} \right) + \frac{T\sqrt{T}}{i_2^2\pi^2} \hat{C}(i_3, t) (\hat{C}(i_2, t) - \sqrt{2}\hat{C}(0, t)),
\end{aligned}$$

а так как

$$\int_0^t \tau \sin \frac{m\pi\tau}{T} d\tau = \frac{T}{m\pi} \left(-t \cos \frac{m\pi t}{T} + \frac{T}{m\pi} \sin \frac{m\pi t}{T} \right), \quad m \neq 0,$$

то

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}} \hat{C}(i_3, t_3) \int_0^{t_3} \hat{C}(i_2, t_2) \int_0^{t_2} \hat{C}(0, t_1) dt_1 dt_2 dt_3 = \\
&= \begin{cases} -\frac{T\sqrt{T}}{i_2\pi^2} \left(\frac{(-1)^{i_2+i_3}}{(i_2+i_3)\sqrt{1+\delta_{0i_3}}} + \frac{(-1)^{i_2-i_3}}{i_2-i_3} + \frac{\sqrt{2}\delta_{i_0i_3} - \delta_{i_2i_3}}{i_2} \right), & i_2 \neq i_3, \\ -\frac{T\sqrt{T}}{i_2\pi^2} \left(\frac{(-1)^{i_2+i_3}}{(i_2+i_3)\sqrt{1+\delta_{0i_3}}} + \frac{\sqrt{2}\delta_{i_0i_3} - \delta_{i_2i_3}}{i_2} \right), & i_2 = i_3. \end{cases}
\end{aligned}$$

Следующий шаг — значения $i_1 = i_2 = 0$ и $i_3 > 0$:

$$\hat{C}(i_3, t) \int_0^t \hat{C}(0, \tau_2) \int_0^{\tau_2} \hat{C}(0, \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 = \sqrt{\frac{2}{T^3}} \cos \frac{i_3\pi t}{T} \int_0^t \int_0^{\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 = \sqrt{\frac{1}{2T^3}} t^2 \cos \frac{i_3\pi t}{T},$$

а так как

$$\int_0^t \tau^2 \cos \frac{m\pi\tau}{T} d\tau = \frac{Tt^2}{m\pi} \sin \frac{m\pi\tau}{T} + \frac{2T^2t}{m^2\pi^2} \cos \frac{m\pi\tau}{T} - \frac{2T^3}{m^3\pi^3} \sin \frac{m\pi\tau}{T}, \quad m \neq 0,$$

то

$$\int_{\mathbb{T}} \hat{C}(i_3, t_3) \int_0^{t_3} \hat{C}(0, t_2) \int_0^{t_2} \hat{C}(0, t_1) dt_1 dt_2 dt_3 = \frac{(-1)^{i_3} T \sqrt{2T}}{i_3^2 \pi^2}.$$

Наконец, при $i_1 = i_2 = i_3 = 0$ получаем

$$\int_{\mathbb{T}} \hat{C}(0, t_3) \int_0^{t_3} \hat{C}(0, t_2) \int_0^{t_2} \hat{C}(0, t_1) dt_1 dt_2 dt_3 = \frac{1}{T\sqrt{T}} \int_{\mathbb{T}} \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} dt_1 dt_2 dt_3 = \frac{1}{T\sqrt{T}} \frac{T^3}{6} = \frac{T\sqrt{T}}{6}.$$

В результате находим

$$F_{i_1 i_2 i_3} = T\sqrt{T} \times \begin{cases} \frac{1}{i_1\pi^2} \left(\frac{\delta_{0i_3}}{i_1+i_2} - \frac{\delta_{i_1+i_2, i_3}}{\sqrt{2}(i_1+i_2)} + \frac{\delta_{0i_3}}{i_1-i_2} - \frac{\delta_{|i_1-i_2|, i_3}}{\sqrt{2}(i_1-i_2)} \right), & 0 < i_1 < i_2, \\ \frac{1}{i_1\pi^2} \left(\frac{\delta_{0i_3}}{i_1+i_2} - \frac{\delta_{i_1+i_2, i_3}}{\sqrt{2}(i_1+i_2)} \right), & 0 < i_1 = i_2, \\ \frac{\sqrt{2}\delta_{0i_3} - \delta_{i_1 i_3}}{i_1^2\pi^2}, & 0 < i_1, i_2 = 0, \\ -\frac{1}{i_2\pi^2} \left(\frac{(-1)^{i_2+i_3}}{(i_2+i_3)\sqrt{1+\delta_{0i_3}}} + \frac{(-1)^{i_2-i_3}}{i_2-i_3} + \frac{\sqrt{2}\delta_{0i_3} - \delta_{i_2 i_3}}{i_2} \right), & i_1 = 0 < i_2 \neq i_3, \\ -\frac{1}{i_2\pi^2} \left(\frac{(-1)^{i_2+i_3}}{(i_2+i_3)\sqrt{1+\delta_{0i_3}}} + \frac{\sqrt{2}\delta_{0i_3} - \delta_{i_2 i_3}}{i_2} \right), & i_1 = 0 < i_2 = i_3, \\ \frac{(-1)^{i_3} \sqrt{2}}{i_3^2\pi^2}, & i_1 = i_2 = 0 < i_3, \\ \frac{1}{6}, & i_1 = i_2 = i_3 = 0. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Пример 4.3 дает представление о трудоемкости вычисления коэффициентов разложения $F_{i_1 i_2 i_3}$ функции $f(t_1, t_2, t_3) = 1(t_2 - t_1)1(t_3 - t_2)$. Для функции

$$\mathbb{k}(t_1, \dots, t_k) = 1(t_k - t_{k-1}) \dots 1(t_2 - t_1) = \begin{cases} 1, & t_1 < \dots < t_k, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (4.15)$$

а $f(\cdot) = \mathbb{k}(\cdot)$ при $k = 3$, явное вычисление коэффициентов разложения, которые будем обозначать $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{i_1 \dots i_k} &= (q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot), \mathbb{k}(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \int_{\mathbb{T}^k} \mathbb{k}(t_1, \dots, t_k) q(i_1, t_1) \dots q(i_k, t_k) dt_1 \dots dt_k = \\ &= \int_{\mathbb{T}} q(i_k, t_k) \dots \int_{t_0}^{t_3} q(i_2, t_2) \int_{t_0}^{t_2} q(i_1, t_1) dt_1 \dots dt_k, \quad i_1, \dots, i_k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.16)$$

достаточно громоздко, например, для косинусоид и тригонометрических функций оно приведет к необходимости рассматривать разные случаи задания индексов i_1, \dots, i_k . В то же время спектральные характеристики \mathbb{K} функции (4.15) для различных k востребованы далее, поэтому приведем методику вычисления их элементов относительно базисных систем (1.5) – (1.9), заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

Начнем с полиномов Лежандра (1.5) и предложим следующую схему. Пусть (i, a) — пара чисел $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ и $a \in \mathbb{R}$, определяющая полином $a\hat{P}(i, \cdot)$. Мультимножество \mathfrak{A} таких пар, т.е. множество, которое может включать одинаковые элементы, задает полином

$$\sum_{(i,a) \in \mathfrak{A}} a\hat{P}(i, \cdot).$$

Тогда для первообразной такого полинома имеем

$$\mathcal{D}^{-1} a\hat{P}(i, t) = \int_0^t a\hat{P}(i, \tau) d\tau = \begin{cases} aH_{00}\hat{P}(0, t) + aH_{10}\hat{P}(1, t), & i = 0, \\ aH_{i-1,i}\hat{P}(i-1, t) + aH_{i+1,i}\hat{P}(i+1, t), & i > 0, \end{cases}$$

где \mathcal{D}^{-1} — оператор интегрирования (см. разд. 1.6), а $H = P^{-1}$ — его спектральная характеристика, т.е. двумерная спектральная характеристика функции $h(t, \tau) = 1(t - \tau)$, относительно полиномов Лежандра (см. разд. 1.2 и 1.6, а также примеры 1.7 и 4.3).

Обозначая соответствующее преобразование пар (i, a) через \mathbb{D}^{-1} , можно записать

$$\mathbb{D}^{-1}(i, a) = \begin{cases} \{(0, aH_{00}), (1, aH_{10})\}, & i = 0, \\ \{(i-1, aH_{i-1,i}), (i+1, aH_{i+1,i})\}, & i > 0. \end{cases}$$

Далее рассмотрим произведение (4.14) двух полиномов Лежандра. Обозначая соответствующее преобразование пар (i, a) через \mathbb{V}_j , имеем

$$\mathbb{V}_j(i, a) = \{(k, aV_{ijk}), \quad k = |i-j|, \dots, i+j, \quad i+j+k - \text{четное}\},$$

где $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$, V — спектральная характеристика оператора умножения функций относительно полиномов Лежандра (см. примеры спектральных характеристик V в разд. 1.5 и пример 4.3).

Последняя операция — скалярное произведение:

$$(\hat{P}(k, \cdot), a\hat{P}(i, \cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} a\hat{P}(i, t)\hat{P}(k, t) dt = a\delta_{ik},$$

и ее аналог — линейный функционал \mathbb{L}_k : $\mathbb{L}_k(i, a) = a\delta_{ik}$, $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Запись $\mathbb{D}^{-1}\mathfrak{A}$ означает мультимножество, полученное в результате объединения множеств $\mathbb{D}^{-1}(i, a) \forall (i, a) \in \mathfrak{A}$. Аналогично для $\mathbb{V}_j\mathfrak{A}$:

$$\mathbb{D}^{-1}\mathfrak{A} = \bigcup_{(i,a) \in \mathfrak{A}} \mathbb{D}^{-1}(i, a), \quad \mathbb{V}_j\mathfrak{A} = \bigcup_{(i,a) \in \mathfrak{A}} \mathbb{V}_j(i, a), \quad (4.17)$$

кроме того,

$$\mathbb{L}_k\mathfrak{A} = \sum_{(i,a) \in \mathfrak{A}} \mathbb{L}_k(i, a) = \sum_{(i,a) \in \mathfrak{A}} a\delta_{ik}. \quad (4.18)$$

Тогда

$$\mathbb{K}_{i_1 i_2} = \mathbb{L}_{i_2} \mathbb{D}^{-1}(i_1, 1), \quad \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3} = \mathbb{L}_{i_3} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{V}_{i_2} \mathbb{D}^{-1}(i_1, 1), \quad \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \mathbb{L}_{i_4} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{V}_{i_3} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{V}_{i_2} \mathbb{D}^{-1}(i_1, 1), \quad \dots,$$

или в общем случае

$$\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k} = \mathbb{L}_{i_k} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{V}_{i_{k-1}} \dots \mathbb{D}^{-1} \mathbb{V}_{i_2} \mathbb{D}^{-1}(i_1, 1). \quad (4.19)$$

Дополнительно можно добавить операцию \mathbb{U} приведения подобных, которая ставит в соответствие парам $(i, a_1), \dots, (i, a_n)$ пару $(i, a_1 + \dots + a_n)$, и удаления пар (i, a) при $a = 0$ и применять ее для промежуточных шагов, например после операции \mathbb{V}_j . Тогда формула (4.19) изменится:

$$\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k} = \mathbb{L}_{i_k} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{U} \mathbb{V}_{i_{k-1}} \dots \mathbb{D}^{-1} \mathbb{U} \mathbb{V}_{i_2} \mathbb{D}^{-1}(i_1, 1).$$

Перейдем к косинусоидам (1.6) и тригонометрическим функциям (1.9), но для упрощения записи положим $T = \pi$, а нормировочные коэффициенты учтем на заключительном этапе. Пусть (γ, a, ν, i) — четверка чисел $\gamma \in \{0, 1, 2\}$, $a \in \mathbb{R}$, $\nu \in \{0, 1, 2, \dots\}$ и $i \in \mathbb{N}$, задающая при $\gamma = 0$ моном at^ν , при $\gamma = 1$ функцию $at^\nu \sin it$, а при $\gamma = 2$ функцию $at^\nu \cos it$. Мультимножество \mathfrak{A} таких четверок определяет линейную комбинацию перечисленных функций.

Так как

$$\mathcal{D}^{-1} at^\nu = \int_0^t a \tau^\nu d\tau = \frac{a}{\nu+1} t^{\nu+1},$$

а также согласно [42]

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{-1} at^\nu \sin it &= \int_0^t a \tau^\nu \sin i\tau d\tau = \frac{a\nu!}{i^{\nu+1}} \cos \frac{\nu\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\nu} \frac{a\nu!}{(\nu-k)! i^{k+1}} t^{\nu-k} \cos\left(it + \frac{k\pi}{2}\right), \\ \mathcal{D}^{-1} at^\nu \cos it &= \int_0^t a \tau^\nu \cos i\tau d\tau = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{a\nu!}{(\nu-k)! i^{k+1}} t^{\nu-k} \sin\left(it + \frac{k\pi}{2}\right) - \frac{a\nu!}{i^{\nu+1}} \sin \frac{\nu\pi}{2}, \end{aligned}$$

обозначая соответствующее преобразование четверок (γ, a, ν, i) через \mathbb{D}^{-1} , получаем

$$\mathbb{D}^{-1}(\gamma, a, \nu, i) = \begin{cases} \left(0, \frac{a}{\nu+1}, \nu+1, 0\right), & \gamma = 0, \\ \left\{ \left(1 + \Gamma_k, -\frac{a\nu! A_k}{(\nu-k)! i^{k+1}}, \nu-k, i\right) \right\}_{k=0}^{\nu} \cup \underbrace{\left\{ \left(0, \frac{a\nu! A_\nu}{i^{\nu+1}}, 0, 0\right) \right\}}_{\text{если } \nu - \text{четное}}, & \gamma = 1, \\ \left\{ \left(2 - \Gamma_k, \frac{a\nu! B_k}{(\nu-k)! i^{k+1}}, \nu-k, i\right) \right\}_{k=0}^{\nu} \cup \underbrace{\left\{ \left(0, -\frac{a\nu! B_\nu}{i^{\nu+1}}, 0, 0\right) \right\}}_{\text{если } \nu - \text{нечетное}}, & \gamma = 2, \end{cases}$$

где величины

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= k \pmod{2} = \begin{cases} 0, & k - \text{четное}, \\ 1, & k - \text{нечетное}, \end{cases} \\ A_k &= \begin{cases} 1, & k \pmod{4} \in \{0, 3\}, \\ -1, & k \pmod{4} \in \{1, 2\}, \end{cases} \quad B_k = \begin{cases} 1, & k \pmod{4} \in \{0, 1\}, \\ -1, & k \pmod{4} \in \{2, 3\}, \end{cases} \end{aligned}$$

введены для учета формул приведения для тригонометрических функций.

Далее, принимая во внимание тригонометрические тождества [70], введем два преобразования \mathbb{A}_j^{\sin} и \mathbb{A}_j^{\cos} четверок (γ, a, ν, i) , отвечающие умножению на функции $\sin jt$ и $\cos jt$, $j > 0$,

соответственно:

$$\mathbb{A}_j^{\sin}(\gamma, a, \nu, i) = \begin{cases} (1, a, \nu, j), & \gamma = 0, \\ \left\{ \left(2(1 - \delta_{ij}), \frac{a}{2}, \nu, |i - j| \right), \left(2, -\frac{a}{2}, \nu, i + j \right) \right\}, & \gamma = 1, \\ \left\{ \left(1, \frac{a}{2}, \nu, i + j \right), \underbrace{\left(1, \frac{a}{2} \operatorname{sign}(j - i), \nu, |j - i| \right)}_{\text{если } i \neq j} \right\}, & \gamma = 2, \end{cases}$$

$$\mathbb{A}_j^{\cos}(\gamma, a, \nu, i) = \begin{cases} (2, a, \nu, j), & \gamma = 0, \\ \left\{ \left(1, \frac{a}{2}, \nu, i + j \right), \underbrace{\left(1, \frac{a}{2} \operatorname{sign}(i - j), \nu, |i - j| \right)}_{\text{если } i \neq j} \right\}, & \gamma = 1, \\ \left\{ \left(2(1 - \delta_{ij}), \frac{a}{2}, \nu, |i - j| \right), \left(2, \frac{a}{2}, \nu, i + j \right) \right\}, & \gamma = 2, \end{cases}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера (1.4).

Пусть также \mathbb{I} — тождественное преобразование: $\mathbb{I}(\gamma, a, \nu, i) = (\gamma, a, \nu, i) \forall (\gamma, a, \nu, i) \in \mathfrak{A}$, и

$$\mathbb{A}_j = \begin{cases} \mathbb{I}, & j = 0, \\ \mathbb{A}_j^{\cos}, & j > 0, \end{cases} \quad \tilde{\mathbb{A}}_j = \begin{cases} \mathbb{I}, & j = 0, \\ \mathbb{A}_j^{\cos}, & j = 2k, \\ \mathbb{A}_{j+1}^{\sin}, & j = 2k - 1, \end{cases} \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Последняя операция — вычисление значения функции, которая задается четверкой (γ, a, ν, i) , в точке $t = T = \pi$, обозначим ее \mathbb{Q}_π :

$$\mathbb{Q}_\pi(\gamma, a, \nu, i) = \begin{cases} a\pi^\nu, & \gamma = 0, \\ a\pi^\nu \sin i\pi, & \gamma = 1, \\ a\pi^\nu \cos i\pi, & \gamma = 2, \end{cases} = \begin{cases} a\pi^\nu, & \gamma = 0, \\ 0, & \gamma = 1, \\ a(-1)^i \pi^\nu, & \gamma = 2. \end{cases}$$

Запись $\mathbb{D}^{-1}\mathfrak{A}$ означает мультимножество, полученное в результате объединения множеств $\mathbb{D}^{-1}(\gamma, a, \nu, i) \forall (\gamma, a, \nu, i) \in \mathfrak{A}$. Аналогично для записей $\mathbb{A}_j\mathfrak{A}$ и $\tilde{\mathbb{A}}_j\mathfrak{A}$:

$$\mathbb{D}^{-1}\mathfrak{A} = \bigcup_{(\gamma, a, \nu, i) \in \mathfrak{A}} \mathbb{D}^{-1}(\gamma, a, \nu, i), \quad \mathbb{A}_j\mathfrak{A} = \bigcup_{(\gamma, a, \nu, i) \in \mathfrak{A}} \mathbb{A}_j(\gamma, a, \nu, i), \quad \tilde{\mathbb{A}}_j\mathfrak{A} = \bigcup_{(\gamma, a, \nu, i) \in \mathfrak{A}} \tilde{\mathbb{A}}_j(\gamma, a, \nu, i), \quad (4.20)$$

кроме того,

$$\mathbb{Q}_\pi\mathfrak{A} = \sum_{(\gamma, a, \nu, i) \in \mathfrak{A}} \mathbb{Q}_\pi(\gamma, a, \nu, i). \quad (4.21)$$

Тогда, переходя к произвольному значению T и учитывая нормировочные коэффициенты, для косинусоид (1.6) получаем

$$\mathbb{K}_{i_1 i_2} = \frac{T}{\pi^2} \sqrt{[1 + (i_1 > 0)][1 + (i_2 > 0)]} \mathbb{Q}_\pi \mathbb{D}^{-1} \mathbb{A}_{i_2} \mathbb{D}^{-1}(\gamma_{i_1}, 1, 0, i_1),$$

$$\mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3} = \frac{T\sqrt{T}}{\pi^3} \sqrt{[1 + (i_1 > 0)][1 + (i_2 > 0)][1 + (i_3 > 0)]} \mathbb{Q}_\pi \mathbb{D}^{-1} \mathbb{A}_{i_3} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{A}_{i_2} \mathbb{D}^{-1}(\gamma_{i_1}, 1, 0, i_1),$$

$$\mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \frac{T^2}{\pi^4} \sqrt{[1 + (i_1 > 0)][1 + (i_2 > 0)][1 + (i_3 > 0)][1 + (i_4 > 0)]} \times$$

$$\times \mathbb{Q}_\pi \mathbb{D}^{-1} \mathbb{A}_{i_4} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{A}_{i_3} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{A}_{i_2} \mathbb{D}^{-1}(\gamma_{i_1}, 1, 0, i_1), \quad \dots,$$

где $(i > 0) = 0$ при $i = 0$ и $(i > 0) = 1$ при $i > 0$, что можно представить как $(i > 0) = 1 - \delta_{i0}$, $\gamma_i = 2(i > 0) = 2(1 - \delta_{i0})$, и в общем случае

$$\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k} = \frac{\sqrt{T^k}}{\pi^k} \prod_{l=1}^k \sqrt{1 + (i_l > 0)} \mathbb{Q}_\pi \mathbb{D}^{-1} \mathbb{A}_{i_k} \dots \mathbb{D}^{-1} \mathbb{A}_{i_2} \mathbb{D}^{-1}(\gamma_{i_1}, 1, 0, i_1). \quad (4.22)$$

Остается записать выражения для коэффициентов разложения функции (4.15), соответствующие выбору тригонометрических функций (1.9):

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_{i_1 i_2} &= \frac{T}{\pi^2} \sqrt{[1 + (i_1 > 0)][1 + (i_2 > 0)]} \mathbb{Q}_\pi \mathbb{D}^{-1} \tilde{\mathbb{A}}_{i_2} \mathbb{D}^{-1}(\tilde{\gamma}_{i_1}, 1, 0, 2[(i_1 + 1)/2]), \\ \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3} &= \frac{T\sqrt{T}}{\pi^3} \sqrt{[1 + (i_1 > 0)][1 + (i_2 > 0)][1 + (i_3 > 0)]} \times \\ &\quad \times \mathbb{Q}_\pi \mathbb{D}^{-1} \tilde{\mathbb{A}}_{i_3} \mathbb{D}^{-1} \tilde{\mathbb{A}}_{i_2} \mathbb{D}^{-1}(\tilde{\gamma}_{i_1}, 1, 0, 2[(i_1 + 1)/2]), \\ \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4} &= \frac{T^2}{\pi^4} \sqrt{[1 + (i_1 > 0)][1 + (i_2 > 0)][1 + (i_3 > 0)][1 + (i_4 > 0)]} \times \\ &\quad \times \mathbb{Q}_\pi \mathbb{D}^{-1} \tilde{\mathbb{A}}_{i_4} \mathbb{D}^{-1} \tilde{\mathbb{A}}_{i_3} \mathbb{D}^{-1} \tilde{\mathbb{A}}_{i_2} \mathbb{D}^{-1}(\tilde{\gamma}_{i_1}, 1, 0, 2[(i_1 + 1)/2]), \quad \dots,\end{aligned}$$

где $\tilde{\gamma}_i = (i > 0)(2 - i \pmod{2})$, и для произвольного $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k} = \frac{\sqrt{T^k}}{\pi^k} \prod_{l=1}^k \sqrt{1 + (i_l > 0)} \mathbb{Q}_\pi \mathbb{D}^{-1} \tilde{\mathbb{A}}_{i_k} \dots \mathbb{D}^{-1} \tilde{\mathbb{A}}_{i_2} \mathbb{D}^{-1}(\tilde{\gamma}_{i_1}, 1, 0, 2[(i_1 + 1)/2]). \quad (4.23)$$

Приведенную методику вычисления коэффициентов разложения функции $\mathbb{k}(\cdot)$ при выборе полиномов Лежандра, косинусоид или тригонометрических функций можно расширить и применить для функций более общего вида, а именно

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_\psi(t_1, \dots, t_k) &= \psi_1(t_1) \dots \psi_k(t_k) \mathbb{k}(t_1, \dots, t_k) = \psi_1(t_1) \dots \psi_k(t_k) 1(t_k - t_{k-1}) \dots 1(t_2 - t_1) = \\ &= \begin{cases} \psi_1(t_1) \dots \psi_k(t_k), & t_1 < \dots < t_k, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (4.24)\end{aligned}$$

где функции $\psi_1(\cdot), \dots, \psi_k(\cdot)$ таковы, что $\mathbb{K}_\psi(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$. При выполнении условия $\psi_1(\cdot), \dots, \psi_k(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ имеем

$$\begin{aligned}\|\mathbb{K}_\psi(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 &= \int_{\mathbb{T}^k} \psi_1^2(t_1) \dots \psi_k^2(t_k) \mathbb{k}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^k} \psi_1^2(t_1) \dots \psi_k^2(t_k) dt_1 \dots dt_k = \int_{\mathbb{T}} \psi_1^2(t) dt \dots \int_{\mathbb{T}} \psi_k^2(t) dt = \|\psi_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 \dots \|\psi_k(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2,\end{aligned}$$

т.е. $\mathbb{K}_\psi(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$.

Коэффициенты разложения функции $\mathbb{K}_\psi(\cdot)$ будем обозначать $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^\psi$:

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^\psi &= (q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot), \mathbb{K}_\psi(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \int_{\mathbb{T}^k} \mathbb{K}_\psi(t_1, \dots, t_k) q(i_1, t_1) \dots q(i_k, t_k) dt_1 \dots dt_k = \\ &= \int_{\mathbb{T}} q(i_k, t_k) \psi_k(t_k) \dots \int_{t_0}^{t_3} q(i_2, t_2) \psi_2(t_2) \int_{t_0}^{t_2} q(i_1, t_1) \psi_1(t_1) dt_1 \dots dt_k, \\ &\quad i_1, \dots, i_k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned} \quad (4.25)$$

Для функций

$$\psi_l(t) = (t - t_0)^{n_l}, \quad n_l \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad l = 1, \dots, k, \quad (4.26)$$

при выборе в качестве базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ пространства $L_2(\mathbb{T})$ косинусоид (1.6) или тригонометрических функций (1.9) достаточно ввести преобразование \mathbb{M}_n четверок (γ, a, ν, b) , отвечающее умножению на моном $(t/\pi)^n$:

$$\mathbb{M}_n(\gamma, a, \nu, b) = \left(\gamma, \frac{a}{\pi^n}, \nu + n, b \right).$$

Запись $\mathbb{M}_n \mathfrak{A}$, как и ранее в аналогичных случаях, означает мультимножество, а именно

объединение множеств $\mathbb{M}_n(\gamma, a, \nu, b) \forall (\gamma, a, \nu, b) \in \mathfrak{A}$:

$$\mathbb{M}_n \mathfrak{A} = \bigcup_{(\gamma, a, \nu, b) \in \mathfrak{A}} \mathbb{M}_n(\gamma, a, \nu, b). \quad (4.27)$$

Соответствующую функцию $\mathbb{K}_\psi(\cdot)$ обозначим $\mathbb{K}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$, а для спектральной характеристики \mathbb{K}^ψ введем обозначение $\mathbb{K}^{n_1 \dots n_k}$. Тогда, переходя к произвольному значению T и учитывая нормировочные коэффициенты, для косинусоид (1.6) получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{i_1 i_2}^{n_1 n_2} &= \frac{T}{\pi^2} \sqrt{[1 + (i_1 > 0)][1 + (i_2 > 0)]} \mathbb{Q}_\pi \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_2} \mathbb{A}_{i_2} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_1}(\gamma_{i_1}, 1, 0, i_1), \\ \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3}^{n_1 n_2 n_3} &= \frac{T\sqrt{T}}{\pi^3} \sqrt{[1 + (i_1 > 0)][1 + (i_2 > 0)][1 + (i_3 > 0)]} \times \\ &\quad \times \mathbb{Q}_\pi \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_3} \mathbb{A}_{i_3} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_2} \mathbb{A}_{i_2} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_1}(\gamma_{i_1}, 1, 0, i_1), \\ \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4} &= \frac{T^2}{\pi^4} \sqrt{[1 + (i_1 > 0)][1 + (i_2 > 0)][1 + (i_3 > 0)][1 + (i_4 > 0)]} \times \\ &\quad \times \mathbb{Q}_\pi \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_4} \mathbb{A}_{i_4} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_3} \mathbb{A}_{i_3} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_2} \mathbb{A}_{i_2} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_1}(\gamma_{i_1}, 1, 0, i_1), \quad \dots, \end{aligned}$$

и в общем случае

$$\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^{n_1 \dots n_k} = \frac{\sqrt{T^k}}{\pi^k} \prod_{l=1}^k \sqrt{1 + (i_l > 0)} \mathbb{Q}_\pi \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_k} \mathbb{A}_{i_k} \dots \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_2} \mathbb{A}_{i_2} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_1}(\gamma_{i_1}, 1, 0, i_1). \quad (4.28)$$

Для тригонометрических функций (1.9) имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{i_1 i_2}^{n_1 n_2} &= \frac{T}{\pi^2} \sqrt{[1 + (i_1 > 0)][1 + (i_2 > 0)]} \mathbb{Q}_\pi \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_2} \tilde{\mathbb{A}}_{i_2} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_1}(\tilde{\gamma}_{i_1}, 1, 0, 2[(i_1 + 1)/2]), \\ \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3}^{n_1 n_2 n_3} &= \frac{T\sqrt{T}}{\pi^3} \sqrt{[1 + (i_1 > 0)][1 + (i_2 > 0)][1 + (i_3 > 0)]} \times \\ &\quad \times \mathbb{Q}_\pi \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_3} \tilde{\mathbb{A}}_{i_3} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_2} \tilde{\mathbb{A}}_{i_2} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_1}(\tilde{\gamma}_{i_1}, 1, 0, 2[(i_1 + 1)/2]), \\ \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4} &= \frac{T^2}{\pi^4} \sqrt{[1 + (i_1 > 0)][1 + (i_2 > 0)][1 + (i_3 > 0)][1 + (i_4 > 0)]} \times \\ &\quad \times \mathbb{Q}_\pi \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_4} \tilde{\mathbb{A}}_{i_4} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_3} \tilde{\mathbb{A}}_{i_3} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_2} \tilde{\mathbb{A}}_{i_2} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_1}(\tilde{\gamma}_{i_1}, 1, 0, 2[(i_1 + 1)/2]), \quad \dots, \end{aligned}$$

а для произвольного $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^{n_1 \dots n_k} = \frac{\sqrt{T^k}}{\pi^k} \prod_{l=1}^k \sqrt{1 + (i_l > 0)} \mathbb{Q}_\pi \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_k} \tilde{\mathbb{A}}_{i_k} \dots \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_2} \tilde{\mathbb{A}}_{i_2} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_1}(\tilde{\gamma}_{i_1}, 1, 0, 2[(i_1 + 1)/2]), \quad (4.29)$$

где величины $(i > 0)$, γ_i и $\tilde{\gamma}_i$ определены ранее при выводе формул (4.22) и (4.23).

При выборе полиномов Лежандра (1.5) можно воспользоваться результатом примера 1.10 для спектральной характеристики A^n оператора умножения \mathcal{A}^n на функцию $a_n(t) = t^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Тогда, принимая во внимание тот факт, что A^n является $(2n + 1)$ -диагональной матрицей, т.е. $A_{ij}^n = 0$ при $|i - j| > n$, находим

$$A^n a \hat{P}(i, t) = at^n \hat{P}(i, t) = \sum_{\substack{j: j \geq 0 \\ |j-i| \leq n}} a A_{ij}^n \hat{P}(j, t).$$

Следовательно, вводя преобразование \mathbb{M}_n пар (i, a) , отвечающее умножению на моном t^n :

$$\mathbb{M}_n(i, a) = \begin{cases} (i, a), & n = 0, \\ \{(j, a A_{ij}^n)\}_{j: j \geq 0, |j-i| \leq n}, & n > 0, \end{cases}$$

и понимая запись $\mathbb{M}_n \mathfrak{A}$ как мультимножество, полученное в результате объединения множеств $\mathbb{M}_n(i, a) \forall (i, a) \in \mathfrak{A}$:

$$\mathbb{M}_n \mathfrak{A} = \bigcup_{(i,a) \in \mathfrak{A}} \mathbb{M}_n(i, a), \quad (4.30)$$

можно записать

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{i_1 i_2}^{n_1 n_2} &= \mathbb{L}_{i_2} \mathbb{M}_{n_2} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_1}(i_1, 1), & \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3}^{n_1 n_2 n_3} &= \mathbb{L}_{i_3} \mathbb{M}_{n_3} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_2} \mathbb{V}_{i_2} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_1}(i_1, 1), \\ \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4} &= \mathbb{L}_{i_4} \mathbb{M}_{n_4} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_3} \mathbb{V}_{i_3} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_2} \mathbb{V}_{i_2} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_1}(i_1, 1), & \dots, \end{aligned}$$

а в общем случае

$$\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^{n_1 \dots n_k} = \mathbb{L}_{i_k} \mathbb{M}_{n_k} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_{k-1}} \mathbb{V}_{i_{k-1}} \dots \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_2} \mathbb{V}_{i_2} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_1}(i_1, 1). \quad (4.31)$$

В данном случае также целесообразно добавить операцию \mathbb{U} приведения подобных, чтобы сократить число элементов мультимножеств, образованных парами (i, a) :

$$\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^{n_1 \dots n_k} = \mathbb{L}_{i_k} \mathbb{U} \mathbb{M}_{n_k} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{U} \mathbb{M}_{n_{k-1}} \mathbb{V}_{i_{k-1}} \dots \mathbb{D}^{-1} \mathbb{U} \mathbb{M}_{n_2} \mathbb{V}_{i_2} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_{n_1}(i_1, 1).$$

4.2. Спектральные характеристики линейных функционалов

Далее определим спектральные характеристики обобщенных функций (линейных функционалов). Пусть \mathcal{Z} — линейный функционал, заданный на пространстве основных функций $D(\mathbb{T}^k)$ — бесконечно дифференцируемых функций, носитель которых содержится в \mathbb{T}^k : $D(\mathbb{T}^k) \subset C^\infty(\mathbb{T}^k) \subset L_2(\mathbb{T}^k)$, $\mathcal{Z}: D(\mathbb{T}^k) \rightarrow \mathbb{R}$; $\{q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty$ — базисная система пространства $L_2(\mathbb{T}^k)$.

Бесконечная k -мерная матрица-столбец $Z = (Z_{i_1 \dots i_k})$ с элементами

$$Z_{i_1 \dots i_k} = \mathcal{Z} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot), \quad i_1, \dots, i_k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.32)$$

называется спектральной характеристикой линейного функционала \mathcal{Z} .

Следуя принятым здесь обозначениям, отображение, ставящее в соответствие линейному функционалу \mathcal{Z} его спектральную характеристику Z , будем называть спектральным преобразованием и обозначать \mathbb{S} . Одна из возможных форм представления спектральных характеристик описана в п. 1 замечаний 4.1. Кроме того, здесь уместно сослаться на рассуждения о корректности определения спектральной характеристики линейного функционала в п. 1 замечаний 1.4.

Если линейный функционал \mathcal{Z} можно представить в виде

$$\mathcal{Z} f(\cdot) = (z(\cdot), f(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^k)}, \quad (4.33)$$

где $z(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$, то его спектральная характеристика — это спектральная характеристика функции $z(\cdot)$: $\mathbb{S}[\mathcal{Z}] = \mathbb{S}[z(\cdot)]$. Такой функционал (регулярную обобщенную функцию) можно продолжить на все пространство $L_2(\mathbb{T}^k)$ и $\|\mathcal{Z}\| = \|z(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}$.

Теорема 4.3. Пусть \mathcal{Z} — линейный функционал, определенный на пространстве $L_2(\mathbb{T}^k)$; $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ — функция многих переменных; Z и F — спектральные характеристики функционала \mathcal{Z} и функции $f(\cdot)$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$. Тогда

$$\mathcal{Z} f(\cdot) = Z^T F. \quad (4.34)$$

Сформулированное утверждение эквивалентно свойству сохранения скалярного произведения при спектральном преобразовании и по сути не отличается от теорем 1.2 и 1.5.

Как и для линейных функционалов, определенных на пространствах основных функций $D(\mathbb{T})$ и $D(\mathbb{T}^2)$ (см. разд. 1.1 и 1.2), если линейный функционал \mathcal{Z} нельзя представить в виде (4.33), его (сингулярную обобщенную функцию) можно рассматривать либо на пространстве основных функций $D(\mathbb{T}^k)$, либо на некотором подпространстве пространства $L_2(\mathbb{T}^k)$ без продолжения на все пространство $L_2(\mathbb{T}^k)$. При этом соотношение (4.34) в общем случае несправедливо.

Приведем примеры линейных функционалов на множестве функций многих переменных.

1. Линейный функционал $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^k}$, ставящий в соответствие функции многих переменных $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ интеграл от этой функции по гиперкубу \mathbb{T}^k :

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}^k} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}^k} f(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k.$$

Функционал $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^k}$ для частных случаев $k = 1$ и $k = 2$ рассмотрен в разд. 1.1 и 1.2, в общем случае ему соответствует функция $z(t_1, \dots, t_k) \equiv 1$ и $z(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$, поэтому по определению спектральной характеристики линейного функционала $\mathbb{S}[\mathcal{J}_{\mathbb{T}^k}] = \mathbb{S}[z(\cdot)] = \mathbf{1}^{\otimes k}$, где элементы спектральной характеристики $\mathbf{1}^{\otimes k}$ задаются соотношением

$$\mathbf{1}_{i_1 \dots i_k}^{\otimes k} = \mathcal{J}_{\mathbb{T}^k} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot) = \int_{\mathbb{T}^k} q(i_1, t_1) \dots q(i_k, t_k) dt_1 \dots dt_k, \quad i_1, \dots, i_k = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда значение функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^k}$ определяется формулой

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}^k} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}^k} f(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k = [\mathbf{1}^{\otimes k}]^T F, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)].$$

Поскольку функция $z(t_1, \dots, t_k) \equiv 1$ удовлетворяет условию $z(\cdot) = z_0(\cdot) \otimes \dots \otimes z_0(\cdot)$, где $z_0(t) \equiv 1$, на основе теоремы 4.2 справедливо представление $\mathbf{1}^{\otimes k} = \mathbf{1} \otimes \dots \otimes \mathbf{1}^T$, где $\mathbf{1}$ — спектральная характеристика функции $z_0(\cdot)$, определенная относительно той же базисной системы, что и спектральная характеристика $\mathbf{1}^{\otimes k}$. Напомним, что $\mathbf{1}$ — спектральная характеристика линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}$, ставящего в соответствие функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ интеграл от этой функции по отрезку \mathbb{T} (см. разд. 1.1).

Для всех перечисленных в разд. 1.1 базисных систем спектральная характеристика $\mathbf{1}^{\otimes k}$ найдена в примере 4.1.

2. Линейный функционал $\mathcal{J}_{\Delta \mathbb{T}^k}$, ставящий в соответствие функции многих переменных $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ повторный интеграл от этой функции:

$$\mathcal{J}_{\Delta \mathbb{T}^k} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} f(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k.$$

Интеграл в правой части последнего выражения можно представить как

$$\int_{\mathbb{T}^k} \mathbb{k}(t_1, \dots, t_k) f(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k,$$

где функция $\mathbb{k}(\cdot)$ задается формулой (4.15), следовательно, в данном случае $z(\cdot) = \mathbb{k}(\cdot)$ и $z(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$. Таким образом, по определению спектральной характеристики линейного функционала $\mathbb{S}[\mathcal{J}_{\Delta \mathbb{T}^k}] = \mathbb{S}[\mathbb{k}(\cdot)] = \mathbb{K}$, где элементы $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}$ спектральной характеристики \mathbb{K} задаются соотношением

$$\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k} = \mathcal{J}_{\Delta \mathbb{T}^k} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot) = \int_{\mathbb{T}} q(i_k, t_k) \dots \int_{t_0}^{t_3} q(i_2, t_2) \int_{t_0}^{t_2} q(i_1, t_1) dt_1 \dots dt_k =$$

$$= \int_{\mathbb{T}^k} \mathbb{K}(t_1, \dots, t_k) q(i_1, t_1) \dots q(i_k, t_k) dt_1 \dots dt_k, \quad i_1, \dots, i_k = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда значение функционала $\mathcal{J}_{\Delta\mathbb{T}^k}$ определяется формулой

$$\mathcal{J}_{\Delta\mathbb{T}^k} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} f(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k = \mathbb{K}^T F, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)].$$

Для части из всех перечисленных в разд. 1.1 базисных систем спектральная характеристика \mathbb{K} найдена выше, а именно для полиномов Лежандра (1.5) ее элементы определяются формулой (4.19), для косинусоид (1.6) и тригонометрических функций (1.9) — формулами (4.22) и (4.23) соответственно. Применение функций Уолша (1.7) и функций Хаара (1.8) далее рассмотрено в разд. 4.3.

3. Линейный функционал $\mathcal{J}_{\Delta\mathbb{T}^k}^\psi$, ставящий в соответствие функции многих переменных $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ повторный интеграл от этой функции с весом $\psi_1(\cdot) \otimes \dots \otimes \psi_k(\cdot)$:

$$\mathcal{J}_{\Delta\mathbb{T}^k}^\psi f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} \psi_1(t_1) \dots \psi_k(t_k) f(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k,$$

где $\psi_l(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ — весовые функции, $l = 1, \dots, k$. Вектор-функция $\psi(t) = [\psi_1(t) \dots \psi_k(t)]^T$ однозначно определяет этот функционал.

По аналогии с предыдущим примером интеграл в правой части можно представить в виде

$$\int_{\mathbb{T}^k} \mathbb{K}_\psi(t_1, \dots, t_k) f(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k,$$

где функция $\mathbb{K}_\psi(\cdot)$ задается формулой (4.24), следовательно, $z(\cdot) = \mathbb{K}_\psi(\cdot)$ и $z(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$. Поэтому по определению спектральной характеристики линейного функционала $\mathbb{S}[\mathcal{J}_{\Delta\mathbb{T}^k}^\psi] = \mathbb{S}[\mathbb{K}_\psi(\cdot)] = \mathbb{K}^\psi$, где элементы $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^\psi$ спектральной характеристики \mathbb{K}^ψ задаются в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^\psi &= \mathcal{J}_{\Delta\mathbb{T}^k}^\psi q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot) = \\ &= \int_{\mathbb{T}} q(i_k, t_k) \psi_k(t_k) \dots \int_{t_0}^{t_3} q(i_2, t_2) \psi_2(t_2) \int_{t_0}^{t_2} q(i_1, t_1) \psi_1(t_1) dt_1 \dots dt_k = \\ &= \int_{\mathbb{T}^k} \mathbb{K}_\psi(t_1, \dots, t_k) q(i_1, t_1) \dots q(i_k, t_k) dt_1 \dots dt_k, \quad i_1, \dots, i_k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Тогда значение функционала $\mathcal{J}_{\Delta\mathbb{T}^k}^\psi$ определяется формулой

$$\mathcal{J}_{\Delta\mathbb{T}^k}^\psi f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} \psi_1(t_1) \dots \psi_k(t_k) f(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k = [\mathbb{K}^\psi]^T F, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)].$$

В частном случае при условии (4.26) для косинусоид (1.6) и тригонометрических функций (1.9) элементы спектральной характеристики $\mathbb{K}^\psi = \mathbb{K}^{n_1 \dots n_k}$ задаются формулами (4.28) и (4.29) соответственно, а для полиномов Лежандра (1.5) — формулой (4.31).

4. Линейный функционал $\delta_{\tau_1, \dots, \tau_k}$, который ставит в соответствие функции многих переменных $f(\cdot) \in D(\mathbb{T}^k)$ ее значение в точке $(\tau_1, \dots, \tau_k) \in \mathbb{T}^k$: $\delta_{\tau_1, \dots, \tau_k} f(\cdot) = f(\tau_1, \dots, \tau_k)$.

Ранее в разд. 1.1 и 1.2 рассмотрены линейные функционалы δ_τ и $\delta_{\theta, \vartheta}$, которые ставят в соответствие функциям $f(\cdot) \in D(\mathbb{T})$ и $f(\cdot) \in D(\mathbb{T}^2)$ их значения в точках $\tau \in \mathbb{T}$ и $(\theta, \vartheta) \in \mathbb{T}^2$. Введение функционала $\delta_{\tau_1, \dots, \tau_k}$ позволяет обобщить эти результаты.

В пространстве $L_2(\mathbb{T}^k)$ нет такого элемента, что функционал $\delta_{\tau_1, \dots, \tau_k}$ задается в виде (4.33), но можно определить обобщенную функцию $\delta((\cdot) - \tau_1) \otimes \dots \otimes \delta((\cdot) - \tau_k)$, которая представля-

ется как импульсная дельта-функция Дирака векторного аргумента $[t_1 - \tau_1 \dots t_k - \tau_k]^T$ [237]:

$$\delta_{\tau_1, \dots, \tau_k} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}^k} \delta(t_1 - \tau_1) \dots \delta(t_k - \tau_k) f(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k = f(\tau_1, \dots, \tau_k).$$

При фиксированных τ_1, \dots, τ_k функционал $\delta_{\tau_1, \dots, \tau_k}$ можно продолжить на множество функций, принадлежащих пространству $L_2(\mathbb{T}^k)$, но непрерывных в точке (τ_1, \dots, τ_k) .

Для элементов спектральной характеристики $\Delta_{\tau_1, \dots, \tau_k}$ линейного функционала $\delta_{\tau_1, \dots, \tau_k}$ согласно определению (4.32) имеем

$$(\Delta_{\tau_1, \dots, \tau_k})_{i_1 \dots i_k} = \delta_{\tau_1, \dots, \tau_k} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot) = q(i_1, \tau_1) \dots q(i_k, \tau_k), \quad i_1, \dots, i_k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.35)$$

Значение функционала $\delta_{\tau_1, \dots, \tau_k}$ определяется следующим выражением (формула обращения (4.5) при $t_1 = \tau_1, \dots, t_k = \tau_k$):

$$\delta_{\tau_1, \dots, \tau_k} f(\cdot) = f(\tau_1, \dots, \tau_k) = \Delta_{\tau_1, \dots, \tau_k}^T F, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)],$$

если числовой ряд $\sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} F_{i_1 \dots i_k} q(i_1, \tau_1) \dots q(i_k, \tau_k)$ сходится к значению функции $f(\tau_1, \dots, \tau_k)$.

Так как значения функций базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ при $t = \tau$ — это элементы спектральной характеристики Δ_{τ} линейного функционала δ_{τ} , или спектральной характеристики дельта-функции $\delta((\cdot) - \tau)$ (см. разд. 1.1 и соотношение (1.35)), используя определение тензорного произведения, можно записать $\Delta_{\tau_1, \dots, \tau_k} = \Delta_{\tau_1} \otimes \dots \otimes \Delta_{\tau_k}$.

Спектральная характеристика F функции $f(\cdot) = f_1(\cdot) \otimes \dots \otimes f_k(\cdot)$ согласно теореме 4.2 представляется в виде тензорного произведения (4.6) спектральных характеристик F_1, \dots, F_k функций $f_1(\cdot), \dots, f_k(\cdot)$ соответственно при условии, что все они определены относительно одной базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$.

Несложно видеть, что значение функционалов $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^k}$ и $\delta_{\tau_1, \dots, \tau_k}$ для таких функций $f(\cdot)$ выражаются следующим образом:

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}^k} f(\cdot) = \prod_{l=1}^k \mathcal{J}_{\mathbb{T}} f_l(\cdot) = \prod_{l=1}^k \mathbf{1}^T F_l \quad \text{и} \quad \delta_{\tau_1, \dots, \tau_k} f(\cdot) = \prod_{l=1}^k \delta_{\tau_l} f_l(\cdot) = \prod_{l=1}^k \Delta_{\tau_l}^T F_l,$$

где $\mathbf{1}$ — спектральная характеристика функции $z_0(t) \equiv 1$ и Δ_{τ} — спектральная характеристика дельта-функции $\delta((\cdot) - \tau)$ (см. разд. 1.1).

Значения функционалов $\mathcal{J}_{\Delta_{\mathbb{T}^k}}$ и $\mathcal{J}_{\Delta_{\mathbb{T}^k}}^{\psi}$ так представить нельзя, однако можно выразить эти значения на основе результатов, изложенных в разд. 1.5 и 1.6.

Теорема 4.4. Пусть функция $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ удовлетворяет условию $f(\cdot) = f_1(\cdot) \otimes \dots \otimes f_k(\cdot)$, F_1, \dots, F_k — спектральные характеристики функций $f_1(\cdot), \dots, f_k(\cdot)$ соответственно, P^{-1} — спектральная характеристика оператора интегрирования, V — спектральная характеристика оператора умножения функций. Спектральные характеристики F_1, \dots, F_k , P^{-1} и V определены относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$. Тогда значение функционала $\mathcal{J}_{\Delta_{\mathbb{T}^k}}$ задается формулой

$$\mathcal{J}_{\Delta_{\mathbb{T}^k}} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} f(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k = F_k^T P^{-1} (V F_{k-1}) \dots P^{-1} (V F_2) P^{-1} F_1. \quad (4.36)$$

Доказательство. Запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1(t) = f_1(t), \quad \dot{x}_2(t) = f_2(t)x_1(t), \quad \dots, \quad \dot{x}_k(t) = f_k(t)x_{k-1}(t), \quad (4.37)$$

$$x_1(t_0) = x_2(t_0) = \dots = x_k(t_0) = 0.$$

Ее решение в квадратурах получается в результате последовательного интегрирования [115]:

$$x_1(t) = \int_{t_0}^t f_1(\tau) d\tau, \quad x_2(t) = \int_{t_0}^t f_2(\tau) x_1(\tau) d\tau, \quad \dots, \quad x_k(t) = \int_{t_0}^t f_k(\tau) x_{k-1}(\tau) d\tau, \quad (4.38)$$

что дает соотношение

$$x_k(t) = \int_{t_0}^t f_k(\tau_k) \dots \int_{t_0}^{\tau_3} f_2(\tau_2) \int_{t_0}^{\tau_2} f_1(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_k, \quad (4.39)$$

т.е. $\mathcal{J}_{\Delta T^k} f(\cdot) = x_k(T)$.

Применим спектральное преобразование к левой и правой частям каждого уравнения системы (4.37):

$$\mathbb{S}[\dot{x}_1(\cdot)|_{x_1(t_0)=0}] = \mathbb{S}[f_1(\cdot)], \quad \mathbb{S}[\dot{x}_2(\cdot)|_{x_2(t_0)=0}] = \mathbb{S}[f_2(\cdot)x_1(\cdot)], \quad \dots, \quad \mathbb{S}[\dot{x}_k(\cdot)|_{x_k(t_0)=0}] = \mathbb{S}[f_k(\cdot)x_{k-1}(\cdot)].$$

По свойству (1.100) спектрального преобразования производных функций одной переменной можно записать $\mathbb{S}[\dot{x}_l(\cdot)|_{x_l(t_0)=0}] = PX_l$, $l = 1, \dots, k$, где X_l — спектральная характеристика функции $x_l(\cdot)$ (см. разд. 1.1), P — спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом начального значения (см. разд. 1.7).

Далее, воспользуемся свойством (1.80) спектрального преобразования произведения функций одной переменной: $\mathbb{S}[f_{l+1}(\cdot)x_l(\cdot)] = (VF_{l+1})X_l$, $l = 1, \dots, k-1$, т.е.

$$PX_1 = F_1, \quad PX_2 = (VF_2)X_1, \quad \dots, \quad PX_k = (VF_k)X_{k-1}, \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} X_1 &= P^{-1}F_1, \quad X_2 = P^{-1}(VF_2)X_1 = P^{-1}(VF_2)P^{-1}F_1, \quad \dots, \\ X_{k-1} &= P^{-1}(VF_{k-1})X_{k-2} = P^{-1}(VF_{k-1}) \dots P^{-1}(VF_2)P^{-1}F_1. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Так как

$$x_k(T) = \int_{\mathbb{T}} f_k(t)x_{k-1}(t) dt = (f_k(\cdot), x_{k-1}(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})},$$

по свойству (1.26) сохранения скалярного произведения получаем $x_k(T) = F_k^T X_{k-1}$, откуда с учетом (4.41) следует, что

$$\mathcal{J}_{\Delta T^k} f(\cdot) = F_k^T X_{k-1} = F_k^T P^{-1}(VF_{k-1}) \dots P^{-1}(VF_2)P^{-1}F_1,$$

т.е. формула (4.36). ◀

Спектральная форма математического описания была предложена для анализа систем управления. В этом контексте уравнения (4.37) можно рассматривать как математическую модель системы управления, для которой функции $f_l(\cdot)$ и $x_l(\cdot)$ — это входные и выходные сигналы соответственно, $l = 1, \dots, k$. Структурная схема такой системы изображена на рис. 4.1.

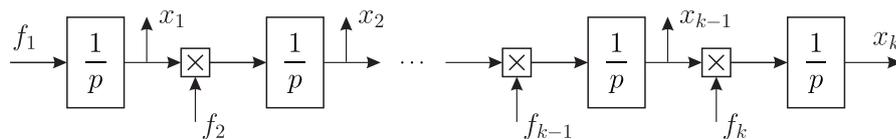


Рис. 4.1. Структурная схема системы управления

Теорема 4.5. Пусть выполнены условия теоремы 4.4. Кроме того, Ψ_1, \dots, Ψ_k — спектральные характеристики операторов умножения на такие функции $\psi_1(\cdot), \dots, \psi_k(\cdot)$, что

$\psi_l(\cdot) f_l(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, $l = 1, \dots, k$. Спектральные характеристики Ψ_1, \dots, Ψ_k определены относительно базисной системы $\{g(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$. Тогда значение функционала $\mathcal{J}_{\Delta\mathbb{T}^k}^\psi$ задается формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\Delta\mathbb{T}^k}^\psi f(\cdot) &= \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} \psi_1(t_1) \dots \psi_k(t_k) f(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k = \\ &= F_k^T \Psi_k P^{-1} \Psi_{k-1} (V F_{k-1}) \dots P^{-1} \Psi_2 (V F_2) P^{-1} \Psi_1 F_1. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Доказательство. Очевидно, что $\mathcal{J}_{\Delta\mathbb{T}^k}^\psi f(\cdot) = \mathcal{J}_{\Delta\mathbb{T}^k} g(\cdot)$, где $g(\cdot) = g_1(\cdot) \otimes \dots \otimes g_k(\cdot)$, $g_l(\cdot) = \psi_l(\cdot) f_l(\cdot)$, $l = 1, \dots, k$.

Согласно теореме 4.4

$$\mathcal{J}_{\Delta\mathbb{T}^k} g(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} g(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k = G_k^T P^{-1} (V G_{k-1}) \dots P^{-1} (V G_2) P^{-1} G_1, \quad (4.43)$$

где G_1, \dots, G_k — спектральные характеристики функций $g_1(\cdot), \dots, g_k(\cdot)$.

Произведения $V G_l$ и $V F_l$ — это спектральные характеристики операторов умножения на функции $g_l(\cdot)$ и $f_l(\cdot)$ соответственно. По свойству (1.64) спектрального преобразования композиции операторов $V G_l = \Psi_l (V F_l)$, $l = 2, \dots, k-1$, а по свойству (1.73) спектрального преобразования произведения функций одной переменной $G_l = \mathbb{S}[g_l(\cdot)] = \Psi_l F_l$, $l = 1, k$.

Подставляя выражения для спектральных характеристик $G_1, V G_2, \dots, V G_{k-1}, G_k$ в соотношение (4.43), получаем формулу (4.42). ◀

Выше отмечена связь между значением функционала $\mathcal{J}_{\Delta\mathbb{T}^k}$, уравнениями (4.37) и системой управления, структурная схема которой изображена на рис. 4.1. Функционалу $\mathcal{J}_{\Delta\mathbb{T}^k}^\psi$ в этом смысле соответствует система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \psi_1(t) f_1(t), \quad \dot{x}_2(t) = \psi_2(t) f_2(t) x_1(t), \quad \dots, \quad \dot{x}_k(t) = \psi_k(t) f_k(t) x_{k-1}(t), \\ x_1(t_0) &= x_2(t_0) = \dots = x_k(t_0) = 0, \end{aligned}$$

а система управления дополнительно содержит усилительные звенья с коэффициентами усиления $\psi_l(\cdot)$, $l = 1, \dots, k$. Структурная схема этой системы показана на рис. 4.2.

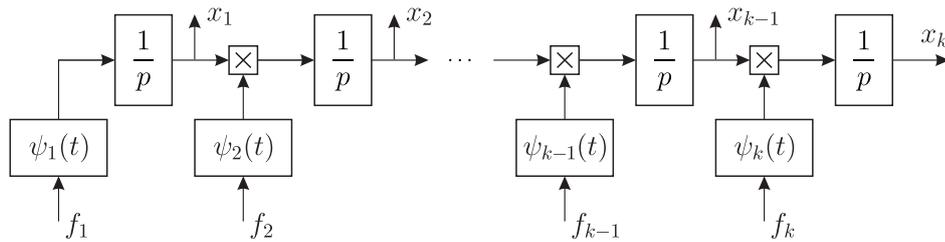


Рис. 4.2. Структурная схема системы управления

Замечания 4.2.

1. Выражения (4.41) можно получить, применяя спектральное преобразование к интегральным соотношениям (4.38) и пользуясь при этом свойством (1.86) спектрального преобразования интегралов от функций одной переменной:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[x_1(\cdot)] &= \mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} f_1(\tau) d\tau\right] = P^{-1} F_1, \\ \mathbb{S}[x_{l+1}(\cdot)] &= \mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} f_{l+1}(\tau) x_l(\tau) d\tau\right] = P^{-1} (V F_{l+1}) X_l, \quad l = 1, 2, \dots, k-1. \end{aligned}$$

2. Согласно свойству (1.80) спектрального преобразования произведения функций одной переменной $\mathbb{S}[f_{l+1}(\cdot)x_l(\cdot)] = (VX_l)F_{l+1}$, $l = 1, 2, \dots, k-1$, поэтому вместо формул (4.40) и (4.41) можно записать следующие соотношения (все необходимые обозначения перечислены в теореме 4.4):

$$PX_1 = F_1, \quad PX_2 = (VX_1)F_2, \quad \dots, \quad PX_k = (VX_{k-1})F_k, \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} X_1 &= P^{-1}F_1, \quad X_2 = P^{-1}(VX_1)F_2 = P^{-1}(VP^{-1}F_1)F_2, \quad \dots \\ X_{k-1} &= P^{-1}(VX_{k-2})F_{k-1} = P^{-1}(\dots(VP^{-1}(VP^{-1}F_1)F_2)\dots)F_{k-1}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Таким образом, получаем формулу для значения функционала $\mathcal{J}_{\Delta T^k}$, эквивалентную формуле (4.36):

$$\mathcal{J}_{\Delta T^k} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} f(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k = F_k^T P^{-1}(\dots(VP^{-1}(VP^{-1}F_1)F_2)\dots)F_{k-1}. \quad (4.46)$$

3. Еще один вариант вычисления значения функционала $\mathcal{J}_{\Delta T^k}$ состоит в том, что величину $x_k(T)$ можно найти с помощью выражения (1.37):

$$x_k(T) = \Delta_T^T X_k, \quad (4.47)$$

где Δ_T — спектральная характеристика линейного функционала δ_T , или спектральная характеристика дельта-функции $\delta(T - (\cdot))$ (см. разд. 1.1 и соотношение (1.35)), при этом спектральную характеристику X_k функции $x_k(\cdot)$ легко найти, продолжая формулы вида (4.41) или (4.45):

$$\begin{aligned} X_k &= P^{-1}(VF_k)X_{k-1} = P^{-1}(VF_k)\dots P^{-1}(VF_2)P^{-1}F_1 \\ \text{или} \quad X_k &= P^{-1}(VX_{k-1})F_k = P^{-1}(\dots(VP^{-1}(VP^{-1}F_1)F_2)\dots)F_k. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\Delta T^k} f(\cdot) &= \Delta_T^T P^{-1}(VF_k)\dots P^{-1}(VF_2)P^{-1}F_1 \\ \text{или} \quad \mathcal{J}_{\Delta T^k} f(\cdot) &= \Delta_T^T P^{-1}(\dots(VP^{-1}(VP^{-1}F_1)F_2)\dots)F_k, \end{aligned}$$

однако выражение (1.37) — это не что иное как формула обращения (1.21) при $t = T$, а числовой ряд $\sum_{i=0}^{\infty} (X_k)_i q(i, T)$ в правой части этой формулы, где $(X_k)_i$ — элементы спектральной характеристики X_k , необязательно сходится к значению функции $x_k(T)$ (см. замечание 1.5). Поэтому формулы (4.36) и (4.46) предпочтительнее (4.47).

4. Нетрудно видеть, что аналогом формулы (4.46) для значения функционала $\mathcal{J}_{\Delta T^k}^{\psi}$, является следующее соотношение (все необходимые обозначения введены в теореме 4.5):

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\Delta T^k}^{\psi} f(\cdot) &= \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} \psi_1(t_1) \dots \psi_k(t_k) f(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k = \\ &= F_k^T \Psi_k P^{-1}(\dots(VP^{-1}(VP^{-1}\Psi_1 F_1)\Psi_2 F_2)\dots)\Psi_{k-1} F_{k-1}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

так как $G_l = \mathbb{S}[g_l(\cdot)] = \Psi_l F_l$, $l = 1, \dots, k$.

5. Линейный функционал \mathcal{Z} для функций $f(\cdot) = f_1(\cdot) \otimes \dots \otimes f_k(\cdot)$ можно рассматривать как полилинейный функционал, определенный на элементах вида $(f_1(\cdot), \dots, f_k(\cdot))$.

Теорема 4.4 позволяет выразить элементы $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}$ спектральной характеристики \mathbb{K} функции $\mathbb{K}(\cdot)$, которая задается формулой (4.15). Действительно, поскольку

$$\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k} = \mathcal{J}_{\Delta T^k} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot),$$

при фиксированных значениях i_1, \dots, i_k полагая $f_1(\cdot) = q(i_1, \cdot), \dots, f_k(\cdot) = q(i_k, \cdot)$ и учитывая, что спектральные характеристики базисных функций $q(i, \cdot)$ — это столбцы единичной матрицы E : $\mathbb{S}[q(i, \cdot)] = E_i, i = 0, 1, 2, \dots$, т.е. $F_1 = E_{i_1}, \dots, F_k = E_{i_k}$, получаем

$$\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k} = E_{i_k}^T P^{-1} (V E_{i_{k-1}}) \dots P^{-1} (V E_{i_2}) P^{-1} E_{i_1} \quad (4.49)$$

или

$$\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k} = E_{i_k}^T P^{-1} (\dots (V P^{-1} (V P^{-1} E_{i_1}) E_{i_2}) \dots) E_{i_{k-1}}. \quad (4.50)$$

Произведение $V E_{i_l}$ — это плоское сечение трехмерной матрицы V , когда фиксируется любой из трех индексов, определяющих ее элементы, на уровне i_l (V является симметрической матрицей по любой паре индексов, см. также п. 3 замечаний 1.10, $l = 2, \dots, k-1$), а произведение $P^{-1} E_{i_1}$ — это сечение двумерной матрицы P^{-1} при втором фиксированном индексе, а именно ее i_1 -й столбец. Будем обозначать такие сечения V_{**i_l} и $P_{*i_1}^{-1}$ соответственно. Аналогично, произведение $E_{i_k}^T P^{-1}$ — это сечение двумерной матрицы P^{-1} при первом фиксированном индексе, т.е. ее i_k -я строка, которую будем обозначать $P_{i_k*}^{-1}$. Следовательно,

$$\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k} = P_{i_k*}^{-1} V_{**i_{k-1}} \dots P^{-1} V_{**i_2} P_{*i_1}^{-1} \quad \text{или} \quad \mathbb{K}_{i_1 \dots i_k} = P_{i_k*}^{-1} (\dots (V P^{-1} (V P_{*i_1}^{-1})_{*i_2}) \dots)_{*i_{k-1}}.$$

Это фактически означает, что

$$\mathbb{K} \doteq \underbrace{P^{-1} V \dots P^{-1} V P^{-1}}_{2k-3 \text{ сомножителей}}, \quad (4.51)$$

где произведение чередующихся спектральных характеристик P^{-1} ($k-1$ множителей) и V ($k-2$ множителей) оператора интегрирования и оператора умножения функций соответственно следует понимать в смысле формул (4.49) или (4.50). Здесь и далее используется знак \doteq вместо знака равенства, чтобы подчеркнуть формальные отличия структуры матриц (но не их элементов) в левой и правой частях соотношения (4.51), а далее соотношений (4.54) и (4.56) (см. п. 1 замечаний 4.1 и пример 4.2).

Таким образом, все коэффициенты разложения $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}$, необходимые для представления функции $\mathbb{K}(\cdot)$ и функционала $\mathcal{J}_{\Delta T^k}$, выражаются через спектральные характеристики P^{-1} и V .

Используя такой же подход с помощью теоремы 4.5 можно выразить элементы $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^\psi$ спектральной характеристики \mathbb{K}^ψ функции $\mathbb{K}_\psi(\cdot)$, определенной формулой (4.24). Тогда, пропуская подробный вывод, получаем

$$\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^\psi = E_{i_k}^T \Psi_k P^{-1} \Psi_{k-1} (V E_{i_{k-1}}) \dots P^{-1} \Psi_2 (V E_{i_2}) P^{-1} \Psi_1 E_{i_1} \quad (4.52)$$

или

$$\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^\psi = E_{i_k}^T \Psi_k P^{-1} (\dots (V P^{-1} (V P^{-1} \Psi_1 E_{i_1}) \Psi_2 E_{i_2}) \dots) \Psi_{k-1} E_{i_{k-1}}. \quad (4.53)$$

Произведение $\Psi_1 E_{i_1}$ — это сечение двумерной матрицы Ψ_1 при втором фиксированном индексе, а именно ее i_1 -й столбец, а произведение $E_{i_k}^T \Psi_k$ — это сечение двумерной матрицы Ψ_k при первом фиксированном индексе, т.е. ее i_k -я строка. Будем обозначать эти сечения $(\Psi_1)_{*i_1}$ и $(\Psi_k)_{i_k*}$ соответственно. Поэтому

$$\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^\psi = (\Psi_k)_{i_k*} P^{-1} \Psi_{k-1} V_{**i_{k-1}} \dots P^{-1} \Psi_2 V_{**i_2} P^{-1} (\Psi_1)_{*i_1}$$

или

$$\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^\psi = (\Psi_k)_{i_k*} P^{-1} (\dots (V P^{-1} \Psi_2 (V P^{-1} (\Psi_1)_{*i_1})_{*i_2}) \dots)_{*i_{k-1}}.$$

Следовательно,

$$\mathbb{K}^\psi \doteq \underbrace{\Psi_k P^{-1} \Psi_{k-1} V \dots P^{-1} \Psi_2 V P^{-1} \Psi_1}_{3k-3 \text{ множителей}}, \quad (4.54)$$

где такое произведение чередующихся спектральных характеристик Ψ_l ($l = 1, \dots, k$; k множителей), P^{-1} ($k-1$ множителей) и V ($k-2$ множителей) оператора интегрирования и оператора умножения функций соответственно понимается в смысле формул (4.52) или (4.53).

Делаем вывод, что все коэффициенты разложения $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^\psi$, необходимые для представления функции $\mathbb{K}_\psi(\cdot)$ и функционала $\mathcal{J}_{\Delta \mathbb{T}^k}^\psi$, выражаются через спектральные характеристики P^{-1} , Ψ_l и V . В частном случае при условии (4.26) каждая спектральная характеристика Ψ_l — это либо бесконечная единичная матрица E , либо n_l -я степень спектральной характеристики A оператора умножения на функцию $a_1(t) = t - t_0$ (см. примеры спектральных характеристик A в разд. 1.5):

$$\Psi_l = A^{n_l} = \begin{cases} E, & n_l = 0, \\ A^{n_l}, & n_l > 0. \end{cases} \quad (4.55)$$

В результате имеем

$$\mathbb{K}^{n_1 \dots n_k} \doteq \underbrace{A^{n_k} P^{-1} A^{n_{k-1}} V \dots P^{-1} A^{n_2} V P^{-1} A^{n_1}}_{3k-3 \text{ множителей}}. \quad (4.56)$$

Отметим, что структура формул (4.19) и (4.31) для коэффициентов разложения $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}$ и $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^{n_1 \dots n_k}$ функций $\mathbb{k}(\cdot)$ и $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$ относительно полиномов Лежандра (1.5) полностью соответствует структуре формул (4.49) и (4.52), а также соотношений (4.51) и (4.54) (или (4.56)) соответственно. Такое же замечание касается формул (4.22) и (4.28) при выборе косинусоид (1.6) или формул (4.23) и (4.29) при выборе тригонометрических функций (1.9).

Пример 4.4. Найти спектральные характеристики трех функций $f_1(t_1, t_2) = t_1 1(t_2 - t_1)$, $f_2(t_1, t_2) = (t_2 - t_1) 1(t_2 - t_1)$ и $f_3(t_1, t_2) = (T - t_2) 1(t_2 - t_1)$, относительно базисных систем (1.5)–(1.9), заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Начнем с функции $\mathbb{k}(t_1, t_2) = 1(t_2 - t_1)$ — функции (4.15) при $k = 2$. Для произвольной базисной системы ее спектральная характеристика \mathbb{K} согласно формуле (4.51) записывается в виде $\mathbb{K} \doteq P^{-1}$, где P^{-1} — спектральная характеристика оператора интегрирования (см. пример 4.2, в нем она обозначена F), что означает $\mathbb{K}_{i_1 i_2} = P_{i_2 i_1}^{-1}$, $i_1, i_2 = 0, 1, 2, \dots$

Далее рассмотрим функцию $\mathbb{k}_\psi(t_1, t_2) = \mathbb{K}_{10}(t_1, t_2) = t_1 1(t_2 - t_1)$, которая в общем виде задается формулой (4.24) с условиями $k = 2$, $\psi_1(t) = t$ и $\psi_2(t) \equiv 1$, т.е. справедливо соотношение (4.26). Ее спектральная характеристика согласно формуле (4.56) представляется следующим образом: $\mathbb{K}^\psi = \mathbb{K}^{10} \doteq P^{-1} A$, где A — спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a_1(t) = t$. Приведенное равенство следует понимать так:

$$\mathbb{K}_{i_1 i_2}^\psi = \mathbb{K}_{i_1 i_2}^{10} = \sum_{j=0}^{\infty} P_{i_2 j}^{-1} A_{j i_1}, \quad i_1, i_2 = 0, 1, 2, \dots$$

Для полиномов Лежандра (1.5) эквивалентная формула получается на основе соотношения (4.31): $\mathbb{K}_{i_1 i_2}^{10} = \mathbb{L}_{i_2} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_1(i_1, 1)$, где операции \mathbb{D}^{-1} , \mathbb{L}_{i_2} и \mathbb{M}_1 задаются выражениями (4.17), (4.18)

и (4.27) соответственно. Аналогично, для косинусоид (1.6) и тригонометрических функций (1.9) согласно соотношениям (4.28) и (4.29) имеем

$$\mathbb{K}_{i_1 i_2}^{10} = \frac{\sqrt{[1 + (i_1 > 0)][1 + (i_2 > 0)]}}{\pi^2} \mathbb{Q}_\pi \mathbb{D}^{-1} \mathbb{A}_{i_2} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_1(\gamma_{i_1}, 1, 0, i_1),$$

$$\mathbb{K}_{i_1 i_2}^{10} = \frac{\sqrt{[1 + (i_1 > 0)][1 + (i_2 > 0)]}}{\pi^2} \mathbb{Q}_\pi \mathbb{D}^{-1} \tilde{\mathbb{A}}_{i_2} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_1(\tilde{\gamma}_{i_1}, 1, 0, 2[(i_1 + 1)/2]),$$

где $\gamma_{i_1} = 2(i_1 > 0)$ и $\tilde{\gamma}_{i_1} = (i_1 > 0)(2 - i_1 \pmod{2})$, а операции \mathbb{D}^{-1} , \mathbb{A}_{i_2} , $\tilde{\mathbb{A}}_{i_2}$, \mathbb{Q}_π и \mathbb{M}_1 задаются выражениями (4.20), (4.21) и (4.30).

Напомним (см. пример 1.11), что произведение $P^{-1}A$ — это двумерная спектральная характеристика H функции $h(t, \tau) = \tau 1(t - \tau)$ и относительно функций Уолша (1.7) и функций Хаара (1.8) она найдена в примере 1.8: $\mathbb{K}_{i_1 i_2}^{10} = [P^{-1}A]_{i_2 i_1} = H_{i_2 i_1}$, $i_1, i_2 = 0, 1, 2, \dots$

Перейдем к функции $\mathbb{k}_\psi(t_1, t_2) = \mathbb{k}_{01}(t_1, t_2) = t_2 1(t_2 - t_1)$. Она также описывается формулой (4.24) при $k = 2$, но с условиями $\psi_1(t) \equiv 1$ и $\psi_2(t) = t$, т.е. опять справедливо соотношение (4.26). Ее спектральная характеристика задается формулой (4.56): $\mathbb{K}^\psi = \mathbb{K}^{01} \doteq AP^{-1}$, т.е.

$$\mathbb{K}_{i_1 i_2}^\psi = \mathbb{K}_{i_1 i_2}^{01} = \sum_{j=0}^{\infty} A_{i_2 j} P_{j i_1}^{-1}, \quad i_1, i_2 = 0, 1, 2, \dots$$

Эквивалентную формулу при выборе полиномов Лежандра дает соотношение (4.31): $\mathbb{K}_{i_1 i_2}^{10} = \mathbb{L}_{i_2} \mathbb{M}_1 \mathbb{D}^{-1}(i_1, 1)$, а при выборе косинусоид и тригонометрических функций — соотношения (4.28) и (4.29) соответственно:

$$\mathbb{K}_{i_1 i_2}^{10} = \frac{\sqrt{[1 + (i_1 > 0)][1 + (i_2 > 0)]}}{\pi^2} \mathbb{Q}_\pi \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_1 \mathbb{A}_{i_2} \mathbb{D}^{-1}(\gamma_{i_1}, 1, 0, i_1),$$

$$\mathbb{K}_{i_1 i_2}^{10} = \frac{\sqrt{[1 + (i_1 > 0)][1 + (i_2 > 0)]}}{\pi^2} \mathbb{Q}_\pi \mathbb{D}^{-1} \mathbb{M}_1 \tilde{\mathbb{A}}_{i_2} \mathbb{D}^{-1}(\tilde{\gamma}_{i_1}, 1, 0, 2[(i_1 + 1)/2]),$$

где величины γ_{i_1} и $\tilde{\gamma}_{i_1}$ определены выше.

Кроме того, произведение AP^{-1} — это двумерная спектральная характеристика M функции $m(t, \tau) = t 1(t - \tau)$ (см. пример 1.11). Все необходимые соотношения для нее при выборе функций Уолша и Хаара получены в примере 1.8: $\mathbb{K}_{i_1 i_2}^{01} = [AP^{-1}]_{i_2 i_1} = M_{i_2 i_1}$, $i_1, i_2 = 0, 1, 2, \dots$

Теперь обратимся к заданным функциям и укажем их спектральные характеристики. Первая из них — функция $f_1(\cdot)$ — совпадает с $\mathbb{k}_{10}(\cdot)$, т.е. ее спектральная характеристика F_1 — это спектральная характеристика \mathbb{K}^{10} . Вторая функция $f_2(\cdot)$ — это разность $\mathbb{k}_{01}(\cdot)$ и $\mathbb{k}_{10}(\cdot)$, таким образом, ее спектральная характеристика F_2 представляется как разность спектральных характеристик \mathbb{K}^{01} и \mathbb{K}^{10} . А третья функция $f_3(\cdot)$ — это линейная комбинация функций $\mathbb{k}(\cdot)$ и $\mathbb{k}_{01}(\cdot)$, поэтому ее спектральная характеристика F_3 представляется в виде линейной комбинации спектральных характеристик \mathbb{K} и \mathbb{K}^{01} с такими же коэффициентами. Следовательно, $F_1 = \mathbb{K}^{10}$, $F_2 = \mathbb{K}^{01} - \mathbb{K}^{10}$, $F_3 = T\mathbb{K} - \mathbb{K}^{01}$, или $F_1 \doteq P^{-1}A$, $F_2 \doteq AP^{-1} - P^{-1}A$, $F_3 \doteq TP^{-1} - AP^{-1} = (TE - A)P^{-1}$.

Добавим, что, применяя соотношение $P^{-2} = AP^{-1} - P^{-1}A$ для двумерной спектральной характеристики функции $l(t, \tau) = (t - \tau) 1(t - \tau)$, полученное в примере 1.12 (см. также формулы (1.91)), можно записать $F_2 \doteq P^{-2}$ и использовать результаты указанного примера при выборе полиномов Лежандра или косинусоид в качестве базисной системы для нахождения спектральной характеристики функции $f_2(\cdot)$. ■

4.3. Симметризованные функции и их спектральные характеристики

Далее при изложении основных результатов, связанных с представлением кратных стохастических интегралов (см. разд. 5.2), требуется рассматривать симметризованные функции по части переменных или по всем переменным. Для этого введем дополнительные обозначения.

Определим множество $J = \{j_1, \dots, j_k\}$, где $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, s\}$; k, s — заданные натуральные числа. Упорядоченный набор $(j_1 \dots j_k)$ (кортеж, мультииндекс) будем обозначать \bar{J} и рассматривать его как мультимножество — множество, которое может содержать одинаковые элементы, $\#(j, \bar{J})$ — кратность элемента j в мультимножестве \bar{J} . Также будем использовать обозначение $|\cdot|$ для количества разных элементов множеств или всех элементов мультимножеств: $|J| \leq k$, $|\bar{J}| = k$ ($|\bar{J}|$ — размерность кортежа): $|\bar{J}| = \sum_{j \in J} \#(j, \bar{J})$.

Разные элементы j_1, \dots, j_k будем обозначать $j_{(1)}, \dots, j_{(|J|)}$. Например, пусть $k = 4$, $s = 5$ и $\bar{J} = (2521)$, тогда

$$J = \{1, 2, 5\}, |J| = 3, |\bar{J}| = 4, \#(1, \bar{J}) = 1, \#(2, \bar{J}) = 2, \#(5, \bar{J}) = 1, j_{(1)} = 1, j_{(2)} = 2, j_{(3)} = 5.$$

Введем отношение эквивалентности \sim для переменных из множества $\mathbf{T} = \{t_1, \dots, t_k\}$:

$$t_l \sim t_m \iff j_l = j_m, \quad l, m = 1, \dots, k,$$

и обозначим через \mathbf{T}/\sim множество всех классов эквивалентности \mathbf{T}_j :

$$\mathbf{T} = \bigcup_{j \in J} \mathbf{T}_j, \quad \mathbf{T}_{j_l} \cap \mathbf{T}_{j_m} = \emptyset \quad \forall j_l, j_m \in J: j_l \neq j_m.$$

Далее будем использовать обозначение $\sum_{(\mathbf{T}/\sim)}$, которое предполагает суммирование функций по всем перестановкам переменных в каждом классе эквивалентности \mathbf{T}_j , $j \in J$.

Пусть $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$. Определим функцию $f_{\bar{J}}(\cdot)$ с помощью симметризации:

$$f_{\bar{J}}(t_1, \dots, t_k) = \langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}} = \frac{1}{M_{\bar{J}}^2} \sum_{(\mathbf{T}/\sim)} f(t_1, \dots, t_k), \quad (4.57)$$

где величина $M_{\bar{J}}^2$ равна числу слагаемых в правой части выражения (4.57):

$$M_{\bar{J}}^2 = \prod_{j \in J} (\#(j, \bar{J}))!, \quad (4.58)$$

и отметим, что

$$\min_{\bar{J}} M_{\bar{J}}^2 = 1 \quad \text{и} \quad \max_{\bar{J}} M_{\bar{J}}^2 = k!. \quad (4.59)$$

В начатом выше примере для множества $\mathbf{T} = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ классы эквивалентности определяются следующим образом: $\mathbf{T}_1 = \{t_4\}$, $\mathbf{T}_2 = \{t_1, t_3\}$, $\mathbf{T}_5 = \{t_2\}$, и

$$M_{\bar{J}}^2 = 1!2!1! = 2, \quad f_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{f(t_1, t_2, t_3, t_4) + f(t_3, t_2, t_1, t_4)}{2}.$$

Для функции $f_{\bar{J}}(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ справедлива следующая оценка нормы:

$$\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \left\| \frac{1}{M_{\bar{J}}^2} \sum_{(\mathbf{T}/\sim)} f(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{T}^k)} \leq \frac{1}{M_{\bar{J}}^2} \sum_{(\mathbf{T}/\sim)} \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}. \quad (4.60)$$

Симметризованные функции (4.57) образуют линейное подпространство в $L_2(\mathbb{T}^k)$, которое будем обозначать $L_2^{s(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$, симметризирующий оператор $\langle \cdot \rangle_{\bar{J}}: L_2(\mathbb{T}^k) \rightarrow L_2^{s(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ является линейным ограниченным оператором, его норма равна единице, что следует из оценки

(4.60). Если значения j_1, \dots, j_k попарно различны, т.е. $|J| = k$, то $\langle \cdot \rangle_{\bar{J}}$ — это тождественный оператор.

Дополнительно рассмотрим частный случай функций $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$, для которых

$$\text{supp } f(\cdot) \subseteq \Delta \mathbb{T}^k = \{(t_1, \dots, t_k) : t_1 < \dots < t_k\}, \quad (4.61)$$

т.е. если $(t_1, \dots, t_k) \notin \Delta \mathbb{T}^k$, то $f(t_1, \dots, t_k) = 0$. Таким свойством обладают функции (4.15) и (4.24). Применяя симметризацию к функции $f(\cdot)$, получаем ортогональное разложение функции $f_{\bar{J}}(\cdot)$, поскольку функции в правой части формулы (4.57) имеют непересекающиеся носители и их попарные скалярные произведения в пространстве $L_2(\mathbb{T}^k)$ равны нулю. Следовательно,

$$\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 = \frac{1}{M_{\bar{J}}^4} \sum_{(\mathbf{T}/\sim)} \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2,$$

а так как нормы всех слагаемых одинаковы и их количество $M_{\bar{J}}^2$, приходим к равенству

$$\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)} = M_{\bar{J}} \|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}. \quad (4.62)$$

Пример 4.5. Найти симметризованные функции для единичной ступенчатой функции $\mathbb{k}(t_1, t_2) = 1(t_2 - t_1)$, функций $\mathbb{k}_{10}(t_1, t_2) = t_1 1(t_2 - t_1)$ и $\mathbb{k}_{01}(t_1, t_2) = t_2 1(t_2 - t_1)$ при $\bar{J} = (j_1 j_2)$, где $j_1 = j_2$, $(t_1, t_2) \in \mathbb{T}^2$.

□ Поскольку $j_1 = j_2$, множество переменных $\mathbf{T} = \{t_1, t_2\}$ совпадает с классом эквивалентности и фактор-множество состоит из одного элемента:

$$\mathbf{T}/\sim = \underbrace{\{t_1, t_2\}}_{\mathbb{T}_j}, \quad j = j_1 = j_2, \quad \#(j, \bar{J}) = 2, \quad M_{\bar{J}}^2 = 2! = 2.$$

Для функции $\mathbb{k}(\cdot)$ получаем

$$\mathbb{k}_{\bar{J}}(t_1, t_2) = \langle \mathbb{k}(\cdot) \rangle_{\bar{J}} = \frac{1(t_2 - t_1) + 1(t_1 - t_2)}{2} = \begin{cases} 1/2, & t_1 \neq t_2, \\ 0, & t_1 = t_2, \end{cases}$$

но она отличается от функции $f(t_1, t_2) \equiv 1/2$ на диагонали квадрата \mathbb{T}^2 , т.е. на множестве нулевой меры в \mathbb{R}^2 , и в пространстве $L_2(\mathbb{T}^2)$ эти функции принадлежат одному классу эквивалентности (см. замечание 1.7). Далее будем полагать, что

$$\mathbb{k}_{\bar{J}}(t_1, t_2) \equiv \frac{1}{2}.$$

Перейдем к функции $\mathbb{k}_{10}(\cdot)$ (см. также пример 2.2):

$$\mathbb{k}_{10\bar{J}}(t_1, t_2) = \langle \mathbb{k}_{10}(\cdot) \rangle_{\bar{J}} = \frac{t_1 1(t_2 - t_1) + t_2 1(t_1 - t_2)}{2} = \begin{cases} t_1/2, & t_1 < t_2, \\ 0, & t_1 = t_2, \\ t_2/2, & t_1 > t_2, \end{cases}$$

т.е.

$$\mathbb{k}_{10\bar{J}}(t_1, t_2) = \frac{\min\{t_1, t_2\}}{2}$$

с учетом доопределения этой функции по непрерывности на диагонали квадрата \mathbb{T}^2 .

Действуя по аналогии, для функции $\mathbb{k}_{01}(\cdot)$ находим

$$\mathbb{k}_{01\bar{J}}(t_1, t_2) = \frac{\max\{t_1, t_2\}}{2}. \quad \blacksquare$$

В примере 4.5 приведены симметризованные функции для единичной ступенчатой функции $\mathbb{k}(t_1, t_2) = 1(t_2 - t_1)$, функций $\mathbb{k}_{10}(t_1, t_2) = t_1 1(t_2 - t_1)$ и $\mathbb{k}_{01}(t_1, t_2) = t_2 1(t_2 - t_1)$. Этот результат

востребован в дальнейшем, поэтому оформим его в виде табл. 4.1, включив в нее также некоторые линейные комбинации перечисленных функций.

Таблица 4.1. Типовые симметризованные функции двух переменных при $j_1 = j_2$

$f(t_1, t_2)$	$f_{\bar{j}}(t_1, t_2)$
$1(t_2 - t_1)$	$\frac{1}{2}$
$t_1 1(t_2 - t_1)$	$\frac{\min\{t_1, t_2\}}{2}$
$t_2 1(t_2 - t_1)$	$\frac{\max\{t_1, t_2\}}{2}$
$(T - t_1)1(t_2 - t_1)$	$\frac{T - \min\{t_1, t_2\}}{2} = \frac{\max\{T - t_1, T - t_2\}}{2}$
$(T - t_2)1(t_2 - t_1)$	$\frac{T - \max\{t_1, t_2\}}{2} = \frac{\min\{T - t_1, T - t_2\}}{2}$
$(t_2 - t_1)1(t_2 - t_1)$	$\frac{\max\{t_1, t_2\} - \min\{t_1, t_2\}}{2} = \frac{\max\{t_1 - t_2, t_2 - t_1\}}{2} = -\frac{\min\{t_1 - t_2, t_2 - t_1\}}{2}$

Введем отношение эквивалентности \sim для индексов из множества $\mathbf{I} = \{i_1, \dots, i_k\}$ и обозначим через \mathbf{I}/\sim множество всех классов эквивалентности \mathbf{I}_j . Отличие от множеств \mathbf{T} , \mathbf{T}_j и \mathbf{T}/\sim состоит только в обозначениях.

Пусть $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ — базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$, а $F_{i_1 \dots i_k}$ — коэффициенты разложения (4.4) этой функции в ряд по функциям базисной системы $\{q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty$ пространства $L_2(\mathbb{T}^k)$. Согласно теореме 4.1 функция $f_{\bar{j}}(\cdot)$ представляется в виде ряда (4.3):

$$f_{\bar{j}}(\cdot) = \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} \tilde{F}_{i_1 \dots i_k} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot),$$

где коэффициенты разложения $\tilde{F}_{i_1 \dots i_k}$ выражаются через коэффициенты разложения $F_{i_1 \dots i_k}$, заданные формулой (4.4):

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{i_1 \dots i_k} &= (q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot), f_{\bar{j}}(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \left(q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot), \frac{1}{M_{\bar{j}}^2} \sum_{(\mathbf{T}/\sim)} f(\cdot) \right)_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \\ &= \frac{1}{M_{\bar{j}}^2} \sum_{(\mathbf{I}/\sim)} (q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot), f(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \frac{1}{M_{\bar{j}}^2} \sum_{(\mathbf{I}/\sim)} F_{i_1 \dots i_k}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

где зависимость $\tilde{F}_{i_1 \dots i_k}$ от \bar{j} для упрощения обозначений не указана, а $\sum_{(\mathbf{I}/\sim)}$ означает суммирование коэффициентов разложения по всем перестановкам индексов в каждом классе эквивалентности \mathbf{I}_j , $j \in J$.

Коэффициенты разложения $\tilde{F}_{i_1 \dots i_k}$ образуют спектральную характеристику функции $f_{\bar{j}}(\cdot)$, которую будем обозначать $F_{\bar{j}}$, при этом справедлива оценка нормы:

$$\|F_{\bar{j}}\|_{\ell_2^k} \leq \|F\|_{\ell_2^k}, \quad \mathbb{S}[f(\cdot)] = F, \quad \mathbb{S}[f_{\bar{j}}(\cdot)] = F_{\bar{j}}, \quad (4.64)$$

она следует из оценки (4.60) и свойства (4.10) сохранения нормы.

Фактически, спектральная характеристика $F_{\bar{j}}$ выражается как линейная комбинация спектральной характеристики F и спектральных характеристик, полученных из F с помощью операции транспонирования [218] в соответствии с перестановками индексов в каждом классе

эквивалентности \mathbf{I}_j , $j \in J$. Коэффициенты этой линейной комбинации одинаковы, они равны $1/M_{\bar{J}}^2$. Далее будем называть спектральную характеристику $F_{\bar{J}}$ симметризованной спектральной характеристикой. Здесь предполагается, что спектральные характеристики F и $F_{\bar{J}}$ определены относительно одной базисной системы.

Для иллюстрации обратимся к примеру 4.5, в котором было показано, что единичной ступенчатой функции $\mathbb{k}(t_1, t_2) = 1(t_2 - t_1)$ соответствует симметризованная функция $\mathbb{K}_{\bar{J}}(t_1, t_2) \equiv 1/2$ при $\bar{J} = (j_1 j_2)$, где $j_1 = j_2$ ($M_{\bar{J}}^2 = 2$).

Элементы $\mathbb{K}_{i_1 i_2}$ и $\mathbb{K}_{\bar{J} i_1 i_2}$ спектральных характеристик \mathbb{K} и $\mathbb{K}_{\bar{J}}$ функций $\mathbb{k}(\cdot)$ и $\mathbb{K}_{\bar{J}}(\cdot)$ соответственно, определенные относительно одной базисной системы, связаны выражением (4.63):

$$(\mathbb{K}_{\bar{J}})_{i_1 i_2} = \frac{\mathbb{K}_{i_1 i_2} + \mathbb{K}_{i_2 i_1}}{2},$$

а согласно свойству линейности (4.9), теореме 4.2 и примеру 4.1 имеем

$$\mathbb{K}_{\bar{J}} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}^{\otimes 2} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1} \otimes \mathbf{1},$$

где $\mathbf{1}$ — спектральная характеристика функции $f_0(t) \equiv 1$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$.

В терминах двумерных спектральных характеристик функций двух переменных, рассмотренных в разд. 1.2, эти выражения соответствуют связи (1.87) спектральных характеристик оператора интегрирования и сопряженного с ним.

З а м е ч а н и я 4.3.

1. Для определения симметризованной функции важны не конкретные значения j_1, \dots, j_k , а только их равенства или неравенства в разных комбинациях. Например, если $k = 3$ и $s = 4$, то операторы $\langle \cdot \rangle_{\bar{J}}$ при $\bar{J} = (112)$, $\bar{J} = (441)$, $\bar{J} = (223)$ одинаковы.

2. Если определить множества $N_j = \{n: j_n = j\}$, то $\mathbf{T}_j = \{t_n: n \in N_j\}$ и $\mathbf{I}_j = \{i_n: n \in N_j\}$, $j \in J$.

3. Каждому классу эквивалентности \mathbf{T}_j можно сопоставить симметрическую группу подстановок $\pi_j = S_{\#(j, \bar{J})}$ [97], а каждому элементу $\alpha \in \pi_j$ — оператор $\Pi_{\alpha}^j: L_2(\mathbb{T}^k) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^k)$, который ставит в соответствие функции $f(\cdot)$ функцию, у которой другой порядок следования аргументов за исключением случая, когда α — единичный элемент группы, а Π_{α}^j — тождественный оператор.

Например, пусть $\pi_j = S_3$ для некоторого $j \in J$ и $\alpha \in \pi_j: \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, тогда $\Pi_{\alpha}^j f(\cdot) = f^{\alpha}(\cdot)$, где $f^{\alpha}(t_1, t_2, t_3, \dots, t_k) = f(t_2, t_1, t_3, \dots, t_k) \forall (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{T}^k$.

Таким образом, получаем более строгое определение симметризованной функции $f_{\bar{J}}(\cdot)$ вместо краткой формы (4.57):

$$f_{\bar{J}}(\cdot) = \frac{1}{M_{\bar{J}}^2} \sum_{\alpha_{(1)} \in \pi_{(1)}} \dots \sum_{\alpha_{(|J|)} \in \pi_{|J|}} \Pi_{\alpha_{(1)}}^{j(1)} \circ \dots \circ \Pi_{\alpha_{(|J|)}}^{j(|J|)} f(\cdot).$$

Аналогично можно ввести оператор транспонирования спектральных характеристик $\mathcal{T}_{\alpha}^j: \ell_2^k \rightarrow \ell_2^k$, сопоставленный каждому элементу $\alpha \in \pi_j$. Тогда

$$F_{\bar{J}} = \frac{1}{M_{\bar{J}}^2} \sum_{\alpha_{(1)} \in \pi_{(1)}} \dots \sum_{\alpha_{(|J|)} \in \pi_{|J|}} \mathcal{T}_{\alpha_{(1)}}^{j(1)} \circ \dots \circ \mathcal{T}_{\alpha_{(|J|)}}^{j(|J|)} F.$$

Продолжая пример, для симметризованной спектральной характеристики имеем $\mathcal{T}_\alpha^j F = F^\alpha$, где $F_{i_1 i_2 i_3 \dots i_k}^\alpha = F_{i_2 i_1 i_3 \dots i_k}$, $i_1, \dots, i_k = 0, 1, 2, \dots$

В разд. 4.1 представлены соотношения для вычисления элементов $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}$ спектральных характеристик функции $\mathbb{k}(\cdot)$, заданной формулой (4.15), относительно полиномов Лежандра (1.5), косинусоид (1.6) и тригонометрических функций (1.9). Далее покажем, каким образом могут быть найдены элементы $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}$, если в качестве базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ применять функции Уолша (1.7) или функции Хаара (1.8). Выберем число $L = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, обозначим $h = T/L$ и найдем величины

$$\tilde{\mathbb{K}}_{i_1 \dots i_k} = \int_{\mathbb{T}^k} \hat{\Pi}(i_1, t_1) \dots \hat{\Pi}(i_k, t_k) \mathbb{k}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k, \quad i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, L-1,$$

где $\{\hat{\Pi}(i, \cdot)\}_{i=0}^{L-1}$ — блочно-импульсные функции (1.15).

Если $i_1 < \dots < i_k$, то $\tilde{\mathbb{K}}_{i_1 \dots i_k} = \sqrt{h^k}$, поскольку $Q_{i_1 \dots i_k}$ — носитель функции $\hat{\Pi}(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes \hat{\Pi}(i_k, \cdot)$: $Q_{i_1 \dots i_k} = \text{supp } \hat{\Pi}(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes \hat{\Pi}(i_k, \cdot)$, содержится в множестве $\{(t_1, \dots, t_k) : \mathbb{k}(t_1, \dots, t_k) = 1\}$, — это объем $(k+1)$ -мерного параллелепипеда $Q_{i_1 \dots i_k} \times [0, 1/\sqrt{h^k}]$. Если не выполняется хотя бы одно из неравенств $i_1 \leq i_2, i_2 \leq i_3, \dots, i_{k-1} \leq i_k$, то $\tilde{\mathbb{K}}_{i_1 \dots i_k} = 0$, поскольку $Q_{i_1 \dots i_k}$ содержится в множестве $\{(t_1, \dots, t_k) : \mathbb{k}(t_1, \dots, t_k) = 0\}$. Более интересный случай соответствует выполнению хотя бы одного из равенств $i_1 = i_2, i_2 = i_3, \dots, i_{k-1} = i_k$. Опуская для краткости зависимость от i_1, \dots, i_k , обозначим через I множество $\{i_1, \dots, i_k\}$, а через \bar{I} мультимножество $(i_1 \dots i_k)$, т.е. множество, которое в отличие от I может содержать одинаковые элементы, $\#(i, \bar{I})$ — кратность элемента i в мультимножестве \bar{I} . Тогда величина $\tilde{\mathbb{K}}_{i_1 \dots i_k}$, равная объему многогранной области, содержащейся в $(k+1)$ -мерном параллелепипеде $Q_{i_1 \dots i_k} \times [0, 1/\sqrt{h^k}]$, определяется соотношением

$$\tilde{\mathbb{K}}_{i_1 \dots i_k} = \sqrt{h^k} \left(\prod_{i \in I} \#(i, \bar{I})! \right)^{-1}. \quad (4.65)$$

Действительно, пусть образующие мультимножество $\bar{J} = (j_1 \dots j_k)$ значения совпадают: $j_1 = \dots = j_k$. Тогда симметризованная функция $\langle \mathbb{k}(\cdot) \rangle_{\bar{J}}$ для функции $\mathbb{k}(\cdot)$ отличается от функции $f(t_1, \dots, t_k) \equiv 1/k!$ на множестве нулевой меры в \mathbb{R}^k , т.е. в пространстве $L_2(\mathbb{T}^k)$ функции $\langle \mathbb{k}(\cdot) \rangle_{\bar{J}}$ и $f(\cdot)$ не различаются (см. также пример 4.5). Тогда $\sum_{(\mathbb{T}/\sim)} \mathbb{k}(t_1, \dots, t_k) \equiv 1$ и с учетом формулы (4.63)

$$\sum_{(\mathbb{I}/\sim)} \tilde{\mathbb{K}}_{i_1 \dots i_k} = k! (\hat{\Pi}(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes \hat{\Pi}(i_k, \cdot), f(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \sqrt{h^k}.$$

Индексы ненулевых слагаемых в левой части записанного равенства удовлетворяют условию $i_1 \leq \dots \leq i_k$, а их количество совпадает с числом перестановок индексов, при которых не меняется мультимножество \bar{I} . Поэтому

$$\sum_{(\mathbb{I}/\sim)} \tilde{\mathbb{K}}_{i_1 \dots i_k} = \tilde{\mathbb{K}}_{i_1 \dots i_k} \prod_{i \in I} \#(i, \bar{I})! = \sqrt{h^k},$$

что доказывает формулу (4.65).

Остается воспользоваться связью (1.17) между блочно-импульсными функциями и функциями Уолша, тогда

$$\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k} = (\hat{W}(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes \hat{W}(i_k, \cdot), \mathbb{k}(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \int_{\mathbb{T}^k} \hat{W}(i_1, t_1) \dots \hat{W}(i_k, t_k) \mathbb{k}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k =$$

$$= \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^{L-1} \frac{\Delta_{i_1 j_1}}{\hat{W}_{\hat{\Pi}}} \cdots \frac{\Delta_{i_k j_k}}{\hat{W}_{\hat{\Pi}}} \int_{\mathbb{T}^k} \hat{\Pi}(j_1, t_1) \cdots \hat{\Pi}(j_k, t_k) \mathbb{k}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \cdots dt_k.$$

Поэтому коэффициенты разложения $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}$ функции $\mathbb{k}(\cdot)$ по функциям Уолша имеют вид

$$\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k} = \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^{L-1} \frac{\Delta_{i_1 j_1}}{\hat{W}_{\hat{\Pi}}} \cdots \frac{\Delta_{i_k j_k}}{\hat{W}_{\hat{\Pi}}} \tilde{\mathbb{K}}_{j_1 \dots j_k}. \quad (4.66)$$

Поступая аналогично, на основе соотношения (1.19), связывающего блочно-импульсные функции и функции Хаара, находим коэффициенты разложения $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}$ функции $\mathbb{k}(\cdot)$ по функциям Хаара:

$$\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k} = \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^{L-1} \frac{\Delta_{i_1 j_1}}{\hat{X}_{\hat{\Pi}}} \cdots \frac{\Delta_{i_k j_k}}{\hat{X}_{\hat{\Pi}}} \tilde{\mathbb{K}}_{j_1 \dots j_k}. \quad (4.67)$$

Напомним, что элементы квадратных матриц $\frac{\Delta}{\hat{W}_{\hat{\Pi}}}$ и $\frac{\Delta}{\hat{X}_{\hat{\Pi}}}$ размеров $L \times L$, которые используются в формулах (4.66) и (4.67), задаются выражениями (1.16) и (1.18) соответственно. Компактная форма записи соотношений (4.66) и (4.67) — аналог формул (4.13) — имеет вид

$$\mathbb{K} = \frac{\Delta}{\hat{W}_{\hat{\Pi}}}^{\otimes k} \tilde{\mathbb{K}} \quad \text{и} \quad \mathbb{K} = \frac{\Delta}{\hat{X}_{\hat{\Pi}}}^{\otimes k} \tilde{\mathbb{K}}.$$

4.4. Матричные и интегральные следы

Пусть $\mathcal{S}^\varepsilon: L_2(\mathbb{T}^k) \rightarrow C(\mathbb{T}^k)$, $\mathbb{T} = [t_0, T]$, — усредняющий оператор [253]:

$$\mathcal{S}^\varepsilon f(\cdot) = \frac{1}{(2\varepsilon)^k} \int_{D_\varepsilon(\cdot)} f(\tau_1, \dots, \tau_k) d\tau_1 \cdots d\tau_k, \quad \varepsilon > 0,$$

где $D_\varepsilon(t_1, \dots, t_k) = \{(\tau_1, \dots, \tau_k) \in \mathbb{T}^k: \max_{l=1, \dots, k} |t_l - \tau_l| < \varepsilon\}$, т.е. \mathcal{S}^ε — линейный оператор, ставящий в соответствие функции $f(\cdot)$ непрерывную функцию, значение которой в каждой точке (t_1, \dots, t_k) определяется как среднее значение $f(\cdot)$ на гиперкубе $D_\varepsilon(t_1, \dots, t_k) \subset \mathbb{R}^k$ с центром в этой точке и стороной 2ε , если доопределить функцию $f(\cdot)$ вне гиперкуба \mathbb{T}^k нулем.

Тогда $\bar{f}(t_1, \dots, t_k) = f(t_1, \dots, t_k)$ при почти всех $(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{T}^k$, где

$$\bar{f}(\cdot) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{S}^\varepsilon f(\cdot), \quad (4.68)$$

причем $\mathcal{S}^\varepsilon f(\cdot)$ можно рассматривать как непрерывную функцию параметра $\varepsilon \in [0, +\infty)$.

Далее введем новые обозначения. Пусть $\mathbf{T}_j^{(\nu_j)}$ — это множество всех подмножеств \mathbf{T}_j , представленных ν_j неупорядоченными парами переменных из \mathbf{T}_j (переменные в паре не совпадают), $\nu_j \in \{0, \dots, \lfloor \#(j, \bar{J})/2 \rfloor\}$, $j \in J$, где $J = \{j_1, \dots, j_k\} = \{j_{(1)}, \dots, j_{(|J|)}\}$, $\bar{J} = (j_1 \dots j_k)$, и $(\mathbf{T}/\sim)^{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)} \rangle} = \mathbf{T}_{j_{(1)}}^{\langle \nu_{(1)} \rangle} \times \cdots \times \mathbf{T}_{j_{(|J|)}}^{\langle \nu_{(|J|)} \rangle}$.

Каждый элемент ϖ множества $(\mathbf{T}/\sim)^{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)} \rangle} \neq \emptyset$ — это набор пар переменных из множества \mathbf{T} , а $\bar{\varpi}$ — множество переменных, образующих эти пары:

$$\varpi = ((t_{l_1}, t_{m_1}), \dots, (t_{l_\gamma}, t_{m_\gamma})), \quad \bar{\varpi} = \{t_{l_1}, t_{m_1}, \dots, t_{l_\gamma}, t_{m_\gamma}\}, \quad (4.69)$$

$$l_1, m_1, \dots, l_\gamma, m_\gamma \in \{1, \dots, k\}, \quad \gamma = \nu_{(1)} + \dots + \nu_{(|J|)},$$

где количество элементов $r_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)} \rangle} = |(\mathbf{T}/\sim)^{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)} \rangle}|$ этого множества зависит от $\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)}$ и выражается следующим образом:

$$r_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)} \rangle} = \prod_{j \in J} h_{i-2\nu(j)}^{(i)} \Big|_{i=\#(j, \bar{J})}, \quad h_{i-2\nu}^{(i)} = \frac{i!}{\nu!(i-2\nu)!2^\nu}, \quad (4.70)$$

так как для количества элементов множества $\mathbf{T}_j^{(\nu_j)}$ можно записать

$$|\mathbf{T}_j^{(\nu_j)}| = \frac{1}{\nu_j!} \frac{i!}{2!(i-2)!} \frac{(i-2)!}{2!(i-4)!} \cdots \frac{(i-2(\nu_j-1))!}{2!(i-2\nu_j)!} \Big|_{i=\#(j,\bar{J})} = \frac{i!}{\nu_j!(i-2\nu_j)!2^{\nu_j}} = h_{i-2\nu_j}^{(i)} \Big|_{i=\#(j,\bar{J})}.$$

Будем обозначать через $\mathbf{T} \setminus \bar{\omega}$ множество переменных из \mathbf{T} , которые не попали ни в одну пару из набора $\bar{\omega}$. Аналогичным образом определим множества $\mathbf{I}_j^{(\nu_j)}$, $(\mathbf{I}/\sim)^{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)} \rangle}$ и $\mathbf{I} \setminus \bar{\varrho}$. Они отличаются от множеств $\mathbf{T}_j^{(\nu_j)}$, $(\mathbf{T}/\sim)^{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)} \rangle}$ и $\mathbf{T} \setminus \bar{\omega}$ только тем, что образованы наборами ϱ пар индексов из \mathbf{I}_j (индексы в паре не совпадают), $j \in J$, т.е. обозначениями:

$$\begin{aligned} \varrho &= ((i_{l_1}, i_{m_1}), \dots, (i_{l_\gamma}, i_{m_\gamma})), & \bar{\varrho} &= \{i_{l_1}, i_{m_1}, \dots, i_{l_\gamma}, i_{m_\gamma}\}, \\ l_1, m_1, \dots, l_\gamma, m_\gamma &\in \{1, \dots, k\}, & \gamma &= \nu_{(1)} + \dots + \nu_{(|J|)}, \end{aligned} \quad (4.71)$$

Пример 4.6. Найти множества $(\mathbf{T}/\sim)^{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)} \rangle}$ при условии

$$\text{а) } k = 2, \bar{J} = (31); \quad \text{б) } k = 3, \bar{J} = (111); \quad \text{в) } k = 4, \bar{J} = (1122).$$

□ Начнем со случая $k = 2$. Здесь $j_1 = 3, j_2 = 1$ и $J = \{1, 3\}$, $|J| = 2$, а множество переменных $\mathbf{T} = \{t_1, t_2\}$ разбивается на классы эквивалентности:

$$\mathbf{T}/\sim = \underbrace{\{t_1\}}_{\mathbf{T}_1}, \underbrace{\{t_2\}}_{\mathbf{T}_2}, \quad j_{(1)} = 1, j_{(2)} = 3, \quad \#(1, \bar{J}) = \#(3, \bar{J}) = 1, \quad \lfloor \#(1, \bar{J})/2 \rfloor = \lfloor \#(3, \bar{J})/2 \rfloor = 0,$$

поэтому $\nu_{(1)} = \nu_{(2)} = 0$ и $(\mathbf{T}/\sim)^{(0,0)} = \emptyset$.

Далее случай $k = 3$. Так как $j_1 = j_2 = j_3 = 1$ и $J = \{1\}$, $|J| = 1$, множество переменных $\mathbf{T} = \{t_1, t_2, t_3\}$ совпадает с классом эквивалентности и фактор-множество состоит из одного элемента:

$$\mathbf{T}/\sim = \underbrace{\{t_1, t_2, t_3\}}_{\mathbf{T}_1}, \quad j_{(1)} = 1, \quad \#(1, \bar{J}) = 3, \quad \lfloor \#(1, \bar{J})/2 \rfloor = 1,$$

следовательно, $\nu_1 = \nu_{(1)} = 0, 1$ и

$$\nu_{(1)} = 0 : (\mathbf{T}/\sim)^{(0)} = \emptyset; \quad \nu_{(1)} = 1 : (\mathbf{T}/\sim)^{(1)} = \underbrace{\{(t_1, t_2)\}}_{\bar{\omega}_1}, \underbrace{\{(t_1, t_3)\}}_{\bar{\omega}_2}, \underbrace{\{(t_2, t_3)\}}_{\bar{\omega}_3},$$

а также

$$r_{\langle 1 \rangle} = h_{i-2}^{(i)} \Big|_{i=\#(1,\bar{J})} = \frac{3!}{1!(3-2)!2} = 3.$$

Наконец, рассмотрим случай $k = 4$. Так как $j_1 = j_2 = 1, j_3 = j_4 = 2$ и $J = \{1, 2\}$, $|J| = 2$, фактор-множество для множества переменных $\mathbf{T} = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ имеет вид

$$\mathbf{T}/\sim = \underbrace{\{t_1, t_2\}}_{\mathbf{T}_1}, \underbrace{\{t_3, t_4\}}_{\mathbf{T}_2}, \quad j_{(1)} = 1, \quad j_{(2)} = 2,$$

$$\#(1, \bar{J}) = \#(2, \bar{J}) = 2, \quad \lfloor \#(1, \bar{J})/2 \rfloor = \lfloor \#(2, \bar{J})/2 \rfloor = 1.$$

В результате находим $\nu_1 = \nu_{(1)} = 0, 1, \nu_2 = \nu_{(2)} = 0, 1$ и

$$\nu_{(1)} = 0, \nu_{(2)} = 0 : (\mathbf{T}/\sim)^{(0,0)} = \emptyset, \quad \nu_{(1)} = 1, \nu_{(2)} = 0 : (\mathbf{T}/\sim)^{\langle 1,0 \rangle} = \underbrace{\{(t_1, t_2)\}}_{\bar{\omega}},$$

$$\nu_{(1)} = 0, \nu_{(2)} = 1 : (\mathbf{T}/\sim)^{\langle 0,1 \rangle} = \underbrace{\{(t_3, t_4)\}}_{\bar{\omega}}, \quad \nu_{(1)} = 1, \nu_{(2)} = 1 : (\mathbf{T}/\sim)^{\langle 1,1 \rangle} = \underbrace{\{((t_1, t_2), (t_3, t_4))\}}_{\bar{\omega}},$$

а также

$$r_{\langle 1,0 \rangle} = h_{i-2}^{(i)} \Big|_{i=\#(1,\bar{J})} h_i^{(i)} \Big|_{i=\#(2,\bar{J})} = \frac{2!}{1!(2-2)!2^1} \frac{2!}{0!(2-0)!2^0} = 1,$$

$$r_{\langle 0,1 \rangle} = h_i^{(i)} \Big|_{i=\#(1,\bar{J})} h_{i-2}^{(i)} \Big|_{i=\#(2,\bar{J})} = \frac{2!}{0!(2-0)!2^0} \frac{2!}{1!(2-2)!2^1} = 1,$$

$$r_{\langle 1,1 \rangle} = h_{i-2}^{(i)} \Big|_{i=\#(1,\bar{J})} h_{i-2}^{(i)} \Big|_{i=\#(2,\bar{J})} = \frac{2!}{1!(2-2)!2^1} \frac{2!}{1!(2-2)!2^1} = 1.$$

В заключительной части напомним, что множество $(\mathbf{I}/\sim)^{\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)}}$ отличается от множества $(\mathbf{T}/\sim)^{\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)}}$ только тем, что оно образовано наборами ϱ пар индексов из \mathbf{I}_j , $j \in J$, т.е. обозначениями. Например, при $k = 3$ имеем

$$\mathbf{I} = \{i_1, i_2, i_3\}, \quad \mathbf{I}/\sim = \underbrace{\{i_1, i_2, i_3\}}_{\mathbf{I}_1},$$

$$\nu_{(1)} = 0 : (\mathbf{I}/\sim)^{(0)} = \emptyset, \quad \nu_{(1)} = 1 : (\mathbf{I}/\sim)^{(1)} = \left\{ \underbrace{(i_1, i_2)}_{\varrho_1}, \underbrace{(i_1, i_3)}_{\varrho_2}, \underbrace{(i_2, i_3)}_{\varrho_3} \right\}. \quad \blacksquare$$

Введем еще одно обозначение $\mathcal{S}_{\bar{\omega}}^\varepsilon$, которое предполагает, что усредняющий оператор применяется к $f(\cdot)$ как функции $|\bar{\omega}|$ переменных из множества $\bar{\omega}$ при фиксированных значениях переменных $\mathbf{T} \setminus \bar{\omega}$. Кроме того, пусть

$$t' = [t_{l_1} \dots t_{l_\gamma}]^T, \quad t'' = [t_{m_1} \dots t_{m_\gamma}]^T, \quad i' = [i_{l_1} \dots i_{l_\gamma}]^T, \quad i'' = [i_{m_1} \dots i_{m_\gamma}]^T. \quad (4.72)$$

Далее определим линейный оператор $\text{tr}_{\bar{\omega}} : L_2(\mathbb{T}^k) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^{k-2\gamma})$:

$$\text{tr}_{\bar{\omega}} f(\cdot) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{T}^\gamma} \mathcal{S}_{\bar{\omega}}^\varepsilon f(t_1, \dots, t_k) \Big|_{t'=t''} dt', \quad (4.73)$$

где интеграл по множеству нулевой меры в \mathbb{T}^k понимается однозначно из-за применения усредняющего оператора $\mathcal{S}_{\bar{\omega}}^\varepsilon$, формально полагая $L_2(\mathbb{T}^0) = \mathbb{R}$.

Отметим, что в контексте этой работы достаточно усреднения функции в окрестности множества, которое задается равенством $t' = t''$, поэтому допустимо эквивалентное определение [24]:

$$\text{tr}_{\bar{\omega}} f(\cdot) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{V_\gamma \varepsilon^\gamma} \int_{\substack{(t', t'') \in \mathbb{T}^{2\gamma} \\ |t' - t''| < \varepsilon}} f(t_1, \dots, t_k) dt' dt'', \quad (4.74)$$

где V_γ — объем единичного шара в \mathbb{R}^γ .

Будем называть $\text{tr}_{\bar{\omega}} f(\cdot)$ интегральным следом, для функций двух переменных он определен в разд. 1.9. При условии $n = k - 2\gamma > 0$ интегральный след $\text{tr}_{\bar{\omega}} f(\cdot)$ — это функция n переменных из множества \mathbf{T} за исключением тех, которые являются координатами векторов t' и t'' , т.е. переменных из множества $\mathbf{T} \setminus \bar{\omega}$. Отметим, что оператор (функционал при $k - 2\gamma = 0$) $\text{tr}_{\bar{\omega}}$ определен не для всех функций $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ (см. п. 2 замечаний 1.14).

Введем линейное подпространство $L_2^{\text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k) \subseteq L_2(\mathbb{T}^k)$, образованное функциями $f(\cdot)$, коэффициенты разложения $F_{i_1 \dots i_k}$ которых вне зависимости от выбора базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ при всех допустимых значениях $\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{\mathbf{I} \setminus \bar{\varrho}} \left(\sum_{i_1, \dots, i_\gamma=0}^\infty F_{i_1 \dots i_k} \Big|_{i'=i''} \right)^2 < \infty \quad \forall \varrho \in (\mathbf{I}/\sim)^{\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)}}, \quad (4.75)$$

$$\nu_j = 0, \dots, \lfloor \#(j, \bar{J})/2 \rfloor \quad \forall j \in J,$$

где числовой ряд в круглых скобках назовем сверткой коэффициентов разложения.

При фиксированных значениях $\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)}$ число индексов в множестве $\mathbf{I} \setminus \bar{\varrho}$ равно n . Если $n > 0$, то с их помощью нумеруются коэффициенты разложения функции из пространства $L_2(\mathbb{T}^n)$, а именно интегрального следа $\text{tr}_{\bar{\omega}} f(\cdot)$, а если $n = 0$, то в результате такой свертки

коэффициентов разложения получается константа $\text{tr}_{\varpi} f(\cdot)$. Например, $q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot) \in L_2^{\text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$, $i_1, \dots, i_k = 0, 1, 2, \dots$

Если в формуле (4.75) свертку коэффициентов разложения понимать не как кратный, а как повторный ряд, предполагая, что он не зависит от порядка суммирования, то соответствующее линейное подпространство будем обозначать $L_2^{i \text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k) \subseteq L_2(\mathbb{T}^k)$.

Пример 4.7. Показать, что числовые ряды

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 \dots i_k} \Big|_{i_l = i_{l+1} = j}, \quad l = 1, \dots, k-1,$$

где $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}$ — коэффициенты разложения (4.16) функции $\mathbb{k}(\cdot)$, $i_1, \dots, i_k = 0, 1, 2, \dots$, заданной формулой (4.15), определяют коэффициенты разложения функции

$$\frac{1}{2} (t_{l+2} - t_{l-1}) \mathbb{k}(t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+2}, \dots, t_k), \quad t_{k+1} = T, \quad (4.76)$$

при условии, что базисные системы для представления функций с числом аргументов k и $k-2$ формируются как всевозможные произведения функций базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$.

□ Для решения применим теорему 1.12. Действительно, пусть $l = k-1$. Тогда

$$S_{i_1 \dots i_{k-2}}^{(k-1, k)} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 \dots i_k} \Big|_{i_{k-1} = i_k = j} = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} q(j, t_k) \int_{t_0}^{t_k} q(j, t_{k-1}) \int_{t_0}^{t_{k-1}} \lambda(t_{k-2}) dt_{k-2} dt_{k-1} dt_k,$$

где

$$\lambda_{i_1 \dots i_{k-2}}(t_{k-2}) = q(i_{k-2}, t_{k-2}) \int_{t_0}^{t_{k-2}} \dots \int_{t_0}^{t_2} q(i_1, t_1) dt_1 \dots dt_{k-3}.$$

Применяя теорему 1.12 и результаты примера 1.17 при $\theta = T$ (см. также п. 3 замечаний 1.15), получаем коэффициенты разложения функции (4.76):

$$S_{i_1 \dots i_{k-2}}^{(k-1, k)} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} (T - t_{k-2}) q(i_{k-2}, t_{k-2}) \int_{t_0}^{t_{k-2}} \dots \int_{t_0}^{t_2} q(i_1, t_1) dt_1 \dots dt_{k-3} dt_{k-2}.$$

При $k > 3$ и $l \in \{2, \dots, k-2\}$ совершенно аналогично находим (для этого в примере 1.17 достаточно положить $\theta = t_{l+2}$)

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int_{t_0}^{t_{l+2}} q(j, t_{l+1}) \int_{t_0}^{t_{l+1}} q(j, t_l) \int_{t_0}^{t_l} \lambda(t_{l-1}) dt_{l-1} dt_l dt_{l+1} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_{l+2}} (t_{l+2} - t_{l-1}) \lambda(t_{l-1}) dt_{l-1}, \quad (4.77)$$

где

$$\lambda_{i_1 \dots i_{l-1}}(t_{l-1}) = q(i_{l-1}, t_{l-1}) \int_{t_0}^{t_{l-1}} \dots \int_{t_0}^{t_2} q(i_1, t_1) dt_1 \dots dt_{l-2}.$$

Ряд в левой части равенства (4.77) сходится абсолютно при почти всех $t_{l+2} \in \mathbb{T}$, более того, любые частичные суммы этого ряда, а также правая часть этого равенства — элементы пространства $L_2(\mathbb{T})$. Поэтому, умножая левую и правую части равенства (4.77) на функцию

$$1(t_{k+1} - t_k) q(i_k, t_k) \dots 1(t_{l+3} - t_{l+2}) q(i_{l+2}, t_{l+2})$$

и интегрируя по множеству \mathbb{T}^{k-l-1} , находим коэффициенты разложения функции (4.76):

$$\begin{aligned} S_{i_1 \dots i_{l-1} i_{l+2} \dots i_k}^{(l, l+1)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 \dots i_k} \Big|_{i_l = i_{l+1} = j} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} q(i_k, t_k) \dots \int_{t_0}^{t_{l+2}} (t_{l+2} - t_{l-1}) \times \\ &\times q(i_{l-1}, t_{l-1}) \int_{t_0}^{t_{l-1}} \dots \int_{t_0}^{t_2} q(i_1, t_1) dt_1 \dots dt_{l-1} dt_{l+2} \dots dt_k. \end{aligned}$$

Последний шаг соответствует условию $k > 2$ и $l = 1$ и отличие состоит в том, что не требуется вводить функцию $\lambda(\cdot)$. Достаточно применить формулу (1.113), обозначая $\theta = t_3 \in \mathbb{T}$:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int_{t_0}^{t_3} q(j, t_2) \int_{t_0}^{t_2} q(j, t_1) dt_1 dt_2 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_3} dt = \frac{1}{2} (t_3 - t_0).$$

Умножая левую и правую части последнего равенства на функцию

$$1(t_{k+1} - t_k)q(i_k, t_k) \dots 1(t_4 - t_3)q(i_3, t_3)$$

и интегрируя по множеству \mathbb{T}^{k-2} , получаем коэффициенты разложения функции (4.76):

$$S_{i_3 \dots i_k}^{(1,2)} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 \dots i_k} \Big|_{i_1=i_2=j} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} q(i_k, t_k) \dots \int_{t_0}^{t_4} q(i_3, t_3)(t_3 - t_0) dt_3 \dots dt_k. \quad \blacksquare$$

Пример 4.8. Показать, что $f(\cdot) \in L_2^{\text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ для любых $j_1, \dots, j_k = 1, 2, \dots, s$, если

$$f(\cdot) = f_1(\cdot) \otimes \dots \otimes f_k(\cdot), \quad f_1(\cdot), \dots, f_k(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}).$$

□ При $k = 2$ требуемый результат доказан в примере 1.15, поэтому здесь ограничимся случаем $k > 2$.

Если значения j_1, \dots, j_k попарно различны, то пространства $L_2^{\text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ и $L_2(\mathbb{T}^k)$ совпадают и, очевидно, что $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$. Поэтому далее будем предполагать, что среди значений j_1, \dots, j_k есть равные.

Множеству $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ соответствуют множества $(\mathbf{T}/\sim)^{\langle \nu(1), \dots, \nu(|J|) \rangle}$ и $(\mathbf{I}/\sim)^{\langle \nu(1), \dots, \nu(|J|) \rangle}$, которые определяются мультимножеством $\bar{J} = (j_1 \dots j_k)$. Выберем произвольный элемент $\varpi \in (\mathbf{T}/\sim)^{\langle \nu(1), \dots, \nu(|J|) \rangle}$ и соответствующий ему элемент $\varrho \in (\mathbf{I}/\sim)^{\langle \nu(1), \dots, \nu(|J|) \rangle}$.

Далее пусть $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$, F — спектральная характеристика функции $f(\cdot)$ (см. разд. 4.1), а F_1, \dots, F_k — спектральные характеристики функций $f_1(\cdot), \dots, f_k(\cdot)$ соответственно (см. разд. 1.1). Все спектральные характеристики определены относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$. Согласно теореме 4.2 справедлива формула (4.6), которую запишем для элементов этих спектральных характеристик:

$$F_{i_1 \dots i_k} = (F_1)_{i_1} \dots (F_k)_{i_k}, \quad i_1, \dots, i_k = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда при $n = k - 2\gamma > 0$ имеем (см. обозначения в формулах (4.69) и (4.71))

$$\sum_{i_1, \dots, i_{l_\gamma}=0}^{\infty} F_{i_1 \dots i_k} \Big|_{i'=i''} = \prod_{\nu: i_\nu \in \mathbf{I} \setminus \bar{\varrho}} (F_\nu)_{i_\nu} \prod_{\nu=1}^{\gamma} \sum_{i=0}^{\infty} (F_{l_\nu})_i (F_{m_\nu})_i = \prod_{\nu: i_\nu \in \mathbf{I} \setminus \bar{\varrho}} (F_\nu)_{i_\nu} \prod_{\nu=1}^{\gamma} (F_{l_\nu}, F_{m_\nu})_{\ell_2}$$

и первое произведение в правой части приведенного равенства определяет коэффициенты разложения функции, которая получается как первое произведение в правой части следующего равенства:

$$\text{tr}_{\varpi} f(\cdot) = \prod_{\nu: t_\nu \in \mathbf{T} \setminus \bar{\varpi}} f_\nu(\cdot) \prod_{\nu=1}^{\gamma} \int_{\mathbb{T}} f_{l_\nu}(t) f_{m_\nu}(t) dt = \prod_{\nu: t_\nu \in \mathbf{T} \setminus \bar{\varpi}} f_\nu(\cdot) \prod_{\nu=1}^{\gamma} (f_{l_\nu}(\cdot), f_{m_\nu}(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})},$$

при этом по свойству (1.26) сохранения скалярного произведения имеем

$$(f_l(\cdot), f_m(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = (F_l, F_m)_{\ell_2} \quad \forall l, m \in \{1, \dots, k\}.$$

Таким образом, свертка коэффициентов разложения $F_{i_1 \dots i_k}$ при выбранном ϱ задает коэффициенты разложения интегрального следа $\text{tr}_{\varpi} f(\cdot)$. Если $n = 0$, то в результате такой свертки

коэффициентов разложения получается равенство

$$\sum_{i_1, \dots, i_\gamma=0}^{\infty} F_{i_1 \dots i_k} \Big|_{i'=i''} = \prod_{\nu=1}^{k/2} (F_{l_\nu}, F_{m_\nu})_{\ell_2} = \prod_{\nu=1}^{k/2} (f_{l_\nu}(\cdot), f_{m_\nu}(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \text{tr}_\varpi f(\cdot).$$

Пара элементов ϖ и ϱ выбрана произвольно, поэтому $f(\cdot) \in L_2^{\text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$. \blacksquare

Для симметризованных функций (см. разд. 4.3) условие (4.75) записывается несколько проще. Пусть функции $f(\cdot)$ соответствует симметризованная функция $f_{\bar{j}}(\cdot)$ и $\tilde{F}_{i_1 \dots i_k}$ — коэффициенты разложения этой симметризованной функции (см. формулы (4.57) и (4.63)). Тогда для коэффициентов разложения $\tilde{F}_{i_1 \dots i_k}$ должно выполняться условие, аналогичное (4.75), вне зависимости от выбора базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$, но только для одного элемента $\varrho \in (\mathbf{I}/\sim)^{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)} \rangle}$, который можно выбрать произвольно:

$$\sum_{\mathbf{I}/\bar{\varrho}} \left(\sum_{i_1, \dots, i_\gamma=0}^{\infty} \tilde{F}_{i_1 \dots i_k} \Big|_{i'=i''} \right)^2 < \infty, \quad \varrho \in (\mathbf{I}/\sim)^{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)} \rangle}, \quad (4.78)$$

$$\nu_j = 0, \dots, \lfloor \#(j, \bar{J})/2 \rfloor \quad \forall j \in J.$$

Соответствующий интегральный след $\text{tr}_\varpi f(\cdot)$ обозначим $f_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)} \rangle}(\cdot)$, где величина γ зависит от значений $\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)}$ и определяется в формулах (4.69) и (4.71) наряду с элементами ϖ и ϱ . Кроме того, будем обозначать множество симметризованных функций из пространства $L_2^{\text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ через $L_2^{s \text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k) \subset L_2(\mathbb{T}^k)$.

Обобщим результат примера 4.7, оформив его в виде следующей теоремы.

Теорема 4.6. Пусть функция $\mathbb{k}_\psi(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ определяется формулой (4.24). Тогда $\mathbb{k}_\psi(\cdot) \in L_2^{i \text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ для любых $j_1, \dots, j_k = 1, 2, \dots, s$.

Доказательство. При $k = 2$ достаточно теоремы 1.12, поэтому перейдем к случаю $k > 2$.

Если значения j_1, \dots, j_k попарно различны, то пространства $L_2^{i \text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ и $L_2(\mathbb{T}^k)$ совпадают, и далее будем полагать, что среди значений j_1, \dots, j_k есть равные.

Множеству $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ соответствуют множества $(\mathbf{T}/\sim)^{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)} \rangle}$ и $(\mathbf{I}/\sim)^{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)} \rangle}$, определяемые мультимножеством $\bar{J} = (j_1 \dots j_k)$ (см. формулы (4.69) и (4.71)). Выберем произвольный элемент $\varpi \in (\mathbf{T}/\sim)^{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)} \rangle}$ и соответствующий ему элемент $\varrho \in (\mathbf{I}/\sim)^{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)} \rangle}$.

Каждый элемент ϱ множества $(\mathbf{I}/\sim)^{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)} \rangle}$ — это набор пар индексов (i_l, i_m) из множества \mathbf{I} , этим парам соответствуют пары переменных (t_l, t_m) из множества \mathbf{T} , где $l, m \in \{1, \dots, k\}$, $l \neq m$. Рассмотрим два варианта.

1. Предположим, что одна из пар индексов образована соседними индексами. Пусть $l \in \{1, \dots, k-1\}$, $m = l+1$. Чтобы не рассматривать отдельно варианты $l = 1$ и $l = k-1$, положим $t_{k+1} = T$, $\psi_0(t) = \psi_{k+1}(t) \equiv 1$ и будем использовать запись

$$\begin{aligned} \mathbb{k}_\psi(t_1, \dots, t_k) &= \psi_0(t_0) \psi_1(t_1) \dots \psi_k(t_k) \psi_{k+1}(t_{k+1}) \times \\ &\quad \times 1(t_{k+1} - t_k) 1(t_k - t_{k-1}) \dots 1(t_2 - t_1) 1(t_1 - t_0) = \\ &= \varphi_l(t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+2}, \dots, t_k) \times \\ &\quad \times 1(t_l - t_{l-1}) \psi_l(t_l) 1(t_{l+1} - t_l) \psi_{l+1}(t_{l+1}) 1(t_{l+2} - t_{l+1}), \end{aligned}$$

где

$$\varphi_l(t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+2}, \dots, t_k) = \psi_0(t_0) 1(t_1 - t_0) \dots \psi_{l-1}(t_{l-1}) 1(t_{l+2} - t_{l-1}) \times$$

$$\times \psi_{l+2}(t_{l+2}) \dots 1(t_{k+1} - t_k) \psi_{k+1}(t_{k+1}),$$

т.е. определенная таким образом функция $\mathbb{K}_\psi(\cdot)$ совпадает с функцией, которая задается формулой (4.24).

Зафиксируем значения $t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+2}, \dots, t_k \in \mathbb{T}$ и обозначим через $F_{i_l i_{l+1}}^l = F_{i_l i_{l+1}}^l(t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+2}, \dots, t_k)$ коэффициенты разложения (1.42) функции двух переменных $f_l(t_l, t_{l+1}) = \mathbb{K}_\psi(t_1, \dots, t_l, t_{l+1}, \dots, t_k)$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot)\}_{i,j=0}^\infty$:

$$\begin{aligned} F_{i_l i_{l+1}}^l &= (q(i_l, \cdot) \otimes q(i_{l+1}, \cdot), f_l(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \varphi_l(t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+2}, \dots, t_k) \times \\ &\times \int_{\mathbb{T}^2} q(i_l, t_l) q(i_{l+1}, t_{l+1}) 1(t_l - t_{l-1}) \psi_l(t_l) 1(t_{l+1} - t_l) \psi_{l+1}(t_{l+1}) 1(t_{l+2} - t_{l+1}) dt_l dt_{l+1} = \\ &= \varphi_l(t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+2}, \dots, t_k) \times \\ &\times \int_{\mathbb{T}} q(i_{l+1}, t_{l+1}) \psi_{l+1}(t_{l+1}) 1(t_{l+2} - t_{l+1}) \int_{t_0}^{t_{l+1}} q(i_l, t_l) 1(t_l - t_{l-1}) \psi_l(t_l) dt_l dt_{l+1}. \end{aligned}$$

Они связаны с коэффициентами разложения (4.25) соотношением

$$\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^\psi = (Q_l(i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+2}, \dots, i_k, \cdot), F_{i_l i_{l+1}}^l(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^{k-2})}, \quad i_1, \dots, i_k = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$Q_l(i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+2}, \dots, i_k, t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+2}, \dots, t_k) = q(i_1, t_1) \dots q(i_{l-1}, t_{l-1}) q(i_{l+2}, t_{l+2}) \dots q(i_k, t_k).$$

Применяя теорему 1.12, получаем следующее соотношение (аргументы функций $F_{i_l i_l}^l(\cdot)$ для краткости не указаны):

$$\sum_{i_l=0}^\infty F_{i_l i_l}^l = \text{tr } f_l(\cdot) = \frac{1}{2} \varphi_l(t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+2}, \dots, t_k) \int_{\mathbb{T}} 1(\tau - t_{l-1}) \psi_l(\tau) \psi_{l+1}(\tau) 1(t_{l+2} - \tau) d\tau,$$

справедливое при почти всех $t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+2}, \dots, t_k \in \mathbb{T}$, при этом функциональный ряд в левой части сходится абсолютно (см. п. 1 замечаний 1.14).

У всех функций $F_{i_l i_l}^l(\cdot)$ есть общий множитель — интегрируемая функция $\varphi_l(\cdot)$. Если этот множитель изменить, например на интегрируемую функцию $\tilde{\varphi}_l(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_l(t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+2}, \dots, t_k) &= \\ &= Q_l(i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+2}, \dots, i_k, t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+2}, \dots, t_k) \varphi_l(t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+2}, \dots, t_k), \end{aligned}$$

то функциональный ряд

$$Q_l(i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+2}, \dots, i_k, \cdot) \sum_{i_l=0}^\infty F_{i_l i_l}^l(\cdot)$$

также будет сходиться абсолютно и для него допустимо почленное интегрирование [123].

Представим интеграл в правой части выражения для функции $\text{tr } f_l(\cdot)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} 1(\tau - t_{l-1}) \psi_l(\tau) \psi_{l+1}(\tau) 1(t_{l+2} - \tau) d\tau &= \int_{t_{l-1}}^{t_{l+2}} \psi_l(\tau) \psi_{l+1}(\tau) d\tau = \\ &= \int_{t_0}^{t_{l+2}} \psi_l(\tau) \psi_{l+1}(\tau) d\tau - \int_{t_0}^{t_{l-1}} \psi_l(\tau) \psi_{l+1}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Функция

$$\Psi_l(\theta) = \int_{t_0}^\theta \psi_l(t) \psi_{l+1}(t) dt = \int_{\mathbb{T}} \psi_l(t) \psi_{l+1}(t) \chi_\theta(t) dt,$$

где $\chi_\theta(t) = \chi_{[t_0, \theta]}(t)$ — это индикатор множества (1.14), ограничена при всех $\theta \in \mathbb{T}$, так как согласно неравенству Коши – Буняковского можно записать

$$|\Psi_l(\theta)| = |(\psi_l(\cdot), \psi_{l+1}(\cdot)\chi_\theta(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})}| \leq \|\psi_l(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \|\psi_{l+1}(\cdot)\chi_\theta(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq \|\psi_l(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \|\psi_{l+1}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})},$$

а это означает, что $\tilde{\psi}_{l-1}(\cdot), \tilde{\psi}_{l+2}(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, где $\tilde{\psi}_{l-1}(t) = \psi_{l-1}(t)\Psi_l(t)$, $\tilde{\psi}_{l+2}(t) = \psi_{l+2}(t)\Psi_l(t)$, поскольку оператор умножения на ограниченную функцию ограничен в пространстве $L_2(\mathbb{T})$ [270, 326].

С учетом введенных обозначений получаем

$$\begin{aligned} \text{tr } f_l(t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+2}, \dots, t_k) &= \\ &= \frac{1}{2} (\psi_0(t_0)1(t_1 - t_0) \dots \psi_{l-1}(t_{l-1})1(t_{l+2} - t_{l-1})\tilde{\psi}_{l+2}(t_{l+2}) \dots 1(t_{k+1} - t_k)\psi_{k+1}(t_{k+1}) - \\ &\quad - \psi_0(t_0)1(t_1 - t_2) \dots \tilde{\psi}_{l-1}(t_{l-1})1(t_{l+2} - t_{l-1})\psi_{l+2}(t_{l+2}) \dots 1(t_{k+1} - t_k)\psi_{k+1}(t_{k+1})), \end{aligned}$$

следовательно, $\text{tr } f_l(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^{k-2})$. Функция $\text{tr } f_l(\cdot)$ представляет собой линейную комбинацию двух функций вида (4.24) с меньшим числом аргументов. Ее коэффициенты разложения:

$$\begin{aligned} \Phi_{i_1 \dots i_{l-1} i_{l+2} \dots i_k}^l &= (Q(i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+2}, \dots, i_k, \cdot), \text{tr } f_l(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^{k-2})} = \\ &= \left(Q(i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+2}, \dots, i_k, \cdot), \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i_l=0}^n F_{i_l i_l}^l(\cdot) \right)_{L_2(\mathbb{T}^{k-2})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i_l=0}^n (Q(i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+2}, \dots, i_k, \cdot), F_{i_l i_l}^l(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^{k-2})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i_l=0}^n \mathbb{K}_{i_1 \dots i_{l-1} i_l i_{l+2} \dots i_k}^\psi = \sum_{i_l=0}^\infty \mathbb{K}_{i_1 \dots i_{l-1} i_l i_{l+2} \dots i_k}^\psi. \end{aligned}$$

2. Далее пусть $l \in \{1, \dots, k-2\}$ и $m \in \{3, \dots, k\}$, где $m-l > 1$, а также

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_\psi(t_1, \dots, t_k) &= \varphi_{lm}(t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+1}, \dots, t_{m-1}, t_{m+1}, \dots, t_k) \times \\ &\quad \times 1(t_l - t_{l-1})\psi_l(t_l)1(t_{l+1} - t_l)1(t_m - t_{m-1})\psi_m(t_m)1(t_{m+1} - t_m), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{lm}(t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+1}, \dots, t_{m-1}, t_{m+1}, \dots, t_k) &= \\ &= \psi_0(t_0)1(t_1 - t_0) \dots \psi_{l-1}(t_{l-1})1(t_{l+1} - t_{l-1})\psi_{l+1}(t_{l+1}) \times \dots \times \\ &\quad \times \psi_{m-1}(t_{m-1})1(t_{m+1} - t_{m-1})\psi_{m+1}(t_{m+1}) \dots 1(t_{k+1} - t_k)\psi_{k+1}(t_{k+1}). \end{aligned}$$

Этот случай по большей части аналогичен уже рассмотренному, поэтому некоторые выкладки опущены. Зафиксируем значения $t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+1}, \dots, t_{m-1}, t_{m+1}, \dots, t_k \in \mathbb{T}$ и обозначим через $F_{i_l i_m}^{lm} = F_{i_l i_m}^{lm}(t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+1}, \dots, t_{m-1}, t_{m+1}, \dots, t_k)$ коэффициенты разложения (1.42) функции двух переменных $f_{lm}(t_l, t_m) = \mathbb{K}_\psi(t_1, \dots, t_l, \dots, t_m, \dots, t_k)$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot)\}_{i,j=0}^\infty$:

$$\begin{aligned} F_{i_l i_m}^{lm} &= (q(i_l, \cdot) \otimes q(i_m, \cdot), f_{lm}(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \varphi_{lm}(t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+1}, \dots, t_{m-1}, t_{m+1}, \dots, t_k) \times \\ &\quad \times \int_{\mathbb{T}} q(i_l, t_l)1(t_l - t_{l-1})\psi_l(t_l)1(t_{l+1} - t_l) dt_l \int_{\mathbb{T}} q(i_m, t_m)1(t_m - t_{m-1})\psi_m(t_m)1(t_{m+1} - t_m) dt_m, \end{aligned}$$

тогда

$$\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^\psi = (Q_{lm}(i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_{m-1}, i_{m+1}, \dots, i_k, \cdot), F_{i_l i_m}^{lm}(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^{k-2})}, \quad i_1, \dots, i_k = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$\begin{aligned} Q_{lm}(i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_{m-1}, i_{m+1}, \dots, i_k, t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+1}, \dots, t_{m-1}, t_{m+1}, \dots, t_k) = \\ = q(i_1, t_1) \dots q(i_{l-1}, t_{l-1}) q(i_{l+1}, t_{l+1}) \dots q(i_{m-1}, t_{m-1}) q(i_{m+1}, t_{m+1}) \dots q(i_k, t_k). \end{aligned}$$

Согласно теореме 1.12 имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i_l=0}^{\infty} F_{i_l i_m}^{lm} = \operatorname{tr} f_{lm}(\cdot) = \frac{1}{2} \varphi_{lm}(t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+1}, \dots, t_{m-1}, t_{m+1}, \dots, t_k) \times \\ \times \int_{\mathbb{T}} 1(\tau - t_{l-1}) \psi_l(\tau) 1(t_{l+1} - \tau) 1(\tau - t_{m-1}) \psi_m(\tau) 1(t_{m+1} - \tau) d\tau \end{aligned}$$

при почти всех $t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+1}, \dots, t_{m-1}, t_{m+1}, \dots, t_k \in \mathbb{T}$ и функциональный ряд в левой части сходится абсолютно (см. п. 1 замечаний 1.14). В правой части подынтегральная функция почти всюду равна нулю, так как условия $t_{l-1} < \tau < t_{l+1}$ и $t_{m-1} < \tau < t_{m+1}$ несовместны. Следовательно,

$$\sum_{i_l=0}^{\infty} F_{i_l i_m}^{lm} = \operatorname{tr} f_{lm}(\cdot) = 0, \quad f_{lm}(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^{k-2}),$$

и $\operatorname{tr} f_{lm}(\cdot)$ — функция вида (4.24) с меньшим числом аргументов.

Коэффициенты разложения функции $\operatorname{tr} f_{lm}(\cdot)$ нулевые. По аналогии с приведенным выше случаем $m = l + 1$ находим

$$\begin{aligned} \Phi_{i_1 \dots i_{l-1} i_{l+1} \dots i_{m-1} i_{m+1} \dots i_k}^{lm} = (Q_{lm}(i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_{m-1}, i_{m+1}, \dots, i_k, \cdot), \operatorname{tr} f_{lm}(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^{k-2})} = \\ = \sum_{i_l=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 \dots i_{l-1} i_{l+1} \dots i_{m-1} i_{m+1} \dots i_k}^{\psi} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, свертки коэффициентов разложения

$$\sum_{i_l=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^{\psi} \Big|_{i_l=i_m}$$

задают коэффициенты разложения функции из пространства $L_2(\mathbb{T}^{k-2})$: интегрального следа $\operatorname{tr} f_{lm}(\cdot)$. Это функция вида (4.24), поэтому если набор ϱ содержит еще одну пару индексов (i'_l, i'_m) , а набор ϖ — соответствующую ей пару переменных (t'_l, t'_m) , то все приведенные выше рассуждения проводятся для этих пар аналогично, но для функции $\operatorname{tr} f_{lm}(\cdot)$ и ее коэффициентов разложения $\Phi_{i_1 \dots i_{l-1} i_{l+1} \dots i_{m-1} i_{m+1} \dots i_k}^{lm}$. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будут рассмотрены все пары индексов и переменных, образующие наборы ϱ и ϖ соответственно. При этом случай $m \neq l + 1$ оказывается более простым, чем $m = l + 1$, поскольку величины $\Phi_{i_1 \dots i_{l-1} i_{l+1} \dots i_{m-1} i_{m+1} \dots i_k}^{lm}$ нулевые и любые свертки этих коэффициентов разложения дают нулевое значение, определяя снова равную нулю функцию.

Пара элементов ϖ и ϱ выбрана произвольно, поэтому $f(\cdot) \in L_2^{\operatorname{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$. ◀

Опираясь на приведенное доказательство, сформулируем следующую теорему.

Теорема 4.7. Пусть функция $\mathbb{K}_{\psi}(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ задается формулой (4.24), $k > 2$, $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^{\psi}$ — коэффициенты разложения (4.25) функции $\mathbb{K}_{\psi}(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$. Тогда

1) числовые ряды

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^{\psi} \Big|_{i_l = i_{l+1} = j}, \quad l = 1, \dots, k-1,$$

определяют коэффициенты разложения функции $\mathbb{K}_{\tilde{\psi}}(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^{k-2})$:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{\tilde{\psi}}(t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+2}, \dots, t_k) &= \frac{1}{2} (\psi_1(t_1) \dots \tilde{\psi}_{l+2}(t_{l+2}) \dots \psi_k(t_k) - \psi_1(t_1) \dots \tilde{\psi}_{l-1}(t_{l-1}) \dots \psi_k(t_k)) \times \\ &\times \mathbb{K}(t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+2}, \dots, t_k), \end{aligned} \quad (4.79)$$

где

$$\tilde{\psi}_{l-1}(t) = \psi_{l-1}(t) \Psi_l(t), \quad \tilde{\psi}_{l+2}(t) = \psi_{l+2}(t) \Psi_l(t), \quad \Psi_l(t) = \int_{t_0}^t \psi_l(\tau) \psi_{l+1}(\tau) d\tau, \quad (4.80)$$

а функция $\mathbb{K}(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^{k-2})$ задается формулой (4.15), $t_{k+1} = T$ и $\psi_0(t) = \psi_{k+1}(t) \equiv 1$.

2) числовые ряды

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^{\psi} \Big|_{i_l = i_m = j}, \quad \begin{array}{l} l \in \{1, \dots, k-2\}, \\ m \in \{3, \dots, k\}, \end{array} \quad m - l > 1,$$

определяют коэффициенты разложения функции $k-2$ переменных, равной нулю.

С помощью теоремы 4.7 можно расширить результат примера 4.7.

Пример 4.9. Показать, что числовые ряды

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^{\psi} \Big|_{i_l = i_m = j}, \quad l, m \in \{1, \dots, k\}, \quad m - l \geq 1,$$

где $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}$ — коэффициенты разложения (4.16) функции $\mathbb{K}(\cdot)$, заданной формулой (4.15), определяют коэффициенты разложения функции

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{\tilde{\psi}}(t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+1}, \dots, t_{m-1}, t_{m+1}, \dots, t_k) &= \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} (t_{l+2} - t_{l-1}) \mathbb{K}(t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+2}, \dots, t_k), & m = l + 1, \\ 0, & m - l > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

где $t_{k+1} = T$, при условии, что базисные системы для представления функций с числом аргументов k и $k-2$ формируются как всевозможные произведения функций базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$.

□ Функция $\mathbb{K}(\cdot)$ — это частный случай функции $\mathbb{K}_{\psi}(\cdot)$, заданной формулой (4.24), при условии

$$\psi_1(t) = \dots = \psi_k(t) \equiv 1,$$

поэтому в случае $m = l + 1$ согласно выражениям (4.80) получаем

$$\begin{aligned} \Psi_l(t) &= \int_{t_0}^t \psi_l(\tau) \psi_{l+1}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t d\tau = t - t_0, \quad l = 1, \dots, k-1, \\ \tilde{\psi}_{l-1}(t) &= \psi_{l-1}(t) \Psi_l(t) = t - t_0, \quad \tilde{\psi}_{l+2}(t) = \psi_{l+2}(t) \Psi_l(t) = t - t_0 \end{aligned}$$

при условии $\psi_0(t) = \psi_{k+1}(t) \equiv 1$.

Следовательно, формула (4.79) записывается в виде

$$\mathbb{K}_{\tilde{\psi}}(t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+2}, \dots, t_k) = \frac{1}{2} (t_{l+2} - t_{l-1}) \mathbb{K}(t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+2}, \dots, t_k),$$

где правая часть совпадает с выражением (4.76) (см. пример 4.7).

Вариант $m - l > 1$ соответствует нулевой функции $k - 2$ переменных согласно теореме 4.7.

■

Пример 4.10. Показать, что числовые ряды

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^{n_1 \dots n_k} \Big|_{i_l = i_m = j}, \quad l, m \in \{1, \dots, k\}, \quad m - l \geq 1,$$

где $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^{n_1 \dots n_k}$ — коэффициенты разложения (4.25) функции $\mathbb{K}_{\psi}(\cdot) = \mathbb{K}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$, заданной формулой (4.24) с дополнительным условием (4.26), определяют коэффициенты разложения функции

$$\mathbb{K}_{\tilde{\psi}}(t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+1}, \dots, t_{m-1}, t_{m+1}, \dots, t_k) = \begin{cases} \frac{(t_{l+2} - t_0)^{n_l + n_{l+1} + 1} - (t_{l-1} - t_0)^{n_l + n_{l+1} + 1}}{2(n_l + n_{l+1} + 1)} \times \\ \times \mathbb{K}_{\psi}(t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+2}, \dots, t_k), & m = l + 1, \\ 0, & m - l > 1, \end{cases}$$

где $t_{k+1} = T$, при условии, что базисные системы для представления функций с числом аргументов k и $k - 2$ формируются как всевозможные произведения функций базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$.

□ Определим функции согласно выражениям (4.80):

$$\begin{aligned} \Psi_l(t) &= \int_{t_0}^t \psi_l(\tau) \psi_{l+1}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{n_l} (\tau - t_0)^{n_{l+1}} d\tau = \\ &= \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{n_l + n_{l+1}} d\tau = \frac{(t - t_0)^{n_l + n_{l+1} + 1}}{n_l + n_{l+1} + 1}, \quad l = 1, \dots, k - 1, \end{aligned}$$

$$\tilde{\psi}_{l-1}(t) = \psi_{l-1}(t) \Psi_l(t) = \frac{(t - t_0)^{n_{l-1} + n_l + n_{l+1} + 1}}{n_l + n_{l+1} + 1}, \quad \tilde{\psi}_{l+2}(t) = \psi_{l+2}(t) \Psi_l(t) = \frac{(t - t_0)^{n_l + n_{l+1} + n_{l+2} + 1}}{n_l + n_{l+1} + 1},$$

так как формально $\psi_0(t) = \psi_{k+1}(t) \equiv 1$, т.е. $n_0 = n_{k+1} = 0$.

Далее остается записать формулу (4.79):

$$\mathbb{K}_{\tilde{\psi}}(t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+2}, \dots, t_k) = \frac{(t_{l+2} - t_0)^{n_l + n_{l+1} + 1} - (t_{l-1} - t_0)^{n_l + n_{l+1} + 1}}{2(n_l + n_{l+1} + 1)} \mathbb{K}_{\psi}(t_1, \dots, t_{l-1}, t_{l+2}, \dots, t_k).$$

Из теоремы 4.7 следует, что рассматриваемые числовые ряды при условии $m - l > 1$ определяют коэффициенты разложения нулевой функции $k - 2$ переменных. Пример 4.9, очевидно, является частным случаем данного примера. ■

Пусть имеется число $k = 2\gamma$, где $\gamma \in \mathbb{N}$, а также величины j_1, \dots, j_k и соответствующие им множество $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ и мультимножество $\bar{J} = (j_1 \dots j_k)$ (см. разд. 4.3). Предположим, что для величин j_1, \dots, j_k выполняется следующее условие:

$$\begin{aligned} \forall l \in \{1, \dots, k\} \quad \exists m \in \{1, \dots, k\}, \quad l \neq m: \quad j_l = j_m \\ \text{и} \quad \nexists n \in \{1, \dots, k\}, \quad l \neq n, m \neq n: \quad j_l = j_m = j_n, \end{aligned} \quad (4.81)$$

т.е. для любого элемента j_l найдется один и только один элемент j_m , что $j_l = j_m$, где $l, m \in \{1, \dots, k\}$, $l \neq m$. Тогда $|J| = \gamma$, $\nu_{(1)} = \dots = \nu_{(|J|)} = 1$, а формулы (4.69) и (4.71) примут вид $\varpi = ((t_{l_1}, t_{m_1}), \dots, (t_{l_\gamma}, t_{m_\gamma}))$, $\varrho = ((i_{l_1}, i_{m_1}), \dots, (i_{l_\gamma}, i_{m_\gamma}))$, $\{l_1, m_1, \dots, l_\gamma, m_\gamma\} = \{1, \dots, k\}$.

Также определим интегральный оператор $\mathcal{F}: L_2(\mathbb{T}^\gamma) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^\gamma)$ с ядром $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$:

$$x(\cdot) = \mathcal{F}g(\cdot) \iff x(t'_1, \dots, t'_\gamma) = \int_{\mathbb{T}^\gamma} f(t_1, \dots, t_k) g(t''_1, \dots, t''_\gamma) dt''_1 \dots dt''_\gamma,$$

где используются обозначения (4.72).

Теорема 4.8 (см. [24, 253]). Пусть интегральный оператор $\mathcal{F}: L_2(\mathbb{T}^\gamma) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^\gamma)$ с ядром $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ является ядерным, $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ — базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$. Тогда

$$\mathrm{tr}_\varrho \mathcal{F} = \sum_{i'_1, \dots, i'_\gamma=0}^\infty F_{i_1 \dots i_k} |_{i'=i''} = \mathrm{tr}_\varpi f(\cdot), \quad (4.82)$$

где $F_{i_1 \dots i_k}$ — коэффициенты разложения (4.4) функции $f(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty$.

Теорема 1.11 является частным случаем теоремы 4.8. Числовой ряд в формуле (4.82) называется матричным следом оператора \mathcal{F} [41], а $\mathrm{tr}_\varrho \mathcal{F}$ — его обозначение.

Известно [24, 41, 253], что если функция $f(\cdot)$ представляется в виде

$$f(t_1, \dots, t_k) = \int_{\mathbb{T}^\gamma} \check{f}(t_1, \dots, t_k) |_{t'=\xi} \hat{f}(t_1, \dots, t_k) |_{t'=\xi} d\xi_1 \dots d\xi_\gamma, \quad (4.83)$$

где $\check{f}(\cdot), \hat{f}(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$, то оператор \mathcal{F} с ядром $f(\cdot)$ является ядерным и для него справедлива теорема 4.8.

Замечания 4.4.

1. Числовой ряд в формуле (4.82) сходится абсолютно (см. также п. 1 замечаний 1.14).

2. Как правило [24, 41, 253], рассматривается вариант $t' = [t_1 \dots t_\gamma]^\mathrm{T}$, $t'' = [t_{\gamma+1} \dots t_k]^\mathrm{T}$ и соответствующее ему представление (4.83). При формулировании теоремы 4.8 берется базисная система пространства $L_2(\mathbb{T}^\gamma)$, ее функции нумеруются одним индексом, а коэффициенты разложения ядра $f(\cdot)$ — двумя индексами. Это, несомненно, удобно для доказательства общих результатов, более того, тогда достаточно обойтись теоремой 1.11, полагая $\mathbb{T} = \mathbb{R}^\gamma$. Однако в приложении к затрагиваемым в этой работе вопросам целесообразно использовать введенные обозначения.

3. Векторы t', t'' и соответствующие им векторы i', i'' задаются неединственным образом (см. формулу (4.72)). На вариативность задания t', t'' и i', i'' влияет то, что пары в наборах ϖ и ϱ , как и элементы этих пар, неупорядочены. В частности, можно считать, что переменные в t' и индексы в i' следуют в порядке возрастания их индексов.

Например, пусть $k = 6$, $\gamma = 3$, $t' = [t_4 \ t_5 \ t_2]^\mathrm{T}$, $t'' = [t_3 \ t_6 \ t_1]^\mathrm{T}$, т.е. $\varpi = ((t_4, t_3), (t_5, t_6), (t_2, t_1))$, но удобнее задать эквивалентный набор $\varpi = ((t_1, t_2), (t_3, t_4), (t_5, t_6))$ и векторы $t' = [t_1 \ t_3 \ t_5]^\mathrm{T}$, $t'' = [t_2 \ t_4 \ t_6]^\mathrm{T}$.

Сформулируем некоторые свойства ядерных операторов.

1. Если функция $f_r(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ задает ядерный оператор $\mathcal{F}_r: L_2(\mathbb{T}) \rightarrow L_2(\mathbb{T})$, $r = 1, \dots, \gamma$, то оператор $\mathcal{F}: L_2(\mathbb{T}^\gamma) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^\gamma)$ с ядром

$$f(t_1, \dots, t_k) = \prod_{r=1}^\gamma f_r(t'_r, t''_r) \quad (4.84)$$

является ядерным.

Доказательство. Поскольку оператор \mathcal{F}_r по предположению ядерный, для ядра $f_r(\cdot)$ существует представление (1.107) [24]:

$$f_r(\theta, \vartheta) = \int_{\mathbb{T}} \check{f}_r(\theta, \xi) \hat{f}_r(\xi, \vartheta) d\xi, \quad \check{f}_r(\cdot), \hat{f}_r(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2), \quad r = 1, \dots, \gamma,$$

но тогда для функции $f(\cdot)$ справедливо представление (4.83), если положить

$$\check{f}(t_1, \dots, t_k) = \prod_{r=1}^{\gamma} \check{f}_r(t'_r, t''_r), \quad \hat{f}(t_1, \dots, t_k) = \prod_{r=1}^{\gamma} \hat{f}_r(t'_r, t''_r),$$

где $\check{f}(\cdot), \hat{f}(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$. Следовательно, \mathcal{F} — ядерный оператор. ◀

2. Если $\psi_l(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, $l = 1, \dots, k$, то оператор $\mathcal{F}: L_2(\mathbb{T}^\gamma) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^\gamma)$ с вырожденным ядром

$$f(t_1, \dots, t_k) = \prod_{l=1}^k \psi_l(t_l) \quad (4.85)$$

является ядерным.

Доказательство. Пусть $f_r(\theta, \vartheta) = \psi_{i'_r}(\theta) \psi_{i''_r}(\vartheta)$, где $r = 1, \dots, \gamma$. Каждая функция $f_r(\cdot)$ определяет ядерный оператор $\mathcal{F}_r: L_2(\mathbb{T}) \rightarrow L_2(\mathbb{T})$ (см. пример 1.15). Оператор \mathcal{F} с ядром (4.85) является ядерным, поскольку функция $f(\cdot)$ представляется в виде (4.84). ◀

3. Если оператор \mathcal{F} с ядром $f(\cdot)$ является ядерным и $\check{a}(\cdot), \hat{a}(\cdot)$ — ограниченные интегрируемые функции γ переменных, то оператор \mathcal{F}_* с ядром

$$f_*(t_1, \dots, t_k) = \check{a}(t'_1, \dots, t'_\gamma) \hat{a}(t''_1, \dots, t''_\gamma) f(t_1, \dots, t_k) \quad (4.86)$$

также является ядерным.

Доказательство. Так как оператор \mathcal{F} по предположению ядерный, для ядра $f(\cdot)$ существует представление (4.83) [24], следовательно,

$$\begin{aligned} f_*(t_1, \dots, t_k) &= \check{a}(t'_1, \dots, t'_\gamma) \hat{a}(t''_1, \dots, t''_\gamma) \int_{\mathbb{T}^\gamma} \check{f}(t_1, \dots, t_k) \Big|_{t''=\xi} \hat{f}(t_1, \dots, t_k) \Big|_{t'=\xi} d\xi_1 \dots d\xi_\gamma = \\ &= \int_{\mathbb{T}^\gamma} \check{f}_*(t_1, \dots, t_k) \Big|_{t''=\xi} \hat{f}_*(t_1, \dots, t_k) \Big|_{t'=\xi} d\xi_1 \dots d\xi_\gamma, \end{aligned}$$

где $\check{f}_*(t_1, \dots, t_k) = \check{a}(t'_1, \dots, t'_\gamma) \check{f}(t_1, \dots, t_k)$, $\hat{f}_*(t_1, \dots, t_k) = \hat{a}(t''_1, \dots, t''_\gamma) \hat{f}(t_1, \dots, t_k)$.

Из ограниченности функций $\check{a}(\cdot), \hat{a}(\cdot)$ получаем [270, 326], что $\check{f}_*(\cdot), \hat{f}_*(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$, т.е. справедливо представление (4.83). Таким образом, \mathcal{F}_* — ядерный оператор. ◀

Далее сформулируем и докажем более общий результат по сравнению с теоремой 1.12.

Теорема 4.9. Пусть $\psi_l(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, $l = 1, \dots, k$, $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ — базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, \dots, i_\gamma=0}^\infty \int_{\mathbb{T}} q(i_k, t_k) \psi_k(t_k) \dots \int_{t_0}^{t_3} q(i_2, t_2) \psi_2(t_2) \int_{t_0}^{t_2} q(i_1, t_1) \psi_1(t_1) dt_1 \dots dt_k \Big|_{i_1=i_2, \dots, i_{k-1}=i_k} = \\ = \frac{1}{2^\gamma} (\psi_1(\cdot) \otimes \psi_3(\cdot) \otimes \dots \otimes \psi_{k-1}(\cdot), \psi_2(\cdot) \otimes \psi_4(\cdot) \otimes \dots \otimes \psi_k(\cdot))_{L_2(\Delta\mathbb{T}^\gamma)}, \end{aligned} \quad (4.87)$$

где $\Delta\mathbb{T}^\gamma = \{(t_1, \dots, t_\gamma) \in \mathbb{T}^\gamma: t_1 < \dots < t_\gamma\}$, $k = 2\gamma$.

Доказательство. Пусть

$$t' = [t_1 \ t_3 \ \dots \ t_{k-1}]^T, \quad t'' = [t_2 \ t_4 \ \dots \ t_k]^T, \quad i' = [i_1 \ i_3 \ \dots \ i_{k-1}]^T, \quad i'' = [i_2 \ i_4 \ \dots \ i_k]^T,$$

т.е. все пары из набора ϖ образованы переменными с соседними индексами (см. п. 3 замечаний 4.4).

Зададим функции $g_r(\cdot), g_r^*(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$:

$$g_r(\theta, \vartheta) = \lambda_r(\theta) \mu_r(\vartheta) 1(\vartheta - \theta), \quad g_r^*(\theta, \vartheta) = \mu_r(\theta) \lambda_r(\vartheta) 1(\theta - \vartheta) = g_r(\vartheta, \theta),$$

а также функции

$$f_r(\theta, \vartheta) = g_r(\theta, \vartheta) + g_r^*(\theta, \vartheta) = g_r(\theta, \vartheta) + g_r(\vartheta, \theta) = f_r(\vartheta, \theta), \quad r = 1, \dots, \gamma.$$

Если $\lambda_r(\cdot), \mu_r(\cdot)$ — это полиномы, то согласно лемме 1.1 интегральный оператор $\mathcal{F}_r: L_2(\mathbb{T}) \rightarrow L_2(\mathbb{T})$ с ядром $f_r(\cdot)$ является ядерным. Следовательно, ядерным является и интегральный оператор $\mathcal{F}: L_2(\mathbb{T}^\gamma) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^\gamma)$ с ядром вида (4.84):

$$\begin{aligned} f(t_1, \dots, t_k) &= \prod_{r=1}^{\gamma} f_r(t'_r, t''_r) = \prod_{r=1}^{\gamma} (g_r(t'_r, t''_r) + g_r^*(t'_r, t''_r)) = \\ &= \prod_{r=1}^{\gamma} (g_r(t'_r, t''_r) + g_r(t''_r, t'_r)) = \sum_{p=0}^{2^\gamma-1} h_p(t_1, \dots, t_k), \end{aligned}$$

где

$$h_0(t_1, \dots, t_k) = \prod_{r=1}^{\gamma} g_r(t'_r, t''_r) = \prod_{r=1}^{\gamma} \lambda_r(t'_r) \mu_r(t''_r) 1(t''_r - t'_r), \quad (4.88)$$

а при $p = 1, \dots, 2^\gamma - 1$ функция $h_p(\cdot)$ получается из $h_0(\cdot)$ перестановкой переменных t'_r и t''_r , если в двоичном представлении число p имеет вид $(p_\gamma \dots p_1)_2$ и $p_r = 1$. Значения функции $f(\cdot)$ не изменяются при перестановке переменных t'_r и t''_r , т.е. $f(\cdot)$ — симметризованная функция (4.57), которая определяется мультимножеством $\bar{J} = (j_1 \dots j_k)$, где для величин j_1, \dots, j_k выполнено условие (4.81), с коэффициентом $M_{\bar{J}}^2 = 2^\gamma$ (см. формулу (4.58)):

$$f(\cdot) = 2^\gamma \langle h_0(\cdot) \rangle_{\bar{J}} = 2^\gamma \langle h_p(\cdot) \rangle_{\bar{J}} \quad \forall p \in \{0, \dots, 2^\gamma - 1\}.$$

Используя функции вида (4.88), можно сколь угодно точно построить приближение к функции

$$x(t_1, \dots, t_k) = y(t_1, \dots, t_k) \prod_{r=1}^{\gamma} 1(t''_r - t'_r), \quad y(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k),$$

где, например,

$$\begin{aligned} y(t_1, \dots, t_k) &= \psi_1(t_1) \dots \psi_k(t_k) \prod_{r=1}^{\gamma-1} 1(t'_{r+1} - t''_r) = \\ &= \psi_1(t_1) \dots \psi_k(t_k) 1(t_3 - t_2) 1(t_5 - t_4) \dots 1(t_{k-1} - t_{k-2}), \end{aligned}$$

и тогда $x(\cdot)$ — это функция $\mathbb{K}_\psi(\cdot)$, заданная формулой (4.24), с коэффициентами разложения $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^\psi$, которые удовлетворяют соотношению (4.25).

Представим $y(\cdot)$ как произведение двух функций γ переменных:

$$\varphi(t_1, t_4, t_5, \dots) \psi(t_2, t_3, t_6, \dots), \quad \varphi(\cdot), \psi(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^\gamma),$$

где первая функция зависит от переменных t'_r с нечетными r и t''_r с четными r , а вторая функция — от переменных t'_r с четными r и t''_r с нечетными r , т.е. разделим переменные таким образом, чтобы в список аргументов каждой из этих функций не попали переменные, образующие любую пару из набора ϖ :

$$\varphi(t_1, t_4, t_5, \dots) = \begin{cases} \psi_1(t_1) \psi_4(t_4) \psi_5(t_5) 1(t_5 - t_4) \times \dots \times \\ \quad \times \psi_{k-4}(t_{k-4}) \psi_{k-3}(t_{k-3}) 1(t_{k-3} - t_{k-4}) \psi_k(t_k), & \gamma - \text{четное,} \\ \psi_1(t_1) \psi_4(t_4) \psi_5(t_5) 1(t_5 - t_4) \times \dots \times \\ \quad \times \psi_{k-2}(t_{k-2}) \psi_{k-1}(t_{k-1}) 1(t_{k-1} - t_{k-2}), & \gamma - \text{нечетное,} \end{cases}$$

$$\psi(t_2, t_3, t_6, \dots) = \begin{cases} \psi_2(t_2)\psi_3(t_3)1(t_3 - t_2) \times \dots \times \\ \quad \times \psi_{k-2}(t_{k-2})\psi_{k-1}(t_{k-1})1(t_{k-1} - t_{k-2}), & \gamma - \text{четное,} \\ \psi_2(t_2)\psi_3(t_3)1(t_3 - t_2) \times \dots \times \\ \quad \times \psi_{k-2}(t_{k-2})\psi_{k-1}(t_{k-1})1(t_{k-1} - t_{k-2})\psi_k(t_k), & \gamma - \text{нечетное.} \end{cases}$$

Далее положим $\varphi(\cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\cdot)$, $\psi(\cdot) = \lim_{m \rightarrow \infty} \psi_m(\cdot)$, где

$$\begin{aligned} \varphi_n(\cdot) &= \sum_{i_1, \dots, i_\gamma=0}^n \Phi_{i_1, \dots, i_\gamma} \hat{P}(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes \hat{P}(i_\gamma, \cdot), \\ \psi_m(\cdot) &= \sum_{i_1, \dots, i_\gamma=0}^m \Psi_{i_1, \dots, i_\gamma} \hat{P}(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes \hat{P}(i_\gamma, \cdot), \end{aligned} \quad n, m \in \{0, 1, 2, \dots\},$$

а $\Phi_{i_1, \dots, i_\gamma}$ и $\Psi_{i_1, \dots, i_\gamma}$ — коэффициенты разложения (4.4) функций $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ соответственно по базисной системе, образованной всевозможными произведениями полиномов Лежандра по разным переменным (см. п. 1 замечаний 1.1). Следовательно,

$$y(\cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} y_{nm}(\cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(\cdot), \quad x(\cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} x_{nm}(\cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\cdot),$$

где

$$\begin{aligned} y_{nm}(t_1, \dots, t_k) &= \varphi_n(t_1, t_4, t_5, \dots) \psi_m(t_2, t_3, t_6, \dots), \quad y_n(t_1, \dots, t_k) = \varphi_n(t_1, t_4, t_5, \dots) \psi(t_2, t_3, t_6, \dots), \\ x_{nm}(t_1, \dots, t_k) &= y_{nm}(t_1, \dots, t_k) \prod_{r=1}^{\gamma} 1(t_r'' - t_r'), \quad x_n(t_1, \dots, t_k) = y_n(t_1, \dots, t_k) \prod_{r=1}^{\gamma} 1(t_r'' - t_r'). \end{aligned}$$

Введем функции $f_{nm}(\cdot) = 2^\gamma \langle x_{nm}(\cdot) \rangle_{\bar{J}}$, $f_n(\cdot) = 2^\gamma \langle x_n(\cdot) \rangle_{\bar{J}}$, $f(\cdot) = 2^\gamma \langle x(\cdot) \rangle_{\bar{J}}$, а так как оператор $\langle \cdot \rangle_{\bar{J}}$ является линейным ограниченным оператором (см. разд. 4.3), имеем

$$f(\cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} f_{nm}(\cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\cdot).$$

Функция $f_{nm}(\cdot)$ определяет ядерный оператор, поскольку $x_{nm}(\cdot)$ — это функция вида (4.88). Ее коэффициенты разложения $F_{i_1 \dots i_k}^{nm}$ относительно базисной системы $\{q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty$ задаются формулой (4.4):

$$F_{i_1 \dots i_k}^{nm} = (q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot), f_{nm}(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^k)}, \quad i_1, \dots, i_k = 0, 1, 2, \dots$$

Так же определяются коэффициенты разложения $X_{i_1 \dots i_k}^{nm}$ функции $x_{nm}(\cdot)$. Они связаны с $F_{i_1 \dots i_k}^{nm}$ соотношением

$$F_{i_1 \dots i_k}^{nm} \Big|_{i'=i''} = 2^\gamma X_{i_1 \dots i_k}^{nm} \Big|_{i'=i''}$$

согласно свойствам линейности (4.9) и симметричности (4.12) (см. также п. 3 замечаний 4.3).

Так как из сходимости по норме следует слабая сходимость, для предельных функций коэффициенты разложения можно определить в виде

$$F_{i_1 \dots i_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} F_{i_1 \dots i_k}^{nm} = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{i_1 \dots i_k}^n, \quad X_{i_1 \dots i_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} X_{i_1 \dots i_k}^{nm} = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{i_1 \dots i_k}^n.$$

Далее найдем интегральный след функции $f_{nm}(\cdot)$ (аналогично для предельных функций $f_n(\cdot)$ и $f(\cdot)$):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{S}^\varepsilon f_{nm}(t_1, \dots, t_k) \Big|_{t'=t''} &= \varphi_n(t_1, t_3, \dots, t_{k-1}) \psi_m(t_1, t_3, \dots, t_{k-1}), \\ \text{tr}_\infty f_{nm}(\cdot) &= \int_{\mathbb{T}^\gamma} \varphi_n(\tau_1, \dots, \tau_\gamma) \psi_m(\tau_1, \dots, \tau_\gamma) d\tau_1 \dots d\tau_\gamma = (\varphi_n(\cdot), \psi_m(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^\gamma)}, \end{aligned}$$

и применим теорему 4.8, которое позволяет записать следующее равенство для произвольных n и m :

$$\sum_{i'_1, \dots, i'_\gamma=0}^{\infty} F_{i_1 \dots i_k}^{nm} \Big|_{i'=i''} = 2^\gamma \sum_{i'_1, \dots, i'_\gamma=0}^{\infty} X_{i_1 \dots i_k}^{nm} \Big|_{i'=i''} = (\varphi_n(\cdot), \psi_m(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^\gamma)}, \quad (4.89)$$

где числовые ряды сходятся абсолютно и их сумма не зависит от выбора базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$.

Зафиксируем n в формуле (4.89). Тогда она определяет ограниченный, а значит и непрерывный линейный функционал в пространстве $L_2(\mathbb{T}^\gamma)$, который задается функцией $\varphi_n(\cdot)$ (в левой части формулы непрерывный функционал в пространстве ядерных операторов [41], но его можно рассматривать как линейный функционал в пространстве $L_2(\mathbb{T}^\gamma)$, используя продолжение по непрерывности [52, 123]). Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем непрерывный линейный функционал, заданный функцией $\psi(\cdot)$:

$$\sum_{i'_1, \dots, i'_\gamma=0}^{\infty} F_{i_1 \dots i_k}^n \Big|_{i'=i''} = 2^\gamma \sum_{i'_1, \dots, i'_\gamma=0}^{\infty} X_{i_1 \dots i_k}^n \Big|_{i'=i''} = (\varphi_n(\cdot), \psi(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^\gamma)}.$$

Остается перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$, в результате

$$\sum_{i'_1, \dots, i'_\gamma=0}^{\infty} F_{i_1 \dots i_k} \Big|_{i'=i''} = 2^\gamma \sum_{i'_1, \dots, i'_\gamma=0}^{\infty} X_{i_1 \dots i_k} \Big|_{i'=i''} = (\varphi(\cdot), \psi(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^\gamma)}$$

и отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{i'_1, \dots, i'_\gamma=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^\psi \Big|_{i'=i''} &= \frac{1}{2^\gamma} \int_{\mathbb{T}^\gamma} \varphi(\tau_1, \dots, \tau_\gamma) \psi(\tau_1, \dots, \tau_\gamma) d\tau_1 \dots d\tau_\gamma = \\ &= \frac{1}{2^\gamma} \int_{\mathbb{T}^\gamma} \psi_1(\tau_1) \psi_2(\tau_1) \dots \psi_{k-1}(\tau_\gamma) \psi_k(\tau_\gamma) 1(\tau_2 - \tau_1) 1(\tau_3 - \tau_2) \dots 1(\tau_\gamma - \tau_{\gamma-1}) d\tau_1 \dots d\tau_\gamma = \\ &= \frac{1}{2^\gamma} (\psi_1(\cdot) \otimes \psi_3(\cdot) \otimes \dots \otimes \psi_{k-1}(\cdot), \psi_2(\cdot) \otimes \psi_4(\cdot) \otimes \dots \otimes \psi_k(\cdot))_{L_2(\Delta \mathbb{T}^\gamma)}, \end{aligned}$$

что доказывает теорему. ◀

Замечание 4.5. Доказательство теоремы 4.9 можно упростить и доказать более общую формулу, а именно

$$\begin{aligned} \sum_{i'_1, \dots, i'_\gamma=0}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} q(i_k, t_k) \psi_k(t_k) \dots \int_{t_0}^{t_3} q(i_2, t_2) \psi_2(t_2) \int_{t_0}^{t_2} q(i_1, t_1) \psi_1(t_1) dt_1 \dots dt_k \Big|_{i'=i''} = \\ = \begin{cases} \frac{1}{2^\gamma} (\psi_1(\cdot) \otimes \psi_3(\cdot) \otimes \dots \otimes \psi_{k-1}(\cdot), \psi_2(\cdot) \otimes \psi_4(\cdot) \otimes \dots \otimes \psi_k(\cdot))_{L_2(\Delta \mathbb{T}^\gamma)}, \\ \text{если } i' = [i_1 \ i_3 \ \dots \ i_{k-1}]^T \text{ и } i'' = [i_2 \ i_4 \ \dots \ i_k]^T, \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases} \end{aligned}$$

где все обозначения приведены в теореме 4.9.

Действительно, рассмотрим случай, когда все пары из набора ϖ образованы переменными с соседними индексами (см. п. 3 замечаний 4.4):

$$t' = [t_1 \ t_3 \ \dots \ t_{k-1}]^T, \quad t'' = [t_2 \ t_4 \ \dots \ t_k]^T, \quad i' = [i_1 \ i_3 \ \dots \ i_{k-1}]^T, \quad i'' = [i_2 \ i_4 \ \dots \ i_k]^T.$$

Пусть функция $x_0(\cdot)$ определяется выражением

$$x_0(t_1, \dots, t_k) = \prod_{r=1}^{\gamma} \psi_{2r-1}(t_{2r-1}) \psi_{2r}(t_{2r}) 1(t_{2r} - t_{2r-1}) =$$

$$= \psi_1(t_1)\psi_2(t_2)1(t_2 - t_1) \dots \psi_{k-1}(t_{k-1})\psi_k(t_k)1(t_k - t_{k-1}), \quad (4.90)$$

где $\psi_l(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, $l = 1, \dots, k$, т.е. $x_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$. Для ее коэффициентов разложения $X_{i_1 \dots i_k}^0$ относительно базисной системы $\{q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty$, которые задаются формулой (4.4), справедливо равенство (его доказательство аналогично доказательству теоремы 4.2)

$$X_{i_1 \dots i_k}^0 = (q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot), x_0(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \prod_{r=1}^{\gamma} X_{i_{2r-1} i_{2r}}^{0,r}, \quad i_1, \dots, i_k = 0, 1, 2, \dots,$$

в котором

$$X_{i_{2r-1} i_{2r}}^{0,r} = (q(i_{2r-1}, \cdot) \otimes q(i_{2r}, \cdot), x_{0,r}(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^2)}, \quad x_{0,r}(t_{2r-1}, t_{2r}) = \psi_{2r-1}(t_{2r-1})\psi_{2r}(t_{2r})1(t_{2r} - t_{2r-1}).$$

Согласно теореме 1.12

$$\sum_{i=0}^{\infty} X_{ii}^{0,r} = \frac{1}{2} (\psi_{2r-1}(\cdot), \psi_{2r}(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})}, \quad r = 1, \dots, \gamma,$$

где числовые ряды сходятся абсолютно, поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{i'_1, \dots, i'_\gamma=0}^{\infty} X_{i_1 \dots i_k}^0 \Big|_{i_1=i_2, \dots, i_{k-1}=i_k} &= \frac{1}{2^\gamma} \prod_{r=1}^{\gamma} (\psi_{2r-1}(\cdot), \psi_{2r}(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \\ &= \frac{1}{2^\gamma} (\psi_1(\cdot) \otimes \psi_3(\cdot) \otimes \dots \otimes \psi_{k-1}(\cdot), \psi_2(\cdot) \otimes \psi_4(\cdot) \otimes \dots \otimes \psi_k(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^\gamma)} \end{aligned}$$

и кратный числовой ряд в левой части последнего равенства также сходится абсолютно (абсолютная сходимость кратных числовых рядов имеет место и далее). Полученное равенство представляется в эквивалентной форме

$$\sum_{i'_1, \dots, i'_\gamma=0}^{\infty} X_{i_1 \dots i_k}^0 \Big|_{i_1=i_2, \dots, i_{k-1}=i_k} = \frac{1}{2^\gamma} (\psi_2(\cdot) \otimes \psi_3(\cdot) \otimes \dots \otimes \psi_{k-1}(\cdot), \psi_1(\cdot) \otimes \psi_4(\cdot) \otimes \dots \otimes \psi_k(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^\gamma)}.$$

Используя функции вида (4.90), можно сколь угодно точно построить приближение к функции $x_1(t_1, \dots, t_k) = x_0(t_1, \dots, t_k)1(t_3 - t_2)$, $x_1(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$. Такими, например, являются функции

$$\begin{aligned} \psi_1(t_1)q(i, t_2)1(t_2 - t_1)q(j, t_3)\psi_4(t_4)1(t_4 - t_3) \dots \psi_{k-1}(t_{k-1})\psi_k(t_k)1(t_k - t_{k-1}), \\ i, j = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.91)$$

кроме того, функцию $g_1(t_2, t_3) = \psi_2(t_2)\psi_3(t_3)1(t_3 - t_2)$ можно представить в виде $g_1(\cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_1^{(n)}(\cdot)$, где согласно теореме 1.3

$$g_1^{(n)}(\cdot) = \sum_{i,j=0}^n G_{ij}^1 q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot), \quad G_{ij}^1 = (q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot), g(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^2)}.$$

Следовательно, $x_1(\cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_0^{(n)}(\cdot)$, где

$$x_0^{(n)}(t_1, \dots, t_k) = \psi_1(t_1)1(t_2 - t_1)g_1^{(n)}(t_2, t_3)\psi_4(t_4)1(t_4 - t_3) \dots \psi_{k-1}(t_{k-1})\psi_k(t_k)1(t_k - t_{k-1}),$$

причем функции $x_0^{(n)}(\cdot)$ — это линейные комбинации функций вида (4.91), а значит

$$\sum_{i'_1, \dots, i'_\gamma=0}^{\infty} X_{i_1 \dots i_k}^{0,n} \Big|_{i_1=i_2, \dots, i_{k-1}=i_k} = \frac{1}{2^\gamma} (g_1^{(n)}(\cdot, \cdot) \otimes \dots \otimes \psi_{k-1}(\cdot), \psi_1(\cdot) \otimes \psi_4(\cdot) \otimes \dots \otimes \psi_k(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^\gamma)}, \quad (4.92)$$

где $X_{i_1 \dots i_k}^{0,n}$ — коэффициенты разложения функции $x_0^{(n)}(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty$. Кроме того, коэффициенты разложения $X_{i_1 \dots i_k}^1$ функции $x_1(\cdot)$

выражаются следующим образом:

$$X_{i_1 \dots i_k}^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{i_1 \dots i_k}^{0,n},$$

поскольку из сходимости по норме следует слабая сходимость.

Формула (4.92) определяет ограниченный, а значит и непрерывный линейный функционал в пространстве $L_2(\mathbb{T}^\gamma)$, который задается функцией $\psi_1(\cdot) \otimes \psi_4(\cdot) \otimes \dots \otimes \psi_k(\cdot)$. Поэтому, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i'_1, \dots, i'_\gamma=0}^{\infty} X_{i_1 \dots i_k}^1 \Big|_{i_1=i_2, \dots, i_{k-1}=i_k} &= \\ &= \frac{1}{2^\gamma} (g_1(\cdot, \cdot) \otimes \dots \otimes \psi_{k-1}(\cdot), \psi_1(\cdot) \otimes \psi_4(\cdot) \otimes \dots \otimes \psi_k(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^\gamma)} = \\ &= \frac{1}{2^\gamma} (\psi_2(\cdot) \otimes \psi_3(\cdot) \otimes \dots \otimes \psi_{k-1}(\cdot), \psi_1(\cdot) \otimes \psi_4(\cdot) \otimes \dots \otimes \psi_k(\cdot))_{L_2(\Delta_1 \mathbb{T}^\gamma)}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sum_{i'_1, \dots, i'_\gamma=0}^{\infty} X_{i_1 \dots i_k}^1 \Big|_{i_1=i_2, \dots, i_{k-1}=i_k} &= \\ &= \frac{1}{2^\gamma} (\psi_1(\cdot) \otimes \psi_4(\cdot) \otimes \psi_5(\cdot) \otimes \dots \otimes \psi_{k-1}(\cdot), \psi_2(\cdot) \otimes \psi_3(\cdot) \otimes \psi_6(\cdot) \otimes \dots \otimes \psi_k(\cdot))_{L_2(\Delta_1 \mathbb{T}^\gamma)}, \end{aligned}$$

где $\Delta_1 \mathbb{T}^\gamma = \{(t_1, \dots, t_\gamma) \in \mathbb{T}^\gamma : t_1 < t_2\}$.

Если $k = 4$, то $x_1(\cdot)$ — это функция $\mathbb{K}_\psi(\cdot)$, заданная формулой (4.24), с коэффициентами разложения $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^\psi$, которые удовлетворяют соотношению (4.25), и $\Delta_1 \mathbb{T}^\gamma = \Delta \mathbb{T}^\gamma$. Если $k \geq 6$, то, используя функции вида $x_1(\cdot)$, можно сколь угодно точно построить приближение к функции $x_2(t_1, \dots, t_k) = x_1(t_1, \dots, t_k) 1(t_5 - t_4)$, $x_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$. В качестве таких функций достаточно взять следующие:

$$\begin{aligned} \psi_1(t_1) \psi_2(t_2) 1(t_2 - t_1) \psi_3(t_3) q(i, t_4) 1(t_4 - t_3) q(j, t_5) \psi_6(t_6) 1(t_6 - t_5) \times \dots \times \\ \times \psi_{k-1}(t_{k-1}) \psi_k(t_k) 1(t_k - t_{k-1}) \cdot 1(t_3 - t_2), \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.93)$$

кроме того, обозначим $g_2(t_4, t_5) = \psi_4(t_4) \psi_5(t_5) 1(t_5 - t_4)$ и положим $g_2(\cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_2^{(n)}(\cdot)$, где

$$g_2^{(n)}(\cdot) = \sum_{i,j=0}^n G_{ij}^2 q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot), \quad G_{ij}^2 = (q(i, \cdot) \otimes q(j, \cdot), g_2(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^2)}.$$

Далее, $x_2(\cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)}(\cdot)$, где

$$\begin{aligned} x_1^{(n)}(t_1, \dots, t_k) &= \psi_1(t_1) \psi_2(t_2) 1(t_2 - t_1) \psi_3(t_3) 1(t_4 - t_3) g_2^{(n)}(t_4, t_5) \psi_6(t_6) 1(t_6 - t_5) \times \dots \times \\ &\quad \times \psi_{k-1}(t_{k-1}) \psi_k(t_k) 1(t_k - t_{k-1}), \end{aligned}$$

и функции $x_1^{(n)}(\cdot)$ — это линейные комбинации функций вида (4.93), следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{i'_1, \dots, i'_\gamma=0}^{\infty} X_{i_1 \dots i_k}^{1,n} \Big|_{i_1=i_2, \dots, i_{k-1}=i_k} &= \\ &= \frac{1}{2^\gamma} (\psi_1(\cdot) \otimes g_2^{(n)}(\cdot, \cdot) \otimes \dots \otimes \psi_{k-1}(\cdot), \psi_2(\cdot) \otimes \psi_3(\cdot) \otimes \psi_6(\cdot) \otimes \dots \otimes \psi_k(\cdot))_{L_2(\Delta_1 \mathbb{T}^\gamma)}, \end{aligned} \quad (4.94)$$

где $X_{i_1 \dots i_k}^{1,n}$ — коэффициенты разложения функции $x_1^{(n)}(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty$, причем для коэффициентов разложения $X_{i_1 \dots i_k}^2$ функции $x_2(\cdot)$ верно соотношение

$$X_{i_1 \dots i_k}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{i_1 \dots i_k}^{1,n}.$$

Формула (4.94) определяет ограниченный, а значит и непрерывный линейный функционал в пространстве $L_2(\Delta_1 \mathbb{T}^\gamma)$, который задается функцией $\psi_2(\cdot) \otimes \psi_3(\cdot) \otimes \psi_6(\cdot) \otimes \dots \otimes \psi_k(\cdot)$. Поэтому, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, находим

$$\begin{aligned} & \sum_{i'_1, \dots, i'_\gamma=0}^{\infty} X_{i_1 \dots i_k}^2 \Big|_{i_1=i_2, \dots, i_{k-1}=i_k} = \\ & = \frac{1}{2^\gamma} (\psi_1(\cdot) \otimes g_2(\cdot, \cdot) \otimes \dots \otimes \psi_{k-1}(\cdot), \psi_2(\cdot) \otimes \psi_3(\cdot) \otimes \psi_6(\cdot) \otimes \dots \otimes \psi_k(\cdot))_{L_2(\Delta_1 \mathbb{T}^\gamma)} = \\ & = \frac{1}{2^\gamma} (\psi_1(\cdot) \otimes \psi_3(\cdot) \otimes \psi_5(\cdot) \otimes \dots \otimes \psi_{k-1}(\cdot), \psi_2(\cdot) \otimes \psi_4(\cdot) \otimes \psi_6(\cdot) \otimes \dots \otimes \psi_k(\cdot))_{L_2(\Delta_2 \mathbb{T}^\gamma)}, \end{aligned}$$

где $\Delta_2 \mathbb{T}^\gamma = \{(t_1, \dots, t_\gamma) \in \mathbb{T}^\gamma : t_1 < t_2 < t_3\}$.

Если $k = 6$, то $x_2(\cdot)$ — это функция $\mathbb{K}_\psi(\cdot)$ с коэффициентами разложения $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^\psi$ и $\Delta_2 \mathbb{T}^\gamma = \Delta \mathbb{T}^\gamma$. Если $k \geq 8$, то аналогичный шаг повторяется для функции $x_3(t_1, \dots, t_k) = x_2(t_1, \dots, t_k) 1(t_7 - t_6)$, $x_3(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$, и далее (общее число шагов равно $\gamma - 1$), пока не будет получена функция

$$\mathbb{K}_\psi(t_1, \dots, t_k) = x_{\gamma-1}(t_1, \dots, t_k) = x_{\gamma-2}(t_1, \dots, t_k) 1(t_{k-1} - t_{k-2}).$$

Для ее коэффициентов разложения $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^\psi = X_{i_1 \dots i_k}^{\gamma-1}$ имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{i'_1, \dots, i'_\gamma=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^\psi \Big|_{i_1=i_2, \dots, i_{k-1}=i_k} = \sum_{i'_1, \dots, i'_\gamma=0}^{\infty} X_{i_1 \dots i_k}^{\gamma-1} \Big|_{i_1=i_2, \dots, i_{k-1}=i_k} = \\ & = \frac{1}{2^\gamma} (\psi_1(\cdot) \otimes \psi_3(\cdot) \otimes \dots \otimes \psi_{k-1}(\cdot), \psi_2(\cdot) \otimes \psi_4(\cdot) \otimes \dots \otimes \psi_k(\cdot))_{L_2(\Delta_{\gamma-1} \mathbb{T}^\gamma)}, \end{aligned}$$

где $\Delta_{\gamma-1} \mathbb{T}^\gamma = \Delta \mathbb{T}^\gamma = \{(t_1, \dots, t_\gamma) \in \mathbb{T}^\gamma : t_1 < \dots < t_\gamma\}$.

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{i'_1, \dots, i'_\gamma=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^\psi \Big|_{i_1=i_2, \dots, i_{k-1}=i_k} = \\ & = \frac{1}{2^\gamma} \int_{\mathbb{T}^\gamma} \psi_1(\tau_1) \psi_2(\tau_1) \dots \psi_{k-1}(\tau_\gamma) \psi_k(\tau_\gamma) 1(\tau_2 - \tau_1) 1(\tau_3 - \tau_2) \dots 1(\tau_\gamma - \tau_{\gamma-1}) d\tau_1 \dots d\tau_\gamma, \end{aligned}$$

так как

$$1(t_3 - t_2) 1(t_5 - t_4) \dots 1(t_{k-1} - t_{k-2}) \Big|_{\tau_1=t_1=t_2, \dots, \tau_\gamma=t_{k-1}=t_k} = 1(\tau_2 - \tau_1) 1(\tau_3 - \tau_2) \dots 1(\tau_\gamma - \tau_{\gamma-1}).$$

Для случая, когда не все пары из набора ϖ образованы переменными с соседними индексами или же все пары из набора ϖ образованы переменными, индексы у которых не являются соседними, доказательство проводится аналогичным образом (см. п. 3 замечаний 4.4).

Пусть L — множество величин l таких, что пар $(l, l+1)$ нет среди пар (i'_r, i''_r) и (i''_r, i'_r) , $r = 1, \dots, \gamma$. Множество L не является пустым. Максимально оно содержит $k-1$ элементов: $1, 2, \dots, k-1$, когда все пары из набора ϖ образованы переменными, индексы у которых не являются соседними. Обозначим элементы множества L через $l_{(1)}, \dots, l_{(|L|)}$, где $|L|$ — количество этих элементов: $|L| \geq \gamma$.

В качестве функции $x_0(\cdot)$ следует взять

$$x_0(t_1, \dots, t_k) = \prod_{r=1}^{\gamma} \psi_{i'_r}(t'_r) \psi_{i''_r}(t''_r) 1(t''_r - t'_r),$$

а далее последовательно рассмотреть функции

$$x_1(t_1, \dots, t_k) = x_0(t_1, \dots, t_k) 1(t_{l_{(1)}+1} - t_{l_{(1)}}), \quad x_2(t_1, \dots, t_k) = x_1(t_1, \dots, t_k) 1(t_{l_{(2)}+1} - t_{l_{(2)}}), \quad \dots,$$

$$x_{|L|}(t_1, \dots, t_k) = x_{|L|-1}(t_1, \dots, t_k) 1(t_{l_{(|L|)+1}} - t_{l_{(|L|)}}),$$

где $x_{|L|}(\cdot)$ — это функция $\mathbb{K}_\psi(\cdot)$.

Фактически, требуется сделать $|L|$ шагов, аналогичных шагам для случая, когда все пары из набора ϖ образованы переменными с соседними индексами. Тогда

$$\sum_{i'_1, \dots, i'_\gamma=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^\psi \Big|_{i'=i''} = \frac{1}{2^\gamma} \int_{\mathbb{T}^\gamma} \psi_{i'_1}(\tau_1) \psi_{i''_1}(\tau_1) \dots \psi_{i'_\gamma}(\tau_\gamma) \psi_{i''_\gamma}(\tau_\gamma) h(\tau_1, \dots, \tau_\gamma) d\tau_1 \dots d\tau_\gamma,$$

где $h(\cdot)$ — произведение единичных ступенчатых функций (1.28) при условии $t' = t''$:

$$1(t_2 - t_1) 1(t_3 - t_2) \dots 1(t_k - t_{k-1}) \Big|_{t'=t''},$$

которое равно нулю на множестве \mathbb{T}^γ , что связано с одним или несколькими множителями вида $1(\tau_{r'} - \tau_{r''}) 1(\tau_{r''} - \tau_{r'})$, $r', r'' \in \{1, \dots, \gamma\}$. Таким образом,

$$\sum_{i'_1, \dots, i'_\gamma=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^\psi \Big|_{i'=i''} = 0.$$

Теорема 4.9 и замечание 4.5 позволяют получить результат, аналогичный теореме 4.6, но для условия $\mathbb{K}_\psi(\cdot) \in L_2^{\text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ вместо $\mathbb{K}_\psi(\cdot) \in L_2^{i \text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ при соответствующем выборе значений j_1, \dots, j_k .

Пример 4.11. Найти сумму числового ряда $\sum_{i_1, i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4}$, где $\mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4}$ — коэффициенты разложения (4.25) функции $\mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) = \mathbb{K}_\psi(\cdot)$, заданной формулой (4.24) при $k = 4$ с дополнительным условием (4.26), если $\mathbb{T} = [0, T]$ и при произвольном выборе базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$.

□ В данном случае

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(t_1, t_2, t_3, t_4) &= t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_3^{n_3} t_4^{n_4} 1(t_2 - t_1) 1(t_3 - t_2) 1(t_4 - t_3), \\ \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4} &= \int_{\mathbb{T}} q(i_4, t_4) t_4^{n_4} \int_0^{t_4} q(i_3, t_3) t_3^{n_3} \int_0^{t_3} q(i_2, t_2) t_2^{n_2} \int_0^{t_2} q(i_1, t_1) t_1^{n_1} dt_1 dt_2 dt_3 dt_4, \\ & i_1, \dots, i_k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Согласно теореме 4.9 имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4} &= \frac{1}{2^{k/2}} \int_{\mathbb{T}^2} \tau_1^{n_1} \tau_1^{n_2} \tau_2^{n_3} \tau_2^{n_4} 1(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^T \tau_2^{n_3+n_4} \int_0^{\tau_2} \tau_1^{n_1+n_2} d\tau_1 d\tau_2 = \frac{1}{4(n_1+n_2+1)} \int_0^T \tau_2^{n_1+n_2+n_3+n_4+1} d\tau_2 = \\ &= \frac{1}{4(n_1+n_2+1)(n_1+n_2+n_3+n_4+2)}, \end{aligned}$$

а в частном случае $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 0$, когда $\mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) = \mathbb{K}(\cdot)$ — функция (4.15),

$$\sum_{i_1, i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \frac{T^2}{8}.$$

Сравним этот результат с результатом суммирования повторных числовых рядов $\sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4}$ и $\sum_{i_3=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4}$.

Возьмем за основу пример 4.10, согласно которому числовой ряд $\sum_{i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4}$ определяет

коэффициенты разложения (1.42) функции двух переменных

$$f_1(t, \tau) = \frac{1}{2(n_3 + n_4 + 1)} t^{n_2} (T^{n_3+n_4+1} - t^{n_3+n_4+1}) \tau^{n_1} 1(t - \tau),$$

а далее применим теорему 1.12 при условии $\varphi(t) = t^{n_2} (T^{n_3+n_4+1} - t^{n_3+n_4+1})$ и $\psi(t) = t^{n_1}$:

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3 i_3}^{n_1 n_2 n_3 n_4} &= \frac{1}{2(n_3 + n_4 + 1)} \sum_{i_1=0}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} q(i_1, t) t^{n_2} (T^{n_3+n_4+1} - t^{n_3+n_4+1}) \int_0^t q(i_1, \tau) \tau^{n_1} d\tau dt = \\ &= \frac{1}{4(n_3 + n_4 + 1)} \int_0^T t^{n_1+n_2} (T^{n_3+n_4+1} - t^{n_3+n_4+1}) dt = \\ &= \frac{1}{4(n_3 + n_4 + 1)} \int_0^T (T^{n_3+n_4+1} t^{n_1+n_2} - t^{n_1+n_2+n_3+n_4+1}) dt = \\ &= \frac{T^{n_1+n_2+n_3+n_4+2}}{4(n_3 + n_4 + 1)} \left(\frac{1}{n_1 + n_2 + 1} - \frac{1}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2} \right) = \\ &= \frac{T^{n_1+n_2+n_3+n_4+2}}{4(n_3 + n_4 + 1)} \frac{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2 - n_1 - n_2 - 1}{(n_1 + n_2 + 1)(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2)} = \frac{T^{n_1+n_2+n_3+n_4+2}}{4(n_1 + n_2 + 1)(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2)}. \end{aligned}$$

Пример 4.10 также дает возможность утверждать, что числовой ряд $\sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3 i_3}^{n_1 n_2 n_3 n_4}$ определяет коэффициенты разложения (1.42) функции двух переменных

$$f_2(t, \tau) = \frac{1}{2(n_1 + n_2 + 1)} t^{n_4} \tau^{n_1+n_2+n_3+1} 1(t - \tau),$$

и из теоремы 1.12 при условии $\varphi(t) = t^{n_4}$ и $\psi(t) = t^{n_1+n_2+n_3+1}$ следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{i_3=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3 i_3}^{n_1 n_2 n_3 n_4} &= \frac{1}{2(n_1 + n_2 + 1)} \sum_{i_3=0}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} q(i_3, t) t^{n_4} \int_0^t q(i_3, \tau) \tau^{n_1+n_2+n_3+1} d\tau dt = \\ &= \frac{1}{4(n_1 + n_2 + 1)} \int_0^T t^{n_1+n_2+n_3+n_4+1} dt = \frac{T^{n_1+n_2+n_3+n_4+2}}{4(n_1 + n_2 + 1)(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{i_1, i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3 i_3}^{n_1 n_2 n_3 n_4} = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3 i_3}^{n_1 n_2 n_3 n_4} = \sum_{i_3=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3 i_3}^{n_1 n_2 n_3 n_4},$$

что иллюстрирует абсолютную сходимость кратного числового ряда (см. п. 1 замечаний 4.4), а значит и равенство его суммы суммам повторных числовых рядов [237, 238].

В дополнение интересно рассмотреть общий случай и найти сумму числового ряда

$$\sum_{i_1, i_3, \dots, i_{k-1}=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3 i_3 \dots i_{k-1} i_{k-1}}^{n_1 n_2 n_3 n_4 \dots n_{k-1} n_k},$$

где $\mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3 i_3 \dots i_{k-1} i_{k-1}}^{n_1 n_2 n_3 n_4 \dots n_{k-1} n_k}$ — коэффициенты разложения (4.25) функции $\mathbb{K}_{n_1 \dots n_k}(\cdot) = \mathbb{K}_{\psi}(\cdot)$, заданной формулой (4.24) при $k = 2\gamma$, $\gamma \in \mathbb{N}$, с тем же дополнительным условием.

Применяя теорему 4.9, находим

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, i_3, \dots, i_{k-1}=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3 i_3 \dots i_{k-1} i_{k-1}}^{n_1 n_2 n_3 n_4 \dots n_{k-1} n_k} &= \frac{1}{2^\gamma} \int_{\mathbb{T}^\gamma} \tau_1^{n_1} \tau_1^{n_2} \tau_2^{n_3} \tau_2^{n_4} \dots \tau_\gamma^{n_{k-1}} \tau_\gamma^{n_k} \times \\ &\times 1(\tau_2 - \tau_1) 1(\tau_3 - \tau_2) \dots 1(\tau_\gamma - \tau_{\gamma-1}) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_\gamma = \\ &= \frac{1}{2^\gamma} \int_0^T \tau_\gamma^{n_{k-1}+n_k} \dots \int_0^{\tau_3} \tau_2^{n_3+n_4} \int_0^{\tau_2} \tau_1^{n_1+n_2} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_\gamma. \end{aligned}$$

Далее остается последовательно проинтегрировать, а именно

$$\sum_{i_1, i_3, \dots, i_{k-1}=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3 i_3 \dots i_{k-1} i_{k-1}}^{n_1 n_2 n_3 n_4 \dots n_{k-1} n_k} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^\gamma (n_1 + n_2 + 1)} \int_0^T \tau_\gamma^{n_{k-1} + n_k} \dots \int_0^{\tau_4} \tau_3^{n_5 + n_6} \int_0^{\tau_3} \tau_2^{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 1} d\tau_2 d\tau_3 \dots d\tau_\gamma = \\
&= \frac{1}{2^\gamma (n_1 + n_2 + 1)(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2)} \times \\
&\quad \times \int_0^T \tau_\gamma^{n_{k-1} + n_k} \dots \int_0^{\tau_4} \tau_3^{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + 2} d\tau_3 d\tau_4 \dots d\tau_\gamma = \dots = \\
&= \frac{T^{n_1 + \dots + n_k + \gamma}}{2^\gamma} \prod_{j=1}^{\gamma} \left(\sum_{l=1}^j (n_{2l-1} + n_{2l} + 1) \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Для частного случая $n_1 = \dots = n_k = 0$, т.е. $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot) = \mathbb{k}(\cdot)$, имеем

$$\sum_{i_1, i_3, \dots, i_{k-1}=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3 i_3 \dots i_{k-1} i_{k-1}} = \frac{T^\gamma}{2^\gamma \gamma!}. \quad \blacksquare$$

4.5. Приближенное представление функций многих переменных

Напомним, что в разд. 1.10 сформулированы задачи приближенного представления функций одной и двух переменных. Изложенные там результаты естественным образом обобщаются для функций многих переменных.

Задача приближенного представления функции многих переменных $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ в виде частичной суммы ряда (4.3):

$$\begin{aligned}
f(t_1, \dots, t_k) &\approx \tilde{f}(t_1, \dots, t_k), \quad (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{T}^k, \\
\tilde{f}(\cdot) &= \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \dots \sum_{i_k=0}^{L_k-1} F_{i_1 \dots i_k} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot),
\end{aligned} \tag{4.95}$$

или задача аппроксимации функции, предполагает при заданных значениях L_1, \dots, L_k нахождение коэффициентов разложения $F_{i_1 \dots i_k}$ по формуле (4.4), $i_1 = 0, 1, \dots, L_1 - 1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, L_k - 1$, и использование (4.95).

Для упрощения обозначений и формул остановимся на частном случае $L = L_1 = \dots = L_k$:

$$\tilde{f}(\cdot) = \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{L-1} F_{i_1 \dots i_k} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot). \tag{4.96}$$

Нетрудно видеть, что для элементов спектральной характеристики \tilde{F} функции $\tilde{f}(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$ справедливо соотношение

$$\tilde{F}_{i_1 \dots i_k} = \begin{cases} F_{i_1 \dots i_k}, & i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, L-1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

поэтому ее достаточно представлять k -мерной матрицей-столбцом размеров $L^k \times 1$ — усеченной спектральной характеристикой F и обозначать \tilde{F} , где величина L , как и ранее, называется порядком усечения спектральных характеристик.

Формулу для погрешности аппроксимации функции многих переменных $f(\cdot)$ в смысле нормы пространства $L_2(\mathbb{T}^k)$ приведем без вывода, она аналогична формулам (1.117) и (1.123):

$$\varepsilon_f = \|f(\cdot) - \tilde{f}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \sqrt{\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 - \|\tilde{F}\|^2}, \tag{4.97}$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма многомерной матрицы:

$$\|\tilde{F}\| = \left\{ \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{L-1} F_{i_1 \dots i_k}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Аналог формул (1.118) и (1.124) для погрешности аппроксимации функции многих переменных:

$$\bar{\varepsilon}_f = \|f(\cdot) - \bar{f}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \sqrt{\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 - \|\tilde{F}\|^2 + \|\tilde{F} - \bar{F}\|^2}, \quad (4.98)$$

где \bar{F} — усеченная спектральная характеристика функции $f(\cdot)$ при условии, что ее коэффициенты разложения (4.4) найдены неточно. Спектральная характеристика с элементами $\bar{F}_{i_1 \dots i_k}$ соответствует функции

$$\bar{f}(\cdot) = \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{L-1} \bar{F}_{i_1 \dots i_k} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot).$$

Для линейных функционалов (4.33) нетрудно указать формулы, аналогичные (1.119) и (1.120).

Пример 4.12. Найти погрешности аппроксимации функции $\mathbb{k}_{n_1 n_2}(\cdot)$, которая задается формулой (4.24), если $k = 2$, $\psi_l(t) = t^{n_l}$, $n_l \in \{0, 1\}$, $l = 1, 2$, $n_1 + n_2 \leq 1$, при ее приближенном представлении в виде частичной суммы ряда (4.3), используя базисные системы (1.5)–(1.9), $\mathbb{T} = [0, 1]$. Порядки усечения спектральных характеристик: $L = 4, 8, \dots, 256$.

□ Если $n_1 = n_2 = 0$, то $\mathbb{k}_{00}(t_1, t_2) = \mathbb{k}(t_1, t_2)$ — функция вида (4.15). Погрешности аппроксимации $\varepsilon_{\mathbb{k}}$ этой функции с помощью базисных систем (1.5)–(1.9) совпадают с погрешностями аппроксимации единичной ступенчатой функции, найденными в примерах 1.21, 1.22 и представленными в табл. 1.4 (в указанных примерах погрешность обозначена ε_f).

Если $n_1 + n_2 > 0$, то

$$\begin{aligned} \|\mathbb{k}_{n_1 n_2}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 &= \int_0^1 t_2^{2n_2} \int_0^{t_2} t_1^{2n_1} dt_1 dt_2 = \int_0^1 \frac{t_2^{2n_1+2n_2+1}}{2n_1+1} dt_2 = \\ &= \frac{1}{(2n_1+1)(2n_1+2n_2+2)} = \begin{cases} 1/12, & (n_1, n_2) = (1, 0), \\ 1/4, & (n_1, n_2) = (0, 1), \end{cases} \end{aligned}$$

и, применяя формулу (4.97), получаем погрешности аппроксимации $\varepsilon_{\mathbb{k}_{n_1 n_2}}$ функции $\mathbb{k}_{n_1 n_2}(\cdot)$ при заданных значениях L и n_1, n_2 в предположении, что она приближенно представляется в виде частичной суммы (4.96) — функции $\tilde{\mathbb{k}}_{n_1 n_2}(\cdot)$. Соответствующая спектральная характеристика $\mathbb{K}^{n_1 n_2}$ усекается с порядком L , а ее элементы задаются формулами (4.31), (4.28) и (4.29) для полиномов Лежандра (1.5), косинусоид (1.6) и тригонометрических функций (1.9) соответственно. Для функций Уолша (1.7) и функции Хаара (1.8) они найдены в примере 1.8 (см. также пример 4.4). В примере 1.23, а именно в табл. 1.5 и 1.6, приведены погрешности аппроксимации $\varepsilon_{\mathbb{k}_{n_1 n_2}}$ (в примере 1.23 для них использованы обозначения ε_h и ε_m). Здесь ограничимся только новыми результатами, которые соответствуют выбору полиномов Лежандра, косинусоид и тригонометрических функций. Они перечислены в табл. 4.2 и 4.3.

Можно предложить другой вариант аппроксимации функции $\mathbb{k}_{n_1 n_2}(\cdot)$, при котором коэффициенты разложения вычисляются неточно с помощью формулы (4.56): $\mathbb{K}^{n_1 n_2} \doteq \Psi_2 P^{-1} \Psi_1$,

Таблица 4.2. Погрешности аппроксимации $\varepsilon_{\mathbb{k}_{10}}$

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.107948	0.072753	0.050379	0.035273	0.024822	0.017510	0.012367
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.109094	0.071501	0.048489	0.033483	0.023360	0.016394	0.011544
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.133178	0.092569	0.065198	0.046040	0.032531	0.022992	0.016252

Таблица 4.3. Погрешности аппроксимации $\varepsilon_{\mathbb{k}_{01}}$

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.107948	0.072753	0.050379	0.035273	0.024822	0.017510	0.012367
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.109969	0.071682	0.048523	0.033489	0.023361	0.016394	0.011544
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.194278	0.140646	0.101015	0.072035	0.051156	0.036250	0.025659

где

$$\Psi_l = \begin{cases} E, & n_l = 0, \\ A, & n_l = 1, \end{cases} \quad l = 1, 2.$$

Неточность возникает из-за усечения спектральных характеристик P^{-1} и A оператора интегрирования и оператора умножения на функцию $a_1(t) = t$ соответственно. Для разных базисных систем спектральные характеристики A и P^{-1} приведены в разд. 1.5 и 1.6.

Формула для коэффициентов разложения здесь принимает вид

$$\mathbb{K}_{i_1 i_2}^{n_1 n_2} = \sum_{j_1, j_2=0}^{L-1} (\Psi_2)_{i_2 j_1} P_{j_1 j_2}^{-1} (\Psi_1)_{j_2 i_1}, \quad i_1, i_2 = 0, 1, 2, \dots$$

При $n_1 = 1, n_2 = 0$ и $n_1 = 0, n_2 = 1$ получаем (см. также примеры 1.8 и 4.4)

$$\mathbb{K}^{10} = P^{-1}A, \quad \mathbb{K}_{i_1 i_2}^{10} = \sum_{j=0}^{L-1} P_{i_2 j}^{-1} A_{j i_1} \quad \text{и} \quad \mathbb{K}^{01} = AP^{-1}, \quad \mathbb{K}_{i_1 i_2}^{01} = \sum_{j=0}^{L-1} A_{i_2 j} P_{j i_1}^{-1}.$$

Принимая во внимание формулу (4.98), вычисляем погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{\mathbb{k}_{n_1 n_2}}$ функции $\mathbb{k}_{n_1 n_2}(\cdot)$ при заданных значениях L и ее приближенном представлении частичной суммой (4.96) — функцией $\bar{\mathbb{k}}_{n_1 n_2}(\cdot)$. Результаты представлены в табл. 4.4 и 4.5. Эти таблицы полезно сравнить с табл. 1.5 и 1.7, где указаны такие же погрешности, но при выборе в качестве базисной системы функций Уолша (1.7) или функций Хаара (1.8) (в примере 1.23 для них использованы обозначения $\bar{\varepsilon}_h$ и $\bar{\varepsilon}_m$).

Умножая данные из табл. 4.2–4.5 на коэффициент $T^{n_1+n_2+1}$, получаем погрешности аппроксимации заданных функций при условии $\mathbb{T} = [0, T]$. По этим же данным можно сделать вывод о том, что $\varepsilon_{\mathbb{k}_{n_1 n_2}}, \bar{\varepsilon}_{\mathbb{k}_{n_1 n_2}} \approx c/L^\gamma$, где $c > 0$ — константа, зависящая от базисной системы, $\gamma = 1/2$ для всех используемых базисных систем. ■

Пример 4.13. Найти погрешности аппроксимации функций $\mathbb{k}(\cdot)$, которые задаются формулой (4.15) для $k = 3$ и $k = 4$, при их приближенном представлении в виде частичной суммы ряда (4.3), используя базисные системы (1.5)–(1.9), $\mathbb{T} = [0, 1]$. Порядки усечения спектральных характеристик: $L = 4, 8, \dots, 64$.

□ Для вычисления погрешностей аппроксимации требуется квадрат нормы функции

Таблица 4.4. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{k10}$

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.109109	0.073174	0.050531	0.035327	0.024842	0.017517	0.012370
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.109995	0.071811	0.048597	0.033521	0.023373	0.016398	0.011545
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.138236	0.098190	0.070335	0.050281	0.035830	0.025466	0.018067

Таблица 4.5. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{k01}$

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$	$L = 256$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.109109	0.073174	0.050531	0.035327	0.024842	0.017517	0.012370
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.110862	0.071991	0.048631	0.033527	0.023374	0.016399	0.011545
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.197780	0.144408	0.104404	0.074817	0.053315	0.037867	0.026845

$\mathbb{k}(\cdot)$. Он определяется объемом симплекса, на котором функция принимает значение 1: $\|\mathbb{k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 = 1/k!$.

Рассмотрим два варианта аппроксимации заданной функции. В первом варианте предполагается, что элементы спектральной характеристики \mathbb{K} функции $\mathbb{k}(\cdot)$ найдены точно: относительно полиномов Лежандра (1.5) они определяются формулой (4.19), для косинусоид (1.6) и тригонометрических функций (1.9) — формулами (4.22) и (4.23) соответственно, для функций Уолша (1.7) и функций Хаара (1.8) — формулами (4.66) и (4.67) соответственно. Кроме того, для $k = 3$ при выборе полиномов Лежандра или косинусоид можно использовать результаты примера 4.3.

По формуле (4.97) вычислим погрешности аппроксимации $\varepsilon_{\mathbb{k}}$ функции $\mathbb{k}(\cdot)$ при заданных значениях L и k в предположении, что она приближенно представляется в виде частичной суммы (4.96) — функции $\tilde{\mathbb{k}}(\cdot)$. Таким образом, спектральная характеристика \mathbb{K} усекается с порядком L . В табл. 4.6 и 4.7 указаны погрешности $\varepsilon_{\mathbb{k}}$ для значений $k = 3$ и $k = 4$.

Второй вариант аппроксимации предполагает использование формулы (4.51), которая при подстановке усеченных спектральных характеристик P^{-1} оператора интегрирования и V оператора умножения функций не обеспечивает точного вычисления элементов $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}$ спектральной характеристики \mathbb{K} . Для базисных систем (1.5)–(1.9) спектральные характеристики V и P^{-1} приведены в разд. 1.5 и 1.6.

При $k = 3$ имеем $\mathbb{K} \doteq P^{-1}VP^{-1}$, где произведение понимается следующим образом:

$$\mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3} = \sum_{j_1, j_2=0}^{L-1} P_{i_3 j_1}^{-1} V_{j_1 j_2 i_2} P_{j_2 i_1}^{-1}, \quad i_1, i_2, i_3 = 0, 1, 2, \dots,$$

а при $k = 4$ можно записать, что $\mathbb{K} \doteq P^{-1}VP^{-1}VP^{-1}$, где произведение понимается в смысле формулы

$$\mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^{L-1} P_{i_4 j_1}^{-1} V_{j_1 j_2 i_3} P_{j_2 j_3}^{-1} V_{j_3 j_4 i_2} P_{j_4 i_1}^{-1}, \quad i_1, i_2, i_3, i_4 = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь применяется формула (4.98) для погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{\mathbb{k}}$ функции $\mathbb{k}(\cdot)$ при заданных значениях L в предположении, что рассматриваемая функция приближенно представляется в виде частичной суммы (4.96) — функции $\tilde{\mathbb{k}}(\cdot)$, а ее коэффициенты разложения

найденны неточно. В табл. 4.8 и 4.9 указаны соответствующие погрешности $\bar{\varepsilon}_k$ для значений $k = 3$ и $k = 4$.

Таблица 4.6. Погрешности аппроксимации ε_k ($k = 3$)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.190109	0.130185	0.090441	0.063312	0.044513
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.184358	0.122700	0.083642	0.057881	0.040422
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.235702	0.171796	0.123252	0.087772	0.062283
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.235702	0.171796	0.123252	0.087772	0.062283
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.224451	0.158624	0.112410	0.079586	0.056298

Таблица 4.7. Погрешности аппроксимации ε_k ($k = 4$)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.131048	0.091595	0.064002	0.044856	0.031531
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.126541	0.086186	0.059119	0.040972	0.028615
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.152472	0.116243	0.085267	0.061392	0.043802
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.152472	0.116243	0.085267	0.061392	0.043802
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.141857	0.102002	0.072588	0.051434	0.036379

Таблица 4.8. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_k$ ($k = 3$)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.192049	0.130907	0.090707	0.063408	0.044547
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.186075	0.123357	0.083883	0.057968	0.040453
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.236621	0.172112	0.123362	0.087811	0.062296
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.236621	0.172112	0.123362	0.087811	0.062296
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.229625	0.164331	0.117754	0.084134	0.059934

Таблица 4.9. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_k$ ($k = 4$)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.134048	0.092746	0.064435	0.045015	0.031588
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.129159	0.087196	0.059495	0.041108	0.028664
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.153888	0.116709	0.085425	0.061447	0.043821
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.153888	0.116709	0.085425	0.061447	0.043821
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.149448	0.110501	0.080556	0.058202	0.041777

Анализ данных из табл. 4.6–4.9 позволяет сделать вывод о зависимости $\varepsilon_k, \bar{\varepsilon}_k \approx c/L^\gamma$, где $c > 0$ — константа, связанная с базисной системой, $\gamma = 1/2$ для всех используемых базисных систем. Минимальную погрешность обеспечивает выбор косинусоид в качестве базисной системы, а максимальную — функций Уолша или Хаара. По условию $\mathbb{T} = [0, 1]$, т.е. $T = 1$, но для произвольного $T > 0$ найденные погрешности аппроксимации достаточно умножить на коэффициент $\sqrt{T^k}$. ■

Пример 4.14. Найти погрешности аппроксимации функции $\mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot)$, которая задается формулой (4.24), если $k = 3$, $\psi_l(t) = t^{n_l}$, $n_l \in \{0, 1\}$, $l = 1, 2, 3$, $\sum_l n_l > 0$, при ее приближенном

представлении в виде частичной суммы ряда (4.3), используя полиномы Лежандра (1.5), косинусоиды (1.6) и тригонометрические функции (1.9), $\mathbb{T} = [0, 1]$. Порядки усечения спектральных характеристик: $L = 4, 8, \dots, 64$.

□ Чтобы вычислить погрешности аппроксимации, найдем квадрат нормы функции

$$\mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3}(t_1, t_2, t_3) = t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_3^{n_3} 1(t_3 - t_2) 1(t_2 - t_1):$$

$$\begin{aligned} \|\mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 &= \int_0^1 t_3^{2n_3} \int_0^{t_3} t_2^{2n_2} \int_0^{t_2} t_1^{2n_1} dt_1 dt_2 dt_3 = \\ &= \int_0^1 t_3^{2n_3} \int_0^{t_3} \frac{t_2^{2n_1+2n_2+1}}{2n_1+1} dt_2 dt_3 = \int_0^1 \frac{t_3^{2n_1+2n_2+2n_3+2}}{(2n_1+1)(2n_1+2n_2+2)} dt_3 = \\ &= \frac{1}{(2n_1+1)(2n_1+2n_2+2)(2n_1+2n_2+2n_3+3)} = \begin{cases} 1/60, & (n_1, n_2, n_3) = (1, 0, 0), \\ 1/20, & (n_1, n_2, n_3) = (0, 1, 0), \\ 1/10, & (n_1, n_2, n_3) = (0, 0, 1), \\ 1/126, & (n_1, n_2, n_3) = (1, 1, 0), \\ 1/84, & (n_1, n_2, n_3) = (1, 0, 1), \\ 1/28, & (n_1, n_2, n_3) = (0, 1, 1), \\ 1/162, & (n_1, n_2, n_3) = (1, 1, 1). \end{cases} \end{aligned}$$

Как и в примерах 4.12 и 4.13, сравним два варианта аппроксимации заданной функции. В первом варианте предполагается, что элементы спектральной характеристики $\mathbb{K}^{n_1 n_2 n_3}$ функции $\mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot)$ найдены точно: относительно полиномов Лежандра (1.5) они определяются формулой (4.31), для косинусоид (1.6) и тригонометрических функций (1.9) — формулами (4.28) и (4.29) соответственно.

По формуле (4.97) вычислим погрешности аппроксимации $\varepsilon_{\mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3}}$ функции $\mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot)$ при заданных значениях L и n_1, n_2, n_3 в предположении, что она приближенно представляется в виде частичной суммы (4.96) — функции $\tilde{\mathbb{K}}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot)$. Следовательно, спектральная характеристика $\mathbb{K}^{n_1 n_2 n_3}$ ускается с порядком L .

При втором варианте аппроксимации нужно применить формулы (4.54) и (4.55), но они при подстановке усеченных спектральных характеристик P^{-1} и A оператора интегрирования и оператора умножения на функцию $a_1(t) = t$ соответственно, а также спектральной характеристики V оператора умножения функций не обеспечивают точного вычисления элементов $\mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3}^{n_1 n_2 n_3}$ спектральной характеристики $\mathbb{K}^{n_1 n_2 n_3}$. Для применяемых базисных систем спектральные характеристики A, V и P^{-1} приведены в разд. 1.5 и 1.6. Тогда $\mathbb{K}^{n_1 n_2 n_3} \doteq \Psi_3 P^{-1} \Psi_2 V P^{-1} \Psi_1$, где

$$\Psi_l = \begin{cases} E, & n_l = 0, \\ A, & n_l = 1, \end{cases} \quad l = 1, 2, 3,$$

т.е.

$$\mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3}^{n_1 n_2 n_3} = \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5=0}^{L-1} (\Psi_3)_{i_3 j_1} P_{j_1 j_2}^{-1} (\Psi_2)_{j_2 j_3} V_{j_3 j_4} P_{j_4 j_5}^{-1} (\Psi_1)_{j_5 i_1}, \quad i_1, i_2, i_3 = 0, 1, 2, \dots,$$

однако эти формулы очевидным образом упрощаются, если хотя бы одно из значений n_l равно нулю (см. пример 4.12).

При заданных значениях L воспользуемся формулой (4.98) для вычисления погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{\mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3}}$ функции $\mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot)$ при ее приближенном представлении частичной суммой (4.96) — функцией $\bar{\mathbb{k}}(t_1, t_2, t_3)$ (ее коэффициенты разложения определяются неточно).

В табл. 4.10 и 4.11 указаны соответствующие погрешности $\varepsilon_{\mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3}}$ и $\bar{\varepsilon}_{\mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3}}$. Данные из табл. 4.10 и 4.11 показывают, что $\varepsilon_{\mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3}}, \bar{\varepsilon}_{\mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3}} \approx c/L^\gamma$, где $c > 0$ — константа, зависящая от базисной системы, $\gamma = 1/2$ для всех используемых базисных систем. При выборе произвольного $T > 0$ указанные погрешности аппроксимации необходимо умножить на коэффициент $T^{n_1+n_2+n_3+1}\sqrt{T}$. ■

Таблица 4.10. Погрешности аппроксимации $\varepsilon_{\mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3}}$

(n_1, n_2, n_3)	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
(1,0,0)	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.077372	0.053379	0.037097	0.025940	0.018216
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.074485	0.050148	0.034248	0.023692	0.016533
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.081237	0.057144	0.040225	0.028342	0.019988
(0,1,0)	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.108393	0.073255	0.050690	0.035432	0.024896
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.107110	0.071480	0.048629	0.033575	0.023406
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.128759	0.091500	0.064922	0.045972	0.032517
(0,0,1)	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.133215	0.090289	0.062573	0.043786	0.030789
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.132934	0.087459	0.059384	0.041021	0.028619
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.173469	0.123668	0.088194	0.062663	0.044412
(1,1,0)	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.054151	0.036842	0.025483	0.017787	0.012481
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.054295	0.037037	0.025285	0.017440	0.012136
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.059995	0.043023	0.030483	0.021527	0.015193
(1,0,1)	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.062453	0.042370	0.029329	0.020491	0.014390
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.061743	0.041313	0.028123	0.019414	0.013529
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.069939	0.049708	0.035218	0.024902	0.017594
(0,1,1)	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.086385	0.057463	0.039600	0.027645	0.019418
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.089503	0.059224	0.040089	0.027584	0.019184
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.112312	0.080544	0.057460	0.040800	0.028896
(1,1,1)	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.046403	0.030984	0.021341	0.014880	0.010439
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.047786	0.032404	0.022047	0.015171	0.010540
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.054179	0.039165	0.027893	0.019750	0.013957

Пример 4.15. Найти погрешности аппроксимации функции $\mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot)$, которая задается формулой (4.24), если $k = 4$, $\psi_l(t) = t^{n_l}$, $n_l \in \{0, 1\}$, $l = 1, 2, 3, 4$, $\sum_l n_l = 1$, при ее приближенном представлении в виде частичной суммы ряда (4.3), используя полиномы Лежандра (1.5), косинусоиды (1.6) и тригонометрические функции (1.9), $\mathbb{T} = [0, 1]$. Порядки усечения спектральных характеристик: $L = 4, 8, \dots, 64$.

□ Квадрат нормы функции $\mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_3^{n_3} t_4^{n_4} 1(t_4 - t_3) 1(t_3 - t_2) 1(t_2 - t_1)$ для последующего вычисления погрешности аппроксимации:

$$\|\mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 = \int_0^1 t_4^{2n_4} \int_0^{t_4} t_3^{2n_3} \int_0^{t_3} t_2^{2n_2} \int_0^{t_2} t_1^{2n_1} dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 =$$

Таблица 4.11. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{\mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3}}$

(n_1, n_2, n_3)	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
(1,0,0)	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.080345	0.054480	0.037501	0.026086	0.018268
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.077071	0.051089	0.034589	0.023814	0.016577
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.090417	0.066716	0.048859	0.035484	0.025576
(0,1,0)	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.110260	0.073928	0.050934	0.035520	0.024927
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.108802	0.072077	0.048843	0.033651	0.023433
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.132478	0.095862	0.069072	0.049509	0.035336
(0,0,1)	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.134027	0.090606	0.062691	0.043829	0.030805
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.133742	0.087785	0.059507	0.041065	0.028635
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.176998	0.127939	0.092273	0.066132	0.047166
(1,1,0)	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.055625	0.037388	0.025684	0.017860	0.012507
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.055665	0.037549	0.025477	0.017510	0.012162
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.063384	0.047080	0.034346	0.024776	0.017746
(1,0,1)	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.063768	0.042873	0.029516	0.020559	0.014415
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.063085	0.041821	0.028314	0.019484	0.013554
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.074585	0.054887	0.040038	0.028940	0.020769
(0,1,1)	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.086951	0.057676	0.039679	0.027674	0.019428
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.090294	0.059528	0.040203	0.027625	0.019199
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.115001	0.083691	0.060426	0.043305	0.030880
(1,1,1)	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.046910	0.031188	0.021417	0.014908	0.010449
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.048518	0.032701	0.022165	0.015215	0.010557
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.056178	0.041625	0.030248	0.021739	0.015525

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2n_1+1)(2n_1+2n_2+2)(2n_1+2n_2+2n_3+3)(2n_1+2n_2+2n_3+2n_4+4)} = \\
&= \begin{cases} 1/360, & (n_1, n_2, n_3, n_4) = (1, 0, 0, 0), \\ 1/120, & (n_1, n_2, n_3, n_4) = (0, 1, 0, 0), \\ 1/60, & (n_1, n_2, n_3, n_4) = (0, 0, 1, 0), \\ 1/36, & (n_1, n_2, n_3, n_4) = (0, 0, 0, 1). \end{cases}
\end{aligned}$$

По аналогии с предыдущими примерами сравним два варианта аппроксимации заданной функции. В первом варианте предполагается, что элементы спектральной характеристики $\mathbb{K}^{n_1 n_2 n_3 n_4}$ функции $\mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot)$ найдены точно: относительно полиномов Лежандра (1.5) они определяются формулой (4.31), для косинусов (1.6) и тригонометрических функций (1.9) — формулами (4.28) и (4.29) соответственно.

Для второго варианта аппроксимации необходимо использовать формулы (4.54) и (4.55) с учетом того, что при подстановке в них усеченных спектральных характеристик P^{-1} и A оператора интегрирования и оператора умножения на функцию $a_1(t) = t$ соответственно, а также спектральной характеристики V оператора умножения функций, которые приведены в разд. 1.5 и 1.6, при нахождении элементов $\mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4}$ спектральной характеристики $\mathbb{K}^{n_1 n_2 n_3 n_4}$

возникает ошибка: $\mathbb{K}^{n_1 n_2 n_3 n_4} \doteq \Psi_4 P^{-1} \Psi_3 V P^{-1} \Psi_2 V P^{-1} \Psi_1$, где

$$\Psi_l = \begin{cases} E, & n_l = 0, \\ A, & n_l = 1, \end{cases} \quad l = 1, 2, 3, 4,$$

т.е.

$$\mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4} = \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6, j_7, j_8=0}^{L-1} (\Psi_4)_{i_4 j_1} P_{j_1 j_2}^{-1} (\Psi_3)_{j_2 j_3} V_{j_3 j_4 i_3} P_{j_4 j_5}^{-1} (\Psi_2)_{j_5 j_6} V_{j_6 j_7 i_2} P_{j_7 j_8}^{-1} (\Psi_1)_{j_8 i_1}, \quad i_1, i_2, i_3, i_4 = 0, 1, 2, \dots$$

Громоздкость формул для представления спектральной характеристики $\mathbb{K}^{n_1 n_2 n_3 n_4}$ и вычисления ее элементов $\mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4}$ обусловлена универсальностью (произвольностью значений $n_1, n_2, n_3, n_4 = 0, 1, 2, \dots$, см. формулу (4.55)). Но в этом примере только одно из значений n_1, n_2, n_3, n_4 равно единице, а остальные значения нулевые, что позволяет упростить эти формулы. Например, пусть $(n_1, n_2, n_3, n_4) = (0, 1, 0, 0)$, тогда

$$\mathbb{K}^{0100} \doteq P^{-1} V P^{-1} A V P^{-1}, \quad \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{0100} = \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5=0}^{L-1} P_{i_4 j_1}^{-1} V_{j_1 j_2 i_3} P_{j_2 j_3}^{-1} A_{j_3 j_4} V_{j_4 j_5 i_2} P_{j_5 i_1}^{-1},$$

или пусть $(n_1, n_2, n_3, n_4) = (0, 0, 1, 0)$, следовательно,

$$\mathbb{K}^{0010} \doteq P^{-1} A V P^{-1} V P^{-1}, \quad \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{0010} = \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5=0}^{L-1} P_{i_4 j_1}^{-1} A_{j_1 j_2} V_{j_2 j_3 i_3} P_{j_3 j_4}^{-1} V_{j_4 j_5 i_2} P_{j_5 i_1}^{-1}.$$

Далее применим формулы (4.97) и (4.98), чтобы найти погрешности аппроксимации $\varepsilon_{\mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}}$ и $\bar{\varepsilon}_{\mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}}$ функции $\mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot)$ при заданных значениях L и n_1, n_2, n_3, n_4 , т.е. используются приближенные представления — функции $\tilde{\mathbb{k}}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot)$ и $\bar{\mathbb{k}}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot)$. В обоих вариантах спектральная характеристика $\mathbb{K}^{n_1 n_2 n_3 n_4}$ усекается с порядком L , но для второго варианта ее элементы определяются неточно.

В табл. 4.12 и 4.13 указаны соответствующие погрешности $\varepsilon_{\mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}}$ и $\bar{\varepsilon}_{\mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}}$. Данные из этих таблиц показывают, что $\varepsilon_{\mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}}, \bar{\varepsilon}_{\mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}} \approx c/L^\gamma$, где $c > 0$ — константа, зависящая от базисной системы, $\gamma = 1/2$ для всех используемых базисных систем. Погрешности для второго варианта ожидаемо больше соответствующих погрешностей для первого варианта. Для произвольного $T > 0$, если $\mathbb{T} = [0, T]$, указанные погрешности аппроксимации необходимо умножить на коэффициент $T^{n_1+n_2+n_3+n_4+2}$. ■

Пример 4.16. Найти погрешности аппроксимации симметризованных функций $\mathbb{k}_{\bar{J}}(\cdot) = \langle \mathbb{k}(\cdot) \rangle_{\bar{J}}$, где $\mathbb{k}(\cdot)$ — функция (4.15), если

$$\begin{aligned} \text{а) } k = 2, \quad \bar{J} = (j_1 j_2), \quad j_1 = j_2; \quad \text{б) } k = 3, \quad \bar{J} = (j_1 j_2 j_3), \quad j_1 = j_3 \neq j_2; \\ \text{в) } k = 4, \quad \bar{J} = (j_1 j_2 j_3 j_4), \quad j_1 = j_2 \neq j_3 = j_4, \end{aligned}$$

при их приближенном представлении в виде частичных сумм ряда (4.3), используя базисные системы (1.5)–(1.9), $\mathbb{T} = [0, 1]$. Порядки усечения спектральных характеристик: $L = 4, 8, \dots, 64$.

□ Рассмотрим случай $k = 2$. Соответствующая симметризованная функция $\mathbb{k}_{\bar{J}}(\cdot) = \langle \mathbb{k}(\cdot) \rangle_{\bar{J}}$ найдена в примере 4.5: $\mathbb{k}_{\bar{J}}(t_1, t_2) \equiv 1/2$.

Воспользуемся результатом примера 4.1, в котором получена спектральная характеристика $\mathbf{1}^{\otimes 2}$ функции $f(t_1, t_2) \equiv 1$. Тогда по свойству линейности (4.9) для спектральной характе-

Таблица 4.12. Погрешности аппроксимации $\varepsilon_{\mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3 n_4}}$

(n_1, n_2, n_3, n_4)	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
(1,0,0,0)	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.040329	0.029153	0.020545	0.014423	0.010135
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.038707	0.027009	0.018662	0.012961	0.009056
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.040346	0.029200	0.020731	0.014643	0.010331
(0,1,0,0)	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.062935	0.044190	0.030858	0.021600	0.015167
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.060532	0.041696	0.028655	0.019849	0.013851
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.066162	0.047928	0.034141	0.024178	0.017089
(0,0,1,0)	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.081571	0.056316	0.039237	0.027488	0.019326
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.080335	0.054786	0.037541	0.025983	0.018129
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.090902	0.065758	0.046924	0.033292	0.023562
(0,0,0,1)	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.101732	0.070160	0.048848	0.034205	0.024041
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.099635	0.067212	0.045941	0.031790	0.022185
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.115337	0.083294	0.059516	0.042278	0.029946

Таблица 4.13. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{\mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3 n_4}}$

(n_1, n_2, n_3, n_4)	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
(1,0,0,0)	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.043386	0.030312	0.020979	0.014582	0.010193
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.041226	0.027958	0.019010	0.013086	0.009100
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.048882	0.038508	0.029195	0.021651	0.015815
(0,1,0,0)	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.065760	0.045257	0.031256	0.021746	0.015220
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.063101	0.042639	0.029002	0.019975	0.013896
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.072422	0.054474	0.039998	0.028995	0.020845
(0,0,1,0)	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.083043	0.056879	0.039449	0.027566	0.019354
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.081629	0.055296	0.037734	0.026054	0.018154
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.093427	0.068369	0.049256	0.035196	0.025033
(0,0,0,1)	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.103272	0.070758	0.049074	0.034288	0.024072
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.101082	0.067787	0.046159	0.031870	0.022214
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.119657	0.088397	0.064405	0.046467	0.033296

тики \mathbb{K}_j функции $\mathbb{k}_j(\cdot)$ имеем

$$\mathbb{K}_j = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = \frac{1}{2} \cdot [[1\ 0\ 0\ \dots][0\ 0\ 0\ \dots][0\ 0\ 0\ \dots] \dots]^\top,$$

где $\mathbf{1}$ — спектральная характеристика функции $f_0(t) \equiv 1$ (см. разд. 1.1).

Вид этой спектральной характеристики указывает на то, что при любом порядке усечения L представление в виде частичной суммы ряда (4.3) совпадает с функцией $\mathbb{k}_j(\cdot)$ и в данном случае погрешности аппроксимации равны нулю.

Перейдем к случаям $k = 3$ и $k = 4$. Для каждого из них рассмотрим два варианта аппроксимации заданной функции. Они описаны в примере 4.13, там же есть необходимые ссылки на формулы для точного и соотношения для приближенного нахождения спектральных характеристик \mathbb{K} функции $\mathbb{k}(\cdot)$ относительно заданных базисных систем. Для соответствующей симметризованной функции $\mathbb{k}_j(\cdot) = \langle \mathbb{k}(\cdot) \rangle_j$ спектральная характеристика задается в виде $\mathbb{K}_j = \langle \mathbb{K} \rangle_j$ (см. формулы (4.57) и (4.63), а также п. 3 замечаний 4.3).

Пользуясь выражениями (4.58) и (4.62), находим квадраты норм функций $\mathbb{k}_j(\cdot)$ для последующего вычисления искомых погрешностей. При $k = 3$

$$\|\mathbb{k}_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 = \frac{\|\mathbb{k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2}{2} = \frac{1}{2 \cdot 3!} = \frac{1}{12},$$

так как $M_j^2 = 2$ согласно условию $j_1 = j_3 \neq j_2$, а при $k = 4$

$$\|\mathbb{k}_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 = \frac{\|\mathbb{k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2}{4} = \frac{1}{4 \cdot 4!} = \frac{1}{96},$$

поскольку $M_j^2 = 4$, что следует из условия $j_1 = j_2 \neq j_3 = j_4$.

Далее применим формулы (4.97) и (4.98) для погрешностей аппроксимации $\varepsilon_{\mathbb{k}_j}$ и $\bar{\varepsilon}_{\mathbb{k}_j}$ функции $\mathbb{k}_j(\cdot)$ при заданных значениях L и k , которая приближенно представляется в виде частичных сумм вида (4.96) — функций $\hat{\mathbb{k}}_j(\cdot)$ и $\bar{\mathbb{k}}_j(\cdot)$. Результаты вычислений представлены в табл. 4.14–4.17.

Таблица 4.14. Погрешности аппроксимации $\varepsilon_{\mathbb{k}_j}$ ($k = 3$)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.135219	0.092815	0.064400	0.044991	0.031577
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.130561	0.087176	0.059409	0.041064	0.028646
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.164042	0.120582	0.086840	0.061955	0.044002
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.164042	0.120582	0.086840	0.061955	0.044002
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.155042	0.111203	0.079291	0.056263	0.039825

Таблица 4.15. Погрешности аппроксимации $\varepsilon_{\mathbb{k}_j}$ ($k = 4$)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.040806	0.028314	0.019715	0.013787	0.009677
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.036822	0.024733	0.016957	0.011773	0.008236
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.049135	0.035373	0.025257	0.017949	0.012725
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.049135	0.035373	0.025257	0.017949	0.012725
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.052453	0.038286	0.027600	0.019715	0.014010

Таблица 4.16. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{\mathbb{k}_j}$ ($k = 3$)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.137934	0.093826	0.064772	0.045127	0.031626
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.132975	0.088099	0.059749	0.041187	0.028690
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.165359	0.121031	0.086996	0.062010	0.044021
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.165359	0.121031	0.086996	0.062010	0.044021
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.162443	0.119202	0.086700	0.062532	0.044818

Таблица 4.17. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}_{\mathbb{k}_j}$ ($k = 4$)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.045290	0.029838	0.020241	0.013970	0.009741
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.041014	0.026165	0.017445	0.011940	0.008293
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.051822	0.036225	0.025540	0.018047	0.012759
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.051822	0.036225	0.025540	0.018047	0.012759
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.060249	0.044968	0.033135	0.024142	0.017437

Для случаев $k = 3$ и $k = 4$ данные из табл. 4.14–4.17 свидетельствуют о зависимости $\varepsilon_{\mathbb{k}_j}, \bar{\varepsilon}_{\mathbb{k}_j} \approx c/L^\gamma$, где $c > 0$ — константа, связанная с базисной системой, $\gamma = 1/2$ для всех используемых базисных систем. Минимальную погрешность обеспечивает выбор в качестве базисной системы косинусоид, а максимальную дают функции Уолша или Хаара (погрешности для них одинаковы), если $k = 3$, и тригонометрические функции, если $k = 4$. Как и в примере 4.13, при выборе в качестве \mathbb{T} отрезка $[0, T]$ найденные погрешности аппроксимации следует умножить на коэффициент $\sqrt{T^k}$. ■

Общий вывод, который следует из вычислительных экспериментов, проведенных в примерах 4.12–4.16, состоит в том, что для функций (4.15) и (4.24) при условии $k = 2, 3, 4$, а также $\psi_l(t) \equiv 1$ или $\psi_l(t) = t$, $l = 1, \dots, k$, погрешности аппроксимации оцениваются величиной c/\sqrt{L} , где $c > 0$ — константа, зависящая от базисной системы. Минимальную погрешность в большинстве случаев обеспечивает выбор в качестве базисной системы косинусоид (1.6), полиномы Лежандра (1.5) дают близкий результат, а максимальная погрешность получается при выборе функций Уолша (1.7) и функции Хаара (1.8) либо тригонометрических функций (1.9).

Применение формул (4.51) и (4.56) оправдано тем, что погрешность аппроксимации функций $\mathbb{k}(\cdot)$ и $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$ незначительно отличается от погрешности, которая возникает при точном вычислении коэффициентов разложения этих функций, может быть, за исключением применения тригонометрических функций в качестве базисной системы. В большинстве рассмотренных вариантов погрешности аппроксимации, которые отвечают формулам (4.51) и (4.56), при выборе косинусоид меньше соответствующих погрешностей аппроксимации при точном вычислении элементов спектральных характеристик \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 \dots n_k}$ функций $\mathbb{k}(\cdot)$ и $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$, если выбираются полиномы Лежандра.

В заключение этого раздела отметим важное свойство полиномов Лежандра (1.5) в сравнении с остальными базисными системами из разд. 1.1 в контексте спектральных представлений (4.51) и (4.56). Первообразная полинома и произведение двух полиномов — это, очевидно, полиномы. Они представляются в виде линейных комбинаций полиномов Лежандра. Это означает, что элементы спектральных характеристик \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 \dots n_k}$ функций $\mathbb{k}(\cdot)$ и $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$ можно вычислить точно, подставляя в формулы (4.51) и (4.56) усеченные спектральные характеристики P^{-1} и A оператора интегрирования и оператора умножения на функцию $a_1(t) = t$, а также усеченную спектральную характеристику V оператора умножения функций.

Рассмотрим задачу, в которой требуется определить достаточный порядок усечения L' спектральных характеристик P^{-1} , A и V относительно полиномов Лежандра для точного нахождения элементов $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}$ и $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^{n_1 \dots n_k}$ спектральных характеристик \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 \dots n_k}$ при $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, L - 1$.

Начнем с простейшего случая — спектральной характеристики \mathbb{K} функции $\mathbb{k}(\cdot)$ при $k = 2$. Согласно формуле (4.51) имеем $\mathbb{K} \doteq P^{-1}$, где P^{-1} — спектральная характеристика оператора интегрирования (см. разд. 1.6 и пример 4.4).

Прежде всего отметим, что спектральная характеристика полинома степени $L - 1$ — максимальной степени согласно условию задачи — относительно полиномов Лежандра имеет не

более L ненулевых элементов и это элементы с индексами $0, 1, \dots, L - 1$. Чтобы обеспечить точное вычисление элементов спектральной характеристики первообразной полинома степени $L - 1$, а это полином степени L , с помощью свойства (1.86) спектрального преобразования интегралов от функций одной переменной, достаточно ограничиться усечением спектральной характеристики P^{-1} до размеров $(L + 1) \times L$. Но так как по условию задачи необходимо определить точно только первые L элементов, достаточно усечения L по каждому измерению (далее для наглядности также будем приводить подобные схемы):

$$\begin{array}{c} \xleftarrow{L} P^{-1} \xleftarrow{L} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ L \times L \end{array}$$

Перейдем к случаю $k = 3$. Формула (4.51) позволяет записать, что

$$\mathbb{K} \doteq P^{-1}VP^{-1}, \quad (4.99)$$

где V — спектральная характеристика оператора умножения функций (см. разд. 1.5 и пример 4.13).

Сначала опишем вариант точного нахождения спектральной характеристики полинома, который является результатом следующих линейных преобразований полинома степени $L - 1$: интегрирование, умножение на полином Лежандра степени не более $L - 1$, интегрирование. Как указано выше, для точного вычисления элементов спектральной характеристики первообразной полинома степени $L - 1$ достаточно ограничиться усечением правого множителя P^{-1} в формуле (4.99) до размеров $(L + 1) \times L$. Умножение этой первообразной на полином максимальной степени $L - 1$ дает полином степени $2L - 1$, что соответствует усечению простых сечений спектральной характеристики V до размеров $2L \times (L + 1) \times L$ (простое сечение, полученное при фиксированном значении любого индекса на уровне l , представляет собой спектральную характеристику оператора умножения на полином Лежандра степени l , а это $(2l - 1)$ -диагональная матрица, см. п. 3 замечаний 1.10 и пример 1.10). Еще одно интегрирование приводит к усечению левого множителя P^{-1} в формуле (4.99) до размеров $(2L + 1) \times 2L$. Однако в результирующей спектральной характеристике точное вычисление требуется по условию задачи только для первых L элементов, т.е. порядок усечения $2L + 1$ завышен. Поскольку P^{-1} — это трехдиагональная матрица, для левого множителя достаточно усечения до размеров $L \times (L + 1)$. Тогда для спектральной характеристики V достаточно усечения до размеров $(L + 1) \times (L + 1) \times L$:

$$\begin{array}{c} \xleftarrow{L} P^{-1} \xleftarrow{L+1} V \xleftarrow{L+1} P^{-1} \xleftarrow{L} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ L \times (L+1) \quad (L+1) \times (L+1) \times L \quad (L+1) \times L \end{array}$$

Далее случай $k = 4$. Формула (4.51) для него принимает такой вид (см. пример 4.13):

$$\mathbb{K} \doteq P^{-1}VP^{-1}VP^{-1}. \quad (4.100)$$

В данной ситуации для точного вычисления спектральной характеристики полинома требуется последовательно проинтегрировать, умножить на полином Лежандра степени не выше $L - 1$, снова проинтегрировать, опять умножить на полином Лежандра степени не выше $L - 1$ и еще раз проинтегрировать, выбирая в формуле (4.100) усечение спектральных характеристик

до следующих размеров: $(L + 1) \times L$ для правого множителя P^{-1} , $2L \times (L + 1) \times L$ для правого множителя V , $(2L + 1) \times 2L$ для центрального множителя P^{-1} , $3L \times (2L + 1) \times L$ для левого множителя V и $(3L + 1) \times 3L$ для левого множителя P^{-1} . Проводя такие же рассуждения об уменьшении избыточного порядка усечения, как и при $k = 3$, получаем соответствующие размеры множителей в формуле (4.100): $(L + 1) \times L$, $2L \times (L + 1) \times L$, $2L \times 2L$, $2L \times (L + 1) \times L$ и $L \times (L + 1)$:

$$\underbrace{\leftarrow^L}_{L \times (L+1)} P^{-1} \underbrace{\leftarrow^{L+1}}_{(L+1) \times 2L \times L} V \underbrace{\leftarrow^{2L}}_{2L \times 2L} P^{-1} \underbrace{\leftarrow^{2L}}_{2L \times (L+1) \times L} V \underbrace{\leftarrow^{L+1}}_{(L+1) \times L} P^{-1} \leftarrow^L.$$

В разд. 1.10 и 2.8, а также здесь для упрощения обозначений и формул используется усечение спектральных характеристик до одного и того же размера по каждому измерению. Следуя этому принципу и выбирая один порядок усечения для всех матриц, образующих спектральную характеристику \mathbb{K} , получаем при $k = 2$ порядок усечения $L' = L$ для спектральной характеристики P^{-1} . Если $k = 3$ или $k = 4$, то достаточными порядками усечения спектральных характеристик P^{-1} и V являются $L' = L + 1$ или $L' = 2L$ соответственно. Аналогичные рассуждения приводят к общей формуле для порядка усечения спектральных характеристик P^{-1} и V :

$$L' = L \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + k \pmod{2}, \quad k \geq 2,$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ — целая часть числа.

Теперь рассмотрим представление спектральной характеристики $\mathbb{K}^{n_1 n_2}$ функции $\mathbb{k}_{n_1 n_2}(\cdot)$ при $k = 2$. Применим формулу (4.56), тогда $\mathbb{K}^{n_1 n_2} \doteq A^{n_2} P^{-1} A^{n_1}$, где A — спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a_1(t) = t$ (см. разд. 1.5, а также примеры 4.4 и 4.12). В этой части уже не будем подробно описывать вариант точного нахождения спектральной характеристики полинома, который получается в результате последовательного применения линейных преобразований к полиному степени $L - 1$.

К приведенным выше рассуждениям следует добавить, что для точного вычисления элементов спектральной характеристики полинома степени $L - 1$ с коэффициентом t , а это полином степени L , с помощью свойства (1.73) спектрального преобразования произведения функций одной переменной достаточно ограничиться усечением спектральной характеристики A до размеров $(L + 1) \times L$. Здесь ключевым является то, что спектральная характеристика A , как и спектральная характеристика P^{-1} , является трехдиагональной матрицей, а спектральная характеристика A^n — это произведение n спектральных характеристик A , $n \in \mathbb{N}$. Отсюда

$$\underbrace{\leftarrow^L}_{L \times (L+n_2)} A^{n_2} \underbrace{\leftarrow^{L+n_2}}_{(L+n_2) \times (L+n_1)} P^{-1} \underbrace{\leftarrow^{L+n_1}}_{(L+n_1) \times L} A^{n_1} \leftarrow^L,$$

т.е. для спектральных характеристик A^{n_2} , P^{-1} и A^{n_1} достаточно усечения до размеров $L \times (L + n_2)$, $(L + n_2) \times (L + n_1)$ и $(L + n_1) \times L$ соответственно. В частном случае $n = n_1 = n_2$:

$$\underbrace{\leftarrow^L}_{L \times (L+n)} A^n \underbrace{\leftarrow^{L+n}}_{(L+n) \times (L+n)} P^{-1} \underbrace{\leftarrow^{L+n}}_{(L+n) \times L} A^n \leftarrow^L.$$

Следующий шаг — случай $k = 3$. Здесь согласно формуле (4.56) для спектральной харак-

теристики $\mathbb{K}^{n_1 n_2 n_3}$ функции $\mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot)$ справедливо соотношение (см. пример 4.14)

$$\mathbb{K}^{n_1 n_2 n_3} \doteq A^{n_3} P^{-1} A^{n_2} V P^{-1} A^{n_1}. \quad (4.101)$$

Пропуская подробный анализ, делаем вывод, что в формуле (4.101) достаточно усечения спектральных характеристик до следующих размеров: $(L + n_1) \times L$ для множителя A^{n_1} , $(L + n_1 + 1) \times (L + n_1)$ для правого множителя P^{-1} , $(L + n_2 + n_3 + 1) \times (L + n_1 + 1) \times L$ для множителя V , $(L + n_3 + 1) \times (L + n_2 + n_3 + 1)$ для множителя A^{n_2} , $(L + n_3) \times (L + n_3 + 1)$ для левого множителя P^{-1} и $L \times (L + n_3)$ для множителя A^{n_3} :

$$\begin{array}{ccccccc} \xleftarrow{L} & A^{n_3} & \xleftarrow{L+n_3} & P^{-1} & \xleftarrow{L+n_3+1} & A^{n_2} & \xleftarrow{L+n_2+n_3+1} \\ & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \\ & L \times (L+n_3) & & (L+n_3) \times (L+n_3+1) & & (L+n_3+1) \times (L+n_2+n_3+1) & \\ \xleftarrow{L+n_2+n_3+1} & & V & \xleftarrow{L+n_1+1} & P^{-1} & \xleftarrow{L+n_1} & A^{n_1} & \xleftarrow{L} \\ & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \\ & & (L+n_2+n_3+1) \times (L+n_1+1) \times L & & (L+n_1+1) \times (L+n_1) & & (L+n_1) \times L & \end{array}$$

Наконец, опишем случай $k = 4$. На основе формулы (4.56) получаем представление для спектральной характеристики $\mathbb{K}^{n_1 n_2 n_3 n_4}$ функции $\mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot)$ (см. пример 4.15):

$$\mathbb{K}^{n_1 n_2 n_3 n_4} \doteq A^{n_4} P^{-1} A^{n_3} V P^{-1} A^{n_2} V P^{-1} A^{n_1}. \quad (4.102)$$

Рассуждая подобным же образом, находим размеры усеченных спектральных характеристик в формуле (4.102): $(L + n_1) \times L$ для множителя A^{n_1} , $(L + n_1 + 1) \times (L + n_1)$ для правого множителя P^{-1} , $(2L + n_1) \times (L + n_1 + 1) \times L$ для правого множителя V , $(2L + n_1 + n_2) \times (2L + n_1)$ для множителя A^{n_2} , $(2L + n_3 + n_4) \times (2L + n_1 + n_2)$ для центрального множителя P^{-1} , $(L + n_3 + n_4 + 1) \times (2L + n_3 + n_4) \times L$ для левого множителя V , $(L + n_4 + 1) \times (L + n_3 + n_4 + 1)$ для множителя A^{n_3} , $(L + n_4) \times (L + n_4 + 1)$ для левого множителя P^{-1} и $L \times (L + n_4)$ для множителя A^{n_4} :

$$\begin{array}{ccccccc} \xleftarrow{L} & A^{n_4} & \xleftarrow{L+n_4} & P^{-1} & \xleftarrow{L+n_4+1} & A^{n_3} & \xleftarrow{L+n_3+n_4+1} \\ & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \\ & L \times (L+n_4) & & (L+n_4) \times (L+n_4+1) & & (L+n_4+1) \times (L+n_3+n_4+1) & \\ \xleftarrow{L+n_3+n_4+1} & & V & \xleftarrow{2L+n_3+n_4} & P^{-1} & \xleftarrow{2L+n_1+n_2} & A^{n_2} & \xleftarrow{2L+n_1} \\ & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \\ & & (L+n_3+n_4+1) \times (2L+n_3+n_4) \times L & & (2L+n_3+n_4) \times (2L+n_1+n_2) & & (2L+n_1+n_2) \times (2L+n_1) & \\ \xleftarrow{2L+n_1} & & V & \xleftarrow{L+n_1+1} & P^{-1} & \xleftarrow{L+n_1} & A^{n_1} & \xleftarrow{L} \\ & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \\ & & (2L+n_1) \times (L+n_1+1) \times L & & (L+n_1+1) \times (L+n_1) & & (L+n_1) \times L & \end{array}$$

Таким образом, выбирая один порядок усечения для всех матриц, образующих спектральную характеристику $\mathbb{K}^{n_1 \dots n_k}$, получаем при $k = 2$ порядок усечения $L' = L + \max\{n_1, n_2\}$ для спектральных характеристик P^{-1} и A . Если $k = 3$ или $k = 4$, то достаточными порядками усечения спектральных характеристик P^{-1} , A и V являются $L' = L + \max\{n_1, n_2 + n_3\} + 1$ или $L' = 2L + \max\{n_1 + n_2, n_3 + n_4\}$ соответственно.

Остается предложить следующую общую формулу для порядка усечения спектральных характеристик P^{-1} , A и V :

$$L' = L \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \max\{n_1 + \dots + n_{\lfloor k/2 \rfloor}, n_{\lfloor k/2 \rfloor + 1} + \dots + n_k\} + k \pmod{2}, \quad k \geq 2.$$

Отметим, что указанные порядки усечения L' матриц P^{-1} , A и V , необходимых для представления спектральной характеристики $\mathbb{K}^{n_1 \dots n_k}$, являются именно достаточными, но не обя-

зательно минимальными. Например, при $k = 2$ и $\max\{n_1, n_2\} - \min\{n_1, n_2\} > 1$ можно предложить «сбалансированный» вариант. Если $n = n_1 < n_2$ (при условии $n_1 > n_2$ результат аналогичен), $n_1 + n_2$ — четное число и $m = (n_1 + n_2)/2$, то

$$\underbrace{\leftarrow \frac{L}{L \times (L+n)} A^n \leftarrow \frac{L+n}{(L+n) \times (L+n+1)} A \leftarrow \frac{L+n+1}{(L+m) \times (L+m)} \dots \leftarrow \frac{L+m}{(L+n+1) \times (L+n)} P^{-1} \leftarrow \frac{L+n}{(L+n) \times L} A^n \leftarrow \frac{L}{L}}_{L \times (L+n) \quad (L+n) \times (L+n+1) \quad (L+m) \times (L+m) \quad (L+n+1) \times (L+n) \quad (L+n) \times L},$$

а если $n = n_1 < n_2$, $n_1 + n_2$ — нечетное число и $m = \lfloor (n_1 + n_2)/2 \rfloor + 1$, то

$$\underbrace{\leftarrow \frac{L}{L \times (L+n)} A^n \leftarrow \frac{L+n}{(L+n) \times (L+n+1)} A \leftarrow \frac{L+n+1}{(L+m-1) \times (L+m)} \dots \leftarrow \frac{L+m-1}{(L+m) \times (L+m-1)} A \leftarrow \frac{L+m}{(L+m) \times (L+m-1)}}_{L \times (L+n) \quad (L+n) \times (L+n+1) \quad (L+m-1) \times (L+m)} \\ \underbrace{\leftarrow \frac{L+m}{(L+m) \times (L+m-1)} A \leftarrow \frac{L+m-1}{(L+n+1) \times (L+n)} \dots \leftarrow \frac{L+n+1}{(L+n+1) \times (L+n)} P^{-1} \leftarrow \frac{L+n}{(L+n) \times L} A^n \leftarrow \frac{L}{L}}_{(L+m) \times (L+m-1) \quad (L+n+1) \times (L+n) \quad (L+n) \times L},$$

т.е. $L' = L + \lfloor (n_1 + n_2 + 1)/2 \rfloor$.

Для «сбалансированного» варианта при $k = 4$ достаточно положить $L' = 2L + \lfloor (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 1)/2 \rfloor$. Аналогичные формулы можно получить для четных значений $k > 4$.

Например, при $k = 2$ и $n_1 = 4$, $n_2 = 1$ приведенный выше вариант дает значение $L' = L + \max\{4, 1\} = L + 4$, а «сбалансированный» — $L' = L + \lfloor (4 + 1 + 1)/2 \rfloor = L + 3$, т.е. на единицу меньше. При $k = 4$ и $n_1 = n_2 = 0$, $n_3 = 2$, $n_4 = 8$ имеем $L' = 2L + \max\{0, 2 + 8\} = 2L + 10$ и $L' = 2L + \lfloor (2 + 8 + 1)/2 \rfloor = 2L + 5$, т.е. на пять единиц меньше.

Выводы по главе 4

1. Определены спектральные характеристики функций многих переменных, особое внимание уделено функциям $\mathbb{k}(\cdot)$ и $\mathbb{k}_\psi(\cdot)$.
2. Разработаны методы расчета коэффициентов разложения функций $\mathbb{k}(\cdot)$ и $\mathbb{k}_\psi(\cdot)$ относительно полиномов Лежандра, косинусоид, функций Уолша и Хаара, тригонометрических функций, которые необходимы для статистического моделирования нелинейных непрерывных стохастических систем.
3. Определены спектральные характеристики линейных функционалов, в качестве примеров приведены линейные функционалы, определяемые функциями $\mathbb{k}(\cdot)$ и $\mathbb{k}_\psi(\cdot)$. Получены спектральные представления этих функционалов.
4. Рассмотрены симметризованные функции по части переменных или по всем переменным и их спектральные характеристики. Определены пространства функций с дополнительными свойствами существования интегральных следов, которые совпадают с соответствующими матричными следами.
5. Доказаны теоремы о следах для коэффициентов разложения функций $\mathbb{k}(\cdot)$ и $\mathbb{k}_\psi(\cdot)$.
6. Проведен сравнительный анализ точности аппроксимации функций $\mathbb{k}(\cdot)$ и $\mathbb{k}_\psi(\cdot)$, которые связаны с усечением спектральных характеристик, относительно различных базисных систем.

Основные результаты опубликованы в работах [164, 165, 170, 171, 348].

ГЛАВА 5

КРАТНЫЕ И ПОВТОРНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

5.1. Ортогональные системы случайных величин

Пусть $(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ — полное вероятностное пространство [37, 124], где Ω — пространство элементарных событий, \mathfrak{G} — σ -алгебра его подмножеств, P — вероятностная мера (вероятность).

Случайная величина ξ со значениями в \mathbb{R} называется гильбертовой, если $E\xi^2 < \infty$, где E — математическое ожидание [37]. Гильбертовы случайные величины образуют гильбертово пространство $\mathcal{L}_2 = L_2(\Omega)$ — пространство квадратично интегрируемых функций $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ по вероятностной мере P , в котором норма и скалярное произведение задаются формулами $\|\xi\|_{\mathcal{L}_2} = \{E\xi^2\}^{\frac{1}{2}}$, $(\xi, \eta)_{\mathcal{L}_2} = E\xi\eta$, где $\xi, \eta \in \mathcal{L}_2$. В частном случае для гауссовских случайных величин с конечным моментом второго порядка такое определение дано в п. 2 замечаний 2.3. Там же был приведен пример ортонормированной в пространстве \mathcal{L}_2 системы независимых случайных величин $\{\zeta_i\}_{i=0}^{\infty}$, имеющих стандартное нормальное распределение: $(\zeta_i, \zeta_j)_{\mathcal{L}_2} = \delta_{ij}$, $i, j = 0, 1, 2, \dots$, где δ_{ij} — символ Кронекера (1.4), но базисом \mathcal{L}_2 такая система случайных величин не является. Более того, пространство \mathcal{L}_2 несепарабельно и выделить в нем счетную систему случайных величин, которую можно использовать для представления любого элемента $\xi \in \mathcal{L}_2$, невозможно. Однако, ограничиваясь некоторым линейным подпространством $\mathcal{L}'_2 \subset \mathcal{L}_2$, можно рассматривать задачу представления случайной величины в виде ряда.

Теорема 5.1 (см. [21, 69]). Пусть система случайных величин $\{\xi_i\}_{i=0}^{\infty}$ образует базис линейного подпространства $\mathcal{L}'_2 \subset \mathcal{L}_2$ (\mathcal{L}'_2 сепарабельно). Тогда любую случайную величину $\chi \in \mathcal{L}'_2$ можно представить в виде ряда по элементам базисной системы $\{\xi_i\}_{i=0}^{\infty}$:

$$\chi = \sum_{i=0}^{\infty} \chi_i \xi_i, \quad (5.1)$$

где

$$\chi_i = (\xi_i, \chi)_{\mathcal{L}_2} = E\xi_i\chi, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

Величины χ_i называются коэффициентами разложения случайной величины χ .

Если поставить задачу представления случайной величины $\chi \in \mathcal{L}'_2$ в виде ряда по случайным величинам, образующим базисную систему $\{\xi_i\}_{i=0}^{\infty}$, то ее решение будет состоять в определении коэффициентов разложения χ_i и использовании (5.1). Коэффициенты разложения (5.2) задают случайную величину χ и их упорядоченную совокупность можно рассматривать

как характеристику случайной величины χ . Равенство (5.1) выполняется с вероятностью 1 и понимается следующим образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \chi - \sum_{i=0}^n \chi_i \xi \right\|_{L_2}^2 = 0, \quad \text{или} \quad \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \left(\chi - \sum_{i=0}^n \chi_i \xi \right) = 0. \quad (5.3)$$

Если $\mathcal{L}'_2 = \{ \mathcal{J}_T^W f(\cdot) : f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}) \}$ и \mathcal{J}_T^W — линейный функционал, ставящий в соответствие функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ стохастический интеграл по отрезку $\mathbb{T} = [t_0, T]$ (см. разд. 2.3):

$$\mathcal{J}_T^W f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} f(t) dW(t),$$

где $W(\cdot)$ — винеровский процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$, то множество случайных величин $\{\zeta_i\}_{i=0}^\infty$ — это ортонормированный базис подпространства \mathcal{L}'_2 .

Если имеется неортогональная система случайных величин $\{\xi_i\}_{i=0}^\infty$, то для нее можно применить процесс ортогонализации Грама – Шмидта [69, 123]. Далее рассмотрим вариант ортогонализации для некоторых систем случайных величин с помощью ортогональных полиномов.

Прежде чем продолжить основную тему этого раздела, напомним о базисных системах для представления функций, заданных на неограниченных множествах.

Рассмотрим гильбертово пространство $L_2^\rho(\mathbb{X})$ квадратично интегрируемых функций одной переменной $f(\cdot) : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ с весом $\rho(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{X}$, где $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}$ — неограниченное множество (см. также п. 3 замечаний 1.2):

$$\int_{\mathbb{X}} \rho(x) f^2(x) dx < \infty.$$

Норма в пространстве $L_2^\rho(\mathbb{X})$ определяется выражением

$$\|f(\cdot)\|_{L_2^\rho(\mathbb{X})} = \left\{ \int_{\mathbb{X}} \rho(x) f^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (5.4)$$

а скалярное произведение задается формулой

$$(f(\cdot), g(\cdot))_{L_2^\rho(\mathbb{X})} = \int_{\mathbb{X}} \rho(x) f(x) g(x) dx, \quad (5.5)$$

где $f(\cdot), g(\cdot) \in L_2^\rho(\mathbb{X})$ [21, 69].

Функции $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ называются ортогональными с весом $\rho(\cdot)$, если их скалярное произведение равно нулю. Система попарно ортогональных функций $\{p(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$, принадлежащих пространству $L_2^\rho(\mathbb{X})$, называется ортонормированной на множестве \mathbb{X} , если

$$(p(i, \cdot), p(j, \cdot))_{L_2^\rho(\mathbb{X})} = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.6)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера (1.4).

Полная ортонормированная система функций называется базисом пространства $L_2^\rho(\mathbb{X})$, или базисной системой.

Эти формулы и понятия, естественно, аналогичны приведенным в разд. 1.1, но здесь важны новые примеры базисных систем [23, 99, 127, 129, 227].

1. Полиномы Эрмита:

$$\hat{H}^{m, \sigma}(i, x) = \frac{H_i^{m, \sigma}(x)}{\sqrt{i!}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.7)$$

где ненормированные полиномы Эрмита имеют вид

$$H_i^{m, \sigma}(x) = i! \sum_{k=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!(i-2k)!2^k} \left(\frac{x-m}{\sigma} \right)^{i-2k}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.8)$$

а $m \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 0$ — числовые параметры, $[\cdot]$ — целая часть числа.

Полиномы (5.8) ортогональны, а полиномы (5.7) ортонормированы на множестве $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ с весом $\rho(x) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$, т.е. относительно плотности вероятности нормального распределения с параметрами m и σ [125].

2. Полиномы Лагерра:

$$\hat{L}^\alpha(i, x) = \frac{L_i^\alpha(x)}{\sqrt{i! \Gamma(\alpha + i + 1)}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.9)$$

где ненормированные полиномы Лагерра задаются формулой

$$L_i^\alpha(x) = \sum_{k=0}^i (-1)^k C_i^k (\alpha + i)^{[i-k]} x^k, \quad (5.10)$$

а $\alpha > -1$ — параметр, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, $(\alpha + i)^{[i-k]}$ — факториальный многочлен (убывающий факториал), C_k^i — биномиальный коэффициент:

$$z^{[k]} = z(z-1)\dots(z-k+1) = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z+1-k)}, \quad C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}.$$

Полиномы (5.10) ортогональны, а полиномы (5.9) ортонормированы на множестве $\mathbb{X} = [0, +\infty)$ с весом $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$.

Для полиномов Эрмита при $m = 0$ и $\sigma = 1$ далее будем использовать обозначения $H_i(\cdot)$, $\hat{H}(i, \cdot)$, а для полиномов Лагерра при $\alpha = 0$ — обозначения $L_i(\cdot)$, $\hat{L}(i, \cdot)$.

С помощью полиномов Лагерра можно определить полиномы Эрмита:

$$H_{2i}(x) = (-1)^i 2^i L_i^{-1/2} \left(\frac{x^2}{2} \right), \quad H_{2i+1}(x) = (-1)^i 2^i x L_i^{1/2} \left(\frac{x^2}{2} \right),$$

а также полиномы ($\kappa > 0$ — дополнительный параметр)

$$G_i^{\alpha, \kappa}(x) = (-\kappa)^{-i} L_i^\alpha(\kappa x), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (5.11)$$

Полиномы $G_i^{\alpha, \kappa}(\cdot)$ ортогональны на множестве $\mathbb{X} = [0, +\infty)$ с весом $\rho(x) = \kappa^{\alpha+1} x^\alpha \times e^{-\kappa x} / \Gamma(\alpha + 1)$, а полиномы

$$\hat{G}^{\alpha, \kappa}(i, x) = \frac{\kappa^i G_i^{\alpha, \kappa}(x)}{\sqrt{i! (\alpha + i)^{[i]}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.12)$$

ортонормированы на множестве $\mathbb{X} = [0, +\infty)$ с тем же весом, т.е. относительно плотности вероятности гамма-распределения с параметрами α и κ [125].

Общее свойство ортогональных полиномов $H_i(\cdot)$, $L_i^\alpha(\cdot)$ и $G_i^{\alpha, \kappa}(\cdot)$ состоит в том, что их коэффициенты разложения по мономам и коэффициенты разложения мономов по этим полиномам либо совпадают, либо отличаются знаками:

$$H_i(x) = \sum_{k=0}^{[i/2]} (-1)^k h_k^{i-2k} x^{i-2k}, \quad x^i = \sum_{k=0}^{[i/2]} h_k^{i-2k} H_{i-2k}(x), \quad (5.13)$$

$$L_i^\alpha(x) = \sum_{k=0}^i l_k^i x^k, \quad x^i = \sum_{k=0}^i l_k^i L_k^\alpha(x), \quad (5.14)$$

$$G_i^{\alpha, \kappa}(x) = \sum_{k=0}^i (-1)^{k-i} s_k^i x^k, \quad x^i = \sum_{k=0}^i s_k^i G_k^{\alpha, \kappa}(x), \quad (5.15)$$

где

$$h_k^i = \frac{i!}{k!(i-2k)!2^k}, \quad l_k^i = (-1)^k C_i^k (\alpha + i)^{[i-k]}, \quad s_k^i = \kappa^{k-i} C_i^k (\alpha + i)^{[i-k]},$$

а зависимость коэффициентов l_k^i от α и s_k^i от α и κ для краткости опущена.

Лемма 5.1. Пусть $\xi \in \mathcal{L}_2$ — непрерывная случайная величина со значениями в множестве $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}$, закон распределения которой задается плотностью вероятности $\rho(\cdot)$; $\{p_i(\cdot)\}_{i=0}^\infty$ — система функций, ортогональных с весом $\rho(\cdot)$ на множестве \mathbb{X} . Тогда $\{p_i(\xi)\}_{i=0}^\infty$ — система ортогональных случайных величин в пространстве \mathcal{L}_2 .

Доказательство. Так как случайная величина ξ задается плотностью вероятности $\rho(\cdot)$, можно записать

$$(p_i(\xi), p_j(\xi))_{\mathcal{L}_2} = \mathbb{E} p_i(\xi) p_j(\xi) = \int_{\mathbb{X}} \rho(x) p_i(x) p_j(x) dx = (p_i(\cdot), p_j(\cdot))_{L_2^{\rho}(\mathbb{X})} = \delta_{ij} \|p_i(\cdot)\|_{L_2^{\rho}(\mathbb{X})}^2,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера (1.4), т.е. $\{p_i(\xi)\}_{i=0}^\infty$ — система ортогональных случайных величин в пространстве \mathcal{L}_2 , при этом $\|p_i(\xi)\|_{\mathcal{L}_2} = \|p_i(\cdot)\|_{L_2^{\rho}(\mathbb{X})}$. ◀

Например, если ζ — случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами m и σ , то случайные величины $\{H_i^{m,\sigma}(\zeta)\}_{i=0}^\infty$ ортогональны в пространстве \mathcal{L}_2 :

$$(H_i^{m,\sigma}(\zeta), H_j^{m,\sigma}(\zeta))_{\mathcal{L}_2} = \mathbb{E} H_i^{m,\sigma}(\zeta) H_j^{m,\sigma}(\zeta) = \delta_{ij} i!,$$

кроме того, эти случайные величины имеют нулевое математическое ожидание при $i > 0$:

$$\mathbb{E} H_i^{m,\sigma}(\zeta) = \mathbb{E} H_i^{m,\sigma}(\zeta) H_0^{m,\sigma}(\zeta) = \delta_{i0} \quad (H_0^{m,\sigma}(x) \equiv 1).$$

Если γ — случайная величина, имеющая гамма-распределение с параметрами α и κ , то случайные величины $\{G_i^{\alpha,\kappa}(\gamma)\}_{i=0}^\infty$ ортогональны в пространстве \mathcal{L}_2 :

$$(G_i^{\alpha,\kappa}(\gamma), G_j^{\alpha,\kappa}(\gamma))_{\mathcal{L}_2} = \mathbb{E} G_i^{\alpha,\kappa}(\gamma) G_j^{\alpha,\kappa}(\gamma) = \delta_{ij} \frac{i! (\alpha + i)^{[i]}}{\kappa^{2i}},$$

и аналогично эти случайные величины имеют нулевое математическое ожидание при $i > 0$:

$$\mathbb{E} G_i^{\alpha,\kappa}(\gamma) = \mathbb{E} G_i^{\alpha,\kappa}(\gamma) G_0^{\alpha,\kappa}(\gamma) = \delta_{i0} \quad (G_0^{\alpha,\kappa}(x) \equiv 1).$$

Лемма 5.1 обеспечивает разложение случайной величины $f(\xi)$, где $\xi \in \mathcal{L}_2$ — случайная величина со значениями в множестве $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}$, а $f(\cdot)$ — заданная неслучайная функция, которую можно разложить по функциям $\{p_i(\cdot)\}_{i=0}^\infty$, ортогональным с весом $\rho(\cdot)$ на множестве \mathbb{X} , по ортогональным случайным величинам $\{p_i(\xi)\}_{i=0}^\infty$. Наиболее предпочтительный вариант, если такие разложения конечны.

Например, если ζ — случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение, то случайные величины ζ^i , $i \in \mathbb{N}$, представляются следующим образом:

$$\zeta^i = \sum_{k=0}^{[i/2]} h_k^{i-2k} H_{i-2k}(\zeta),$$

а если γ — случайная величина, имеющая гамма-распределение с параметрами α и κ , то для случайных величин γ^i , $i \in \mathbb{N}$, получаем

$$\gamma^i = \sum_{k=0}^i s_k^i G_k^{\alpha,\kappa}(\gamma).$$

Замечания 5.1.

1. Можно рассмотреть ограниченное множество \mathbb{X} , например интервал или отрезок. В частности, если α — случайная величина, имеющая равномерное распределение на отрезке

$\mathbb{T} = [0, 1]$, то случайные величины $\{q(i, \alpha)\}_{i=0}^{\infty}$ ортогональны в пространстве \mathcal{L}_2 , где $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — это произвольная базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$, в том числе одна из базисных систем (1.5)–(1.9). Тогда $\alpha^n = \sum_{i=0}^n F_i^n \hat{P}(i, \alpha)$, где F_i^n — элементы спектральной характеристики F^n функции $f_n(t) = t^n$ относительно полиномов Лежандра (1.5), найденные в примере 1.2.

2. Согласно теореме 5.1 случайную величину $\chi \in \mathcal{L}'_2$ можно представить в виде ряда (5.1). Коэффициенты этого ряда (коэффициенты разложения χ относительно базисной системы $\{\xi_i\}_{i=0}^{\infty}$) определяются выражением (5.2), их упорядоченная совокупность задает случайную величину χ и формирует спектральную характеристику случайной величины χ :

$$\mathbb{S}[\chi] = X = [\chi_0 \ \chi_1 \ \chi_2 \ \dots]^T,$$

где отображение \mathbb{S} (спектральное преобразование) устанавливает соответствие между случайной величиной и ее спектральной характеристикой. Тогда формула (5.1) задает отображение \mathbb{S}^{-1} — обратное спектральное преобразование.

В разд. 1.1 рассмотрена задача представления функции одной переменной в виде ряда при условии, что она определена на отрезке $\mathbb{T} = [t_0, T]$. Аналогичную задачу можно сформулировать для функций, заданных на множестве целых неотрицательных чисел, т.е. $f(n): \{0, 1, 2, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$.

Вводя дополнительное условие квадратичной суммируемости, а именно $\sum_{n=0}^{\infty} f^2(n) < \infty$, естественно отождествить такое множество функций с пространством ℓ_2 квадратично суммируемых последовательностей. Норма и скалярное произведение в нем задаются формулами (1.22) и (1.23) соответственно, их уместно переписать в виде

$$\|f(\cdot)\|_{\ell_2} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f^2(n) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (f(\cdot), g(\cdot))_{\ell_2} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)g(n),$$

где $f(\cdot), g(\cdot) \in \ell_2$.

Вообще говоря, любое сепарабельное гильбертово пространство можно отождествить с пространством ℓ_2 (все сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны [69]). В данном случае функцию $f(\cdot) \in \ell_2$ можно трактовать как последовательность, или бесконечную матрицу-столбец, с элементами $F_n = f(n)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, и

$$F = [F_0 \ F_1 \ F_2 \ \dots]^T = [f(0) \ f(1) \ f(2) \ \dots]^T \in \ell_2.$$

Функции $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю. Система таких попарно ортогональных функций $\{p_i(\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ называется ортонормированной на множестве $\{0, 1, 2, \dots\}$, если $(p_i(\cdot), p_j(\cdot))_{\ell_2} = \delta_{ij}$, $i, j = 0, 1, 2, \dots$, где δ_{ij} — символ Кронекера (1.4).

Простейшая базисная система, или полная ортонормированная система функций, пространства ℓ_2 — это совокупность столбцов бесконечной единичной матрицы E , их возможно задать с помощью функций $e_i(n) = \delta_{in}$.

В более общем случае вводится гильбертово пространство ℓ_2^{ν} квадратично суммируемых последовательностей с весом $\nu(n) \geq 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \nu(n) f^2(n) < \infty$, норма и скалярное произведение

в котором задаются соотношениями

$$\|f(\cdot)\|_{\ell_2^\nu} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \nu(n) f^2(n) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (f(\cdot), g(\cdot))_{\ell_2^\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \nu(n) f(n) g(n),$$

где $f(\cdot), g(\cdot) \in \ell_2^\nu$. Для такого пространства понятия ортогональности и ортонормированности, а также определение базисной системы вводятся аналогичным образом. В частности, для ортонормированной системы имеем

$$(p_i(\cdot), p_j(\cdot))_{\ell_2^\nu} = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

В качестве примера можно предложить полиномы Шарлье [23]:

$$S_i^\lambda(n) = L_i^{n-i}(\lambda), \quad (5.16)$$

где $\lambda > 0$ — числовой параметр, а $L_i^{n-i}(\cdot)$ — полиномы Лагерра (5.10).

Полиномы $S_i^\lambda(\cdot)$ ортогональны на множестве $\{0, 1, 2, \dots\}$ с весом $\nu(n) = e^{-\lambda} \lambda^n / \Gamma(n+1) = e^{-\lambda} \lambda^n / n!$, где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция:

$$(S_i^\lambda(\cdot), S_j^\lambda(\cdot))_{\ell_2^\nu} = \delta_{ij} \lambda^i i!, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots,$$

а полиномы

$$\hat{S}^\lambda(i, n) = \frac{S_i^\lambda(n)}{\sqrt{\lambda^i i!}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.17)$$

ортонормированы на множестве $\{0, 1, 2, \dots\}$ с тем же весом, т.е. относительно пуассоновского распределения с параметром λ [124]. Для полиномов Шарлье при $\lambda = 1$ будем использовать обозначения $S_i(\cdot)$, $\hat{S}(i, \cdot)$.

Лемма 5.2. Пусть $\xi \in \mathcal{L}_2$ — дискретная случайная величина со значениями в множестве $\{0, 1, 2, \dots\}$, закон распределения которой задается функцией $\nu(\cdot)$; $\{p_i(\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — система функций, ортогональных с весом $\nu(\cdot)$ на множестве $\{0, 1, 2, \dots\}$. Тогда $\{p_i(\xi)\}_{i=0}^{\infty}$ — система ортогональных случайных величин в пространстве \mathcal{L}_2 .

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 5.1 и здесь не приводится.

Если η — случайная величина, имеющая пуассоновское распределение с параметром λ , то случайные величины $\{S_i^\lambda(\eta)\}_{i=0}^{\infty}$ ортогональны в пространстве \mathcal{L}_2 :

$$(S_i^\lambda(\eta), S_j^\lambda(\eta))_{\mathcal{L}_2} = \mathbb{E} S_i^\lambda(\eta) S_j^\lambda(\eta) = \delta_{ij} \lambda^i i!,$$

кроме того, эти случайные величины имеют нулевое математическое ожидание при $i > 0$:

$$\mathbb{E} S_i^\lambda(\eta) = \mathbb{E} S_i^\lambda(\eta) S_0^\lambda(\eta) = \delta_{i0} \quad (S_0^\lambda(n) \equiv 1).$$

Пример 5.1. По результатам моделирования найти погрешности оценок математических ожиданий и вторых начальных моментов следующих случайных величин:

а) $\hat{P}(i, \alpha)$, где $\hat{P}(i, \cdot)$, $i = 0, 1, 2, 3$, — полиномы Лежандра (1.5), α — случайная величина, имеющая равномерное распределение на отрезке $\mathbb{T} = [0, 1]$;

б) $H_i(\zeta)$, где $H_i(\cdot)$, $i = 0, 1, 2, 3$, — полиномы Эрмита (5.8) с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 1$, ζ — случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение;

в) $S_i(\eta)$, где $S_i(\cdot)$, $i = 0, 1, 2, 3$, — полиномы Шарлье (5.16) с параметром $\lambda = 1$, η — случайная величина, имеющая пуассоновское распределение с параметром λ .

□ Полиномы Лежандра (1.5) образуют ортонормированную систему функций и случайный вектор $U = [\hat{P}(0, \alpha) \hat{P}(1, \alpha) \hat{P}(2, \alpha) \hat{P}(3, \alpha)]^T$ имеет математическое ожидание $m_U = EU = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, и матрицу вторых начальных моментов $B_U = EUU^T = E_4$, где E_4 — единичная матрица порядка 4.

Пусть M — заданное натуральное число (объем выборки), α^k — реализации случайной величины α , $k = 1, 2, \dots, M$. Тогда оценки математического ожидания и второго начального момента случайного вектора U выражаются следующим образом:

$$\hat{m}_U = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M U^k, \quad \hat{B}_U = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M U^k [U^k]^T, \quad (5.18)$$

где $U^k = [\hat{P}(0, \alpha^k) \hat{P}(1, \alpha^k) \hat{P}(2, \alpha^k) \hat{P}(3, \alpha^k)]^T$.

Определим случайные векторы $V = [H_0(\zeta) H_1(\zeta) H_2(\zeta) H_3(\zeta)]^T$ и $W = [S_0(\eta) S_1(\eta) S_2(\eta) S_3(\eta)]^T$. Аналогично, $m_V = EV = \mathbf{1}$ и $m_W = EW = \mathbf{1}$. Полиномы Эрмита (5.8) и полиномы Шарлье (5.16) образуют ортогональные, но не ортонормированные системы функций. Поэтому матрицы вторых начальных моментов для них являются диагональными, но не единичными:

$$\begin{aligned} B_V = EVV^T &= \begin{bmatrix} 0! & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1! & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2! & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3! \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}. \\ B_W = EWW^T &= \end{bmatrix}$$

Оценки этих характеристик задаются формулами, аналогичными (5.18), они формируются на основе реализаций ζ^k и η^k случайных величин ζ и η .

Погрешности оценок математических ожиданий и вторых начальных моментов при заданном объеме выборки M будем вычислять по формулам $\varepsilon_m = \|m - \hat{m}\|$ и $\varepsilon_B = \|B - \hat{B}\|$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора или матрицы.

Результаты моделирования приведены в табл. 5.1 для погрешностей оценок математических ожиданий и в табл. 5.2 для погрешностей оценок вторых начальных моментов. Из этих данных видно, что с ростом объема выборки погрешность уменьшается (это статистическая погрешность, обусловленная конечностью выборки). ■

Таблица 5.1. Погрешности оценки математических ожиданий ε_m

Случайный вектор	$M = 10^2$	$M = 10^4$	$M = 10^6$	$M = 10^8$
U	0.097067	0.016596	0.002057	0.000360
V	0.226143	0.045360	0.002654	0.000192
W	0.083066	0.038304	0.001603	0.000112

Таблица 5.2. Погрешности оценки вторых начальных моментов ε_B

Случайный вектор	$M = 10^2$	$M = 10^4$	$M = 10^6$	$M = 10^8$
U	0.575676	0.041418	0.004154	0.000550
V	5.550937	0.350692	0.038556	0.001050
W	3.428629	2.295529	0.192438	0.037418

5.2. Кратные стохастические интегралы

Определим линейные операторы ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} : L_2(\mathbb{T}^k) \rightarrow \mathcal{L}_2$ и ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} : L_2(\mathbb{T}^k) \rightarrow \mathcal{L}_2$, ставящие в соответствие функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ кратные стохастические интегралы Ито и Стратоновича соответственно по винеровским процессам (интегралы кратности k , $\mathbb{T} = [t_0, T]$):

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}^k} f(t_1, \dots, t_k) dW_{j_1}(t_1) \dots dW_{j_k}(t_k), \quad (5.19)$$

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}^k} f(t_1, \dots, t_k) \circ dW_{j_1}(t_1) \circ \dots \circ dW_{j_k}(t_k), \quad (5.20)$$

где $j_1, \dots, j_k = 1, 2, \dots, s$; $W_1(\cdot), \dots, W_s(\cdot)$ — независимые стандартные винеровские процессы, заданные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$.

Стохастические интегралы Ито и Стратоновича кратности $k = 1$ от неслучайных функций, рассмотренные в разд. 2.3, совпадают, но при $k \geq 2$ это в общем случае не так.

Пусть $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ — это разбиение (2.22) отрезка \mathbb{T} . Кроме того, $\chi_{\Omega}(\cdot)$ — характеристическая функция множества $\Omega \subseteq \mathbb{T}^k$:

$$\chi_{\Omega}(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} 1, & (t_1, \dots, t_k) \in \Omega, \\ 0, & (t_1, \dots, t_k) \notin \Omega, \end{cases}$$

для которой верно соотношение $\chi_{\Delta_{i_1} \times \dots \times \Delta_{i_k}}(t_1, \dots, t_k) = \chi_{\Delta_{i_1}}(t_1) \dots \chi_{\Delta_{i_k}}(t_k)$ с учетом определения (1.14).

Введем обозначение $\bar{S}(\mathbb{T}^k)$ для множества элементарных функций:

$$f(t_1, \dots, t_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n a_{i_1 \dots i_k} \chi_{\Delta_{i_1} \times \dots \times \Delta_{i_k}}(t_1, \dots, t_k), \quad a_{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{R}, \quad (5.21)$$

и обозначение $S(\mathbb{T}^k) \subset \bar{S}(\mathbb{T}^k)$ для множества специальных элементарных функций [287], которые представляются формулой (5.21) при дополнительном условии $a_{i_1 \dots i_k} = 0$, если среди значений i_1, \dots, i_k найдется два совпадающих: $i_l = i_m$ для $l, m \in \{1, \dots, k\}$, $l \neq m$.

Кратным стохастическим интегралом Стратоновича от элементарной функции $f(\cdot) \in \bar{S}(\mathbb{T}^k)$ назовем случайную величину

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n a_{i_1 \dots i_k} W_{j_1}(\Delta_{i_1}) \dots W_{j_k}(\Delta_{i_k}), \quad (5.22)$$

где

$$W_j(\Delta_i) = \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j)} \chi_{\Delta_i}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \chi_{\Delta_i}(t) dW_j(t) = W_j(\vartheta_i) - W_j(\vartheta_{i-1}),$$

а $\chi_{\Delta_i}(\cdot)$ — индикатор множества (1.14).

Для измеримой функции $f(\cdot)$ определим кратный стохастический интеграл Стратоновича относительно разбиения $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ как интеграл (5.22) от функции $\bar{f}_{\{\Delta_i\}_{i=1}^n}(\cdot) \in \bar{S}(\mathbb{T}^k)$, полученной из $f(\cdot)$ с помощью усреднения [254, 264, 357]:

$$\bar{f}_{\{\Delta_i\}_{i=1}^n}(t_1, \dots, t_k) = \frac{1}{\text{mes } \Delta} \int_{\Delta} f(\tau_1, \dots, \tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k, \quad (t_1, \dots, t_k) \in \Delta = \Delta_{i_1} \times \dots \times \Delta_{i_k},$$

где $\text{mes } \Delta$ — мера Лебега множества Δ (см. также разд. 1.9 и 4.4). Будем обозначать такой интеграл ${}^S \mathcal{J}_{\{\Delta_i\}_{i=1}^n}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot)$.

Кратным стохастическим интегралом Стратоновича по винеровским процессам от функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ назовем среднеквадратический предел последовательности случайных величин

$\mathcal{S} \mathcal{J}_{\{\Delta_i\}_{i=1}^n}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot)$ при условии $\max_{1 \leq i \leq n} \text{mes } \Delta_i \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), если этот предел существует и не зависит от выбора возрастающей последовательности разбиений $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ отрезка \mathbb{T} :

$$\mathcal{S} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S} \mathcal{J}_{\{\Delta_i\}_{i=1}^n}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot).$$

Для функции $f(\cdot) \in S(\mathbb{T}^k)$ кратный стохастический интеграл Ито определяется следующим образом [254, 269, 287, 308]:

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n a_{i_1 \dots i_k} W_{j_1}(\Delta_{i_1}) \dots W_{j_k}(\Delta_{i_k}). \quad (5.23)$$

Кратным стохастическим интегралом Ито по винеровским процессам от функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ называется случайная величина

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f^{(n)}(\cdot),$$

где последовательность специальных элементарных функций $f^{(n)}(\cdot)$ сходится к функции $f(\cdot)$ по норме пространства $L_2(\mathbb{T}^k)$ (множество $S(\mathbb{T}^k)$ плотно в $L_2(\mathbb{T}^k)$ [287]).

При $k > 1$ в отличие от кратного стохастического интеграла Ито для интеграла Стратоновича справедливо мультипликативное свойство [269]:

$$\mathcal{S} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) = \mathcal{S} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1)} f_1(\cdot) \dots \mathcal{S} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_k)} f_k(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1)} f_1(\cdot) \dots {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_k)} f_k(\cdot), \quad (5.24)$$

если $f(\cdot) = f_1(\cdot) \otimes \dots \otimes f_k(\cdot)$, но при этом кратный стохастический интеграл Стратоновича определен не для всех функций $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$.

Далее будем использовать обозначения из разд. 4.3 для симметризованных функций и их спектральных характеристик, в том числе множества \mathbf{T}/\sim и \mathbf{I}/\sim всех классов эквивалентности \mathbf{T}_j и \mathbf{I}_j , $j \in J = \{j_1, \dots, j_k\}$, образованных переменными из множества $\mathbf{T} = \{t_1, \dots, t_k\}$ и индексами из множества $\mathbf{I} = \{i_1, \dots, i_k\}$ в соответствии с заданным мультимножеством $\bar{J} = (j_1 \dots j_k)$. При конкретных значениях индексов i_1, \dots, i_k из классов эквивалентности \mathbf{I}_j получаются множества I_j , а также мультимножества \bar{I}_j , или кортежи. Зависимость множеств I_j и мультимножеств \bar{I}_j от i_1, \dots, i_k не указывается для упрощения обозначений. Очевидно, что $|I_j| \leq \#(j, \bar{J})$, $|\bar{I}_j| = \#(j, \bar{J})$.

Лемма 5.3 (см. [162]) Пусть $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ — функция, для которой существует кратный интеграл Стратоновича, $f_{\bar{J}}(\cdot) = \langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}} \in L_2^{s(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ — соответствующая симметризованная функция (4.57). Тогда кратные стохастические интегралы Стратоновича по винеровским процессам от функций $f(\cdot)$ и $f_{\bar{J}}(\cdot)$ совпадают:

$$\mathcal{S} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) = \mathcal{S} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f_{\bar{J}}(\cdot). \quad (5.25)$$

Лемма 5.4 (см. [161]) Пусть $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$, $f_{\bar{J}}(\cdot) = \langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}} \in L_2^{s(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ — соответствующая симметризованная функция (4.57). Тогда кратные стохастические интегралы Ито по винеровским процессам от функций $f(\cdot)$ и $f_{\bar{J}}(\cdot)$ совпадают:

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f_{\bar{J}}(\cdot). \quad (5.26)$$

Линейные операторы ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)}$ и $\mathcal{S} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)}$, ставящие в соответствие функции кратные стохастические интегралы Ито и Стратоновича соответственно по винеровским процессам, — это случайные линейные функционалы, которые можно трактовать как обобщенные случай-

ные процессы. Спектральные характеристики для них определяются таким же образом, как это было ранее сделано для стохастических интегралов кратности $k = 1$ в разд. 2.3.

Пусть \mathcal{Z} — случайный линейный функционал, заданный на пространстве основных функций $D(\mathbb{T}^k)$ (см. разд. 4.2), $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базис пространства $L_2(\mathbb{T})$.

Бесконечная k -мерная случайная матрица-столбец $Z = (Z_{i_1 \dots i_k})$ с элементами

$$Z_{i_1 \dots i_k} = \mathcal{Z}q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot), \quad i_1, \dots, i_k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.27)$$

называется спектральной характеристикой случайного линейного функционала \mathcal{Z} .

По аналогии со случайными линейными функционалами, которые заданы на пространствах $D(\mathbb{T})$ и $D(\mathbb{T}^2)$ (см. разд. 2.2), отображение, ставящее в соответствие линейному функционалу \mathcal{Z} его спектральную характеристику Z , будем называть спектральным преобразованием и обозначать \mathbb{S} . Для представления таких спектральных характеристик может применяться табличная форма, описанная в п. 1 замечаний 4.1. Также полезно напомнить о корректности определения спектральной характеристики линейного функционала в п. 1 замечаний 1.4.

Сформулируем теорему, которое по сути аналогично теореме 4.3 для неслучайных линейных функционалов (см. также рассуждения в конце разд. 2.2).

Теорема 5.2. Пусть \mathcal{Z} — случайный линейный функционал, определенный на пространстве $L_2(\mathbb{T}^k)$; $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ — функция одной переменной; Z и F — спектральные характеристики функционала \mathcal{Z} и функции $f(\cdot)$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$. Тогда

$$\mathcal{Z}f(\cdot) = Z^T F \quad \text{P-п.н.} \quad (5.28)$$

Спектральные характеристики, ассоциированные с кратными стохастическими интегралами будут представлены в следующих разделах.

5.3. Представление кратных стохастических интегралов Ито

В разд. 5.1 показано, что если ζ — случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение, то случайные величины $\{H_i(\zeta)\}_{i=0}^{\infty}$ ортогональны в пространстве \mathcal{L}_2 :

$$(H_i(\zeta), H_j(\zeta))_{\mathcal{L}_2} = \mathbb{E}H_i(\zeta)H_j(\zeta) = \delta_{ij}i!, \quad \mathbb{E}H_i(\zeta) = \mathbb{E}H_i(\zeta)H_0(\zeta) = \delta_{i0} \quad (H_0(x) \equiv 1), \quad (5.29)$$

где $\{H_i(\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — полиномы Эрмита (5.8) с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 1$.

Введем коммутативную бинарную операцию $*$ для двух случайных величин $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{L}_2$ вида

$$\xi_1 = \prod_{m=1}^M H_{i_m}(\zeta_m), \quad \xi_2 = \prod_{m=1}^M H_{j_m}(\zeta_m)$$

следующим образом (произведение Вика [45]):

$$\xi_1 * \xi_2 = \prod_{m=1}^M H_{i_m + j_m}(\zeta_m), \quad (5.30)$$

где $M \geq 1$, ζ_1, \dots, ζ_M — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_m, j_m \in \{0, 1, 2, \dots\}$. В частности,

$$\begin{aligned} \zeta &= H_1(\zeta), & \zeta * \zeta &= H_2(\zeta) = \zeta^2 - 1, \\ \zeta * \zeta * \zeta &= H_3(\zeta) = \zeta^3 - 3\zeta, & \zeta * \zeta * \zeta * \zeta &= H_4(\zeta) = \zeta^4 - 6\zeta^2 + 3 \quad \text{и т.д.} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Теорема 5.3. Пусть $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ и $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ — базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$. Тогда

1) кратный стохастический интеграл Ито по винеровским процессам от функции $f(\cdot)$ представляется в виде

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) = \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} F_{i_1 \dots i_k} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}, \quad (5.32)$$

где $F_{i_1 \dots i_k}$ — коэффициенты разложения (4.4) функции $f(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty$; $\zeta_{i_l}^{(j_l)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_l = 0, 1, 2, \dots$ и $l = 1, \dots, k$;

2) норма кратного стохастического интеграла Ито удовлетворяет соотношению

$$\|{}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2} = M_{\bar{J}} \|\langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}}\|_{L_2(\mathbb{T}^k)} \leq M_{\bar{J}} \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}, \quad (5.33)$$

где величина $M_{\bar{J}}$ определяется формулой (4.58), $\langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}}$ — симметризованная функция (4.57).

Доказательство.

1. Пользуясь независимостью винеровских процессов $W_j(\cdot)$, $j \in J$, и результатом из [272, 287], записываем

$$\begin{aligned} {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot) &= \int_{\mathbb{T}^k} q(i_1, t_1) \dots q(i_k, t_k) dW_{j_1}(t_1) \dots dW_{j_k}(t_k) = \\ &= \prod_{j \in J} \int_{\mathbb{T}^{\#(j, \bar{J})}} \prod_{n \in N_j} q(i_n, t_n) dW_j(t_n) = \prod_{j \in J} \prod_{i \in I_j} H_{\#(i, \bar{I}_j)}(\zeta_i^{(j)}) = \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

где $\#(i, \bar{I}_j)$ — кратность элемента i в мультимножестве \bar{I}_j .

Случайная величина $\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)} \in \mathcal{L}_2$ образована произведениями независимых и центрированных случайных величин вида (5.31), поэтому $E \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)} = 0$. Согласно (5.29) получаем

$$\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \left\| \prod_{j \in J} \prod_{i \in I_j} H_{\#(i, \bar{I}_j)}(\zeta_i^{(j)}) \right\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \prod_{j \in J} \prod_{i \in I_j} \|H_{\#(i, \bar{I}_j)}(\zeta_i^{(j)})\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \prod_{j \in J} \prod_{i \in I_j} \#(i, \bar{I}_j)!. \quad (5.35)$$

2. Рассмотрим случай $f(\cdot) \in L_2^{s(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ и положим

$$f^{(n)}(\cdot) = \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^n F_{i_1 \dots i_k} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot), \quad (5.36)$$

тогда, используя выражение (5.34), для любого натурального n имеем

$$\begin{aligned} {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f^{(n)}(\cdot) &= {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^n F_{i_1 \dots i_k} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot) = \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^n F_{i_1 \dots i_k} {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot) = \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^n F_{i_1 \dots i_k} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Если значения j_1, \dots, j_k попарно различны, т.е. $|J| = k$, то оператор ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)}$ ставит в соответствие каждому элементу $q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot)$ элемент $\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)} = \zeta_{i_1}^{(j_1)} \dots \zeta_{i_k}^{(j_k)}$ с сохранением нормы и скалярного произведения:

$$\|{}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \|\zeta_{i_1}^{(j_1)} \dots \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2} = \|q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)} = 1,$$

поэтому $\|{}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f^{(n)}(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2} = \|f^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}$.

Если среди значений j_1, \dots, j_k есть совпадающие, т.е. $|J| < k$, то оператор ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)}$ ставит в соответствие множеству элементов, полученных из $q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot)$ с помощью всех перестановок индексов в каждом классе эквивалентности \mathbf{I}_j , $j \in J$, один элемент $\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}$, поскольку такая перестановка индексов не меняет этот элемент (см. также лемму 5.4). Норма и скалярное произведение в общем случае не сохраняются.

Величина $N_{i_1 \dots i_k} = \|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2$ равна числу одинаковых коэффициентов разложения $F_{i_1 \dots i_k}$ при всех перестановках индексов в каждом классе эквивалентности \mathbf{I}_j , поскольку число одинаковых коэффициентов разложения при всех перестановках индексов только в классе эквивалентности \mathbf{I}_j равно $\prod_{i \in I_j} \#(i, \bar{I}_j)!$, а при всех перестановках индексов в каждом классе эквивалентности \mathbf{I}_j , $j \in J$, получаем правую часть формулы (5.35). Перестановка индексов в каждом классе эквивалентности \mathbf{I}_j сохраняет значение $F_{i_1 \dots i_k}$, поэтому правая часть формулы (5.36) образована слагаемыми вида

$$\frac{F_{i_1 \dots i_k}}{N_{i_1 \dots i_k}} \sum_{(\mathbf{I}/\sim)} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot),$$

каждое из которых является суммой $M_J^2/N_{i_1 \dots i_k}$ ортонормированных функций. Таким образом,

$$\left\| \frac{1}{N_{i_1 \dots i_k}} \sum_{(\mathbf{I}/\sim)} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 = \frac{M_J^2}{N_{i_1 \dots i_k}}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_{i_1 \dots i_k}} {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \sum_{(\mathbf{I}/\sim)} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot) &= \frac{1}{N_{i_1 \dots i_k}} \sum_{(\mathbf{I}/\sim)} {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot) = \\ &= \frac{1}{N_{i_1 \dots i_k}} \sum_{(\mathbf{I}/\sim)} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)} = \frac{M_J^2}{N_{i_1 \dots i_k}} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}, \end{aligned}$$

$$\left\| \frac{M_J^2}{N_{i_1 \dots i_k}} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)} \right\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \frac{M_J^4}{N_{i_1 \dots i_k}^2} \|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \frac{M_J^4}{N_{i_1 \dots i_k}},$$

следовательно,

$$\left\| \frac{1}{N_{i_1 \dots i_k}} {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \sum_{(\mathbf{I}/\sim)} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot) \right\|_{\mathcal{L}_2} = M_J \left\| \frac{1}{N_{i_1 \dots i_k}} \sum_{(\mathbf{I}/\sim)} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}$$

и

$$\|{}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f^{(n)}(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2} = M_J \|f_J^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}. \quad (5.38)$$

Любую функцию $f(\cdot) \in L_2^{s(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ можно сколь угодно точно приблизить функцией $f^{(n)}(\cdot)$, линейный оператор ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)}$ ограничен на множестве функций $f^{(n)}(\cdot)$, поэтому его можно продолжить на линейное подпространство $L_2^{s(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$, сохраняя непрерывность [52]. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в соотношении (5.37), получаем разложение (5.32), а из равенства (5.38) следует соотношение

$$\|{}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2} = M_J \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}. \quad (5.39)$$

3. Пусть $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$, а $f_{\bar{J}}(\cdot) = \langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}} \in L_2^{s(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ — соответствующая симметризованная функция (4.57). Согласно лемме 5.4 получаем

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f_{\bar{J}}(\cdot) = \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} \tilde{F}_{i_1 \dots i_k} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)},$$

где $\tilde{F}_{i_1 \dots i_k}$ — коэффициенты разложения (4.4) функции $f_{\bar{J}}(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty$. Но из выражения (4.63) следует, что любые частичные суммы рядов $\sum_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty F_{i_1 \dots i_k} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}$ и $\sum_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty \tilde{F}_{i_1 \dots i_k} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}$ совпадают, т.е. справедливо разложение (5.32) и равенство $\|{}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2} = M_{\bar{J}} \|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}$, из которого с учетом оценки (4.60) получаем соотношение (5.33). ◀

Рассмотрим представление кратного стохастического интеграла Ито по винеровским процессам в виде ортогонального ряда. В правой части разложения (5.32) присутствуют случайные величины $\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)} \in \mathcal{L}_2$. Каждая из них имеет нулевое математическое ожидание, а второй начальный момент определяется формулой (5.35). Более того, любые две случайные величины $\zeta_{i_1'}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k'}^{(j_k)}$ и $\zeta_{i_1''}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k''}^{(j_k)}$ либо совпадают, либо ортогональны в пространстве \mathcal{L}_2 . Совпадают эти случайные величины тогда и только тогда, когда $(i_1' \dots i_k') = (i_1'' \dots i_k'')$ или мультимножество $(i_1'' \dots i_k'')$ получается из мультимножества $(i_1' \dots i_k')$ в результате перестановки индексов в классах эквивалентности \mathbf{I}_j , $j \in J$.

Следовательно, множество

$$\mathfrak{Z}^{\bar{J}} = \mathfrak{Z}^{(j_1 \dots j_k)} = \{\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\}_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty \quad (5.40)$$

состоит из попарно ортогональных случайных величин, а множество

$$\hat{\mathfrak{Z}}^{\bar{J}} = \hat{\mathfrak{Z}}^{(j_1 \dots j_k)} = \left\{ \frac{\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}} \right\}_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty \quad (5.41)$$

состоит из ортонормированных случайных величин, где норма определяется соотношением (5.35), причем в множествах (5.40) и (5.41) все совпадающие элементы, которые отвечают разным значениям индексов i_1, \dots, i_k , считаются неразличимыми.

Множества (5.40) и (5.41) можно принять за ортогональный и ортонормированный базисы линейного подпространства $\mathcal{L}_2^{W(j_1 \dots j_k)} = \{{}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) : f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)\} \subset \mathcal{L}_2$, причем величина $M_{\bar{J}}^2$ соответствует максимуму нормы элементов ортогонального базиса (5.40), который достигается при $|\bar{I}_j| = 1 \ \forall j \in J$, т.е. на элементах вида $\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)} = \prod_{j \in J} H_{\#(j, \bar{J})}(\zeta^{(j)})$, где $\zeta^{(j)}$ — любая случайная величина из множества $\{\zeta_i^{(j)}\}_{i=0}^\infty$. Действительно, принимая во внимание свойство (5.29), находим

$$\max_{i_1, \dots, i_k} \|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \left\| \prod_{j \in J} H_{\#(j, \bar{J})}(\zeta^{(j)}) \right\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \prod_{j \in J} \|H_{\#(j, \bar{J})}(\zeta^{(j)})\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \prod_{j \in J} (\#(j, \bar{J}))! = M_{\bar{J}}^2.$$

Если значения j_1, \dots, j_k попарно различны, т.е. $|J| = k$, то

$$(\zeta_{i_1}^{(j_1)} \dots \zeta_{i_k}^{(j_k)}, {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot))_{\mathcal{L}_2} = \mathbb{E}(\zeta_{i_1}^{(j_1)} \dots \zeta_{i_k}^{(j_k)}) {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) = F_{i_1 \dots i_k},$$

где $F_{i_1 \dots i_k}$ — коэффициенты разложения (4.4) функции $f(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty$. Если среди значений j_1, \dots, j_k есть совпадающие, т.е. $|J| < k$, то

$$\begin{aligned} & (\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}, {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot))_{\mathcal{L}_2} = \mathbb{E}(\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}) {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) = \\ & = \frac{1}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2} \sum_{(\mathbf{I}/\sim)} F_{i_1 \dots i_k} \|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \sum_{(\mathbf{I}/\sim)} F_{i_1 \dots i_k}, \\ \text{или} \quad & \left(\frac{\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}}, {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) \right)_{\mathcal{L}_2} = \frac{1}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}} \sum_{(\mathbf{I}/\sim)} F_{i_1 \dots i_k}, \end{aligned}$$

где суммирование ведется по всем перестановкам индексов в каждом классе эквивалентности \mathbf{I}_j , $j \in J$.

Отсюда получаем разложение кратного стохастического интеграла Ито (5.19) по ортонормированному базису (5.41):

$$\begin{aligned} {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) &= \sum_{\mathbf{I}_{j(1)}} \dots \sum_{\mathbf{I}_{j(|J|)}} \left(\frac{1}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}} \sum_{(\mathbf{I}/\sim)} F_{i_1 \dots i_k} \right) \frac{\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}} = \\ &= \sum_{\mathbf{I}_{j(1)}} \dots \sum_{\mathbf{I}_{j(|J|)}} \frac{M_J^2 \tilde{F}_{i_1 \dots i_k}}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}} \frac{\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

причем для каждой суммы по индексам из класса эквивалентности $\mathbf{I}_j = \{i_{(1)}, i_{(2)}, \dots, i_{(|J|)}\}$ суммирование осуществляется следующим образом:

$$\sum_{\mathbf{I}_j} = \sum_{i_{(1)} \leq i_{(2)} \leq \dots \leq i_{(|J|)}} = \sum_{i_{(1)}=0}^{\infty} \sum_{i_{(2)}=i_{(1)}}^{\infty} \dots \sum_{i_{(|J|)}=i_{(|J|-1)}}^{\infty}, \quad (5.43)$$

либо иначе, но чтобы из каждого набора значений индексов \bar{I}_j , $j \in J = \{j_{(1)}, \dots, j_{(|J|)}\}$, выбиралась только одна из перестановок. Переход к последнему равенству в формуле (5.42) основан на выражении (4.63).

Тогда норма интеграла ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot)$ описывается формулой

$$\begin{aligned} \|{}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2} &= \left\{ \sum_{\mathbf{I}_{j(1)}} \dots \sum_{\mathbf{I}_{j(|J|)}} \frac{1}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2} \left(\sum_{(\mathbf{I}/\sim)} F_{i_1 \dots i_k} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left\{ \sum_{\mathbf{I}_{j(1)}} \dots \sum_{\mathbf{I}_{j(|J|)}} \frac{(M_J^2 \tilde{F}_{i_1 \dots i_k})^2}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (5.44)$$

где $\tilde{F}_{i_1 \dots i_k}$ — коэффициенты разложения (4.4) функции $f_{\bar{J}}(\cdot) = \langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}}$ относительно базисной системы $\{q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty}$.

Переходя к сумме по $i_1, \dots, i_k = 0, 1, 2, \dots$ в формуле (5.44), получаем [161]:

$$\|{}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2} = M_J \left\{ \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} \tilde{F}_{i_1 \dots i_k}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (5.45)$$

т.е. соотношение (5.39) с учетом свойства (4.10) сохранения нормы.

Вернемся к понятиям случайных линейных функционалов и их спектральных характеристик, упомянутых в разд. 5.2. Рассмотрим линейный оператор ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)}$, ставящий в соответствие функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ кратный стохастический интеграл Ито по винеровским процессам $W_{j_1}(\cdot), \dots, W_{j_k}(\cdot)$ (см. формулу (5.19)) как пример случайного линейного функционала.

Применим определение спектральной характеристики случайного линейного функционала: $\mathbb{S}[{}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)}] = \mathcal{V}^{\otimes(j_1 \dots j_k)}$, где элементы спектральной характеристики $\mathcal{V}^{\otimes(j_1 \dots j_k)}$ согласно выражению (5.34) задаются соотношением

$$\mathcal{V}_{i_1, \dots, i_k}^{\otimes(j_1 \dots j_k)} = {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot) = \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}, \quad (5.46)$$

а $\zeta_{i_l}^{(j_l)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_l = 0, 1, 2, \dots$ и $l = 1, \dots, k$.

Можно предложить матричную запись $\mathcal{V}^{\otimes(j_1 \dots j_k)} = \mathcal{V}_{j_1} \circledast \dots \circledast \mathcal{V}_{j_k}$, где $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_s$ — это

спектральные характеристики (2.26) белых шумов $V_1(\cdot), \dots, V_s(\cdot)$, соответствующих винеровским процессам $W_1(\cdot), \dots, W_s(\cdot)$ в смысле соотношения (2.27), а \otimes — аналог тензорного произведения, но относительно операции $*$, т.е. произведения Вика. Каждая спектральная характеристика \mathcal{V}_j образована элементами $\zeta_i^{(j)}$, $j = 1, \dots, s$. Очевидно, распределение спектральной характеристики $\mathcal{V}^{\otimes(j_1 \dots j_k)}$ не зависит от выбора базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ (см. п. 1 замечаний 2.3).

Например (см. п. 1 замечаний 4.1), при $k = 2$ и $k = 3$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{\otimes(j_1 j_2)} &= \mathcal{V}_{j_1} \otimes \mathcal{V}_{j_2} = \begin{bmatrix} [\zeta_0^{(j_1)} * \zeta_0^{(j_2)} & \zeta_0^{(j_1)} * \zeta_1^{(j_2)} & \zeta_0^{(j_1)} * \zeta_2^{(j_2)} & \dots] \\ [\zeta_1^{(j_1)} * \zeta_0^{(j_2)} & \zeta_1^{(j_1)} * \zeta_1^{(j_2)} & \zeta_1^{(j_1)} * \zeta_2^{(j_2)} & \dots] \\ [\zeta_2^{(j_1)} * \zeta_0^{(j_2)} & \zeta_2^{(j_1)} * \zeta_1^{(j_2)} & \zeta_2^{(j_1)} * \zeta_2^{(j_2)} & \dots] \dots \end{bmatrix}^T, \\ \mathcal{V}^{\otimes(j_1 j_2 j_3)} &= \mathcal{V}_{j_1} \otimes \mathcal{V}_{j_2} \otimes \mathcal{V}_{j_3} = \\ &= \begin{bmatrix} [[\zeta_0^{(j_1)} * \zeta_0^{(j_2)} * \zeta_0^{(j_3)} & \zeta_0^{(j_1)} * \zeta_0^{(j_2)} * \zeta_1^{(j_3)} & \zeta_0^{(j_1)} * \zeta_0^{(j_2)} * \zeta_2^{(j_3)} & \dots] \\ [\zeta_0^{(j_1)} * \zeta_1^{(j_2)} * \zeta_0^{(j_3)} & \zeta_0^{(j_1)} * \zeta_1^{(j_2)} * \zeta_1^{(j_3)} & \zeta_0^{(j_1)} * \zeta_1^{(j_2)} * \zeta_2^{(j_3)} & \dots] \\ [\zeta_0^{(j_1)} * \zeta_2^{(j_2)} * \zeta_0^{(j_3)} & \zeta_0^{(j_1)} * \zeta_2^{(j_2)} * \zeta_1^{(j_3)} & \zeta_0^{(j_1)} * \zeta_2^{(j_2)} * \zeta_2^{(j_3)} & \dots] \dots] \\ [[\zeta_1^{(j_1)} * \zeta_0^{(j_2)} * \zeta_0^{(j_3)} & \zeta_1^{(j_1)} * \zeta_0^{(j_2)} * \zeta_1^{(j_3)} & \zeta_1^{(j_1)} * \zeta_0^{(j_2)} * \zeta_2^{(j_3)} & \dots] \\ [\zeta_1^{(j_1)} * \zeta_1^{(j_2)} * \zeta_0^{(j_3)} & \zeta_1^{(j_1)} * \zeta_1^{(j_2)} * \zeta_1^{(j_3)} & \zeta_1^{(j_1)} * \zeta_1^{(j_2)} * \zeta_2^{(j_3)} & \dots] \\ [\zeta_1^{(j_1)} * \zeta_2^{(j_2)} * \zeta_0^{(j_3)} & \zeta_1^{(j_1)} * \zeta_2^{(j_2)} * \zeta_1^{(j_3)} & \zeta_1^{(j_1)} * \zeta_2^{(j_2)} * \zeta_2^{(j_3)} & \dots] \dots] \\ [[\zeta_2^{(j_1)} * \zeta_0^{(j_2)} * \zeta_0^{(j_3)} & \zeta_2^{(j_1)} * \zeta_0^{(j_2)} * \zeta_1^{(j_3)} & \zeta_2^{(j_1)} * \zeta_0^{(j_2)} * \zeta_2^{(j_3)} & \dots] \\ [\zeta_2^{(j_1)} * \zeta_1^{(j_2)} * \zeta_0^{(j_3)} & \zeta_2^{(j_1)} * \zeta_1^{(j_2)} * \zeta_1^{(j_3)} & \zeta_2^{(j_1)} * \zeta_1^{(j_2)} * \zeta_2^{(j_3)} & \dots] \\ [\zeta_2^{(j_1)} * \zeta_2^{(j_2)} * \zeta_0^{(j_3)} & \zeta_2^{(j_1)} * \zeta_2^{(j_2)} * \zeta_1^{(j_3)} & \zeta_2^{(j_1)} * \zeta_2^{(j_2)} * \zeta_2^{(j_3)} & \dots] \dots] \dots \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Тогда значение функционала ${}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)}$ выражается в виде спектрального аналога формулы (5.32):

$${}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) = [\mathcal{V}^{\otimes(j_1 \dots j_k)}]^T F = [\mathcal{V}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{V}_{j_k}]^T F, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)]. \quad (5.47)$$

З а м е ч а н и я 5.2.

1. Всевозможные произведения полиномов Эрмита $\{H_{l_1}(\cdot)\}_{l_1=0}^\infty, \dots, \{H_{l_k}(\cdot)\}_{l_k=0}^\infty$ образуют ортогональную систему функций векторного аргумента $x = [x_1 \dots x_k]^T$ в пространстве $L_2^g(\mathbb{R}^k)$ с весом $\varrho(x) = \rho(x_1) \dots \rho(x_k)$ [112, 125], а именно полиномы Эрмита $\{H_{l_1 \dots l_k}(\cdot)\}_{l_1, \dots, l_k=0}^\infty$. Правая часть формулы (5.34) — это значение такого полинома $H_{l_1 \dots l_k}(\cdot)$ с векторным аргументом $x = [\zeta_{i_1}^{(j_1)} \dots \zeta_{i_k}^{(j_k)}]^T$ при условии $l_1 + \dots + l_k = \dim x = k$, где индексы l_1, \dots, l_k — степени полинома по координатам x_1, \dots, x_k соответственно — определяются элементами мультимножеств \bar{I}_j , $j \in J$, а часть индексов может быть нулевой, при этом

$$\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2} = \|H_{l_1 \dots l_k}(\cdot)\|_{L_2^g(\mathbb{R}^k)}.$$

Если определить отношение эквивалентности \sim для индексов из множества $\mathbf{L} = \{l_1, \dots, l_k\}$ и обозначить через \mathbf{L}/\sim множество всех классов эквивалентности \mathbf{L}_j , $j \in J$, т.е. $\mathbf{L}_j = \{l_n : n \in N_j\}$, то значения индексов в них определяются следующим образом. Если $\#(i, \bar{I}_j) = 1$, то соответствующий индекс из класса эквивалентности \mathbf{L}_j полагаем равным единице, если

$\#(i, I_j) > 1$, т.е. среди элементов \bar{I}_j есть совпадающие, то в соответствующем подмножестве индексов в \mathbf{L}_j любой из индексов полагается равным $\#(i, I_j)$, а остальные — равными нулю. Отметим, что множества \mathbf{I} , \mathbf{T} и \mathbf{L} , а также их разбиения на классы эквивалентности отличаются только обозначениями и соответствие между ними понимается именно с этой точки зрения.

Записывая каждый такой полином Эрмита в развернутом виде как сумму мономов, из формулы (5.32) можно получить представление кратных стохастических интегралов Ито, используемое в работе [308]. Действительно, при $k = 2, 3, 4$ имеем

$$\begin{aligned} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} &= \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} - \Delta_{12}, \\ \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)} &= \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} \zeta_{i_3}^{(j_3)} - \Delta_{12} \zeta_{i_3}^{(j_3)} - \Delta_{13} \zeta_{i_2}^{(j_2)} - \Delta_{23} \zeta_{i_1}^{(j_1)}, \\ \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)} * \zeta_{i_4}^{(j_4)} &= \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} \zeta_{i_3}^{(j_3)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} - \Delta_{12} \zeta_{i_3}^{(j_3)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} - \Delta_{13} \zeta_{i_2}^{(j_2)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} - \\ &\quad - \Delta_{14} \zeta_{i_2}^{(j_2)} \zeta_{i_3}^{(j_3)} - \Delta_{23} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} - \Delta_{24} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_3}^{(j_3)} - \Delta_{34} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} + \\ &\quad + \Delta_{12} \Delta_{34} + \Delta_{13} \Delta_{24} + \Delta_{14} \Delta_{23}, \quad \Delta_{lm} = \delta_{j_l j_m} \delta_{i_l i_m}, \quad l, m = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} F_{i_1 i_2} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} &= \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} F_{i_1 i_2} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} - \delta_{j_1 j_2} \sum_{i_1=0}^{\infty} F_{i_1 i_1}, \\ \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)} &= \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} \zeta_{i_3}^{(j_3)} - \\ &\quad - \delta_{j_1 j_2} \sum_{i_1, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_1 i_3} \zeta_{i_3}^{(j_3)} - \delta_{j_1 j_3} \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_1} \zeta_{i_2}^{(j_2)} - \delta_{j_2 j_3} \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_2} \zeta_{i_1}^{(j_1)}, \\ \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3 i_4} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)} * \zeta_{i_4}^{(j_4)} &= \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3 i_4} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} \zeta_{i_3}^{(j_3)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} - \\ &\quad - \delta_{j_1 j_2} \sum_{i_1, i_3, i_4=0}^{\infty} F_{i_1 i_1 i_3 i_4} \zeta_{i_3}^{(j_3)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} - \delta_{j_1 j_3} \sum_{i_1, i_2, i_4=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_1 i_4} \zeta_{i_2}^{(j_2)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} - \\ &\quad - \delta_{j_1 j_4} \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3 i_1} \zeta_{i_2}^{(j_2)} \zeta_{i_3}^{(j_3)} - \delta_{j_2 j_3} \sum_{i_1, i_2, i_4=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_2 i_4} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} - \\ &\quad - \delta_{j_2 j_4} \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3 i_2} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_3}^{(j_3)} - \delta_{j_3 j_4} \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3 i_3} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} + \\ &\quad + \delta_{j_1 j_2} \delta_{j_3 j_4} \sum_{i_1, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_1 i_3 i_3} + \delta_{j_1 j_3} \delta_{j_2 j_4} \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_1 i_2} + \delta_{j_1 j_4} \delta_{j_2 j_3} \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_2 i_1} \end{aligned}$$

при условии, что все ряды в правых частях записанных равенств являются сходящимися (как числовые ряды или как ряды в пространстве \mathcal{L}_2).

Для получения таких формул в общем случае требуется представить случайную величину $\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}$ в виде линейной комбинации произведения $\zeta_{i_1}^{(j_1)} \dots \zeta_{i_k}^{(j_k)}$ и всевозможных произведений элементов, выбранных из множества $\{\zeta_{i_1}^{(j_1)}, \dots, \zeta_{i_k}^{(j_k)}\}$, причем выбираются $k-2, k-4, \dots, k-2\lfloor k/2 \rfloor$ элементов, т.е. $k-2\nu$ элементов при $\nu = 1, \dots, \lfloor k/2 \rfloor$. Если k — четное, то в этой линейной комбинации появится единица, отвечающая значению $\nu = k/2$. Коэф-

коэффициенты линейной комбинации состоят из произведений величин Δ_{lm} , где индексы l, m отвечают всевозможным упорядоченным парам индексов $(i_l, j_l) = (i_m, j_m)$, для которых случайные величины $\zeta_{i_l}^{(j_l)}$ и $\zeta_{i_m}^{(j_m)}$ отсутствуют в соответствующем произведении, и коэффициента $(-1)^\nu$.

Введем отношение эквивалентности \sim для значений индексов из множества $\bar{I} = (i_1 \dots i_k)$:

$$i_l \sim i_m \iff i_l = i_m \text{ и } j_l = j_m, \quad l, m = 1, \dots, k,$$

и обозначим через \bar{I}/\sim множество всех классов эквивалентности \bar{I}_μ , где $\mu = 1, \dots, M$, $M \leq k$ — число таких классов эквивалентности.

Число комбинаций выбора ν_μ неупорядоченных пар (i_l, i_m) из множества \bar{I}_μ при условии $|\bar{I}_\mu| \geq 2$, а они дают коэффициент $\Delta_{lm} = 1$ в представлении случайной величины $\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}$, совпадает с коэффициентом $h_{i-2\nu_\mu}^{(i)}$ полинома Эрмита (5.13) при $i = |\bar{I}_\mu|$ (см. также разд. 4.4):

$$\frac{1}{\nu_\mu!} \frac{i!}{2!(i-2)!} \frac{(i-2)!}{2!(i-4)!} \dots \frac{(i-2(\nu_\mu-1))!}{2!(i-2\nu_\mu)!} \Big|_{i=|\bar{I}_\mu|} = \frac{i!}{\nu_\mu!(i-2\nu_\mu)!2^{\nu_\mu}} = h_{i-2\nu_\mu}^{(i)} \Big|_{i=|\bar{I}_\mu|}.$$

Число комбинаций выбора ν_μ таких пар из всех множеств \bar{I}_μ определяется произведением коэффициентов полиномов Эрмита (5.13) степеней $|\bar{I}_\mu|$:

$$\prod_{\mu=1}^M h_{i-2\nu_\mu}^{(i)} \Big|_{i=|\bar{I}_\mu|},$$

которые возникают при построении полиномов Эрмита $\{H_{l_1 \dots l_k}(x)\}_{l_1, \dots, l_k=0}^\infty$ векторного аргумента. Это произведение записано в соотношении (5.34).

2. Квадрат нормы случайной величины $\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}$, где $\zeta_{i_l}^{(j_l)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_l = 0, 1, 2, \dots$ и $l = 1, \dots, k$ определяется формулой (5.35), но можно предложить другое выражение, использующее символы Кронекера (1.4). В частности,

$$\begin{aligned} \|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 &= 1 + \Delta_{12}, \\ \|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 &= 1 + \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{23} + 2\Delta_{12}\Delta_{23}, \\ \|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)} * \zeta_{i_4}^{(j_4)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 &= 1 + \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{23} + \Delta_{24} + \Delta_{34} + \\ &+ 2\Delta_{12}\Delta_{23} + 2\Delta_{12}\Delta_{24} + 2\Delta_{13}\Delta_{34} + 2\Delta_{23}\Delta_{34} + \Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{13}\Delta_{24} + \Delta_{14}\Delta_{23} + 6\Delta_{12}\Delta_{23}\Delta_{34}, \end{aligned}$$

где $\Delta_{lm} = \delta_{j_l j_m} \delta_{i_l i_m}$, $l, m = 1, \dots, k$, в чем достаточно убедиться непосредственной проверкой.

3. Для линейного подпространства $L_2^{s(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ можно определить норму

$$\|f(\cdot)\|_{L_2^{s(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)} = \|\langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}}\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}$$

и рассматривать его как множество классов эквивалентности:

$$f(\cdot) \sim g(\cdot) \iff \langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}} = \langle g(\cdot) \rangle_{\bar{J}}. \quad (5.48)$$

С учетом леммы 5.4 пространство $L_2^{s(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ естественно принять за область определения линейного оператора ${}^1\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)}$. Следовательно, линейный оператор ${}^1\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)}$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между линейными пространствами $L_2^{s(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ и $\mathcal{L}_2^{W(j_1 \dots j_k)}$. Тогда для любой функции из класса $L_2^{s(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ справедливо разложение (5.32), в правой части которого $F_{i_1 \dots i_k}$ — коэффициенты разложения (4.4) любой функции $f(\cdot)$ из этого класса, т.е. элемента пространства $L_2(\mathbb{T}^k)$.

Если для линейного пространства $L_2^{s(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ определить норму следующим образом: $\|f(\cdot)\|_{L_2^{s(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)} = M_{\bar{J}} \|\langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}}\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}$, то вместо формулы (5.33) получим $\|{}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2} = \|\langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}}\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}$.

Пример 5.2. Представить стохастические интегралы Ито

$$\text{а) } {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(123)} f(\cdot), \quad \text{б) } {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(212)} f(\cdot), \quad \text{в) } {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(111)} f(\cdot)$$

кратности $k = 3$ в виде ряда (5.32) и ортогонального разложения (5.42), где $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^3)$.

□ Начнем с интеграла ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(123)} f(\cdot)$. В данном случае $j_1 = 1, j_2 = 2$ и $j_3 = 3$, т.е. $J = \{1, 2, 3\}$ и $\bar{J} = (123)$. Множество индексов $\mathbf{I} = \{i_1, i_2, i_3\}$ и множество переменных $\mathbf{T} = \{t_1, t_2, t_3\}$ разобьем на классы эквивалентности:

$$\mathbf{I}/\sim = \underbrace{\{\{i_1\}\}}_{\mathbf{I}_1}, \underbrace{\{\{i_2\}\}}_{\mathbf{I}_2}, \underbrace{\{\{i_3\}\}}_{\mathbf{I}_3}, \quad \mathbf{T}/\sim = \underbrace{\{\{t_1\}\}}_{\mathbf{T}_1}, \underbrace{\{\{t_2\}\}}_{\mathbf{T}_2}, \underbrace{\{\{t_3\}\}}_{\mathbf{T}_3},$$

$$\#(1, \bar{J}) = \#(2, \bar{J}) = \#(3, \bar{J}) = 1, \quad M_{\bar{J}}^2 = 1!1!1! = 1.$$

При заданных значениях i_1, i_2, i_3 получаем $I_1 = \bar{I}_1 = \{i_1\}, I_2 = \bar{I}_2 = \{i_2\}, I_3 = \bar{I}_3 = \{i_3\}$.

На основе соотношений (5.34) и (5.35) (см. также п. 1 и 2 замечаний 5.2) имеем

$$\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(2)} * \zeta_{i_3}^{(3)} = \zeta_{i_1}^{(1)} \zeta_{i_2}^{(2)} \zeta_{i_3}^{(3)} = H_{1,1,1}(\zeta_{i_1}^{(1)}, \zeta_{i_2}^{(2)}, \zeta_{i_3}^{(3)}), \quad \|\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(2)} * \zeta_{i_3}^{(3)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = 1,$$

поэтому формулы (5.40) и (5.41) определяют ортонормированный базис:

$$\mathfrak{Z}^{(123)} = \hat{\mathfrak{Z}}^{(123)} = \{\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(2)} * \zeta_{i_3}^{(3)}\}_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} = \{\zeta_{i_1}^{(1)} \zeta_{i_2}^{(2)} \zeta_{i_3}^{(3)}\}_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty}.$$

Функция $f_{\bar{J}}(\cdot)$ совпадает с функцией $f(\cdot)$ и далее для представления интеграла ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(123)} f(\cdot)$ не рассматривается.

Пусть $F_{i_1 i_2 i_3}$ — коэффициенты разложения (4.4) функции $f(\cdot)$, а $\zeta_{i_1}^{(1)}, \zeta_{i_2}^{(2)}$ и $\zeta_{i_3}^{(3)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_1, i_2, i_3 = 0, 1, 2, \dots$. Отсюда находим представление кратного стохастического интеграла Ито ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(123)} f(\cdot)$ в виде ряда (5.32), который и является ортогональным разложением (5.42):

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(123)} f(\cdot) = \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(2)} * \zeta_{i_3}^{(3)} = \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(1)} \zeta_{i_2}^{(2)} \zeta_{i_3}^{(3)},$$

а его норма определяется формулами (5.33) и (5.44):

$$\|{}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(123)} f(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2} = \left\{ \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}.$$

Перейдем к интегралу ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(212)} f(\cdot)$. В данном случае $j_1 = j_3 = 2$ и $j_2 = 1$, т.е. $J = \{1, 2\}$ и $\bar{J} = (212)$. Множество индексов $\mathbf{I} = \{i_1, i_2, i_3\}$ и множество переменных $\mathbf{T} = \{t_1, t_2, t_3\}$ разобьем на классы эквивалентности:

$$\mathbf{I}/\sim = \underbrace{\{\{i_2\}\}}_{\mathbf{I}_1}, \underbrace{\{\{i_1, i_3\}\}}_{\mathbf{I}_2}, \quad \mathbf{T}/\sim = \underbrace{\{\{t_2\}\}}_{\mathbf{T}_1}, \underbrace{\{\{t_1, t_3\}\}}_{\mathbf{T}_2},$$

$$\#(1, \bar{J}) = 1, \quad \#(2, \bar{J}) = 2, \quad M_{\bar{J}}^2 = 1!2! = 2.$$

При заданных значениях i_1, i_2, i_3 получаем $I_1 = \bar{I}_1 = \{i_2\}$, а также $I_2 = \{i_1, i_3\}$ при $i_1 \neq i_3$ и $I_2 = \{i_1\}$ при $i_1 = i_3, \bar{I}_2 = (i_1 i_3)$.

На основе соотношений (5.34) и (5.35) (см. также п. 1 и 2 замечаний 5.2) находим

$$\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)} = \begin{cases} \zeta_{i_1}^{(2)} \zeta_{i_2}^{(1)} \zeta_{i_3}^{(2)} = H_{1,1,1}(\zeta_{i_1}^{(2)}, \zeta_{i_2}^{(1)}, \zeta_{i_3}^{(2)}), & i_1 \neq i_3, \\ H_2(\zeta_{i_1}^{(2)}) \zeta_{i_2}^{(1)} = H_{2,1,0}(\zeta_{i_1}^{(2)}, \zeta_{i_2}^{(1)}, \zeta_{i_3}^{(2)}), & i_1 = i_3, \end{cases}$$

$$\|\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \begin{cases} 1, & i_1 \neq i_3, \\ 2, & i_1 = i_3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \|\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = 1 + \delta_{i_1 i_3},$$

следовательно, ортогональный и ортонормированный базисы (5.40) и (5.41) имеют вид

$$\mathfrak{Z}^{(212)} = \{\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}\}_{i_1, i_2, i_3=0}^\infty,$$

$$\hat{\mathfrak{Z}}^{(212)} = \left\{ \frac{\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}}{\|\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}} \right\}_{i_1, i_2, i_3=0}^\infty = \left\{ \frac{\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}}{\sqrt{1 + \delta_{i_1 i_3}}} \right\}_{i_1, i_2, i_3=0}^\infty.$$

Симметризованная функция $f_{\bar{J}}(\cdot)$ согласно (4.57) определяется следующим образом:

$$f_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{M_{\bar{J}}^2} \sum_{(\mathbf{T}/\sim)} f(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{2} (f(t_1, t_2, t_3) + f(t_3, t_2, t_1)).$$

Пусть $F_{i_1 i_2 i_3}$ и $\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3}$ — коэффициенты разложения (4.3) и (4.63) функций $f(\cdot)$ и $f_{\bar{J}}(\cdot)$ соответственно:

$$\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3} = \frac{F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_3 i_2 i_1}}{2}, \quad i_1, i_2, i_3 = 0, 1, 2, \dots,$$

и $\zeta_{i_1}^{(2)}$ и $\zeta_{i_2}^{(1)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_1, i_2 = 0, 1, 2, \dots$. Тогда получаем представление кратного стохастического интеграла Ито ${}^I \mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(212)} f(\cdot)$ в виде ряда (5.32) и ортогонального разложения (5.42):

$$\begin{aligned} {}^I \mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(212)} f(\cdot) &= \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^\infty F_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)} = \\ &= \sum_{i_1=0}^\infty \sum_{i_2=0}^\infty \sum_{i_3=i_1}^\infty \frac{F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_3 i_2 i_1}}{\|\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}} \frac{\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}}{\|\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}} = \\ &= \sum_{i_1=0}^\infty \sum_{i_2=0}^\infty \sum_{i_3=i_1}^\infty \frac{F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_3 i_2 i_1}}{1 + \delta_{i_1 i_3}} \zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}. \end{aligned}$$

Аналогичные представления для интеграла Ито ${}^I \mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(212)} f(\cdot)$ могут быть записаны с помощью коэффициентов разложения $\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3}$:

$$\begin{aligned} {}^I \mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(212)} f(\cdot) &= \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^\infty \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)} = \\ &= \sum_{i_1=0}^\infty \sum_{i_2=0}^\infty \sum_{i_3=i_1}^\infty \frac{2\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3}}{\|\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}} \frac{\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}}{\|\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}} = \\ &= \sum_{i_1=0}^\infty \sum_{i_2=0}^\infty \sum_{i_3=i_1}^\infty \frac{2\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3}}{1 + \delta_{i_1 i_3}} \zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}. \end{aligned}$$

Переходя к форме записи из [308], получаем

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(212)} f(\cdot) = \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^\infty F_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(2)} \zeta_{i_2}^{(1)} \zeta_{i_3}^{(2)} - \sum_{i_1, i_2=0}^\infty F_{i_1 i_2 i_1} \zeta_{i_1}^{(2)}$$

и согласно формулам (5.33) и (5.44) для нормы интеграла ${}^I \mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(212)} f(\cdot)$ имеем

$$\|{}^I \mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(212)} f(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2} = \left\{ \sum_{i_1=0}^\infty \sum_{i_2=0}^\infty \sum_{i_3=i_1}^\infty \frac{(F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_3 i_2 i_1})^2}{1 + \delta_{i_1 i_3}} \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ 2 \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^\infty \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}.$$

Все приведенные разложения справедливы и для кратного стохастического интеграла Ито ${}^I\mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(212)}f_{\bar{J}}(\cdot)$, так как ${}^I\mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(212)}f(\cdot) = {}^I\mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(212)}f_{\bar{J}}(\cdot)$ (см. лемму 5.4).

Наконец, рассмотрим интеграл ${}^I\mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(111)}f(\cdot)$. Здесь $j_1 = j_2 = j_3 = 1$, т.е. $J = \{1\}$ и $\bar{J} = (111)$. Множество индексов $\mathbf{I} = \{i_1, i_2, i_3\}$ и множество переменных $\mathbf{T} = \{t_1, t_2, t_3\}$ совпадают с классами эквивалентности, т.е. фактор-множества состоят из одного элемента (см. пример 4.6):

$$\mathbf{I}/\sim = \underbrace{\{i_1, i_2, i_3\}}_{\mathbf{I}_1}, \quad \mathbf{T}/\sim = \underbrace{\{t_1, t_2, t_3\}}_{\mathbf{T}_1}, \quad \#(1, \bar{J}) = 3, \quad M_{\bar{J}}^2 = 3! = 6.$$

При заданных значениях i_1, i_2, i_3 получаем $I_1 = \{i_1, i_2, i_3\}$ при попарно различных i_1, i_2, i_3 , $I_1 = \{i_1, i_3\}$ при $i_1 = i_2 \neq i_3$, $I_1 = \{i_1, i_2\}$ при $i_1 = i_3 \neq i_2$, $I_1 = \{i_1, i_2\}$ при $i_1 \neq i_2 = i_3$, $I_1 = \{i_1\}$ при $i_1 = i_2 = i_3$, $\bar{I}_1 = (i_1 i_2 i_3)$.

Соотношения (5.34) и (5.35) (см. также п. 1 и 2 замечаний 5.2) позволяют записать

$$\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)} = \begin{cases} \zeta_{i_1}^{(1)} \zeta_{i_2}^{(1)} \zeta_{i_3}^{(1)} = H_{1,1,1}(\zeta_{i_1}^{(1)}, \zeta_{i_2}^{(1)}, \zeta_{i_3}^{(1)}), & i_1, i_2, i_3 \text{ попарно различны,} \\ H_2(\zeta_{i_1}^{(1)}) \zeta_{i_3}^{(1)} = H_{2,0,1}(\zeta_{i_1}^{(1)}, \zeta_{i_2}^{(1)}, \zeta_{i_3}^{(1)}), & i_1 = i_2 \neq i_3, \\ H_2(\zeta_{i_1}^{(1)}) \zeta_{i_2}^{(1)} = H_{2,1,0}(\zeta_{i_1}^{(1)}, \zeta_{i_2}^{(1)}, \zeta_{i_3}^{(1)}), & i_1 = i_3 \neq i_2, \\ \zeta_{i_1}^{(1)} H_2(\zeta_{i_2}^{(1)}) = H_{1,2,0}(\zeta_{i_1}^{(1)}, \zeta_{i_2}^{(1)}, \zeta_{i_3}^{(1)}), & i_1 \neq i_2 = i_3, \\ H_3(\zeta_{i_1}^{(1)}) = H_{3,0,0}(\zeta_{i_1}^{(1)}, \zeta_{i_2}^{(1)}, \zeta_{i_3}^{(1)}), & i_1 = i_2 = i_3, \end{cases}$$

$$\|\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \begin{cases} 1, & i_1, i_2, i_3 \text{ попарно различны,} \\ 2, & i_1 = i_2 \neq i_3 \text{ или } i_1 = i_3 \neq i_2 \text{ или } i_1 \neq i_2 = i_3, \\ 6, & i_1 = i_2 = i_3, \end{cases}$$

$$\text{или } \|\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = 1 + \delta_{i_1 i_2} + \delta_{i_1 i_3} + \delta_{i_2 i_3} + 2\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_2 i_3},$$

следовательно, ортогональный и ортонормированный базисы (5.40) и (5.41) представляются в форме

$$\mathfrak{Z}^{(111)} = \{\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}\}_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty},$$

$$\hat{\mathfrak{Z}}^{(111)} = \left\{ \frac{\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}}{\|\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}\|_{\mathcal{L}_2}} \right\}_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} = \left\{ \frac{\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}}{\sqrt{1 + \delta_{i_1 i_2} + \delta_{i_1 i_3} + \delta_{i_2 i_3} + 2\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_2 i_3}}} \right\}_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty}.$$

Симметризованная функция $f_{\bar{J}}(\cdot)$ согласно (4.57) задается в виде

$$f_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{M_{\bar{J}}^2} \sum_{(\mathbf{T}/\sim)} f(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{6} (f(t_1, t_2, t_3) + f(t_2, t_1, t_3) + \\ + f(t_3, t_2, t_1) + f(t_1, t_3, t_2) + f(t_2, t_3, t_1) + f(t_3, t_1, t_2)).$$

Пусть $F_{i_1 i_2 i_3}$ и $\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3}$ — коэффициенты разложения (4.3) и (4.63) функций $f(\cdot)$ и $f_{\bar{J}}(\cdot)$ соответственно:

$$\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3} = \frac{F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_2 i_1 i_3} + F_{i_3 i_2 i_1} + F_{i_1 i_3 i_2} + F_{i_2 i_3 i_1} + F_{i_3 i_1 i_2}}{6}, \quad i_1, i_2, i_3 = 0, 1, 2, \dots,$$

а $\zeta_{i_1}^{(1)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_1 = 0, 1, 2, \dots$. Тогда находим представление кратного стохастического интеграла Ито ${}^I\mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(111)}f(\cdot)$ в виде ряда (5.32) и ортогонального разложения (5.42):

$${}^I\mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(111)}f(\cdot) = \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=i_1}^{\infty} \sum_{i_3=i_2}^{\infty} \frac{F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_2 i_1 i_3} + F_{i_3 i_2 i_1} + F_{i_1 i_3 i_2} + F_{i_2 i_3 i_1} + F_{i_3 i_1 i_2}}{\|\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}\|_{\mathcal{L}_2}} \frac{\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}}{\|\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}\|_{\mathcal{L}_2}} = \\
&= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=i_1}^{\infty} \sum_{i_3=i_2}^{\infty} \frac{F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_2 i_1 i_3} + F_{i_3 i_2 i_1} + F_{i_1 i_3 i_2} + F_{i_2 i_3 i_1} + F_{i_3 i_1 i_2}}{1 + \delta_{i_1 i_2} + \delta_{i_1 i_3} + \delta_{i_2 i_3} + 2\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_2 i_3}} \zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}.
\end{aligned}$$

Аналогичные представления для интеграла ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(111)} f(\cdot)$ могут быть записаны с помощью коэффициентов разложения $\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3}$:

$$\begin{aligned}
{}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(111)} f(\cdot) &= \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)} = \\
&= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=i_1}^{\infty} \sum_{i_3=i_2}^{\infty} \frac{6\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3}}{\|\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}\|_{\mathcal{L}_2}} \frac{\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}}{\|\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}\|_{\mathcal{L}_2}} = \\
&= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=i_1}^{\infty} \sum_{i_3=i_2}^{\infty} \frac{6\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3}}{1 + \delta_{i_1 i_2} + \delta_{i_1 i_3} + \delta_{i_2 i_3} + 2\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_2 i_3}} \zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}.
\end{aligned}$$

Если использовать форму записи из [308], то

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(111)} f(\cdot) = \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(1)} \zeta_{i_2}^{(1)} \zeta_{i_3}^{(1)} - \sum_{i_1, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_1 i_3} \zeta_{i_3}^{(1)} - \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_1} \zeta_{i_2}^{(1)} - \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_2} \zeta_{i_1}^{(1)}.$$

В заключительной части воспользуемся формулами (5.33) и (5.44) для нормы интеграла ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(111)} f(\cdot)$:

$$\begin{aligned}
\|{}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(111)} f(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2} &= \left\{ \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=i_1}^{\infty} \sum_{i_3=i_2}^{\infty} \frac{(F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_2 i_1 i_3} + F_{i_3 i_2 i_1} + F_{i_1 i_3 i_2} + F_{i_2 i_3 i_1} + F_{i_3 i_1 i_2})^2}{1 + \delta_{i_1 i_2} + \delta_{i_1 i_3} + \delta_{i_2 i_3} + 2\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_2 i_3}} \right\}^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left\{ 6 \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6} \|f_{\mathbb{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}.
\end{aligned}$$

Как и для интеграла ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(212)} f(\cdot)$, все приведенные разложения справедливы для кратного стохастического интеграла Ито ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(111)} f_{\mathbb{J}}(\cdot)$, так как ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(111)} f(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(111)} f_{\mathbb{J}}(\cdot)$ (см. лемму 5.4). ■

5.4. Представление кратных стохастических интегралов Стратоновича

Согласно теореме 5.3 (см. также п. 3 замечаний 5.2) кратный стохастический интеграл Ито (5.19) существует для произвольной функции из пространства $L_2(\mathbb{T}^k)$, он представляется в виде разложения (5.32). Для кратного стохастического интеграла Стратоновича (5.20) ситуация сложнее.

Проиллюстрируем это на примере интеграла кратности $k = 2$. Пусть $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ и, следовательно, для этой функции справедливо представление в виде ряда (4.3):

$$f(\cdot) = \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} F_{i_1 i_2} q(i_1, \cdot) \otimes q(i_2, \cdot),$$

где $F_{i_1 i_2}$ — коэффициенты разложения (4.4) по функциям базисной системы $\{q(i_1, \cdot) \otimes q(i_2, \cdot)\}_{i_1, i_2=0}^{\infty}$. Применим формально линейный оператор ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)}$ к левой и правой частям последнего равенства, принимая во внимание мультипликативное свойство

(5.24) и соотношение (2.37):

$$\begin{aligned} {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} f(\cdot) &= {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} F_{i_1 i_2} q(i_1, \cdot) \otimes q(i_2, \cdot) = \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} F_{i_1 i_2} {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} q(i_1, \cdot) \otimes q(i_2, \cdot) = \\ &= \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} F_{i_1 i_2} {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1)} q(i_1, \cdot) {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_2)} q(i_2, \cdot) = \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} F_{i_1 i_2} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)}, \end{aligned}$$

где $\zeta_{i_1}^{(j_1)}$ и $\zeta_{i_2}^{(j_2)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение.

Если $j_1 \neq j_2$, то этот интеграл совпадает с кратным стохастическим интегралом Ито ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)}$, который определен для всех функций из пространства $L_2(\mathbb{T}^2)$. Если $j_1 = j_2$, то для правой части можно записать

$$\sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} F_{i_1 i_2} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_1)} = \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} F_{i_1 i_2} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_1)} + \sum_{i_1=0}^{\infty} F_{i_1 i_1},$$

так как $\zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_1)} = \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_1)} + \delta_{i_1 i_2}$ (см. п. 1 замечаний 5.2), следовательно,

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} f(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} f(\cdot) + \delta_{j_1 j_2} \sum_{i=0}^{\infty} F_{ii}.$$

Но из условия $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ не следует сходимость числового ряда в правой части последнего равенства, а тем более его абсолютная сходимость (и вообще корректность последнего равенства). В случае условной сходимости его сумма зависит от выбора базисной системы (см. п. 2 замечаний 1.14).

Аналогичные рассуждения можно привести и для интегралов кратности $k > 2$. Из них важно сделать следующий вывод: кратный стохастический интеграл Стратоновича определен не для всех функций из пространства $L_2(\mathbb{T}^k)$, т.е. область его определения необходимо сузить. Для этого обратимся к разд. 4.4, в котором введены необходимые далее обозначения, и возьмем за основу линейные подпространства $L_2^{\text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ и $L_2^{s \text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$.

Первое из указанных пространств образовано функциями $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$, коэффициенты разложения (4.4) которых вне зависимости от выбора базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ удовлетворяют условию (4.75). Более того, при $0 < n < k$ соответствующие свертки коэффициентов разложения образуют коэффициенты разложения функций $L_2(\mathbb{T}^n)$ — интегральных следов $\text{tr}_{\varpi} f(\cdot)$, а при $n = 0$ свертка коэффициентов разложения дает константу — интегральный след $\text{tr}_{\varpi} f(\cdot)$. Здесь все варианты значений n задаются множеством $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ и мультимножеством $\bar{J} = (j_1 \dots j_k)$, которые, в свою очередь, определяют множества $(\mathbf{T}/\sim)^{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)} \rangle}$ и $(\mathbf{I}/\sim)^{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)} \rangle}$.

Второе из указанных пространств состоит из симметризованных функций $f_{\bar{J}}(\cdot) \in L_2^{\text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$, определенных формулой (4.57). Для них коэффициенты разложения (4.63) вне зависимости от выбора базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ удовлетворяют условию (4.78) и свертки коэффициентов разложения образуют коэффициенты разложения соответствующих интегральных следов $\text{tr}_{\varpi} f_{\bar{J}}(\cdot)$, обозначенных $f_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)} \rangle}(\cdot)$ (см. разд. 4.4). Для таких интегральных следов определены кратные стохастические интегралы Ито

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\bar{J} \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)} \rangle} f_{\bar{J}, \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)} \rangle}(\cdot),$$

где $\bar{J}\langle\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)}\rangle$ — мультимножество, полученное из \bar{J} после исключения элементов $j_{l_1}, j_{m_1}, \dots, j_{l_\gamma}, j_{m_\gamma}$, соответствующих множеству переменных $\bar{\omega}$ (см. формулу (4.69)) и

$${}^1\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^\emptyset f_{\langle\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)}\rangle} = f_{\langle\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)}\rangle} = \text{const.}$$

Далее основное внимание сосредоточим на пространстве $L_2^{s\text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$. Определим норму функции $f_{\bar{J}}(\cdot) \in L_2^{s\text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ следующим образом:

$$\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2^{s\text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)} = \sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor \#(j_{(1)}, \bar{J})/2 \rfloor} \dots \sum_{\nu_{(|J|)}=0}^{\lfloor \#(j_{(|J|)}, \bar{J})/2 \rfloor} r_{\langle\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)}\rangle} \|f_{\bar{J}, \langle\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)}\rangle}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^{k-2(\nu_{(1)} + \dots + \nu_{(|J|)})})}, \quad (5.49)$$

где величины $r_{\langle\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)}\rangle}$ задаются формулой (4.70), полагая

$$\|f_{\bar{J}, \langle\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)}\rangle}\|_{L_2(\mathbb{T}^0)} = |f_{\bar{J}, \langle\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)}\rangle}|$$

при условии $k - 2(\nu_{(1)} + \dots + \nu_{(|J|)}) = 0$.

Обозначим линейное пространство, которое определяется как пополнение пространства симметризованных функций $L_2^{s\text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ по норме (5.49) через $L_2^{\bar{s}\text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$. Тогда если $f(\cdot) \in L_2^{\text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$, то $f_{\bar{J}}(\cdot) \in L_2^{\bar{s}\text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$. А если значения j_1, \dots, j_k попарно различны, т.е. $|J| = k$, то пространства $L_2^{\bar{s}\text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ и $L_2^{s\text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ совпадают.

В общем случае можно задать норму функции $f(\cdot) \in L_2^{\text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ в виде

$$\|f(\cdot)\|_{L_2^{\text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)} = \sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor \#(j_{(1)}, \bar{J})/2 \rfloor} \dots \sum_{\nu_{(|J|)}=0}^{\lfloor \#(j_{(|J|)}, \bar{J})/2 \rfloor} \sum_{\bar{\omega} \in (\mathbb{T}/\sim)^{\langle\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(|J|)}\rangle}} \|\text{tr}_{\bar{\omega}} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^{k-2(\nu_{(1)} + \dots + \nu_{(|J|)})})}, \quad (5.50)$$

полагая $\|\text{tr}_{\bar{\omega}} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^0)} = |\text{tr}_{\bar{\omega}} f(\cdot)|$ при условии $k - 2(\nu_{(1)} + \dots + \nu_{(|J|)}) = 0$ (см. формулы (4.69) и (4.71)). А затем определить линейное пространство $L_2^{\bar{\text{tr}}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ как пополнение пространства функций $f(\cdot) \in L_2^{\text{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ по норме (5.50), причем если значения j_1, \dots, j_k попарно различны, т.е. $|J| = k$, то пространства $L_2^{\bar{\text{tr}}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ и $L_2(\mathbb{T}^k)$ совпадают.

Сделаем дополнительные пояснения. Например, пусть $k = 3$, $\bar{J} = (212)$, $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^3)$ и

$$f(\cdot) = \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3} q(i_1, \cdot) \otimes q(i_2, \cdot) \otimes q(i_3, \cdot), \quad f^{(n)}(\cdot) = \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^n F_{i_1 i_2 i_3} q(i_1, \cdot) \otimes q(i_2, \cdot) \otimes q(i_3, \cdot),$$

где $F_{i_1 i_2 i_3}$ — коэффициенты разложения (4.4) функции $f(\cdot)$.

Отметим, что в этом и последующих примерах интегральные следы понимаются в соответствии с формулами (4.73) или (4.74), но без явного применения усредняющего оператора. Тогда условие $f(\cdot) \in L_2^{\bar{\text{tr}}(212)}(\mathbb{T}^3)$ в частности означает, что не только

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(\cdot) - f^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)} = 0,$$

но и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\text{tr}_{\bar{\omega}} f(\cdot) - \text{tr}_{\bar{\omega}} f^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = 0$, $\bar{\omega} = ((t_1, t_3))$, где

$$\text{tr}_{\bar{\omega}} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} f(\tau, \cdot, \tau) d\tau = \sum_{i_2=0}^{\infty} \left(\sum_{i_1=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_1} \right) q(i_2, \cdot), \quad \text{tr}_{\bar{\omega}} f^{(n)}(\cdot) = \sum_{i_2=0}^n \left(\sum_{i_1=0}^n F_{i_1 i_2 i_1} \right) q(i_2, \cdot).$$

Для другого примера выберем (см. также пример 4.6) $k = 4$, $\bar{J} = (1122)$, $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^4)$ и

$$f(\cdot) = \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3 i_4} q(i_1, \cdot) \otimes q(i_2, \cdot) \otimes q(i_3, \cdot) \otimes q(i_4, \cdot),$$

$$f^{(n)}(\cdot) = \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^n F_{i_1 i_2 i_3 i_4} q(i_1, \cdot) \otimes q(i_2, \cdot) \otimes q(i_3, \cdot) \otimes q(i_4, \cdot),$$

где $F_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ — коэффициенты разложения (4.4) функции $f(\cdot)$.

Согласно условию $f(\cdot) \in L_2^{\overline{\text{tr}}(1122)}(\mathbb{T}^4)$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(\cdot) - f^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\text{tr}_{\varpi} f(\cdot) - \text{tr}_{\varpi} f^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)} = 0$$

для двух вариантов:

$$\text{tr}_{\varpi} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} f(\tau, \tau, \cdot, \cdot) d\tau = \sum_{i_3, i_4=0}^{\infty} \left(\sum_{i_1=0}^{\infty} F_{i_1 i_1 i_3 i_4} \right) q(i_3, \cdot) \otimes q(i_4, \cdot),$$

$$\text{tr}_{\varpi} f^{(n)}(\cdot) = \sum_{i_3, i_4=0}^n \left(\sum_{i_1=0}^n F_{i_1 i_1 i_3 i_4} \right) q(i_3, \cdot) \otimes q(i_4, \cdot), \quad \varpi = ((t_1, t_2));$$

$$\text{tr}_{\varpi} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} f(\cdot, \cdot, \tau, \tau) d\tau = \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} \left(\sum_{i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3 i_3} \right) q(i_1, \cdot) \otimes q(i_2, \cdot),$$

$$\text{tr}_{\varpi} f^{(n)}(\cdot) = \sum_{i_1, i_2=0}^n \left(\sum_{i_3=0}^n F_{i_1 i_2 i_3 i_3} \right) q(i_1, \cdot) \otimes q(i_2, \cdot), \quad \varpi = ((t_3, t_4)),$$

а также $\lim_{n \rightarrow \infty} |\text{tr}_{\varpi} f(\cdot) - \text{tr}_{\varpi} f^{(n)}(\cdot)| = 0$, $\varpi = ((t_1, t_2), (t_3, t_4))$, где

$$\text{tr}_{\varpi} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} f(\tau_1, \tau_1, \tau_2, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \sum_{i_1, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_1 i_3 i_3}, \quad \text{tr}_{\varpi} f^{(n)}(\cdot) = \sum_{i_1, i_3=0}^n F_{i_1 i_1 i_3 i_3}.$$

Теорема 5.4. Пусть функция $f(\cdot)$ такая, что соответствующая симметризованная функция (4.57) удовлетворяет условию $f_{\bar{j}}(\cdot) = \langle f(\cdot) \rangle_{\bar{j}} \in L_2^{\overline{\text{tr}}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$, и $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$. Тогда

1) кратный стохастический интеграл Стратоновича по винеровским процессам от функции $f(\cdot)$ представляется в виде

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) = \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} F_{i_1 \dots i_k} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \dots \zeta_{i_k}^{(j_k)}, \quad (5.51)$$

где $F_{i_1 \dots i_k}$ — коэффициенты разложения (4.4) функции $f(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty}$, $\zeta_{i_l}^{(j_l)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_l = 0, 1, 2, \dots$ и $l = 1, \dots, k$;

2) справедливо разложение

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) = \sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor \#(j_{(1)}, \bar{J})/2 \rfloor} \dots \sum_{\nu_{(j)}=0}^{\lfloor \#(j_{(j)}, \bar{J})/2 \rfloor} r_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle} {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\bar{J} \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle} f_{\bar{J}, \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle}(\cdot) \quad (5.52)$$

и

$$\|{}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot)\|_{L_2}^2 = \sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor \#(j_{(1)}, \bar{J})/2 \rfloor} \dots \sum_{\nu_{(j)}=0}^{\lfloor \#(j_{(j)}, \bar{J})/2 \rfloor} r_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle}^2 \|{}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\bar{J} \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle} f_{\bar{J}, \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle}(\cdot)\|_{L_2}^2, \quad (5.53)$$

где величины $r_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle}$ определяются формулой (4.70).

Доказательство.

1. Для кратного стохастического интеграла Стратоновича выполняется мультипликативное свойство (5.24), поэтому

$$\begin{aligned} {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot) &= {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1)} q(i_1, \cdot) \dots {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_k)} q(i_k, \cdot) = \\ &= {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1)} q(i_1, \cdot) \dots {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_k)} q(i_k, \cdot) = \zeta_{i_1}^{(j_1)} \dots \zeta_{i_k}^{(j_k)}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Случайная величина $\zeta_{i_1}^{(j_1)} \dots \zeta_{i_k}^{(j_k)} \in \mathcal{L}_2$ образована произведениями натуральных степеней независимых случайных величин:

$$\zeta_{i_1}^{(j_1)} \dots \zeta_{i_k}^{(j_k)} = \prod_{j \in J} \prod_{i \in I_j} (\zeta_i^{(j)})^{\#(i, \bar{I}_j)}, \quad (5.55)$$

а множество $\mathfrak{X}^{*\bar{J}} = \mathfrak{X}^{*(j_1 \dots j_k)} = \{\zeta_{i_1}^{(j_1)} \dots \zeta_{i_k}^{(j_k)}\}_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty$ состоит из линейно независимых случайных величин (совпадающие элементы, отвечающие разным значениям индексов i_1, \dots, i_k , считаются неразличимыми).

Если значения j_1, \dots, j_k попарно различны, т.е. $|J| = k$, то множество $\mathfrak{X}^{*\bar{J}}$ совпадает с ортогональным базисом $\mathfrak{Z}^{\bar{J}}$ и ортонормированным базисом $\hat{\mathfrak{Z}}^{\bar{J}}$ (см. формулы (5.40) и (5.41)). Кратные стохастические интегралы Ито и Стратоновича в этом случае равны:

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) \quad \text{P-п.н.},$$

а разложения (5.32) и (5.51) идентичны.

Если среди значений j_1, \dots, j_k есть совпадающие, то только часть элементов множества $\mathfrak{X}^{*\bar{J}}$ принадлежит $\mathfrak{Z}^{\bar{J}}$. Остальная часть может быть ортогонализирована — это множество элементов $\zeta_{i_1}^{(j_1)} \dots \zeta_{i_k}^{(j_k)}$, для которых есть хотя бы одно совпадение значений индексов в одном из мультимножеств \bar{I}_j , $j \in J$.

2. Рассмотрим случай $f(\cdot) \in L_2^{s(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ и положим

$$f^{(n)}(\cdot) = \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^n F_{i_1 \dots i_k} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot), \quad (5.56)$$

тогда, используя выражение (5.54), для любого натурального n имеем

$$\begin{aligned} {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f^{(n)}(\cdot) &= {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^n F_{i_1 \dots i_k} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot) = \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^n F_{i_1 \dots i_k} {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot) = \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^n F_{i_1 \dots i_k} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \dots \zeta_{i_k}^{(j_k)}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Любой полином $p(\cdot)$ можно разложить по полиномам Эрмита $\{H_i(\cdot)\}_{i=0}^\infty$ и максимальная степень полинома Эрмита в разложении, очевидно, совпадает со степенью полинома $p(\cdot)$. В частности, справедливо представление (5.13) для монома x^i . Таким образом, ортогонализация неортогональной части множества случайных величин $\mathfrak{X}^{*\bar{J}}$ сводится к разложению мономов

$$\prod_{j \in J} \prod_{i \in I_j} (x_i^{(j)})^{\#(i, \bar{I}_j)}$$

по полиномам Эрмита векторного аргумента x размера $\dim x = k, k-2, k-4, \dots, k-2[k/2]$ на основе формулы (5.13). Степень этих полиномов совпадает с $\dim x$. Для элементов $\zeta_{i_1}^{(j_1)} \dots \zeta_{i_k}^{(j_k)}$ это означает разложение по ортогональным случайным величинам, включающим $\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}$.

Множество ортогональных случайных величин $\mathfrak{Z}^{*\bar{J}}$ для представления кратного стохастического интеграла Стратоновича ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f^{(n)}(\cdot)$ включает ортогональный базис $\mathfrak{Z}^{\bar{J}}$ и ортогональные базисы для представления кратных стохастических интегралов Ито, кратность которых меньше k : $k-2, k-4, \dots, k-2[k/2] > 0$. Все коэффициенты разложения кратного стохастического интеграла Стратоновича по этому базису выражаются через коэффициен-

ты разложения $F_{i_1 \dots i_k}$ функции $f(\cdot)$. Если его математическое ожидание отлично от нуля, то множество $\mathfrak{Z}^{*\bar{J}}$ включает единицу, а соответствующим коэффициентом разложения кратного стохастического интеграла Стратоновича будет это математическое ожидание. Следовательно, множество $\mathfrak{Z}^{*\bar{J}}$ можно определить в виде

$$\mathfrak{Z}^{*\bar{J}} = \mathfrak{Z}^{*(j_1 \dots j_k)} = \bigcup_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor \#(j_{(1)}, \bar{J})/2 \rfloor} \dots \bigcup_{\nu_{(J)}=0}^{\lfloor \#(j_{(J)}, \bar{J})/2 \rfloor} \mathfrak{Z}^{\bar{J}(\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)})}, \quad (5.58)$$

полагая $\mathfrak{Z}^\emptyset = \{1\}$.

Коэффициенты разложения кратного стохастического интеграла Стратоновича $S \mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f^{(n)}(\cdot)$ относительно множества ортогональных случайных величин $\mathfrak{Z}^{\bar{J}(\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)})}$ образовано свертками коэффициентов разложения $F_{i_1 \dots i_k}$:

$$\sum_{i_1, \dots, i_\gamma=0}^n F_{i_1 \dots i_k} \Big|_{i'=i''},$$

каждая из которых связана с некоторым элементом $\varrho \in (\mathbf{I}/\sim)^{(\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)})}$ согласно (4.71), а их общее число равно $r_{(\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)})}$ для каждого набора значений $\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)}$ (см. формулу (4.70)). Такой свертке соответствует интегральный след $\text{tr}_\omega f^{(n)}(\cdot)$, заданный формулой (4.73).

Коэффициенты разложения $F_{i_1 \dots i_k}$ не меняются при перестановке индексов в каждом классе эквивалентности \mathbf{I}_j , а функция $f^{(n)}(\cdot)$ не меняется при перестановке переменных в каждом классе эквивалентности \mathbf{T}_j . Поэтому достаточно произвольно выбрать один элемент $\varrho \in (\mathbf{I}/\sim)^{(\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)})}$ и записать коэффициенты разложения

$$r_{(\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)})} \sum_{i_1, \dots, i_\gamma=0}^n F_{i_1 \dots i_k} \Big|_{i'=i''}$$

кратного стохастического интеграла Стратоновича $S \mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f^{(n)}(\cdot)$, соответствующие интегральному следу

$$r_{(\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)})} f_{(\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)})}^{(n)}(\cdot).$$

В результате кратный стохастический интеграл Стратоновича представляется в виде суммы кратных стохастических интегралов Ито и своего математического ожидания. При этом кратные стохастические интегралы Ито соответствуют базисным системам из правой части формулы (5.58):

$$S \mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f^{(n)}(\cdot) = \sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor \#(j_{(1)}, \bar{J})/2 \rfloor} \dots \sum_{\nu_{(J)}=0}^{\lfloor \#(j_{(J)}, \bar{J})/2 \rfloor} r_{(\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)})} I \mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{\bar{J}(\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)})} f_{(\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)})}^{(n)}(\cdot), \quad (5.59)$$

где для $\nu_{(1)} = \dots = \nu_{(J)} = 0$ $I \mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{\bar{J}(\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)})} f_{(\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)})}^{(n)}(\cdot) = I \mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f^{(n)}(\cdot)$, а остальные стохастические интегралы Ито имеют кратности меньше k : $k-2, k-4, \dots, k-2 \lfloor k/2 \rfloor > 0$.

Следовательно, линейный оператор $S \mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(j_1 \dots j_k)}$ представляется в виде конечной суммы линейных операторов. Один из них — линейный оператор $I \mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(j_1 \dots j_k)}$, а остальные операторы ставят в соответствие функции $f^{(n)}(\cdot)$ кратные стохастические интегралы Ито от интегральных следов вида (4.73).

Все кратные стохастические интегралы Ито в правой части соотношения (5.59) ортогональны в пространстве \mathcal{L}_2 , так как они представляются ортогональными разложениями по разным

подмножествам множества $\mathfrak{Z}^{*\bar{J}}$, поэтому справедлива формула

$$\|{}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f^{(n)}(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor \#(j_{(1)}, \bar{J})/2 \rfloor} \dots \sum_{\nu_{(j)}=0}^{\lfloor \#(j_{(j)}, \bar{J})/2 \rfloor} r_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle}^2 \|{}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\bar{J} \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle} f_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle}^{(n)}(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2}^2. \quad (5.60)$$

С учетом соотношения (5.33), а именно

$$\begin{aligned} \|{}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\bar{J} \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle} f_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle}^{(n)}(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2} &= \\ &= M_{\bar{J} \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle} \|f_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^{k-2\gamma})} \leq M_{\bar{J}} \|f_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^{k-2\gamma})}, \end{aligned}$$

так как при $\gamma > 0$

$$M_{\bar{J} \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle}^2 = M_{\bar{J}}^2 \prod_{j \in J} \frac{(i - 2\nu_j)!}{i!} \Big|_{i=\#(j, \bar{J})} = \prod_{j \in J} (i - 2\nu_j)! \Big|_{i=\#(j, \bar{J})} < M_{\bar{J}}^2,$$

и с учетом определения нормы (5.49) имеем

$$\begin{aligned} \|{}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f^{(n)}(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2} &= \left\{ \sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor \#(j_{(1)}, \bar{J})/2 \rfloor} \dots \sum_{\nu_{(j)}=0}^{\lfloor \#(j_{(j)}, \bar{J})/2 \rfloor} r_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle}^2 \|{}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\bar{J} \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle} f_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle}^{(n)}(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor \#(j_{(1)}, \bar{J})/2 \rfloor} \dots \sum_{\nu_{(j)}=0}^{\lfloor \#(j_{(j)}, \bar{J})/2 \rfloor} r_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle} \|{}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\bar{J} \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle} f_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle}^{(n)}(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2} \leq \\ &\leq M_{\bar{J}} \sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor \#(j_{(1)}, \bar{J})/2 \rfloor} \dots \sum_{\nu_{(j)}=0}^{\lfloor \#(j_{(j)}, \bar{J})/2 \rfloor} r_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle} \|f_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^{k-2(\nu_{(1)}+\dots+\nu_{(j)})})} = M_{\bar{J}} \|f^{(n)}(\cdot)\|_{L_2^{s\bar{\text{tr}}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)}. \end{aligned}$$

Равенство в последней формуле: $\|{}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f^{(n)}(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2} = M_{\bar{J}} \|f^{(n)}(\cdot)\|_{L_2^{s\bar{\text{tr}}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)}$, достигается, если все интегральные следы в правой части соотношения (5.59) тождественно равны нулю.

Любую симметризованную функцию $f(\cdot) \in L_2^{s\bar{\text{tr}}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ можно сколь угодно точно приблизить функцией $f^{(n)}(\cdot)$, линейный оператор ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)}$ ограничен на множестве функций $f^{(n)}(\cdot)$, поэтому его можно продолжить на линейное пространство $L_2^{s\bar{\text{tr}}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$, сохраняя непрерывность [52]. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в соотношении (5.57), получаем разложение (5.51), а из (5.59) и (5.60) следует разложение (5.52) и равенство (5.53).

3. Пусть функция $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ такая, что $f_{\bar{J}}(\cdot) \in L_2^{s\bar{\text{tr}}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$. Согласно лемме 5.3

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f_{\bar{J}}(\cdot) = \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} \tilde{F}_{i_1 \dots i_k} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \dots \zeta_{i_k}^{(j_k)},$$

где $\tilde{F}_{i_1 \dots i_k}$ — коэффициенты разложения (4.4) функции $f_{\bar{J}}(\cdot) = \langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}}$ относительно базисной системы $\{q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty}$. Но из выражения (4.63) следует, что любые частичные суммы рядов $\sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} F_{i_1 \dots i_k} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \dots \zeta_{i_k}^{(j_k)}$ и $\sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} \tilde{F}_{i_1 \dots i_k} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \dots \zeta_{i_k}^{(j_k)}$ совпадают, т.е. справедливо разложение (5.51) и равенство (5.53). ◀

Линейный оператор ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)}$, который ставит в соответствие функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ кратный стохастический интеграл Стратоновича по винеровским процессам $W_{j_1}(\cdot), \dots, W_{j_k}(\cdot)$ (см. формулу (5.20)) можно рассматривать как пример случайного линейного функционала.

Спектральная характеристика этого случайного линейного функционала определяется следующим образом: $\mathbb{S}[{}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)}] = \mathcal{V}^{\otimes(j_1 \dots j_k)}$. Элементы спектральной характеристики $\mathcal{V}^{\otimes(j_1 \dots j_k)}$ задаются формулой (5.54):

$$\mathcal{V}_{i_1 \dots i_k}^{\otimes(j_1 \dots j_k)} = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot) = \zeta_{i_1}^{(j_1)} \dots \zeta_{i_k}^{(j_k)}, \quad (5.61)$$

в которой $\zeta_{i_l}^{(j_l)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_l = 0, 1, 2, \dots$ и $l = 1, \dots, s$.

Используя матричную форму записи, получаем $\mathcal{V}^{\otimes(j_1 \dots j_k)} = \mathcal{V}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{V}_{j_k}$, где $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_s$ — это спектральные характеристики (2.26) белых шумов $V_1(\cdot), \dots, V_s(\cdot)$, соответствующих винеровским процессам $W_1(\cdot), \dots, W_s(\cdot)$ в смысле соотношения (2.27), а \otimes означает тензорное произведение. Спектральные характеристики \mathcal{V}_j образованы элементами $\zeta_i^{(j)}$, $l = 1, \dots, k$.

В качестве примера приведем спектральные характеристики $\mathcal{V}^{\otimes(j_1 \dots j_k)}$, полагая $k = 2$ и $k = 3$. Тогда (см. п. 1 замечаний 4.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{\otimes(j_1 j_2)} &= \mathcal{V}_{j_1} \otimes \mathcal{V}_{j_2} = \left[\begin{array}{cccc} [\zeta_0^{(j_1)} \zeta_0^{(j_2)} & \zeta_0^{(j_1)} \zeta_1^{(j_2)} & \zeta_0^{(j_1)} \zeta_2^{(j_2)} & \dots] \\ [\zeta_1^{(j_1)} \zeta_0^{(j_2)} & \zeta_1^{(j_1)} \zeta_1^{(j_2)} & \zeta_1^{(j_1)} \zeta_2^{(j_2)} & \dots] \\ [\zeta_2^{(j_1)} \zeta_0^{(j_2)} & \zeta_2^{(j_1)} \zeta_1^{(j_2)} & \zeta_2^{(j_1)} \zeta_2^{(j_2)} & \dots] \dots \end{array} \right]^T, \\ \mathcal{V}^{\otimes(j_1 j_2 j_3)} &= \mathcal{V}_{j_1} \otimes \mathcal{V}_{j_2} \otimes \mathcal{V}_{j_3} = \\ &= \left[\begin{array}{cccc} [[\zeta_0^{(j_1)} \zeta_0^{(j_2)} \zeta_0^{(j_3)} & \zeta_0^{(j_1)} \zeta_0^{(j_2)} \zeta_1^{(j_3)} & \zeta_0^{(j_1)} \zeta_0^{(j_2)} \zeta_2^{(j_3)} & \dots] \\ [\zeta_0^{(j_1)} \zeta_1^{(j_2)} \zeta_0^{(j_3)} & \zeta_0^{(j_1)} \zeta_1^{(j_2)} \zeta_1^{(j_3)} & \zeta_0^{(j_1)} \zeta_1^{(j_2)} \zeta_2^{(j_3)} & \dots] \\ [\zeta_0^{(j_1)} \zeta_2^{(j_2)} \zeta_0^{(j_3)} & \zeta_0^{(j_1)} \zeta_2^{(j_2)} \zeta_1^{(j_3)} & \zeta_0^{(j_1)} \zeta_2^{(j_2)} \zeta_2^{(j_3)} & \dots] \dots] \\ [[\zeta_1^{(j_1)} \zeta_0^{(j_2)} \zeta_0^{(j_3)} & \zeta_1^{(j_1)} \zeta_0^{(j_2)} \zeta_1^{(j_3)} & \zeta_1^{(j_1)} \zeta_0^{(j_2)} \zeta_2^{(j_3)} & \dots] \\ [\zeta_1^{(j_1)} \zeta_1^{(j_2)} \zeta_0^{(j_3)} & \zeta_1^{(j_1)} \zeta_1^{(j_2)} \zeta_1^{(j_3)} & \zeta_1^{(j_1)} \zeta_1^{(j_2)} \zeta_2^{(j_3)} & \dots] \\ [\zeta_1^{(j_1)} \zeta_2^{(j_2)} \zeta_0^{(j_3)} & \zeta_1^{(j_1)} \zeta_2^{(j_2)} \zeta_1^{(j_3)} & \zeta_1^{(j_1)} \zeta_2^{(j_2)} \zeta_2^{(j_3)} & \dots] \dots] \\ [[\zeta_2^{(j_1)} \zeta_0^{(j_2)} \zeta_0^{(j_3)} & \zeta_2^{(j_1)} \zeta_0^{(j_2)} \zeta_1^{(j_3)} & \zeta_2^{(j_1)} \zeta_0^{(j_2)} \zeta_2^{(j_3)} & \dots] \\ [\zeta_2^{(j_1)} \zeta_1^{(j_2)} \zeta_0^{(j_3)} & \zeta_2^{(j_1)} \zeta_1^{(j_2)} \zeta_1^{(j_3)} & \zeta_2^{(j_1)} \zeta_1^{(j_2)} \zeta_2^{(j_3)} & \dots] \\ [\zeta_2^{(j_1)} \zeta_2^{(j_2)} \zeta_0^{(j_3)} & \zeta_2^{(j_1)} \zeta_2^{(j_2)} \zeta_1^{(j_3)} & \zeta_2^{(j_1)} \zeta_2^{(j_2)} \zeta_2^{(j_3)} & \dots] \dots] \dots \end{array} \right]^T. \end{aligned}$$

Далее запишем спектральный аналог формулы (5.51) для значения функционала $s \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)}$:

$$s \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) = [\mathcal{V}^{\otimes(j_1 \dots j_k)}]^T F = [\mathcal{V}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{V}_{j_k}]^T F, \quad F = \mathbb{S}[f(\cdot)]. \quad (5.62)$$

Замечания 5.3.

1. Множество случайных величин (5.58) образует ортогональный базис линейного подпространства $\mathcal{L}_2^{*W(j_1 \dots j_k)} = \{s \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) : f(\cdot) \in L_2^{s \overline{\text{tr}}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)\} \subset \mathcal{L}_2$. Соответствующий ортонормированный базис получается в результате нормировки (см. п. 2 замечаний 5.2).

2. Поскольку $E \zeta^{2i} = (-1)^i H_{2i}(0) = (2i - 1)!!$, из выражения (5.55) находим

$$\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} \dots \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \left\| \prod_{j \in J} \prod_{i \in I_j} (\zeta_i^{(j)})^{\#(i, \bar{I}_j)} \right\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \prod_{j \in J} \prod_{i \in I_j} \|(\zeta_i^{(j)})^{\#(i, \bar{I}_j)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \prod_{j \in J} \prod_{i \in I_j} (2\#(i, \bar{I}_j) - 1)!!.$$

Максимум нормы элементов из $\mathfrak{Z}^{* \bar{J}}$ достигается при $|I_j| = 1 \forall j \in J$, т.е. на элементах вида $\zeta_{i_1}^{(j_1)} \dots \zeta_{i_k}^{(j_k)} = \prod_{j \in J} (\zeta^{(j)})^{\#(j, \bar{J})}$, где $\zeta^{(j)}$ — любая случайная величина из множества $\{\zeta_i^{(j)}\}_{i=0}^\infty$, следовательно,

$$\max_{i_1, \dots, i_k} \|\zeta_{i_1}^{(j_1)} \dots \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \left\| \prod_{j \in J} (\zeta^{(j)})^{\#(j, \bar{J})} \right\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \prod_{j \in J} \|(\zeta^{(j)})^{\#(j, \bar{J})}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \prod_{j \in J} (2\#(j, \bar{J}) - 1)!! = M_{\bar{J}}^{*2}.$$

3. В теореме 5.4 правые части разложения (5.51) и равенства (5.53) содержат интегральные следы симметризованных функций (4.57). Однако это не является принципиальным ограничением и связано с тем, что для симметризованных функций более кратко записываются требуемые условия, в частности норма (5.49), и основной результат — разложение кратного стохастического интеграла Стратоновича в сумму его математического ожидания и кратных стохастических интегралов Ито.

Приведем поясняющий пример. Для интегралов кратности $k = 3$ и $j_1 = j_2 = j_3$ при выборе функции $f(\cdot) \in L_2^{\overline{\text{tr}}(j_1 j_2 j_3)}(\mathbb{T}^3)$ возникает необходимость рассматривать три интегральных следа

$$\int_{\mathbb{T}} f(t_1, t_2, t_3) \Big|_{t_1=t_2} dt_1 = \int_{\mathbb{T}} f(t_1, t_1, t_3) dt_1, \quad \int_{\mathbb{T}} f(t_1, t_2, t_3) \Big|_{t_1=t_3} dt_1 = \int_{\mathbb{T}} f(t_1, t_2, t_1) dt_1,$$

$$\int_{\mathbb{T}} f(t_1, t_2, t_3) \Big|_{t_2=t_3} dt_2 = \int_{\mathbb{T}} f(t_1, t_2, t_2) dt_2$$

или интегральный след

$$\int_{\mathbb{T}} (f(\tau, \tau, t) + f(\tau, t, \tau) + f(t, \tau, \tau)) d\tau.$$

Для симметризованной функции $f_{\bar{J}}(\cdot) = \langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}} \in L_2^{\overline{\text{tr}}(j_1 j_2 j_3)}(\mathbb{T}^3)$ достаточно взять только один интегральный след относительно любой пары переменных из множества $\mathbf{T} = \{t_1, t_2, t_3\}$. В этом смысле симметризация эффективна, если хотя бы для одного класса эквивалентности \mathbf{T}_j или \mathbf{I}_j выполнено условие $|\mathbf{T}_j| = |\mathbf{I}_j| > 2$, $j \in J$.

В общем случае вместо формулы (5.52) получаем

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) = \sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor \#(j_{(1)}, \bar{J})/2 \rfloor} \dots \sum_{\nu_{(j)}=0}^{\lfloor \#(j_{(j)}, \bar{J})/2 \rfloor} {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\bar{J}(\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)})} \sum_{\varpi \in (\mathbf{T}/\sim)^{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle}} \text{tr}_{\varpi} f(\cdot),$$

где использованы обозначения (4.69) и (4.73). Соответствующим образом записывается и формула для нормы кратного стохастического интеграла Стратоновича — аналог формулы (5.53):

$$\| {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) \|_{\mathcal{L}_2}^2 = \sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor \#(j_{(1)}, \bar{J})/2 \rfloor} \dots \sum_{\nu_{(j)}=0}^{\lfloor \#(j_{(j)}, \bar{J})/2 \rfloor} \| {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\bar{J}(\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)})} \sum_{\varpi \in (\mathbf{T}/\sim)^{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle}} \text{tr}_{\varpi} f(\cdot) \|_{\mathcal{L}_2}^2.$$

Доказательство проводится так же, как и доказательство теоремы 5.4.

4. Для линейного пространства $L_2^{\overline{\text{tr}}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ можно определить норму

$$\| f(\cdot) \|_{L_2^{\overline{\text{tr}}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)} = \sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor \#(j_{(1)}, \bar{J})/2 \rfloor} \dots \sum_{\nu_{(j)}=0}^{\lfloor \#(j_{(j)}, \bar{J})/2 \rfloor} r_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle} \| \langle f_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(j)} \rangle}(\cdot) \rangle_{\bar{J}} \|_{L_2(\mathbb{T}^{k-2(\nu_{(1)}+\dots+\nu_{(j)})})}$$

вместо нормы (5.49) и рассматривать это пространство как множество классов эквивалентности (5.48) (см. п. 3 замечаний 5.2).

Принимая во внимание лемму 5.3, делаем вывод, что пространство $L_2^{\overline{\text{tr}}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ удобно взять за область определения линейного оператора ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)}$. Линейный оператор ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)}$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между линейными пространствами $L_2^{\overline{\text{tr}}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ и $\mathcal{L}_2^{*W(j_1 \dots j_k)}$. Тогда для любой функции из класса $L_2^{\overline{\text{tr}}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ справедливо разложение (5.51), в правой части которого $F_{i_1 \dots i_k}$ — коэффициенты разложения (4.4) любой функции $f(\cdot)$ из этого класса, т.е. элемента пространства $L_2(\mathbb{T}^k)$. Если необходимо рассматривать кратные стохастические интегралы для всех вариантов равенств или неравенств в разных

комбинациях значений j_1, \dots, j_k , то достаточно ограничиться пространством $L_2^{s\bar{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ при условии $j_1 = \dots = j_k$.

Если для линейного пространства $L_2^{s\bar{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ определить норму в виде

$$\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2^{s\bar{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)} = M_{\bar{J}} \left\{ \sum_{\nu_{(1)}=0}^{[\#(j_{(1)}, \bar{J})/2]} \dots \sum_{\nu_{(lJ)}=0}^{[\#(j_{(lJ)}, \bar{J})/2]} \tilde{r}_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(lJ)} \rangle}^2 \|f_{\bar{J}, \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(lJ)} \rangle}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^{k-2(\nu_{(1)}+\dots+\nu_{(lJ)})})}^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где

$$\tilde{r}_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(lJ)} \rangle} = r_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(lJ)} \rangle} \frac{M_{\bar{J}, \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(lJ)} \rangle}}{M_{\bar{J}}} = \prod_{j \in J} \frac{\sqrt{i!}}{\nu_j! \sqrt{(i-2\nu_j)!} 2^{\nu_j}} \Big|_{i=\#(j, \bar{J})},$$

то в дополнение к формуле (5.53) получим $\|\mathcal{S}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2} = \|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2^{s\bar{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)}$.

5. В другом виде разложения (5.51) и (5.52) можно записать, опираясь на основной результат из [305]: представление кратного стохастического интеграла Ито в виде суммы кратных стохастических интегралов Стратоновича и детерминированной величины. Для этого требуется в соотношениях из п. 1 замечаний 5.2 формально поменять местами произведение Вика и обычное произведение случайных величин, а все разности заменить на суммы.

Так, на основе соотношений

$$\begin{aligned} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} &= \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} + \Delta_{12}, \\ \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} \zeta_{i_3}^{(j_3)} &= \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)} + \Delta_{12} \zeta_{i_3}^{(j_3)} + \Delta_{13} \zeta_{i_2}^{(j_2)} + \Delta_{23} \zeta_{i_1}^{(j_1)}, \\ \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} \zeta_{i_3}^{(j_3)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} &= \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)} * \zeta_{i_4}^{(j_4)} + \Delta_{12} \zeta_{i_3}^{(j_3)} * \zeta_{i_4}^{(j_4)} + \Delta_{13} \zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_4}^{(j_4)} + \\ &+ \Delta_{14} \zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)} + \Delta_{23} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_4}^{(j_4)} + \Delta_{24} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)} + \Delta_{34} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} + \\ &+ \Delta_{12} \Delta_{34} + \Delta_{13} \Delta_{24} + \Delta_{14} \Delta_{23}, \quad \Delta_{lm} = \delta_{j_l j_m} \delta_{i_l i_m}, \quad l, m = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

при $k = 2, 3, 4$ находим

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} F_{i_1 i_2} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} &= \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} F_{i_1 i_2} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} + \delta_{j_1 j_2} \sum_{i_1=0}^{\infty} F_{i_1 i_1}, \\ \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} \zeta_{i_3}^{(j_3)} &= \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)} + \\ &+ \delta_{j_1 j_2} \sum_{i_1, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_1 i_3} \zeta_{i_3}^{(j_3)} + \delta_{j_1 j_3} \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_1} \zeta_{i_2}^{(j_2)} + \delta_{j_2 j_3} \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_2} \zeta_{i_1}^{(j_1)}, \\ \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3 i_4} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} \zeta_{i_3}^{(j_3)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} &= \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3 i_4} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)} * \zeta_{i_4}^{(j_4)} + \\ &+ \delta_{j_1 j_2} \sum_{i_1, i_3, i_4=0}^{\infty} F_{i_1 i_1 i_3 i_4} \zeta_{i_3}^{(j_3)} * \zeta_{i_4}^{(j_4)} + \delta_{j_1 j_3} \sum_{i_1, i_2, i_4=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_1 i_4} \zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_4}^{(j_4)} + \\ &+ \delta_{j_1 j_4} \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3 i_1} \zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)} + \delta_{j_2 j_3} \sum_{i_1, i_2, i_4=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_2 i_4} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_4}^{(j_4)} + \\ &+ \delta_{j_2 j_4} \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3 i_2} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)} + \delta_{j_3 j_4} \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3 i_3} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} + \\ &+ \delta_{j_1 j_2} \delta_{j_3 j_4} \sum_{i_1, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_1 i_3 i_3} + \delta_{j_1 j_3} \delta_{j_2 j_4} \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_1 i_2} + \delta_{j_1 j_4} \delta_{j_2 j_3} \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_2 i_1}. \end{aligned}$$

Структура записанных соотношений повторяет структуру соотношений из п. 1 замечаний 5.2 и это не удивительно, поскольку в их основе лежит формула (5.13). Здесь уместно говорить о принципе двойственности представления кратных стохастических интегралов Ито и Стратоновича, а именно можно записать разложение кратного стохастического интеграла Ито в виде суммы кратных стохастических интегралов Стратоновича и, возможно, константы:

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) = \sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor \#(j_{(1)}, \bar{J})/2 \rfloor} \dots \sum_{\nu_{(J)}=0}^{\lfloor \#(j_{(J)}, \bar{J})/2 \rfloor} r_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)} \rangle}^* {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\bar{J} \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)} \rangle} f_{\bar{J} \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)} \rangle}(\cdot), \quad (5.63)$$

где $r_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)} \rangle}^* = (-1)^{\nu_{(1)} + \dots + \nu_{(J)}} \cdot r_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)} \rangle}$, ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\emptyset} f_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)} \rangle} = f_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)} \rangle} = \text{const}$, а остальные обозначения введены в начале этого раздела.

6. Если значения j_1, \dots, j_k совпадают, т.е. $|J| = 1$, то формула (5.52) дает разложение Ху – Мейера для кратных стохастических интегралов Стратоновича [254, 264, 269, 282, 357].

Действительно, при условии $|J| = 1$, или $\#(j, \bar{J}) = k$, формула (5.52) записывается следующим образом:

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) = \sum_{\nu=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} r_{\langle \nu \rangle} {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\bar{J} \langle \nu \rangle} f_{\langle \nu \rangle}(\cdot), \quad (5.64)$$

где $r_{\langle \nu \rangle} = h_{k-2\nu}^{(k)} = k! / (\nu! (k-2\nu)! 2^\nu)$ и

$$f_{\langle 0 \rangle}(t_1, \dots, t_k) = f(t_1, \dots, t_k) \quad \text{или} \quad f_{\langle 0 \rangle}(t_1, \dots, t_k) = f_{\bar{J}}(t_1, \dots, t_k),$$

$$f_{\langle 1 \rangle}(t_1, \dots, t_{k-2}) = \int_{\mathbb{T}} f_{\bar{J}}(t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k-1}) dt_{k-1},$$

$$f_{\langle 2 \rangle}(t_1, \dots, t_{k-4}) = \int_{\mathbb{T}^2} f_{\bar{J}}(t_1, \dots, t_{k-3}, t_{k-3}, t_{k-1}, t_{k-1}) dt_{k-3} dt_{k-1}, \quad \dots$$

Если k — нечетное, то

$$f_{\langle \lfloor k/2 \rfloor \rangle}(t_1) = \int_{\mathbb{T}^{\lfloor k/2 \rfloor}} f_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_2, \dots, t_{k-3}, t_{k-3}, t_{k-1}, t_{k-1}) dt_2 \dots dt_{k-3} dt_{k-1},$$

а если k — четное, то

$$f_{\langle k/2 \rangle} = \int_{\mathbb{T}^{k/2}} f_{\bar{J}}(t_1, t_1, \dots, t_{k-3}, t_{k-3}, t_{k-1}, t_{k-1}) dt_1 \dots dt_{k-3} dt_{k-1} = \text{const}.$$

7. В статье [172] показано, что при выборе функций Уолша и Хаара в качестве базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$ для доказательства среднеквадратической сходимости подпоследовательности частичных сумм разложения (5.51), которая формируется вполне естественным для указанных базисных систем образом, не требуется явного выполнения каких-либо дополнительных условий, кроме условия существования кратного стохастического интеграла Стратоновича согласно определению из [264, 269].

8. Правая часть формулы (5.51) определяет кратный стохастический интеграл Огавы по винеровским процессам [264, 333]:

$$\begin{aligned} {}^{\circ} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) &= \int_{\mathbb{T}^k} f(t_1, \dots, t_k) \diamond dW_{j_1}(t_1) \diamond \dots \diamond dW_{j_k}(t_k) = \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} F_{i_1 \dots i_k} \int_{\mathbb{T}} q(i_1, t_1) dW_{j_1}(t_1) \dots \int_{\mathbb{T}} q(i_k, t_k) dW_{j_k}(t_k), \end{aligned}$$

где $F_{i_1 \dots i_k}$ — коэффициенты разложения (4.4) функции $f(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty}$, $i_l = 0, 1, 2, \dots$ и $l = 1, \dots, k$. И если он существует и не зависит

от выбора базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$, то он совпадает с соответствующим кратным стохастическим интегралом Стратоновича, при этом справедливо разложение (5.52).

Пример 5.3. Представить стохастический интеграл Стратоновича ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(212)} f(\cdot)$ кратности $k = 3$ в виде ортогонального разложения, $f(\cdot) \in L_2^{\text{tr}(212)}(\mathbb{T}^3)$.

□ В данном случае $j_1 = j_3 = 2$ и $j_2 = 1$, т.е. $J = \{1, 2\}$ и $\bar{J} = (212)$. Множество переменных $\mathbb{T} = \{t_1, t_2, t_3\}$ и множество индексов $\mathbf{I} = \{i_1, i_2, i_3\}$ разобьем на классы эквивалентности:

$$\mathbb{T}/\sim = \underbrace{\{\{t_2\}\}}_{\mathbb{T}_1}, \underbrace{\{\{t_1, t_3\}\}}_{\mathbb{T}_2}, \quad \mathbf{I}/\sim = \underbrace{\{\{i_2\}\}}_{\mathbf{I}_1}, \underbrace{\{\{i_1, i_3\}\}}_{\mathbf{I}_2}, \quad \#(1, \bar{J}) = 1, \quad \#(2, \bar{J}) = 2, \quad M_{\bar{J}}^2 = 1!2! = 2.$$

Следовательно,

$$\zeta_{i_1}^{(2)} \zeta_{i_2}^{(1)} \zeta_{i_3}^{(2)} = \begin{cases} (\zeta_{i_1}^{(2)})^2 \zeta_{i_2}^{(1)} = ((\zeta_{i_1}^{(2)})^2 - 1) \zeta_{i_2}^{(1)} + \zeta_{i_2}^{(1)} = \\ = H_{2,1,0}(\zeta_{i_1}^{(2)}, \zeta_{i_2}^{(1)}, \zeta_{i_3}^{(2)}) + H_{0,1,0}(\zeta_{i_1}^{(2)}, \zeta_{i_2}^{(1)}, \zeta_{i_3}^{(2)}), & i_1 = i_3, \\ \zeta_{i_1}^{(2)} \zeta_{i_2}^{(1)} \zeta_{i_3}^{(2)} = H_{1,1,1}(\zeta_{i_1}^{(2)}, \zeta_{i_2}^{(1)}, \zeta_{i_3}^{(2)}), & i_1 \neq i_3, \end{cases}$$

$$\|\zeta_{i_1}^{(2)} \zeta_{i_2}^{(1)} \zeta_{i_3}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \begin{cases} 3, & i_1 = i_3, \\ 1, & i_1 \neq i_3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \|\zeta_{i_1}^{(2)} \zeta_{i_2}^{(1)} \zeta_{i_3}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = 1 + 2\delta_{i_1 i_3},$$

$$\mathfrak{Z}^{*(212)} = \mathfrak{Z}^{(212)} \cup \mathfrak{Z}^{(1)} = \{\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}, \zeta_{i_2}^{(1)}\}_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty}, \quad \hat{\mathfrak{Z}}^{*(212)} = \left\{ \frac{\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}}{\sqrt{1 + \delta_{i_1 i_3}}}, \zeta_{i_2}^{(1)} \right\}_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty},$$

где $\zeta_{i_1}^{(2)}$ и $\zeta_{i_2}^{(1)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_1, i_2 = 0, 1, 2, \dots$

В представленных соотношениях использовано обозначение полиномов Эрмита $\{H_{l_1 \dots l_k}(\cdot)\}_{l_1, \dots, l_k=0}^{\infty}$ векторного аргумента $x = [x_1 \dots x_k]^T$, образованных всевозможными произведениями полиномов Эрмита $\{H_{l_1}(\cdot)\}_{l_1=0}^{\infty}, \dots, \{H_{l_k}(\cdot)\}_{l_k=0}^{\infty}$ (см. п. 1 замечаний 5.2).

Далее вместе с рядом (5.51) и разложением (5.52) (см. также п. 3 замечаний 5.3) записано представление кратного стохастического интеграла Ито в виде разложения по ортонормированному базису (5.41), которое как для общего случая, так и для ортогонального базиса $\mathfrak{Z}^{(212)}$ и интеграла ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(212)} f(\cdot)$ приведено в примере 5.2.

Пусть $F_{i_1 i_2 i_3}$ — коэффициенты разложения (4.4) функции $f(\cdot)$. Тогда

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(212)} f(\cdot) = \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(2)} \zeta_{i_2}^{(1)} \zeta_{i_3}^{(2)} = \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)} + \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_1} \zeta_{i_2}^{(1)} =$$

$$= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_3=i_1}^{\infty} \frac{F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_3 i_2 i_1}}{\|\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}} \frac{\zeta_{i_1}^{(2)} \zeta_{i_2}^{(1)} \zeta_{i_3}^{(2)}}{\|\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}} + \sum_{i_2=0}^{\infty} \left(\sum_{i_1=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_1} \right) \zeta_{i_2}^{(1)},$$

$$\|{}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(212)} f(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2} = \left\| \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(2)} \zeta_{i_2}^{(1)} \zeta_{i_3}^{(2)} \right\|_{\mathcal{L}_2} =$$

$$= \left\{ \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_3=i_1}^{\infty} \frac{(F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_3 i_2 i_1})^2}{\|\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}^2} + \sum_{i_2=0}^{\infty} \left(\sum_{i_1=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_1} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{или} \quad {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(212)} f(\cdot) = \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(2)} \zeta_{i_2}^{(1)} \zeta_{i_3}^{(2)} =$$

$$= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_3=i_1}^{\infty} \frac{F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_3 i_2 i_1}}{1 + \delta_{i_1 i_3}} \zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)} + \sum_{i_2=0}^{\infty} \left(\sum_{i_1=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_1} \right) \zeta_{i_2}^{(1)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} (F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_3 i_2 i_1}) \zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)} + \sum_{i_2=0}^{\infty} \left(\sum_{i_1=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_1} \right) \zeta_{i_2}^{(1)}, \\
\| {}^S \mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(212)} f(\cdot) \|_{\mathcal{L}_2} &= \left\| \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(2)} \zeta_{i_2}^{(1)} \zeta_{i_3}^{(2)} \right\|_{\mathcal{L}_2} = \\
&= \left\{ \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_3=i_1}^{\infty} \frac{(F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_3 i_2 i_1})^2}{1 + \delta_{i_1 i_3}} + \sum_{i_2=0}^{\infty} \left(\sum_{i_1=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_1} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} (F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_3 i_2 i_1})^2 + \sum_{i_2=0}^{\infty} \left(\sum_{i_1=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_1} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Пример 5.4. Представить стохастический интеграл Стратоновича ${}^S \mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(1122)} f(\cdot)$ кратности $k = 4$ как сумму кратных стохастических интегралов Ито, а также в виде ортогонального разложения, $f(\cdot) \in L_2^{\overline{\text{tr}}(1122)}(\mathbb{T}^4)$.

□ В данном случае $j_1 = j_2 = 1$ и $j_3 = j_4 = 2$, т.е. $J = \{1, 2\}$ и $\bar{J} = (1122)$. Множество переменных $\mathbf{T} = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ и множество индексов $\mathbf{I} = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ разобьем на классы эквивалентности (см. пример 4.6):

$$\mathbf{T}/\sim = \left\{ \underbrace{\{t_1, t_2\}}_{\mathbf{T}_1}, \underbrace{\{t_3, t_4\}}_{\mathbf{T}_2} \right\}, \quad \mathbf{I}/\sim = \left\{ \underbrace{\{i_1, i_2\}}_{\mathbf{I}_1}, \underbrace{\{i_3, i_4\}}_{\mathbf{I}_2} \right\}, \quad \#(1, \bar{J}) = \#(2, \bar{J}) = 2, \quad M_{\bar{J}}^2 = 2!2! = 4.$$

Симметризованная функция $f_{\bar{J}}(\cdot)$ согласно формуле (4.57) имеет вид

$$\begin{aligned}
f_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3, t_4) &= \frac{1}{M_{\bar{J}}^2} \sum_{\mathbf{T}/\sim} f(t_1, t_2, t_3, t_4) = \\
&= \frac{1}{4} (f(t_1, t_2, t_3, t_4) + f(t_2, t_1, t_3, t_4) + f(t_1, t_2, t_4, t_3) + f(t_2, t_1, t_4, t_3))
\end{aligned}$$

и пусть $\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ — ее коэффициенты разложения (4.63). Кроме того, $\zeta_{i_l}^{(j_l)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_l = 0, 1, 2, \dots$ и $l = 1, 2, 3, 4$.

Поскольку $\lfloor \#(1, \bar{J})/2 \rfloor = \lfloor \#(2, \bar{J})/2 \rfloor = 1$ и $k - 2(\lfloor \#(1, \bar{J})/2 \rfloor + \lfloor \#(2, \bar{J})/2 \rfloor) = 0$, следует записать три кратных стохастических интеграла Ито, которые соответствуют всем парам $(\nu_{(1)}, \nu_{(2)})$ при $\nu_{(1)} = 0, 1$ и $\nu_{(2)} = 0, 1$ за исключением $\nu_{(1)} = \nu_{(2)} = 1$, а также константу, соответствующую значениям $\nu_{(1)} = \nu_{(2)} = 1$, — математическое ожидание кратного стохастического интеграла Стратоновича.

При $\nu_{(1)} = \nu_{(2)} = 0$ имеем стохастический интеграл Ито кратности $k = 4$: ${}^I \mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(1122)} f(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(1122)} f_{\bar{J}}(\cdot)$, система ортогональных случайных величин для его представления — это $\mathfrak{Z}^{(1122)} = \{\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)} * \zeta_{i_4}^{(2)}\}_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty}$.

Рассмотрим случай $\nu_{(1)} = 1, \nu_{(2)} = 0$: $\bar{J}_{(1,0)} = (22)$. Определим функцию

$$f_{(1,0)}(t_3, t_4) = \int_{\mathbf{T}} f_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3, t_4) \Big|_{t_1=t_2} dt_1 = \int_{\mathbf{T}} f_{\bar{J}}(t_1, t_1, t_3, t_4) dt_1,$$

для которой получаем стохастический интеграл Ито кратности $k = 2$: ${}^I \mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(22)} f_{(1,0)}(\cdot)$, система ортогональных случайных величин для его представления — это $\mathfrak{Z}^{(22)} = \{\zeta_{i_3}^{(2)} * \zeta_{i_4}^{(2)}\}_{i_3, i_4=0}^{\infty}$.

В итоговом представлении этот интеграл будет с коэффициентом

$$r_{(1,0)} = h_{i=2}^{(i)} \Big|_{i=2} = \frac{2!}{1!(2-2)!2} = 1,$$

а коэффициенты разложения функции $f_{\langle 1,0 \rangle}(\cdot)$ вычисляются следующим образом:

$$F_{i_3 i_4}^{(1,0)} = \sum_{i_1=0}^{\infty} \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4} \Big|_{i_1=i_2} = \sum_{i_1=0}^{\infty} \tilde{F}_{i_1 i_1 i_3 i_4}.$$

Далее случай $\nu_{(1)} = 0, \nu_{(2)} = 1: \bar{J}_{\langle 0,1 \rangle} = (11)$. Определим функцию

$$f_{\langle 0,1 \rangle}(t_1, t_2) = \int_{\mathbb{T}} f_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3, t_4) \Big|_{t_3=t_4} dt_3 = \int_{\mathbb{T}} f_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3, t_3) dt_3,$$

для нее записываем стохастический интеграл Ито кратности $k = 2: {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(11)} f_{\langle 0,1 \rangle}(\cdot)$, система ортогональных случайных величин для его представления — это $\mathfrak{Z}^{(11)} = \{\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)}\}_{i_1, i_2=0}^{\infty}$. В итоговом представлении этот интеграл будет с коэффициентом

$$r_{\langle 0,1 \rangle} = h_{i-2}^{(i)} \Big|_{i=2} = \frac{2!}{1!(2-2)!2} = 1,$$

а коэффициенты разложения функции $f_{\langle 0,1 \rangle}(\cdot)$ вычисляются по формуле

$$F_{i_1 i_2}^{(0,1)} = \sum_{i_3=0}^{\infty} \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4} \Big|_{i_3=i_4} = \sum_{i_3=0}^{\infty} \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_3}.$$

Наконец, случай $\nu_{(1)} = \nu_{(2)} = 1: \bar{J}_{\langle 1,1 \rangle} = \emptyset$. Определим константу

$$f_{\langle 1,1 \rangle} = \int_{\mathbb{T}^2} f_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3, t_4) \Big|_{t_1=t_2, t_3=t_4} dt_1 dt_3 = \int_{\mathbb{T}^2} f_{\bar{J}}(t_1, t_1, t_3, t_3) dt_1 dt_3,$$

которая в итоговом представлении будет с коэффициентом

$$r_{\langle 1,1 \rangle} = h_{i-2}^{(i)} \Big|_{i=2} h_{i-2}^{(i)} \Big|_{i=2} = 1$$

и ее можно представить следующим образом:

$$F^{(1,1)} = \sum_{i_1, i_3=0}^{\infty} \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4} \Big|_{i_1=i_2, i_3=i_4} = \sum_{i_1, i_3=0}^{\infty} \tilde{F}_{i_1 i_1 i_3 i_3}.$$

Следовательно, по теореме 5.4 имеем

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(1122)} f(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(1122)} f(\cdot) + {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(22)} f_{\langle 1,0 \rangle}(\cdot) + {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(11)} f_{\langle 0,1 \rangle}(\cdot) + f_{\langle 1,1 \rangle},$$

где $f_{\langle 1,1 \rangle} = F^{(1,1)} = \mathbb{E}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(1122)} f(\cdot)$.

Ортогональный базис $\mathfrak{Z}^{*\bar{J}} = \mathfrak{Z}^{*(1122)}$ для представления кратных стохастических интегралов Стратоновича определяется в форме

$$\mathfrak{Z}^{*(1122)} = \mathfrak{Z}^{(1122)} \cup \mathfrak{Z}^{(22)} \cup \mathfrak{Z}^{(11)} \cup \{1\} = \{\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)} * \zeta_{i_4}^{(2)}, \zeta_{i_3}^{(2)} * \zeta_{i_4}^{(2)}, \zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)}, 1\}_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty},$$

и ортогональное разложение интеграла ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(1122)} f(\cdot)$ имеет вид

$$\begin{aligned} {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(1122)} f(\cdot) &= \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4} \zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)} * \zeta_{i_4}^{(2)} + \\ &+ \sum_{i_3, i_4=0}^{\infty} F_{i_3 i_4}^{(1,0)} \zeta_{i_3}^{(2)} * \zeta_{i_4}^{(2)} + \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} F_{i_1 i_2}^{(0,1)} \zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} + F^{(1,1)} = \\ &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=i_1}^{\infty} \sum_{i_3=0}^{\infty} \sum_{i_4=i_3}^{\infty} \frac{4\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4}}{\|\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)} * \zeta_{i_4}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}} \frac{\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)} * \zeta_{i_4}^{(2)}}{\|\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)} * \zeta_{i_4}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}} + \\ &+ \sum_{i_3=0}^{\infty} \sum_{i_4=i_3}^{\infty} \frac{2F_{i_3 i_4}^{(1,0)}}{\|\zeta_{i_3}^{(2)} * \zeta_{i_4}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}} \frac{\zeta_{i_3}^{(2)} * \zeta_{i_4}^{(2)}}{\|\zeta_{i_3}^{(2)} * \zeta_{i_4}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}} + \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=i_1}^{\infty} \frac{2F_{i_1 i_2}^{(0,1)}}{\|\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)}\|_{\mathcal{L}_2}} \frac{\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)}}{\|\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)}\|_{\mathcal{L}_2}} + F^{(1,1)} \end{aligned}$$

с учетом результатов, изложенных в этом разделе для кратных стохастических интегралов Ито. ■

5.5. Повторные стохастические интегралы

Все приведенные выше формулы для кратных стохастических интегралов Ито и Стратоновича по винеровским процессам справедливы для повторных стохастических интегралов, в частности для интегралов вида

$$\int_{\mathbb{T}} \dots \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} f(t_1, \dots, t_k) dW_{j_1}(t_1) \dots dW_{j_k}(t_k) = \int_{\mathbb{T}^k} \hat{f}(t_1, \dots, t_k) dW_{j_1}(t_1) \dots dW_{j_k}(t_k),$$

$$\int_{\mathbb{T}} \dots \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} f(t_1, \dots, t_k) \circ dW_{j_1}(t_1) \circ \dots \circ dW_{j_k}(t_k) = \int_{\mathbb{T}^k} \hat{f}(t_1, \dots, t_k) \circ dW_{j_1}(t_1) \circ \dots \circ dW_{j_k}(t_k),$$

где

$$\hat{f}(t_1, \dots, t_k) = \mathbb{k}(t_1, \dots, t_k) f(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} f(t_1, \dots, t_k), & t_1 < \dots < t_k, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

а функция $\mathbb{k}(\cdot)$ определяется формулой (4.15). Повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича могут рассматриваться как соответствующие кратные стохастические интегралы при переходе от функции $\hat{f}(\cdot)$ к симметризованной функции $\hat{f}_J(\cdot)$ по формуле (4.57).

Область определения повторного стохастического интеграла Ито — это пространство $L_2(\mathbb{T}^k)$, а для повторного стохастического интеграла Стратоновича по винеровским процессам в качестве области определения естественнее взять пространство $L_2^{i \operatorname{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ вместо $L_2^{\operatorname{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$. Например, согласно теореме 4.6 функция (4.24) принадлежит пространству $L_2^{i \operatorname{tr}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ для любых $j_1, \dots, j_k = 1, 2, \dots, s$.

Для функций, удовлетворяющих условию (4.61), справедливо равенство (4.62). Это означает, что для повторных стохастических интегралов Ито по винеровским процессам выполняется свойство изометрии (см. также формулу (2.41)):

$$\mathbb{E} \left(\int_{\mathbb{T}} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \hat{f}(\cdot) \right)^2 = \left\| \int_{\mathbb{T}} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \hat{f}(\cdot) \right\|_{L_2}^2 = \|\hat{f}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 = \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} \hat{F}_{i_1 \dots i_k}^2, \quad (5.65)$$

где $\hat{F}_{i_1 \dots i_k}$ — коэффициенты разложения (4.4) функции $\hat{f}(\cdot)$ по функциям базисной системы $\{q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T}^k)$:

$$\begin{aligned} \hat{F}_{i_1 \dots i_k} &= (q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot), \hat{f}(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \int_{\mathbb{T}^k} q(i_1, t_1) \dots q(i_k, t_k) \hat{f}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k = \\ &= \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} q(i_1, t_1) \dots q(i_k, t_k) f(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k. \end{aligned}$$

Пример 5.5. Найти повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича

$$\int_{\mathbb{T}} \dots \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} dW(t_1) \dots dW(t_k), \quad \int_{\mathbb{T}} \dots \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} dW(t_1) \circ \dots \circ dW(t_k),$$

где $W(\cdot)$ — винеровский процесс, используя спектральную форму математического описания и базисные систем (1.5)–(1.9), заданные на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$.

□ Отметим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{I} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) &= \int_{\mathbb{T}} \dots \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} dW_{j_1}(t_1) \dots dW_{j_k}(t_k), \\ \mathbb{S} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) &= \int_{\mathbb{T}} \dots \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} dW_{j_1}(t_1) \circ \dots \circ dW_{j_k}(t_k) \end{aligned}$$

при условии $j_1 = \dots = j_k$ и $W(\cdot) = W_{j_1}(\cdot) = \dots = W_{j_k}(\cdot)$, функция $\mathbb{k}(\cdot)$ задается формулой (4.15).

В данном примере множество J состоит из одного элемента j_1 : $|J| = 1$, поэтому из формулы (4.58) получаем $M_J^2 = k!$. Таким образом, функция $\mathbb{k}_J(\cdot) = \langle \mathbb{k}(\cdot) \rangle_J$, полученная из $\mathbb{k}(\cdot)$ с помощью симметризации (4.57) — это функция, значения которой отличаются от константы $1/k!$ на множестве нулевой меры и, следовательно, в пространстве $L_2(\mathbb{T}^k)$ можно положить $\mathbb{k}_J(t_1, \dots, t_k) \equiv 1/k!$.

В примере 4.1 представлена спектральная характеристика $\mathbf{1}^{\otimes k}$ функции $f(t_1, \dots, t_k) \equiv 1$ относительно базисных систем (1.5)–(1.9), заданных на отрезке $\mathbb{T} = [0, T]$. С учетом свойства линейности (4.9) делаем вывод, что среди коэффициентов разложения (4.4) функции $\mathbb{k}_J(\cdot)$ есть только один ненулевой элемент: $\tilde{\mathbb{K}}_{0\dots 0} = \sqrt{T^k}/k!$, поэтому согласно формулам (5.25) и (5.51) (или (5.62)) находим

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) = \frac{1}{\sqrt{k!}} \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} \tilde{\mathbb{K}}_{i_1\dots i_k} \zeta_{i_1} \dots \zeta_{i_k} = \frac{\sqrt{T^k}}{k!} \zeta_0 \dots \zeta_0 = \frac{\sqrt{T^k}}{k!} \zeta_0^k,$$

где $\{\zeta_i\}_{i=0}^{\infty}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение (очевидно, здесь достаточно одной случайной величины ζ_0).

Применяя формулы (5.26) и (5.32) (или (5.47)), можно записать

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) = \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} \tilde{\mathbb{K}}_{i_1\dots i_k} \zeta_{i_1} * \dots * \zeta_{i_k} = \frac{\sqrt{T^k}}{k!} \zeta_0 * \dots * \zeta_0 = \frac{\sqrt{T^k}}{k!} H_k(\zeta_0),$$

где $H_k(\cdot)$ — полином Эрмита (5.8).

Рассматриваемые повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича представляются в виде [77, 300]

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) = \frac{\sqrt{T^k}}{k!} H_k(\zeta_0) = \sqrt{T^k} \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(-1)^i \zeta_0^{k-2i}}{i!(k-2i)!2^i},$$

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) = \frac{\sqrt{T^k}}{k!} (\zeta_0)^k = \sqrt{T^k} \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{H_{k-2i}(\zeta_0)}{i!(k-2i)!2^i},$$

причем последнее соотношение — это разложение Ху–Мейера (5.64) (см. п. 6 замечаний 5.3, а также разд. 2.3 и пример 2.12). ■

5.6. Моменты типовых повторных стохастических интегралов

В этом разделе найдем первые два момента повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича (математическое ожидание и второй начальный момент) по винеровским процессам от функции $\mathbb{k}(\cdot)$, заданной формулой (4.15). Кратность k интегралов Ито предполагается произвольной: $k = 2, 3, 4, \dots$, а для интегралов Стратоновича остановимся на значениях $k = 2, 3, 4$. Не ограничивая общности рассуждений, далее будем предполагать, что $t_0 = 0$ и $T = 1$, т.е. $\mathbb{T} = [0, 1]$.

Одно из основных свойств кратных стохастических интегралов Ито (повторные интегралы здесь рассматриваются как частный случай кратных) состоит в том, что их математические

ожидания равны нулю для произвольной функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ [287]. Для функции (4.15) второй начальный момент кратного стохастического интеграла совпадает с квадратом нормы этой функции, т.е. для функции $\mathbb{k}(\cdot)$ это объем симплекса в пространстве \mathbb{R}^n , на котором она принимает значение 1 (см. разд. 5.5):

$$\|\mathbb{k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 = \text{mes}\{(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{T}^k: \mathbb{k}(t_1, \dots, t_k) = 1\} = \frac{1}{k!},$$

следовательно,

$$\mathbb{E}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) = 0, \quad \mathbb{E}^I (\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot))^2 = \frac{1}{k!} \quad (5.66)$$

при любых значениях $j_1, \dots, j_k = 1, 2, \dots, s$.

Для кратных стохастических интегралов Стратоновича вычисление первых двух моментов сложнее. Результат зависит не только от кратности k , но и от значений j_1, \dots, j_k (от их равенств или неравенств в разных комбинациях), кроме того, в общем случае математическое ожидание интеграла Стратоновича не равно нулю. Рассмотрим различные варианты при $k = 2, 3, 4$, опираясь на теоремы 5.3 и 5.4.

Кратность $k = 2$

Пусть $\mathbb{k}(t_1, t_2) = 1(t_2 - t_1)$ — функция, заданная формулой (4.15). При $j_1 \neq j_2$ кратные стохастические интегралы Ито и Стратоновича совпадают:

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot),$$

$$\mathbb{E}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathbb{E}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) = 0, \quad \mathbb{E}^S (\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot))^2 = \mathbb{E}^I (\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot))^2 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}.$$

Далее рассмотрим случай $j_1 = j_2$. Соответствующая симметризованная функция $\mathbb{k}_{\mathcal{J}}(\cdot)$ для $\mathbb{k}(\cdot)$ (см. формулу (4.57)) отличается от непрерывной функции $f(t_1, t_2) \equiv 1/2$ на множестве нулевой меры и, следовательно, в пространстве $L_2(\mathbb{T}^2)$ можно положить $\mathbb{k}_{\mathcal{J}}(t_1, t_2) \equiv 1/2$ (см. пример 4.5):

$$\|\mathbb{k}_{\mathcal{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \frac{\|\mathbb{k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2}{M_{\mathcal{J}}^2} = \frac{1}{4} \quad (M_{\mathcal{J}}^2 = 2).$$

Используя теорему 5.4, при $j_1 = j_2$ находим (см. также формулу Ху–Мейера (5.64))

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) + \mathbb{k}_{\langle 1 \rangle},$$

где

$$\mathbb{k}_{\langle 1 \rangle} = \int_0^1 \mathbb{k}_{\mathcal{J}}(t_1, t_1) dt_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 dt_1 = \frac{1}{2},$$

следовательно,

$$\mathbb{E}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathbb{k}_{\langle 1 \rangle} = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{E}^S (\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot))^2 = \mathbb{E}^I (\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot))^2 + \mathbb{k}_{\langle 1 \rangle}^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Замечание 5.4. Если понимать интегральный след $\mathbb{k}_{\langle 1 \rangle}$ в смысле формул (4.73) или (4.74), то не имеет значения, каким образом функция $\mathbb{k}_{\mathcal{J}}(\cdot)$ определена на множестве нулевой меры $D = \{(t, t) \in \mathbb{T}^2\}$. Величина $\mathbb{k}_{\langle 1 \rangle}$ зависит от значений функции $\mathbb{k}_{\mathcal{J}}(\cdot)$ в окрестности точек множества D , т.е.

$$\int_0^1 \mathbb{k}_{\mathcal{J}}(t_1, t_1) dt_1 = \frac{1}{2},$$

если

$$\mathbb{k}_{\bar{J}}(t_1, t_2) \equiv \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \mathbb{k}_{\bar{J}}(t_1, t_2) = \frac{1(t_2 - t_1) + 1(t_1 - t_2)}{2} = \begin{cases} 1/2, & t_1 \neq t_2, \\ 0, & t_1 = t_2, \end{cases}$$

более того, такой же результат будет и для исходной функции $\mathbb{k}(\cdot)$:

$$\int_0^1 \mathbb{k}(t_1, t_1) dt_1 = \frac{1}{2},$$

а также для любой функции $\mathbb{k}(\cdot)$ из класса эквивалентности $\langle \mathbb{k}(\cdot) \rangle_{\bar{J}}$ (см. п. 3 замечаний 5.2 и формулу (5.48)).

Если понимать интегральный след в обычном смысле (для поточечно определенных функций), то вместо функции $\mathbb{k}(\cdot)$ для стохастического интеграла Стратоновича кратности $k = 2$ в книге [305] предложено использовать функцию

$$\mathbb{k}^*(t_1, t_2) = 1(t_2 - t_1) + \frac{(t_1 = t_2)}{2} = \begin{cases} 1, & t_1 < t_2, \\ 1/2, & t_1 = t_2, \\ 0, & t_1 > t_2, \end{cases} \quad \int_0^1 \mathbb{k}^*(t_1, t_1) dt_1 = \frac{1}{2},$$

где $(t_1 = t_2) = 1$ при $t_1 = t_2$ и $(t_1 = t_2) = 0$ при $t_1 \neq t_2$.

Аналогичные замечания справедливы и для кратности $k > 2$, но они далее не приводятся. Все интегральные следы понимаются согласно формулам (4.73) или (4.74) без явного применения усредняющего оператора для упрощения записи.

Кратность $k = 3$

Пусть $\mathbb{k}(t_1, t_2, t_3) = 1(t_2 - t_1)1(t_3 - t_2)$ — функция, заданная формулой (4.15). Когда значения j_1, j_2, j_3 попарно различны, кратные стохастические интегралы Ито и Стратоновича совпадают (см. пример 5.3):

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot),$$

$$\mathbb{E}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathbb{E}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = 0, \quad \mathbb{E}({}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot))^2 = \mathbb{E}({}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot))^2 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

Далее рассмотрим случай $j_1 = j_2 \neq j_3$. Соответствующая симметризованная функция $\mathbb{k}_{\bar{J}}(\cdot)$ для $\mathbb{k}(\cdot)$ имеет вид

$$\mathbb{k}_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3) = \frac{1(t_2 - t_1)1(t_3 - t_2) + 1(t_1 - t_2)1(t_3 - t_1)}{2} = \frac{1(t_3 - \max\{t_1, t_2\})}{2},$$

$$\mathbb{k}_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3) \Big|_{t_1=t_2} = \frac{1(t_3 - t_1)}{2}, \quad \|\mathbb{k}_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 = \frac{\|\mathbb{k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2}{M_{\bar{J}}^2} = \frac{1}{12} \quad (M_{\bar{J}}^2 = 2).$$

По теореме 5.4 получаем

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) + {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_3)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot),$$

где

$$\mathbb{k}_{(1)}(t_3) = \int_0^1 \mathbb{k}_{\bar{J}}(t_1, t_1, t_3) dt_1 = \int_0^1 \frac{1(t_3 - t_1)}{2} dt_1 = \frac{1}{2} \int_0^{t_3} dt_1 = \frac{t_3}{2},$$

$$\mathbb{E}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_3)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot) = 0, \quad \mathbb{E}({}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_3)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot))^2 = \|\mathbb{k}_{(1)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \int_0^1 \left(\frac{t_3}{2}\right)^2 dt_3 = \frac{1}{12},$$

следовательно,

$$\mathbb{E}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = 0,$$

$$\mathbb{E}^S \left(\mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) \right)^2 = \mathbb{E}^I \left(\mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) \right)^2 + \mathbb{E}^I \left(\mathcal{J}_T^{W(j_3)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot) \right)^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}.$$

Перейдем к случаю $j_1 = j_3 \neq j_2$. Соответствующая симметризованная функция $\mathbb{k}_J(\cdot)$:

$$\mathbb{k}_J(t_1, t_2, t_3) = \frac{1(t_2 - t_1)1(t_3 - t_2) + 1(t_2 - t_3)1(t_1 - t_2)}{2} = \frac{(1(t_2 - t_1) - 1(t_2 - t_3))^2}{2},$$

$$\mathbb{k}_J(t_1, t_2, t_3) \Big|_{t_1=t_3} \equiv 0, \quad \|\mathbb{k}_J(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 = \frac{\|\mathbb{k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2}{M_J^2} = \frac{1}{12} \quad (M_J^2 = 2),$$

так как

$$\begin{aligned} 1(t_2 - t_1)1(t_3 - t_2) + 1(t_2 - t_3)1(t_1 - t_2) &= 1(t_2 - t_1)(1 - 1(t_2 - t_3)) + 1(t_2 - t_3)(1 - 1(t_2 - t_1)) = \\ &= 1(t_2 - t_1) - 2 \cdot 1(t_2 - t_1)1(t_2 - t_3) + 1(t_2 - t_3) = \\ &= (1(t_2 - t_1))^2 - 2 \cdot 1(t_2 - t_1)1(t_2 - t_3) + (1(t_2 - t_3))^2. \end{aligned}$$

Согласно теореме 5.4 (см. также пример 5.3)

$${}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) + {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_2)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot),$$

где

$$\mathbb{k}_{(1)}(t_2) = \int_0^1 \mathbb{k}_J(t_1, t_2, t_1) dt_1 \equiv 0,$$

т.е.

$${}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_1)} \mathbb{k}(\cdot), \quad \mathbb{E}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) = 0, \quad \mathbb{E}^S \left(\mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) \right)^2 = \frac{1}{6}.$$

Следующий вариант $j_1 \neq j_2 = j_3$. Соответствующая симметризованная функция $\mathbb{k}_J(\cdot)$:

$$\mathbb{k}_J(t_1, t_2, t_3) = \frac{1(t_2 - t_1)1(t_3 - t_2) + 1(t_3 - t_1)1(t_2 - t_3)}{2} = \frac{1(\min\{t_2, t_3\} - t_1)}{2},$$

$$\mathbb{k}_J(t_1, t_2, t_3) \Big|_{t_2=t_3} = \frac{1(t_2 - t_1)}{2}, \quad \|\mathbb{k}_J(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 = \frac{\|\mathbb{k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2}{M_J^2} = \frac{1}{12} \quad (M_J^2 = 2).$$

Из теоремы 5.4 следует, что

$${}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) + {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot),$$

где

$$\mathbb{k}_{(1)}(t_1) = \int_0^1 \mathbb{k}_J(t_1, t_2, t_2) dt_2 = \int_0^1 \frac{1(t_2 - t_1)}{2} dt_2 = \frac{1}{2} \int_{t_1}^1 dt_2 = \frac{1 - t_1}{2},$$

$$\mathbb{E}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot) = 0, \quad \mathbb{E}^I \left(\mathcal{J}_T^{W(j_1)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot) \right)^2 = \|\mathbb{k}_{(1)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \int_0^1 \left(\frac{1 - t_1}{2} \right)^2 dt_1 = \frac{1}{12},$$

следовательно,

$$\mathbb{E}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) = 0,$$

$$\mathbb{E}^S \left(\mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) \right)^2 = \mathbb{E}^I \left(\mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) \right)^2 + \mathbb{E}^I \left(\mathcal{J}_T^{W(j_1)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot) \right)^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}.$$

Наконец, рассмотрим случай $j_1 = j_2 = j_3$. Доопределяя по непрерывности, получаем симметризованную функцию $\mathbb{k}_J(t_1, t_2, t_3) \equiv 1/6$:

$$\|\mathbb{k}_J(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 = \frac{\|\mathbb{k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2}{M_J^2} = \frac{1}{36} \quad (M_J^2 = 6).$$

Далее воспользуемся теоремой 5.4 (см. также формулу Ху – Мейера (5.64) и пример 5.3):

$${}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) + 3 {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot),$$

где

$$\mathbb{k}_{(1)}(t_3) = \int_0^1 \mathbb{k}_J(t_1, t_1, t_3) dt_1 \equiv \frac{1}{6},$$

$$E {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot) = 0, \quad E ({}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot))^2 = \|\mathbb{k}_{(1)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \int_0^1 \left(\frac{1}{6}\right)^2 dt_3 = \frac{1}{36},$$

следовательно,

$$E {}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) = 0,$$

$$E ({}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot))^2 = E ({}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot))^2 + 9 E ({}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot))^2 = \frac{1}{6} + \frac{9}{36} = \frac{5}{12}.$$

Кратность $k = 4$

Пусть $\mathbb{k}(t_1, t_2, t_3, t_4) = 1(t_2 - t_1)1(t_3 - t_2)1(t_4 - t_3)$ — функция, заданная формулой (4.15). Для попарно различных значений j_1, j_2, j_3, j_4 кратные стохастические интегралы Ито и Стратоновича совпадают:

$${}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot),$$

$$E {}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) = E {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) = 0,$$

$$E ({}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot))^2 = E ({}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot))^2 = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}.$$

Пусть $j_1 = j_2$, а j_2, j_3, j_4 попарно различны. Соответствующая симметризованная функция $\mathbb{k}_J(\cdot)$ для $\mathbb{k}(\cdot)$ записывается в форме

$$\begin{aligned} \mathbb{k}_J(t_1, t_2, t_3, t_4) &= \frac{1(t_2 - t_1)1(t_3 - t_2)1(t_4 - t_3) + 1(t_1 - t_2)1(t_3 - t_1)1(t_4 - t_3)}{2} = \\ &= \frac{(1(t_2 - t_1)1(t_3 - t_2) + 1(t_1 - t_2)1(t_3 - t_1))1(t_4 - t_3)}{2} = \frac{1(t_3 - \max\{t_1, t_2\})1(t_4 - t_3)}{2}, \\ \mathbb{k}_J(t_1, t_2, t_3, t_4) \Big|_{t_1=t_2} &= \frac{1(t_3 - t_1)1(t_4 - t_3)}{2}, \quad \|\mathbb{k}_J(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 = \frac{\|\mathbb{k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2}{M_J^2} = \frac{1}{48} \quad (M_J^2 = 2). \end{aligned}$$

Теорема 5.4 дает следующее разложение:

$${}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) + {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_3 j_4)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot),$$

где

$$\mathbb{k}_{(1)}(t_3, t_4) = \int_0^1 \mathbb{k}_J(t_1, t_1, t_3, t_4) dt_1 = \int_0^1 \frac{1(t_3 - t_1)1(t_4 - t_3)}{2} dt_1 = \frac{t_3 1(t_4 - t_3)}{2},$$

$$E {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_3 j_4)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot) = 0, \quad E ({}^I \mathcal{J}_T^{W(j_3 j_4)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot))^2 = \|\mathbb{k}_{(1)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{t_3 1(t_4 - t_3)}{2}\right)^2 dt_3 dt_4 = \frac{1}{48},$$

следовательно,

$$E {}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) = 0,$$

$$E ({}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot))^2 = E ({}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot))^2 + E ({}^I \mathcal{J}_T^{W(j_3 j_4)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot))^2 = \frac{1}{24} + \frac{1}{48} = \frac{1}{16}.$$

Пусть $j_2 = j_3$, а j_1, j_2, j_4 попарно различны. Соответствующая симметризованная функция $\mathbb{k}_J(\cdot)$:

$$\mathbb{k}_J(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1(t_2 - t_1)1(t_3 - t_2)1(t_4 - t_3) + 1(t_3 - t_1)1(t_2 - t_3)1(t_4 - t_2)}{2} =$$

$$= \frac{1(\min\{t_2, t_3\} - t_1)1(t_4 - \max\{t_2, t_3\})}{2},$$

$$\mathbb{k}_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3, t_4) \Big|_{t_2=t_3} = \frac{1(t_2 - t_1)1(t_4 - t_2)}{2}, \quad \|\mathbb{k}_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 = \frac{\|\mathbb{k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2}{M_{\bar{J}}^2} = \frac{1}{48} \quad (M_{\bar{J}}^2 = 2).$$

Применяем теорему 5.4:

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_2 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_2 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) + {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_4)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot),$$

где

$$\mathbb{k}_{(1)}(t_1, t_4) = \int_0^1 \mathbb{k}_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_2, t_4) dt_2 = \int_0^1 \frac{1(t_2 - t_1)1(t_4 - t_2)}{2} dt_2 = \frac{(t_4 - t_1)1(t_4 - t_1)}{2},$$

$$E^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_4)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot) = 0,$$

$$E({}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_4)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot))^2 = \|\mathbb{k}_{(1)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{(t_4 - t_1)1(t_4 - t_1)}{2} \right)^2 dt_1 dt_4 = \frac{1}{48},$$

следовательно,

$$E^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_2 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) = 0,$$

$$E({}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_2 j_4)} \mathbb{k}(\cdot))^2 = E({}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_2 j_4)} \mathbb{k}(\cdot))^2 + E({}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_4)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot))^2 = \frac{1}{24} + \frac{1}{48} = \frac{1}{16}.$$

Пусть $j_3 = j_4$, а j_1, j_2, j_3 попарно различны. Соответствующая симметризованная функция $\mathbb{k}_{\bar{J}}(\cdot)$:

$$\mathbb{k}_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1(t_2 - t_1)1(t_3 - t_2)1(t_4 - t_3) + 1(t_2 - t_1)1(t_4 - t_2)1(t_3 - t_4)}{2} =$$

$$= \frac{1(t_2 - t_1)(1(t_3 - t_2)1(t_4 - t_3) + 1(t_4 - t_2)1(t_3 - t_4))}{2} = \frac{1(t_2 - t_1)1(\min\{t_3, t_4\} - t_2)}{2},$$

$$\mathbb{k}_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3, t_4) \Big|_{t_3=t_4} = \frac{1(t_2 - t_1)1(t_3 - t_2)}{2}, \quad \|\mathbb{k}_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 = \frac{\|\mathbb{k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2}{M_{\bar{J}}^2} = \frac{1}{48} \quad (M_{\bar{J}}^2 = 2).$$

Согласно теореме 5.4

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) + {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot),$$

где

$$\mathbb{k}_{(1)}(t_1, t_2) = \int_0^1 \mathbb{k}_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3, t_3) dt_3 = \int_0^1 \frac{1(t_2 - t_1)1(t_3 - t_2)}{2} dt_3 = \frac{(1 - t_2)1(t_2 - t_1)}{2},$$

$$E^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot) = 0,$$

$$E({}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot))^2 = \|\mathbb{k}_{(1)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{(1 - t_2)1(t_2 - t_1)}{2} \right)^2 dt_1 dt_2 = \frac{1}{48},$$

следовательно,

$$E^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = 0,$$

$$E({}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_3)} \mathbb{k}(\cdot))^2 = E({}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_3)} \mathbb{k}(\cdot))^2 + E({}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot))^2 = \frac{1}{24} + \frac{1}{48} = \frac{1}{16}.$$

Далее рассмотрим вариант $j_1 = j_2 \neq j_3 = j_4$. Соответствующая симметризованная функция $\mathbb{k}_{\bar{J}}(\cdot)$:

$$\mathbb{k}_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1(t_2 - t_1)1(t_3 - t_2)1(t_4 - t_3) + 1(t_1 - t_2)1(t_3 - t_1)1(t_4 - t_3)}{4} +$$

$$+ \frac{1(t_2 - t_1)1(t_4 - t_2)1(t_3 - t_4) + 1(t_1 - t_2)1(t_4 - t_1)1(t_3 - t_4)}{4} =$$

$$= \frac{1(t_3 - \max\{t_1, t_2\})1(t_4 - t_3) + 1(t_2 - t_1)1(\min\{t_3, t_4\} - t_2)}{4} = \frac{1(\min\{t_3, t_4\} - \max\{t_1, t_2\})}{4},$$

$$\mathbb{k}_{\bar{j}}(t_1, t_2, t_3, t_4) \Big|_{t_1=t_2} = \frac{1(\min\{t_3, t_4\} - t_1)}{4}, \quad \mathbb{k}_{\bar{j}}(t_1, t_2, t_3, t_4) \Big|_{t_3=t_4} = \frac{1(t_3 - \max\{t_1, t_2\})}{4},$$

$$\mathbb{k}_{\bar{j}}(t_1, t_2, t_3, t_4) \Big|_{t_1=t_2, t_3=t_4} = \frac{1(t_3 - t_1)}{4}, \quad \|\mathbb{k}_{\bar{j}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 = \frac{\|\mathbb{k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2}{M_{\bar{j}}^2} = \frac{1}{96} \quad (M_{\bar{j}}^2 = 4).$$

Из теоремы 5.4 получаем (см. пример 5.4)

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_3 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_3 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) + {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_3 j_3)} \mathbb{k}_{\langle 1,0 \rangle}(\cdot) + {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)} \mathbb{k}_{\langle 0,1 \rangle}(\cdot) + \mathbb{k}_{\langle 1,1 \rangle},$$

где

$$\mathbb{k}_{\langle 1,0 \rangle}(t_3, t_4) = \int_0^1 \mathbb{k}_{\bar{j}}(t_1, t_1, t_3, t_4) dt_1 = \int_0^1 \frac{1(\min\{t_3, t_4\} - t_1)}{4} dt_1 = \frac{\min\{t_3, t_4\}}{4},$$

$$\mathbb{k}_{\langle 0,1 \rangle}(t_1, t_2) = \int_0^1 \mathbb{k}_{\bar{j}}(t_1, t_2, t_3, t_3) dt_3 = \int_0^1 \frac{1(t_3 - \max\{t_1, t_2\})}{4} dt_3 = \frac{1 - \max\{t_1, t_2\}}{4},$$

$$\mathbb{k}_{\langle 1,1 \rangle} = \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{k}_{\bar{j}}(t_1, t_1, t_3, t_3) dt_1 dt_3 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1(t_3 - t_1)}{4} dt_1 dt_3 = \frac{1}{8},$$

$$E^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_3 j_3)} \mathbb{k}_{\langle 1,0 \rangle}(\cdot) = E^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)} \mathbb{k}_{\langle 0,1 \rangle}(\cdot) = 0,$$

$$E({}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_3 j_3)} \mathbb{k}_{\langle 1,0 \rangle}(\cdot))^2 = \underbrace{M_{(j_3 j_3)}^2}_2 \|\mathbb{k}_{\langle 1,0 \rangle}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = 2 \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\min\{t_3, t_4\}}{4} \right)^2 dt_3 dt_4 = \frac{1}{48},$$

$$E({}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)} \mathbb{k}_{\langle 0,1 \rangle}(\cdot))^2 = \underbrace{M_{(j_1 j_1)}^2}_2 \|\mathbb{k}_{\langle 0,1 \rangle}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = 2 \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1 - \max\{t_1, t_2\}}{4} \right)^2 dt_1 dt_2 = \frac{1}{48},$$

следовательно,

$$E^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_3 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathbb{k}_{\langle 1,1 \rangle} = \frac{1}{8},$$

$$E({}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_3 j_3)} \mathbb{k}(\cdot))^2 = E({}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_3 j_3)} \mathbb{k}(\cdot))^2 + E({}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_3 j_3)} \mathbb{k}_{\langle 1,0 \rangle}(\cdot))^2 +$$

$$+ E({}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)} \mathbb{k}_{\langle 0,1 \rangle}(\cdot))^2 + \mathbb{k}_{\langle 1,1 \rangle}^2 = \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{48} + \frac{1}{64} = \frac{19}{192}.$$

Отметим, что согласно лемме 5.4 вместо функции $\mathbb{k}_{\langle 1,0 \rangle}(t_3, t_4) = \min\{t_3, t_4\}/4$ можно взять функции

$$\mathbb{k}'_{\langle 1,0 \rangle}(t_3, t_4) = \frac{t_3 1(t_4 - t_3)}{2} \quad \text{или} \quad \mathbb{k}''_{\langle 1,0 \rangle}(t_3, t_4) = \frac{t_4 1(t_3 - t_4)}{2},$$

так как $\langle \mathbb{k}'_{\langle 1,0 \rangle}(\cdot) \rangle_{\bar{j}} = \langle \mathbb{k}''_{\langle 1,0 \rangle}(\cdot) \rangle_{\bar{j}} = \mathbb{k}_{\langle 1,0 \rangle}(\cdot)$. Аналогично для функции $\mathbb{k}_{\langle 0,1 \rangle}(t_1, t_2) = (1 - \max\{t_1, t_2\})/4$:

$$\mathbb{k}'_{\langle 0,1 \rangle}(t_1, t_2) = \frac{(1 - t_2) 1(t_2 - t_1)}{2} \quad \text{или} \quad \mathbb{k}''_{\langle 0,1 \rangle}(t_1, t_2) = \frac{(1 - t_1) 1(t_1 - t_2)}{2},$$

поскольку $\langle \mathbb{k}'_{\langle 0,1 \rangle}(\cdot) \rangle_{\bar{j}} = \langle \mathbb{k}''_{\langle 0,1 \rangle}(\cdot) \rangle_{\bar{j}} = \mathbb{k}_{\langle 0,1 \rangle}(\cdot)$.

Пусть $j_1 = j_2 = j_3 \neq j_4$. Соответствующая симметризованная функция $\mathbb{k}_{\bar{j}}(\cdot)$:

$$\mathbb{k}_{\bar{j}}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1(t_2 - t_1) 1(t_3 - t_2) 1(t_4 - t_3) + 1(t_1 - t_2) 1(t_3 - t_1) 1(t_4 - t_3)}{6} +$$

$$+ \frac{1(t_2 - t_3) 1(t_1 - t_2) 1(t_4 - t_1) + 1(t_3 - t_1) 1(t_2 - t_3) 1(t_4 - t_2)}{6} +$$

$$+ \frac{1(t_3 - t_2) 1(t_1 - t_3) 1(t_4 - t_1) + 1(t_1 - t_3) 1(t_2 - t_1) 1(t_4 - t_2)}{6} =$$

$$= \frac{1(t_3 - \max\{t_1, t_2\}) 1(t_4 - t_3) + 1(t_2 - \max\{t_1, t_3\}) 1(t_4 - t_2)}{6} + \frac{1(t_1 - \max\{t_2, t_3\}) 1(t_4 - t_1)}{6}.$$

$$\mathbb{k}_{\bar{j}}(t_1, t_2, t_3, t_4) \Big|_{t_1=t_2} = \frac{1(t_3 - t_1) 1(t_4 - t_3) + 1(t_1 - t_3) 1(t_4 - t_1)}{6} = \frac{1(t_4 - \max\{t_1, t_3\})}{6},$$

$$\|\mathbb{k}_J(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 = \frac{\|\mathbb{k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2}{M_J^2} = \frac{1}{144} \quad (M_J^2 = 6).$$

Согласно теореме 5.4

$${}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1 j_1 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1 j_1 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) + 3 {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_4)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot),$$

где

$$\mathbb{k}_{(1)}(t_3, t_4) = \int_0^1 \mathbb{k}_J(t_1, t_1, t_3, t_4) dt_1 = \int_0^1 \frac{1(t_4 - \max\{t_1, t_3\})}{6} dt_1 = \frac{t_4 1(t_4 - t_3)}{6},$$

$$E {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_3 j_4)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot) = 0,$$

$$E ({}^I \mathcal{J}_T^{W(j_3 j_4)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot))^2 = \|\mathbb{k}_{(1)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{t_4 1(t_4 - t_3)}{6} \right)^2 dt_3 dt_4 = \frac{1}{144},$$

следовательно,

$$E {}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1 j_1 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) = 0,$$

$$E ({}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1 j_1 j_4)} \mathbb{k}(\cdot))^2 = E ({}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1 j_1 j_4)} \mathbb{k}(\cdot))^2 + 9 E ({}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_4)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot))^2 = \frac{1}{24} + \frac{9}{144} = \frac{5}{48}.$$

Пусть $j_1 \neq j_2 = j_3 = j_4$. Соответствующая симметризованная функция $\mathbb{k}_J(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{k}_J(t_1, t_2, t_3, t_4) &= \frac{1(t_2 - t_1)1(t_3 - t_2)1(t_4 - t_3) + 1(t_3 - t_1)1(t_2 - t_3)1(t_4 - t_2)}{6} + \\ &+ \frac{1(t_4 - t_1)1(t_3 - t_4)1(t_2 - t_3) + 1(t_2 - t_1)1(t_4 - t_2)1(t_3 - t_4)}{6} + \\ &+ \frac{1(t_3 - t_1)1(t_4 - t_3)1(t_2 - t_4) + 1(t_4 - t_1)1(t_2 - t_4)1(t_3 - t_2)}{6} = \\ &= \frac{1(t_2 - t_1)1(\min\{t_3, t_4\} - t_2) + 1(t_3 - t_1)1(\min\{t_2, t_4\} - t_3)}{6} + \frac{1(t_4 - t_1)1(\min\{t_2, t_3\} - t_4)}{6}. \end{aligned}$$

$$\mathbb{k}_J(t_1, t_2, t_3, t_4) \Big|_{t_2=t_3} = \frac{1(t_2 - t_1)1(t_4 - t_2) + 1(t_4 - t_1)1(t_2 - t_4)}{6} = \frac{1(\min\{t_2, t_4\} - t_1)}{6},$$

$$\|\mathbb{k}_J(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 = \frac{\|\mathbb{k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2}{M_J^2} = \frac{1}{144} \quad (M_J^2 = 6).$$

По теореме 5.4 имеем

$${}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_2 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_2 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) + 3 {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot),$$

где

$$\mathbb{k}_{(1)}(t_1, t_4) = \int_0^1 \mathbb{k}_J(t_1, t_2, t_2, t_4) dt_2 = \int_0^1 \frac{1(\min\{t_2, t_4\} - t_1)}{6} dt_2 = \frac{(1 - t_1)1(t_4 - t_1)}{6},$$

$$E {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_4)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot) = 0,$$

$$E ({}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_4)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot))^2 = \|\mathbb{k}_{(1)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{(1 - t_1)1(t_4 - t_1)}{6} \right)^2 dt_1 dt_4 = \frac{1}{144},$$

следовательно,

$$E {}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_2 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) = 0,$$

$$E ({}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_2 j_2)} \mathbb{k}(\cdot))^2 = E ({}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_2 j_2)} \mathbb{k}(\cdot))^2 + 9 E ({}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}_{(1)}(\cdot))^2 = \frac{1}{24} + \frac{9}{144} = \frac{5}{48}.$$

Наконец, перейдем к случаю $j_1 = j_2 = j_3 = j_4$. Доопределяя по непрерывности, получаем симметризованную функцию $\mathbb{k}_J(t_1, t_2, t_3, t_4) \equiv 1/24$:

$$\|\mathbb{k}_J(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 = \frac{\|\mathbb{k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2}{M_J^2} = \frac{1}{576} \quad (M_J^2 = 24).$$

Далее применим теорему 5.4 (см. также формулу Ху – Мейера (5.64)):

$${}^S\mathcal{J}_T^{W(j_1j_1j_1j_1)}\mathbb{k}(\cdot) = {}^I\mathcal{J}_T^{W(j_1j_1j_1j_1)}\mathbb{k}(\cdot) + 6{}^I\mathcal{J}_T^{W(j_1j_1)}\mathbb{k}_{(1)}(\cdot) + 3\mathbb{k}_{(2)},$$

где

$$\mathbb{k}_{(1)}(t_3, t_4) = \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{k}_{\bar{j}}(t_1, t_1, t_3, t_4) dt_1 \equiv \frac{1}{24}, \quad \mathbb{k}_{(2)} = \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{k}_{\bar{j}}(t_1, t_1, t_3, t_3) dt_1 dt_3 = \frac{1}{24},$$

$$E{}^I\mathcal{J}_T^{W(j_3j_3)}\mathbb{k}_{(1)}(\cdot) = 0, \quad E({}^I\mathcal{J}_T^{W(j_3j_3)}\mathbb{k}_{(1)}(\cdot))^2 = \underbrace{M_{(j_3j_3)}^2}_2 \|\mathbb{k}_{(1)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = 2 \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{24}\right)^2 dt_3 dt_4 = \frac{2}{576},$$

следовательно,

$$E{}^S\mathcal{J}_T^{W(j_1j_1j_1j_1)}\mathbb{k}(\cdot) = 3\mathbb{k}_{(2)} = \frac{1}{8}, \quad E({}^S\mathcal{J}_T^{W(j_1j_1j_1j_1)}\mathbb{k}(\cdot))^2 = E({}^I\mathcal{J}_T^{W(j_1j_1j_1j_1)}\mathbb{k}(\cdot))^2 + \\ + 36E({}^I\mathcal{J}_T^{W(j_1j_1)}\mathbb{k}_{(1)}(\cdot))^2 + 9\mathbb{k}_{(2)}^2 = \frac{1}{24} + \frac{72}{576} + \frac{9}{576} = \frac{35}{192}.$$

Для остальных вариантов значений j_1, j_2, j_3, j_4 кратные стохастические интегралы Ито и Стратоновича совпадают, как и для попарно различных j_1, j_2, j_3, j_4 .

Во всех рассмотренных вариантах выполняется равенство $\|\mathbb{k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \|\text{tr}_{\varpi} \mathbb{k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^{k-2\gamma})}$, в правой части которого использованы обозначения из разд. 4.4, в частности формулы (4.69), (4.73) и (4.74).

Подчеркнем, что полученные выше результаты соответствуют условию $\mathbb{T} = [0, 1]$, т.е. $T = 1$. Для произвольного $T > 0$ указанные в табл. 5.3 и 5.4 величины достаточно умножить на коэффициент $\sqrt{T^k}$ для математического ожидания и на коэффициент T^k для второго начального момента. Это можно доказать, применяя свойство самоподобия винеровского процесса [87, 239]. Для отрезка $\mathbb{T} = [t_0, T]$ соответствующие коэффициенты равны $\sqrt{(T - t_0)^k}$ и $(T - t_0)^k$.

Проиллюстрируем методику нахождения первых двух моментов повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича от линейных комбинаций функции $\mathbb{k}_{\psi}(\cdot)$, заданных формулой (4.24) с дополнительным условием (4.26), следующим примером.

Пример 5.6. Найти первые два момента повторных стохастических интегралов Стратоновича ${}^S\mathcal{J}_T^{W(j_1j_2)}\mathbb{k}_{10}(\cdot)$, ${}^S\mathcal{J}_T^{W(j_1j_2)}(\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot))$, ${}^S\mathcal{J}_T^{W(j_1j_2)}(T\mathbb{k}(\cdot) - \mathbb{k}_{01}(\cdot))$, кратности $k = 2$ при условии $\mathbb{T} = [0, T]$, т.е. $t_0 = 0$, где

$$\mathbb{k}_{10}(t_1, t_2) = t_1 1(t_2 - t_1), \quad \mathbb{k}_{01}(t_1, t_2) = t_2 1(t_2 - t_1), \quad \mathbb{k}(t_1, t_2) = 1(t_2 - t_1).$$

□ Сначала рассмотрим интеграл ${}^S\mathcal{J}_T^{W(j_1j_2)}\mathbb{k}_{10}(\cdot)$. При $j_1 \neq j_2$ он совпадает с повторным стохастическим интегралом Ито ${}^I\mathcal{J}_T^{W(j_1j_2)}\mathbb{k}_{10}(\cdot)$, следовательно,

$$E{}^S\mathcal{J}_T^{W(j_1j_2)}\mathbb{k}_{10}(\cdot) = E{}^I\mathcal{J}_T^{W(j_1j_2)}\mathbb{k}_{10}(\cdot) = 0, \\ E({}^S\mathcal{J}_T^{W(j_1j_2)}\mathbb{k}_{10}(\cdot))^2 = E({}^I\mathcal{J}_T^{W(j_1j_2)}\mathbb{k}_{10}(\cdot))^2 = \|\mathbb{k}_{10}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \\ = \int_0^T \int_0^T t_1^2 1(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 = \int_0^T \int_0^{t_2} t_1^2 dt_1 dt_2 = \frac{1}{3} \int_0^T t_2^3 dt_2 = \frac{T^4}{12}.$$

При $j_1 = j_2$ симметризованная функция $\mathbb{k}_{10\bar{j}}(\cdot)$ для $\mathbb{k}_{10}(\cdot)$ получена в примере 4.5 (см. также табл. 4.1): $\mathbb{k}_{10\bar{j}}(t_1, t_2) = \min\{t_1, t_2\}/2$, и согласно теореме 5.4 при $j_1 = j_2$, а также формуле Ху – Мейера (5.64) имеем

$${}^S\mathcal{J}_T^{W(j_1j_1)}\mathbb{k}_{10}(\cdot) = {}^I\mathcal{J}_T^{W(j_1j_1)}\mathbb{k}_{10}(\cdot) + \mathbb{k}_{10(1)},$$

Таблица 5.3. Моменты повторных стохастических интегралов Ито

Кратность	$E^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot)$	$E(I \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot))^2$
$k = 2$	0	1/2
$k = 3$	0	1/6
$k = 4$	0	1/24

Таблица 5.4. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича

Кратность	$E^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot)$	$E(S \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot))^2$
$k = 2$		
$j_1 \neq j_2$	0	1/2
$j_1 = j_2$	1/2	3/4
$k = 3$		
j_1, j_2, j_3 различны	0	1/6
$j_1 = j_2 \neq j_3$	0	1/4
$j_1 = j_3 \neq j_2$	0	1/6
$j_1 \neq j_2 = j_3$	0	1/4
$j_1 = j_2 = j_3$	0	5/12
$k = 4$		
j_1, j_2, j_3, j_4 различны	0	1/24
$j_1 = j_2; j_2, j_3, j_4$ различны	0	1/16
$j_2 = j_3; j_1, j_2, j_4$ различны	0	1/16
$j_3 = j_4; j_1, j_2, j_3$ различны	0	1/16
$j_1 = j_2 \neq j_3 = j_4$	1/8	19/192
$j_1 = j_2 = j_3 \neq j_4$	0	5/48
$j_1 \neq j_2 = j_3 = j_4$	0	5/48
$j_1 = j_2 = j_3 = j_4$	1/8	35/192
в остальных случаях	0	1/24

где

$$\mathbb{k}_{10\langle 1 \rangle} = \int_T \mathbb{k}_{10\bar{j}}(t_1, t_1) dt_1 = \frac{1}{2} \int_0^T t_1 dt_1 = \frac{T^2}{4},$$

поэтому

$$E^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1)} \mathbb{k}_{10}(\cdot) = \mathbb{k}_{10\langle 1 \rangle} = \frac{T^2}{4},$$

$$E(S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1)} \mathbb{k}_{10}(\cdot))^2 = E(I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1)} \mathbb{k}_{10}(\cdot))^2 + \mathbb{k}_{10\langle 1 \rangle}^2 = \frac{T^4}{12} + \frac{T^4}{16} = \frac{7T^4}{48}.$$

Перейдем к интегралу ${}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)}(\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot))$. Этот интеграл совпадает с повторным стохастическим интегралом Ито ${}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)}(\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot))$ вне зависимости от равенства или неравенства величин j_1 и j_2 . При $j_1 \neq j_2$ такой вывод очевиден, а при $j_1 = j_2$ достаточно указать на то, что $\mathbb{k}_{01\bar{j}}(\cdot) - \mathbb{k}_{10\bar{j}}(\cdot) = \min\{t_1 - t_2, t_2 - t_1\}/2$ (см. табл. 4.1) и, таким образом, на основе теоремы 5.4 при $j_1 = j_2$ или формулы Ху–Мейера (5.64) имеем

$${}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1)}(\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot)) = {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1)}(\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot)) + (\mathbb{k}_{01} - \mathbb{k}_{10})_{\langle 1 \rangle},$$

где

$$(\mathbb{k}_{01} - \mathbb{k}_{10})_{\langle 1 \rangle} = \int_{\mathbb{T}} (\mathbb{k}_{01}(t_1, t_1) - \mathbb{k}_{10}(t_1, t_1)) dt_1 = \int_0^T 0 \cdot dt_1 = 0,$$

т.е.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)}(\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot)) &= \mathbb{E}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)}(\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot)) = 0, \\ \mathbb{E}^S (\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)}(\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot)))^2 &= \mathbb{E}^I (\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)}(\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot)))^2 = \|\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \\ &= \int_0^T \int_0^T (t_2 - t_1)^2 1(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 = \int_0^T \int_0^{t_2} (t_2 - t_1)^2 dt_1 dt_2 = \frac{1}{3} \int_0^T t_2^3 dt_2 = \frac{T^4}{12}. \end{aligned}$$

Далее найдем первые два момента интеграла ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)}(T\mathbb{k}(\cdot) - \mathbb{k}_{01}(\cdot))$. При $j_1 \neq j_2$ этот интеграл не отличается от повторного стохастического интеграла Ито ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)}(T\mathbb{k}(\cdot) - \mathbb{k}_{01}(\cdot))$. Это означает, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)}(T\mathbb{k}(\cdot) - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) &= \mathbb{E}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)}(T\mathbb{k}(\cdot) - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) = 0, \\ \mathbb{E}^S (\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)}(T\mathbb{k}(\cdot) - \mathbb{k}_{01}(\cdot)))^2 &= \mathbb{E}^I (\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)}(T\mathbb{k}(\cdot) - \mathbb{k}_{01}(\cdot)))^2 = \\ &= \|T\mathbb{k}(\cdot) - \mathbb{k}_{01}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \int_0^T \int_0^T (T - t_2)^2 1(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 = \\ &= \int_0^T \int_0^{t_2} (T - t_2)^2 dt_1 dt_2 = \int_0^T t_2 (T - t_2)^2 dt_2 = \frac{T^4}{12}. \end{aligned}$$

При $j_1 = j_2$ симметризованную функцию $T\mathbb{k}_{\bar{j}}(\cdot) - \mathbb{k}_{01\bar{j}}(\cdot)$ для $T\mathbb{k}(\cdot) - \mathbb{k}_{01}(\cdot)$ можно найти в табл. 4.1: $T - \mathbb{k}_{01\bar{j}}(t_1, t_2) = \min\{T - t_1, T - t_2\}/2$. Применяя теорему 5.4 при $j_1 = j_2$ (тот же результат обеспечивает формула Ху–Мейера (5.64)), находим

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)}(T\mathbb{k}(\cdot) - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) = {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)}(T\mathbb{k}(\cdot) - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) + (T\mathbb{k}(\cdot) - \mathbb{k}_{01})_{\langle 1 \rangle},$$

где

$$(T\mathbb{k} - \mathbb{k}_{01})_{\langle 1 \rangle} = \int_{\mathbb{T}} (T\mathbb{k}(t_1, t_1) - \mathbb{k}_{01}(t_1, t_1)) dt_1 = \frac{1}{2} \int_0^T (T - t_1) dt_1 = \frac{T^2}{4},$$

т.е.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)}(T\mathbb{k}(\cdot) - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) &= (T\mathbb{k} - \mathbb{k}_{01})_{\langle 1 \rangle} = \frac{T^2}{4}, \quad \mathbb{E}^S (\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)}(T\mathbb{k}(\cdot) - \mathbb{k}_{01}(\cdot)))^2 = \\ &= \mathbb{E}^I (\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)}(T\mathbb{k}(\cdot) - \mathbb{k}_{01}(\cdot)))^2 + (T\mathbb{k} - \mathbb{k}_{01})_{\langle 1 \rangle}^2 = \frac{T^4}{12} + \frac{T^4}{16} = \frac{7T^4}{48}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5.7. Приближенное представление кратных стохастических интегралов

В этом разделе обратимся к задаче приближенного представления кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича, т.е. к задаче аппроксимации стохастических интегралов.

Начнем с аппроксимации кратных стохастических интегралов Ито (5.19) по винеровским процессам, которые определены в разд. 5.2.

Предположим, что $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ и выполняется приближенное равенство (4.95). Согласно теореме 5.3 справедливо разложение (5.32) и тогда

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) \approx {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \tilde{f}(\cdot) = \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \dots \sum_{i_k=0}^{L_k-1} F_{i_1 \dots i_k} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}, \quad (5.67)$$

где величины L_1, \dots, L_k заданы, $F_{i_1 \dots i_k}$ — коэффициенты разложения (4.4), образующие спектральную характеристику F функции $f(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$, $\zeta_{i_l}^{(j_l)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $l = 1, \dots, k$.

В частном случае достаточно положить $L = L_1 = \dots = L_k$, т.е.

$$I_{\mathcal{T}}^W(j_1 \dots j_k) \tilde{f}(\cdot) = \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{L-1} F_{i_1 \dots i_k} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)} \quad (5.68)$$

и среднеквадратическая погрешность аппроксимации кратного стохастического интеграла Ито определяется точно по формуле (5.33):

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{E}_f}^W(j_1 \dots j_k) &= \mathbb{E} \left(I_{\mathcal{T}}^W(j_1 \dots j_k) f(\cdot) - I_{\mathcal{T}}^W(j_1 \dots j_k) \tilde{f}(\cdot) \right)^2 = \mathbb{E} \left(I_{\mathcal{T}}^W(j_1 \dots j_k) (f(\cdot) - \tilde{f}(\cdot)) \right)^2 = \\ &= M_{\bar{J}}^2 \| \langle f(\cdot) - \tilde{f}(\cdot) \rangle_{\bar{J}} \|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 = M_{\bar{J}}^2 \| \langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}} - \langle \tilde{f}(\cdot) \rangle_{\bar{J}} \|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2, \end{aligned}$$

где $\langle \cdot \rangle_{\bar{J}}$ — симметризирующий оператор, определенный в разд. 4.3.

Пусть $f_{\bar{J}}(\cdot) = \langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}}$ и $\tilde{f}_{\bar{J}}(\cdot) = \langle \tilde{f}(\cdot) \rangle_{\bar{J}}$ — соответствующие симметризованные функции (4.57), а $\tilde{F}_{i_1 \dots i_k}$ — коэффициенты разложения (4.4) функции $f_{\bar{J}}(\cdot)$, образующие спектральную характеристику $F_{\bar{J}}$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$. Здесь уместно напомнить (см. разд. 4.3), что коэффициенты разложения $\tilde{F}_{i_1 \dots i_k}$ зависят от мультимножества $\bar{J} = (j_1 \dots j_k)$ и эта зависимость не указана для упрощения обозначений, а величины $F_{i_1 \dots i_k}$ и $\tilde{F}_{i_1 \dots i_k}$ связаны соотношением (4.63). Усеченную с порядком L спектральную характеристику функции $\tilde{f}_{\bar{J}}(\cdot)$ обозначим через $\tilde{F}_{\bar{J}}$.

Тогда, используя формулу (4.97), находим

$$I_{\mathcal{E}_f}^W(j_1 \dots j_k) = M_{\bar{J}}^2 (\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 - \|\tilde{F}_{\bar{J}}\|^2), \quad (5.69)$$

где $\| \cdot \|$ — евклидова норма многомерной матрицы (см. разд. 4.5):

$$\|\tilde{F}_{\bar{J}}\| = \left\{ \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{L-1} \tilde{F}_{i_1 \dots i_k}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

На основе неравенства (4.60) можно предложить следующую оценку среднеквадратической погрешности аппроксимации кратного стохастического интеграла Ито:

$$I_{\mathcal{E}_f}^W(j_1 \dots j_k) \leq M_{\bar{J}}^2 (\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 - \|\tilde{F}\|^2) \leq k! (\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 - \|\tilde{F}\|^2),$$

где \tilde{F} — усеченная спектральная характеристика функции $\tilde{f}(\cdot)$. В этой оценке правая часть не зависит от значений j_1, \dots, j_k .

Если функция $f(\cdot)$ удовлетворяет условию (4.61), т.е. $I_{\mathcal{T}}^W(j_1 \dots j_k) f(\cdot)$ — повторный стохастический интеграл Ито, то справедливо равенство (4.62), следовательно,

$$I_{\mathcal{E}_f}^W(j_1 \dots j_k) = \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 - M_{\bar{J}}^2 \|\tilde{F}_{\bar{J}}\|^2,$$

при этом $M_{\bar{J}} \|\tilde{F}_{\bar{J}}\| \neq \|\tilde{F}\|$, но

$$\lim_{L \rightarrow \infty} M_{\bar{J}} \|\tilde{F}_{\bar{J}}\| = \lim_{L \rightarrow \infty} \|\tilde{F}\| \quad \text{и} \quad \|\tilde{F}_{\bar{J}}\| = \|\tilde{f}_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)} \leq \|\tilde{f}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \|\tilde{F}\|.$$

Отсюда можно сделать вывод, что для повторных стохастических интегралов максимальная погрешность аппроксимации соответствует минимальному значению величины $M_{\bar{J}}^2$, а именно $M_{\bar{J}}^2 = 1$ (см. формулы (4.58) и (4.59)), когда значения j_1, \dots, j_k попарно различны. В работе [77] этот факт установлен по результатам вычислений для конкретных базисных систем.

Возможна ситуация, когда коэффициенты разложения (4.4) функции $f(\cdot)$ найдены неточно, тогда при использовании формулы (4.63) неточно будут найдены и коэффициенты разложения симметризованной функции $f_{\bar{J}}(\cdot)$. Введем для них обозначения $\bar{F}_{i_1 \dots i_k}$ и $\tilde{\bar{F}}_{i_1 \dots i_k}$, а усеченные спектральные характеристики обозначим \bar{F} и $\tilde{\bar{F}}$. При обратном спектральном преобразовании (4.5) по ним можно найти соответствующие функции $\bar{f}(\cdot)$ и $\tilde{\bar{f}}(\cdot) = \langle \bar{f}(\cdot) \rangle_{\bar{J}}$.

Далее остается применить формулу (4.98) для среднеквадратической погрешности аппроксимации:

$$I_{\bar{\varepsilon}_f}^{W(j_1 \dots j_k)} = E(I_{\mathcal{J}_{\bar{J}}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) - I_{\mathcal{J}_{\bar{J}}}^{W(j_1 \dots j_k)} \bar{f}(\cdot))^2 = M_{\bar{J}}^2 \|\langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}} - \langle \bar{f}(\cdot) \rangle_{\bar{J}}\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2,$$

следовательно,

$$I_{\bar{\varepsilon}_f}^{W(j_1 \dots j_k)} = M_{\bar{J}}^2 (\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 - \|\tilde{\bar{F}}_{\bar{J}}\|^2 + \|\tilde{\bar{F}}_{\bar{J}} - \bar{F}_{\bar{J}}\|^2). \quad (5.70)$$

Также справедлива следующая оценка среднеквадратической погрешности аппроксимации:

$$I_{\bar{\varepsilon}_f}^{W(j_1 \dots j_k)} \leq M_{\bar{J}}^2 (\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 - \|\tilde{F}\|^2 + \|\tilde{F} - \bar{F}\|^2) \leq k! (\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 - \|\tilde{F}\|^2 + \|\tilde{F} - \bar{F}\|^2),$$

а для функций $f(\cdot)$ вида (4.61) находим

$$I_{\bar{\varepsilon}_f}^{W(j_1 \dots j_k)} = \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 - M_{\bar{J}}^2 (\|\tilde{F}\|^2 - \|\tilde{F} - \bar{F}\|^2).$$

Замечание 5.5.

Формулы (5.69) и (5.70) могут принимать различный вид, если записывать их непосредственно через элементы спектральных характеристик F и $F_{\bar{J}}$ функций $f(\cdot)$ и $f_{\bar{J}}(\cdot)$ соответственно. Это связано с выбором представления кратного стохастического интеграла Ито в виде ряда (5.32) или ортогонального разложения (5.42).

Далее приведем выражения для среднеквадратических погрешностей аппроксимации кратных стохастических интегралов Ито, полученные из формулы (5.69) для кратностей $k = 2, 3, 4$ с учетом значений j_1, \dots, j_k (их равенств или неравенств в разных комбинациях).

Кратность $k = 2$

Пусть $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ и $f_{\bar{J}}(\cdot) = \langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}} \in L_2^{s(j_1 j_2)}(\mathbb{T}^2)$ — соответствующая симметризованная функция (4.57), $\bar{J} = (j_1 j_2)$, а $F_{i_1 i_2}$ и $\tilde{F}_{i_1 i_2}$ — их коэффициенты разложения (4.4) и (4.63) соответственно, $i_1, i_2 = 0, 1, 2, \dots$. Тогда из формулы (5.69) находим

$$j_1 \neq j_2 \quad (M_{\bar{J}}^2 = 1) : I_{\bar{\varepsilon}_f}^{W(j_1 j_2)} = \|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 - \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} \tilde{F}_{i_1 i_2}^2,$$

$$f_{\bar{J}}(t_1, t_2) = f(t_1, t_2), \quad \tilde{F}_{i_1 i_2} = F_{i_1 i_2};$$

$$j_1 = j_2 \quad (M_{\bar{J}}^2 = 2) : I_{\bar{\varepsilon}_f}^{W(j_1 j_1)} = 2 \left(\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 - \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} \tilde{F}_{i_1 i_2}^2 \right),$$

$$f_{\bar{J}}(t_1, t_2) = \frac{f(t_1, t_2) + f(t_2, t_1)}{2}, \quad \tilde{F}_{i_1 i_2} = \frac{F_{i_1 i_2} + F_{i_2 i_1}}{2}.$$

Используя ортогональное разложение (5.42), можно записать

$$j_1 = j_2 : I_{\bar{\varepsilon}_f}^{W(j_1 j_1)} = 2 \|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 - \sum_{i_1=0}^{L-1} \sum_{i_2=i_1}^{L-1} \frac{(F_{i_1 i_2} + F_{i_2 i_1})^2}{1 + \delta_{i_1 i_2}} = 2 \|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 - \sum_{i_1=0}^{L-1} \sum_{i_2=i_1}^{L-1} \frac{(2\tilde{F}_{i_1 i_2})^2}{1 + \delta_{i_1 i_2}}.$$

Возможны другие эквивалентные формы записи. Например, так как

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} \tilde{F}_{i_1 i_2}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} (F_{i_1 i_2} + F_{i_2 i_1})^2 = \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} (F_{i_1 i_2}^2 + F_{i_2 i_1}^2) + \\ &+ \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} F_{i_1 i_2} F_{i_2 i_1} = \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} (F_{i_1 i_2}^2 + F_{i_1 i_2} F_{i_2 i_1}) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=0}^{L-1} \sum_{i_2=i_1}^{L-1} \frac{(F_{i_1 i_2} + F_{i_2 i_1})^2}{1 + \delta_{i_1 i_2}} &= \sum_{i_1=0}^{L-1} \sum_{i_2 > i_1}^{L-1} (F_{i_1 i_2} + F_{i_2 i_1})^2 + 2 \sum_{i_1=0}^{L-1} F_{i_1 i_1}^2 = \\ &= \sum_{i_1=0}^{L-1} \sum_{i_2 > i_1}^{L-1} (F_{i_1 i_2}^2 + 2F_{i_1 i_2} F_{i_2 i_1} + F_{i_2 i_1}^2) + 2 \sum_{i_1=0}^{L-1} F_{i_1 i_1}^2 = \\ &= \sum_{i_1=0}^{L-1} \sum_{\substack{i_2=0 \\ i_2 \neq i_1}}^{L-1} (F_{i_1 i_2}^2 + F_{i_1 i_2} F_{i_2 i_1}) + 2 \sum_{i_1=0}^{L-1} F_{i_1 i_1}^2 = \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} (F_{i_1 i_2}^2 + F_{i_1 i_2} F_{i_2 i_1}), \end{aligned}$$

для функций с условием (4.61) и учетом равенства (4.62) находим

$$j_1 = j_2 : \mathbb{I}_{\mathcal{E}_f}^{W(j_1 j_1)} = \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 - \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} (F_{i_1 i_2}^2 + F_{i_1 i_2} F_{i_2 i_1})$$

и именно такое выражение получено в работе [77] для среднеквадратической погрешности аппроксимации повторного стохастического интеграла Ито.

Кратность $k = 3$

Пусть $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^3)$ и $f_{\bar{J}}(\cdot) = \langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}} \in L_2^{s(j_1 j_2 j_3)}(\mathbb{T}^3)$ — соответствующая симметризованная функция (4.57), $\bar{J} = (j_1 j_2 j_3)$, а $F_{i_1 i_2 i_3}$ и $\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3}$ — их коэффициенты разложения (4.4) и (4.63) соответственно, $i_1, i_2, i_3 = 0, 1, 2, \dots$. Согласно формуле (5.69) получаем

j_1, j_2, j_3 попарно различны ($M_{\bar{J}}^2 = 1$):

$$\mathbb{I}_{\mathcal{E}_f}^{W(j_1 j_2 j_3)} = \|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 - \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{L-1} \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3}^2,$$

$$f_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3) = f(t_1, t_2, t_3), \quad \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3} = F_{i_1 i_2 i_3};$$

$$j_1 = j_2 \neq j_3 \ (M_{\bar{J}}^2 = 2) : \mathbb{I}_{\mathcal{E}_f}^{W(j_1 j_1 j_3)} = 2 \left(\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 - \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{L-1} \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3}^2 \right),$$

$$f_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3) = \frac{f(t_1, t_2, t_3) + f(t_2, t_1, t_3)}{2}, \quad \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3} = \frac{F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_2 i_1 i_3}}{2};$$

$$j_1 = j_3 \neq j_2 \ (M_{\bar{J}}^2 = 2) : \mathbb{I}_{\mathcal{E}_f}^{W(j_1 j_2 j_1)} = 2 \left(\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 - \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{L-1} \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3}^2 \right),$$

$$f_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3) = \frac{f(t_1, t_2, t_3) + f(t_3, t_2, t_1)}{2}, \quad \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3} = \frac{F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_3 i_2 i_1}}{2};$$

$$j_1 \neq j_2 = j_3 \ (M_{\bar{J}}^2 = 2) : \mathbb{I}_{\mathcal{E}_f}^{W(j_1 j_2 j_2)} = 2 \left(\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 - \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{L-1} \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3}^2 \right),$$

$$f_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3) = \frac{f(t_1, t_2, t_3) + f(t_1, t_3, t_2)}{2}, \quad \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3} = \frac{F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_1 i_3 i_2}}{2};$$

$$j_1 = j_2 = j_3 \ (M_J^2 = 6) : \mathbb{I}_{\mathcal{E}_f}^{W(j_1 j_1 j_1)} = 6 \left(\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 - \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{L-1} \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3}^2 \right),$$

$$f_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{6} (f(t_1, t_2, t_3) + f(t_2, t_1, t_3) + f(t_3, t_2, t_1) +$$

$$+ f(t_1, t_3, t_2) + f(t_2, t_3, t_1) + f(t_3, t_1, t_2)),$$

$$\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3} = \frac{F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_2 i_1 i_3} + F_{i_3 i_2 i_1} + F_{i_1 i_3 i_2} + F_{i_2 i_3 i_1} + F_{i_3 i_1 i_2}}{6}.$$

На основе ортогонального разложения (5.42) получаем другую форму записи для средне-квадратических погрешностей аппроксимации кратных стохастических интегралов Ито:

$$j_1 = j_2 \neq j_3 : \mathbb{I}_{\mathcal{E}_f}^{W(j_1 j_1 j_3)} = 2 \|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 - \sum_{i_1, i_3=0}^{L-1} \sum_{i_2=i_1}^{L-1} \frac{(F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_2 i_1 i_3})^2}{1 + \delta_{i_1 i_2}} =$$

$$= 2 \|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 - \sum_{i_1, i_3=0}^{L-1} \sum_{i_2=i_1}^{L-1} \frac{(2\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3})^2}{1 + \delta_{i_1 i_2}},$$

$$j_1 = j_3 \neq j_2 : \mathbb{I}_{\mathcal{E}_f}^{W(j_1 j_2 j_1)} = 2 \|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 - \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} \sum_{i_3=i_1}^{L-1} \frac{(F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_3 i_2 i_1})^2}{1 + \delta_{i_1 i_3}} =$$

$$= 2 \|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 - \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} \sum_{i_3=i_1}^{L-1} \frac{(2\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3})^2}{1 + \delta_{i_1 i_3}},$$

$$j_1 \neq j_2 = j_3 : \mathbb{I}_{\mathcal{E}_f}^{W(j_1 j_2 j_2)} = 2 \|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 - \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} \sum_{i_3=i_2}^{L-1} \frac{(F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_1 i_3 i_2})^2}{1 + \delta_{i_2 i_3}} =$$

$$= 2 \|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 - \sum_{i_1, i_3=0}^{L-1} \sum_{i_2=i_3}^{L-1} \frac{(2\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3})^2}{1 + \delta_{i_2 i_3}},$$

$$j_1 = j_2 = j_3 : \mathbb{I}_{\mathcal{E}_f}^{W(j_1 j_1 j_1)} = 6 \|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 -$$

$$- \sum_{i_1=0}^{L-1} \sum_{i_2=i_1}^{L-1} \sum_{i_3=i_2}^{L-1} \frac{(F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_2 i_1 i_3} + F_{i_3 i_2 i_1} + F_{i_1 i_3 i_2} + F_{i_2 i_3 i_1} + F_{i_3 i_1 i_2})^2}{1 + \delta_{i_1 i_2} + \delta_{i_2 i_3} + \delta_{i_1 i_3} + 2\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_2 i_3}} =$$

$$= 6 \|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 - \sum_{i_1=0}^{L-1} \sum_{i_2=i_1}^{L-1} \sum_{i_3=i_2}^{L-1} \frac{(6\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3})^2}{1 + \delta_{i_1 i_2} + \delta_{i_2 i_3} + \delta_{i_1 i_3} + 2\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_2 i_3}},$$

где коэффициенты разложения $\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3}$ в правых частях записанных равенств зависят от значений j_1, j_2, j_3 (их равенств или неравенств).

Приведенные выражения можно преобразовать. Например, так как при условии $j_1 = j_3 \neq j_2$ (см. описанный выше случай $k = 2$)

$$2 \sum_{i_1, i_3=0}^{L-1} \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3}^2 = \sum_{i_1=0}^{L-1} \sum_{i_3=i_1}^{L-1} \frac{(F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_3 i_2 i_1})^2}{1 + \delta_{i_1 i_3}} = \sum_{i_1, i_3=0}^{L-1} (F_{i_1 i_2 i_3}^2 + F_{i_1 i_2 i_3} F_{i_3 i_2 i_1}),$$

для функции с условием (4.61) получаем выражение

$$j_1 = j_3 \neq j_2 : \mathbb{I}_{\mathcal{E}_f}^{W(j_1 j_2 j_1)} = \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 - \sum_{i_1, i_3=0}^{L-1} (F_{i_1 i_2 i_3}^2 + F_{i_1 i_2 i_3} F_{i_3 i_2 i_1})$$

из работы [77] для вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито. Варианты $j_1 = j_2 \neq j_3$ и $j_1 \neq j_2 = j_3$ аналогичны.

Кратность $k = 4$

Пусть $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^4)$ и $f_{\bar{J}}(\cdot) = \langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}} \in L_2^{s(j_1 j_2 j_3 j_4)}(\mathbb{T}^4)$ — соответствующая симметризованная функция (4.57), $\bar{J} = (j_1 j_2 j_3 j_4)$, а $F_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ и $\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ — их коэффициенты разложения (4.4) и (4.63) соответственно, $i_1, i_2, i_3, i_4 = 0, 1, 2, \dots$. Применим формулу (5.69) и укажем частные случаи, ограничиваясь только перечисленными в табл. 5.4 вариантами значений j_1, j_2, j_3, j_4 :

j_1, j_2, j_3, j_4 попарно различны ($M_{\bar{J}}^2 = 1$):

$$I_{\varepsilon_f}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} = \|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 - \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^2,$$

$$f_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3, t_4) = f(t_1, t_2, t_3, t_4), \quad \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4} = F_{i_1 i_2 i_3 i_4};$$

$j_1 = j_2$; j_2, j_3, j_4 различны ($M_{\bar{J}}^2 = 2$):

$$I_{\varepsilon_f}^{W(j_1 j_1 j_3 j_4)} = 2 \left(\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 - \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^2 \right),$$

$$f_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{f(t_1, t_2, t_3, t_4) + f(t_2, t_1, t_3, t_4)}{2}, \quad \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \frac{F_{i_1 i_2 i_3 i_4} + F_{i_2 i_1 i_3 i_4}}{2};$$

$j_2 = j_3$; j_1, j_2, j_4 различны ($M_{\bar{J}}^2 = 2$):

$$I_{\varepsilon_f}^{W(j_1 j_2 j_2 j_4)} = 2 \left(\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 - \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^2 \right),$$

$$f_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{f(t_1, t_2, t_3, t_4) + f(t_1, t_3, t_2, t_4)}{2}, \quad \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \frac{F_{i_1 i_2 i_3 i_4} + F_{i_1 i_3 i_2 i_4}}{2};$$

$j_3 = j_4$; j_1, j_2, j_3 различны ($M_{\bar{J}}^2 = 2$):

$$I_{\varepsilon_f}^{W(j_1 j_2 j_3 j_3)} = 2 \left(\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 - \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^2 \right),$$

$$f_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{f(t_1, t_2, t_3, t_4) + f(t_1, t_2, t_4, t_3)}{2}, \quad \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \frac{F_{i_1 i_2 i_3 i_4} + F_{i_1 i_2 i_4 i_3}}{2};$$

$j_1 = j_2 \neq j_3 = j_4$ ($M_{\bar{J}}^2 = 4$):

$$I_{\varepsilon_f}^{W(j_1 j_1 j_3 j_3)} = 4 \left(\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 - \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^2 \right),$$

$$f_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{4} (f(t_1, t_2, t_3, t_4) + f(t_2, t_1, t_3, t_4) + f(t_1, t_2, t_4, t_3) + f(t_2, t_1, t_4, t_3)),$$

$$\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \frac{F_{i_1 i_2 i_3 i_4} + F_{i_2 i_1 i_3 i_4} + F_{i_1 i_2 i_4 i_3} + F_{i_2 i_1 i_4 i_3}}{4};$$

$j_1 = j_2 = j_3 \neq j_4$ ($M_{\bar{J}}^2 = 6$):

$$I_{\varepsilon_f}^{W(j_1 j_1 j_1 j_4)} = 6 \left(\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 - \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^2 \right),$$

$$f_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{6} (f(t_1, t_2, t_3, t_4) + f(t_2, t_1, t_3, t_4) + f(t_3, t_2, t_1, t_4) + \\ + f(t_1, t_3, t_2, t_4) + f(t_2, t_3, t_1, t_4) + f(t_3, t_1, t_2, t_4)),$$

$$\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \frac{F_{i_1 i_2 i_3 i_4} + F_{i_2 i_1 i_3 i_4} + F_{i_3 i_2 i_1 i_4} + F_{i_1 i_3 i_2 i_4} + F_{i_2 i_3 i_1 i_4} + F_{i_3 i_1 i_2 i_4}}{6};$$

$j_1 \neq j_2 = j_3 = j_4$ ($M_f^2 = 6$) :

$$I_{\varepsilon_f}^{W(j_1 j_2 j_2 j_2)} = 6 \left(\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 - \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^2 \right),$$

$$f_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{6} (f(t_1, t_2, t_3, t_4) + f(t_1, t_3, t_2, t_4) + f(t_1, t_4, t_3, t_2) + \\ + f(t_1, t_2, t_4, t_3) + f(t_1, t_3, t_4, t_2) + f(t_1, t_4, t_2, t_3)),$$

$$\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \frac{F_{i_1 i_2 i_3 i_4} + F_{i_1 i_3 i_2 i_4} + F_{i_1 i_4 i_3 i_2} + F_{i_1 i_2 i_4 i_3} + F_{i_1 i_3 i_4 i_2} + F_{i_1 i_4 i_2 i_3}}{6};$$

$j_1 = j_2 = j_3 = j_4$ ($M_f^2 = 24$) :

$$I_{\varepsilon_f}^{W(j_1 j_1 j_1 j_1)} = 24 \left(\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 - \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^2 \right),$$

$$f_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{24} (f(t_1, t_2, t_3, t_4) + f(t_2, t_1, t_3, t_4) + f(t_3, t_2, t_1, t_4) + f(t_4, t_2, t_3, t_1) + \\ + f(t_1, t_3, t_2, t_4) + f(t_2, t_3, t_1, t_4) + f(t_3, t_1, t_2, t_4) + f(t_4, t_3, t_2, t_1) + \\ + f(t_1, t_4, t_3, t_2) + f(t_2, t_4, t_3, t_1) + f(t_3, t_4, t_1, t_2) + f(t_4, t_1, t_3, t_2) + \\ + f(t_1, t_2, t_4, t_3) + f(t_2, t_1, t_4, t_3) + f(t_3, t_2, t_4, t_1) + f(t_4, t_2, t_1, t_3) + \\ + f(t_1, t_3, t_4, t_2) + f(t_2, t_3, t_4, t_1) + f(t_3, t_1, t_4, t_2) + f(t_4, t_3, t_1, t_2) + \\ + f(t_1, t_4, t_2, t_3) + f(t_2, t_4, t_1, t_3) + f(t_3, t_4, t_2, t_1) + f(t_4, t_1, t_2, t_3)),$$

$$\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \frac{1}{6} (F_{i_1 i_2 i_3 i_4} + F_{i_2 i_1 i_3 i_4} + F_{i_3 i_2 i_1 i_4} + F_{i_4 i_2 i_3 i_1} + F_{i_1 i_3 i_2 i_4} + F_{i_2 i_3 i_1 i_4} + F_{i_3 i_1 i_2 i_4} + F_{i_4 i_3 i_2 i_1} + \\ + F_{i_1 i_4 i_3 i_2} + F_{i_2 i_4 i_3 i_1} + F_{i_3 i_4 i_1 i_2} + F_{i_4 i_1 i_3 i_2} + F_{i_1 i_2 i_4 i_3} + F_{i_2 i_1 i_4 i_3} + F_{i_3 i_2 i_4 i_1} + F_{i_4 i_2 i_1 i_3} + \\ + F_{i_1 i_3 i_4 i_2} + F_{i_2 i_3 i_4 i_1} + F_{i_3 i_1 i_4 i_2} + F_{i_4 i_3 i_1 i_2} + F_{i_1 i_4 i_2 i_3} + F_{i_2 i_4 i_1 i_3} + F_{i_3 i_4 i_2 i_1} + F_{i_4 i_1 i_2 i_3}).$$

Ортогональное разложение (5.42) дает возможность представить среднеквадратическую погрешность аппроксимации кратных стохастических интегралов Ито иначе, а именно

$j_1 = j_2$; j_2, j_3, j_4 различны :

$$I_{\varepsilon_f}^{W(j_1 j_1 j_3 j_4)} = 2 \|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 - \sum_{i_1, i_3, i_4=0}^{L-1} \sum_{i_2=i_1}^{L-1} \frac{(F_{i_1 i_2 i_3 i_4} + F_{i_2 i_1 i_3 i_4})^2}{1 + \delta_{i_1 i_2}} = \\ = 2 \|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 - \sum_{i_1, i_3, i_4=0}^{L-1} \sum_{i_2=i_1}^{L-1} \frac{(2\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4})^2}{1 + \delta_{i_1 i_2}},$$

$j_2 = j_3$; j_1, j_2, j_4 различны :

$$I_{\varepsilon_f}^{W(j_1 j_2 j_2 j_4)} = 2 \|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 - \sum_{i_1, i_2, i_4=0}^{L-1} \sum_{i_3=i_2}^{L-1} \frac{(F_{i_1 i_2 i_3 i_4} + F_{i_1 i_3 i_2 i_4})^2}{1 + \delta_{i_2 i_3}} = \\ = 2 \|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 - \sum_{i_1, i_2, i_4=0}^{L-1} \sum_{i_3=i_2}^{L-1} \frac{(2\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4})^2}{1 + \delta_{i_2 i_3}},$$

$j_3 = j_4$; j_1, j_2, j_3 различны :

$$I_{\varepsilon_f}^{W(j_1 j_2 j_3 j_3)} = 2 \|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 - \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{L-1} \sum_{i_4=i_3}^{L-1} \frac{(F_{i_1 i_2 i_3 i_4} + F_{i_1 i_2 i_4 i_3})^2}{1 + \delta_{i_3 i_4}} =$$

$$= 2\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 - \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{L-1} \sum_{i_4=i_3}^{L-1} \frac{(2\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4})^2}{1 + \delta_{i_3 i_4}},$$

$$j_1 = j_2 \neq j_3 = j_4 :$$

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon_f}^{W(j_1 j_1 j_3 j_3)} &= 4\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 - \sum_{i_1, i_3=0}^{L-1} \sum_{i_2=i_1}^{L-1} \sum_{i_4=i_3}^{L-1} \frac{(F_{i_1 i_2 i_3 i_4} + F_{i_2 i_1 i_3 i_4} + F_{i_1 i_2 i_4 i_3} + F_{i_2 i_1 i_4 i_3})^2}{(1 + \delta_{i_1 i_2})(1 + \delta_{i_3 i_4})} = \\ &= 4\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 - \sum_{i_1, i_3=0}^{L-1} \sum_{i_2=i_1}^{L-1} \sum_{i_4=i_3}^{L-1} \frac{(4\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4})^2}{(1 + \delta_{i_1 i_2})(1 + \delta_{i_3 i_4})}, \end{aligned}$$

$$j_1 = j_2 = j_3 \neq j_4 :$$

$$I_{\varepsilon_f}^{W(j_1 j_1 j_1 j_4)} = 6\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 - \sum_{i_1, i_4=0}^{L-1} \sum_{i_2=i_1}^{L-1} \sum_{i_3=i_2}^{L-1} \frac{(6\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4})^2}{1 + \delta_{i_1 i_2} + \delta_{i_2 i_3} + \delta_{i_1 i_3} + 2\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_2 i_3}},$$

$$j_1 \neq j_2 = j_3 = j_4 :$$

$$I_{\varepsilon_f}^{W(j_1 j_2 j_2 j_2)} = 6\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 - \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} \sum_{i_3=i_2}^{L-1} \sum_{i_4=i_3}^{L-1} \frac{(6\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4})^2}{1 + \delta_{i_2 i_3} + \delta_{i_3 i_4} + \delta_{i_2 i_4} + 2\delta_{i_2 i_3} \delta_{i_3 i_4}},$$

$$j_1 = j_2 = j_3 = j_4 :$$

$$I_{\varepsilon_f}^{W(j_1 j_1 j_1 j_1)} = 24\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 - \sum_{i_1=0}^{L-1} \sum_{i_2=i_1}^{L-1} \sum_{i_3=i_2}^{L-1} \sum_{i_4=i_3}^{L-1} \frac{(24\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4})^2}{\Delta_{i_1 i_2 i_3 i_4}},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{i_1 i_2 i_3 i_4} &= 1 + \delta_{i_1 i_2} + \delta_{i_1 i_3} + \delta_{i_1 i_4} + \delta_{i_2 i_3} + \delta_{i_2 i_4} + \delta_{i_3 i_4} + \\ &+ 2\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_2 i_3} + 2\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_2 i_4} + 2\delta_{i_1 i_3} \delta_{i_3 i_4} + 2\delta_{i_2 i_3} \delta_{i_3 i_4} + \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} + \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} + \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3} + 6\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_2 i_3} \delta_{i_3 i_4}. \end{aligned}$$

Например, с помощью несложных преобразований можно показать, что при условии

$j_1 = j_2 \neq j_3 = j_4$ справедливо выражение

$$\begin{aligned} 4 \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^2 &= \frac{1}{4} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} (F_{i_1 i_2 i_3 i_4} + F_{i_2 i_1 i_3 i_4} + F_{i_1 i_2 i_4 i_3} + F_{i_2 i_1 i_4 i_3})^2 = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} (F_{i_1 i_2 i_3 i_4}^2 + F_{i_2 i_1 i_4 i_3}^2 + F_{i_2 i_1 i_3 i_4}^2 + F_{i_1 i_2 i_4 i_3}^2) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} F_{i_1 i_2 i_3 i_4} F_{i_2 i_1 i_3 i_4} + \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} F_{i_1 i_2 i_3 i_4} F_{i_1 i_2 i_4 i_3} + \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} F_{i_1 i_2 i_3 i_4} F_{i_2 i_1 i_4 i_3} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} F_{i_2 i_1 i_3 i_4} F_{i_1 i_2 i_4 i_3} + \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} F_{i_2 i_1 i_3 i_4} F_{i_2 i_1 i_4 i_3} + \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} F_{i_1 i_2 i_4 i_3} F_{i_2 i_1 i_4 i_3} = \\ &= \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} F_{i_1 i_2 i_3 i_4}^2 + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} F_{i_1 i_2 i_3 i_4} F_{i_2 i_1 i_3 i_4} + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} F_{i_1 i_2 i_3 i_4} F_{i_1 i_2 i_4 i_3} + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} F_{i_1 i_2 i_3 i_4} F_{i_2 i_1 i_4 i_3} = \\ &= \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} F_{i_1 i_2 i_3 i_4} (F_{i_1 i_2 i_3 i_4} + F_{i_2 i_1 i_3 i_4}) + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} F_{i_1 i_2 i_3 i_4} (F_{i_1 i_2 i_4 i_3} + F_{i_2 i_1 i_4 i_3}), \end{aligned}$$

т.е. получаем известное выражение из работы [77] для вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации повторного стохастического интеграла Ито от функции с условием

(4.61):

$$j_1 = j_2 \neq j_3 = j_4 : I_{\varepsilon_f}^{W(j_1 j_1 j_3 j_3)} = \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 - \\ - \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} F_{i_1 i_2 i_3 i_4} (F_{i_1 i_2 i_3 i_4} + F_{i_2 i_1 i_3 i_4}) - \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} F_{i_1 i_2 i_3 i_4} (F_{i_1 i_2 i_4 i_3} + F_{i_2 i_1 i_4 i_3}).$$

Перейдем к аппроксимации кратных стохастических интегралов Стратоновича (5.20) по винеровским процессам (см. разд. 5.2). На основе разложения (5.51), полученного в теореме 5.4, записываем

$$S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) \approx S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \tilde{f}(\cdot) = \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{L-1} F_{i_1 \dots i_k} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \dots \zeta_{i_k}^{(j_k)}, \quad (5.71)$$

где функция $f(\cdot) \in L_2^{\overline{\text{tr}}(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ приближенно представляется с помощью выражения (4.95) и остальные обозначения соответствуют формуле (5.68). Аналогично можно записать более общую формулу вида (5.67).

Согласно теореме 5.4 кратный стохастический интеграл Стратоновича представляется в виде суммы кратных стохастических интегралов Ито и своего математического ожидания, при этом все слагаемые из правой части формулы (5.52) ортогональны в пространстве \mathcal{L}_2 :

$$S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) - S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \tilde{f}(\cdot) = S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} (f(\cdot) - \tilde{f}(\cdot)) = \\ = \sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor \#(j_{(1)}, \bar{J})/2 \rfloor} \dots \sum_{\nu_{(J)}=0}^{\lfloor \#(j_{(J)}, \bar{J})/2 \rfloor} r_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)} \rangle} I_{\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\bar{J} \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)} \rangle}} (f_{\bar{J}, \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)} \rangle}(\cdot) - \tilde{f}_{\bar{J}, \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)} \rangle}(\cdot)).$$

Отсюда следует формула для среднеквадратической погрешности аппроксимации кратного стохастического интеграла Стратоновича:

$$S_{\varepsilon_f}^{W(j_1 \dots j_k)} = E(S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) - S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \tilde{f}(\cdot))^2 = \\ = \sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor \#(j_{(1)}, \bar{J})/2 \rfloor} \dots \sum_{\nu_{(J)}=0}^{\lfloor \#(j_{(J)}, \bar{J})/2 \rfloor} r_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)} \rangle}^2 I_{\varepsilon_{f_{\bar{J}, \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)} \rangle}}^{\bar{J} \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)} \rangle}}, \quad (5.72)$$

где величины $r_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)} \rangle}$ определяются соотношением (4.70), а $I_{\varepsilon_{f_{\bar{J}, \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)} \rangle}}^{\bar{J} \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)} \rangle}}$ — среднеквадратические погрешности аппроксимации соответствующих разложению (5.52) кратных стохастических интегралов Ито. При условии $\nu_{(1)} = \dots = \nu_{(J)} = 0$ применяется формула (5.69):

$$I_{\varepsilon_{f_{\bar{J}, \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)} \rangle}}^{\bar{J} \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)} \rangle}} = I_{\varepsilon_f}^{W(j_1 \dots j_k)},$$

а для остальных значений $\nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)}$ в общем случае должна использоваться формула (5.70). В предельном варианте используется более простое обозначение: $I_{\varepsilon_{f_{\bar{J}, \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)} \rangle}}^{\bar{J} \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)} \rangle}} = \varepsilon_{f_{\bar{J}, \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)} \rangle}}$.

Если коэффициенты разложения (4.4) функции $f(\cdot)$ определены неточно, то получаем формулу, аналогичную по структуре формуле (5.72), но в которой все среднеквадратические погрешности аппроксимации кратных стохастических интегралов Ито, формирующие разложение (5.52), вычисляются по формуле (5.70):

$$S_{\varepsilon_f}^{W(j_1 \dots j_k)} = E(S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) - S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \tilde{f}(\cdot))^2 = \\ = \sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor \#(j_{(1)}, \bar{J})/2 \rfloor} \dots \sum_{\nu_{(J)}=0}^{\lfloor \#(j_{(J)}, \bar{J})/2 \rfloor} r_{\langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)} \rangle}^2 I_{\varepsilon_{f_{\bar{J}, \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)} \rangle}}^{\bar{J} \langle \nu_{(1)}, \dots, \nu_{(J)} \rangle}}, \quad (5.73)$$

где $\bar{f}(\cdot)$ представляет собой функцию, полученную в результате обратного спектрального преобразования (4.5) из усеченной спектральной характеристики \bar{F} с неточно найденными элементами.

Пример 5.7. Записать выражения для среднеквадратических погрешностей аппроксимации стохастических интегралов Ито ${}^I\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(212)}f(\cdot)$ и Стратоновича ${}^S\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(212)}f(\cdot)$ кратности $k = 3$ при использовании формул (5.68) и (5.71) с заданным порядком усечения L , $f(\cdot) \in L_2^{\bar{\text{tr}}(212)}(\mathbb{T}^3)$.

□ В примере 5.3 (см. также пример 5.2 и п. 5 замечаний 5.3) получено следующее представление:

$${}^S\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(212)}f(\cdot) = \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(2)} \zeta_{i_2}^{(1)} \zeta_{i_3}^{(2)} = \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)} + \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_1} \zeta_{i_2}^{(1)},$$

в котором $F_{i_1 i_2 i_3}$ — коэффициенты разложения (4.4) функции $f(\cdot)$, а $\zeta_{i_1}^{(2)}$ и $\zeta_{i_2}^{(1)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, что соответствует разложению (5.52):

$${}^S\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(212)}f(\cdot) = {}^I\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(212)}f(\cdot) + \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(1)}f_{\langle 1 \rangle}(\cdot),$$

где

$$f_{\langle 1 \rangle}(t_2) = \int_{\mathbb{T}} f(t_1, t_2, t_1) dt_1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} {}^I\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(212)}f(\cdot) &\approx \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{L-1} F_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}, & \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(1)}f_{\langle 1 \rangle}(\cdot) &\approx \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} F_{i_1 i_2 i_1} \zeta_{i_2}^{(1)}, \\ {}^S\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(212)}f(\cdot) &\approx \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{L-1} F_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(2)} \zeta_{i_2}^{(1)} \zeta_{i_3}^{(2)} = \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{L-1} F_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)} + \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} F_{i_1 i_2 i_1} \zeta_{i_2}^{(1)} \end{aligned}$$

и среднеквадратическая погрешность аппроксимации кратного стохастического интеграла Ито ${}^I\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(212)}\mathbb{k}(\cdot)$ вычисляется по формуле (5.69):

$$\varepsilon_f^{W(212)} = 2\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 - \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} \sum_{i_3=i_1}^{L-1} \frac{(F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_3 i_2 i_1})^2}{1 + \delta_{i_1 i_3}},$$

учитывая значение $M_{\bar{J}}^2 = 2$ для мультимножества $\bar{J} = (212)$ (см. пример 5.3). В приведенном выражении $f_{\bar{J}}(\cdot)$ — это симметризованная функция (4.57).

Для среднеквадратической погрешности аппроксимации стохастического интеграла $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(1)}f_{\langle 1 \rangle}(\cdot)$ формула (5.69) в общем случае не подходит, поскольку величины

$$(\bar{F}_{\langle 1 \rangle})_{i_2} = \sum_{i_1=0}^{L-1} F_{i_1 i_2 i_1}, \quad i_2 = 0, 1, \dots, L-1,$$

могут не совпадать с коэффициентами разложения функции $f_{\langle 1 \rangle}(\cdot)$ по функциям базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$, которые по определению пространства $L_2^{\bar{\text{tr}}(212)}(\mathbb{T}^3)$ представляются в виде (см. разд. 4.4 и 5.4)

$$(\tilde{F}_{\langle 1 \rangle})_{i_2} = \sum_{i_1=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_1}, \quad i_2 = 0, 1, \dots, L-1.$$

Здесь применяется формула (5.70), или согласно свойству (2.42) изометрии Ито — формула (1.118):

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon_{f(1)}}^{W(1)} &= \|f_{(1)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 - \|\tilde{F}_{(1)}\|^2 + \|\tilde{F}_{(1)} - \bar{F}_{(1)}\|^2 = \\ &= \|f_{(1)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 - \sum_{i_2=0}^{L-1} \left(\sum_{i_1=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_1} \right)^2 + \sum_{i_2=0}^{L-1} \left(\sum_{i_1=L}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_1} \right)^2. \end{aligned}$$

Получаем искомый результат:

$$\begin{aligned} S_{\varepsilon_f}^{W(212)} &= I_{\varepsilon_f}^{W(212)} + I_{\varepsilon_{f(1)}}^{W(1)} = 2\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|f_{(1)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 - \\ &- \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} \sum_{i_3=i_1}^{L-1} \frac{(F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_3 i_2 i_1})^2}{1 + \delta_{i_1 i_3}} - \sum_{i_2=0}^{L-1} \left(\sum_{i_1=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_1} \right)^2 + \sum_{i_2=0}^{L-1} \left(\sum_{i_1=L}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_1} \right)^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай, когда $f(\cdot) = \mathbb{k}(\cdot)$ — это функция (4.15):

$$\mathbb{k}(t_1, t_2, t_3) = 1(t_3 - t_2)1(t_2 - t_1), \quad \|\mathbb{k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 = \frac{1}{6},$$

для которой справедливо равенство (4.62):

$$2\|\mathbb{k}_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 = \|\mathbb{k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{k}_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3) = \frac{1(t_2 - t_1)1(t_3 - t_2) + 1(t_2 - t_3)1(t_1 - t_2)}{2},$$

т.е.

$$I_{\varepsilon_{\mathbb{k}}}^{W(212)} = \frac{1}{6} - \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} \sum_{i_3=i_1}^{L-1} \frac{(\mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3} + \mathbb{K}_{i_3 i_2 i_1})^2}{1 + \delta_{i_1 i_3}},$$

где $\mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3}$ — коэффициенты разложения (4.16) и, кроме того, $\mathbb{T} = [0, 1]$.

Как показано в разд. 5.6, $\mathbb{k}_{(1)}(t_2) \equiv 0$, поэтому $\|\mathbb{k}_{(1)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = 0$ и эта функция имеет нулевые коэффициенты разложения $(\tilde{\mathbb{K}}_{(1)})_{i_2}$, следовательно,

$$I_{\varepsilon_{\mathbb{k}_{(1)}}}^{W(1)} = \|\tilde{\mathbb{K}}_{(1)}\|^2 = \sum_{i_2=0}^{L-1} \left(\sum_{i_1=0}^{L-1} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_1} \right)^2,$$

поэтому

$$S_{\varepsilon_{\mathbb{k}}}^{W(212)} = I_{\varepsilon_{\mathbb{k}}}^{W(212)} + I_{\varepsilon_{\mathbb{k}_{(1)}}}^{W(1)} = \frac{1}{6} - \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} \sum_{i_3=i_1}^{L-1} \frac{(\mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3} + \mathbb{K}_{i_3 i_2 i_1})^2}{1 + \delta_{i_1 i_3}} + \sum_{i_2=0}^{L-1} \left(\sum_{i_1=0}^{L-1} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_1} \right)^2. \quad \blacksquare$$

Пример 5.8. Записать выражения для среднеквадратических погрешностей аппроксимации стохастических интегралов Ито $I_{\mathcal{T}}^{W(1122)} f(\cdot)$ и Стратоновича $S_{\mathcal{T}}^{W(1122)} f(\cdot)$ кратности $k = 4$ при использовании формул (5.68) и (5.71) с заданным порядком усечения L , $f(\cdot) \in L_2^{\text{tr}(1122)}(\mathbb{T}^4)$.

□ Возьмем за основу пример 5.4 (см. также п. 5 замечаний 5.3):

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{T}}^{W(1122)} f(\cdot) &= \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3 i_4} \zeta_{i_1}^{(1)} \zeta_{i_2}^{(1)} \zeta_{i_3}^{(2)} \zeta_{i_4}^{(2)} = \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3 i_4} \zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)} * \zeta_{i_4}^{(2)} + \\ &+ \sum_{i_1, i_3, i_4=0}^{\infty} F_{i_1 i_1 i_3 i_4} \zeta_{i_3}^{(2)} * \zeta_{i_4}^{(2)} + \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3 i_3} \zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} + \sum_{i_1, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_1 i_3 i_3}, \end{aligned}$$

где $F_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ — коэффициенты разложения (4.4) функции $f(\cdot)$, а $\zeta_{i_1}^{(1)}$ и $\zeta_{i_2}^{(2)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение.

Все слагаемые в правой части последнего равенства отражают разложение (5.52):

$$S_{\mathcal{T}}^{W(1122)} f(\cdot) = I_{\mathcal{T}}^{W(1122)} f(\cdot) + I_{\mathcal{T}}^{W(22)} f_{(1,0)}(\cdot) + I_{\mathcal{T}}^{W(11)} f_{(0,1)}(\cdot) + f_{(1,1)},$$

в котором

$$f_{(1,0)}(t_3, t_4) = \int_{\mathbb{T}} f(t_1, t_1, t_3, t_4) dt_1, \quad f_{(0,1)}(t_1, t_2) = \int_{\mathbb{T}} f(t_1, t_2, t_3, t_3) dt_3,$$

$$f_{(1,1)} = \int_{\mathbb{T}^2} f(t_1, t_1, t_3, t_3) dt_1 dt_3.$$

Далее аппроксимируем все записанные выше ряды частичными суммами:

$$\begin{aligned} {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(1122)} f(\cdot) &\approx \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} F_{i_1 i_2 i_3 i_4} \zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)} * \zeta_{i_4}^{(2)}, \\ {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(22)} f_{(1,0)}(\cdot) &\approx \sum_{i_1, i_3, i_4=0}^{L-1} F_{i_1 i_1 i_3 i_4} \zeta_{i_3}^{(2)} * \zeta_{i_4}^{(2)}, \\ {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(11)} f_{(0,1)}(\cdot) &\approx \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{L-1} F_{i_1 i_2 i_3 i_3} \zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)}, \\ {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(1122)} f(\cdot) &\approx \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} F_{i_1 i_2 i_3 i_4} \zeta_{i_1}^{(1)} \zeta_{i_2}^{(1)} \zeta_{i_3}^{(2)} \zeta_{i_4}^{(2)} = \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} F_{i_1 i_2 i_3 i_4} \zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)} * \zeta_{i_4}^{(2)} + \\ &+ \sum_{i_1, i_3, i_4=0}^{L-1} F_{i_1 i_1 i_3 i_4} \zeta_{i_3}^{(2)} * \zeta_{i_4}^{(2)} + \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{L-1} F_{i_1 i_2 i_3 i_3} \zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} + \sum_{i_1, i_3=0}^{L-1} F_{i_1 i_1 i_3 i_3}. \end{aligned}$$

Для среднеквадратической погрешности аппроксимации кратного стохастического интеграла Ито ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(1122)} \mathbb{k}(\cdot)$ применим формулу (5.69), представляя ее в виде

$${}^I \varepsilon_f^{W(1122)} = 4 \left(\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 - \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^2 \right),$$

где величина $M_{\bar{J}}^2 = 4$ соответствует мультимножеству $\bar{J} = (1122)$ (см. примеры 4.6 и 5.4), $f_{\bar{J}}(\cdot)$ — симметризованная функция (4.57) с коэффициентами разложения

$$\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \frac{F_{i_1 i_2 i_3 i_4} + F_{i_2 i_1 i_3 i_4} + F_{i_1 i_2 i_4 i_3} + F_{i_2 i_1 i_4 i_3}}{4}.$$

Стохастические интегралы Ито кратности $k = 2$ требуют применения формулы (5.70), так как величины

$$(\bar{F}_{(1,0)})_{i_3 i_4} = \sum_{i_1=0}^{L-1} F_{i_1 i_1 i_3 i_4}, \quad (\bar{F}_{(0,1)})_{i_1 i_2} = \sum_{i_3=0}^{L-1} F_{i_1 i_2 i_3 i_3}$$

в общем случае не совпадают с коэффициентами разложения соответствующих функций $f_{(1,0)}(\cdot)$ и $f_{(0,1)}(\cdot)$ по функциям базисной системы $\{q(i_1, \cdot) \otimes q(i_2, \cdot)\}_{i,j=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T}^2)$.

Для последних справедливы соотношения

$$(\tilde{F}_{(1,0)})_{i_3 i_4} = \sum_{i_1=0}^{\infty} F_{i_1 i_1 i_3 i_4}, \quad (\tilde{F}_{(0,1)})_{i_1 i_2} = \sum_{i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_3 i_3},$$

в которых, как и выше, $i_1, i_2, i_3, i_4 = 0, 1, \dots, L-1$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} {}^I \varepsilon_{f_{(1,0)}}^{W(22)} &= 2 \left(\|f_{(22), (1,0)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 - \|\tilde{F}_{(22), (1,0)}\|^2 + \|\tilde{F}_{(22), (1,0)} - \bar{F}_{(22), (1,0)}\|^2 \right) = \\ &= 2 \|f_{(22), (1,0)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 - 2 \sum_{i_3, i_4=0}^{L-1} \left(\sum_{i_1=0}^{\infty} \frac{F_{i_1 i_1 i_3 i_4} + F_{i_1 i_1 i_4 i_3}}{2} \right)^2 + 2 \sum_{i_3, i_4=0}^{L-1} \left(\sum_{i_1=L}^{\infty} \frac{F_{i_1 i_1 i_3 i_4} + F_{i_1 i_1 i_4 i_3}}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

где полусумма $(F_{i_1 i_1 i_3 i_4} + F_{i_1 i_1 i_4 i_3})/2$ определяет коэффициенты разложения (4.63) симметризованной функции $f_{(22),\langle 1,0 \rangle}(\cdot)$ по отношению к $f_{\langle 1,0 \rangle}(\cdot)$ при $M_{(22)} = 2$. Совершенно аналогично

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon_{f_{(0,1)}}}^{W(11)} &= 2(\|f_{(11),\langle 0,1 \rangle}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 - \|\tilde{F}_{(11),\langle 0,1 \rangle}\|^2 + \|\tilde{F}_{(11),\langle 0,1 \rangle} - \bar{F}_{(11),\langle 0,1 \rangle}\|^2) = \\ &= 2\|f_{(11),\langle 0,1 \rangle}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 - 2 \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} \left(\sum_{i_3=0}^{\infty} \frac{F_{i_1 i_2 i_3 i_3} + F_{i_2 i_1 i_3 i_3}}{2} \right)^2 + 2 \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} \left(\sum_{i_3=L}^{\infty} \frac{F_{i_1 i_2 i_3 i_3} + F_{i_2 i_1 i_3 i_3}}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Наконец,

$$\varepsilon_{f_{(1,1)}} = \left(\sum_{i_1, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_1 i_3 i_3} - \sum_{i_1, i_3=0}^{L-1} F_{i_1 i_1 i_3 i_3} \right)^2,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} S_{\varepsilon_f}^{W(1122)} &= I_{\varepsilon_f}^{W(1122)} + I_{\varepsilon_{f_{(1,0)}}}^{W(22)} + I_{\varepsilon_{f_{(0,1)}}}^{W(11)} + \varepsilon_{f_{(1,1)}} = 4\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 + \\ &+ 2\|f_{(22),\langle 1,0 \rangle}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 + 2\|f_{(11),\langle 0,1 \rangle}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 - 4 \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^2 - \\ &- 2 \sum_{i_3, i_4=0}^{L-1} \left(\sum_{i_1=0}^{\infty} \frac{F_{i_1 i_1 i_3 i_4} + F_{i_1 i_1 i_4 i_3}}{2} \right)^2 + 2 \sum_{i_3, i_4=0}^{L-1} \left(\sum_{i_1=L}^{\infty} \frac{F_{i_1 i_1 i_3 i_4} + F_{i_1 i_1 i_4 i_3}}{2} \right)^2 - \\ &- 2 \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} \left(\sum_{i_3=0}^{\infty} \frac{F_{i_1 i_2 i_3 i_3} + F_{i_2 i_1 i_3 i_3}}{2} \right)^2 + 2 \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} \left(\sum_{i_3=L}^{\infty} \frac{F_{i_1 i_2 i_3 i_3} + F_{i_2 i_1 i_3 i_3}}{2} \right)^2 + \\ &+ \left(\sum_{i_1, i_3=0}^{\infty} F_{i_1 i_1 i_3 i_3} - \sum_{i_1, i_3=0}^{L-1} F_{i_1 i_1 i_3 i_3} \right)^2. \end{aligned}$$

Как и в примере 5.8, перейдем к частному случаю $f(\cdot) = \mathbb{k}(\cdot)$, а именно к функции (4.15) и положим $\mathbb{T} = [0, 1]$:

$$\mathbb{k}(t_1, t_2, t_3, t_4) = 1(t_4 - t_3)1(t_3 - t_2)1(t_2 - t_1), \quad \|\mathbb{k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 = \frac{1}{24},$$

тогда согласно формуле (4.62) имеем

$$\begin{aligned} 4\|\mathbb{k}_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 &= \|\mathbb{k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^4)}^2 = \frac{1}{24}, \quad \mathbb{k}_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1(\min\{t_3, t_4\} - \max\{t_1, t_2\})}{4}, \\ I_{\varepsilon_{\mathbb{k}}}^{W(1122)} &= \frac{1}{24} - \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} \tilde{\mathbb{K}}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^2, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\mathbb{K}}_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \frac{\mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4} + \mathbb{K}_{i_2 i_1 i_3 i_4} + \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_4 i_3} + \mathbb{K}_{i_2 i_1 i_4 i_3}}{4},$$

а $\mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ — коэффициенты разложения (4.16).

Напомним (см. разд. 5.6), что

$$\begin{aligned} \mathbb{k}_{\langle 1,0 \rangle}(t_3, t_4) &= \frac{t_3 1(t_4 - t_3)}{2}, & \mathbb{k}_{(22),\langle 1,0 \rangle}(t_3, t_4) &= \frac{\min\{t_3, t_4\}}{4}, \\ \mathbb{k}_{\langle 0,1 \rangle}(t_1, t_2) &= \frac{(1 - t_2)1(t_2 - t_1)}{2}, & \mathbb{k}_{(11),\langle 0,1 \rangle}(t_1, t_2) &= \frac{1 - \max\{t_1, t_2\}}{4}, \end{aligned}$$

$$2\|\mathbb{k}_{(22),\langle 1,0 \rangle}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = 2\|\mathbb{k}_{(11),\langle 0,1 \rangle}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \frac{1}{48}, \quad \mathbb{k}_{\langle 1,1 \rangle} = \frac{1}{8}.$$

и, опираясь на результаты примера 4.5 и табл. 4.1, записываем

$$\mathbb{k}_{(22),\langle 1,0 \rangle}(\cdot) = \frac{1}{2} \langle \mathbb{k}_{10}(\cdot) \rangle_{(22)}, \quad \mathbb{k}_{(11),\langle 0,1 \rangle}(\cdot) = \frac{1}{2} \langle \mathbb{k}(\cdot) - \mathbb{k}_{01}(\cdot) \rangle_{(11)},$$

где $\mathbb{k}_{10}(t_3, t_4) = t_3 1(t_4 - t_3)$, $\mathbb{k}_{01}(t_1, t_2) = t_2 1(t_2 - t_1)$, $\mathbb{k}(t_1, t_2) = 1(t_2 - t_1)$.

Далее выразим коэффициенты разложения функций $\mathbb{k}_{(1,0)}(\cdot)$ и $\mathbb{k}_{(0,1)}(\cdot)$:

$$(\tilde{\mathbb{K}}_{(1,0)})_{i_3 i_4} = \sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3 i_4} = \frac{\mathbb{K}_{i_3 i_4}^{10}}{2}, \quad (\tilde{\mathbb{K}}_{(0,1)})_{i_1 i_2} = \sum_{i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_3} = \frac{(\mathbb{K}_{i_1 i_2} - \mathbb{K}_{i_1 i_2}^{01})}{2},$$

где $\mathbb{K}_{i_3 i_4}^{10}$, $\mathbb{K}_{i_1 i_2}^{01}$ и $\mathbb{K}_{i_1 i_2}$ — элементы спектральных характеристик \mathbb{K}^{10} , \mathbb{K}^{01} и \mathbb{K} функций $\mathbb{k}_{10}(\cdot)$, $\mathbb{k}_{01}(\cdot)$ и функции двух переменных $\mathbb{k}(\cdot)$ соответственно (см. разд. 4.1). Методика их нахождения относительно базисных систем (1.5) – (1.9) иллюстрируется в примере 4.4.

Подводя итог, получаем

$$\begin{aligned} s_{\varepsilon_{\mathbb{k}}}^{W(1122)} &= I_{\varepsilon_{\mathbb{k}}}^{W(1122)} + I_{\varepsilon_{\mathbb{k}(1,0)}}^{W(22)} + I_{\varepsilon_{\mathbb{k}(0,1)}}^{W(11)} + \varepsilon_{\mathbb{k}(1,1)} = \frac{1}{12} - \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{L-1} \tilde{\mathbb{K}}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^2 - \\ &- 2 \sum_{i_3, i_4=0}^{L-1} (\tilde{\mathbb{K}}_{(22), (1,0)})_{i_3 i_4}^2 + 2 \sum_{i_3, i_4=0}^{L-1} \left((\tilde{\mathbb{K}}_{(22), (1,0)})_{i_3 i_4} - (\bar{\mathbb{K}}_{(22), (1,0)})_{i_3 i_4} \right)^2 - \\ &- 2 \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} (\tilde{\mathbb{K}}_{(11), (0,1)})_{i_1 i_2}^2 + 2 \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} \left((\tilde{\mathbb{K}}_{(11), (0,1)})_{i_1 i_2} - (\bar{\mathbb{K}}_{(11), (0,1)})_{i_1 i_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{8} - \sum_{i_1, i_3=0}^{L-1} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3 i_3} \right)^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbb{K}}_{(22), (1,0)})_{i_3 i_4} &= \frac{(\tilde{\mathbb{K}}_{(1,0)})_{i_3 i_4} + (\tilde{\mathbb{K}}_{(1,0)})_{i_4 i_3}}{2} = \frac{\mathbb{K}_{i_3 i_4}^{10} + \mathbb{K}_{i_4 i_3}^{10}}{4}, \quad (\bar{\mathbb{K}}_{(22), (1,0)})_{i_3 i_4} = \sum_{i_1=0}^{L-1} \frac{\mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3 i_4} + \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_4 i_3}}{2}, \\ (\tilde{\mathbb{K}}_{(11), (0,1)})_{i_1 i_2} &= \frac{(\tilde{\mathbb{K}}_{(0,1)})_{i_1 i_2} + (\tilde{\mathbb{K}}_{(0,1)})_{i_2 i_1}}{2} = \frac{\mathbb{K}_{i_1 i_2} + \mathbb{K}_{i_2 i_1} - \mathbb{K}_{i_1 i_2}^{01} - \mathbb{K}_{i_2 i_1}^{01}}{4}, \\ (\bar{\mathbb{K}}_{(11), (0,1)})_{i_1 i_2} &= \sum_{i_3=0}^{L-1} \frac{\mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_3} + \mathbb{K}_{i_2 i_1 i_3 i_3}}{2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Замечания 5.6.

1. Конкретный вид формул (5.72) и (5.73) зависит от выбора представления кратных стохастических интегралов Ито по винеровским процессам: это может быть представление в виде ряда (5.32) или ортогонального разложения (5.42) (см. замечание 5.5).

Чтобы проиллюстрировать этот тезис, запишем эквивалентные выражения для среднеквадратической погрешности аппроксимации стохастического интеграла Стратоновича $s_{\mathcal{T}}^{W(212)} f(\cdot)$ кратности $k = 3$ (см. пример 5.7):

$$\begin{aligned} s_{\varepsilon_f}^{W(212)} &= 2 \|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|f_{(1)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 - \\ &- \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} \sum_{i_3=i_1}^{L-1} \frac{(2\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3})^2}{1 + \delta_{i_1 i_3}} - \sum_{i_2=0}^{L-1} \left(\sum_{i_1=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_1} \right)^2 + \sum_{i_2=0}^{L-1} \left(\sum_{i_1=L}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_1} \right)^2 = \\ &= 2 \left(\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^3)}^2 - \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{L-1} \tilde{F}_{i_1 i_2 i_3}^2 \right) + \|f_{(1)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 - \sum_{i_2=0}^{L-1} \left(\sum_{i_1=0}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_1} \right)^2 + \sum_{i_2=0}^{L-1} \left(\sum_{i_1=L}^{\infty} F_{i_1 i_2 i_1} \right)^2, \end{aligned}$$

где $\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3}$ — коэффициенты разложения (4.63) симметризованной функции $f_{\bar{J}}(\cdot)$:

$$\tilde{F}_{i_1 i_2 i_3} = \frac{F_{i_1 i_2 i_3} + F_{i_1 i_3 i_2}}{2}.$$

В качестве дополнительной иллюстрации достаточно сравнить выражения для среднеквадратических погрешностей аппроксимации кратных стохастических интегралов $s_{\mathcal{T}}^{W(212)} f(\cdot)$ и $s_{\mathcal{T}}^{W(1122)} f(\cdot)$ из примеров 5.7 и 5.8, так как для них используются разные формы записи.

2. Справедливо очевидное неравенство, которое связывает погрешности $I_{\varepsilon_f}^{W(j_1 \dots j_k)}$ и $S_{\varepsilon_f}^{W(j_1 \dots j_k)}$: $S_{\varepsilon_f}^{W(j_1 \dots j_k)} \geq I_{\varepsilon_f}^{W(j_1 \dots j_k)}$, и может оказаться, что $I_{\mathcal{J}_T}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) = S_{\mathcal{J}_T}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot)$, но $I_{\mathcal{J}_T}^{W(j_1 \dots j_k)} \tilde{f}(\cdot) \neq S_{\mathcal{J}_T}^{W(j_1 \dots j_k)} \tilde{f}(\cdot)$ и тогда $S_{\varepsilon_f}^{W(j_1 \dots j_k)} > I_{\varepsilon_f}^{W(j_1 \dots j_k)}$. Аналогичное неравенство справедливо для погрешностей $I_{\varepsilon_f}^{W(j_1 \dots j_k)}$ и $S_{\varepsilon_f}^{W(j_1 \dots j_k)}$.

Указанные неравенства дают возможность уменьшить погрешность аппроксимации некоторых кратных стохастических интегралов Стратоновича. Например (см. разд. 5.6), для функции $\mathbb{k}(\cdot)$, заданной формулой (4.15), при $k = 3$ известно, что $I_{\mathcal{J}_T}^{W(212)} \mathbb{k}(\cdot) = S_{\mathcal{J}_T}^{W(212)} \mathbb{k}(\cdot)$ и можно предложить следующую формулу для приближенного представления кратного стохастического интеграла Стратоновича, которая обеспечивает меньшую погрешность:

$$S_{\mathcal{J}_T}^{W(212)} \mathbb{k}(\cdot) \approx \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{L-1} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)},$$

где все обозначения соответствуют примеру 5.7.

3. Существует простая методика уменьшения среднеквадратических погрешностей аппроксимации кратных стохастических интегралов [76, 77, 300].

Рассмотрим сначала интегралы кратности $k = 1$. Пусть $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, F_i — коэффициенты разложения (1.11) функции $f(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$, $W(\cdot)$ — винеровский процесс, а ζ_i — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Тогда (см. выражение (2.28), а также п. 2 замечаний 2.3):

$$\mathcal{J}_T^W f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} f(t) dW(t) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i \zeta_i = \sum_{i=0}^{L-1} F_i \zeta_i + \sum_{i=L}^{\infty} F_i \zeta_i,$$

где каждое из двух слагаемых в правой части представляет собой гауссовскую случайную величину с известными характеристиками. В частности,

$$\mathbb{E} \sum_{i=L}^{\infty} F_i \zeta_i = 0, \quad \mathbb{E} \left(\sum_{i=L}^{\infty} F_i \zeta_i \right)^2 = \sum_{i=L}^{\infty} F_i^2.$$

Согласно свойству (1.25) сохранения нормы

$$\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} F_i^2 = \sum_{i=0}^{L-1} F_i^2 + \sum_{i=L}^{\infty} F_i^2, \quad \sum_{i=L}^{\infty} F_i^2 = \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 - \sum_{i=0}^{L-1} F_i^2,$$

поэтому, обозначая через ζ_L^* случайную величину, которая имеет стандартное нормальное распределение и при этом случайные величины $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{L-1}, \zeta_L^*$ независимы, получаем

$$\sum_{i=0}^{\infty} F_i \zeta_i = \sum_{i=0}^{L-1} F_i \zeta_i + F_L^* \zeta_L^*, \quad F_L^* = \left\{ \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 - \sum_{i=0}^{L-1} F_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \zeta_L^* = \frac{1}{F_L^*} \sum_{i=L}^{\infty} F_i \zeta_i,$$

а $(F_L^*)^2$ — это среднеквадратическая погрешность аппроксимации стохастического интеграла $\mathcal{J}_T^W f(\cdot)$, определяемая по формуле (5.69), при его приближенном представлении в виде (5.68).

Этот результат можно адаптировать к стохастическим интегралам кратности $k \geq 2$. Например, при $k = 2$ и $j_1 \neq j_2$ находим

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{J}_T}^{W(j_1 j_2)} f(\cdot) &= S_{\mathcal{J}_T}^{W(j_1 j_2)} f(\cdot) = \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} F_{i_1 i_2} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} = \\ &= F_{00} \zeta_0^{(j_1)} \zeta_0^{(j_2)} + \zeta_0^{(j_2)} \sum_{i=1}^{\infty} F_{i0} \zeta_i^{(j_1)} + \zeta_0^{(j_1)} \sum_{i=1}^{\infty} F_{0i} \zeta_i^{(j_2)} + \sum_{i_1, i_2=1}^{\infty} F_{i_1 i_2} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} = \end{aligned}$$

$$= F_{00} \zeta_0^{(j_1)} \zeta_0^{(j_2)} + \zeta_0^{(j_2)} \sum_{i=1}^{L-1} F_{i0} \zeta_i^{(j_1)} + \zeta_0^{(j_1)} \sum_{i=1}^{L-1} F_{0i} \zeta_i^{(j_2)} + \sum_{i_1, i_2=1}^{\infty} F_{i_1 i_2} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} + F_{L0}^* \zeta_L^{(j_1)*} \zeta_0^{(j_2)} + F_{0L}^* \zeta_0^{(j_1)} \zeta_L^{(j_2)*},$$

где $F_{i_1 i_2}$ — коэффициенты разложения (4.4) функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ по функциям базисной системы $\{q(i_1, \cdot) \otimes q(i_2, \cdot)\}_{i_1, i_2=0}^{\infty}$ и

$$F_{L0}^* = \left\{ \sum_{i=L}^{\infty} F_{i0}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad F_{0L}^* = \left\{ \sum_{i=L}^{\infty} F_{0i}^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

т.е.

$$\begin{aligned} {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} f(\cdot) &\approx F_{00} \zeta_0^{(j_1)} \zeta_0^{(j_2)} + \zeta_0^{(j_2)} \sum_{i=1}^{L-1} F_{i0} \zeta_i^{(j_1)} + \zeta_0^{(j_1)} \sum_{i=1}^{L-1} F_{0i} \zeta_i^{(j_2)} + \sum_{i_1, i_2=1}^{L-1} F_{i_1 i_2} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} + \\ &+ F_{L0}^* \zeta_L^{(j_1)*} \zeta_0^{(j_2)} + F_{0L}^* \zeta_0^{(j_1)} \zeta_L^{(j_2)*} = \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} F_{i_1 i_2} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} + F_{L0}^* \zeta_L^{(j_1)*} \zeta_0^{(j_2)} + F_{0L}^* \zeta_0^{(j_1)} \zeta_L^{(j_2)*}. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Предполагается, что в приведенных формулах случайные величины $\zeta_i^{(j)}$, $i = 0, 1, \dots, L-1$, и $\zeta_L^{(j)*}$ имеют стандартное нормальное распределение и независимы в совокупности для $j = j_1$ и $j = j_2$. Среднеквадратическая погрешность аппроксимации в такой ситуации выражается через погрешность аппроксимации функции $g(t_1, t_2) = f(t_1, t_2) - g_0(t_1, t_2) - g_1(t_1, t_2) - g_2(t_1, t_2)$, где

$$g_0(t_1, t_2) = F_{00} q(0, t_1) q(0, t_2), \quad g_1(t_1, t_2) = q(0, t_2) \sum_{i=1}^{\infty} F_{i0} q(i, t_1), \quad g_2(t_1, t_2) = q(0, t_1) \sum_{i=1}^{\infty} F_{0i} q(i, t_2),$$

при этом

$$F_{L0}^* = \left\{ \|g_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 - \sum_{i=1}^{L-1} F_{i0}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad F_{0L}^* = \left\{ \|g_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 - \sum_{i=1}^{L-1} F_{0i}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Отметим, что функции $g(\cdot)$, $g_0(\cdot)$, $g_1(\cdot)$ и $g_2(\cdot)$ ортогональны в пространстве $L_2(\mathbb{T}^2)$ и погрешность аппроксимации функции $g(\cdot)$ не больше, чем погрешность аппроксимации функции $f(\cdot)$. Поэтому из равенства ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} f(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} g_0(\cdot) + {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} g_1(\cdot) + {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} g_2(\cdot) + {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} g(\cdot)$ следует, что среднеквадратическая погрешность аппроксимации (5.6) интеграла ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} f(\cdot)$ равна среднеквадратической погрешности аппроксимации интеграла ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} g(\cdot)$, поскольку интегралы ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} g_0(\cdot)$, ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} g_1(\cdot)$ и ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} g_2(\cdot)$ представляются точно. Этот результат без изменений переносится на интегралы ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} f(\cdot)$ и ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} g(\cdot)$.

Однако стоит отметить, что возможное уменьшение среднеквадратической погрешности аппроксимации достигается за счет увеличения числа случайных величин, а именно добавления $\zeta_L^{(j_1)*}$ и $\zeta_L^{(j_2)*}$. Рассматриваемую методику уменьшения среднеквадратических погрешностей аппроксимации можно применить для кратных стохастических интегралов ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} g(\cdot)$ и ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} g(\cdot)$, но уже с ограничениями, так как новые случайные величины, которые потребуются добавить к уже имеющимся, могут быть зависимыми с F_{L0}^* и F_{0L}^* . Более того, к увеличению числа случайных величин и уменьшению погрешности, очевидно, приводит и простое увеличение порядка усечения L . Какой именно вариант является более эффективным, вообще говоря, зависит от функции $f(\cdot)$ и базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$.

Аналогичные рассуждения справедливы для кратных стохастических интегралов Ито и Стратоновича по винеровским процессам кратности $k > 2$. Но, скорее всего, описанная ме-

тодика уменьшения среднеквадратических погрешностей аппроксимации теряет свою эффективность с ростом кратности k .

Пример 5.9. Найти среднеквадратические погрешности аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито $I_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot)$ и Стратоновича $S_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot)$ при $j_1 \neq j_2$, где функция $\mathbb{k}(\cdot)$ задается формулой (4.15), используя базисные системы (1.5)–(1.9); $\mathbb{T} = [0, 1]$, $k = 2, 3, 4$. Порядки усечения спектральных характеристик: $L = 4, 8, \dots, 64$.

□ Применим формулы (5.69) и (5.72), чтобы найти среднеквадратические погрешности аппроксимации $I_{\varepsilon_{\mathbb{k}}}^{W(j_1 \dots j_k)}$ и $S_{\varepsilon_{\mathbb{k}}}^{W(j_1 \dots j_k)}$ кратных стохастических интегралов Ито $I_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot)$ и Стратоновича $S_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot)$ при заданных значениях k и L , т.е. используются приближенные представления — $I_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \tilde{\mathbb{k}}(\cdot)$ и $S_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \tilde{\mathbb{k}}(\cdot)$ согласно формулам (5.68) и (5.71). Кроме того, применяются результаты из разд. 5.6 (см. также примеры 5.7 и 5.8).

Для $k = 2$ среднеквадратические погрешности аппроксимации $I_{\varepsilon_{\mathbb{k}}}^{W(j_1 j_2)}$ и $S_{\varepsilon_{\mathbb{k}}}^{W(j_1 j_2)}$ при $j_1 \neq j_2$ приведены в табл. 5.5 (при $j_1 = j_2$ погрешность равна нулю, см. примеры 4.16 и 5.5). Для $k = 3$ среднеквадратические погрешности аппроксимации $I_{\varepsilon_{\mathbb{k}}}^{W(j_1 j_2 j_3)}$ и $S_{\varepsilon_{\mathbb{k}}}^{W(j_1 j_2 j_3)}$ указаны в табл. 5.6–5.10 кроме случая $j_1 = j_2 = j_3$ с нулевой погрешностью. Для $k = 4$ при расчете среднеквадратических погрешностей аппроксимации $I_{\varepsilon_{\mathbb{k}}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)}$ и $S_{\varepsilon_{\mathbb{k}}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)}$ ограничимся вариантами значений j_1, j_2, j_3, j_4 , которые перечислены в табл. 5.4. Эти погрешности можно найти в табл. 5.11–5.19 кроме случая $j_1 = j_2 = j_3 = j_4$, так как для него погрешность равна нулю. Во всех таблицах указана в том числе и относительная погрешность.

Данные из табл. 5.5, 5.6, 5.11 согласуются с результатами примеров 1.21, 1.22 и 4.13, а данные из таблиц 5.9, 5.16 — с результатами примера 4.16. В целом анализ полученных результатов показывает, что наибольшую точность аппроксимации обеспечивают косинусоиды (1.6). Далее следуют полиномы Лежандра (1.5), обеспечивающие погрешность, примерно в два раза меньшую по сравнению с функциями Уолша (1.7) и функциями Хаара (1.8). Тригонометрические функции (1.9) либо немного лучше (в 8 вариантах из 15), либо немного хуже (в 7 вариантах из 15) функций Уолша и Хаара. При этом для сравнения важно, что среднеквадратическая погрешность аппроксимации, соответствующая функциям Уолша и Хаара, совпадает с погрешностью, которую дает численное интегрирование с шагом $h = 1/L$ при условии $L = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$ (см. п. 7 замечаний 5.3).

Дополнительные выводы состоят в следующем. Во-первых, полученные результаты иллюстрируют то, что для повторных стохастических интегралов Ито максимальная среднеквадратическая погрешность аппроксимации соответствует минимальному значению величины M_j^2 , т.е. попарно различным значениям j_1, \dots, j_k , и с ростом M_j^2 погрешность уменьшается (см. разд. 4.3, а также формулы (4.58) и (4.59)). Во-вторых, по приведенным данным хорошо видно, что абсолютная (но не относительная) погрешность аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича больше или равна погрешности аппроксимации соответствующих повторных стохастических интегралов Ито (см. п. 2 замечаний 5.6). ■

Пример 5.10. Применить методику уменьшения среднеквадратических погрешностей ап-

Таблица 5.5. Погрешности аппроксимации $I_{\varepsilon_k}^{W(j_1 j_2)}$ и $S_{\varepsilon_k}^{W(j_1 j_2)}$ ($k = 2, j_1 \neq j_2$)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.035714 (7.14%)	0.016667 (3.33%)	0.008065 (1.61%)	0.003968 (0.79%)	0.001969 (0.39%)
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.034075 (6.81%)	0.014937 (2.99%)	0.006936 (1.39%)	0.003328 (0.67%)	0.001627 (0.33%)
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.062500 (12.50%)	0.031250 (6.25%)	0.015625 (3.13%)	0.007813 (1.56%)	0.003906 (0.78%)
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.062500 (12.50%)	0.031250 (6.25%)	0.015625 (3.12%)	0.007812 (1.56%)	0.003906 (0.78%)
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.072688 (14.54%)	0.036803 (7.36%)	0.018651 (3.73%)	0.009406 (1.88%)	0.004725 (0.95%)

Таблица 5.6. Погрешности аппроксимации $I_{\varepsilon_k}^{W(j_1 j_2 j_3)}$ и $S_{\varepsilon_k}^{W(j_1 j_2 j_3)}$ ($k = 3; j_1, j_2, j_3$ различны)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.036141 (21.68%)	0.016948 (10.17%)	0.008180 (4.91%)	0.004008 (2.41%)	0.001981 (1.19%)
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.033988 (20.39%)	0.015055 (9.03%)	0.006996 (4.20%)	0.003350 (2.01%)	0.001634 (0.98%)
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.055556 (33.33%)	0.029514 (17.71%)	0.015191 (9.11%)	0.007704 (4.62%)	0.003879 (2.33%)
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.055556 (33.33%)	0.029514 (17.71%)	0.015191 (9.11%)	0.007704 (4.62%)	0.003879 (2.33%)
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.050378 (30.23%)	0.025162 (15.10%)	0.012636 (7.58%)	0.006334 (3.80%)	0.003169 (1.90%)

Таблица 5.7. Погрешности аппроксимации $I_{\varepsilon_k}^{W(j_1 j_1 j_3)}$ ($k = 3, j_1 = j_2 \neq j_3$ или $j_1 \neq j_2 = j_3$)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.018071 (10.84%)	0.008474 (5.08%)	0.004090 (2.45%)	0.002004 (1.20%)	0.000991 (0.59%)
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.017090 (10.25%)	0.007541 (4.52%)	0.003500 (2.10%)	0.001675 (1.01%)	0.000817 (0.49%)
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.030382 (18.23%)	0.015408 (9.24%)	0.007758 (4.65%)	0.003893 (2.34%)	0.001950 (1.17%)
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.030382 (18.23%)	0.015408 (9.24%)	0.007758 (4.65%)	0.003893 (2.34%)	0.001950 (1.17%)
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.035193 (21.12%)	0.018187 (10.91%)	0.009295 (5.58%)	0.004702 (2.82%)	0.002364 (1.42%)

Таблица 5.8. Погрешности аппроксимации $S_{\varepsilon_k}^{W(j_1 j_1 j_3)}$ ($k = 3, j_1 = j_2 \neq j_3$ или $j_1 \neq j_2 = j_3$)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.018340 (7.34%)	0.008540 (3.42%)	0.004106 (1.64%)	0.002008 (0.80%)	0.000992 (0.40%)
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.017344 (6.94%)	0.007593 (3.04%)	0.003511 (1.40%)	0.001678 (0.67%)	0.000818 (0.33%)
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.032118 (12.85%)	0.015842 (6.34%)	0.007867 (3.15%)	0.003920 (1.57%)	0.001957 (0.78%)
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.032118 (12.85%)	0.015842 (6.34%)	0.007867 (3.15%)	0.003920 (1.57%)	0.001957 (0.78%)
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.040732 (16.29%)	0.021134 (8.45%)	0.010821 (4.33%)	0.005479 (2.19%)	0.002756 (1.10%)

Таблица 5.9. Погрешности аппроксимации $I_{\varepsilon_k}^{W(j_1 j_2 j_1)}$ ($k = 3, j_1 = j_3 \neq j_2$)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.036568 (21.94%)	0.017229 (10.34%)	0.008295 (4.98%)	0.004048 (2.43%)	0.001994 (1.20%)
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.034092 (20.46%)	0.015199 (9.12%)	0.007059 (4.24%)	0.003373 (2.02%)	0.001641 (0.98%)
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.053819 (32.29%)	0.029080 (17.45%)	0.015082 (9.05%)	0.007677 (4.61%)	0.003872 (2.32%)
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.053819 (32.29%)	0.029080 (17.45%)	0.015082 (9.05%)	0.007677 (4.61%)	0.003872 (2.32%)
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.048076 (28.85%)	0.024732 (14.84%)	0.012574 (7.54%)	0.006331 (3.80%)	0.003172 (1.90%)

Таблица 5.10. Погрешности аппроксимации $S_{\varepsilon_k}^{W(j_1 j_2 j_1)}$ ($k = 3, j_1 = j_3 \neq j_2$)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.037646 (22.59%)	0.017495 (10.50%)	0.008361 (5.02%)	0.004065 (2.44%)	0.001998 (1.20%)
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.034919 (20.95%)	0.015381 (9.23%)	0.007102 (4.26%)	0.003383 (2.03%)	0.001644 (0.99%)
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.055556 (33.33%)	0.029514 (17.71%)	0.015191 (9.11%)	0.007704 (4.62%)	0.003879 (2.33%)
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.055556 (33.33%)	0.029514 (17.71%)	0.015191 (9.11%)	0.007704 (4.62%)	0.003879 (2.33%)
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.050224 (30.13%)	0.025309 (15.19%)	0.012725 (7.64%)	0.006370 (3.82%)	0.003182 (1.91%)

Таблица 5.11. Погрешности аппроксимации $I_{\varepsilon_k}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)}$ и $S_{\varepsilon_k}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)}$ ($k = 4$; j_1, j_2, j_3, j_4 различны)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.017174 (41.22%)	0.008390 (20.14%)	0.004096 (9.83%)	0.002012 (4.83%)	0.000994 (2.39%)
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.016013 (38.43%)	0.007428 (17.83%)	0.003495 (8.39%)	0.001679 (4.03%)	0.000819 (1.97%)
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.023248 (55.79%)	0.013513 (32.43%)	0.007270 (17.45%)	0.003769 (9.05%)	0.001919 (4.60%)
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.023248 (55.79%)	0.013513 (32.43%)	0.007270 (17.45%)	0.003769 (9.05%)	0.001919 (4.60%)
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.020123 (48.30%)	0.010404 (24.97%)	0.005269 (12.65%)	0.002645 (6.35%)	0.001323 (3.18%)

Таблица 5.12. Погрешности аппроксимации $I_{\varepsilon_k}^{W(j_1 j_1 j_3 j_4)}$ ($k = 4$; $j_1 = j_2$ и j_2, j_3, j_4 различны; j_1, j_2, j_3 различны и $j_3 = j_4$)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.012307 (29.54%)	0.005878 (14.11%)	0.002843 (6.82%)	0.001390 (3.34%)	0.000685 (1.64%)
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.011052 (26.53%)	0.004999 (12.00%)	0.002335 (5.60%)	0.001119 (2.69%)	0.000546 (1.31%)
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.017198 (41.28%)	0.009474 (22.74%)	0.004968 (11.92%)	0.002544 (6.10%)	0.001287 (3.09%)
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.017198 (41.28%)	0.009474 (22.74%)	0.004968 (11.92%)	0.002544 (6.10%)	0.001287 (3.09%)
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.015832 (38.00%)	0.008184 (19.64%)	0.004169 (10.01%)	0.002103 (5.05%)	0.001055 (2.53%)

Таблица 5.13. Погрешности аппроксимации $S_{\varepsilon_k}^{W(j_1 j_1 j_3 j_4)}$ ($k = 4$; $j_1 = j_2$ и j_2, j_3, j_4 различны; j_1, j_2, j_3 различны и $j_3 = j_4$)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.015344 (24.55%)	0.007233 (11.57%)	0.003486 (5.58%)	0.001703 (2.73%)	0.000840 (1.34%)
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.014124 (22.60%)	0.006299 (10.08%)	0.002928 (4.69%)	0.001401 (2.24%)	0.000682 (1.09%)
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.022488 (35.98%)	0.012115 (19.38%)	0.006282 (10.05%)	0.003198 (5.12%)	0.001613 (2.58%)
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.022488 (35.98%)	0.012115 (19.38%)	0.006282 (10.05%)	0.003198 (5.12%)	0.001613 (2.58%)
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.020504 (32.81%)	0.010394 (16.63%)	0.005250 (8.40%)	0.002637 (4.22%)	0.001321 (2.11%)

Таблица 5.14. Погрешности аппроксимации $I_{\varepsilon_k}^{W(j_1 j_2 j_2 j_4)}$ ($k = 4$, $j_2 = j_3$ и j_1, j_2, j_4 различны)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.010867 (26.08%)	0.005216 (12.52%)	0.002545 (6.11%)	0.001252 (3.01%)	0.000620 (1.49%)
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.011193 (26.86%)	0.005036 (12.09%)	0.002351 (5.64%)	0.001125 (2.70%)	0.000548 (1.31%)
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.018012 (43.23%)	0.009711 (23.31%)	0.005032 (12.08%)	0.002560 (6.14%)	0.001291 (3.10%)
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.018012 (43.23%)	0.009711 (23.31%)	0.005032 (12.08%)	0.002560 (6.14%)	0.001291 (3.10%)
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.016050 (38.52%)	0.008220 (19.73%)	0.004179 (10.03%)	0.002105 (5.05%)	0.001056 (2.53%)

Таблица 5.15. Погрешности аппроксимации $S_{\varepsilon_k}^{W(j_1 j_2 j_2 j_4)}$ ($k = 4$, $j_2 = j_3$; j_1, j_2, j_4 различны)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.011433 (18.29%)	0.005348 (8.56%)	0.002578 (4.12%)	0.001260 (2.02%)	0.000622 (0.99%)
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.011702 (18.72%)	0.005137 (8.22%)	0.002373 (3.80%)	0.001130 (1.81%)	0.000549 (0.88%)
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.019884 (31.81%)	0.010217 (16.35%)	0.005163 (8.26%)	0.002593 (4.15%)	0.001299 (2.08%)
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.019884 (31.81%)	0.010217 (16.35%)	0.005163 (8.26%)	0.002593 (4.15%)	0.001299 (2.08%)
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.019698 (31.52%)	0.010145 (16.23%)	0.005183 (8.29%)	0.002620 (4.19%)	0.001316 (2.11%)

Таблица 5.16. Погрешности аппроксимации $I_{\varepsilon_k}^{W(j_1 j_1 j_3 j_3)}$ ($k = 4$, $j_1 = j_2 \neq j_3 = j_4$)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.006660 (15.98%)	0.003207 (7.70%)	0.001555 (3.73%)	0.000760 (1.82%)	0.000375 (0.90%)
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.005424 (13.02%)	0.002447 (5.87%)	0.001150 (2.76%)	0.000554 (1.33%)	0.000271 (0.65%)
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.009657 (23.18%)	0.005005 (12.01%)	0.002552 (6.12%)	0.001289 (3.09%)	0.000648 (1.55%)
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.009657 (23.18%)	0.005005 (12.01%)	0.002552 (6.12%)	0.001289 (3.09%)	0.000648 (1.55%)
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.011005 (26.41%)	0.005863 (14.07%)	0.003047 (7.31%)	0.001555 (3.73%)	0.000785 (1.88%)

Таблица 5.17. Погрешности аппроксимации $S_{\varepsilon_k}^W(j_1 j_1 j_3 j_3)$ ($k = 4, j_1 = j_2 \neq j_3 = j_4$)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.007228 (7.30%)	0.003339 (3.37%)	0.001587 (1.60%)	0.000768 (0.78%)	0.000377 (0.38%)
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.005933 (6.00%)	0.002548 (2.57%)	0.001173 (1.19%)	0.000560 (0.57%)	0.000273 (0.28%)
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.011719 (11.84%)	0.005534 (5.59%)	0.002686 (2.71%)	0.001322 (1.34%)	0.000656 (0.66%)
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.011719 (11.84%)	0.005534 (5.59%)	0.002686 (2.71%)	0.001322 (1.34%)	0.000656 (0.66%)
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.015398 (15.56%)	0.007998 (8.08%)	0.004107 (4.15%)	0.002084 (2.11%)	0.001049 (1.06%)

Таблица 5.18. Погрешности аппроксимации $I_{\varepsilon_k}^W(j_1 j_1 j_1 j_4)$ ($k = 4, j_1 = j_2 = j_3 \neq j_4$ или $j_1 \neq j_2 = j_3 = j_4$)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.005738 (13.77%)	0.002681 (6.43%)	0.001290 (3.10%)	0.000630 (1.51%)	0.000311 (0.75%)
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.005820 (13.97%)	0.002572 (6.17%)	0.001187 (2.85%)	0.000565 (1.36%)	0.000274 (0.66%)
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.009928 (23.83%)	0.005093 (12.22%)	0.002576 (6.18%)	0.001295 (3.11%)	0.000649 (1.56%)
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.009928 (23.83%)	0.005093 (12.22%)	0.002576 (6.18%)	0.001295 (3.11%)	0.000649 (1.56%)
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.011459 (27.50%)	0.006013 (14.43%)	0.003091 (7.42%)	0.001567 (3.76%)	0.000788 (1.89%)

Таблица 5.19. Погрешности аппроксимации $S_{\varepsilon_k}^W(j_1 j_1 j_1 j_4)$ ($k = 4, j_1 = j_2 = j_3 \neq j_4$ или $j_1 \neq j_2 = j_3 = j_4$)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.006185 (5.94%)	0.002859 (2.75%)	0.001368 (1.31%)	0.000667 (0.64%)	0.000328 (0.32%)
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.006253 (6.00%)	0.002737 (2.63%)	0.001258 (1.21%)	0.000598 (0.57%)	0.000290 (0.28%)
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.010830 (10.40%)	0.005468 (5.25%)	0.002743 (2.63%)	0.001373 (1.32%)	0.000687 (0.66%)
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.010830 (10.40%)	0.005468 (5.25%)	0.002743 (2.63%)	0.001373 (1.32%)	0.000687 (0.66%)
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.012745 (12.24%)	0.006630 (6.37%)	0.003393 (3.26%)	0.001716 (1.65%)	0.000862 (0.83%)

проксимации, описанную в п. 3 замечаний 5.6, для повторных стохастических интегралов Ито $I_{\mathbb{T}}^W(j_1 j_2) \mathbb{k}(\cdot)$ и Стратоновича $S_{\mathbb{T}}^W(j_1 j_2) \mathbb{k}(\cdot)$ кратности $k = 2$ при $j_1 \neq j_2$, где функция $\mathbb{k}(\cdot)$ задается формулой (4.15), используя базисные системы (1.5) – (1.9); $\mathbb{T} = [0, 1]$. Порядки усечения спектральных характеристик: $L = 4, 8, \dots, 64$.

□ Прежде всего напомним (см. разд. 5.4), что если $j_1 \neq j_2$, то интегралы $I_{\mathbb{T}}^W(j_1 j_2) \mathbb{k}(\cdot)$ и $S_{\mathbb{T}}^W(j_1 j_2) \mathbb{k}(\cdot)$ совпадают, как и их приближенные представления, полученные по формулам (5.68) и (5.71).

Согласно примеру 4.2 для произвольной базисной системы коэффициенты разложения $\mathbb{K}_{i_1 i_2}$ функции $\mathbb{k}(t_1, t_2) = 1(t_2 - t_1)$ выражаются через элементы спектральной характеристики P^{-1} оператора интегрирования (см. разд. 1.6), а именно $\mathbb{K}_{i_1 i_2} = P_{i_2 i_1}^{-1}$, $i_1, i_2 = 0, 1, 2, \dots$. Для базисных систем (1.5) – (1.9) при условии $\mathbb{T} = [0, 1]$, т.е. $T = 1$, верно соотношение $q(0, t) \equiv 1$. В разд. 1.6 отмечено, что в этом случае столбец спектральной характеристики P^{-1} с номером $j = 0$ представляет собой спектральную характеристику F функции $f_1(t) = t$, а из представления (1.89) следует, что $P_{00}^{-1} = 1/2$ (см. также пример 1.19), поэтому

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{K}_{0i} q(i, t) = \sum_{i=1}^{\infty} P_{i0}^{-1} q(i, t) = t, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{K}_{0i} q(i, t) = \sum_{i=1}^{\infty} P_{i0}^{-1} q(i, t) = t - \frac{1}{2}.$$

Кроме того, $P_{i_1 i_2}^{-1} = -P_{i_2 i_1}^{-1}$ при $i_1 \neq i_2$, что также следует из представления (1.89). А значит,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{K}_{i0} q(i, t) = \sum_{i=1}^{\infty} P_{0i}^{-1} q(i, t) = - \sum_{i=1}^{\infty} P_{i0}^{-1} q(i, t) = \frac{1}{2} - t.$$

Таким образом, среднеквадратические погрешности аппроксимации повторных стохастических интегралов ${}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot)$ и ${}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot)$ с помощью соотношения

$${}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) \approx \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} \mathbb{K}_{i_1 i_2} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} + \mathbb{K}_{L0}^* \zeta_L^{(j_1)*} \zeta_0^{(j_2)} + \mathbb{K}_{0L}^* \zeta_0^{(j_1)} \zeta_L^{(j_2)*}$$

можно выразить через погрешность аппроксимации функции $g(t_1, t_2) = \mathbb{k}(t_1, t_2) - g_0(t_1, t_2) - g_1(t_1, t_2) - g_2(t_1, t_2)$, где

$$g_0(t_1, t_2) = \mathbb{K}_{00} q(0, t_1) q(0, t_2) \equiv \frac{1}{2},$$

$$g_1(t_1, t_2) = q(0, t_2) \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{K}_{i0} q(i, t_1) = \frac{1}{2} - t_1, \quad g_2(t_1, t_2) = q(0, t_1) \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{K}_{0i} q(i, t_2) = t_2 - \frac{1}{2},$$

при этом

$$\mathbb{K}_{L0}^* = \left\{ \|g_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 - \sum_{i=1}^{L-1} \mathbb{K}_{i0}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \mathbb{K}_{0L}^* = \left\{ \|g_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 - \sum_{i=1}^{L-1} \mathbb{K}_{0i}^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\|g_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \|g_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{12},$$

т.е.

$$\mathbb{K}_{L0}^* = \mathbb{K}_{0L}^* = \left\{ \frac{1}{12} - \sum_{i=1}^{L-1} \mathbb{K}_{i0}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Фактически, используется следующая формула для повторного стохастического интеграла ${}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot)$ (аналогичная формула справедлива для интеграла ${}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot)$):

$$\begin{aligned} {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) &= {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)} g_0(\cdot) + {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)} g_1(\cdot) + {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)} g_2(\cdot) + {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)} g(\cdot) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 dW^{(j_1)}(t_1) dW^{(j_2)}(t_2) + \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - t_1\right) dW^{(j_1)}(t_1) dW^{(j_2)}(t_2) + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \left(t_2 - \frac{1}{2}\right) dW^{(j_1)}(t_1) dW^{(j_2)}(t_2) + {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)} g(\cdot) = \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{J}_T^{W(j_1)} f_0(\cdot) \mathcal{J}_T^{W(j_2)} f_0(\cdot) + \mathcal{J}_T^{W(j_1)} \left(\frac{1}{2} f_0(\cdot) - f_1(\cdot)\right) \mathcal{J}_T^{W(j_2)} f_0(\cdot) + \\ &+ \mathcal{J}_T^{W(j_1)} f_0(\cdot) \mathcal{J}_T^{W(j_2)} \left(f_1(\cdot) - \frac{1}{2} f_0(\cdot)\right) + {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)} g(\cdot), \end{aligned}$$

где $f_0(t) \equiv 1$ и первые три слагаемые в правой части представляются точно. Следовательно, вместо формулы ${}^I \mathcal{E}_{\mathbb{k}}^{W(j_1 j_2)} = {}^S \mathcal{E}_{\mathbb{k}}^{W(j_1 j_2)} = \|\mathbb{k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 - \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} \mathbb{K}_{i_1 i_2}^2$, которая применялась в примере (5.9), имеем ${}^I \mathcal{E}_{\mathbb{k}}^{W(j_1 j_2)} = {}^S \mathcal{E}_{\mathbb{k}}^{W(j_1 j_2)} = \|g(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 - \sum_{i_1, i_2=0}^{L-1} G_{i_1 i_2}^2$, где коэффициенты разложения $G_{i_1 i_2}$ функции $g(t_1, t_2) = 1(t_2 - t_1) - t_1 + t_2 - 1/2$ определяются выражением

$$G_{i_1 i_2} = \begin{cases} \mathbb{K}_{i_1 i_2}, & i_1, i_2 \geq 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и

$$\|g(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \|\mathbb{k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 - \|g_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 - \|g_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 - \|g_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}.$$

Результаты вычисления среднеквадратических погрешностей аппроксимации ${}^I \mathcal{E}_{\mathbb{k}}^{W(j_1 j_2)}$ и ${}^S \mathcal{E}_{\mathbb{k}}^{W(j_1 j_2)}$ указаны в табл. 5.20 и их, конечно, полезно сравнить с данными из табл. 5.5.

Величина, на которую уменьшаются погрешности, напрямую связана с точностью аппроксимации функции $f_1(\cdot)$ при ее приближенном представлении в виде частичной суммы ряда

Таблица 5.20. Погрешности аппроксимации $I_{\varepsilon_k}^{W(j_1 j_2)}$ и $S_{\varepsilon_k}^{W(j_1 j_2)}$ ($k = 2, j_1 \neq j_2$)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.035714	0.016667	0.008065	0.003968	0.001969
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.033692	0.014885	0.006930	0.003327	0.001627
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.052083	0.028646	0.014974	0.007650	0.003866
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.052083	0.028646	0.014974	0.007650	0.003866
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.032673	0.014379	0.006745	0.003267	0.001608

(1.10). Опираясь на результаты примера 1.20, делаем следующий вывод. Среднеквадратическая погрешность аппроксимации осталась прежней при выборе полиномов Лежандра (1.5), так как они обеспечивают точное представление функции $f_1(\cdot)$. Лучший результат получен при выборе тригонометрических функций (1.9) и это отчасти связано с тем, что им соответствует худший результат аппроксимации функции $f_1(\cdot)$. Незначительное уменьшение погрешностей при выборе косинусов (1.6) продиктовано хорошей аппроксимацией функции $f_1(\cdot)$ с помощью этой базисной системы.

Итак, методика уменьшения среднеквадратических погрешностей аппроксимации, описанная в п. 3 замечаний 5.6, в этом примере, т.е. для функции $\mathbb{k}(\cdot)$, оказалась эффективной в первую очередь при выборе тригонометрических функций. Ее применение также оправдано при выборе функций Уолша или Хаара. В то же время при выборе полиномов Лежандра ее применение лишено смысла и такой же вывод можно сделать в случае выбора косинусов, поскольку для них эффективнее увеличение на единицу порядка усечения L (см. табл. 5.21).

Таблица 5.21. Погрешности аппроксимации $I_{\varepsilon_k}^{W(j_1 j_2)}$ и $S_{\varepsilon_k}^{W(j_1 j_2)}$ ($k = 2, j_1 \neq j_2$)

Базис	$L = 5$	$L = 9$	$L = 17$	$L = 33$	$L = 65$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.027778	0.014706	0.007576	0.003846	0.001938
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.025910	0.013070	0.006498	0.003223	0.001601

В общем случае рассмотренную методику можно применять при $j_1 = j_2$, однако среднеквадратические погрешности аппроксимации кратных стохастических интегралов от функции $\mathbb{k}(\cdot)$ равны нулю (см. примеры 4.16 и 5.5). Действительно, функция $g(\cdot)$ обладает свойством $g(t_1, t_2) = -g(t_2, t_1)$, поэтому соответствующая симметризованная функция $g_{\bar{j}}(\cdot)$ (см. формулу (4.57)) принимает нулевое значение при почти всех $(t_1, t_2) \in \mathbb{T}^2$ и $I_{\mathcal{T}}^{W(j_1 j_1)} g(\cdot) = S_{\mathcal{T}}^{W(j_1 j_1)} g(\cdot) = 0$, следовательно,

$$I_{\mathcal{T}}^{W(j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) = I_{\mathcal{T}}^{W(j_1 j_1)} g_0(\cdot) = \frac{1}{2} ((\mathcal{J}_{\mathcal{T}}^{W(j_1)} f_0(\cdot))^2 - 1),$$

$$S_{\mathcal{T}}^{W(j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) = S_{\mathcal{T}}^{W(j_1 j_1)} g_0(\cdot) = \frac{1}{2} (\mathcal{J}_{\mathcal{T}}^{W(j_1)} f_0(\cdot))^2,$$

что эквивалентно результатам примеров 2.12 и 5.5. ■

5.8. Моделирование кратных стохастических интегралов

Рассмотрим алгоритмы моделирования кратных стохастических интегралов, построенные на основе теорем об их представлении (см. разд. 5.3 и 5.4). Здесь и далее $j = 1, \dots, s$; s — заданное натуральное число.

Сформируем алгоритм моделирования кратных стохастических интегралов Ито и Стратоновича по винеровским процессам (5.19) и (5.20).

Алгоритм 5.1.

1. Выбрать базисную систему $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$.
2. Найти коэффициенты разложения $F_{i_1 \dots i_k}$ функции $f(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty}$ по формуле (4.4).
3. Представить стохастический интеграл (5.19) с помощью выражения (5.32), а для стохастического интеграла (5.20) использовать выражение (5.51).
4. Для получения реализаций соответствующих случайных величин, т.е. кратных стохастических интегралов Ито и Стратоновича, использовать реализации независимых случайных величин $\zeta_i^{(j)}$, имеющих стандартное нормальное распределение, $i = 0, 1, 2, \dots$

Если функция $f(\cdot) = \mathbb{k}(\cdot)$ задается формулой (4.15), то для полиномов Лежандра (1.5) ее коэффициенты разложения $F_{i_1 \dots i_k} = \mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}$ определяются формулой (4.19), для косинусоид (1.6) и тригонометрических функций (1.9) — формулами (4.22) и (4.23) соответственно, для функций Уолша (1.7) и функций Хаара (1.8) — формулами (4.66) и (4.67) соответственно. Если функция $f(\cdot) = \mathbb{k}_{\psi}(\cdot)$ задается формулой (4.24) с дополнительным условием (4.26), т.е. $f(\cdot) = \mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$, то для полиномов Лежандра ее коэффициенты разложения $F_{i_1 \dots i_k} = \mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^{n_1 \dots n_k}$ описываются формулой (4.31), для косинусоид и тригонометрических функций — формулами (4.28) и (4.29) соответственно.

При приближенном моделировании дополнительно требуется выбрать величину $L \in \mathbb{N}$ (порядок усечения) и использовать выражение (5.68) вместо (5.32) и выражение (5.71) вместо (5.51).

По ансамблю реализаций кратных (и повторных) стохастических интегралов Ито и Стратоновича несложно найти оценки их первых двух моментов: математического ожидания и второго начального момента. Обозначим количество реализаций M (объем выборки), а реализации стохастических интегралов Ито и Стратоновича, соответствующие реализациям независимых случайных величин $\zeta_i^{(j)}$, имеющих стандартное нормальное распределение, $i = 0, 1, 2, \dots$, — I_m и S_m (при фиксированных значениях j_1, \dots, j_k), где $m = 1, 2, \dots, M$. Тогда

$$\mathbb{E}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M I_m, \quad \mathbb{E}^I \left(\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) \right)^2 \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M I_m^2, \quad (5.75)$$

$$\mathbb{E}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M S_m, \quad \mathbb{E}^S \left(\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) \right)^2 \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M S_m^2. \quad (5.76)$$

Пример 5.11. Оценить первые два момента повторных стохастических интегралов Ито $I\mathcal{J}_T^{W(j_1j_2j_3)}\mathbb{k}(\cdot)$ и Стратоновича $S\mathcal{J}_T^{W(j_1j_2j_3)}\mathbb{k}(\cdot)$ кратности $k = 3$ для двух вариантов:

$$\text{а) } j_1, j_2, j_3 \text{ попарно различны; } \text{б) } j_1 = j_3 \neq j_2,$$

и повторных стохастических интегралов Ито $I\mathcal{J}_T^{W(j_1j_2j_3j_4)}\mathbb{k}(\cdot)$ и Стратоновича $S\mathcal{J}_T^{W(j_1j_2j_3j_4)}\mathbb{k}(\cdot)$ кратности $k = 4$ для двух вариантов:

$$\text{а) } j_1, j_2, j_3, j_4 \text{ попарно различны; } \text{б) } j_1 = j_2 \neq j_3 = j_4,$$

где функция $\mathbb{k}(\cdot)$ задается формулой (4.15), применяя выражения (5.68) и (5.71) на основе базисных систем (1.5)–(1.9) при условии $\mathbb{T} = [0, 1]$ и $L = 4, 8, \dots, 64$.

□ Чтобы оценить первые два момента заданных повторных стохастических интегралов по винеровским процессам, применим алгоритм 5.1.

Коэффициенты разложения $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}$ функции $\mathbb{k}(\cdot)$ можно найти по формулам (4.19), (4.22), (4.23), (4.66) и (4.67) в зависимости от выбора базисной системы (1.5)–(1.9).

Для каждой базисной системы и каждого порядка усечения моделировались реализации повторных стохастических интегралов Ито $\{I_m\}_{m=1}^M$ и Стратоновича $\{S_m\}_{m=1}^M$, где $M = 10^6$ — объем выборки. Далее с помощью формул (5.75) и (5.76) найдены оценки математических ожиданий и вторых начальных моментов.

Оценки для кратностей $k = 3$ и $k = 4$ указаны в табл. 5.22–5.24 и 5.25–5.27 соответственно. Результаты оценивания согласуются со значениями из табл. 5.3 и 5.4. Отметим, что только при $k = 4$ для второго варианта повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича не совпадают, а математическое ожидание интеграла Стратоновича отлично от нуля. ■

Выводы по главе 5

1. Доказана теорема о представлении кратного стохастического интеграла Ито по винеровским процессам в виде ряда со случайными коэффициентами. Получено ортогональное разложение кратного стохастического интеграла Ито.
2. Доказана теорема о представлении кратного стохастического интеграла Стратоновича по винеровским процессам в виде ряда со случайными коэффициентами. Получено ортогональное разложение кратного стохастического интеграла Стратоновича.
3. Получены формулы для точного вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации кратных стохастических интегралов Ито и Стратоновича на основе перехода к симметризованным функциям.
4. Сформированы алгоритмы статистического моделирования кратных стохастических интегралов Стратоновича и Ито на основе их ортогональных разложений.

Основные результаты опубликованы в работах [160–162, 172, 173].

Таблица 5.22. Моменты повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича
 ($k = 3$; j_1, j_2, j_3 попарно различны)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000708	-0.000132	0.000843	-0.000329	0.000497
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000107	-0.000623	0.000148	0.000157	-0.000051
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000045	-0.000579	-0.000464	0.000352	-0.000059
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000063	0.000455	0.000356	-0.000001	-0.000176
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000131	-0.000361	0.000036	0.000050	-0.000156
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.130944	0.150599	0.158257	0.162296	0.164796
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.132839	0.152178	0.157674	0.163891	0.165007
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.111459	0.137405	0.150270	0.159919	0.162423
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.110849	0.137635	0.150366	0.160187	0.162607
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.116225	0.141709	0.152018	0.161423	0.163364

Таблица 5.23. Моменты повторных стохастических интегралов Ито
 ($k = 3$, $j_1 = j_3 \neq j_2$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000227	-0.000736	-0.000139	0.000413	0.000017
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000205	-0.000668	-0.000243	0.000298	-0.000016
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000355	-0.000390	-0.000450	-0.000041	-0.000905
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000241	-0.000800	-0.000526	0.000338	0.000022
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000034	-0.000758	-0.000462	0.000002	-0.000074
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.130222	0.149865	0.157771	0.163009	0.164584
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.132711	0.151926	0.159171	0.163601	0.164889
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.112950	0.138325	0.151481	0.159856	0.163147
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.112787	0.137910	0.151011	0.159290	0.162849
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.118641	0.141975	0.154136	0.160277	0.163514

Таблица 5.24. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича
 ($k = 3$, $j_1 = j_3 \neq j_2$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000230	-0.000711	-0.000141	0.000418	0.000017
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000209	-0.000645	-0.000245	0.000303	-0.000017
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000361	-0.000355	-0.000454	-0.000033	-0.000909
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000234	-0.000765	-0.000529	0.000346	0.000021
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000027	-0.000718	-0.000466	0.000012	-0.000075
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.131303	0.150128	0.157829	0.163027	0.164590
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.133540	0.152106	0.159209	0.163614	0.164893
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.114656	0.138745	0.151595	0.159891	0.163155
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.114509	0.138338	0.151113	0.159323	0.162859
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.120800	0.142540	0.154279	0.160321	0.163527

Таблица 5.25. Моменты повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича
 ($k = 4$; j_1, j_2, j_3, j_4 попарно различны)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000115	0.000128	0.000246	-0.000096	-0.000071
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000097	0.000015	-0.000235	0.000368	0.000037
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000323	0.000038	-0.000356	0.000347	-0.000028
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000083	0.000087	-0.000093	0.000218	0.000117
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000112	-0.000065	-0.000207	0.000326	-0.000113
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.024420	0.033649	0.037827	0.039963	0.040870
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.025856	0.034501	0.037881	0.040368	0.040665
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.018523	0.028200	0.034359	0.037976	0.039541
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.018519	0.028379	0.034334	0.038264	0.039744
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.021667	0.031517	0.036073	0.039522	0.040161

Таблица 5.26. Моменты повторных стохастических интегралов Ито
 ($k = 4$, $j_1 = j_2 \neq j_3 = j_4$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000050	0.000087	-0.000088	0.000152	-0.000068
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000160	0.000188	-0.000202	-0.000043	0.000227
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000114	0.000012	-0.000086	0.000078	0.000032
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000008	0.000073	0.000003	-0.000195	0.000061
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000070	0.000154	-0.000118	-0.000073	-0.000075
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.034996	0.038107	0.040322	0.041132	0.041498
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.035873	0.040582	0.040337	0.041331	0.041652
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.031918	0.037623	0.039239	0.040266	0.040903
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.031719	0.037659	0.039443	0.040029	0.041419
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.030417	0.036878	0.038714	0.040022	0.041104

Таблица 5.27. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича
 ($k = 4$, $j_1 = j_2 \neq j_3 = j_4$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.109205	0.117068	0.121224	0.122984	0.124222
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.110726	0.118727	0.121476	0.123099	0.124747
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.104143	0.114750	0.119697	0.122243	0.123902
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.104110	0.114880	0.119859	0.121947	0.124016
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.101850	0.113372	0.118709	0.121523	0.123627
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.082645	0.090338	0.095229	0.097156	0.098220
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.084927	0.094880	0.095519	0.097624	0.099012
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.076643	0.089370	0.093499	0.095879	0.097556
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.076311	0.089304	0.093955	0.095384	0.098226
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.071919	0.086373	0.091462	0.094785	0.097420

ГЛАВА 6

СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВТОРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

6.1. Представление повторных стохастических интегралов Стратоновича

В этом разделе повторные стохастические интегралы Стратоновича, рассмотренные в разд. 5.4 и 5.5, представляются с помощью спектральной формы математического описания, а именно с помощью спектральных характеристик операторов интегрирования и умножения, спектральной характеристики оператора умножения функций (см. разд. 1.5 и 1.6), а также спектральных характеристик гауссовских белых шумов (см. разд. 2.3).

Начнем с представления повторных стохастических интегралов Стратоновича кратности $k \geq 2$:

$${}^s \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2) \circ \dots \circ dW_{j_k}(t_k), \quad (6.1)$$

где $\mathbb{T} = [t_0, T]$, функция $\mathbb{k}(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ задается формулой (4.15); $j_1, \dots, j_k = 1, 2, \dots, s$; $W_1(\cdot), \dots, W_s(\cdot)$ — независимые стандартные винеровские процессы (см. разд. 2.1 и 5.2). Стохастические интегралы Стратоновича кратности $k = 1$ изучались в разд. 2.3.

Воспользуемся результатами, которые получены в разд. 3.3, а именно применим спектральный метод для решения линейных стохастических дифференциальных уравнений, которые непосредственно связаны с повторными стохастическими интегралами. Будем полагать, что $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — это базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$.

Запишем систему линейных стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича, соответствующую интегралу (6.1):

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= dW_{j_1}(t), & X_1(t_0) &= 0, \\ dX_2(t) &= X_1(t) \circ dW_{j_2}(t), & X_2(t_0) &= 0, \\ &\dots, \\ dX_k(t) &= X_{k-1}(t) \circ dW_{j_k}(t), & X_k(t_0) &= 0, \end{aligned} \quad (6.2)$$

или в форме Ланжевена:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= V_{j_1}(t), & X_1(t_0) &= 0, \\ \dot{X}_2(t) &= X_1(t) V_{j_2}(t), & X_2(t_0) &= 0, \\ &\dots, \\ \dot{X}_k(t) &= X_{k-1}(t) V_{j_k}(t), & X_k(t_0) &= 0, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где $V_1(\cdot), \dots, V_s(\cdot)$ — независимые гауссовские белые шумы, соответствующие винеровским процессам $W_1(\cdot), \dots, W_s(\cdot)$ в смысле соотношения (2.27).

Решение системы уравнений (6.2) несложно формально получить с помощью последовательного интегрирования:

$$X_k(t) = \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{\tau_3} \int_{t_0}^{\tau_2} dW_{j_1}(\tau_1) \circ dW_{j_2}(\tau_2) \circ \dots \circ dW_{j_k}(\tau_k), \quad (6.4)$$

тогда

$${}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1)} \mathbb{k}(\cdot) = X_1(T), \quad {}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) = X_2(T), \quad \dots, \quad {}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) = X_k(T).$$

Теорема 6.1. Пусть $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_s$ — спектральные характеристики гауссовских белых шумов $V_1(\cdot), \dots, V_s(\cdot)$ соответственно, P^{-1} — спектральная характеристика оператора интегрирования, V — спектральная характеристика оператора умножения функций. Спектральные характеристики P^{-1} и V определены относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$. Тогда повторный стохастический интеграл Стратоновича (6.1) представляется с помощью соотношений

$${}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_k}^T \mathcal{X}_{k-1}, \quad \mathcal{X}_l = P^{-1}(V \mathcal{V}_{j_l}) \mathcal{X}_{l-1}, \quad l = 2, \dots, k-1, \quad \mathcal{X}_1 = P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}, \quad (6.5)$$

или в явном виде

$${}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_k}^T P^{-1}(V \mathcal{V}_{j_{k-1}}) \dots P^{-1}(V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}. \quad (6.6)$$

Доказательство. Представим систему стохастических дифференциальных уравнений (6.2) в интегральной форме записи:

$$X_1(t) = \int_{t_0}^t dW_{j_1}(\tau) = W_{j_1}(t), \quad X_2(t) = \int_{t_0}^t X_1(\tau) \circ dW_{j_2}(\tau), \quad \dots, \quad X_k(t) = \int_{t_0}^t X_{k-1}(\tau) \circ dW_{j_k}(\tau),$$

и применим спектральное преобразование к левой и правой частям каждого уравнения (см. разд. 2.2):

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[X_1(\cdot)] &= \mathbb{S}[W_{j_1}(\cdot)], \quad \mathbb{S}[X_2(\cdot)] = \mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} X_1(\tau) \circ dW_{j_2}(\tau)\right], \quad \dots, \\ \mathbb{S}[X_k(\cdot)] &= \mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} X_{k-1}(\tau) \circ dW_{j_k}(\tau)\right]. \end{aligned}$$

Обозначая через \mathcal{X}_l спектральные характеристики случайных процессов $X_l(\cdot)$ (см. разд. 2.2), $l = 1, \dots, k-1$, получаем $\mathcal{X}_1 = \mathcal{W}_{j_1} = P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}$, где \mathcal{W}_{j_1} — спектральная характеристика винеровского процесса $W_{j_1}(\cdot)$ согласно представлению (2.31). Далее по свойству (2.81) спектрального преобразования стохастического интеграла Стратоновича имеем

$$\mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} X_{l-1}(\tau) \circ dW_{j_l}(\tau)\right] = P^{-1, \mathcal{V}_{j_l}} \mathcal{X}_{l-1}, \quad l = 2, \dots, k,$$

где $P^{-1, \mathcal{V}_{j_l}}$ — спектральные характеристики операторов стохастического интегрирования (см. разд. 2.7). С учетом формулы (2.78) находим

$$\mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} X_{l-1}(\tau) \circ dW_{j_l}(\tau)\right] = P^{-1}(V \mathcal{V}_{j_l}) \mathcal{X}_{l-1}, \quad l = 2, \dots, k,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 &= \mathcal{W}_{j_1} = P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}, \quad \mathcal{X}_2 = P^{-1}(V \mathcal{V}_{j_2}) \mathcal{X}_1 = P^{-1}(V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}, \quad \dots, \\ \mathcal{X}_{k-1} &= P^{-1}(V \mathcal{V}_{j_{k-1}}) \mathcal{X}_{k-2} = P^{-1}(V \mathcal{V}_{j_{k-1}}) \dots P^{-1}(V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$X_k(T) = \int_{\mathbb{T}} X_{k-1}(t) \circ dW_{j_k}(t) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_k)} X_{k-1}(\cdot),$$

где ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_k)}$ — случайный линейный функционал, ставящий в соответствие случайному процессу $X_{k-1}(\cdot)$ стохастический интеграл Стратоновича по винеровскому процессу $W_{j_k}(\cdot)$ на отрезке \mathbb{T} (см. разд. 2.3), можно применить формулу (2.37). Тогда

$$X_k(T) = \mathcal{V}_{j_k}^T \mathcal{X}_{k-1} = \mathcal{V}_{j_k}^T P^{-1}(V \mathcal{V}_{j_{k-1}}) \dots P^{-1}(V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1},$$

т.е. справедливы формулы (6.5) и (6.6). ◀

Теорема 6.1 дает представление повторных стохастических интегралов Стратоновича с ядром $\mathbb{k}(\cdot)$ для произвольного $k \geq 2$. Например,

$$\begin{aligned} {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) &= \mathcal{V}_{j_2}^T P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}, & {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) &= \mathcal{V}_{j_3}^T P^{-1}(V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}, \\ {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) &= \mathcal{V}_{j_4}^T P^{-1}(V \mathcal{V}_{j_3}) P^{-1}(V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}, & \dots \end{aligned}$$

В разд. 4.2 уравнения (4.37) рассматривались в том числе как математическая модель системы управления с входными сигналами $f_l(\cdot)$ и выходными сигналами $x_l(\cdot)$ — детерминированными функциями (см. рис. 4.1), $l = 1, \dots, k$. Кроме того, в том же разделе сформулирована теорема 4.4 о представлении значения функционала $\mathcal{J}_{\Delta \mathbb{T}^k}$ на функции $f(\cdot) = f_1(\cdot) \otimes \dots \otimes f_k(\cdot)$ в виде (4.36). Если в этой формуле положить $F_l = \mathcal{V}_{j_l}$, т.е. вместо спектральных характеристик F_1, \dots, F_k функций $f_1(\cdot), \dots, f_k(\cdot)$ подставить спектральные характеристики $\mathcal{V}_{j_1}, \dots, \mathcal{V}_{j_k}$ белых шумов $V_{j_1}(\cdot), \dots, V_{j_k}(\cdot)$ соответственно, то будет получена формула (6.6). Это неудивительно, так как уравнения (6.3) можно рассматривать как математическую модель стохастической системы управления с входными сигналами $f_l(\cdot) = V_{j_l}(\cdot)$ и выходными сигналами $X_l(\cdot)$ — случайными процессами (см. рис. 6.1). Кроме того, можно записать

$$\mathcal{J}_{\Delta \mathbb{T}^k} V_{j_1}(\cdot) \otimes \dots \otimes V_{j_k}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot),$$

где указанное соотношение следует понимать формально, поскольку функционал $\mathcal{J}_{\Delta \mathbb{T}^k}$ определен для функций из пространства $L_2(\mathbb{T}^k)$ (см. разд. 4.1).

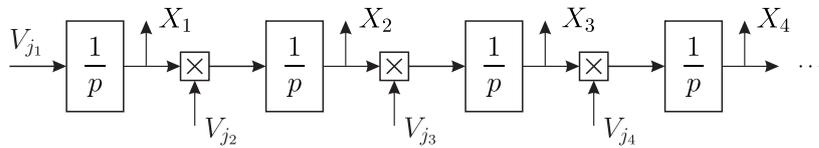


Рис. 6.1. Структурная схема системы управления (повторные стохастические интегралы Стратоновича от функций $\mathbb{k}(\cdot)$)

Такой же подход можно применить для представления повторных стохастических интегралов Стратоновича кратности $k \geq 2$ более общего вида

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_{\psi}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} \psi_1(t_1) \psi_2(t_2) \dots \psi_k(t_k) \circ dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2) \circ \dots \circ dW_{j_k}(t_k), \quad (6.7)$$

где функция $\mathbb{k}_{\psi}(\cdot)$ задается формулой (4.24) через весовые функции $\psi_l(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, $l = 1, \dots, k$, а остальные обозначения такие же, как и ранее.

Интегралу (6.7) отвечает следующая система линейных стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича:

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= \psi_1(t) \circ dW_{j_1}(t), & X_1(t_0) &= 0, \\ dX_2(t) &= \psi_2(t) X_1(t) \circ dW_{j_2}(t), & X_2(t_0) &= 0, \\ &\dots, \\ dX_k(t) &= \psi_k(t) X_{k-1}(t) \circ dW_{j_k}(t), & X_k(t_0) &= 0, \end{aligned} \quad (6.8)$$

или в форме Ланжевена:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= \psi_1(t) V_{j_1}(t), & X_1(t_0) &= 0, \\ \dot{X}_2(t) &= \psi_2(t) X_1(t) V_{j_2}(t), & X_2(t_0) &= 0, \\ &\dots, \\ \dot{X}_k(t) &= \psi_k(t) X_{k-1}(t) V_{j_k}(t), & X_k(t_0) &= 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Последовательно интегрируя уравнения (6.8), находим

$$X_k(t) = \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{\tau_3} \int_{t_0}^{\tau_2} \psi_1(\tau_1) \psi_2(\tau_2) \dots \psi_k(\tau_k) \circ dW_{j_1}(\tau_1) \circ dW_{j_2}(\tau_2) \circ \dots \circ dW_{j_k}(\tau_k), \quad (6.10)$$

тогда

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1)} \mathbb{K}_{\psi}(\cdot) = X_1(T), \quad {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{K}_{\psi}(\cdot) = X_2(T), \quad \dots, \quad {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{K}_{\psi}(\cdot) = X_k(T).$$

Теорема 6.2. Пусть выполнены условия теоремы 6.1 и, кроме того, Ψ_1, \dots, Ψ_k — спектральные характеристики операторов умножения на функции $\psi_1(\cdot), \dots, \psi_k(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, определенные относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$. Тогда повторный стохастический интеграл Стратоновича (6.7) представляется с помощью соотношений

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{K}_{\psi}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_k}^{\mathbb{T}} \Psi_k \mathcal{X}_{k-1}, \quad \mathcal{X}_l = P^{-1} \Psi_l (V \mathcal{V}_{j_l}) \mathcal{X}_{l-1}, \quad l = 2, \dots, k-1, \quad \mathcal{X}_1 = P^{-1} \Psi_1 \mathcal{V}_{j_1}, \quad (6.11)$$

или в явном виде

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{K}_{\psi}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_k}^{\mathbb{T}} \Psi_k P^{-1} \Psi_{k-1} (V \mathcal{V}_{j_{k-1}}) \dots P^{-1} \Psi_2 (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} \Psi_1 \mathcal{V}_{j_1}. \quad (6.12)$$

Доказательство. Систему стохастических дифференциальных уравнений (6.8) можно представить в интегральной форме, т.е.

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \int_{t_0}^t \psi_1(\tau) \circ dW_{j_1}(\tau), & X_2(t) &= \int_{t_0}^t \psi_2(\tau) X_1(\tau) \circ dW_{j_2}(\tau), & \dots, \\ X_k(t) &= \int_{t_0}^t \psi_k(\tau) X_{k-1}(\tau) \circ dW_{j_k}(\tau), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[X_1(\cdot)] &= \mathbb{S} \left[\int_{t_0}^{(\cdot)} \psi_1(\tau) \circ dW_{j_1}(\tau) \right], & \mathbb{S}[X_2(\cdot)] &= \mathbb{S} \left[\int_{t_0}^{(\cdot)} \psi_2(\tau) X_1(\tau) \circ dW_{j_2}(\tau) \right], & \dots, \\ \mathbb{S}[X_k(\cdot)] &= \mathbb{S} \left[\int_{t_0}^{(\cdot)} \psi_k(\tau) X_{k-1}(\tau) \circ dW_{j_k}(\tau) \right]. \end{aligned}$$

Далее будем использовать обозначения, введенные при доказательстве теоремы 6.1. По свойству (2.80) спектрального преобразования интеграла от неслучайной функции с учетом формулы (2.78) имеем $\mathcal{X}_1 = P^{-1, \mathcal{V}_{j_1}} \tilde{\Psi}_1 = P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_1}) \tilde{\Psi}_1$, где $\tilde{\Psi}_1$ — спектральная характеристика функции $\psi_1(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$, связанная со спектральной характеристикой Ψ_1 оператора умножения на эту функцию соотношением (1.78): $\Psi_1 = V \tilde{\Psi}_1$. Тогда

по свойству (1.80) спектрального преобразования произведения функций одной переменной $(V\mathcal{V}_{j_1})\tilde{\Psi}_1 = (V\tilde{\Psi}_1)\mathcal{V}_{j_1} = \Psi_1\mathcal{V}_{j_1}$, т.е. $\mathcal{X}_1 = P^{-1}\Psi_1\mathcal{V}_{j_1}$.

Применим свойство (1.73) спектрального преобразования произведения функций одной переменной: $\mathbb{S}[\psi_l(\cdot)X_{l-1}(\cdot)] = \Psi_l\mathcal{X}_{l-1}$, $l = 2, \dots, k$, а также свойство (2.81) спектрального преобразования стохастического интеграла Стратоновича:

$$\mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} \psi_l(\tau)X_{l-1}(\tau) \circ dW_{j_l}(\tau)\right] = P^{-1}\mathcal{V}_{j_l}\Psi_l\mathcal{X}_{l-1} = P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_l})\Psi_l\mathcal{X}_{l-1}, \quad l = 2, \dots, k.$$

Таким образом, принимая во внимание свойство (1.74) симметричности спектральной характеристики оператора умножения, а значит коммутативности произведения матриц $(V\mathcal{V}_{j_l})\Psi_l$, находим

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 &= P^{-1}\Psi_1\mathcal{V}_{j_1}, \quad \mathcal{X}_2 = P^{-1}\Psi_2(V\mathcal{V}_{j_2})\mathcal{X}_1 = P^{-1}\Psi_2(V\mathcal{V}_{j_2})P^{-1}\Psi_1\mathcal{V}_{j_1}, \quad \dots, \\ \mathcal{X}_{k-1} &= P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_{k-1}})\mathcal{X}_{k-2} = P^{-1}\Psi_{k-1}(V\mathcal{V}_{j_{k-1}})\dots P^{-1}\Psi_2(V\mathcal{V}_{j_2})P^{-1}\Psi_1\mathcal{V}_{j_1}, \end{aligned}$$

а так как

$$X_k(T) = \int_{\mathbb{T}} \psi_k(t)X_{k-1}(t) \circ dW_{j_k}(t) = {}^S\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_k)}\psi_k(\cdot)X_{k-1}(\cdot) \quad \text{и} \quad \mathbb{S}[\psi_k(\cdot)X_{k-1}(\cdot)] = \Psi_k\mathcal{X}_{k-1}$$

согласно свойству (1.73) спектрального преобразования произведения функций одной переменной и выражению (2.37), получаем

$$X_k(T) = \mathcal{V}_{j_k}^T\Psi_k\mathcal{X}_{k-1} = \mathcal{V}_{j_k}^T\Psi_kP^{-1}\Psi_{k-1}(V\mathcal{V}_{j_{k-1}})\dots P^{-1}\Psi_2(V\mathcal{V}_{j_2})P^{-1}\Psi_1\mathcal{V}_{j_1},$$

т.е. справедливы формулы (6.11) и (6.12). ◀

На основе теоремы 6.2 можно представить повторные стохастические интегралы Стратоновича с ядром $\mathbb{K}_\psi(\cdot)$ для произвольного $k \geq 2$, учитывая весовые функции $\psi_l(\cdot)$, $l = 1, \dots, k$. Например,

$$\begin{aligned} {}^S\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1j_2)}\mathbb{K}_\psi(\cdot) &= \mathcal{V}_{j_2}^T\Psi_2P^{-1}\Psi_1\mathcal{V}_{j_1}, \quad {}^S\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1j_2j_3)}\mathbb{K}_\psi(\cdot) = \mathcal{V}_{j_3}^T\Psi_3P^{-1}\Psi_2(V\mathcal{V}_{j_2})P^{-1}\Psi_1\mathcal{V}_{j_1}, \\ {}^S\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1j_2j_3j_4)}\mathbb{K}_\psi(\cdot) &= \mathcal{V}_{j_4}^T\Psi_4P^{-1}\Psi_3(V\mathcal{V}_{j_3})P^{-1}\Psi_2(V\mathcal{V}_{j_2})P^{-1}\Psi_1\mathcal{V}_{j_1}, \quad \dots \end{aligned}$$

Также напомним, что если справедливо условие (4.26), то каждая спектральная характеристика Ψ_l — это либо бесконечная единичная матрица E , либо n_l -я степень спектральной характеристики A оператора умножения на функцию $a_1(t) = t - t_0$ (см. примеры спектральных характеристик A в разд. 1.5). Она выражается соотношением (4.55).

Пример 6.1. Представить в спектральной форме математического описания повторные стохастические интегралы Стратоновича

$$\begin{aligned} {}^S\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1j_2)}\mathbb{K}_\psi(\cdot) &= \int_{\mathbb{T}} \int_{t_0}^{t_2} \psi_1(t_1)\psi_2(t_2) \circ dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2) = \\ &= \int_{\mathbb{T}} \psi_2(t_2) \int_{t_0}^{t_2} \psi_1(t_1) \circ dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2) \end{aligned}$$

кратности $k = 2$ при условии

$$\text{а) } \psi_1(t) = e^{\mu_1(t-t_0)}, \quad \psi_2(t) \equiv 1; \quad \text{б) } \psi_1(t) \equiv 1, \quad \psi_2(t) = e^{\mu_2(t-t_0)},$$

где $\mu_1 \neq 0$ и $\mu_2 \neq 0$ — числовые параметры, $\mathbb{T} = [t_0, T]$.

□ Обозначим через $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ базисную систему пространства $L_2(\mathbb{T})$, а через P^{-1} , Ψ_1 и Ψ_2 — спектральные характеристики оператора интегрирования, операторов умножения на

функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ соответственно, определенные относительно этой базисной системы. Для базисных систем (1.5)–(1.9) спектральные характеристики P^{-1} приведены в разд. 1.6, а спектральные характеристики Ψ_1 и Ψ_2 могут быть найдены по определению (см. разд. 1.5; для тождественно равной единице функции получаем бесконечную единичную матрицу E).

Согласно теореме 6.2 имеем

$$\int_{\mathbb{T}} \int_{t_0}^{t_2} e^{\mu_1(t_1-t_0)} \circ dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2) = \mathcal{V}_{j_2}^T P^{-1} \Psi_1 \mathcal{V}_{j_1},$$

$$\int_{\mathbb{T}} e^{\mu_2(t_2-t_0)} \int_{t_0}^{t_2} dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2) = \mathcal{V}_{j_2}^T \Psi_2 P^{-1} \mathcal{V}_{j_1},$$

где \mathcal{V}_{j_1} и \mathcal{V}_{j_2} — спектральные характеристики (2.26) белых шумов $V_{j_1}(\cdot)$ и $V_{j_2}(\cdot)$, образованные независимыми случайными величинами $\zeta_{i_1}^{(j_1)}$ и $\zeta_{i_2}^{(j_2)}$, имеющими стандартное нормальное распределение.

Если выбрать в качестве базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ функции Уолша (1.7) или функции Хаара (1.8), полагая $\mathbb{T} = [0, T]$, т.е. при условии $t_0 = 0$, то для нахождения спектральных характеристик Ψ_1 и Ψ_2 можно воспользоваться формулами для вычисления элементов спектральной характеристики F^μ показательной функции $f_\mu(t) = e^{\mu t}$ из примера 3.5.

Для функций Уолша

$$F_0^\mu = \sqrt{T} \frac{e^{\mu T} - 1}{\mu T}, \quad F_i^\mu = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{2^{m+1}} (-1)^{j+1} \hat{W} \left(k, \frac{2j-1}{2^{m+2}} T \right) \left(e^{\frac{j\mu T}{2^{m+1}}} - e^{\frac{(j-1)\mu T}{2^{m+1}}} \right),$$

а для функций Хаара

$$F_0^\mu = \sqrt{T} \frac{e^{\mu T} - 1}{\mu T}, \quad F_i^\mu = -\frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{2^m}{T}} e^{\frac{k\mu T}{2^m}} \left(e^{\frac{\mu T}{2^{m+1}}} - 1 \right)^2,$$

где $i = 2^m + k$, $m = 0, 1, 2, \dots$ и $k = 0, 1, \dots, 2^m - 1$. Тогда с помощью формулы (1.78) получаем

$$\Psi_1 = \begin{cases} E, & \psi_1(t) \equiv 1, \\ VF^{\mu_1}, & \psi_1(t) = e^{\mu_1 t}, \end{cases} \quad \Psi_2 = \begin{cases} E, & \psi_2(t) \equiv 1, \\ VF^{\mu_2}, & \psi_2(t) = e^{\mu_2 t}, \end{cases}$$

где V — спектральная характеристика оператора умножения функций (см. разд. 1.5).

Кроме того, допустимо применить способ, описанный в разд. 1.8, вне зависимости от базисной системы. ■

Наиболее востребованный далее вариант предполагает, что $\mathbb{T} = [0, T]$, т.е. $t_0 = 0$, а функции $\psi_l(\cdot)$ и спектральные характеристики Ψ_l определяются формулами (4.26) и (4.55) соответственно, $l = 1, \dots, k$. Таким образом, функция $\mathbb{k}_\psi(\cdot)$ — это функция $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$, а каждая спектральная характеристика Ψ_l выражается как n_l -я степень спектральной характеристики A оператора умножения на функцию $a_1(t) = t$ (см. примеры спектральных характеристик A в разд. 1.5), $n_l = 0, 1, 2, \dots$. Тогда повторный стохастический интеграл Стратоновича представляется следующими выражениями:

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_k}^T A^{n_k} \mathcal{X}_{k-1}, \quad (6.13)$$

$$\mathcal{X}_l = P^{-1} A^{n_l} (V \mathcal{V}_{j_l}) \mathcal{X}_{l-1}, \quad l = 2, \dots, k-1, \quad \mathcal{X}_1 = P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1},$$

или в явном виде

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_k}^T A^{n_k} P^{-1} A^{n_{k-1}} (V \mathcal{V}_{j_{k-1}}) \dots P^{-1} A^{n_2} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1}. \quad (6.14)$$

Сформулируем важное *свойство повторного стохастического интеграла Стратоновича*, связанное со сдвигом и масштабированием базисной системы:

$${}^S \mathcal{J}_{[t_0, T]}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot) \stackrel{d}{=} (T - t_0)^{k/2 + n_1 + \dots + n_k} \cdot {}^S \mathcal{J}_{[0, 1]}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}^*(\cdot), \quad (6.15)$$

где функция $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}^*(\cdot)$ определяется с учетом условия (4.26), но при $t_0 = 0$, а равенство (6.15) понимается в смысле равенства по распределению, т.е. случайные величины в его левой и правой частях распределены по одному закону. Но, например, при $[t_0, T] = [0, 1]$ это равенство справедливо с вероятностью 1, а при $[t_0, T] \cap [0, 1] = \emptyset$ в левой и правой частях равенства независимые случайные величины.

Доказательство. Действительно, пусть $\{\tilde{q}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ — базисная система пространства $L_2([0, 1])$, а $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ — соответствующая ей базисная система пространства $L_2([t_0, T])$ (см. п. 1 замечаний 1.1). Тогда каждый множитель P^{-1} или A в формуле (6.14) дает вклад 1 в степень разности $T - t_0$ согласно связям (1.88) и (1.75) спектральных характеристик оператора интегрирования и оператора умножения на функцию $a_1(t) = t$ соответственно (таких множителей $k - 1$ и $n_1 + \dots + n_k$), а каждый множитель V обеспечивает вклад $-1/2$ в степень разности $T - t_0$, что следует из связи (1.82) (таких множителей $k - 2$). Отсюда находим итоговую степень:

$$k - 1 + n_1 + \dots + n_k - \frac{k - 2}{2} = \frac{k}{2} + n_1 + \dots + n_k.$$

Естественно, этот же результат получается, если взять за основу рекуррентное соотношение (6.13). Степень разности $T - t_0$ для спектральной характеристики \mathcal{X}_1 при сдвиге и масштабировании базисной системы равна $d_1 = 1 + n_1$ (множители P^{-1} и A^{n_1}), а степень $n_2 + d_1 = 1 + n_1 + n_2$ соответствует интегралу кратности $k = 2$ (множитель A^{n_2}). Если спектральной характеристике \mathcal{X}_{l-1} соответствует степень d_{l-1} , то спектральной характеристике \mathcal{X}_l соответствует степень $d_l = 1 + n_l - 1/2 + d_{l-1} = 1/2 + n_l + d_{l-1}$ (множители P^{-1} , A^{n_l} и V). Интегралу кратности k отвечает степень $d_{k-1} + n_k = k/2 + n_1 + \dots + n_k$ (множитель A^{n_k}). ◀

Из этого свойства следует, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^S \mathcal{J}_{[t_0, T]}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot) &= (T - t_0)^{k/2 + n_1 + \dots + n_k} \cdot \mathbb{E}^S \mathcal{J}_{[0, 1]}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}^*(\cdot), \\ \mathbb{E} \left(\mathcal{J}_{[t_0, T]}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot) \right)^2 &= (T - t_0)^{k + 2(n_1 + \dots + n_k)} \cdot \mathbb{E} \left(\mathcal{J}_{[0, 1]}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}^*(\cdot) \right)^2. \end{aligned}$$

Пример 6.2. Представить в спектральной форме математического описания повторные стохастические интегралы Стратоновича

$$\begin{aligned} {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}_\psi(\cdot) &= \int_{\mathbb{T}} \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} \psi_1(t_1) \psi_2(t_2) \psi_3(t_3) \circ dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2) \circ dW_{j_3}(t_3) = \\ &= \int_{\mathbb{T}} \psi_3(t_3) \int_0^{t_3} \psi_2(t_2) \int_0^{t_2} \psi_1(t_1) \circ dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2) \circ dW_{j_3}(t_3) \end{aligned}$$

кратности $k = 3$ при условии $\mathbb{T} = [0, T]$, т.е. $t_0 = 0$, $\psi_l(t) = t^{n_l}$, $n_l \in \{0, 1\}$, $l = 1, 2, 3$.

□ Пусть система функций $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ образует базис пространства $L_2(\mathbb{T})$, а P^{-1} , A и V — спектральные характеристики оператора интегрирования, оператора умножения на функцию $a_1(t) = t$ и оператора умножения функций соответственно, определенные относительно этой базисной системы. Для базисных систем (1.5)–(1.9) спектральные характеристики A и V приведены в разд. 1.5, а спектральные характеристики P^{-1} — в разд. 1.6.

Согласно соотношению (4.55) спектральная характеристика Ψ_l оператора умножения на функцию $\psi_l(t)$ выражается так:

$$\Psi_l = \begin{cases} E, & n_l = 0, \\ A, & n_l = 1, \end{cases} \quad l = 1, 2, 3,$$

и далее остается применить теорему 6.2. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2) \circ dW_{j_k}(t_3) &= \mathcal{V}_{j_3}^T P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}, \\ \int_{\mathbb{T}} \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} t_1 \circ dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2) \circ dW_{j_k}(t_3) &= \mathcal{V}_{j_3}^T P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} A \mathcal{V}_{j_1}, \\ \int_{\mathbb{T}} \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} t_2 \circ dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2) \circ dW_{j_k}(t_3) &= \mathcal{V}_{j_3}^T P^{-1} A (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}, \\ \int_{\mathbb{T}} \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2) \circ dW_{j_k}(t_3) &= \mathcal{V}_{j_3}^T A P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}, \\ \int_{\mathbb{T}} \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} t_1 \circ dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2) \circ dW_{j_k}(t_3) &= \mathcal{V}_{j_3}^T P^{-1} A (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} A \mathcal{V}_{j_1}, \\ \int_{\mathbb{T}} \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} t_1 \circ dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2) \circ dW_{j_k}(t_3) &= \mathcal{V}_{j_3}^T A P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} A \mathcal{V}_{j_1}, \\ \int_{\mathbb{T}} \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2) \circ dW_{j_k}(t_3) &= \mathcal{V}_{j_3}^T A P^{-1} A (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}, \\ \int_{\mathbb{T}} \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} t_1 \circ dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2) \circ dW_{j_k}(t_3) &= \mathcal{V}_{j_3}^T A P^{-1} A (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} A \mathcal{V}_{j_1}, \end{aligned}$$

где \mathcal{V}_{j_1} , \mathcal{V}_{j_2} и \mathcal{V}_{j_3} — спектральные характеристики (2.26) белых шумов $V_{j_1}(\cdot)$, $V_{j_2}(\cdot)$ и $V_{j_3}(\cdot)$, элементы которых — это независимые случайные величины $\zeta_{i_1}^{(j_1)}$, $\zeta_{i_2}^{(j_2)}$ и $\zeta_{i_3}^{(j_3)}$, имеющие стандартное нормальное распределение.

В заключение добавим, что приведенные результаты легко переносятся на случай произвольного отрезка $\mathbb{T} = [t_0, T]$ при условии $\psi_l(t) = (t - t_0)^{n_l}$. Для этого достаточно определить A как спектральную характеристику оператора умножения на функцию $a_1(t) = t - t_0$. ■

В разд. 4.2 приведена теорема 4.5 о представлении значения функционала $\mathcal{J}_{\Delta \mathbb{T}^k}^\psi$ на функции $f(\cdot) = f_1(\cdot) \otimes \dots \otimes f_k(\cdot)$, оно задается формулой (4.42) и ему соответствует система управления с входными сигналами $f_l(\cdot)$ и выходными сигналами $x_l(\cdot)$ — детерминированными функциями, причем входные сигналы усиливаются с коэффициентами $\psi_l(\cdot)$ (см. рис. 4.2), $l = 1, \dots, k$. Легко видеть, что, полагая $F_l = \mathcal{V}_{j_l}$ в формуле (4.42), т.е. вместо спектральных характеристик F_1, \dots, F_k функций $f_1(\cdot), \dots, f_k(\cdot)$ подставляя спектральные характеристики $\mathcal{V}_{j_1}, \dots, \mathcal{V}_{j_k}$ белых шумов $V_{j_1}(\cdot), \dots, V_{j_k}(\cdot)$ соответственно, получается формула (6.12). Фактически, уравнения (6.9) можно формально рассматривать как математическую модель стохастической системы управления с входными сигналами $f_l(\cdot) = V_{j_l}(\cdot)$ и выходными сигналами $X_l(\cdot)$ — случайными процессами, а также дополнительными усилительными звеньями с коэффициентами усиления $\psi_l(\cdot)$ (см. рис. 6.2), при этом

$$\mathcal{J}_{\Delta \mathbb{T}^k}^\psi V_{j_1}(\cdot) \otimes \dots \otimes V_{j_k}(\cdot) = {}^s \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{K}_\psi(\cdot).$$

З а м е ч а н и я 6.1.

1. В работе [344] формулы (6.5) и (6.6) получены с помощью применения спектрального

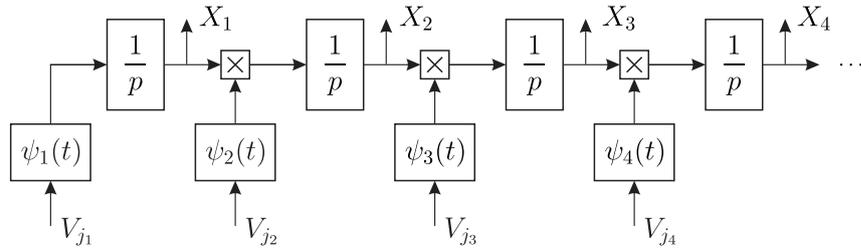


Рис. 6.2. Структурная схема системы управления (повторные стохастические интегралы Стратоновича от функций $\mathbb{k}_\psi(\cdot)$)

преобразования к левой и правой частям каждого уравнения системы (6.3). Формулы (6.11) и (6.12) можно вывести, преобразуя уравнения, составляющие систему (6.9).

2. Формулы (6.5) и (6.6), а также (6.11) и (6.12) могут быть записаны на основе представления (2.30) двумерной спектральной характеристики $E^\mathcal{V}$ случайного линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*W}$ (см. разд. 2.3 и теорему 2.3) при $k \geq 3$ и $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{j_l}$: $E^{\mathcal{V}_{j_l}} = V\mathcal{V}_{j_l}$, $l = 2, \dots, k-1$, а именно

$$\begin{aligned} {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) &= \mathcal{V}_{j_k}^\top P^{-1} E^{\mathcal{V}_{j_{k-1}}} \dots P^{-1} E^{\mathcal{V}_{j_2}} P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}, \\ {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_\psi(\cdot) &= \mathcal{V}_{j_k}^\top \Psi_k P^{-1} \Psi_{k-1} E^{\mathcal{V}_{j_{k-1}}} \dots P^{-1} \Psi_2 E^{\mathcal{V}_{j_2}} P^{-1} \Psi_1 \mathcal{V}_{j_1}, \end{aligned}$$

причем $E^{\mathcal{V}_{j_l}}$ и Ψ_l — это симметрические матрицы (см. свойства спектрального преобразования операторов умножения в разд. 1.5) и их произведение коммутативно.

3. Полагая $\mathcal{X}_0 = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — спектральная характеристика функции $f_0(t) \equiv 1$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$, рекуррентное соотношение (6.5) можно упростить:

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_k}^\top \mathcal{X}_{k-1}, \quad \mathcal{X}_l = P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_l})\mathcal{X}_{l-1}, \quad l = 1, \dots, k-1,$$

поскольку по свойству (1.80) спектрального преобразования произведения функций одной переменной $\mathcal{X}_1 = P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_1})\mathbf{1} = P^{-1}(V\mathbf{1})\mathcal{V}_{j_1} = P^{-1}E\mathcal{V}_{j_1} = P^{-1}\mathcal{V}_{j_1}$, где E — бесконечная единичная матрица. Аналогичное замечание справедливо для рекуррентного соотношения (6.11):

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_\psi(\cdot) = \mathcal{V}_{j_k}^\top \Psi_k \mathcal{X}_{k-1}, \quad \mathcal{X}_l = P^{-1}\Psi_l(V\mathcal{V}_{j_l})\mathcal{X}_{l-1}, \quad l = 1, \dots, k-1.$$

4. Буквальное применение алгоритма 3.2 (см. разд. 3.3) для решения систем стохастических дифференциальных уравнений (6.3) и (6.9) вряд ли оправдано, так как эти системы имеют специальный вид. Сравнивая их с уравнением (3.27), можно сделать вывод, что $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ — нулевые матрицы, $c^j(\cdot)$ — разреженные матрицы с ненулевыми поддиагональными элементами, $d^j(\cdot)$ — нулевые матрицы-столбцы, $j = 1, \dots, s$.

5. На основе интерпретации уравнений (6.3) как математической модели стохастической системы управления с входными сигналами $V_{j_l}(\cdot)$ и выходными сигналами $X_l(\cdot)$, $l = 1, \dots, k$, получается другое представление повторного стохастического интеграла Стратоновича. А именно, так как

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 &= P^{-1}\mathcal{V}_{j_1}, \quad \mathcal{X}_2 = P^{-1}(V\mathcal{X}_1)\mathcal{V}_{j_2} = P^{-1}(VP^{-1}\mathcal{V}_{j_1})\mathcal{V}_{j_2}, \quad \dots \\ \mathcal{X}_{k-1} &= P^{-1}(V\mathcal{X}_{k-2})\mathcal{V}_{j_{k-1}} = P^{-1}(\dots (VP^{-1}(VP^{-1}\mathcal{V}_{j_1})\mathcal{V}_{j_2}) \dots)\mathcal{V}_{j_{k-1}}, \end{aligned}$$

находим аналог формулы (4.46):

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_k}^\top P^{-1}(\dots (VP^{-1}(VP^{-1}\mathcal{V}_{j_1})\mathcal{V}_{j_2}) \dots)\mathcal{V}_{j_{k-1}}, \quad (6.16)$$

а аналог формулы (4.48) имеет вид

$${}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_\psi(\cdot) = \mathcal{V}_{j_k}^T \Psi_k P^{-1}(\dots (VP^{-1}(VP^{-1}\Psi_1 \mathcal{V}_{j_1})\Psi_2 \mathcal{V}_{j_2})\dots) \Psi_{k-1} \mathcal{V}_{j_{k-1}}, \quad (6.17)$$

где все необходимые обозначения введены в теоремах 6.1 и 6.2.

6. Формулы (6.6) и (6.16) — это частные случаи формул (6.12) и (6.17), а теорема 6.1 — частный случай теоремы 6.2 при условии $\psi_l(t) \equiv 1$ и $\Psi_l = E$, где E — бесконечная единичная матрица, $l = 1, \dots, k$.

7. Напомним, что спектральные характеристики $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_s$ гауссовских белых шумов $V_1(\cdot), \dots, V_s(\cdot)$ согласно (2.26) образованы независимыми случайными величинами $\zeta_{i_1}^{(1)}, \dots, \zeta_{i_s}^{(s)}$, имеющими стандартное нормальное распределение. Следовательно, соотношения (6.6) и (6.16) можно получить, умножая коэффициенты разложения $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}$ функции $\mathbb{k}(\cdot)$, выраженные формулами (4.49) и (4.50) соответственно, на произведение $\zeta_{i_1}^{(j_1)} \dots \zeta_{i_k}^{(j_k)}$ и суммируя по i_1, \dots, i_k с учетом того, что $\mathcal{V}_j = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i^{(j)} E_i$, $j = 1, \dots, s$.

Аналогичное замечание справедливо для соотношений (6.12) и (6.17), но при этом следует использовать соответственно формулы (4.52) и (4.53) для коэффициентов разложения $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}^\psi$ функции $\mathbb{k}_\psi(\cdot)$ (см. разд. 5.4 и разложение (5.51)). И здесь уместно напомнить формулу (5.62), согласно которой

$${}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) = [\mathcal{V}^{\otimes(j_1 \dots j_k)}]^\top \mathbb{K}, \quad {}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_\psi(\cdot) = [\mathcal{V}^{\otimes(j_1 \dots j_k)}]^\top \mathbb{K}^\psi.$$

8. Можно рассмотреть повторные стохастические интегралы Стратоновича смешанного типа. Воспользуемся подходом, который применяется в работе [77], а именно дополним множество значений j_1, \dots, j_k нулем и введем функцию $W_0(t) = t$, т.е. $dW_0(t) = dt$. Тогда формулы (6.1) и (6.7) определяют повторные стохастические интегралы более широкого класса при условии $j_1 + \dots + j_k > 0$. Вариант, при котором все значения j_1, \dots, j_k нулевые, соответствует линейным функционалам $\mathcal{J}_{\Delta T^k}$ и $\mathcal{J}_{\Delta T^k}^\psi$ (см. примеры линейных функционалов на множестве функций многих переменных в разд. 4.2). Например, интегралы кратности $k = 2$ вида (6.1):

$${}^S \mathcal{J}_T^{W(0j_2)} \mathbb{k}(\cdot) = \int_T \int_{t_0}^{t_2} dt_1 dW_{j_2}(t_2) \quad \text{и} \quad {}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 0)} \mathbb{k}(\cdot) = \int_T \int_{t_0}^{t_2} dW_{j_1}(t_1) dt_2,$$

или интеграл кратности $k = 3$ вида (6.7):

$${}^S \mathcal{J}_T^{W(0j_2 0)} \mathbb{k}_\psi(\cdot) = \int_T \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} \psi_1(t_1) \psi_2(t_2) \psi_3(t_3) dt_1 dW_{j_2}(t_2) dt_3.$$

Отметим, что элементы (2.76) спектральной характеристики $P^{-1, \mathcal{V}}$ оператора стохастического интегрирования (см. разд. 2.7) выражаются как повторные стохастические интегралы смешанного типа.

Система стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича, соответствующая интегралу смешанного типа, имеет вид

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= \delta_{j_1 0} \psi_1(t) dt + \bar{\delta}_{j_1 0} \psi_1(t) dW_{j_1}(t), \\ dX_2(t) &= \delta_{j_2 0} \psi_2(t) X_1(t) dt + \bar{\delta}_{j_2 0} \psi_2(t) X_1(t) \circ dW_{j_2}(t), \\ &\dots, \\ dX_k(t) &= \delta_{j_k 0} \psi_k(t) X_{k-1}(t) dt + \bar{\delta}_{j_k 0} \psi_k(t) X_{k-1}(t) \circ dW_{j_k}(t), \end{aligned} \quad (6.18)$$

где $\bar{\delta}_{j_l 0} = 1 - \delta_{j_l 0}$, $\delta_{j_l 0}$ — символ Кронекера (1.4), $l = 1, \dots, k$. Формально с учетом определения функции $W_0(\cdot)$ система (6.18) идентична системе (6.8), а в частном случае $\psi_l(t) \equiv 1$ — системе (6.2), поскольку

$$\begin{aligned} \delta_{j_1 0} dt + \bar{\delta}_{j_1 0} dW_{j_1}(t) &= dW_{j_1}(t), \\ \delta_{j_l 0} X_{l-1}(t) dt + \bar{\delta}_{j_l 0} X_{l-1}(t) \circ dW_{j_l}(t) &= X_{l-1}(t) \circ dW_{j_l}(t), \quad l = 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Для представления повторных стохастических интегралов Стратоновича смешанного типа с помощью спектральной формы математического описания достаточно опираться на теоремы 6.1 и 6.2, дополнительно обозначая $\mathcal{V}_0 = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — спектральная характеристика функции $f_0(t) \equiv 1$. Доказательство этого приводить не будем (такая теорема сформулирована и доказана в [347]), так как оно комбинирует шаги из доказательств теоремы 4.4, а также теорем 6.1 и 6.2. Однако полезно указать, что формулы (6.5) и (6.6) можно упростить с помощью выражений $P^{-1}\mathcal{V}_0 = P^{-1}\mathbf{1} = F$, $V\mathcal{V}_0 = V\mathbf{1} = E$, в которых F — спектральная характеристика функции $f_1(t) = t - t_0$, что следует из свойства (1.86) спектрального преобразования интегралов от функций одной переменной и теоремы 1.7, а остальные обозначения приведены в теореме 6.1 (см. также пример 1.13). Для упрощения формулы (6.16) можно воспользоваться соотношениями $VP^{-1}\mathcal{V}_0 = VF = A$, $A\mathbf{1} = F$, где A — спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a_1(t) = t - t_0$, которые следуют из свойства (1.73) спектрального преобразования произведения функций одной переменной, а также аналогичными соотношениями, в том числе полученными в примере 1.13.

Также упрощаются формулы (6.11), (6.12) и (6.17), например с помощью следующих выражений: $\Psi_1\mathcal{V}_0 = \Psi_1\mathbf{1} = \tilde{\Psi}_1$, $\Psi_l(V\mathcal{V}_0) = \Psi_l E = \Psi_l$, $l = 2, \dots, k-1$, где $\tilde{\Psi}_1$ — спектральная характеристика функции $\psi_1(\cdot)$, а остальные обозначения соответствуют теореме 6.2. Все используемые в этом пункте спектральные характеристики определены относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$.

Для повторных стохастических интегралов Стратоновича смешанного типа следует внести изменения в *свойство повторного стохастического интеграла Стратоновича*, связанное со сдвигом и масштабированием базисной системы:

$${}^S \mathcal{J}_{[t_0, T]}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{K}_{n_1 \dots n_k}(\cdot) \stackrel{d}{=} (T - t_0)^{k/2 + \sum_{l=1}^k (\delta_{j_l 0}/2 + n_l)} \cdot {}^S \mathcal{J}_{[0, 1]}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{K}_{n_1 \dots n_k}^*(\cdot),$$

где все обозначения описаны после формулы (6.15). Это продиктовано вкладом $1/2$ в степень разности $T - t_0$ согласно связи (1.27) спектральных характеристик функций, а количество таких множителей в формуле (6.14) равно числу нулевых значений j_1, \dots, j_k . Соответствующим образом модифицируются и соотношения для первых двух моментов таких повторных стохастических интегралов.

Пример 6.3. Представить в спектральной форме математического описания повторные стохастические интегралы Стратоновича

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{K}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \int_0^{t_2} dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2)$$

кратности $k = 2$ при условии $\mathbb{T} = [0, T]$, т.е. $t_0 = 0$, для двух вариантов:

$$\text{а) } j_1 = 0, j_2 \neq 0; \quad \text{б) } j_2 = 0, j_1 \neq 0.$$

□ Пусть $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$, P^{-1} — спектральная характеристика оператора интегрирования, а $\mathbf{1}$ и F — спектральные характеристики функций $f_0(t) \equiv 1$ и $f_1(t) = t$ соответственно, определенные относительно этой базисной системы. Для базисных систем (1.5)–(1.9) спектральные характеристики P^{-1} даны в разд. 1.6, а спектральные характеристики $\mathbf{1}$ и F найдены в примерах 1.1–1.3, а также приведены в замечании 1.3.

Согласно теореме 6.1 с учетом п. 8 замечаний 6.1 получаем

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_2}^T P^{-1} \mathcal{V}_{j_1},$$

где \mathcal{V}_{j_1} и \mathcal{V}_{j_2} при условии $j_1, j_2 \neq 0$ — спектральные характеристики (2.26) белых шумов $V_{j_1}(\cdot)$ и $V_{j_2}(\cdot)$, образованные независимыми случайными величинами $\zeta_{i_1}^{(j_1)}$ и $\zeta_{i_2}^{(j_2)}$, имеющими стандартное нормальное распределение, а $\mathcal{V}_0 = \mathbf{1}$. Тогда

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(0 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_2}^T P^{-1} \mathbf{1} = \mathcal{V}_{j_2}^T F$$

и

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 0)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathbf{1}^T P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} = \mathcal{V}_{j_1}^T [P^{-1}]^T \mathbf{1} = \mathcal{V}_{j_1}^T (\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T - P^{-1}) \mathbf{1} = \mathcal{V}_{j_1}^T (\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T \mathbf{1} - P^{-1} \mathbf{1}) = \mathcal{V}_{j_1}^T (T \mathbf{1} - F),$$

что следует из связи (1.87) и свойства (1.25) сохранения нормы (см. пример 1.2), которое обеспечивает равенство $\mathbf{1}^T \mathbf{1} = T$.

Найденные выражения — это стохастические интегралы (2.28) от детерминированных функций (см. разд. 2.3):

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_2)} f_1(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} t dW_{j_2}(t) = \mathcal{V}_{j_2}^T F, \quad \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1)} (T - f_1(\cdot)) = \int_{\mathbb{T}} (T - t) dW_{j_1}(t) = \mathcal{V}_{j_1}^T (T \mathbf{1} - F),$$

т.е. имеем известные соотношения [77]:

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(0 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_2)} f_1(\cdot), \quad {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 0)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1)} (T - f_1(\cdot)).$$

Действительно, первое из них получается тривиально:

$$\int_{\mathbb{T}} \int_0^{t_2} dt_1 dW_{j_2}(t_2) = \int_{\mathbb{T}} t dW_{j_2}(t),$$

а для второго нужно применить правило интегрирования по частям:

$$\int_{\mathbb{T}} \int_0^{t_2} dW_{j_1}(t_1) dt_2 = T \int_{\mathbb{T}} dW_{j_1}(t) - \int_{\mathbb{T}} t dW_{j_1}(t) = \int_{\mathbb{T}} (T - t) dW_{j_1}(t). \quad \blacksquare$$

Пример 6.4. Представить в спектральной форме математического описания повторные стохастические интегралы Стратоновича

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2) \circ dW_{j_3}(t_3)$$

кратности $k = 3$ при условии $\mathbb{T} = [0, T]$, т.е. $t_0 = 0$, для трех вариантов:

$$\text{а) } j_1 = 0, j_2, j_3 \neq 0; \quad \text{б) } j_2 = 0, j_1, j_3 \neq 0; \quad \text{в) } j_3 = 0, j_1, j_2 \neq 0.$$

□ Пусть P^{-1} , A и V — спектральные характеристики оператора интегрирования, оператора умножения на функцию $a_1(t) = t$ и оператора умножения функций (см. разд. 1.5 и 1.6), $\mathbf{1}$ и F — спектральные характеристики функций $f_0(t) \equiv 1$ и $f_1(t) = t$ соответственно (см. разд. 1.1). Все перечисленные спектральные характеристики определены относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$. Кроме того, E — бесконечная единичная матрица.

Применим теорему 6.1, дополнительно опираясь на п. 8 замечаний 6.1. Тогда

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_3}^T P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1},$$

где $\mathcal{V}_{j_1}, \mathcal{V}_{j_2}, \mathcal{V}_{j_3}$ при условии $j_1, j_2, j_3 \neq 0$ — спектральные характеристики (2.26) белых шумов $V_{j_1}(\cdot), V_{j_2}(\cdot), V_{j_3}(\cdot)$ с элементами $\zeta_{i_1}^{(j_1)}, \zeta_{i_2}^{(j_2)}, \zeta_{i_3}^{(j_3)}$ — независимыми случайными величинами, которые имеют стандартное нормальное распределение. Дополнительно будем использовать обозначение $\mathcal{V}_0 = \mathbf{1}$. Следовательно,

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(0j_2j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_3}^T P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} \mathbf{1} = \mathcal{V}_{j_3}^T P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_2}) F.$$

По свойству (1.80) спектрального преобразования произведения функций одной переменной $(V \mathcal{V}_{j_2}) F = (V F) \mathcal{V}_{j_2}$, а также $V F = A$ согласно соотношению (1.78). Поэтому

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(0j_2j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_3}^T P^{-1} A \mathcal{V}_{j_2}.$$

Далее,

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 0 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_3}^T P^{-1} (V \mathbf{1}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} = \mathcal{V}_{j_3}^T P^{-1} E P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} = \mathcal{V}_{j_3}^T P^{-2} \mathcal{V}_{j_1}$$

и другой вариант представления интеграла ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 0 j_3)} \mathbb{k}(\cdot)$ получается с помощью соотношения $P^{-2} = A P^{-1} - P^{-1} A$, которое найдено в примере 1.12 (см. также формулы (1.91)), т.е.

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 0 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_3}^T (A P^{-1} - P^{-1} A) \mathcal{V}_{j_1}.$$

Наконец,

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 0)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathbf{1}^T P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}$$

и, принимая во внимание свойство (1.74) симметричности спектральной характеристики оператора умножения и проводя такие же преобразования, как и в примере 6.3, а именно

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^T P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_2}) &= \mathbf{1}^T [\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T - P^{-1}]^T (V \mathcal{V}_{j_2}) = [(V \mathcal{V}_{j_2}) (\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T - P^{-1}) \mathbf{1}]^T = [(V \mathcal{V}_{j_2}) (\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T \mathbf{1} - P^{-1} \mathbf{1})]^T = \\ &= [(V \mathcal{V}_{j_2}) (T \mathbf{1} - F)]^T = [(T V \mathbf{1} - V F) \mathcal{V}_{j_2}]^T = [(T E - A) \mathcal{V}_{j_2}]^T = \mathcal{V}_{j_2}^T (T E - A), \end{aligned}$$

находим

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 0)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_2}^T (T E - A) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}.$$

Полученные выражения задают повторные стохастические интегралы Стратоновича (6.7) кратности $k = 2$ (см. также пример 4.4):

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_2 j_3)} \mathbb{k}_{10}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \int_0^{t_3} t_2 \circ dW_{j_2}(t_2) \circ dW_{j_3}(t_3) = \mathcal{V}_{j_3}^T P^{-1} A \mathcal{V}_{j_2},$$

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_3)} (\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot)) = \int_{\mathbb{T}} \int_0^{t_3} (t_3 - t_1) \circ dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_3}(t_3) = \mathcal{V}_{j_3}^T (A P^{-1} - P^{-1} A) \mathcal{V}_{j_1},$$

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} (T \mathbb{k}(\cdot) - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) = \int_{\mathbb{T}} \int_0^{t_2} (T - t_2) \circ dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2) = \mathcal{V}_{j_2}^T (T E - A) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1},$$

где $\mathbb{k}_{10}(t_1, t_2) = t_1 \mathbf{1}(t_2 - t_1)$, $\mathbb{k}_{01}(t_1, t_2) = t_2 \mathbf{1}(t_2 - t_1)$, $\mathbb{k}(t_1, t_2) = \mathbf{1}(t_2 - t_1)$.

Таким образом, приходим к известным соотношениям [77]:

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(0j_2j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_2j_3)} \mathbb{k}_{10}(\cdot),$$

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 0 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_3)} (\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot)), \quad {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 0)} \mathbb{k}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} (T \mathbb{k}(\cdot) - \mathbb{k}_{01}(\cdot)),$$

в левых частях которых $\mathbb{k}(\cdot)$ — функция (4.15) при $k = 3$.

Первые два момента (математическое ожидание и второй начальный момент) этих повторных стохастических интегралов Стратоновича кратности $k = 2$ найдены в примере 5.6.

Адаптируя результат указанного примера для рассматриваемой задачи, находим

$$\mathbb{E} {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(0j_2j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = \delta_{j_2 j_3} \frac{T^2}{4}, \quad \mathbb{E} ({}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(0j_2j_3)} \mathbb{k}(\cdot))^2 = \frac{T^4}{12} + \delta_{j_2 j_3} \frac{T^4}{16},$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 0 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) &= 0, & \mathbb{E}^S \left(\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 0 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) \right)^2 &= \frac{T^4}{12}, \\ \mathbb{E}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 0)} \mathbb{k}(\cdot) &= \delta_{j_1 j_2} \frac{T^2}{4}, & \mathbb{E}^S \left(\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 0)} \mathbb{k}(\cdot) \right)^2 &= \frac{T^4}{12} + \delta_{j_1 j_2} \frac{T^4}{16}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Результаты этого раздела можно обобщить, допуская, что в формуле (6.7) используются случайные процессы $\psi_l(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ вместо функций $\psi_l(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, а в формулах (6.11), (6.12) и (6.17) — спектральные характеристики Ψ_l операторов умножения на эти случайные процессы (см. разд. 2.6), $l \in \{1, \dots, k\}$. Фактически, такая возможность уже заложена в определении повторных стохастических интегралов Стратоновича (6.1) или (6.7).

Действительно, интеграл (6.7) (а в частном случае интеграл (6.1)) допустимо записать в форме

$$\begin{aligned} {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_{\psi}(\cdot) &= \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{t_0}^{t_{m+2}} \int_{t_0}^{t_{m+1}} \tilde{\psi}_{m+1}(t_{m+1}) \psi_{m+2}(t_{m+2}) \dots \psi_k(t_k) \circ \\ &\quad \circ dW_{j_{m+1}}(t_{m+1}) \circ dW_{j_{m+2}}(t_{m+2}) \circ \dots \circ dW_{j_k}(t_k), \end{aligned}$$

т.е. как интеграл вида (6.7) кратности $k' = k - m$, $1 \leq m < k$, где

$$\tilde{\psi}_{m+1}(t) = \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{\tau_2} \psi_1(\tau_1) \dots \psi_m(\tau_m) \circ dW_{j_1}(\tau_1) \circ \dots \circ dW_{j_m}(\tau_m).$$

В простейшем случае для интеграла (6.1) имеем

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{t_0}^{t_3} W_{j_1}(t_2) \circ dW_{j_2}(t_2) \circ \dots \circ dW_{j_k}(t_k),$$

но это интеграл вида (6.7) кратности $k' = k - 1$ при условии

$$\psi_1(t) = W_{j_1}(t), \quad \psi_2(t) = \dots = \psi_{k'}(t) \equiv 1.$$

И тогда, например, соотношение (6.6) с учетом представления (2.31) спектральной характеристики $\mathcal{W}_{j_1} = P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}$ винеровского процесса $W_{j_1}(\cdot)$ записывается так:

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_k}^T P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_{k-1}}) \dots P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_2}) \mathcal{W}_{j_1}.$$

Если принять во внимание, что спектральная характеристика Ψ_1 оператора умножения на винеровский процесс $W_{j_1}(\cdot)$ согласно формуле (2.75) выражается в виде $\Psi_1 = V \mathcal{W}_{j_1}$, а также применить свойство (1.80) спектрального преобразования произведения функций одной переменной, то интеграл ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot)$ можно представить следующим образом:

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_k}^T P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_{k-1}}) \dots P^{-1} (V \mathcal{W}_{j_1}) \mathcal{V}_{j_2} = \mathcal{V}_{j_k}^T P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_{k-1}}) \dots P^{-1} \Psi_1 \mathcal{V}_{j_2},$$

т.е. в виде соотношения (6.12) для интеграла кратности $k' = k - 1$ (см. теорему 6.2).

Следовательно, при спектральном представлении повторных стохастических интегралов Стратоновича можно использовать предварительное аналитическое интегрирование.

6.2. Представление повторных стохастических интегралов Ито

Перейдем к представлению повторных стохастических интегралов Ито кратности $k \geq 2$:

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} dW_{j_1}(t_1) dW_{j_2}(t_2) \dots dW_{j_k}(t_k), \quad (6.20)$$

где, как и ранее, $\mathbb{T} = [t_0, T]$, функция $\mathbb{k}(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ задается формулой (4.15); $j_1, \dots, j_k = 1, 2, \dots, s$; $W_1(\cdot), \dots, W_s(\cdot)$ — независимые стандартные винеровские процессы (см. разд. 2.1 и 5.2). Стохастические интегралы Ито кратности $k = 1$ рассматривались в разд. 2.3.

Повторный стохастический интеграл Ито (6.20) выражается через решение системы линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= dW_{j_1}(t), & X_1(t_0) &= 0, \\ dX_2(t) &= X_1(t)dW_{j_2}(t), & X_2(t_0) &= 0, \\ dX_3(t) &= X_2(t)dW_{j_3}(t), & X_3(t_0) &= 0, \\ &\dots, \\ dX_k(t) &= X_{k-1}(t)dW_{j_k}(t), & X_k(t_0) &= 0. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Последовательно интегрируя уравнения (6.21), находим

$$X_k(t) = \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{\tau_3} \int_{t_0}^{\tau_2} dW_{j_1}(\tau_1) dW_{j_2}(\tau_2) \dots dW_{j_k}(\tau_k), \quad (6.22)$$

т.е.

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1)} \mathbb{k}(\cdot) = X_1(T), \quad {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) = X_2(T), \quad \dots, \quad {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) = X_k(T).$$

Напомним (см. разд. 3.3), что применение спектральной формы математического описания предполагает использование обычных правил дифференцирования и интегрирования, поэтому перейдем к эквивалентной системе стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича.

Лемма 6.1. Система стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича, эквивалентная системе (6.21), имеет вид

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= dW_{j_1}(t), & X_1(t_0) &= 0, \\ dX_2(t) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} dt + X_1(t) \circ dW_{j_2}(t), & X_2(t_0) &= 0, \\ dX_3(t) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} X_1(t) dt + X_2(t) \circ dW_{j_3}(t), & X_3(t_0) &= 0, \\ &\dots, \\ dX_k(t) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_{k-1} j_k} X_{k-2}(t) dt + X_{k-1}(t) \circ dW_{j_k}(t), & X_k(t_0) &= 0, \end{aligned} \quad (6.23)$$

где $\delta_{j_{l-1} j_l}$ — символ Кронекера (1.4), $l = 2, \dots, k$.

Доказательство. Запишем систему (6.21) в виде (3.40), т.е. используем векторные обозначения (частный случай уравнения (3.1) с нулевым вектором сноса):

$$dX(t) = \sigma(X(t))dW(t), \quad X(t_0) = 0,$$

где $X(t) = [X_1(t) \ X_2(t) \ \dots \ X_k(t)]^T$, $W(t) = [W_1(t) \ W_2(t) \ \dots \ W_s(t)]^T$, а $\sigma(\cdot): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k \times s}$ — матричная функция, каждый столбец которой имеет вид

$$\sigma_{*j}(x) = [\alpha_1^j \ \alpha_2^j x_1 \ \dots \ \alpha_k^j x_{k-1}]^T, \quad j = 1, \dots, s,$$

где $\alpha_l^j = \delta_{j j_l}$, $l = 1, \dots, k$, при этом

$$\sum_{j=1}^s \sigma_{*j}(x) = [1 \ x_1 \ \dots \ x_{k-1}]^T \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^s \alpha_l^j = 1.$$

Далее определим вектор-функцию $a(\cdot): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ по формулам (3.3):

$$a(x) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \frac{\partial \sigma_{*j}(x)}{\partial x} \sigma_{*j}(x),$$

слагаемые которой записываются следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma_{*j}(x)}{\partial x} \sigma_{*j}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \alpha_2^j & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_3^j & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_k^j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^j \\ \alpha_2^j x_1 \\ \alpha_3^j x_2 \\ \vdots \\ \alpha_k^j x_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_1^j \alpha_2^j \\ \alpha_2^j \alpha_3^j x_1 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1}^j \alpha_k^j x_{k-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_{jj_1} \delta_{jj_2} \\ \delta_{jj_2} \delta_{jj_3} x_1 \\ \vdots \\ \delta_{jj_{k-1}} \delta_{jj_k} x_{k-2} \end{bmatrix}.$$

Произведение $\alpha_{l-1}^j \alpha_l^j = \delta_{jj_{l-1}} \delta_{jj_l}$ может быть равно единице только для одного $j = j_{l-1} = j_l$, поэтому

$$a(x) = -\frac{1}{2} [0 \ \delta_{j_1 j_2} \ \delta_{j_2 j_3} x_1 \ \dots \ \delta_{j_{k-1} j_k} x_{k-2}]^T,$$

где $a(\cdot)$ — вектор сноса [229] в векторном стохастическом дифференциальном уравнении Стратоновича (3.27):

$$dX(t) = a(X(t)) dt + \sigma(X(t)) \circ dW(t),$$

координатная форма записи которого — это система уравнений (6.23). ◀

Система стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича (6.23) в форме Ланжевена представляется в виде

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= V_{j_1}(t), & X_1(t_0) &= 0, \\ \dot{X}_2(t) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} + X_1(t) V_{j_2}(t), & X_2(t_0) &= 0, \\ \dot{X}_3(t) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} X_1(t) + X_2(t) V_{j_3}(t), & X_3(t_0) &= 0, \\ &\dots, \\ \dot{X}_k(t) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_{k-1} j_k} X_{k-2}(t) + X_{k-1}(t) V_{j_k}(t), & X_k(t_0) &= 0. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Отметим, что по аналогии с уравнениями (6.3) (см. представление повторных стохастических интегралов Стратоновича в разд. 6.1 и рис. 6.1) уравнения (6.24) можно интерпретировать как математическую модель стохастической системы управления с входными сигналами $f_l(\cdot) = V_{j_l}(\cdot)$ и выходными сигналами $X_l(\cdot)$ — случайными процессами, $l = 1, \dots, k$. Структурная схема такой системы управления показана на рис. 6.3.

Следствие 6.1. *Повторные стохастические интегралы Стратоновича (6.1) и Ито (6.20) совпадают с вероятностью 1, если ни одно из равенств $j_{l-1} = j_l$ не выполнено, $l = 2, \dots, k$. Если хотя бы одно из равенств $j_{l-1} = j_l$ выполнено, то интегралы (6.1) и (6.20) не совпадают.*

Следствие 6.2. *Система стохастических дифференциальных уравнений Ито, соответ-*

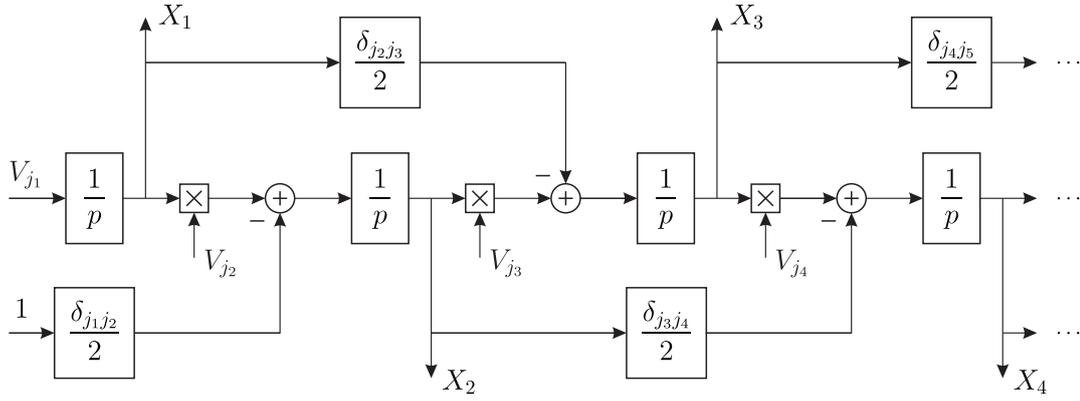


Рис. 6.3. Структурная схема системы управления (повторные стохастические интегралы Ито от функций $\mathbb{k}(\cdot)$)

ствующая системе (6.2), имеет вид

$$\begin{aligned}
 dX_1(t) &= dW_{j_1}(t), & X_1(t_0) &= 0, \\
 dX_2(t) &= \frac{1}{2} \delta_{j_1j_2} dt + X_1(t) dW_{j_2}(t), & X_2(t_0) &= 0, \\
 dX_3(t) &= \frac{1}{2} \delta_{j_2j_3} X_1(t) dt + X_2(t) dW_{j_3}(t), & X_3(t_0) &= 0, \\
 &\dots, \\
 dX_k(t) &= \frac{1}{2} \delta_{j_{k-1}j_k} X_{k-2}(t) dt + X_{k-1}(t) dW_{j_k}(t), & X_k(t_0) &= 0,
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

где $\delta_{j_{l-1}j_l}$ — символ Кронекера (1.4), $l = 2, \dots, k$.

Следствие 6.1 очевидно, а следствие 6.2 основано на связи (3.3) векторов сноса в стохастических дифференциальных уравнениях Ито и Стратоновича (см. разд. 3.1).

Теорема 6.3. Пусть $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_s$ — спектральные характеристики гауссовских белых шумов $V_1(\cdot), \dots, V_s(\cdot)$ соответственно, $\mathbf{1}$ — спектральная характеристика функции $f_0(t) \equiv 1$, P^{-1} — спектральная характеристика оператора интегрирования, V — спектральная характеристика оператора умножения функций. Спектральные характеристики $\mathbf{1}$, P^{-1} и V определены относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$. Тогда повторный стохастический интеграл Ито (6.20) представляется с помощью соотношений

$${}^1\mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) = -\frac{1}{2} \delta_{j_{k-1}j_k} \mathbf{1}^{\mathbf{T}} \mathcal{X}_{k-2} + \mathcal{V}_{j_k}^{\mathbf{T}} \mathcal{X}_{k-1}, \tag{6.26}$$

$$\mathcal{X}_l = -\frac{1}{2} \delta_{j_{l-1}j_l} P^{-1} \mathcal{X}_{l-2} + P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_l}) \mathcal{X}_{l-1}, \quad l = 2, \dots, k-1, \quad \mathcal{X}_0 = \mathbf{1}, \quad \mathcal{X}_1 = P^{-1} \mathcal{V}_{j_1},$$

где $\delta_{j_{l-1}j_l}$ — символ Кронекера (1.4), $l = 2, \dots, k$.

Доказательство. Представим систему стохастических дифференциальных уравнений (6.23) в интегральной форме записи:

$$\begin{aligned}
 X_1(t) &= \int_{t_0}^t dW_{j_1}(\tau) = W_{j_1}(t), & X_2(t) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_1j_2} \int_{t_0}^t d\tau + \int_{t_0}^t X_1(\tau) \circ dW_{j_2}(\tau), \\
 X_3(t) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_2j_3} \int_{t_0}^t X_1(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t X_2(\tau) \circ dW_{j_3}(\tau), \\
 &\dots,
 \end{aligned}$$

$$X_k(t) = -\frac{1}{2} \delta_{j_{k-1}j_k} \int_{t_0}^t X_{k-2}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t X_{k-1}(\tau) \circ dW_{j_k}(\tau),$$

и применим спектральное преобразование к левой и правой частям каждого уравнения, учитывая свойство линейности (2.8):

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[X_1(\cdot)] &= \mathbb{S}[W_{j_1}(\cdot)], \\ \mathbb{S}[X_2(\cdot)] &= \mathbb{S}\left[-\frac{1}{2} \delta_{j_1j_2} \int_{t_0}^{(\cdot)} d\tau + \int_{t_0}^{(\cdot)} X_1(\tau) \circ dW_{j_2}(\tau)\right] = \\ &= -\frac{1}{2} \delta_{j_1j_2} \mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} d\tau\right] + \mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} X_1(\tau) \circ dW_{j_2}(\tau)\right], \\ \mathbb{S}[X_3(\cdot)] &= \mathbb{S}\left[-\frac{1}{2} \delta_{j_2j_3} \int_{t_0}^{(\cdot)} X_1(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{(\cdot)} X_2(\tau) \circ dW_{j_3}(\tau)\right] = \\ &= -\frac{1}{2} \delta_{j_2j_3} \mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} X_1(\tau) d\tau\right] + \mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} X_2(\tau) \circ dW_{j_3}(\tau)\right], \\ &\dots, \\ \mathbb{S}[X_k(\cdot)] &= \mathbb{S}\left[-\frac{1}{2} \delta_{j_{k-1}j_k} \int_{t_0}^{(\cdot)} X_{k-2}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{(\cdot)} X_{k-1}(\tau) \circ dW_{j_k}(\tau)\right] = \\ &= -\frac{1}{2} \delta_{j_{k-1}j_k} \mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} X_{k-2}(\tau) d\tau\right] + \mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} X_{k-1}(\tau) \circ dW_{j_k}(\tau)\right]. \end{aligned}$$

Далее будем использовать следующие обозначения: \mathcal{X}_l — спектральные характеристики случайных процессов $X_l(\cdot)$ (см. разд. 2.2), $l = 1, \dots, k$; \mathcal{W}_{j_l} — спектральная характеристика винеровского процесса $W_{j_l}(\cdot)$, для которой можно воспользоваться представлением (2.31): $\mathcal{X}_1 = \mathcal{W}_{j_1} = P^{-1}\mathcal{V}_{j_1}$.

Спектральные характеристики стохастических интегралов Стратоновича выражены через спектральные характеристики операторов стохастического интегрирования $P^{-1}\mathcal{V}_{j_{l+1}}$ (см. разд. 2.7) при доказательстве теоремы 6.1:

$$\mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} X_{l-1}(\tau) \circ dW_{j_l}(\tau)\right] = P^{-1}\mathcal{V}_{j_l} X_{l-1} = P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_l})\mathcal{X}_{l-1}, \quad l = 2, \dots, k.$$

По свойству (1.86) спектрального преобразования интегралов от функций одной переменной получаем

$$\mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} d\tau\right] = P^{-1}\mathbf{1},$$

а далее остается рассмотреть интегралы, понимаемые в среднеквадратическом смысле:

$$\mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} X_{l-2}(\tau) d\tau\right] = P^{-1}\mathcal{X}_{l-2}, \quad l = 3, \dots, k-1,$$

следовательно,

$$\mathcal{X}_l = -\frac{1}{2} \delta_{j_{l-1}j_l} P^{-1}\mathcal{X}_{l-2} + P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_l})\mathcal{X}_{l-1}, \quad l = 2, \dots, k-1, \quad \mathcal{X}_0 = \mathbf{1}, \quad \mathcal{X}_1 = P^{-1}\mathcal{V}_{j_1}.$$

Так как

$$X_k(T) = -\frac{1}{2} \delta_{j_{k-1}j_k} \int_{\mathbb{T}} X_{k-2}(t) dt + \int_{\mathbb{T}} X_{k-1}(t) \circ dW_{j_k}(t) = -\frac{1}{2} \delta_{j_{k-1}j_k} \mathcal{J}_{\mathbb{T}} X_{k-2}(\cdot) + {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_k)} X_{k-1}(\cdot),$$

где $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}$ — линейный функционал, ставящий в соответствие функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ интеграл от этой функции по отрезку \mathbb{T} (см. разд. 1.1), а ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_k)}$ — случайный линейный функционал,

ставящий в соответствие случайному процессу $X_{k-1}(\cdot)$ стохастический интеграл Стратоновича по винеровскому процессу $W_{j_k}(\cdot)$ на отрезке \mathbb{T} (см. разд. 2.3). Поэтому, используя выражения (2.35) и (2.37), получаем

$$X_k(T) = -\frac{1}{2} \delta_{j_{k-1}j_k} \mathbf{1}^\top \mathcal{X}_{k-2} + \mathcal{V}_{j_k}^\top \mathcal{X}_{k-1},$$

т.е. имеют место формулы (6.26). ◀

На основе теоремы 6.3 получаем представление повторных стохастических интегралов Ито с ядром $\mathbb{K}(\cdot)$ для произвольного $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1j_2)} \mathbb{K}(\cdot) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_1j_2} \mathbf{1}^\top \mathbf{1} + \mathcal{V}_{j_2}^\top \mathcal{X}_1, & {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1j_2j_3)} \mathbb{K}(\cdot) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_2j_3} \mathbf{1}^\top \mathcal{X}_1 + \mathcal{V}_{j_3}^\top \mathcal{X}_2, \\ {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1j_2j_3j_4)} \mathbb{K}(\cdot) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_3j_4} \mathbf{1}^\top \mathcal{X}_2 + \mathcal{V}_{j_4}^\top \mathcal{X}_3, & \dots, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{X}_1 = P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}, \quad \mathcal{X}_2 = -\frac{1}{2} \delta_{j_1j_2} P^{-1} \mathbf{1} + P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_2}) \mathcal{X}_1, \quad \mathcal{X}_3 = -\frac{1}{2} \delta_{j_2j_3} P^{-1} \mathcal{X}_1 + P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_3}) \mathcal{X}_2, \quad \dots$$

С помощью теорем 6.1, 6.2 и 6.3 подробнее изучим случаи $k = 2, 3, 4$, принимая во внимание значения j_1, \dots, j_k (их равенства или неравенства в разных комбинациях) и для упрощения полагая $\mathbb{T} = [0, T]$, т.е. при условии $t_0 = 0$. Но сначала перечислим необходимые далее формулы, которые получаются на основе свойств спектрального преобразования:

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{1} = T, \quad \mathbf{1}^\top F = \frac{T^2}{2}, \quad (6.27)$$

$$P^{-1} \mathbf{1} = F, \quad (6.28)$$

$$VF = A, \quad (6.29)$$

где $\mathbf{1}$ и F — спектральные характеристики функций $f_0(t) \equiv 1$ и $f_1(t) = t$ соответственно.

Напомним, что для вывода формул (6.27) достаточно применить свойство (1.26) сохранения скалярного произведения (см. пример 1.2), формула (6.28) следует из свойства (1.86) спектрального преобразования интегралов от функций одной переменной (см. пример 1.13), а формула (6.29) соответствует теореме 1.7.

Кратность $k = 2$

Воспользуемся соотношениями (6.26):

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1j_2)} \mathbb{K}(\cdot) = -\frac{1}{2} \delta_{j_1j_2} \mathbf{1}^\top \mathbf{1} + \mathcal{V}_{j_2}^\top \mathcal{X}_1 = -\frac{1}{2} \delta_{j_1j_2} \mathbf{1}^\top \mathbf{1} + \mathcal{V}_{j_2}^\top P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1j_2)} \mathbb{K}(\cdot) - \frac{1}{2} \delta_{j_1j_2} \mathbf{1}^\top \mathbf{1},$$

или, принимая во внимание формулу (6.27),

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1j_2)} \mathbb{K}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1j_2)} \mathbb{K}(\cdot) - \delta_{j_1j_2} \frac{T}{2}. \quad (6.30)$$

Сравним найденное соотношение с представлением из [77]:

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1j_2)} \mathbb{K}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1j_2)} \mathbb{K}(\cdot) - \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1i_2} \delta_{j_1j_2} \delta_{i_1i_2}, \quad (6.31)$$

где

$$\mathbb{K}_{i_1i_2} = \int_{\mathbb{T}} q(i_2, t_2) \int_0^{t_2} q(i_1, t_1) dt_1 dt_2, \quad i_1, i_2 = 0, 1, 2, \dots$$

С учетом формулы (1.114) получаем

$$\sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1} = \frac{T}{2} \quad \text{и} \quad \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_2} \delta_{i_1 i_2} = \delta_{j_1 j_2} \frac{T}{2},$$

т.е. соотношения (6.30) и (6.31) эквивалентны.

Замечание 6.2. Частные случаи формулы (6.30) (см. также следствие 6.1):

$$\begin{aligned} j_1 \neq j_2 : & \quad {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{K}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{K}(\cdot), \\ j_1 = j_2 : & \quad {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)} \mathbb{K}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)} \mathbb{K}(\cdot) - \frac{T}{2}, \end{aligned}$$

где ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{K}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_2}^T P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}$.

Указанные формулы получены ранее в примере 2.12.

Кратность $k = 3$

На основе соотношений (6.26) записываем

$$\begin{aligned} {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{K}(\cdot) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \mathbf{1}^T \mathcal{X}_1 + \mathcal{V}_{j_3}^T \mathcal{X}_2 = \\ &= -\frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \mathbf{1}^T P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} + \mathcal{V}_{j_3}^T \left[-\frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} P^{-1} \mathbf{1} + P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \mathbf{1}^T P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} - \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \mathcal{V}_{j_3}^T P^{-1} \mathbf{1} + \mathcal{V}_{j_3}^T P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} = \\ &= {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{K}(\cdot) - \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \mathcal{V}_{j_3}^T P^{-1} \mathbf{1} - \frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \mathbf{1}^T P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}. \end{aligned}$$

Правую часть этого соотношения можно записать иначе. В частности, по формуле (6.28) получаем $\mathcal{V}_{j_3}^T P^{-1} \mathbf{1} = \mathcal{V}_{j_3}^T F$, а из связи (1.87) спектральных характеристик оператора интегрирования и сопряженного с ним, а также формул (6.27) и (6.28) следует, что

$$\mathbf{1}^T P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} = \mathcal{V}_{j_1}^T [P^{-1}]^T \mathbf{1} = \mathcal{V}_{j_1}^T (\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T - P^{-1}) \mathbf{1} = \mathcal{V}_{j_1}^T (\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T \mathbf{1} - P^{-1} \mathbf{1}) = \mathcal{V}_{j_1}^T (T \mathbf{1} - F).$$

Таким образом,

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{K}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{K}(\cdot) - \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \mathcal{V}_{j_3}^T F - \frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \mathcal{V}_{j_1}^T (T \mathbf{1} - F). \quad (6.32)$$

Сравним полученное равенство с представлением из [77]:

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{K}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{K}(\cdot) - \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3} (\delta_{j_1 j_2} \delta_{i_1 i_2} \zeta_{i_3}^{(j_3)} + \delta_{j_1 j_3} \delta_{i_1 i_3} \zeta_{i_2}^{(j_2)} + \delta_{j_2 j_3} \delta_{i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(j_1)}), \quad (6.33)$$

где

$$\mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3} = \int_{\mathbb{T}} q(i_3, t_3) \int_0^{t_3} q(i_2, t_2) \int_0^{t_2} q(i_1, t_1) dt_1 dt_2 dt_3, \quad i_1, i_2, i_3 = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема 6.4. Для коэффициентов разложения $\mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3}$ выполняются соотношения:

$$\sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} q(i_3, t) t dt = \frac{1}{2} F_{i_3} \quad \forall i_3, \quad (6.34)$$

$$\sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_1} = 0 \quad \forall i_2, \quad (6.35)$$

$$\sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_2} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} q(i_1, t) (T - t) dt = \frac{1}{2} (T \mathbf{1}_{i_1} - F_{i_1}) \quad \forall i_1. \quad (6.36)$$

Доказательство. Воспользуемся результатами примера 4.9. Тогда числовые ряды в левых частях соотношений (6.34) и (6.36) определяют соответственно коэффициенты разложения функций

$$\mathbb{k}^{(1)}(t) = \frac{1}{2}t \quad \text{и} \quad \mathbb{k}^{(3)}(t) = \frac{1}{2}(T-t),$$

а числовой ряд в левой части соотношения (6.35) задает коэффициенты разложения функции $\mathbb{k}^{(2)}(t) \equiv 0$.

Указанные коэффициенты разложения в общем виде описываются формулой (1.11), что доказывает справедливость соотношений (6.34) – (6.36). ◀

Из теоремы 6.4 следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3} \delta_{j_1 j_2} \delta_{i_1 i_2} \zeta_{i_3}^{(j_3)} &= \sum_{i_1, i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3} \delta_{j_1 j_2} \zeta_{i_3}^{(j_3)} = \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \sum_{i_3=0}^{\infty} \zeta_{i_3}^{(j_3)} F_{i_3} = \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \mathcal{V}_{j_3}^T F, \\ \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3} \delta_{j_1 j_3} \delta_{i_1 i_3} \zeta_{i_2}^{(j_2)} &= \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_1} \delta_{j_1 j_3} \zeta_{i_2}^{(j_2)} = 0, \\ \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3} \delta_{j_2 j_3} \delta_{i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(j_1)} &= \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_2} \delta_{j_2 j_3} \zeta_{i_1}^{(j_1)} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i_1=0}^{\infty} \delta_{j_2 j_3} \zeta_{i_1}^{(j_1)} (T \mathbf{1}_{i_1} - F_{i_1}) = \frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \mathcal{V}_{j_1}^T (T \mathbf{1} - F), \end{aligned}$$

т.е. выражения (6.32) и (6.33) эквивалентны.

З а м е ч а н и я 6.3.

1. Частные случаи формулы (6.32) (см. также следствие 6.1):

$$\begin{array}{ll} j_1, j_2, j_3 & \text{попарно различны :} \\ & \mathbb{I} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathbb{S} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot), \\ j_1 = j_2 \neq j_3 : & \mathbb{I} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathbb{S} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{j_3}^T F, \\ j_1 = j_3 \neq j_2 : & \mathbb{I} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathbb{S} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_1)} \mathbb{k}(\cdot), \\ j_1 \neq j_2 = j_3 : & \mathbb{I} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathbb{S} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{j_1}^T (T \mathbf{1} - F), \\ j_1 = j_2 = j_3 : & \mathbb{I} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathbb{S} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{j_1}^T F - \\ & - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{j_1}^T (T \mathbf{1} - F) = \mathbb{S} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) - \frac{T}{2} \mathcal{V}_{j_1}^T \mathbf{1}, \end{array}$$

где $\mathbb{S} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_3}^T P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}$.

2. Случайные величины $\mathcal{V}_{j_3}^T F$ и $\mathcal{V}_{j_1}^T (T \mathbf{1} - F)$, входящие в правую часть соотношения (6.32) и соотношений из п. 1, — это стохастические интегралы (2.28) от детерминированных функций (такие стохастические интегралы можно понимать в смысле Стратоновича или Ито):

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_3)} f_1(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} t dW_{j_3}(t) = \mathcal{V}_{j_3}^T F, \quad \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1)} (T - f_1(\cdot)) = \int_{\mathbb{T}} (T - t) dW_{j_1}(t) = \mathcal{V}_{j_1}^T (T \mathbf{1} - F).$$

Эти случайные величины являются гауссовскими с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $T^3/3$. Действительно, математическое ожидание стохастического интеграла равно

нулю и справедливо свойство изометрии Ито (2.41) (см. также свойства спектрального преобразования функций одной переменной в разд. 1.1):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_3)} f_1(\cdot))^2 &= \|f_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \int_0^T t^2 dt = \frac{T^3}{3}, \\ \mathbb{E}(\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1)}(T - f_1(\cdot)))^2 &= \|T - f_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \int_0^T (T - t)^2 dt = \frac{T^3}{3}, \\ \|f_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 &= F^T F, \quad \|T - f_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = (T\mathbf{1} - F)^T(T\mathbf{1} - F). \end{aligned}$$

Кроме того, их можно связать с повторными стохастическими интегралами Стратоновича смешанного типа кратности $k = 2$ (см. п. 8 замечаний 6.1 и пример 6.3).

Рассуждая аналогично, можно заключить, что стохастический интеграл

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1)} f_0(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} dW_{j_1}(t) = \mathcal{V}_{j_1}^T \mathbf{1}$$

является гауссовской случайной величиной — сечением винеровского процесса $W_{j_1}(T)$ — с нулевым математическим ожиданием и дисперсией T :

$$\mathbb{E}(\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1)} f_0(\cdot))^2 = \|f_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \int_0^T dt = T, \quad \|f_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \mathbf{1}^T \mathbf{1}.$$

Отсюда получаем следующее представление повторного стохастического интеграла Ито кратности $k = 3$:

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) - \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_3)} f_1(\cdot) - \frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1)}(T - f_1(\cdot)). \quad (6.37)$$

Кратность $k = 4$

Согласно соотношениям (6.26) получаем

$$\begin{aligned} {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_3 j_4} \mathbf{1}^T \mathcal{X}_2 + \mathcal{V}_{j_4}^T \mathcal{X}_3 = -\frac{1}{2} \delta_{j_3 j_4} \mathbf{1}^T \left[-\frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} P^{-1} \mathbf{1} + P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_2})P^{-1}\mathcal{V}_{j_1} \right] + \\ &+ \mathcal{V}_{j_4}^T \left[-\frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} P^{-1} P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} + P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_3}) \left[-\frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} P^{-1} \mathbf{1} + P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_2})P^{-1}\mathcal{V}_{j_1} \right] \right] = \\ &= \frac{1}{4} \delta_{j_1 j_2} \delta_{j_3 j_4} \mathbf{1}^T P^{-1} \mathbf{1} - \frac{1}{2} \delta_{j_3 j_4} \mathbf{1}^T P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_2})P^{-1}\mathcal{V}_{j_1} - \frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \mathcal{V}_{j_4}^T P^{-2} \mathcal{V}_{j_1} - \\ &- \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \mathcal{V}_{j_4}^T P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_3})P^{-1} \mathbf{1} + \mathcal{V}_{j_4}^T P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_3})P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_2})P^{-1}\mathcal{V}_{j_1} = \\ &= {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) - \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \mathcal{V}_{j_4}^T P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_3})P^{-1} \mathbf{1} - \frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \mathcal{V}_{j_4}^T P^{-2} \mathcal{V}_{j_1} - \\ &- \frac{1}{2} \delta_{j_3 j_4} \mathbf{1}^T P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_2})P^{-1}\mathcal{V}_{j_1} + \frac{1}{4} \delta_{j_1 j_2} \delta_{j_3 j_4} \mathbf{1}^T P^{-1} \mathbf{1}, \end{aligned}$$

где $P^{-2} = [P^{-1}]^2$.

Запишем слагаемые в правой части приведенного выше выражения в другой форме. Начнем с применения формулы (6.28), свойства (1.80) спектрального преобразования произведения функций одной переменной и формулы (6.29):

$$\mathcal{V}_{j_4}^T P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_3})P^{-1} \mathbf{1} = \mathcal{V}_{j_4}^T P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_3})F = \mathcal{V}_{j_4}^T P^{-1}(VF)\mathcal{V}_{j_3} = \mathcal{V}_{j_4}^T P^{-1}A\mathcal{V}_{j_3}.$$

Далее воспользуемся представлением спектральной характеристики P^{-2} из примера 1.12 (см. также формулы (1.91)), тогда $\mathcal{V}_{j_4}^T P^{-2} \mathcal{V}_{j_1} = \mathcal{V}_{j_4}^T (AP^{-1} - P^{-1}A)\mathcal{V}_{j_1}$.

Следующий шаг состоит в последовательном использовании связи (1.87) спектральных характеристик оператора интегрирования и сопряженного с ним, свойства (1.74) симметричности спектральной характеристики оператора умножения, формул (6.27) и (6.28), свойства (1.80) спектрального преобразования произведения функций одной переменной и формулы (6.29) (следующая формула получена ранее в примере 6.4):

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^T P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_2}) &= \mathbf{1}^T [\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T - P^{-1}]^T (V \mathcal{V}_{j_2}) = [(V \mathcal{V}_{j_2})(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T - P^{-1}) \mathbf{1}]^T = [(V \mathcal{V}_{j_2})(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T \mathbf{1} - P^{-1} \mathbf{1})]^T = \\ &= [(V \mathcal{V}_{j_2})(T \mathbf{1} - F)]^T = [(TV \mathbf{1} - VF) \mathcal{V}_{j_2}]^T = [(TE - A) \mathcal{V}_{j_2}]^T = \mathcal{V}_{j_2}^T (TE - A), \end{aligned}$$

т.е. $\mathbf{1}^T P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} = \mathcal{V}_{j_2}^T (TE - A) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}$.

Наконец, с учетом формул (6.27) и (6.28) находим

$$\mathbf{1}^T P^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}^T F = \frac{T^2}{2},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbb{I} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{K}(\cdot) &= \mathbb{S} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{K}(\cdot) - \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \mathcal{V}_{j_4}^T P^{-1} A \mathcal{V}_{j_3} - \\ &- \frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \mathcal{V}_{j_4}^T (A P^{-1} - P^{-1} A) \mathcal{V}_{j_1} - \frac{1}{2} \delta_{j_3 j_4} \mathcal{V}_{j_2}^T (TE - A) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} + \frac{T^2}{8} \delta_{j_1 j_2} \delta_{j_3 j_4}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Сравним полученное равенство с представлением из [77]:

$$\begin{aligned} \mathbb{I} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{K}(\cdot) &= \mathbb{S} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{K}(\cdot) - \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4} (\delta_{j_1 j_2} \delta_{i_1 i_2} \zeta_{i_3}^{(j_3)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} + \\ &+ \delta_{j_1 j_3} \delta_{i_1 i_3} \zeta_{i_2}^{(j_2)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} + \delta_{j_1 j_4} \delta_{i_1 i_4} \zeta_{i_2}^{(j_2)} \zeta_{i_3}^{(j_3)} + \delta_{j_2 j_3} \delta_{i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} + \delta_{j_2 j_4} \delta_{i_2 i_4} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_3}^{(j_3)} + \\ &+ \delta_{j_3 j_4} \delta_{i_3 i_4} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} - \delta_{j_1 j_2} \delta_{i_1 i_2} \delta_{j_3 j_4} \delta_{i_3 i_4} - \delta_{j_1 j_3} \delta_{i_1 i_3} \delta_{j_2 j_4} \delta_{i_2 i_4} - \delta_{j_1 j_4} \delta_{i_1 i_4} \delta_{j_2 j_3} \delta_{i_2 i_3}), \end{aligned} \quad (6.39)$$

где

$$\mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \int_{\mathbb{T}} q(i_4, t_4) \int_0^{t_4} q(i_3, t_3) \int_0^{t_3} q(i_2, t_2) \int_0^{t_2} q(i_1, t_1) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4, \quad i_1, i_2, i_3, i_4 = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема 6.5. Для коэффициентов разложения $\mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ выполняются соотношения:

$$\sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3 i_4} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} q(i_4, t) \int_0^t q(i_3, \tau) \tau d\tau dt = \frac{1}{2} [P^{-1} A]_{i_4 i_3} \quad \forall i_3, i_4, \quad (6.40)$$

$$\sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_2 i_4} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} q(i_4, t) \int_0^t q(i_1, \tau) (t - \tau) d\tau dt = \frac{1}{2} [A P^{-1} - P^{-1} A]_{i_4 i_1} \quad \forall i_1, i_4, \quad (6.41)$$

$$\sum_{i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_3} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} q(i_2, t) (T - t) \int_0^t q(i_1, \tau) d\tau dt = \frac{1}{2} [(TE - A) P^{-1}]_{i_2 i_1} \quad \forall i_1, i_2, \quad (6.42)$$

$$\sum_{i_l, i_m=0}^{\infty} \delta_{i_l i_m} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4} = 0 \quad \forall l, m \in \{1, 2, 3, 4\}: |l - m| > 1, \quad (6.43)$$

$$\sum_{i_1, i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3 i_3} = \frac{T^2}{8}, \quad (6.44)$$

$$\sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_1 i_2} = 0, \quad (6.45)$$

$$\sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_2 i_1} = 0, \quad (6.46)$$

где соотношение (6.43) верно для любых значений индексов, по которым не ведется суммирование.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 6.4, применим результаты примера 4.9. Числовые ряды в левых частях соотношений (6.40), (6.41) и (6.42) определяют соответственно коэффициенты разложения (1.42) следующих функций двух переменных:

$$\mathbb{K}^{(1)}(t, \tau) = \frac{1}{2} \tau 1(t - \tau), \quad \mathbb{K}^{(2)}(t, \tau) = \frac{1}{2} (t - \tau) 1(t - \tau) \quad \text{и} \quad \mathbb{K}^{(3)}(t, \tau) = \frac{1}{2} (T - t) 1(t - \tau),$$

а числовые ряды в левой части соотношения (6.43) выражают коэффициенты разложения функций, тождественно равных нулю.

Из соотношения (6.40) при $i_3 = i_4$ следует, что

$$\sum_{i_1, i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3 i_3} = \frac{1}{2} \sum_{i_3=0}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} q(i_3, t) \int_0^t q(i_3, \tau) \tau d\tau dt,$$

далее остается применить теорему 1.12 при условии $\varphi(t) \equiv 1$ и $\psi(t) = t$. Тогда

$$\sum_{i_1, i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3 i_3} = \frac{1}{4} (\varphi(\cdot), \psi(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \frac{1}{4} \int_0^T t dt = \frac{T^2}{8}.$$

Такой же результат, а именно формула (6.44) получается из соотношения (6.42) при $i_1 = i_2$ и теоремы 1.12, но при условии $\varphi(t) = T - t$ и $\psi(t) \equiv 1$ (см. также пример 4.11).

Справедливость соотношений (6.45) и (6.46) следует из формулы (6.43) (в теореме 1.12 достаточно положить $\varphi(t) \equiv 0$ или $\psi(t) \equiv 0$). ◀

Теорема 6.5 обеспечивает приведенный ниже результат:

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4} \delta_{j_1 j_2} \delta_{i_1 i_2} \zeta_{i_3}^{(j_3)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} = \sum_{i_1, i_3, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3 i_4} \delta_{j_1 j_2} \zeta_{i_3}^{(j_3)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} = \\ & = \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \sum_{i_3, i_4=0}^{\infty} \zeta_{i_3}^{(j_3)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} [P^{-1} A]_{i_4 i_3} = \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \mathcal{V}_{j_4}^T P^{-1} A \mathcal{V}_{j_3}, \\ & \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4} \delta_{j_2 j_3} \delta_{i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} = \sum_{i_1, i_2, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_2 i_4} \delta_{j_2 j_3} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} = \\ & = \frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \sum_{i_1, i_4=0}^{\infty} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} [A P^{-1} - P^{-1} A]_{i_4 i_1} = \frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \mathcal{V}_{j_4}^T (A P^{-1} - P^{-1} A) \mathcal{V}_{j_1}, \\ & \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4} \delta_{j_3 j_4} \delta_{i_3 i_4} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} = \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_3} \delta_{j_3 j_4} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} = \\ & = \frac{1}{2} \delta_{j_3 j_4} \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} [(T E - A) P^{-1}]_{i_2 i_1} = \frac{1}{2} \delta_{j_3 j_4} \mathcal{V}_{j_2}^T (T E - A) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}, \\ & \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4} \delta_{j_1 j_3} \delta_{i_1 i_3} \zeta_{i_2}^{(j_2)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} = \delta_{j_1 j_3} \sum_{i_1, i_3, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_1 i_4} \zeta_{i_2}^{(j_2)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} = 0, \\ & \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4} \delta_{j_1 j_4} \delta_{i_1 i_4} \zeta_{i_2}^{(j_2)} \zeta_{i_3}^{(j_3)} = 0, \quad \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4} \delta_{j_2 j_4} \delta_{i_2 i_4} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_3}^{(j_3)} = 0, \\ & \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4} \delta_{j_1 j_2} \delta_{i_1 i_2} \delta_{j_3 j_4} \delta_{i_3 i_4} = \sum_{i_1, i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3 i_3} \delta_{j_1 j_2} \delta_{j_3 j_4} = \delta_{j_1 j_2} \delta_{j_3 j_4} \frac{T^2}{8}, \end{aligned}$$

$$\sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4} \delta_{j_1 j_3} \delta_{i_1 i_3} \delta_{j_2 j_4} \delta_{i_2 i_4} = 0, \quad \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4} \delta_{j_1 j_4} \delta_{i_1 i_4} \delta_{j_2 j_3} \delta_{i_2 i_3} = 0,$$

т.е. выражения (6.38) и (6.39) эквивалентны.

Замечания 6.4.

1. Частные случаи формулы (6.38) (см. также следствие 6.1):

j_1, j_2, j_3, j_4 попарно различны :

$$I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) = S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot),$$

$j_1 = j_2, j_2 \neq j_3, j_3 \neq j_4$:

$$I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) = S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{j_4}^{\mathbb{T}} P^{-1} A \mathcal{V}_{j_3},$$

$j_1 \neq j_2, j_2 = j_3, j_3 \neq j_4$:

$$I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_2 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) = S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_2 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{j_4}^{\mathbb{T}} (A P^{-1} - P^{-1} A) \mathcal{V}_{j_1},$$

$j_1 \neq j_2, j_2 \neq j_3, j_3 = j_4$:

$$I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{j_2}^{\mathbb{T}} (T E - A) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1},$$

$j_1 = j_2 \neq j_3 = j_4$:

$$I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_3 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_3 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{j_3}^{\mathbb{T}} P^{-1} A \mathcal{V}_{j_3} - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{j_1}^{\mathbb{T}} (T E - A) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} + \frac{T^2}{8},$$

$j_1 = j_2 = j_3 \neq j_4$:

$$I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_1 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) = S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_1 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{j_4}^{\mathbb{T}} P^{-1} A \mathcal{V}_{j_1} - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{j_4}^{\mathbb{T}} (A P^{-1} - P^{-1} A) \mathcal{V}_{j_1} = S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_1 j_4)} - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{j_4}^{\mathbb{T}} A P^{-1} \mathcal{V}_{j_1},$$

$j_1 \neq j_2 = j_3 = j_4$:

$$I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_2 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) = S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_2 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{j_2}^{\mathbb{T}} (A P^{-1} - P^{-1} A) \mathcal{V}_{j_1} - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{j_2}^{\mathbb{T}} (T E - A) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} = S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_2 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{j_2}^{\mathbb{T}} P^{-1} (T E - A) \mathcal{V}_{j_1},$$

$j_1 = j_2 = j_3 = j_4$:

$$I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) = S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) - \frac{1}{2} \mathcal{V}_{j_1}^{\mathbb{T}} (P^{-1} A + A P^{-1} - P^{-1} A + T P^{-1} - A P^{-1}) \mathcal{V}_{j_1} + \frac{T^2}{8} = S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) - \frac{T}{2} \mathcal{V}_{j_1}^{\mathbb{T}} P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} + \frac{T^2}{8},$$

в остальных случаях :

$$I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) = S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot),$$

где $S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_4}^{\mathbb{T}} P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_3}) P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}$.

2. Случайные величины $\mathcal{V}_{j_4}^{\mathbb{T}} P^{-1} A \mathcal{V}_{j_3}$, $\mathcal{V}_{j_4}^{\mathbb{T}} (A P^{-1} - P^{-1} A) \mathcal{V}_{j_1}$ и $\mathcal{V}_{j_2}^{\mathbb{T}} (T E - A) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}$, входящие в правую часть соотношения (6.38) и соотношений из п. 1, — это повторные стохастические

интегралы Стратоновича (6.12) кратности $k = 2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathbb{T}}^{W(j_3 j_4)} \mathbb{k}_{10}(\cdot) &= \int_{\mathbb{T}} \int_0^{t_4} t_3 \circ dW_{j_3}(t_3) \circ dW_{j_4}(t_4) = \mathcal{V}_{j_4}^{\mathbb{T}} P^{-1} A \mathcal{V}_{j_3}, \\ \mathcal{S}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_4)} (\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot)) &= \int_{\mathbb{T}} \int_0^{t_4} (t_4 - t_1) \circ dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_4}(t_4) = \mathcal{V}_{j_4}^{\mathbb{T}} (A P^{-1} - P^{-1} A) \mathcal{V}_{j_1}, \\ \mathcal{S}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} (T \mathbb{k}(\cdot) - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) &= \int_{\mathbb{T}} \int_0^{t_2} (T - t_2) \circ dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2) = \mathcal{V}_{j_2}^{\mathbb{T}} (T E - A) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}, \end{aligned}$$

где $\mathbb{k}_{10}(t_1, t_2) = t_1 1(t_2 - t_1)$, $\mathbb{k}_{01}(t_1, t_2) = t_2 1(t_2 - t_1)$, $\mathbb{k}(t_1, t_2) = 1(t_2 - t_1)$, они же могут определяться как повторные стохастические интегралы Стратоновича смешанного типа кратности $k = 3$ (см. п. 8 замечаний 6.1 и пример 6.4, а также пример 4.4). Их математическое ожидания и вторые начальные моменты получены в примерах 5.6 и 6.4.

Подобным же образом трактуются и случайные величины $\mathcal{V}_{j_4}^{\mathbb{T}} A P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}$, $\mathcal{V}_{j_2}^{\mathbb{T}} P^{-1} (T E - A) \mathcal{V}_{j_1}$, $\mathcal{V}_{j_1}^{\mathbb{T}} P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}$.

Следовательно, можно записать представление повторного стохастического интеграла Ито кратности $k = 4$:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) &= \mathcal{S}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) - \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \mathcal{S}_{\mathbb{T}}^{W(j_3 j_4)} \mathbb{k}_{10}(\cdot) - \\ &- \frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \mathcal{S}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_4)} (\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot)) - \frac{1}{2} \delta_{j_3 j_4} \mathcal{S}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} (T \mathbb{k}(\cdot) - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) + \frac{T^2}{8} \delta_{j_1 j_2} \delta_{j_3 j_4}, \end{aligned} \quad (6.47)$$

где число аргументов функции $\mathbb{k}(\cdot)$ определяется кратностью стохастического интеграла.

Например, при $j_1 = j_2 \neq j_3 = j_4$ имеем

$$\mathcal{I}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_3 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathcal{S}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_3 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) - \frac{1}{2} \mathcal{S}_{\mathbb{T}}^{W(j_3 j_3)} \mathbb{k}_{10}(\cdot) - \frac{1}{2} \mathcal{S}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)} (T \mathbb{k}(\cdot) - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) + \frac{T^2}{8},$$

что соответствует представлению из примера 5.4, а также соотношениям из разд. 5.6 при $T = 1$ с учетом принципа двойственности представления кратных стохастических интегралов Ито и Стратоновича (см. п. 5 замечаний 5.3).

Рассмотрим применение спектральной формы математического описания для представления повторных стохастических интегралов Ито кратности $k \geq 2$ более общего вида

$$\mathcal{I}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_{\psi}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} \psi_1(t_1) \psi_2(t_2) \dots \psi_k(t_k) dW_{j_1}(t_1) dW_{j_2}(t_2) \dots dW_{j_k}(t_k), \quad (6.48)$$

где функция $\mathbb{k}_{\psi}(\cdot)$ задается формулой (4.24) с учетом весовых функций $\psi_l(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, $l = 1, \dots, k$. Остальные обозначения введены в начале этого раздела.

Запишем систему линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито, решение которой непосредственно связано с интегралом (6.48):

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= \psi_1(t) dW_{j_1}(t), & X_1(t_0) &= 0, \\ dX_2(t) &= \psi_2(t) X_1(t) dW_{j_2}(t), & X_2(t_0) &= 0, \\ &\dots, \\ dX_k(t) &= \psi_k(t) X_{k-1}(t) dW_{j_k}(t), & X_k(t_0) &= 0. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Последовательное интегрирование уравнений (6.49) дает следующий результат:

$$X_k(t) = \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{\tau_3} \int_{t_0}^{\tau_2} \psi_1(\tau_1) \psi_2(\tau_2) \dots \psi_k(\tau_k) dW_{j_1}(\tau_1) dW_{j_2}(\tau_2) \dots dW_{j_k}(\tau_k), \quad (6.50)$$

поэтому

$${}^I\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1)}\mathbb{K}_{\psi}(\cdot) = X_1(T), \quad {}^I\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1j_2)}\mathbb{K}_{\psi}(\cdot) = X_2(T), \quad \dots, \quad {}^I\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\dots j_k)}\mathbb{K}_{\psi}(\cdot) = X_k(T).$$

Далее применим тот же подход, что и для представления повторных стохастических интегралов Ито (6.20), а именно спектральную форму математического описания (см. разд. 3.3). Это значит, что сначала требуется перейти к эквивалентной системе стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича.

Лемма 6.2. Система стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича, эквивалентная системе (6.49), имеет вид

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= \psi_1(t)dW_{j_1}(t), & X_1(t_0) &= 0, \\ dX_2(t) &= -\frac{1}{2}\delta_{j_1j_2}\psi_1(t)\psi_2(t)dt + \psi_2(t)X_1(t) \circ dW_{j_2}(t), & X_2(t_0) &= 0, \\ dX_3(t) &= -\frac{1}{2}\delta_{j_2j_3}\psi_2(t)\psi_3(t)X_1(t)dt + \psi_3(t)X_2(t) \circ dW_{j_3}(t), & X_3(t_0) &= 0, \\ &\dots, \\ dX_k(t) &= -\frac{1}{2}\delta_{j_{k-1}j_k}\psi_{k-1}(t)\psi_k(t)X_{k-2}(t)dt + \psi_k(t)X_{k-1}(t) \circ dW_{j_k}(t), & X_k(t_0) &= 0, \end{aligned} \quad (6.51)$$

где $\delta_{j_{l-1}j_l}$ — символ Кронекера (1.4), $l = 2, \dots, k$.

Доказательство. Повторим те же действия, что и при доказательстве леммы 6.1, а именно сначала представим систему (6.49) в виде (3.40):

$$dX(t) = \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(t_0) = 0,$$

где $X(t) = [X_1(t) \ X_2(t) \ \dots \ X_k(t)]^T$, $W(t) = [W_1(t) \ W_2(t) \ \dots \ W_s(t)]^T$, а $\sigma(\cdot): \mathbb{T} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k \times s}$ — матричная функция, для которой каждый столбец имеет вид

$$\sigma_{*j}(t, x) = [\alpha_1^j \psi_1(t) \ \alpha_2^j \psi_2(t)x_1 \ \dots \ \alpha_k^j \psi_k(t)x_{k-1}]^T, \quad j = 1, \dots, s,$$

где $\alpha_l^j = \delta_{jl}$, $l = 1, \dots, k$, при этом

$$\sum_{j=1}^s \sigma_{*j}(t, x) = [\psi_1(t) \ \psi_2(t)x_1 \ \dots \ \psi_k(t)x_{k-1}]^T \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^s \alpha_l^j = 1.$$

Затем определим вектор-функцию $a(\cdot): \mathbb{T} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$:

$$a(t, x) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \frac{\partial \sigma_{*j}(t, x)}{\partial x} \sigma_{*j}(t, x),$$

где

$$\frac{\partial \sigma_{*j}(t, x)}{\partial x} \sigma_{*j}(t, x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \alpha_2^j \psi_2(t) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_3^j \psi_3(t) & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_k^j \psi_k(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^j \psi_1(t) \\ \alpha_2^j \psi_2(t)x_1 \\ \alpha_3^j \psi_3(t)x_2 \\ \vdots \\ \alpha_k^j \psi_k(t)x_{k-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_1^j \alpha_2^j \psi_1(t) \psi_2(t) \\ \alpha_2^j \alpha_3^j \psi_2(t) \psi_3(t) x_1 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1}^j \alpha_k^j \psi_{k-1}(t) \psi_k(t) x_{k-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_{j j_1} \delta_{j j_2} \psi_1(t) \psi_2(t) \\ \delta_{j j_2} \delta_{j j_3} \psi_2(t) \psi_3(t) x_1 \\ \vdots \\ \delta_{j j_{k-1}} \delta_{j j_k} \psi_{k-1}(t) \psi_k(t) x_{k-2} \end{bmatrix}.$$

Произведение $\alpha_{l-1}^j \alpha_l^j = \delta_{j j_{l-1}} \delta_{j j_l}$ может быть равно единице только для одного $j = j_{l-1} = j_l$, поэтому

$$a(t, x) = -\frac{1}{2} [0 \ \delta_{j_1 j_2} \psi_1(t) \psi_2(t) \ \delta_{j_2 j_3} \psi_2(t) \psi_3(t) x_1 \ \dots \ \delta_{j_{k-1} j_k} \psi_{k-1}(t) \psi_k(t) x_{k-2}]^T,$$

где $a(\cdot)$ — вектор сноса [229] в векторном стохастическом дифференциальном уравнении Стратоновича (3.27):

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t)) \circ dW(t),$$

координатная форма записи которого — это система уравнений (6.51). ◀

Система стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича (6.51) в форме Ланжевена записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= \psi_1(t) V_{j_1}(t), & X_1(t_0) &= 0, \\ \dot{X}_2(t) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \psi_1(t) \psi_2(t) + \psi_2(t) X_1(t) V_{j_2}(t), & X_2(t_0) &= 0, \\ \dot{X}_3(t) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \psi_2(t) \psi_3(t) X_1(t) + \psi_3(t) X_2(t) V_{j_3}(t), & X_3(t_0) &= 0, \\ &\dots, \\ \dot{X}_k(t) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_{k-1} j_k} \psi_{k-1}(t) \psi_k(t) X_{k-2}(t) + \psi_k(t) X_{k-1}(t) V_{j_k}(t), & X_k(t_0) &= 0, \end{aligned} \quad (6.52)$$

Следствие 6.3. Повторные стохастические интегралы Стратоновича (6.7) и Ито (6.48) совпадают с вероятностью 1, если ни одно из равенств $j_{l-1} = j_l$ не выполнено, $l = 2, \dots, k$. Если хотя бы одно из равенств $j_{l-1} = j_l$ выполнено и соответствующее произведение $\psi_{l-1}(\cdot) \psi_l(\cdot)$ тождественно не равно нулю, то интегралы (6.7) и (6.48) не совпадают.

Следствие 6.4. Система стохастических дифференциальных уравнений Ито, соответствующая системе (6.8), имеет вид

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= \psi_1(t) dW_{j_1}(t), & X_1(t_0) &= 0, \\ dX_2(t) &= \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \psi_1(t) \psi_2(t) dt + \psi_2(t) X_1(t) dW_{j_2}(t), & X_2(t_0) &= 0, \\ dX_3(t) &= \frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \psi_2(t) \psi_3(t) X_1(t) dt + \psi_3(t) X_2(t) dW_{j_3}(t), & X_3(t_0) &= 0, \\ &\dots, \\ dX_k(t) &= \frac{1}{2} \delta_{j_{k-1} j_k} \psi_{k-1}(t) \psi_k(t) X_{k-2}(t) dt + \psi_k(t) X_{k-1}(t) dW_{j_k}(t), & X_k(t_0) &= 0, \end{aligned}$$

где $\delta_{j_{l-1} j_l}$ — символ Кронекера (1.4), $l = 2, \dots, k$.

Следствие 6.3 получается сразу из леммы 6.2, а следствие 6.4, как и следствие 6.2, основано на связи (3.3) векторов сноса в стохастических дифференциальных уравнениях Ито и Стратоновича (см. разд. 3.1).

Рассматривая уравнения (6.52) как математическую модель стохастической системы управления с входными сигналами $f_l(\cdot) = V_{j_l}(\cdot)$, выходными сигналами $X_l(\cdot)$ — случайными процессами, а также дополнительными усилительными звеньями с коэффициентами усиления $\psi_l(\cdot)$, $l = 1, \dots, k$, можно привести соответствующую ей структурную схему (см. рис. 6.4).

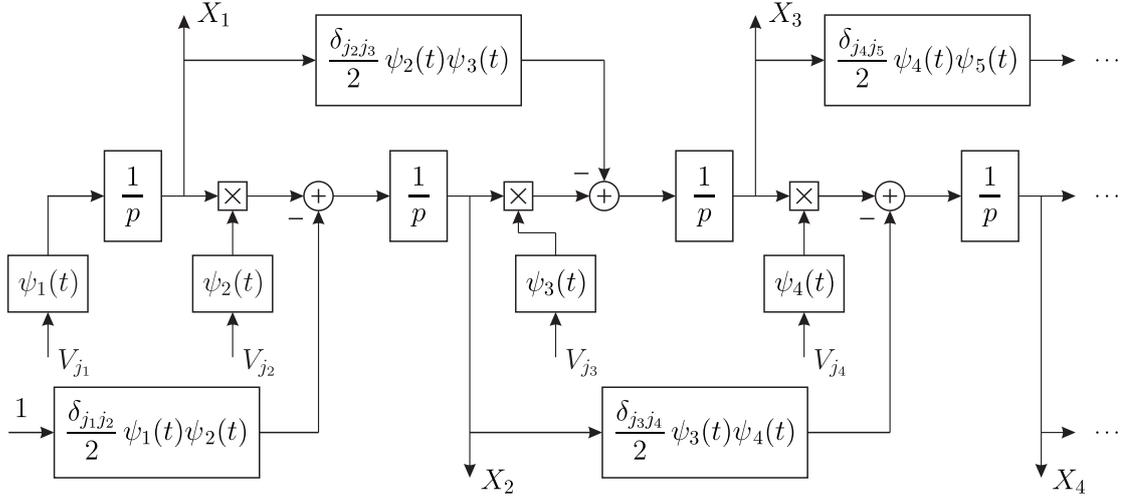


Рис. 6.4. Структурная схема системы управления (повторные стохастические интегралы Ито от функций $\mathbb{k}_\psi(\cdot)$)

Теорема 6.6. Пусть выполнены условия теоремы 6.3 и, кроме того, Ψ_1, \dots, Ψ_k — спектральные характеристики операторов умножения на функции $\psi_1(\cdot), \dots, \psi_k(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, определенные относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$. Тогда повторный стохастический интеграл Ито (6.48) представляется с помощью соотношений

$$\begin{aligned} {}^1 \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_\psi(\cdot) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_{k-1} j_k} \mathbf{1}^T \Psi_{k-1} \Psi_k \mathcal{X}_{k-2} + \mathcal{V}_{j_k}^T \Psi_k \mathcal{X}_{k-1}, \\ \mathcal{X}_l &= -\frac{1}{2} \delta_{j_{l-1} j_l} P^{-1} \Psi_{l-1} \Psi_l \mathcal{X}_{l-2} + P^{-1} \Psi_l (V \mathcal{V}_{j_l}) \mathcal{X}_{l-1}, \quad l = 2, \dots, k-1, \\ \mathcal{X}_0 &= \mathbf{1}, \quad \mathcal{X}_1 = P^{-1} \Psi_1 \mathcal{V}_{j_1}, \end{aligned} \quad (6.53)$$

где $\delta_{j_{l-1} j_l}$ — символ Кронекера (1.4), $l = 2, \dots, k$.

Доказательство. Представим систему стохастических дифференциальных уравнений (6.51) в интегральной форме записи:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \int_{t_0}^t \psi_1(\tau) dW_{j_1}(\tau), \\ X_2(t) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \int_{t_0}^t \psi_1(\tau) \psi_2(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \psi_2(\tau) X_1(\tau) \circ dW_{j_2}(\tau), \\ X_3(t) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \int_{t_0}^t \psi_2(\tau) \psi_3(\tau) X_1(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \psi_3(\tau) X_2(\tau) \circ dW_{j_3}(\tau), \\ &\dots, \\ X_k(t) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_{k-1} j_k} \int_{t_0}^t \psi_{k-1}(\tau) \psi_k(\tau) X_{k-2}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \psi_k(\tau) X_{k-1}(\tau) \circ dW_{j_k}(\tau), \end{aligned}$$

и применим спектральное преобразование к левой и правой частям каждого уравнения, учи-

тывая свойство линейности (2.8):

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}[X_1(\cdot)] &= \mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} \psi_1(\tau) dW_{j_1}(\tau)\right], \\
\mathbb{S}[X_2(\cdot)] &= \mathbb{S}\left[-\frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \int_{t_0}^{(\cdot)} \psi_1(\tau) \psi_2(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{(\cdot)} \psi_2(\tau) X_1(\tau) \circ dW_{j_2}(\tau)\right] = \\
&= -\frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} \psi_1(\tau) \psi_2(\tau) d\tau\right] + \mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} \psi_2(\tau) X_1(\tau) \circ dW_{j_2}(\tau)\right], \\
\mathbb{S}[X_3(\cdot)] &= \mathbb{S}\left[-\frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \int_{t_0}^{(\cdot)} \psi_2(\tau) \psi_3(\tau) X_1(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{(\cdot)} \psi_3(\tau) X_2(\tau) \circ dW_{j_3}(\tau)\right] = \\
&= -\frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} \psi_2(\tau) \psi_3(\tau) X_1(\tau) d\tau\right] + \mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} \psi_3(\tau) X_2(\tau) \circ dW_{j_3}(\tau)\right], \\
&\dots, \\
\mathbb{S}[X_k(\cdot)] &= \mathbb{S}\left[-\frac{1}{2} \delta_{j_{k-1} j_k} \int_{t_0}^{(\cdot)} \psi_{k-1}(\tau) \psi_k(\tau) X_{k-2}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{(\cdot)} \psi_k(\tau) X_{k-1}(\tau) \circ dW_{j_k}(\tau)\right] = \\
&= -\frac{1}{2} \delta_{j_{k-1} j_k} \mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} \psi_{k-1}(\tau) \psi_k(\tau) X_{k-2}(\tau) d\tau\right] + \mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} \psi_k(\tau) X_{k-1}(\tau) \circ dW_{j_k}(\tau)\right].
\end{aligned}$$

Далее будем использовать обозначения и результаты из доказательства теоремы 6.2. В частности, $\mathcal{X}_1 = P^{-1}\Psi_1\mathcal{V}_{j_1}$.

Все необходимые спектральные характеристики стохастических интегралов Стратоновича выражены через спектральные характеристики операторов стохастического интегрирования $P^{-1}\mathcal{V}_{j_{l+1}}$ (см. разд. 2.7) при доказательстве теоремы 6.2:

$$\mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} \psi_l(\tau) X_{l-1}(\tau) \circ dW_{j_l}(\tau)\right] = P^{-1}\mathcal{V}_{j_l}\Psi_l\mathcal{X}_{l-1} = P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_l})\Psi_l\mathcal{X}_{l-1}, \quad l = 2, \dots, k.$$

Согласно свойству (1.86) спектрального преобразования интегралов от функций одной переменной можно записать

$$\mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} f(\tau) d\tau\right] = P^{-1}F,$$

где F — спектральная характеристика функции $f(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$. Если $f(t) = \psi_1(t)\psi_2(t)f_0(t)$, то по свойству (1.64) спектрального преобразования композиции операторов и свойству (1.73) спектрального преобразования произведения функций одной переменной имеем

$$F = \Psi_1\Psi_2\mathbf{1} \quad \text{и} \quad \mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} \psi_1(\tau)\psi_2(\tau) d\tau\right] = P^{-1}\Psi_1\Psi_2\mathbf{1}.$$

Следующий шаг — представление интегралов, которые понимаются в среднеквадратическом смысле:

$$\mathbb{S}\left[\int_{t_0}^{(\cdot)} \psi_{l-1}(\tau)\psi_l(\tau) X_{l-2}(\tau) d\tau\right] = P^{-1}\Psi_{l-1}\Psi_l\mathcal{X}_{l-2}, \quad l = 3, \dots, k-1,$$

поэтому

$$\mathcal{X}_l = -\frac{1}{2} \delta_{j_{l-1} j_l} P^{-1}\Psi_{l-1}\Psi_l\mathcal{X}_{l-2} + P^{-1}\Psi_l(V\mathcal{V}_{j_l})\mathcal{X}_{l-1}, \quad l = 2, \dots, k-1, \quad \mathcal{X}_0 = \mathbf{1}, \quad \mathcal{X}_1 = P^{-1}\Psi_1\mathcal{V}_{j_1}.$$

Нетрудно видеть, что

$$X_k(T) = -\frac{1}{2} \delta_{j_{k-1} j_k} \int_{\mathbb{T}} \psi_{k-1}(t)\psi_k(t) X_{k-2}(t) dt + \int_{\mathbb{T}} \psi_k(t) X_{k-1}(t) \circ dW_{j_k}(t) =$$

$$= -\frac{1}{2} \delta_{j_{k-1}j_k} \mathcal{J}_{\mathbb{T}} \psi_{k-1}(\cdot) \psi_k(\cdot) X_{k-2}(\cdot) + {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_k)} \psi_k(\cdot) X_{k-1}(\cdot),$$

где применяются обозначения, введенные в ходе доказательства теоремы 6.2. Кроме того, $\mathbb{S}[\psi_{k-1}(\cdot) \psi_k(\cdot) X_{k-2}(\cdot)] = \Psi_1 \Psi_2 \mathcal{X}_{k-2}$ и $\mathbb{S}[\psi_k(\cdot) X_{k-1}(\cdot)] = \Psi_k \mathcal{X}_{k-1}$, тогда, принимая во внимание выражения (2.35) и (2.37), находим

$$X_k(T) = -\frac{1}{2} \delta_{j_{k-1}j_k} \mathbf{1}^T \Psi_{k-1} \Psi_k \mathcal{X}_{k-2} + \mathcal{V}_{j_k}^T \Psi_k \mathcal{X}_{k-1},$$

отсюда следуют формулы (6.53). ◀

Применяя теорему 6.6, записываем представление повторных стохастических интегралов Ито с ядром $\mathbb{K}_{\psi}(\cdot)$ для произвольного $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{K}_{\psi}(\cdot) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \mathbf{1}^T \Psi_1 \Psi_2 \mathbf{1} + \mathcal{V}_{j_2}^T \Psi_2 \mathcal{X}_1, \\ {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{K}_{\psi}(\cdot) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \mathbf{1}^T \Psi_2 \Psi_3 \mathcal{X}_1 + \mathcal{V}_{j_3}^T \Psi_3 \mathcal{X}_2, \\ {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{K}_{\psi}(\cdot) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_3 j_4} \mathbf{1}^T \Psi_3 \Psi_4 \mathcal{X}_2 + \mathcal{V}_{j_4}^T \Psi_4 \mathcal{X}_3, \quad \dots, \end{aligned}$$

или, используя дополнительные обозначения $\tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_k$ для спектральных характеристик функций $\psi_1(\cdot), \dots, \psi_k(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ и учитывая очевидные соотношения $\Psi_l \mathbf{1} = \tilde{\Psi}_l$ и $\mathbf{1}^T \Psi_l = \tilde{\Psi}_l^T$, $l = 1, \dots, k$, получаем

$$\begin{aligned} {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{K}_{\psi}(\cdot) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \tilde{\Psi}_1^T \tilde{\Psi}_2 + \mathcal{V}_{j_2}^T \Psi_2 \mathcal{X}_1, \\ {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{K}_{\psi}(\cdot) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \tilde{\Psi}_2^T \tilde{\Psi}_3 \mathcal{X}_1 + \mathcal{V}_{j_3}^T \Psi_3 \mathcal{X}_2, \\ {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{K}_{\psi}(\cdot) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_3 j_4} \tilde{\Psi}_3^T \tilde{\Psi}_4 \mathcal{X}_2 + \mathcal{V}_{j_4}^T \Psi_4 \mathcal{X}_3, \quad \dots, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 &= P^{-1} \Psi_1 \mathcal{V}_{j_1}, \quad \mathcal{X}_2 = -\frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} P^{-1} \Psi_1 \tilde{\Psi}_2 + P^{-1} \Psi_2 (V \mathcal{V}_{j_2}) \mathcal{X}_1, \\ \mathcal{X}_3 &= -\frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} P^{-1} \Psi_2 \tilde{\Psi}_3 \mathcal{X}_1 + P^{-1} \Psi_3 (V \mathcal{V}_{j_3}) \mathcal{X}_2, \quad \dots \end{aligned}$$

Пример 6.5. Представить в спектральной форме математического описания повторные стохастические интегралы Ито

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{K}_{\psi}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \int_{t_0}^{t_2} \psi_1(t_1) \psi_2(t_2) dW_{j_1}(t_1) dW_{j_2}(t_2) = \int_{\mathbb{T}} \psi_2(t_2) \int_{t_0}^{t_2} \psi_1(t_1) dW_{j_1}(t_1) dW_{j_2}(t_2)$$

кратности $k = 2$ при условии

$$\text{а) } \psi_1(t) = e^{\mu_1(t-t_0)}, \quad \psi_2(t) \equiv 1; \quad \text{б) } \psi_1(t) \equiv 1, \quad \psi_2(t) = e^{\mu_2(t-t_0)},$$

где $\mu_1 \neq 0$ и $\mu_2 \neq 0$ — числовые параметры, $\mathbb{T} = [t_0, T]$.

□ Согласно теореме 6.6 и соотношениям (6.53) записываем

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{K}_{\psi}(\cdot) = -\frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \tilde{\Psi}_1^T \tilde{\Psi}_2 + \mathcal{V}_{j_2}^T \Psi_2 P^{-1} \Psi_1 \mathcal{V}_{j_1},$$

где P^{-1} , Ψ_1 и Ψ_2 — спектральные характеристики оператора интегрирования, операторов умножения на функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$, $\tilde{\Psi}_1$ и $\tilde{\Psi}_2$ — спектральные характеристики функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ соответственно. Все перечисленные спектральные характеристики определены относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$. Для базисных систем (1.5)–(1.9) спектральные характеристики P^{-1} приведены в разд. 1.6, спектральные характеристики $\tilde{\Psi}_1$ и

$\tilde{\Psi}_2$ могут быть найдены по определению (см. разд. 1.1), а спектральные характеристики Ψ_1 и Ψ_2 — как по определению (см. разд. 1.5), так и с помощью теоремы 1.7. Если $\psi_l(t) \equiv 1$, то $\Psi_l = E$ — бесконечная единичная матрица и $\tilde{\Psi}_l = \mathbf{1}$, $l = 1, 2$.

При условии $\mathbb{T} = [0, T]$, т.е. $t_0 = 0$, и выборе функций Уолша (1.7) или функций Хаара (1.8) в качестве базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ необходимые формулы для нахождения элементов спектральной характеристики F^μ показательной функции $f_\mu(t) = e^{\mu t}$, а также элементов спектральной характеристики оператора умножения на эту функцию приведены в примере 6.1. Также можно воспользоваться результатом примера 2.1.

Далее, \mathcal{V}_{j_1} и \mathcal{V}_{j_2} — спектральные характеристики (2.26) белых шумов $V_{j_1}(\cdot)$ и $V_{j_2}(\cdot)$, образованные независимыми случайными величинами $\zeta_{i_1}^{(j_1)}$ и $\zeta_{i_2}^{(j_2)}$, которые имеют стандартное нормальное распределение. Они не зависят от выбора базисной системы (см. п. 1 замечаний 2.3).

Второе слагаемое в приведенном выше выражении — это повторный стохастический интеграл Стратоновича ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}_\psi(\cdot)$ и он рассмотрен в примере 6.1. Таким образом,

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}_\psi(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}_\psi(\cdot) - \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \tilde{\Psi}_1^T \tilde{\Psi}_2$$

и

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \int_{t_0}^{t_2} e^{\mu_1(t_1 - t_0)} dW_{j_1}(t_1) dW_{j_2}(t_2) &= \mathcal{V}_{j_2}^T P^{-1} \Psi_1 \mathcal{V}_{j_1} - \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \tilde{\Psi}_1^T \mathbf{1}, \\ \int_{\mathbb{T}} e^{\mu_2(t_2 - t_0)} \int_{t_0}^{t_2} dW_{j_1}(t_1) dW_{j_2}(t_2) &= \mathcal{V}_{j_2}^T \Psi_2 P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} - \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \mathbf{1}^T \tilde{\Psi}_2. \end{aligned}$$

По свойству (1.26) сохранения скалярного произведения

$$\begin{aligned} \Psi_1^T \mathbf{1} &= (\psi_1(\cdot), f_0(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{t_0}^T e^{\mu_1(t - t_0)} dt = \frac{e^{\mu_1(T - t_0)} - 1}{\mu_1}, \\ \mathbf{1}^T \tilde{\Psi}_2 &= (f_0(\cdot), \psi_2(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{t_0}^T e^{\mu_2(t - t_0)} dt = \frac{e^{\mu_2(T - t_0)} - 1}{\mu_2} \end{aligned}$$

и найденные величины с точностью до постоянного множителя определяют математические ожидания соответствующих повторных стохастических интегралов Стратоновича при $j_1 = j_2$. Это следует из основного свойства кратных (и повторных) стохастических интегралов Ито — равенства нулю их математических ожиданий [287]. Таким образом,

$$E^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}_\psi(\cdot) = \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \tilde{\Psi}_1^T \tilde{\Psi}_2,$$

поскольку

$$E^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}_\psi(\cdot) = E^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}_\psi(\cdot) - \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \tilde{\Psi}_1^T \tilde{\Psi}_2 = 0.$$

В заключение выразим вторые начальные моменты повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича через спектральные характеристики P^{-1} , Ψ_1 и Ψ_2 .

Согласно свойству изометрии Ито (5.65) $E({}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}_\psi(\cdot))^2 = \|\mathbb{k}_\psi(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2$, где $\mathbb{k}_\psi(t_1, t_2) = \psi_1(t_1) \psi_2(t_2) 1(t_2 - t_1)$.

В то же время произведение $\Psi_2 P^{-1} \Psi_1$ соответствует композиции операторов умножения и интегрирования (см. разд. 1.4), а результирующий оператор — это оператор Гильберта — Шмидта с ядром $k(t, \tau) = \mathbb{k}_\psi(\tau, t)$, если использовать обозначения, применяемые в формуле (1.71). Тогда по свойству (1.48) сохранения нормы имеем $\|k(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \|\Psi_2 P^{-1} \Psi_1\|_{\mathcal{M}_2}^2$.

Нормы функций $\mathbb{k}_\psi(\cdot)$ и $k(\cdot)$ равны, следовательно,

$$\mathbb{E}(\mathcal{I}_{\mathbb{T}}^W(j_1 j_2) \mathbb{k}_\psi(\cdot))^2 = \|\Psi_2 P^{-1} \Psi_1\|_{\mathcal{M}_2}^2,$$

$$\mathbb{E}(\mathcal{S} \mathcal{I}_{\mathbb{T}}^W(j_1 j_2) \mathbb{k}_\psi(\cdot))^2 = \mathbb{E}(\mathcal{I}_{\mathbb{T}}^W(j_1 j_2) \mathbb{k}_\psi(\cdot))^2 + \left(\frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \tilde{\Psi}_1^T \tilde{\Psi}_2\right)^2 = \|\Psi_2 P^{-1} \Psi_1\|_{\mathcal{M}_2}^2 + \frac{1}{4} \delta_{j_1 j_2} (\tilde{\Psi}_1^T \tilde{\Psi}_2)^2.$$

Поэтому при $\psi_1(t) = e^{\mu_1(t-t_0)}$ и $\psi_2(t) \equiv 1$

$$\begin{aligned} \|\mathbb{k}_\psi(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 &= \|P^{-1} \Psi_1\|_{\mathcal{M}_2}^2 = \int_{t_0}^T \int_{t_0}^{t_2} e^{2\mu_1(t_1-t_0)} dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{1}{2\mu_1} \int_{t_0}^T (e^{2\mu_1(t_2-t_0)} - 1) dt_2 = \frac{e^{2\mu_1(T-t_0)} - 1}{4\mu_1^2} - \frac{T-t_0}{2\mu_1}, \end{aligned}$$

а при $\psi_1(t) \equiv 1$ и $\psi_2(t) = e^{\mu_2(t-t_0)}$

$$\begin{aligned} \|\mathbb{k}_\psi(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 &= \|\Psi_2 P^{-1}\|_{\mathcal{M}_2}^2 = \int_{t_0}^T e^{2\mu_2(t_2-t_0)} \int_{t_0}^{t_2} dt_1 dt_2 = \int_{t_0}^T e^{2\mu_2(t_2-t_0)} (t_2 - t_0) dt_2 = \\ &= \frac{T-t_0}{2\mu_2} e^{2\mu_2(T-t_0)} - \frac{1}{2\mu_2} \int_{t_0}^T e^{2\mu_2(t_2-t_0)} dt_2 = \frac{T-t_0}{2\mu_2} e^{2\mu_2(T-t_0)} - \frac{e^{2\mu_2(T-t_0)} - 1}{4\mu_2^2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Пользуясь теоремами 6.2 и 6.6, изучим случаи $k = 2, 3, 4$ более детально, принимая во внимание значения j_1, \dots, j_k (их равенства или неравенства в разных комбинациях) и для упрощения полагая $\mathbb{T} = [0, T]$, т.е. при условии $t_0 = 0$. Ограничимся вариантом, при котором функции $\psi_l(\cdot)$ задаются выражением (4.26), а спектральные характеристики Ψ_l — формулой (4.55), $l = 1, \dots, k$, т.е. функция $\mathbb{k}_\psi(\cdot)$ — это функция $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$, а спектральная характеристика Ψ_l выражается как n_l -я степень спектральной характеристики A оператора умножения на функцию $a_1(t) = t$ (см. примеры спектральных характеристик A в разд. 1.5), $n_l = 0, 1, 2, \dots$ и $l = 1, \dots, k$. Тогда

$$\tilde{\Psi}_l = F^{n_l}, \quad l = 1, \dots, k, \quad \Psi_{l-1} \Psi_l = A^{n_{l-1}} A^{n_l} = A^{n_{l-1} + n_l}, \quad l = 2, \dots, k,$$

где F^n — спектральная характеристика функции $f_n(t) = t^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и $F^0 = \mathbf{1}$. Следовательно, повторный стохастический интеграл Ито представляется в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathbb{T}}^W(j_1 \dots j_k) \mathbb{k}_\psi(\cdot) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_{k-1} j_k} \mathbf{1}^T A^{n_{k-1}} A^{n_k} \mathcal{X}_{k-2} + \mathcal{V}_{j_k}^T A^{n_k} \mathcal{X}_{k-1}, \\ \mathcal{X}_l &= -\frac{1}{2} \delta_{j_{l-1} j_l} P^{-1} A^{n_{l-1}} A^{n_l} \mathcal{X}_{l-2} + P^{-1} A^{n_l} (V \mathcal{V}_{j_l}) \mathcal{X}_{l-1}, \quad l = 2, \dots, k-1, \\ \mathcal{X}_0 &= \mathbf{1}, \quad \mathcal{X}_1 = P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1}. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Связи между спектральными характеристиками, которые входят в соотношения (6.54), позволяют получить следующее *свойство повторного стохастического интеграла Ито* (аналог свойства (6.15)):

$$\mathcal{I}_{[t_0, T]}^W(j_1 \dots j_k) \mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot) \stackrel{d}{=} (T-t_0)^{k/2 + n_1 + \dots + n_k} \cdot \mathcal{I}_{[0, 1]}^W(j_1 \dots j_k) \mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}^*(\cdot), \quad (6.55)$$

где функция $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}^*(\cdot)$ определяется с учетом условия (4.26), но при $t_0 = 0$.

Доказательство. Пусть $\{\tilde{q}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ — базисная система пространства $L_2([0, 1])$, а $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ — соответствующая ей базисная система пространства $L_2([t_0, T])$ (см. п. 1 замечаний 1.1). Далее достаточно подробно проанализировать только первое слагаемое в рекуррентном соотношении (6.54), поскольку второе слагаемое формирует повторный стохастический интеграл Стратоновича, рассмотренный при доказательстве свойства (6.15). Согласно этому доказатель-

ству степень разности $T - t_0$ для спектральной характеристики \mathcal{X}_1 при сдвиге и масштабировании базисной системы равна $d_1 = 1 + n_1$, а степень $1/2 + n_1 + n_2 + 1/2$ соответствует интегралу кратности $k = 2$ (множители $\mathbf{1}$, A^{n_1} , A^{n_2} и $\mathbf{1}$). Если первому слагаемому в спектральной характеристике \mathcal{X}_{l-1} соответствует степень d_{l-1} , то первому слагаемому в спектральной характеристике \mathcal{X}_l — степень $d_l = 1 + n_{l-1} + n_l + d_{l-2}$ (множители P^{-1} , $A^{n_{l-1}}$ и A^{n_l}). Интегралу кратности k отвечает степень $1/2 + n_{k-1} + n_k + d_{k-2} = k/2 + n_1 + \dots + n_k$ (множители $\mathbf{1}$, $A^{n_{k-1}}$ и A^{n_k}). ◀

Из доказанного свойства следуют очевидные соотношения для первых двух моментов:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^I \mathcal{J}_{[t_0, T]}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{K}_{n_1 \dots n_k}(\cdot) &= (T - t_0)^{\frac{k}{2} + n_1 + \dots + n_k} \cdot \mathbb{E}^I \mathcal{J}_{[0, 1]}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{K}_{n_1 \dots n_k}^*(\cdot), \\ \mathbb{E} \left(\mathbb{E}^I \mathcal{J}_{[t_0, T]}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{K}_{n_1 \dots n_k}(\cdot) \right)^2 &= (T - t_0)^{k + 2(n_1 + \dots + n_k)} \cdot \mathbb{E} \left(\mathbb{E}^I \mathcal{J}_{[0, 1]}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{K}_{n_1 \dots n_k}^*(\cdot) \right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, условие $t_0 = 0$, при котором ниже получены соотношения для представления повторных стохастических интегралов Ито кратностей $k = 2, 3, 4$ (аналогично можно поступить при $k > 4$), не ограничивает общности рассуждений.

Будем использовать следующие выражения, которые нетрудно вывести, используя формализм спектрального метода:

$$[F^n]^T F^m = \frac{T^{n+m+1}}{n+m+1}, \quad (6.56)$$

$$A^n F^m = F^{n+m}, \quad [F^m]^T A^n = [F^{n+m}]^T, \quad (6.57)$$

$$P^{-1} F^n = \frac{1}{n+1} F^{n+1}, \quad (6.58)$$

$$V F^n = A^n, \quad (6.59)$$

где V — спектральная характеристика оператора умножения функций (см. примеры спектральных характеристик V в разд. 1.5); $n, m = 0, 1, 2, \dots$

Формула (6.56) справедлива согласно свойству (1.26) сохранения скалярного произведения (см. пример 1.2), а свойство (1.73) спектрального преобразования произведения функций одной переменной дает формулы (6.57). Далее, формула (6.58) следует из свойства (1.86) спектрального преобразования интегралов от функций одной переменной (см. пример 1.13), а формула (6.59) получается из теоремы 1.7.

Кратность $k = 2$

Из соотношений (6.53) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{K}_{n_1 n_2}(\cdot) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \mathbf{1}^T A^{n_1} A^{n_2} \mathbf{1} + \mathcal{V}_{j_2}^T A^{n_2} \mathcal{X}_1 = -\frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} [F^{n_1}]^T F^{n_2} + \mathcal{V}_{j_2}^T A^{n_2} P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1} = \\ &= \mathbb{E}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{K}_{n_1 n_2}(\cdot) - \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} [F^{n_1}]^T F^{n_2}, \end{aligned}$$

т.е. с учетом формулы (6.56) находим

$$\mathbb{E}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{K}_{n_1 n_2}(\cdot) = \mathbb{E}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{K}_{n_1 n_2}(\cdot) - \delta_{j_1 j_2} \frac{T^{n_1 + n_2 + 1}}{2(n_1 + n_2 + 1)}. \quad (6.60)$$

Сравним полученное соотношение с представлением из [77]:

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{K}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{K}_{n_1 n_2}(\cdot) - \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2}^{n_1 n_2} \delta_{j_1 j_2} \delta_{i_1 i_2}, \quad (6.61)$$

где

$$\mathbb{K}_{i_1 i_2}^{n_1 n_2} = \int_{\mathbb{T}} t_2^{n_2} q(i_2, t_2) \int_0^{t_2} t_1^{n_1} q(i_1, t_1) dt_1 dt_2, \quad i_1, i_2 = 0, 1, 2, \dots$$

Согласно теореме 1.12 имеем

$$\sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1} = \frac{1}{2} (f_{n_1}(\cdot), f_{n_2}(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2} \int_0^T t^{n_1+n_2} dt = \frac{T^{n_1+n_2+1}}{2(n_1+n_2+1)},$$

следовательно,

$$\sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_2} \delta_{i_1 i_2} = \delta_{j_1 j_2} \frac{T^{n_1+n_2+1}}{2(n_1+n_2+1)},$$

т.е. соотношения (6.60) и (6.61) эквивалентны.

Замечание 6.5.

Частные случаи формулы (6.60) (см. также следствие 6.3):

$$\begin{aligned} j_1 \neq j_2 : \quad & {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{K}_{n_1 n_2}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{K}_{n_1 n_2}(\cdot), \\ j_1 = j_2 : \quad & {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)} \mathbb{K}_{n_1 n_2}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)} \mathbb{K}_{n_1 n_2}(\cdot) - \frac{T^{n_1+n_2+1}}{2(n_1+n_2+1)}, \end{aligned}$$

где ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{K}_{n_1 n_2}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_2}^T A^{n_2} P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1}$.

Кратность $k = 3$

Соотношения (6.53) позволяют получить следующее представление:

$$\begin{aligned} {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \mathbf{1}^T A^{n_2} A^{n_3} \mathcal{X}_1 + \mathcal{V}_{j_3}^T A^{n_3} \mathcal{X}_2 = \\ &= -\frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \mathbf{1}^T A^{n_2} A^{n_3} P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1} + \mathcal{V}_{j_3}^T A^{n_3} \left[-\frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} P^{-1} A^{n_1} A^{n_2} \mathbf{1} + P^{-1} A^{n_2} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} [F^{n_2+n_3}]^T P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1} - \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \mathcal{V}_{j_3}^T A^{n_3} P^{-1} F^{n_1+n_2} + \mathcal{V}_{j_3}^T A^{n_3} P^{-1} A^{n_2} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1} = \\ &= {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot) - \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \mathcal{V}_{j_3}^T A^{n_3} P^{-1} F^{n_1+n_2} - \frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} [F^{n_2+n_3}]^T P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1}. \end{aligned}$$

Преобразуем слагаемые в правой части последнего выражения. Во-первых, с помощью формул (6.57) и (6.58) устанавливаем, что

$$\mathcal{V}_{j_3}^T A^{n_3} P^{-1} F^{n_1+n_2} = \frac{1}{n_1+n_2+1} \mathcal{V}_{j_3}^T A^{n_3} F^{n_1+n_2+1} = \frac{1}{n_1+n_2+1} \mathcal{V}_{j_3}^T F^{n_1+n_2+n_3+1}.$$

Во-вторых, воспользуемся связью (1.87) спектральных характеристик оператора интегрирования и сопряженного с ним, а затем применим формулы (6.56) – (6.58):

$$\begin{aligned} [F^{n_2+n_3}]^T P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1} &= \mathcal{V}_{j_1}^T A^{n_1} [P^{-1}]^T F^{n_2+n_3} = \mathcal{V}_{j_1}^T A^{n_1} (\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T - P^{-1}) F^{n_2+n_3} = \\ &= \mathcal{V}_{j_1}^T (A^{n_1} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T F^{n_2+n_3} - A^{n_1} P^{-1} F^{n_2+n_3}) = \frac{1}{n_2+n_3+1} \mathcal{V}_{j_1}^T \left(T^{n_2+n_3+1} F^{n_1} - A^{n_1} F^{n_2+n_3+1} \right) = \\ &= \frac{1}{n_2+n_3+1} \mathcal{V}_{j_1}^T (T^{n_2+n_3+1} F^{n_1} - F^{n_1+n_2+n_3+1}). \end{aligned}$$

В результате находим

$$\begin{aligned} {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot) &= {}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot) - \frac{1}{2(n_1 + n_2 + 1)} \delta_{j_1 j_2} \mathcal{V}_{j_3}^T F^{n_1 + n_2 + n_3 + 1} - \\ &\quad - \frac{1}{2(n_2 + n_3 + 1)} \delta_{j_2 j_3} \mathcal{V}_{j_1}^T (T^{n_2 + n_3 + 1} F^{n_1} - F^{n_1 + n_2 + n_3 + 1}). \end{aligned} \quad (6.62)$$

Это соотношение можно сравнить с представлением из [77]:

$$\begin{aligned} {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot) &= {}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot) - \\ &\quad - \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3}^{n_1 n_2 n_3} (\delta_{j_1 j_2} \delta_{i_1 i_2} \zeta_{i_3}^{(j_3)} + \delta_{j_1 j_3} \delta_{i_1 i_3} \zeta_{i_2}^{(j_2)} + \delta_{j_2 j_3} \delta_{i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(j_1)}), \end{aligned} \quad (6.63)$$

где

$$\mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3}^{n_1 n_2 n_3} = \int_T t_3^{n_3} q(i_3, t_3) \int_0^{t_3} t_2^{n_2} q(i_2, t_2) \int_0^{t_2} t_1^{n_1} q(i_1, t_1) dt_1 dt_2 dt_3, \quad i_1, i_2, i_3 = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема 6.7. Для коэффициентов разложения $\mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3}^{n_1 n_2 n_3}$ выполняются соотношения:

$$\sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3}^{n_1 n_2 n_3} = \frac{1}{2(n_1 + n_2 + 1)} \int_T q(i_3, t) t^{n_1 + n_2 + n_3 + 1} dt = \frac{1}{2(n_1 + n_2 + 1)} F_{i_3}^{n_1 + n_2 + n_3 + 1} \quad \forall i_3, \quad (6.64)$$

$$\sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_1}^{n_1 n_2 n_3} = 0 \quad \forall i_2, \quad (6.65)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_2}^{n_1 n_2 n_3} &= \frac{1}{2(n_2 + n_3 + 1)} \int_T q(i_1, t) (T^{n_2 + n_3 + 1} t^{n_1} - t^{n_1 + n_2 + n_3 + 1}) dt = \\ &= \frac{1}{2(n_2 + n_3 + 1)} (T^{n_2 + n_3 + 1} F_{i_1}^{n_1} - F_{i_1}^{n_1 + n_2 + n_3 + 1}) \quad \forall i_1. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы фактически повторяет доказательство теоремы 6.4, но за основу берутся результаты примера 4.10, согласно которому числовые ряды в левых частях соотношений (6.64), (6.65) и (6.66) определяют соответственно коэффициенты разложения функций

$$\begin{aligned} \mathbb{k}^{(1)}(t) &= \frac{1}{2(n_1 + n_2 + 1)} t^{n_1 + n_2 + n_3 + 1}, \quad \mathbb{k}^{(2)}(t) \equiv 0, \\ \text{и } \mathbb{k}^{(3)}(t) &= \frac{1}{2(n_2 + n_3 + 1)} (T^{n_2 + n_3 + 1} t^{n_1} - t^{n_1 + n_2 + n_3 + 1}). \end{aligned}$$

Эти коэффициенты разложения в общем виде описываются формулой (1.11), отсюда получаются соотношения (6.64) – (6.66). ◀

Из теоремы 6.7 следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3}^{n_1 n_2 n_3} \delta_{j_1 j_2} \delta_{i_1 i_2} \zeta_{i_3}^{(j_3)} &= \sum_{i_1, i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3}^{n_1 n_2 n_3} \delta_{j_1 j_2} \zeta_{i_3}^{(j_3)} = \\ &= \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \sum_{i_3=0}^{\infty} \zeta_{i_3}^{(j_3)} F_{i_3}^{n_1 + n_2 + n_3 + 1} = \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \mathcal{V}_{j_3}^T F^{n_1 + n_2 + n_3 + 1}, \\ \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3}^{n_1 n_2 n_3} \delta_{j_1 j_3} \delta_{i_1 i_3} \zeta_{i_2}^{(j_2)} &= \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_1}^{n_1 n_2 n_3} \delta_{j_1 j_3} \zeta_{i_2}^{(j_2)} = 0, \\ \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3}^{n_1 n_2 n_3} \delta_{j_2 j_3} \delta_{i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(j_1)} &= \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_2}^{n_1 n_2 n_3} \delta_{j_2 j_3} \zeta_{i_1}^{(j_1)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i_1=0}^{\infty} \delta_{j_2 j_3} \zeta_{i_1}^{(j_1)} (T^{n_2+n_3+1} F_{i_1}^{n_1} - F_{i_1}^{n_1+n_2+n_3+1}) = \frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \mathcal{V}_{j_1}^T (T^{n_2+n_3+1} F^{n_1} - F^{n_1+n_2+n_3+1}),$$

т.е. выражения (6.62) и (6.63) эквивалентны.

З а м е ч а н и я 6.6.

1. Частные случаи формулы (6.62) (см. также следствие 6.3):

j_1, j_2, j_3 попарно различны :

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot),$$

$$j_1 = j_2 \neq j_3 : {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_3)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_3)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot) - \frac{1}{2(n_1 + n_2 + 1)} \mathcal{V}_{j_3}^T F^{n_1+n_2+n_3+1},$$

$$j_1 = j_3 \neq j_2 : {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_1)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_1)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot),$$

$$j_1 \neq j_2 = j_3 : {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_2)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_2)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot) - \frac{1}{2(n_2 + n_3 + 1)} \mathcal{V}_{j_1}^T (T^{n_2+n_3+1} F^{n_1} - F^{n_1+n_2+n_3+1}),$$

$$j_1 = j_2 = j_3 : {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot) - \mathcal{V}_{j_1}^T \left[\frac{1}{2(n_1 + n_2 + 1)} F^{n_1+n_2+n_3+1} - \frac{1}{2(n_2 + n_3 + 1)} (T^{n_2+n_3+1} F^{n_1} - F^{n_1+n_2+n_3+1}) \right],$$

где ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_3}^T A^{n_3} P^{-1} A^{n_2} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1}$.

При $j_1 = j_2 = j_3$ и $n_1 = n_3$ формула (6.62) упрощается, а именно

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_1}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_1}(\cdot) - \frac{T^{n_1+n_2+1}}{2(n_1 + n_2 + 1)} \mathcal{V}_{j_1}^T F^{n_1}.$$

2. Случайные величины $\mathcal{V}_{j_3}^T F^{n_1+n_2+n_3+1}$ и $\mathcal{V}_{j_1}^T (T^{n_2+n_3+1} F^{n_1} - F^{n_1+n_2+n_3+1})$ из правой части соотношения (6.62) и соотношений из п. 1, — это стохастические интегралы (2.28) от детерминированных функций и для них не требуется оговаривать, в каком смысле они понимаются:

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_3)} f_{n_1+n_2+n_3+1}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} t^{n_1+n_2+n_3+1} dW_{j_3}(t) = \mathcal{V}_{j_3}^T F^{n_1+n_2+n_3+1},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1)} (T^{n_2+n_3+1} f_{n_1}(\cdot) - f_{n_1+n_2+n_3+1}(\cdot)) &= \int_{\mathbb{T}} (T^{n_2+n_3+1} t^{n_1} - t^{n_1+n_2+n_3+1}) dW_{j_1}(t) = \\ &= \mathcal{V}_{j_1}^T (T^{n_2+n_3+1} F^{n_1} - F^{n_1+n_2+n_3+1}). \end{aligned}$$

Согласно свойствам стохастических интегралов (см. свойство изометрии Ито (2.41), а также свойство (2.14) сохранения нормы) делаем вывод, что указанные случайные величины являются гауссовскими с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями $T^{2(n_1+n_2+n_3)+3}/[2(n_1 + n_2 + n_3) + 3]$ и $T^{2(n_1+n_2+n_3)+3}(1/(2n_1 + 1) - 2/(2n_1 + n_2 + n_3 + 2) + 1/[2(n_1 + n_2 + n_3) + 3])$ соответственно, так как

$$\mathbb{E}(\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_3)} f_{n_1+n_2+n_3+1}(\cdot))^2 = \|f_{n_1+n_2+n_3+1}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \int_0^T t^{2(n_1+n_2+n_3+1)} dt = \frac{T^{2(n_1+n_2+n_3)+3}}{2(n_1 + n_2 + n_3) + 3},$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1)} (T^{n_2+n_3+1} f_{n_1}(\cdot) - f_{n_1+n_2+n_3+1}(\cdot)))^2 &= \|T^{n_2+n_3+1} f_{n_1}(\cdot) - f_{n_1+n_2+n_3+1}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \\ &= \int_0^T (T^{n_2+n_3+1} t^{n_1} - t^{n_1+n_2+n_3+1})^2 dt = \\ &= T^{2(n_1+n_2+n_3)+3} \left(\frac{1}{2n_1 + 1} - \frac{2}{2n_1 + n_2 + n_3 + 2} + \frac{1}{2(n_1 + n_2 + n_3) + 3} \right), \end{aligned}$$

$$\|f_{n_1+n_2+n_3+1}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = [F^{n_1+n_2+n_3+1}]^T F^{n_1+n_2+n_3+1},$$

$$\|T^{n_2+n_3+1} f_{n_1}(\cdot) - f_{n_1+n_2+n_3+1}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = (T^{n_2+n_3+1} F^{n_1} - F^{n_1+n_2+n_3+1})^T (T^{n_2+n_3+1} F^{n_1} - F^{n_1+n_2+n_3+1}).$$

Таким же образом можно сделать вывод, что стохастический интеграл (см. пример 2.5)

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1)} f_{n_1}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} t^{n_1} dW_{j_1}(t) = \mathcal{V}_{j_1}^T F^{n_1}$$

— это гауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $T^{2n_1+1}/(2n_1+1)$:

$$\mathbb{E}(\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1)} f_{n_1}(\cdot))^2 = \|f_{n_1}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \int_0^T t^{2n_1} dt = \frac{T^{2n_1+1}}{2n_1+1}, \quad \|f_{n_1}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = [F^{n_1}]^T F^{n_1}.$$

Следовательно, повторный стохастический интеграл Ито кратности $k=3$ представляется в виде

$$\begin{aligned} {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot) &= {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3}(\cdot) - \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_3)} f_{n_1+n_2+n_3+1}(\cdot) - \\ &- \frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1)} (T f_{n_1}(\cdot) - f_{n_1+n_2+n_3+1}(\cdot)). \end{aligned} \quad (6.67)$$

Кратность $k=4$

Воспользуемся соотношениями (6.53), тогда

$$\begin{aligned} {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_3 j_4} \mathbf{1}^T A^{n_3} A^{n_4} \mathcal{X}_2 + \mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_4} \mathcal{X}_3 = \\ &= -\frac{1}{2} \delta_{j_3 j_4} \mathbf{1}^T A^{n_3} A^{n_4} \left[-\frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} P^{-1} A^{n_1} A^{n_2} \mathbf{1} + P^{-1} A^{n_2} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1} \right] + \\ &+ \mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_4} \left[-\frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} P^{-1} A^{n_2} A^{n_3} P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1} + P^{-1} A^{n_3} (V \mathcal{V}_{j_3}) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[-\frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} P^{-1} A^{n_1} A^{n_2} \mathbf{1} + P^{-1} A^{n_2} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1} \right] \right] = \\ &= \frac{1}{4} \delta_{j_1 j_2} \delta_{j_3 j_4} [F^{n_3+n_4}]^T P^{-1} F^{n_1+n_2} - \frac{1}{2} \delta_{j_3 j_4} [F^{n_3+n_4}]^T P^{-1} A^{n_2} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1} - \\ &- \frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_4} P^{-1} A^{n_2+n_3} P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1} - \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_4} P^{-1} A^{n_3} (V \mathcal{V}_{j_3}) P^{-1} F^{n_1+n_2} + \\ &+ \mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_4} P^{-1} A^{n_3} (V \mathcal{V}_{j_3}) P^{-1} A^{n_2} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1} = \\ &= {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) - \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_4} P^{-1} A^{n_3} (V \mathcal{V}_{j_3}) P^{-1} F^{n_1+n_2} - \\ &- \frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_4} P^{-1} A^{n_2+n_3} P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1} - \frac{1}{2} \delta_{j_3 j_4} [F^{n_3+n_4}]^T P^{-1} A^{n_2} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1} + \\ &+ \frac{1}{4} \delta_{j_1 j_2} \delta_{j_3 j_4} [F^{n_3+n_4}]^T P^{-1} F^{n_1+n_2}. \end{aligned}$$

Преобразуем слагаемые в правой части полученного выражения. Последовательно используя формулу (6.58), свойство (1.80) спектрального преобразования произведения функций одной переменной и формулу (6.59), записываем

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_4} P^{-1} A^{n_3} (V \mathcal{V}_{j_3}) P^{-1} F^{n_1+n_2} &= \frac{1}{n_1+n_2+1} \mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_4} P^{-1} A^{n_3} (V \mathcal{V}_{j_3}) F^{n_1+n_2+1} = \\ &= \frac{1}{n_1+n_2+1} \mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_4} P^{-1} A^{n_3} (V F^{n_1+n_2+1}) \mathcal{V}_{j_3} = \frac{1}{n_1+n_2+1} \mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_4} P^{-1} A^{n_1+n_2+n_3+1} \mathcal{V}_{j_3}. \end{aligned}$$

Для следующего слагаемого воспользуемся одним из результатов примера 1.18, а именно формулой для представления произведения $P^{-1}A^{n_2+n_3}P^{-1}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_4} P^{-1} A^{n_2+n_3} P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1} &= \frac{1}{n_2+n_3+1} \mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_4} (A^{n_2+n_3+1} P^{-1} - P^{-1} A^{n_2+n_3+1}) A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1} = \\ &= \frac{1}{n_2+n_3+1} \mathcal{V}_{j_4}^T (A^{n_2+n_3+n_4+1} P^{-1} A^{n_1} - A^{n_4} P^{-1} A^{n_1+n_2+n_3+1}) \mathcal{V}_{j_1}.\end{aligned}$$

Далее используем связь (1.87) спектральных характеристик оператора интегрирования и сопряженного с ним, свойство (1.74) симметричности спектральной характеристики оператора умножения, формулы (6.56) и (6.58), свойство (1.80) спектрального преобразования произведения функций одной переменной, а затем формулу (6.59):

$$\begin{aligned}[F^{n_3+n_4}]^T P^{-1} A^{n_2} (V \mathcal{V}_{j_2}) &= [F^{n_3+n_4}]^T [\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T - P^{-1}]^T A^{n_2} (V \mathcal{V}_{j_2}) = \\ &= [(V \mathcal{V}_{j_2}) A^{n_2} (\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T - P^{-1}) F^{n_3+n_4}]^T = [(V \mathcal{V}_{j_2}) A^{n_2} (\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T F^{n_3+n_4} - P^{-1} F^{n_3+n_4})]^T = \\ &= \frac{1}{n_3+n_4+1} [A^{n_2} (V \mathcal{V}_{j_2}) (T^{n_3+n_4+1} \mathbf{1} - F^{n_3+n_4+1})]^T = \\ &= \frac{1}{n_3+n_4+1} [A^{n_2} (T^{n_3+n_4+1} V \mathbf{1} - V F^{n_3+n_4+1}) \mathcal{V}_{j_2}]^T = \\ &= \frac{1}{n_3+n_4+1} [A^{n_2} (T^{n_3+n_4+1} E - A^{n_3+n_4+1}) \mathcal{V}_{j_2}]^T = \\ &= \frac{1}{n_3+n_4+1} [(T^{n_3+n_4+1} A^{n_2} - A^{n_2+n_3+n_4+1}) \mathcal{V}_{j_2}]^T = \\ &= \frac{1}{n_3+n_4+1} \mathcal{V}_{j_2}^T (T^{n_3+n_4+1} A^{n_2} - A^{n_2+n_3+n_4+1}),\end{aligned}$$

т.е.

$$[F^{n_3+n_4}]^T P^{-1} A^{n_2} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1} = \frac{1}{n_3+n_4+1} \mathcal{V}_{j_2}^T (T^{n_3+n_4+1} A^{n_2} P^{-1} A^{n_1} - A^{n_2+n_3+n_4+1} P^{-1} A^{n_1}) \mathcal{V}_{j_1}.$$

Остается применить формулы (6.56) и (6.58), тогда

$$[F^{n_3+n_4}]^T P^{-1} F^{n_1+n_2} = \frac{1}{n_1+n_2+1} [F^{n_3+n_4}]^T F^{n_1+n_2+1} = \frac{T^{n_1+n_2+n_3+n_4+2}}{(n_1+n_2+1)(n_1+n_2+n_3+n_4+2)}.$$

Принимая во внимание указанные выше соотношения, находим

$$\begin{aligned}{}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) &= {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) - \\ &- \frac{1}{2(n_1+n_2+1)} \delta_{j_1 j_2} \mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_4} P^{-1} A^{n_1+n_2+n_3+1} \mathcal{V}_{j_3} - \\ &- \frac{1}{2(n_2+n_3+1)} \delta_{j_2 j_3} \mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_4} (A^{n_2+n_3+1} P^{-1} - P^{-1} A^{n_2+n_3+1}) A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1} - \\ &- \frac{1}{2(n_3+n_4+1)} \delta_{j_3 j_4} \mathcal{V}_{j_2}^T A^{n_2} (T^{n_3+n_4+1} E - A^{n_3+n_4+1}) P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1} + \\ &+ \frac{T^{n_1+n_2+n_3+n_4+2}}{4(n_1+n_2+1)(n_1+n_2+n_3+n_4+2)} \delta_{j_1 j_2} \delta_{j_3 j_4}.\end{aligned}\tag{6.68}$$

Проведем сравнение этого соотношения с представлением из [77]:

$$\begin{aligned}{}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) &= {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) - \\ &- \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4} (\delta_{j_1 j_2} \delta_{i_1 i_2} \zeta_{i_3}^{(j_3)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} + \delta_{j_1 j_3} \delta_{i_1 i_3} \zeta_{i_2}^{(j_2)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} + \delta_{j_1 j_4} \delta_{i_1 i_4} \zeta_{i_2}^{(j_2)} \zeta_{i_3}^{(j_3)} + \\ &+ \delta_{j_2 j_3} \delta_{i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} + \delta_{j_2 j_4} \delta_{i_2 i_4} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_3}^{(j_3)} + \delta_{j_3 j_4} \delta_{i_3 i_4} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} -\end{aligned}$$

$$- \delta_{j_1 j_2} \delta_{i_1 i_2} \delta_{j_3 j_4} \delta_{i_3 i_4} - \delta_{j_1 j_3} \delta_{i_1 i_3} \delta_{j_2 j_4} \delta_{i_2 i_4} - \delta_{j_1 j_4} \delta_{i_1 i_4} \delta_{j_2 j_3} \delta_{i_2 i_3}), \quad (6.69)$$

где

$$\mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4} = \int_{\mathbb{T}} t_4^{n_4} q(i_4, t_4) \int_0^{t_4} t_3^{n_3} q(i_3, t_3) \int_0^{t_3} t_2^{n_2} q(i_2, t_2) \int_0^{t_2} t_1^{n_1} q(i_1, t_1) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4, \\ i_1, i_2, i_3, i_4 = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема 6.8. Для коэффициентов разложения $\mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4}$ выполняются соотношения:

$$\sum_{i_1=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4} = \frac{1}{2(n_1 + n_2 + 1)} \int_{\mathbb{T}} q(i_4, t) t^{n_4} \int_0^t q(i_3, \tau) \tau^{n_1 + n_2 + n_3 + 1} d\tau dt = \\ = \frac{1}{2(n_1 + n_2 + 1)} [A^{n_4} P^{-1} A^{n_1 + n_2 + n_3 + 1}]_{i_4 i_3} \quad \forall i_3, i_4, \quad (6.70)$$

$$\sum_{i_2=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4} = \frac{1}{2(n_2 + n_3 + 1)} \int_{\mathbb{T}} q(i_2, t) t^{n_4} \int_0^t q(i_1, \tau) (t^{n_2 + n_3 + 1} - \tau^{n_2 + n_3 + 1}) \tau^{n_1} d\tau dt = \\ = \frac{1}{2(n_2 + n_3 + 1)} [A^{n_4} (A^{n_2 + n_3 + 1} P^{-1} - P^{-1} A^{n_2 + n_3 + 1}) A^{n_1}]_{i_4 i_1} \quad \forall i_1, i_4, \quad (6.71)$$

$$\sum_{i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4} = \frac{1}{2(n_3 + n_4 + 1)} \int_{\mathbb{T}} q(i_2, t) t^{n_2} (T^{n_3 + n_4 + 1} - t^{n_3 + n_4 + 1}) \int_0^t q(i_1, \tau) \tau^{n_1} d\tau dt = \\ = \frac{1}{2(n_3 + n_4 + 1)} [A^{n_2} (T^{n_3 + n_4 + 1} E - A^{n_3 + n_4 + 1}) P^{-1} A^{n_1}]_{i_2 i_1} \quad \forall i_1, i_2, \quad (6.72)$$

$$\sum_{i_l, i_m=0}^{\infty} \delta_{i_l i_m} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4} = 0 \quad \forall l, m \in \{1, 2, 3, 4\}: |l - m| > 1, \quad (6.73)$$

$$\sum_{i_1, i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3 i_3}^{n_1 n_2 n_3 n_4} = \frac{T^{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2}}{4(n_1 + n_2 + 1)(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2)}, \quad (6.74)$$

$$\sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_1 i_2}^{n_1 n_2 n_3 n_4} = 0, \quad (6.75)$$

$$\sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_2 i_1}^{n_1 n_2 n_3 n_4} = 0, \quad (6.76)$$

где соотношение (6.73) верно для любых значений индексов, по которым не ведется суммирование.

Доказательство. По аналогии с доказательством теоремы 6.7, воспользуемся результатами примера 4.10. Кроме того, будем следовать доказательству теоремы 6.5.

Сначала рассмотрим числовые ряды в левых частях соотношений (6.70), (6.71) и (6.72). Они определяют соответственно коэффициенты разложения (1.42) трех функций двух переменных:

$$\mathbb{k}^{(1)}(t, \tau) = \frac{1}{2(n_1 + n_2 + 1)} t^{n_4} \tau^{n_1 + n_2 + n_3 + 1} 1(t - \tau), \\ \mathbb{k}^{(2)}(t, \tau) = \frac{1}{2(n_2 + n_3 + 1)} t^{n_4} (t^{n_2 + n_3 + 1} - \tau^{n_2 + n_3 + 1}) \tau^{n_1} 1(t - \tau), \\ \mathbb{k}^{(3)}(t, \tau) = \frac{1}{2(n_3 + n_4 + 1)} t^{n_2} (T^{n_3 + n_4 + 1} - t^{n_3 + n_4 + 1}) \tau^{n_1} 1(t - \tau),$$

а числовые ряды в левой части соотношения (6.73) — это коэффициенты разложения функций, которые тождественно равны нулю.

Из соотношения (6.70) при $i_3 = i_4$ следует, что

$$\sum_{i_1, i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3 i_3}^{n_1 n_2 n_3 n_4} = \frac{1}{2(n_1 + n_2 + 1)} \sum_{i_3=0}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} q(i_3, t) t^{n_4} \int_0^t q(i_3, \tau) \tau^{n_1+n_2+n_3+1} d\tau dt,$$

поэтому согласно теореме 1.12 при условии $\varphi(t) = t^{n_4}$ и $\psi(t) = t^{n_1+n_2+n_3+1}$ получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3 i_3} &= \frac{1}{4(n_1 + n_2 + 1)} (\varphi(\cdot), \psi(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \frac{1}{4} \int_0^T t^{n_1+n_2+n_3+n_4+1} dt = \\ &= \frac{T^{n_1+n_2+n_3+n_4+2}}{4(n_1 + n_2 + 1)(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2)}. \end{aligned}$$

Формулу (6.74) также можно вывести из соотношения (6.72) при $i_1 = i_2$ и теоремы 1.12, но при условии $\varphi(t) = t^{n_2}(T^{n_3+n_4+1} - t^{n_3+n_4+1})$ и $\psi(t) = t^{n_1}$ (см. также пример 4.11).

Соотношения (6.75) и (6.76) получаются из формулы (6.73) и теоремы 1.12 при условии $\varphi(t) \equiv 0$ или $\psi(t) \equiv 0$. ◀

Таким образом, на основе теоремы 6.8 можно записать, что

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4} \delta_{j_1 j_2} \delta_{i_1 i_2} \zeta_{i_3}^{(j_3)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} &= \sum_{i_1, i_3, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4} \delta_{j_1 j_2} \zeta_{i_3}^{(j_3)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} = \\ &= \frac{1}{2(n_1 + n_2 + 1)} \delta_{j_1 j_2} \sum_{i_3, i_4=0}^{\infty} \zeta_{i_3}^{(j_3)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} [A^{n_4} P^{-1} A^{n_1+n_2+n_3+1}]_{i_4 i_3} = \\ &= \frac{1}{2(n_1 + n_2 + 1)} \delta_{j_1 j_2} \mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_4} P^{-1} A^{n_1+n_2+n_3+1} \mathcal{V}_{j_3}, \\ \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4} \delta_{j_2 j_3} \delta_{i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} &= \sum_{i_1, i_2, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_2 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4} \delta_{j_2 j_3} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} = \\ &= \frac{1}{2(n_2 + n_3 + 1)} \delta_{j_2 j_3} \sum_{i_1, i_4=0}^{\infty} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} [A^{n_4} (A^{n_2+n_3+1} P^{-1} - P^{-1} A^{n_2+n_3+1}) A^{n_1}]_{i_4 i_1} = \\ &= \frac{1}{2(n_2 + n_3 + 1)} \delta_{j_2 j_3} \mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_4} (A^{n_2+n_3+1} P^{-1} - P^{-1} A^{n_2+n_3+1}) A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1}, \\ \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4} \delta_{j_3 j_4} \delta_{i_3 i_4} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} &= \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_3}^{n_1 n_2 n_3 n_4} \delta_{j_3 j_4} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} = \\ &= \frac{1}{2(n_3 + n_4 + 1)} \delta_{j_3 j_4} \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_2}^{(j_2)} [A^{n_2} (T^{n_3+n_4+1} E - A^{n_3+n_4+1}) P^{-1} A^{n_1}]_{i_2 i_1} = \\ &= \frac{1}{2(n_3 + n_4 + 1)} \delta_{j_3 j_4} \mathcal{V}_{j_2}^T A^{n_2} (T^{n_3+n_4+1} E - A^{n_3+n_4+1}) P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1}, \\ \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4} \delta_{j_1 j_3} \delta_{i_1 i_3} \zeta_{i_2}^{(j_2)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} &= \delta_{j_1 j_3} \sum_{i_1, i_3, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_1 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4} \zeta_{i_2}^{(j_2)} \zeta_{i_4}^{(j_4)} = 0, \\ \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4} \delta_{j_1 j_4} \delta_{i_1 i_4} \zeta_{i_2}^{(j_2)} \zeta_{i_3}^{(j_3)} &= 0, \quad \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4} \delta_{j_2 j_4} \delta_{i_2 i_4} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \zeta_{i_3}^{(j_3)} = 0, \\ \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4} \delta_{j_1 j_2} \delta_{i_1 i_2} \delta_{j_3 j_4} \delta_{i_3 i_4} &= \sum_{i_1, i_3=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_1 i_3 i_3}^{n_1 n_2 n_3 n_4} \delta_{j_1 j_2} \delta_{j_3 j_4} = \\ &= \frac{T^{n_1+n_2+n_3+n_4+2}}{4(n_1 + n_2 + 1)(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2)}, \end{aligned}$$

$$\sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4} \delta_{j_1 j_3} \delta_{i_1 i_3} \delta_{j_2 j_4} \delta_{i_2 i_4} = 0, \quad \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{\infty} \mathbb{K}_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4} \delta_{j_1 j_4} \delta_{i_1 i_4} \delta_{j_2 j_3} \delta_{i_2 i_3} = 0,$$

т.е. выражения (6.68) и (6.69) эквивалентны.

Замечания 6.7.

1. Частные случаи формулы (6.68) (см. также следствие 6.3):

$$j_1, j_2, j_3, j_4 \text{ попарно различны : } {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot),$$

$$j_1 = j_2, j_2 \neq j_3, j_3 \neq j_4 :$$

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_3 j_4)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_3 j_4)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) - \frac{1}{2(n_1 + n_2 + 1)} \mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_4} P^{-1} A^{n_1 + n_2 + n_3 + 1} \mathcal{V}_{j_3},$$

$$j_1 \neq j_2, j_2 = j_3, j_3 \neq j_4 :$$

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_2 j_4)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_2 j_4)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) - \frac{1}{2(n_2 + n_3 + 1)} \mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_4} (A^{n_2 + n_3 + 1} P^{-1} - P^{-1} A^{n_2 + n_3 + 1}) A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1},$$

$$j_1 \neq j_2, j_2 \neq j_3, j_3 = j_4 :$$

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_3)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_3)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) - \frac{1}{2(n_3 + n_4 + 1)} \mathcal{V}_{j_2}^T A^{n_2} (T^{n_3 + n_4 + 1} E - A^{n_3 + n_4 + 1}) P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1},$$

$$j_1 = j_2 \neq j_3 = j_4 :$$

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_3 j_3)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_3 j_3)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) - \frac{1}{2(n_1 + n_2 + 1)} \mathcal{V}_{j_3}^T A^{n_4} P^{-1} A^{n_1 + n_2 + n_3 + 1} \mathcal{V}_{j_3} - \frac{1}{2(n_3 + n_4 + 1)} \mathcal{V}_{j_1}^T A^{n_2} (T^{n_3 + n_4 + 1} E - A^{n_3 + n_4 + 1}) P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1} + \frac{T^{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2}}{4(n_1 + n_2 + 1)(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2)},$$

$$j_1 = j_2 = j_3 \neq j_4 :$$

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_1 j_4)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_1 j_4)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) - \mathcal{V}_{j_4}^T \left[\frac{1}{2(n_1 + n_2 + 1)} A^{n_4} P^{-1} A^{n_1 + n_2 + n_3 + 1} + \frac{1}{2(n_2 + n_3 + 1)} A^{n_4} (A^{n_2 + n_3 + 1} P^{-1} - P^{-1} A^{n_2 + n_3 + 1}) A^{n_1} \right] \mathcal{V}_{j_1},$$

$$j_1 \neq j_2 = j_3 = j_4 :$$

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_2 j_2)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_2 j_2)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) - \mathcal{V}_{j_2}^T \left[\frac{1}{2(n_2 + n_3 + 1)} A^{n_4} (A^{n_2 + n_3 + 1} P^{-1} - P^{-1} A^{n_2 + n_3 + 1}) A^{n_1} + \frac{1}{2(n_3 + n_4 + 1)} A^{n_2} (T^{n_3 + n_4 + 1} E - A^{n_3 + n_4 + 1}) P^{-1} A^{n_1} \right] \mathcal{V}_{j_1},$$

$$j_1 = j_2 = j_3 = j_4 :$$

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_1 j_1)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_1 j_1)} \mathbb{K}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) - \mathcal{V}_{j_1}^T \left[\frac{1}{2(n_1 + n_2 + 1)} A^{n_4} P^{-1} A^{n_1 + n_2 + n_3 + 1} + \frac{1}{2(n_2 + n_3 + 1)} A^{n_4} (A^{n_2 + n_3 + 1} P^{-1} - P^{-1} A^{n_2 + n_3 + 1}) A^{n_1} + \right]$$

$$+ \frac{1}{2(n_3 + n_4 + 1)} A^{n_2} (T^{n_3+n_4+1} E - A^{n_3+n_4+1}) P^{-1} A^{n_1} \Big] \mathcal{V}_{j_1} +$$

$$+ \frac{T^{n_1+n_2+n_3+n_4+2}}{4(n_1 + n_2 + 1)(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2)},$$

в остальных случаях: ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot)$,

где ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_4} P^{-1} A^{n_3} (V \mathcal{V}_{j_3}) P^{-1} A^{n_2} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1}$.

При $j_1 = j_2 = j_3 \neq j_4$ и $n_1 = n_3$ формула (6.68) записывается следующим образом:

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_1 j_4)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_1 n_4}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_1 j_4)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_1 n_4}(\cdot) - \frac{1}{2(n_1 + n_2 + 1)} \mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_1+n_2+n_4+1} P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1},$$

при $j_1 \neq j_2 = j_3 = j_4$ и $n_2 = n_4$ она представляется в виде

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_2 j_2)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3 n_2}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_2 j_2)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3 n_2}(\cdot) -$$

$$- \frac{1}{2(n_2 + n_3 + 1)} \mathcal{V}_{j_2}^T A^{n_2} P^{-1} (T^{n_2+n_3+1} E - A^{n_2+n_3+1}) A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1},$$

а при $j_1 = j_2 = j_3 = j_4$, $n_1 = n_3$ и $n_2 = n_4$ получаем

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_1 n_2}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_1 n_2}(\cdot) -$$

$$- \frac{T^{n_1+n_2+1}}{2(n_1 + n_2 + 1)} \mathcal{V}_{j_1}^T A^{n_2} P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1} + \frac{T^{2(n_1+n_2+1)}}{8(n_1 + n_2 + 1)^2}.$$

2. Случайные величины

$$\mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_4} P^{-1} A^{n_1+n_2+n_3+1} \mathcal{V}_{j_3}, \quad \mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_4} (A^{n_2+n_3+1} P^{-1} - P^{-1} A^{n_2+n_3+1}) A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1}$$

$$\text{и } \mathcal{V}_{j_2}^T A^{n_2} (T^{n_3+n_4+1} E - A^{n_3+n_4+1}) P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1},$$

которые входят в правую часть соотношения (6.68) и соотношений из п. 1, — это повторные стохастические интегралы Стратоновича (6.12) кратности $k = 2$:

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_3 j_4)} \mathbb{k}_{n_1+n_2+n_3+1, n_4}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} t_4^{n_4} \int_0^{t_4} t_3^{n_1+n_2+n_3+1} \circ dW_{j_3}(t_3) \circ dW_{j_4}(t_4) =$$

$$= \mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_4} P^{-1} A^{n_1+n_2+n_3+1} \mathcal{V}_{j_3},$$

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_4)} (\mathbb{k}_{n_1, n_2+n_3+n_4+1}(\cdot) - \mathbb{k}_{n_1+n_2+n_3+1, n_4}(\cdot)) =$$

$$= \int_{\mathbb{T}} t_4^{n_4} \int_0^{t_4} (t_4^{n_2+n_3+1} - t_1^{n_2+n_3+1}) t_1^{n_1} \circ dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_4}(t_4) =$$

$$= \mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_4} (A^{n_2+n_3+1} P^{-1} - P^{-1} A^{n_2+n_3+1}) A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1},$$

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} (T^{n_3+n_4+1} \mathbb{k}_{n_1 n_2}(\cdot) - \mathbb{k}_{n_1, n_2+n_3+n_4+1}(\cdot)) =$$

$$= \int_{\mathbb{T}} t_2^{n_2} \int_0^{t_2} (T^{n_3+n_4+1} - t_2^{n_3+n_4+1}) t_1^{n_1} \circ dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2) =$$

$$= \mathcal{V}_{j_2}^T A^{n_2} (T^{n_3+n_4+1} E - A^{n_3+n_4+1}) P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1},$$

где

$$\mathbb{k}_{n_1 n_2}(t_1, t_2) = t_1^{n_1} t_2^{n_2} 1(t_2 - t_1), \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$$

Аналогично рассматриваются случайные величины

$$\mathcal{V}_{j_4}^T A^{n_1+n_2+n_4+1} P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1}, \quad \mathcal{V}_{j_2}^T A^{n_2} P^{-1} (T^{n_2+n_3+1} E - A^{n_2+n_3+1}) A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1} \quad \text{и} \quad \mathcal{V}_{j_1}^T A^{n_2} P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1}.$$

Таким образом, можно записать представление повторного стохастического интеграла Ито

кратности $k = 4$:

$$\begin{aligned}
I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) &= S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) - \frac{1}{2(n_1 + n_2 + 1)} \delta_{j_1 j_2} S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_3 j_4)} \mathbb{k}_{n_1 + n_2 + n_3 + 1, n_4}(\cdot) - \\
&- \frac{1}{2(n_2 + n_3 + 1)} \delta_{j_2 j_3} S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_4)} (\mathbb{k}_{n_1, n_2 + n_3 + n_4 + 1}(\cdot) - \mathbb{k}_{n_1 + n_2 + n_3 + 1, n_4}(\cdot)) - \\
&- \frac{1}{2(n_3 + n_4 + 1)} \delta_{j_3 j_4} S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} (T^{n_3 + n_4 + 1} \mathbb{k}_{n_1 n_2}(\cdot) - \mathbb{k}_{n_1, n_2 + n_3 + n_4 + 1}(\cdot)) + \\
&+ \frac{T^{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2}}{4(n_1 + n_2 + 1)(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2)} \delta_{j_1 j_2} \delta_{j_3 j_4}. \tag{6.77}
\end{aligned}$$

В этом разделе повторные стохастические интегралы Ито выражаются через повторные стохастические интегралы Стратоновича, что связано с удобством представления именно интегралов Стратоновича в спектральной форме математического описания. Но, как показано в разд. 5.4, кратные (и повторные) стохастические интегралы Стратоновича выражаются через кратные (и повторные) стохастические интегралы Ито. Более того, справедлив принцип двойственности представления кратных стохастических интегралов Ито и Стратоновича (см. п. 5 замечаний 5.3). Проиллюстрируем это следующим примером.

Пример 6.6. Выразить повторный стохастический интеграл Стратоновича $S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot)$ кратности $k = 4$ через повторные стохастические интегралы Ито и найти его математическое ожидание при условии $\mathbb{T} = [0, T]$, т.е. $t_0 = 0$.

□ Возьмем за основу соотношение (6.77). Руководствуясь принципом двойственности в представлении кратных стохастических интегралов Ито и Стратоновича, делаем вывод, что интеграл $S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot)$ выражается через повторный стохастический интеграл Ито $I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot)$ кратности $k = 4$, повторные стохастические интегралы Ито кратности $k = 2$:

$$\begin{aligned}
&I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_3 j_4)} \mathbb{k}_{n_1 + n_2 + n_3 + 1, n_4}(\cdot), \quad I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_4)} (\mathbb{k}_{n_1, n_2 + n_3 + n_4 + 1}(\cdot) - \mathbb{k}_{n_1 + n_2 + n_3 + 1, n_4}(\cdot)) \\
&\text{и} \quad I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} (T^{n_3 + n_4 + 1} \mathbb{k}_{n_1 n_2}(\cdot) - \mathbb{k}_{n_1, n_2 + n_3 + n_4 + 1}(\cdot)),
\end{aligned}$$

а также константу

$$\frac{T^{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2}}{4(n_1 + n_2 + 1)(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2)}.$$

Применяя свойство линейности интеграла и формулу (6.60), находим

$$\begin{aligned}
I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_3 j_4)} \mathbb{k}_{n_1 + n_2 + n_3 + 1, n_4}(\cdot) &= \int_{\mathbb{T}} t_4^{n_4} \int_0^{t_4} t_3^{n_1 + n_2 + n_3 + 1} dW_{j_3}(t_3) dW_{j_4}(t_4) = \\
&= S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_3 j_4)} \mathbb{k}_{n_1 + n_2 + n_3 + 1, n_4}(\cdot) + \delta_{j_3 j_4} \frac{T^{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2}}{2(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2)}, \\
I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_4)} (\mathbb{k}_{n_1, n_2 + n_3 + n_4 + 1}(\cdot) - \mathbb{k}_{n_1 + n_2 + n_3 + 1, n_4}(\cdot)) &= \\
&= \int_{\mathbb{T}} t_4^{n_4} \int_0^{t_4} (t_4^{n_2 + n_3 + 1} - t_1^{n_2 + n_3 + 1}) t_1^{n_1} dW_{j_1}(t_1) dW_{j_4}(t_4) = \\
&= S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_4)} (\mathbb{k}_{n_1, n_2 + n_3 + n_4 + 1}(\cdot) - \mathbb{k}_{n_1 + n_2 + n_3 + 1, n_4}(\cdot)) + \\
&+ \delta_{j_2 j_3} \left(\frac{T^{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2}}{2(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2)} - \frac{T^{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2}}{2(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2)} \right) = \\
&= S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_4)} (\mathbb{k}_{n_1, n_2 + n_3 + n_4 + 1}(\cdot) - \mathbb{k}_{n_1 + n_2 + n_3 + 1, n_4}(\cdot)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)} (T^{n_3+n_4+1} \mathbb{k}_{n_1 n_2}(\cdot) - \mathbb{k}_{n_1, n_2+n_3+n_4+1}(\cdot)) = \\
& = \int_T t_2^{n_2} (T^{n_3+n_4+1} - t_2^{n_3+n_4+1}) \int_0^{t_2} t_1^{n_1} dW_{j_1}(t_1) dW_{j_2}(t_2) = \\
& = {}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)} (T^{n_3+n_4+1} \mathbb{k}_{n_1 n_2}(\cdot) - \mathbb{k}_{n_1, n_2+n_3+n_4+1}(\cdot)) + \\
& + \delta_{j_1 j_4} \left(\frac{T^{n_1+n_2+n_3+n_4+2}}{2(n_1+n_2+1)} - \frac{T^{n_1+n_2+n_3+n_4+2}}{2(n_1+n_2+n_3+n_4+2)} \right).
\end{aligned}$$

Подставляем эти выражения в формулу (6.77):

$$\begin{aligned}
& {}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) + \\
& + \frac{1}{2(n_1+n_2+1)} \delta_{j_1 j_2} \left({}^I \mathcal{J}_T^{W(j_3 j_4)} + \delta_{j_3 j_4} \frac{T^{n_1+n_2+n_3+n_4+2}}{2(n_1+n_2+n_3+n_4+2)} \right) + \\
& + \frac{1}{2(n_2+n_3+1)} \delta_{j_2 j_3} {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_4)} (\mathbb{k}_{n_1, n_2+n_3+n_4+1}(\cdot) - \mathbb{k}_{n_1+n_2+n_3+1, n_4}(\cdot)) + \\
& + \frac{1}{2(n_3+n_4+1)} \delta_{j_3 j_4} \left({}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)} (T^{n_3+n_4+1} \mathbb{k}_{n_1 n_2}(\cdot) - \mathbb{k}_{n_1, n_2+n_3+n_4+1}(\cdot)) + \right. \\
& \left. + \delta_{j_1 j_2} \left(\frac{T^{n_1+n_2+n_3+n_4+2}}{2(n_1+n_2+1)} - \frac{T^{n_1+n_2+n_3+n_4+2}}{2(n_1+n_2+n_3+n_4+2)} \right) \right) - \\
& - \frac{T^{n_1+n_2+n_3+n_4+2}}{4(n_1+n_2+1)(n_1+n_2+n_3+n_4+2)} \delta_{j_1 j_2} \delta_{j_3 j_4}.
\end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4(n_1+n_2+1)(n_1+n_2+n_3+n_4+2)} + \frac{1}{4(n_1+n_2+1)(n_3+n_4+1)} - \\
& - \frac{1}{4(n_3+n_4+1)(n_1+n_2+n_3+n_4+2)} - \frac{1}{4(n_1+n_2+1)(n_1+n_2+n_3+n_4+2)} = \\
& = \frac{1}{4(n_3+n_4+1)} \left(\frac{1}{n_1+n_2+1} - \frac{1}{n_1+n_2+n_3+n_4+2} \right) = \\
& = \frac{1}{4(n_3+n_4+1)} \frac{n_1+n_2+n_3+n_4+2 - n_1 - n_2 - 1}{(n_1+n_2+1)(n_1+n_2+n_3+n_4+2)} = \\
& = \frac{1}{4(n_1+n_2+1)(n_1+n_2+n_3+n_4+2)},
\end{aligned}$$

получаем искомое представление повторного стохастического интеграла Стратоновича:

$$\begin{aligned}
& {}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\cdot) + \frac{1}{2(n_1+n_2+1)} \delta_{j_1 j_2} {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_3 j_4)} \mathbb{k}_{n_1+n_2+n_3+1, n_4}(\cdot) + \\
& + \frac{1}{2(n_2+n_3+1)} \delta_{j_2 j_3} {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_4)} (\mathbb{k}_{n_1, n_2+n_3+n_4+1}(\cdot) - \mathbb{k}_{n_1+n_2+n_3+1, n_4}(\cdot)) + \\
& + \frac{1}{2(n_3+n_4+1)} \delta_{j_3 j_4} {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)} (T^{n_3+n_4+1} \mathbb{k}_{n_1 n_2}(\cdot) - \mathbb{k}_{n_1, n_2+n_3+n_4+1}(\cdot)) + \\
& + \frac{T^{n_1+n_2+n_3+n_4+2}}{4(n_1+n_2+1)(n_1+n_2+n_3+n_4+2)} \delta_{j_1 j_2} \delta_{j_3 j_4}.
\end{aligned}$$

Математические ожидания кратных (и повторных) стохастических интегралов Ито равны нулю [287], поэтому математическое ожидание рассматриваемого интеграла выражается формулой (см. также пример 4.11)

$$\mathbb{E}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) = \frac{T^{n_1+n_2+n_3+n_4+2}}{4(n_1+n_2+1)(n_1+n_2+n_3+n_4+2)} \delta_{j_1 j_2} \delta_{j_3 j_4}. \blacksquare$$

Замечания 6.8.

1. В работе [345] соотношения (6.26) получены с помощью применения спектрального преобразования к левой и правой частям каждого уравнения системы (6.24). Точно так же соотношения (6.53) можно вывести, преобразуя уравнения системы (6.52).

2. Для представления повторных стохастических интегралов Ито можно изменить соотношения (6.26) и (6.53) с помощью формулы (2.30) (см. п. 2 замечаний 6.1). Кроме того, достаточно формально положить $j_0 = 0$ (см. п. 3 замечаний 6.1), тогда

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{K}(\cdot) = -\frac{1}{2} \delta_{j_{k-1} j_k} \mathbf{1}^T \mathcal{X}_{k-2} + \mathcal{V}_{j_k}^T \mathcal{X}_{k-1},$$

$$\mathcal{X}_l = -\frac{1}{2} \delta_{j_{l-1} j_l} P^{-1} \mathcal{X}_{l-2} + P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_l}) \mathcal{X}_{l-1} = -\frac{1}{2} \delta_{j_{l-1} j_l} P^{-1} \mathcal{X}_{l-2} + P^{-1} E^{\mathcal{V}_{j_l}} \mathcal{X}_{l-1}, \quad l = 1, \dots, k-1,$$

и

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{K}_{\psi}(\cdot) = -\frac{1}{2} \delta_{j_{k-1} j_k} \mathbf{1}^T \Psi_{k-1} \Psi_k \mathcal{X}_{k-2} + \mathcal{V}_{j_k}^T \Psi_k \mathcal{X}_{k-1},$$

$$\mathcal{X}_l = -\frac{1}{2} \delta_{j_{l-1} j_l} P^{-1} \Psi_{l-1} \Psi_l \mathcal{X}_{l-2} + P^{-1} \Psi_l (V \mathcal{V}_{j_l}) \mathcal{X}_{l-1} =$$

$$= -\frac{1}{2} \delta_{j_{l-1} j_l} P^{-1} \Psi_{l-1} \Psi_l \mathcal{X}_{l-2} + P^{-1} \Psi_l E^{\mathcal{V}_{j_l}} \mathcal{X}_{l-1}, \quad l = 1, \dots, k-1,$$

где $E^{\mathcal{V}}$ — двумерная спектральная характеристика случайного линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*W}$ (см. разд. 2.3 и теорему 2.3) при $k \geq 3$ и $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{j_l}$.

3. Соотношения (6.26) — это частный случай соотношений (6.53), а теорема 6.3 — частный случай теоремы 6.6 при условии $\psi_l(t) \equiv 1$ и $\Psi_l = E$, где E — бесконечная единичная матрица, $l = 1, \dots, k$. Соотношения (6.30), (6.32) и (6.38) являются частными случаями соотношений (6.60), (6.62) и (6.68) соответственно при условии $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 0$.

4. Следствия 6.1 и 6.3 устанавливают количество различных формул для представления повторных стохастических интегралов Ито. Это количество равно числу всех комбинаций значений булевых переменных $b_1 = (j_1 = j_2), \dots, b_{k-1} = (j_{k-1} = j_k)$ и их, очевидно, 2^{k-1} . Более того, можно поставить в соответствие каждой формуле целое число b , которое в двоичном представлении имеет вид $(b_{k-1} \dots b_1)_2$. Например, для попарно различных значений j_1, \dots, j_k имеем $b = 0$, так как $b_1 = \dots = b_{k-1} = 0$, а для совпадающих значений j_1, \dots, j_k — $b = 2^{k-1} - 1$, поскольку $b_1 = \dots = b_{k-1} = 1$. Значениям $b = 1, 2, \dots, 2^{k-1} - 2$ отвечают формулы для представления повторных стохастических интегралов Ито при совпадении только двух соседних элементов из мультимножества $\bar{J} = (j_1 \dots j_k)$, определенного в разд. 4.3.

5. В п. 8 замечаний 6.1 рассмотрены повторные стохастические интегралы Стратоновича смешанного типа. Аналогично можно ввести повторные стохастические интегралы Ито смешанного типа в предположении, что в формулах (6.20) и (6.48) допустимы нулевые значения j_1, \dots, j_k , но при условии $j_1 + \dots + j_k > 0$. Например, к такому типу относится интеграл кратности $k = 4$ вида (6.20):

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(0j_2j_30)} \mathbb{K}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \int_{t_0}^{t_4} \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} dt_1 dW_{j_2}(t_2) dW_{j_3}(t_3) dt_4.$$

Система стохастических дифференциальных уравнений Ито, соответствующая интегралу

смешанного типа имеет вид

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= \delta_{j_1 0} \psi_1(t) dt + \bar{\delta}_{j_1 0} \psi_1(t) dW_{j_1}(t), \\ dX_2(t) &= \delta_{j_2 0} \psi_2(t) X_1(t) dt + \bar{\delta}_{j_2 0} \psi_2(t) X_1(t) dW_{j_2}(t), \\ &\dots, \\ dX_k(t) &= \delta_{j_k 0} \psi_k(t) X_{k-1}(t) dt + \bar{\delta}_{j_k 0} \psi_k(t) X_{k-1}(t) dW_{j_k}(t), \end{aligned} \quad (6.78)$$

где $\bar{\delta}_{j_l 0} = 1 - \delta_{j_l 0}$, $\delta_{j_l 0}$ — символ Кронекера (1.4), $l = 1, \dots, k$. С системой (6.49), а в частном случае $\psi_l(t) \equiv 1$ с системой (6.21) она не совпадает.

Перейдем к эквивалентной системе стохастических дифференциальных уравнений Стратоновица, опираясь на доказательство леммы 6.2. Сначала запишем систему (6.78) в виде (3.40):

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(t_0) = 0,$$

в которой вектор-функция $f(\cdot): \mathbb{T} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ задается выражением

$$f(t, x) = [\delta_{j_1 0} \psi_1(t) \delta_{j_2 0} \psi_2(t) x_1 \dots \delta_{j_k 0} \psi_k(t) x_{k-1}]^T,$$

а столбцы матричной функции $\sigma(\cdot): \mathbb{T} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k \times s}$ определяются в виде

$$\sigma_{*j}(t, x) = [\alpha_1^j \psi_1(t) \alpha_2^j \psi_2(t) x_1 \dots \alpha_k^j \psi_k(t) x_{k-1}]^T, \quad j = 1, \dots, s,$$

где $\alpha_l^j = \delta_{jji} \bar{\delta}_{j_0}$, $l = 1, \dots, k$.

Далее определим вектор-функцию $a(\cdot): \mathbb{T} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, связанную с вектор-функцией $f(\cdot)$ формулами (3.3):

$$a(t, x) = f(t, x) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \frac{\partial \sigma_{*j}(t, x)}{\partial x} \sigma_{*j}(t, x),$$

где

$$\frac{\partial \sigma_{*j}(t, x)}{\partial x} \sigma_{*j}(t, x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_1^j \alpha_2^j \psi_1(t) \psi_2(t) \\ \alpha_2^j \alpha_3^j \psi_2(t) \psi_3(t) x_1 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1}^j \alpha_k^j \psi_{k-1}(t) \psi_k(t) x_{k-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_{j j_1} \delta_{j j_2} \bar{\delta}_{j_0} \psi_1(t) \psi_2(t) \\ \delta_{j j_2} \delta_{j j_3} \bar{\delta}_{j_0} \psi_2(t) \psi_3(t) x_1 \\ \vdots \\ \delta_{j j_{k-1}} \delta_{j j_k} \bar{\delta}_{j_0} \psi_{k-1}(t) \psi_k(t) x_{k-2} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, вектор сноса в соответствующем векторном стохастическом дифференциальном уравнении Стратоновица (3.27) представляется в форме

$$a(t, x) = \begin{bmatrix} \delta_{j_1 0} \psi_1(t) \\ \delta_{j_2 0} \psi_2(t) x_1 - (1/2) \delta_{j_1 j_2} \bar{\delta}_{j_0} \psi_1(t) \psi_2(t) \\ \delta_{j_3 0} \psi_3(t) x_2 - (1/2) \delta_{j_2 j_3} \bar{\delta}_{j_0} \psi_2(t) \psi_3(t) x_1 \\ \vdots \\ \delta_{j_k 0} \psi_k(t) x_{k-1} - (1/2) \delta_{j_{k-1} j_k} \bar{\delta}_{j_0} \psi_{k-1}(t) \psi_k(t) x_{k-2} \end{bmatrix},$$

отсюда получаем

$$\begin{aligned}
dX_1(t) &= \delta_{j_1 0} \psi_1(t) dt + \bar{\delta}_{j_1 0} \psi_1(t) dW_{j_1}(t), \\
dX_2(t) &= \left(\delta_{j_2 0} \psi_2(t) X_1(t) - \frac{1}{2} \delta_{j_1 j_2} \bar{\delta}_{j_2 0} \psi_1(t) \psi_2(t) \right) dt + \bar{\delta}_{j_2 0} \psi_2(t) X_1(t) \circ dW_{j_2}(t), \\
dX_3(t) &= \left(\delta_{j_3 0} \psi_3(t) X_2(t) - \frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3} \bar{\delta}_{j_3 0} \psi_2(t) \psi_3(t) X_1(t) \right) dt + \bar{\delta}_{j_3 0} \psi_3(t) X_2(t) \circ dW_{j_3}(t), \\
&\dots, \\
dX_k(t) &= \left(\delta_{j_k 0} \psi_k(t) X_{k-1}(t) - \frac{1}{2} \delta_{j_{k-1} j_k} \bar{\delta}_{j_k 0} \psi_{k-1}(t) \psi_k(t) X_{k-2}(t) \right) dt + \bar{\delta}_{j_k 0} \psi_k(t) X_{k-1}(t) \circ dW_{j_k}(t).
\end{aligned} \tag{6.79}$$

Так как выполняются соотношения (6.19), можно сделать вывод, что различия систем (6.51) и (6.79) только в коэффициентах $\bar{\delta}_{j_l 0}$ у произведений $\psi_{l-1}(\cdot) \psi_l(\cdot)$. Эти коэффициенты легко учесть при спектральном преобразовании по свойству линейности (2.8). Значит, для представления повторных стохастических интегралов Ито смешанного типа с помощью спектральной формы математического описания достаточно опираться на теоремы 6.3 и 6.6, дополнительно обозначая $\mathcal{V}_0 = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — спектральная характеристика функции $f_0(t) \equiv 1$. Однако в соотношениях (6.26) и (6.53) требуется заменить символы Кронекера $\delta_{j_{l-1} j_l}$ на величины

$$\delta_{j_{l-1} j_l}^* = \delta_{j_{l-1} j_l} \bar{\delta}_{j_l 0} = \delta_{j_{l-1} j_l} (1 - \delta_{j_l 0}), \quad l = 2, \dots, k.$$

Аналогичным образом следует модифицировать обозначения в структурных схемах, изображенных на рис. 6.3 и 6.4.

В результате повторный стохастический интеграл Ито смешанного типа от функции $\mathbb{k}(\cdot)$ представляется с помощью соотношений

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) = -\frac{1}{2} \delta_{j_{k-1} j_k}^* \mathbf{1}^T \mathcal{X}_{k-2} + \mathcal{V}_{j_k}^T \mathcal{X}_{k-1}, \tag{6.80}$$

$$\mathcal{X}_l = -\frac{1}{2} \delta_{j_{l-1} j_l}^* P^{-1} \mathcal{X}_{l-2} + P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_l}) \mathcal{X}_{l-1}, \quad l = 2, \dots, k-1, \quad \mathcal{X}_0 = \mathbf{1}, \quad \mathcal{X}_1 = P^{-1} \mathcal{V}_{j_1},$$

а от функции $\mathbb{k}_\psi(\cdot)$ выражается следующим образом (соответствующая теорема сформулирована и доказана в [347]):

$$\begin{aligned}
{}^I \mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_\psi(\cdot) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_{k-1} j_k}^* \mathbf{1}^T \Psi_{k-1} \Psi_k \mathcal{X}_{k-2} + \mathcal{V}_{j_k}^T \Psi_k \mathcal{X}_{k-1}, \\
\mathcal{X}_l &= -\frac{1}{2} \delta_{j_{l-1} j_l}^* P^{-1} \Psi_{l-1} \Psi_l \mathcal{X}_{l-2} + P^{-1} \Psi_l (V \mathcal{V}_{j_l}) \mathcal{X}_{l-1}, \quad l = 2, \dots, k-1,
\end{aligned} \tag{6.81}$$

$$\mathcal{X}_0 = \mathbf{1}, \quad \mathcal{X}_1 = P^{-1} \Psi_1 \mathcal{V}_{j_1},$$

где все обозначения заимствованы из теорем 6.3 и 6.6. Формулы (6.80) и (6.81) можно модифицировать так, как это описано в п. 2.

Для повторных стохастических интегралов Ито смешанного типа следует внести изменения в *свойство повторного стохастического интеграла Ито*, связанное со сдвигом и масштабированием базисной системы:

$${}^I \mathcal{J}_{[t_0, T]}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot) \stackrel{d}{=} (T - t_0)^{k/2 + \sum_{l=1}^k (\delta_{j_l 0} / 2 + n_l)} \cdot {}^I \mathcal{J}_{[0, 1]}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}^*(\cdot).$$

где все обозначения описаны после формулы (6.55).

Пример 6.7. Представить в спектральной форме математического описания повторный стохастический интеграл Ито

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \int_{t_0}^{t_4} \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} dW_{j_1}(t_1) dW_{j_2}(t_2) dW_{j_3}(t_3) dW_{j_4}(t_4)$$

кратности $k = 4$ при условии $\mathbb{T} = [0, T]$, т.е. $t_0 = 0$, для двух вариантов:

$$\text{а) } j_1 = j_4 = 0, j_2, j_3 \neq 0; \quad \text{б) } j_2 = j_3 = 0, j_1, j_4 \neq 0.$$

□ Зададим базисную систему $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$. Согласно п. 5 замечаний 6.8 для варианта $j_1 = j_4 = 0$ и $j_2, j_3 \neq 0$ повторный стохастический интеграл Ито представляется с помощью соотношений (6.80), в которых $\mathcal{V}_{j_1} = \mathcal{V}_{j_4} = \mathcal{V}_0 = \mathbf{1}$ — спектральная характеристика функции $f_0(t) \equiv 1$, а $\mathcal{V}_{j_2}, \mathcal{V}_{j_3}$ — спектральные характеристики (2.26) белых шумов $V_{j_2}(\cdot), V_{j_3}(\cdot)$ с элементами $\zeta_{i_2}^{(j_2)}, \zeta_{i_3}^{(j_3)}$ — независимыми случайными величинами, имеющими стандартное нормальное распределение. Также в этих соотношениях используются спектральные характеристики P^{-1} и A оператора интегрирования и оператора умножения на функцию $a_1(t) = t$, спектральная характеристика V оператора умножения функций (см. разд. 1.5 и 1.6), F и F^2 — спектральные характеристики функций и $f_1(t) = t$ и $f_2(t) = t^2$ соответственно (см. разд. 1.1), определенные относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$.

Условия на значения j_1, j_2, j_3, j_4 позволяют записать, что $\delta_{j_1 j_2}^* = 0$, $\delta_{j_2 j_3}^* \in \{0, 1\}$, $\delta_{j_3 j_4}^* = 0$, т.е.

$$\mathcal{X}_1 = P^{-1} \mathbf{1}, \quad \mathcal{X}_2 = P^{-1}(V \mathcal{V}_{j_2}) \mathcal{X}_1, \quad \mathcal{X}_3 = -\frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3}^* P^{-1} \mathcal{X}_1 + P^{-1}(V \mathcal{V}_{j_3}) \mathcal{X}_2, \quad {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(0 j_2 j_3 0)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathbf{1}^T \mathcal{X}_3.$$

Эти соотношения можно упростить (см. п. 8 замечаний 6.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 &= F, \quad \mathcal{X}_2 = P^{-1}(V \mathcal{V}_{j_2}) F = P^{-1}(V F) \mathcal{V}_{j_2} = P^{-1} A \mathcal{V}_{j_2}, \\ \mathcal{X}_3 &= -\frac{1}{2} \delta_{j_2 j_3}^* P^{-1} F + P^{-1}(V \mathcal{V}_{j_3}) P^{-1} A \mathcal{V}_{j_2} = -\frac{1}{4} \delta_{j_2 j_3}^* F^2 + P^{-1}(V \mathcal{V}_{j_3}) P^{-1} A \mathcal{V}_{j_2}. \end{aligned}$$

Далее применим свойство (1.49) сохранения скалярного произведения (см. пример 1.2) и соотношение $\mathbf{1}^T P^{-1}(V \mathcal{V}_{j_3}) = \mathcal{V}_{j_3}^T (T E - A)$, полученное в примере 6.4. Тогда

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(0 j_2 j_3 0)} \mathbb{k}(\cdot) = -\frac{1}{4} \delta_{j_2 j_3}^* \mathbf{1}^T F^2 + \mathbf{1}^T P^{-1}(V \mathcal{V}_{j_3}) P^{-1} A \mathcal{V}_{j_2} = -\delta_{j_2 j_3}^* \frac{T^3}{12} + \mathcal{V}_{j_3}^T (T E - A) P^{-1} A \mathcal{V}_{j_2},$$

где последнее слагаемое в правой части записанного равенства — это повторный стохастический интеграл Стратоновича (6.7) кратности $k = 2$:

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_2 j_3)} (T - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) \mathbb{k}_{10}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \int_0^{t_3} t_2 (T - t_3) \circ dW_{j_2}(t_2) \circ dW_{j_3}(t_3) = \mathcal{V}_{j_3}^T (T E - A) P^{-1} A \mathcal{V}_{j_2},$$

для которого $\mathbb{k}_{10}(t_2, t_3) = t_2 \mathbf{1}(t_3 - t_2)$, $\mathbb{k}_{01}(t_2, t_3) = t_3 \mathbf{1}(t_3 - t_2)$, и его нетрудно выразить через повторный стохастический интеграл Ито (6.48) от той же функции. Действительно, по свойству линейности интеграла

$$\begin{aligned} {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_2 j_3)} (T - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) \mathbb{k}_{10}(\cdot) &= T {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_2 j_3)} \mathbb{k}_{10}(\cdot) - {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_2 j_3)} \mathbb{k}_{01}(\cdot) \mathbb{k}_{10}(\cdot) = \\ &= T {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_2 j_3)} \mathbb{k}_{10}(\cdot) - {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_2 j_3)} \mathbb{k}_{11}(\cdot), \end{aligned}$$

где $\mathbb{k}_{11}(t_2, t_3) = t_2 t_3 \mathbf{1}(t_3 - t_2)$.

Таким образом,

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_2 j_3)} (T - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) \mathbb{k}_{10}(\cdot) = T {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_2 j_3)} \mathbb{k}_{10}(\cdot) + \delta_{j_2 j_3}^* \frac{T^3}{4} -$$

$$- {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_2 j_3)} \mathbb{k}_{11}(\cdot) - \delta_{j_2 j_3} \frac{T^3}{6} = {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_2 j_3)} (T - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) \mathbb{k}_{10}(\cdot) + \delta_{j_2 j_3} \frac{T^3}{12},$$

что следует из формулы (6.60). Напомним (см. разд. 5.2), что при $j_2 \neq j_3$ повторные стохастические интегралы Стратоновича и Ито совпадают, а при $j_2 = j_3$ они отличаются на величину

$$\text{tr}(T - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) \mathbb{k}_{10}(\cdot) = \frac{1}{2} \int_0^T (T - t) t dt = \frac{T^3}{12},$$

где коэффициент $1/2$ соответствует усреднению функции $(T - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) \mathbb{k}_{10}(\cdot)$ на диагонали квадрата \mathbb{T}^2 (см. разд. 1.9):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{S}^\varepsilon (T - \mathbb{k}_{01}(t, t)) \mathbb{k}_{10}(t, t) = \frac{1}{2} (T - t) t.$$

Найденная величина определяет математическое ожидание повторного стохастического интеграла Стратоновича:

$$\mathbb{E}^S \mathcal{J}_T^{W(j_2 j_3)} (T - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) \mathbb{k}_{10}(\cdot) = \delta_{j_2 j_3} \frac{T^3}{12},$$

и при $j_2 = j_3$ она равна следу матрицы $(TE - A)P^{-1}A$ согласно следствию 1.1, так как интегральный оператор с симметризованным ядром по отношению к ядру $(T - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) \mathbb{k}_{10}(\cdot)$ является ядерным (представляется в виде линейной комбинации ядер, рассмотренных в примере 1.16). При $j_2 \neq j_3$ она принимает нулевое значение из-за равенства интегралов ${}^S \mathcal{J}_T^{W(j_2 j_3)} (T - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) \mathbb{k}_{10}(\cdot)$ и ${}^I \mathcal{J}_T^{W(j_2 j_3)} (T - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) \mathbb{k}_{10}(\cdot)$:

$$\mathbb{E}^S \mathcal{J}_T^{W(j_2 j_3)} (T - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) \mathbb{k}_{10}(\cdot) = \delta_{j_2 j_3} \text{tr}(TE - A)P^{-1}A.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} {}^I \mathcal{J}_T^{W(0j_2 j_3 0)} \mathbb{k}(\cdot) &= {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_2 j_3)} (T - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) \mathbb{k}_{10}(\cdot), \\ \mathbb{E}^I \mathcal{J}_T^{W(0j_2 j_3 0)} \mathbb{k}(\cdot) &= 0, \quad \mathbb{E}({}^I \mathcal{J}_T^{W(0j_2 j_3 0)} \mathbb{k}(\cdot))^2 = \|(T - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) \mathbb{k}_{10}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 \end{aligned}$$

с учетом равенства нулю математических ожиданий кратных, а значит и повторных стохастических интегралов Ито, а также свойства изометрии Ито (5.65). В результате

$$\|(T - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) \mathbb{k}_{10}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \int_0^T (T - t_3)^2 \int_0^{t_3} t_2^2 dt_2 dt_3 = \frac{1}{3} \int_{t_0}^T (T - t_3)^2 t_3^3 dt_3 = \frac{T^6}{180}$$

и эта величина равна квадрату нормы матрицы $(TE - A)P^{-1}A$ (см. пример 6.5), поэтому

$$\mathbb{E}({}^I \mathcal{J}_T^{W(0j_2 j_3 0)} \mathbb{k}(\cdot))^2 = \|(TE - A)P^{-1}A\|_{\mathcal{M}_2}^2 = \frac{T^6}{180}.$$

Перейдем к варианту $j_2 = j_3 = 0$ и $j_1, j_4 \neq 0$. Здесь следует переопределить спектральные характеристики \mathcal{V}_{j_l} , $l = 1, 2, 3, 4$. А именно $\mathcal{V}_{j_2} = \mathcal{V}_{j_3} = \mathcal{V}_0 = \mathbf{1}$ и $\mathcal{V}_{j_1}, \mathcal{V}_{j_4}$ — спектральные характеристики белых шумов $V_{j_1}(\cdot), V_{j_4}(\cdot)$ с элементами $\zeta_{i_1}^{(j_1)}, \zeta_{i_4}^{(j_4)}$ — независимыми случайными величинами, которые имеют стандартное нормальное распределение. Кроме того, $\delta_{j_1 j_2}^* = \delta_{j_2 j_3}^* = \delta_{j_3 j_4}^* = 0$, что означает совпадение повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито. Поэтому применим теорему 6.1 с учетом п. 8 замечаний 6.1:

$$\begin{aligned} {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 0 0 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) &= {}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 0 0 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_4}^\top P^{-1} (V \mathbf{1}) P^{-1} (V \mathbf{1}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} = \\ &= \mathcal{V}_{j_4}^\top P^{-1} E P^{-1} E P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} = \mathcal{V}_{j_4}^\top P^{-3} \mathcal{V}_{j_1}, \end{aligned}$$

где $P^{-3} = [P^{-1}]^3$. Этот же интеграл можно выразить через спектральные характеристики P^{-1} и A , пользуясь одной из формул (1.91). Таким образом,

$${}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 0 0 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_4}^\top \left(\frac{1}{2} A^2 P^{-1} - A P^{-1} A + \frac{1}{2} P^{-1} A^2 \right) \mathcal{V}_{j_1},$$

что совпадает с повторным стохастическим интегралом Стратоновича (6.7) кратности $k = 2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{S} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_4)} \frac{(\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot))^2}{2} &= \int_{\mathbb{T}} \int_0^{t_4} \frac{(t_4 - t_1)^2}{2} \circ dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_4}(t_4) = \\ &= \mathcal{V}_{j_4}^{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2} A^2 P^{-1} - A P^{-1} A + \frac{1}{2} P^{-1} A^2 \right) \mathcal{V}_{j_1}. \end{aligned}$$

Далее покажем, что последний интеграл не отличается от повторного стохастического интеграла Ито (6.48) кратности $k = 2$:

$$\mathbb{I} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_4)} \frac{(\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot))^2}{2} = \int_{\mathbb{T}} \int_0^{t_4} \frac{(t_4 - t_1)^2}{2} dW_{j_1}(t_1) dW_{j_4}(t_4).$$

Если $j_1 \neq j_4$, то повторные стохастические интегралы Стратоновича и Ито совпадают вне зависимости от функции, от которой эти интегралы требуется найти. Если $j_1 = j_4$, то они отличаются на величину

$$\text{tr} \frac{(\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot))^2}{2} = \frac{1}{2} \int_0^T 0 \cdot dt = 0,$$

а она, в свою очередь, совпадает со следом матрицы P^{-3} (см. пример 1.19):

$$\mathbb{E}^{\mathbb{S}} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_4)} \frac{(\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot))^2}{2} = \text{tr} P^{-3} = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbb{I} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 00 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) &= \mathbb{I} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_4)} \frac{(\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot))^2}{2}, \\ \mathbb{E}^{\mathbb{I}} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 00 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) &= 0, \quad \mathbb{E}(\mathbb{I} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 00 j_4)} \mathbb{k}(\cdot))^2 = \left\| \frac{(\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot))^2}{2} \right\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2, \end{aligned}$$

поскольку математические ожидания кратных и повторных стохастических интегралов Ито равны нулю и, кроме того, выполняется свойство изометрии Ито (5.65). Наконец,

$$\left\| \frac{(\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot))^2}{2} \right\|_{L_2(\mathbb{T}^2)}^2 = \frac{1}{4} \int_0^T \int_0^{t_4} (t_4 - t_1)^4 dt_1 dt_4 = \frac{1}{20} \int_0^T t_4^5 dt_4 = \frac{T^6}{120}$$

и эта величина равна квадрату нормы матрицы P^{-3} (см. пример 6.5), т.е.

$$\mathbb{E}(\mathbb{I} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 00 j_4)} \mathbb{k}(\cdot))^2 = \|P^{-3}\|_{\mathcal{M}_2}^2 = \frac{T^6}{120}. \quad \blacksquare$$

В разд. 6.1 описан вариант, при котором в формулу (6.7) подставляются случайные процессы $\psi_l(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$, а не функции $\psi_l(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, $l \in \{1, \dots, k\}$. Таким же образом можно поступить и с формулой (6.48), причем это вполне естественно для повторных стохастических интегралов. Тогда в соотношения (6.53) следует подставить спектральные характеристики Ψ_l операторов умножения на эти случайные процессы (см. разд. 2.6).

Например, интеграл (6.48) (а в частном случае интеграл (6.20)) представляется в форме

$$\begin{aligned} \mathbb{I} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_{\psi}(\cdot) &= \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{t_0}^{t_{m+2}} \int_{t_0}^{t_{m+1}} \tilde{\psi}_{m+1}(t_{m+1}) \psi_{m+2}(t_{m+2}) \dots \psi_k(t_k) \times \\ &\quad \times dW_{j_{m+1}}(t_{m+1}) dW_{j_{m+2}}(t_{m+2}) \dots dW_{j_k}(t_k), \end{aligned}$$

но это интеграл вида (6.48) кратности $k' = k - m$, $1 \leq m < k$, при условии

$$\tilde{\psi}_{m+1}(t) = \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{\tau_2} \psi_1(\tau_1) \dots \psi_m(\tau_m) dW_{j_1}(\tau_1) \dots dW_{j_m}(\tau_m),$$

что можно использовать для спектрального представления повторных стохастических интегралов Ито, проводя предварительное аналитическое интегрирование, если это возможно.

В заключительной части этого раздела рассмотрим повторные стохастические θ -интегралы кратности $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} {}^\theta \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_\psi(\cdot) &= \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} \psi_1(t_1) \psi_2(t_2) \dots \psi_k(t_k) \times \\ &\quad \times d_\theta W_{j_1}(t_1) d_\theta W_{j_2}(t_2) \dots d_\theta W_{j_k}(t_k), \quad \theta \in [0, 1], \end{aligned} \quad (6.82)$$

где $\mathbb{T} = [t_0, T]$, функция $\mathbb{k}_\psi(\cdot)$ задается формулой (4.24) с учетом весовых функций $\psi_l(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, $l = 1, \dots, k$; $j_1, \dots, j_k = 1, 2, \dots, s$; $W_1(\cdot), \dots, W_s(\cdot)$ — независимые стандартные винеровские процессы (см. разд. 2.1 и 5.2). Стохастические θ -интегралы кратности $k = 1$ определены в разд. 2.3.

Этому интегралу соответствует система линейных стохастических дифференциальных уравнений с θ -дифференциалом:

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= \psi_1(t) d_\theta W_{j_1}(t), & X_1(t_0) &= 0, \\ dX_2(t) &= \psi_2(t) X_1(t) d_\theta W_{j_2}(t), & X_2(t_0) &= 0, \\ &\dots, \\ dX_k(t) &= \psi_k(t) X_{k-1}(t) d_\theta W_{j_k}(t), & X_k(t_0) &= 0. \end{aligned} \quad (6.83)$$

Ее решение позволяет выразить интеграл (6.82). Действительно,

$$X_k(t) = \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{\tau_3} \int_{t_0}^{\tau_2} \psi_1(\tau_1) \psi_2(\tau_2) \dots \psi_k(\tau_k) d_\theta W_{j_1}(\tau_1) d_\theta W_{j_2}(\tau_2) \dots d_\theta W_{j_k}(\tau_k), \quad (6.84)$$

следовательно,

$${}^\theta \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1)} \mathbb{k}_\psi(\cdot) = X_1(T), \quad {}^\theta \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}_\psi(\cdot) = X_2(T), \quad \dots, \quad {}^\theta \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_\psi(\cdot) = X_k(T).$$

В частном случае при условии $\psi_l(t) \equiv 1$, $l = 1, \dots, k$, имеем интеграл

$${}^\theta \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} d_\theta W_{j_1}(t_1) d_\theta W_{j_2}(t_2) \dots d_\theta W_{j_k}(t_k), \quad (6.85)$$

где функция $\mathbb{k}(\cdot)$ задается формулой (4.15). Система стохастических дифференциальных уравнений с θ -дифференциалом, отвечающая такому интегралу, — частный случай системы (6.83).

Повторные стохастические θ -интегралы обобщают повторные стохастические интегралы Стратоновича и Ито, так как при $\theta = 1/2$ и $\theta = 0$ формула (6.82) совпадает с формулами (6.7) и (6.48) соответственно. Аналогично, формула (6.85) преобразуется в формулы (6.1) и (6.20).

Поскольку систему стохастических дифференциальных уравнений с θ -дифференциалом (6.83) можно преобразовать в эквивалентную систему стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича, нетрудно применить спектральную форму математического описания (см. разд. 3.3) для представления повторных стохастических θ -интегралов (6.82). Соответствующая лемма приведена ниже, а ее доказательство с точностью до постоянных множителей в формулах повторяет доказательство леммы 6.2.

Лемма 6.3. Система стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича, эквивалентная системе (6.83), имеет вид

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= \psi_1(t) dW_{j_1}(t), & X_1(t_0) &= 0, \\ dX_2(t) &= \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \delta_{j_1 j_2} \psi_1(t) \psi_2(t) dt + \psi_2(t) X_1(t) \circ dW_{j_2}(t), & X_2(t_0) &= 0, \end{aligned}$$

$$dX_3(t) = \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \delta_{j_2 j_3} \psi_2(t) \psi_3(t) X_1(t) dt + \psi_3(t) X_2(t) \circ dW_{j_3}(t), \quad X_3(t_0) = 0,$$

$$\dots,$$

$$dX_k(t) = \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \delta_{j_{k-1} j_k} \psi_{k-1}(t) \psi_k(t) X_{k-2}(t) dt + \psi_k(t) X_{k-1}(t) \circ dW_{j_k}(t), \quad X_k(t_0) = 0,$$

или в частном случае $\psi_l(t) \equiv 1$, $l = 1, \dots, k$,

$$dX_1(t) = dW_{j_1}(t), \quad X_1(t_0) = 0,$$

$$dX_2(t) = \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \delta_{j_1 j_2} dt + X_1(t) \circ dW_{j_2}(t), \quad X_2(t_0) = 0,$$

$$dX_3(t) = \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \delta_{j_2 j_3} X_1(t) dt + X_2(t) \circ dW_{j_3}(t), \quad X_3(t_0) = 0,$$

$$\dots,$$

$$dX_k(t) = \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \delta_{j_{k-1} j_k} X_{k-2}(t) dt + X_{k-1}(t) \circ dW_{j_k}(t), \quad X_k(t_0) = 0,$$

где $\delta_{j_{l-1} j_l}$ — символ Кронекера (1.4), $l = 2, \dots, k$.

Следствие 6.5. Повторные стохастические интегралы Стратоновича (6.7) и повторные стохастические θ -интегралы (6.82) (в частном случае интегралы (6.1) и (6.85)) совпадают с вероятностью 1, если ни одно из равенств $j_{l-1} = j_l$ не выполнено, $l = 2, \dots, k$. Если хотя бы одно из равенств $j_{l-1} = j_l$ выполнено и соответствующее произведение $\psi_{l-1}(\cdot) \psi_l(\cdot)$ тождественно не равно нулю, то интегралы (6.7) и (6.82) ((6.1) и (6.85)) не совпадают.

Теорема 6.9. Пусть $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_s$ — спектральные характеристики белых шумов $V_1(\cdot), \dots, V_s(\cdot)$ соответственно, $\mathbf{1}$ — спектральная характеристика функции $f_0(t) \equiv 1$, P^{-1} — спектральная характеристика оператора интегрирования, V — спектральная характеристика оператора умножения функций, Ψ_1, \dots, Ψ_k — спектральные характеристики операторов умножения на функции $\psi_1(\cdot), \dots, \psi_k(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$. Спектральные характеристики $\mathbf{1}$, P^{-1} , V и Ψ_1, \dots, Ψ_k определены относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$. Тогда повторный стохастический θ -интеграл (6.85) представляется с помощью соотношений

$$\theta \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{K}_\psi(\cdot) = \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \delta_{j_{k-1} j_k} \mathbf{1}^\top \Psi_{k-1} \Psi_k \mathcal{X}_{k-2} + \mathcal{V}_{j_k}^\top \Psi_k \mathcal{X}_{k-1},$$

$$\mathcal{X}_l = \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \delta_{j_{l-1} j_l} P^{-1} \Psi_{l-1} \Psi_l \mathcal{X}_{l-2} + P^{-1} \Psi_l (V \mathcal{V}_{j_l}) \mathcal{X}_{l-1}, \quad l = 2, \dots, k-1,$$

$$\mathcal{X}_0 = \mathbf{1}, \quad \mathcal{X}_1 = P^{-1} \Psi_1 \mathcal{V}_{j_1},$$

или в частном случае $\psi_l(t) \equiv 1$, $l = 1, \dots, k$,

$$\theta \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{K}(\cdot) = \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \delta_{j_{k-1} j_k} \mathbf{1}^\top \mathcal{X}_{k-2} + \mathcal{V}_{j_k}^\top \mathcal{X}_{k-1},$$

$$\mathcal{X}_l = \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \delta_{j_{l-1} j_l} P^{-1} \mathcal{X}_{l-2} + P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_l}) \mathcal{X}_{l-1}, \quad l = 2, \dots, k-1, \quad \mathcal{X}_0 = \mathbf{1}, \quad \mathcal{X}_1 = P^{-1} \mathcal{V}_{j_1},$$

где $\delta_{j_{l-1} j_l}$ — символ Кронекера (1.4), $l = 2, \dots, k$.

Доказательство теоремы 6.9 практически не отличается от доказательства теоремы 6.6, поэтому здесь не приводится.

З а м е ч а н и я 6.9.

1. Теорема 6.9 при $\theta = 1/2$ совпадает с теоремой 6.2, а при $\theta = 0$ — с теоремой 6.6, в частном случае — с теоремами 6.1 и 6.3 соответственно.

2. Можно детально рассмотреть случаи $k = 2, 3, 4$, принимая во внимание значения j_1, \dots, j_k (их равенства или неравенства в разных комбинациях), как это сделано для повторных стохастических интегралов Ито. В результате будут получены формулы, отличающиеся от соотношений (6.60), (6.62), (6.68) (в частном случае — от соотношений (6.30), (6.32), (6.38)) только постоянными множителями.

3. Для представления повторных стохастических θ -интегралов в полной мере можно применить п. 2 и п. 4 замечаний 6.8. Для них выполняется свойство, связанное со сдвигом и масштабированием базисной системы. Оно аналогично свойствам (6.15) и (6.55).

4. Если записать системы стохастических дифференциальных уравнений из леммы 6.3 в форме Ланжевена (см. разд. 3.3), то их можно рассматривать как математические модели стохастических систем управления с входными сигналами $f_l(\cdot) = V_{j_l}(\cdot)$ и выходными сигналами $X_l(\cdot)$ — случайными процессами, $l = 1, \dots, k$. Структурные схемы этих систем управления будут аналогичны схемам, изображенным на рис. 6.3 и 6.4.

5. Понятие повторного стохастического θ -интеграла смешанного типа определяется таким же образом, как это сделано для повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито в п. 8 замечаний 6.1 и в п. 5 замечаний 6.8 соответственно.

Пример 6.8. Представить в спектральной форме математического описания повторные стохастические θ -интегралы

$$\begin{aligned} {}^\theta \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) &= \int_{\mathbb{T}} \int_{t_0}^{t_2} d_\theta W_{j_1}(t_1) d_\theta W_{j_1}(t_2), \quad {}^\theta \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} d_\theta W_{j_1}(t_1) d_\theta W_{j_1}(t_2) d_\theta W_{j_1}(t_3), \\ {}^\theta \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) &= \int_{\mathbb{T}} \int_{t_0}^{t_4} \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} d_\theta W_{j_1}(t_1) d_\theta W_{j_1}(t_2) d_\theta W_{j_1}(t_3) d_\theta W_{j_1}(t_4), \end{aligned}$$

кратностей $k = 2, 3, 4$ при условии $\mathbb{T} = [0, T]$, т.е. $t_0 = 0$. Выразить их через соответствующие повторные стохастические интегралы Стратоновича и Ито.

□ Пусть $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ — это базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$. Определим относительно этой базисной системы следующие спектральные характеристики: $\mathbf{1}$ — спектральная характеристика функции $f_0(t) \equiv 1$, P^{-1} — спектральная характеристика оператора интегрирования, V — спектральная характеристика оператора умножения функций (см. разд. 1.1, 1.5 и 1.6). Пусть также \mathcal{V}_{j_1} — спектральная характеристика (2.26) белого шума $V_{j_1}(\cdot)$, элементы которой — независимые случайные величины $\zeta_{i_1}^{(j_1)}$, имеющие стандартное нормальное распределение.

Применим теорему 6.9 для кратности $k = 2$, принимая во внимание, что все повторные стохастические интегралы заданы относительно одного винеровского процесса, а также учитывая формулу (6.27) и замечание 6.2:

$${}^\theta \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) = \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \mathbf{1}^\top \mathbf{1} + \mathcal{V}_{j_1}^\top P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) T = {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) + \theta T.$$

Для кратности $k = 3$ имеем

$$\begin{aligned}
{}^\theta \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) &= \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \mathbf{1}^\top P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} + \mathcal{V}_{j_1}^\top \left[\left(\theta - \frac{1}{2} \right) P^{-1} \mathbf{1} + P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} \right] = \\
&= \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \mathcal{V}_{j_1}^\top [P^{-1}]^\top \mathbf{1} + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \mathcal{V}_{j_1}^\top P^{-1} \mathbf{1} + \mathcal{V}_{j_1}^\top P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} = \\
&= \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \mathcal{V}_{j_1}^\top (P^{-1} + [P^{-1}]^\top) \mathbf{1} + \mathcal{V}_{j_1}^\top P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} = \\
&= \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \mathcal{V}_{j_1}^\top \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^\top \mathbf{1} + \mathcal{V}_{j_1}^\top P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} = \\
&= {}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) T \mathcal{V}_{j_1}^\top \mathbf{1} = {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) + \theta T \mathcal{V}_{j_1}^\top \mathbf{1},
\end{aligned}$$

что следует из связи (1.87), формулы (6.27) и п. 1 замечаний 6.3.

Наконец, положим $k = 4$ в теореме 6.9, тогда

$$\begin{aligned}
{}^\theta \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) &= \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \mathbf{1}^\top \left[\left(\theta - \frac{1}{2} \right) P^{-1} \mathbf{1} + P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_1}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} \right] + \\
&\quad + \mathcal{V}_{j_1}^\top \left[\left(\theta - \frac{1}{2} \right) P^{-1} P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} + P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_1}) \left[\left(\theta - \frac{1}{2} \right) P^{-1} \mathbf{1} + P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_1}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} \right] \right] = \\
&= \left(\theta - \frac{1}{2} \right)^2 \mathbf{1}^\top P^{-1} \mathbf{1} + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \mathbf{1}^\top P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_1}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} + \\
&\quad + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \mathcal{V}_{j_1}^\top P^{-2} \mathcal{V}_{j_1} + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \mathcal{V}_{j_1}^\top P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_1}) P^{-1} \mathbf{1} + \mathcal{V}_{j_1}^\top P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_1}) P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_1}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}.
\end{aligned}$$

Слагаемые в правой части этого выражения можно упростить и это было сделано при выводе соотношения (6.38). Используя готовые результаты и ориентируясь на п. 1 замечаний 6.4, получаем

$$\begin{aligned}
{}^\theta \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) &= \left(\theta - \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T^2}{2} + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \mathcal{V}_{j_1}^\top (TE - A) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} + \\
&\quad + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \mathcal{V}_{j_1}^\top (AP^{-1} - P^{-1}A) \mathcal{V}_{j_1} + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \mathcal{V}_{j_1}^\top P^{-1} A \mathcal{V}_{j_1} + \mathcal{V}_{j_1}^\top P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_1}) P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_1}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} = \\
&= \left(\theta - \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T^2}{2} + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) T \mathcal{V}_{j_1}^\top P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} + \mathcal{V}_{j_1}^\top P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_1}) P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_1}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} = \\
&= {}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) T \mathcal{V}_{j_1}^\top P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} + \left(\theta - \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T^2}{2} = \\
&= {}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_1 j_1 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) + \theta T \mathcal{V}_{j_1}^\top P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} + (\theta^2 - \theta) \frac{T^2}{2},
\end{aligned}$$

где A — спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a_1(t) = t$ относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ (см. разд. 1.5). ■

6.3. Моменты типовых повторных стохастических интегралов

Построим алгоритм вычисления первых двух моментов (математического ожидания и второго начального момента) повторных стохастических интегралов Стратоновича ${}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot)$ и Ито ${}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot)$, где функция $\mathbb{k}(\cdot)$ задается формулой (4.15), которые определены соотношениями (6.1) и (6.20), на основе решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Другой способ вычисления первых двух моментов рассмотрен ранее в разд. 5.6.

Напомним, что если векторный случайный процесс $X(\cdot)$ задается стохастическим дифференциальным уравнением Ито (3.1), то его плотность вероятности $\varphi(\cdot)$ — функция времени $t \in \mathbb{T}$ и вектора $x \in \mathbb{R}^n$ — удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова (3.4). Математические ожидания $m_i(\cdot)$ и вторые начальные моменты $\Gamma_{ij}(\cdot)$ координат случайного процесса $X(\cdot)$ выражаются через плотность вероятности $\varphi(\cdot)$:

$$m_i(t) = \mathbb{E}X_i(t) = \int_{\mathbb{R}^n} x_i \varphi(t, x) dx, \quad \Gamma_{ij}(t) = \mathbb{E}X_i(t)X_j(t) = \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \varphi(t, x) dx, \quad (6.86)$$

где n — размерность векторного случайного процесса $X(\cdot)$; $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Дифференциальные уравнения для моментов можно получить как применяя уравнение Ито (3.1), так и на основе уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (3.4). Во втором случае уравнения для математических ожиданий $m_i(\cdot)$ получаются при умножении левой и правой частей уравнения (3.4) на x_i и интегрировании по пространству \mathbb{R}^n :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} x_i \varphi(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} x_i \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} dx = \int_{\mathbb{R}^n} x_i \mathcal{A} \varphi(t, x) dx,$$

а для вторых начальных моментов $\Gamma_{ij}(\cdot)$ левую и правую части уравнения (3.4) следует умножить на $x_i x_j$ и проинтегрировать по пространству \mathbb{R}^n :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \varphi(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} dx = \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \mathcal{A} \varphi(t, x) dx,$$

где дифференциальный оператор \mathcal{A} задается выражением (3.7). Отсюда получаем обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\dot{m}_i(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t, x) \mathcal{A}^* x_i dx, \quad \dot{\Gamma}_{ij}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t, x) \mathcal{A}^* x_i x_j dx, \quad (6.87)$$

в которых \mathcal{A}^* — сопряженный дифференциальный оператор (3.8).

Уравнения (6.87) образуют замкнутую систему, если $f_i(\cdot), \sigma_{il}(\cdot)$ — линейные, а $g_{ij}(\cdot)$ — квадратичные функции по координатам вектора x , где $i, j = 1, 2, \dots, n$ и $l = 1, 2, \dots, s$, так как

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^* x_i &= \sum_{i'=1}^n f_{i'}(t, x) \frac{\partial x_i}{\partial x_{i'}} + \frac{1}{2} \sum_{i'=1}^n \sum_{j'=1}^n g_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 x_i}{\partial x_{i'} \partial x_{j'}} = f_i(t, x), \\ \mathcal{A}^* x_i x_j &= \sum_{i'=1}^n f_{i'}(t, x) \frac{\partial (x_i x_j)}{\partial x_{i'}} + \frac{1}{2} \sum_{i'=1}^n \sum_{j'=1}^n g_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 (x_i x_j)}{\partial x_{i'} \partial x_{j'}} = \\ &= f_i(t, x) x_j + f_j(t, x) x_i + g_{ij}(t, x), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

следовательно, уравнения (6.87) записываются в форме (см. вероятностный смысл коэффициентов сноса и диффузии в разд. 3.1)

$$\dot{m}_i(t) = \mathbb{E}f_i(t, X(t)), \quad (6.88)$$

$$\dot{\Gamma}_{ij}(t) = \mathbb{E}[f_i(t, X(t))X_j(t) + f_j(t, X(t))X_i(t) + g_{ij}(t, X(t))], \quad (6.89)$$

а начальные условия для них имеют вид $m_i(t_0) = \mathbb{E}X_i(t_0)$, $\Gamma_{ij}(t_0) = \mathbb{E}X_i(t_0)X_j(t_0)$.

Повторным стохастическим интегралам Ито ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot)$ соответствует система линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито (6.21), поэтому моменты повторных стохастических интегралов Ито вычисляются следующим образом:

$$\mathbb{E} {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathbb{E}X_k(T) = m_k(T), \quad \mathbb{E} ({}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot))^2 = \mathbb{E}X_k^2(T) = \Gamma_{kk}(T),$$

при любых значениях $j_1, \dots, j_k = 1, 2, \dots, s$, где величины $m_k(T)$ и $\Gamma_{kk}(T)$ определяются из решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (6.88) и (6.89), причем подсистема (6.88) может быть решена независимо от подсистемы (6.89). Начальные условия для указанной системы нулевые.

Для повторных стохастических интегралов Стратоновича ${}^S\mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)}\mathbb{k}(\cdot)$ систему линейных стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича (6.2) нужно переписать в форме Ито, опираясь на следствие 6.2, а затем сформировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений типа (6.88) и (6.89):

$$\dot{m}_i^*(t) = E f_i^*(t, X(t)), \quad (6.90)$$

$$\dot{\Gamma}_{ij}^*(t) = E [f_i^*(t, X(t))X_j(t) + f_j^*(t, X(t))X_i(t) + g_{ij}(t, X(t))], \quad (6.91)$$

где $f_i^*(\cdot)$ — координаты вектора сноса $f^*(\cdot)$ в уравнении Ито (6.25), которое соответствует интегралу ${}^S\mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)}\mathbb{k}(\cdot)$. Начальные условия для этих уравнений также нулевые. Тогда

$$E {}^S\mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)}\mathbb{k}(\cdot) = E X_k(T) = m_k^*(T), \quad E ({}^S\mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)}\mathbb{k}(\cdot))^2 = E X_k^2(T) = \Gamma_{kk}^*(T).$$

Здесь уместно напомнить (см. разд. 3.1), что при переходе от стохастического дифференциального уравнения Ито к уравнению Стратоновича (или наоборот), вектор сноса изменяется согласно формулам (3.3), а матрица диффузии остается неизменной.

Далее сформируем алгоритм вычисления первых двух моментов повторных стохастических интегралов Стратоновича ${}^S\mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)}\mathbb{k}(\cdot)$ и Ито ${}^I\mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)}\mathbb{k}(\cdot)$.

Алгоритм 6.1.

1. Для заданных значений k , а также j_1, \dots, j_k записать систему стохастических дифференциальных уравнений Ито: (6.25) для интеграла ${}^S\mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)}\mathbb{k}(\cdot)$ или (6.21) для интеграла ${}^I\mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)}\mathbb{k}(\cdot)$.
2. Составить систему обыкновенных дифференциальных уравнений для первых двух моментов: (6.90) и (6.91) для интеграла ${}^S\mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)}\mathbb{k}(\cdot)$ или (6.88) и (6.89) для интеграла ${}^I\mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)}\mathbb{k}(\cdot)$. В системе достаточно оставить только те уравнения, которые необходимы для нахождения функций $m_k^*(\cdot)$ и $\Gamma_{kk}^*(\cdot)$ или $m_k(\cdot)$ и $\Gamma_{kk}(\cdot)$ соответственно.
3. Решить задачу Коши для полученной на шаге 2 системы обыкновенных дифференциальных уравнений при нулевых начальных условиях.
4. Вычислить искомые моменты повторных стохастических интегралов: $m_k^*(T)$ и $\Gamma_{kk}^*(T)$ для интеграла ${}^S\mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)}\mathbb{k}(\cdot)$ или $m_k(T)$ и $\Gamma_{kk}(T)$ для интеграла ${}^I\mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)}\mathbb{k}(\cdot)$.

Пример 6.9. Найти первые два момента повторных стохастических интегралов Ито ${}^I\mathcal{J}_T^{W(112)}\mathbb{k}(\cdot)$ и Стратоновича ${}^S\mathcal{J}_T^{W(112)}\mathbb{k}(\cdot)$ кратности $k = 3$ при условии $T = [0, 1]$, т.е. $T = 1$.

□ Применим алгоритм 6.1. Для повторного стохастического интеграла ${}^I\mathcal{J}_T^{W(112)}\mathbb{k}(\cdot)$ система стохастических дифференциальных уравнений Ито (6.21) имеет вид

$$dX_1(t) = dW_1(t), \quad X_1(0) = 0,$$

$$dX_2(t) = X_1(t)dW_1(t), \quad X_2(0) = 0,$$

$$dX_3(t) = X_2(t)dW_2(t), \quad X_3(0) = 0,$$

где $W_1(\cdot)$ и $W_2(\cdot)$ — независимые стандартные винеровские процессы. Сравнивая эту систему с уравнением (3.1), находим

$$n = 3, \quad s = 2, \quad X(t) = [X_1(t) \ X_2(t) \ X_3(t)]^T, \quad W(t) = [W_1(t) \ W_2(t)]^T,$$

$$f(t, x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma(t, x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}, \quad g(t, x) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ x_1 & x_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Так как все координаты вектор-функции $f(\cdot)$ — это функции, тождественно равные нулю, задача Коши для системы дифференциальных уравнений (6.88), а именно

$$\dot{m}_1(t) = \dot{m}_2(t) = \dot{m}_3(t) = 0, \quad m_1(0) = m_2(0) = m_3(0) = 0,$$

имеет тривиальное решение: $m_1(t) = m_2(t) = m_3(t) \equiv 0$.

Далее записываем часть системы (6.89), которая необходима для получения функции $\Gamma_{33}(\cdot)$ и ее решение при нулевых начальных условиях:

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_{11}(t) &= E[g_{11}(t, X(t))] = 1, & \Gamma_{11}(0) &= 0, & \Gamma_{11}(t) &= t, \\ \dot{\Gamma}_{22}(t) &= E[g_{22}(t, X(t))] = EX_1^2(t) = \Gamma_{11}(t) = t, & \Gamma_{22}(0) &= 0, & \Gamma_{22}(t) &= \frac{t^2}{2}, \\ \dot{\Gamma}_{33}(t) &= E[g_{33}(t, X(t))] = EX_2^2(t) = \Gamma_{22}(t) = \frac{t^2}{2}, & \Gamma_{33}(0) &= 0, & \Gamma_{33}(t) &= \frac{t^3}{6}, \end{aligned}$$

т.е.

$$E^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(112)} \mathbb{k}(\cdot) = m_3(1) = 0, \quad E^I (\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(112)} \mathbb{k}(\cdot))^2 = \Gamma_{33}(1) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6},$$

что соответствует значениям, которые можно подсчитать с помощью формулы (5.66) (см. также табл. 5.3).

Перейдем к повторному стохастическому интегралу ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(112)} \mathbb{k}(\cdot)$. Ему отвечает система стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича (6.2):

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= dW_1(t), & X_1(0) &= 0, \\ dX_2(t) &= X_1(t) \circ dW_1(t), & X_2(0) &= 0, \\ dX_3(t) &= X_2(t) \circ dW_2(t), & X_3(0) &= 0, \end{aligned}$$

а ей, в свою очередь, — система стохастических дифференциальных уравнений Ито (6.25):

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= dW_1(t), & X_1(0) &= 0, \\ dX_2(t) &= \frac{1}{2} dt + X_1(t)dW_1(t), & X_2(0) &= 0, \\ dX_3(t) &= X_2(t)dW_2(t), & X_3(0) &= 0, \end{aligned}$$

и для нее другой вектор сноса:

$$f^*(t, x) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Соответствующие системы уравнений (6.90) и (6.91) для моментов (далее записаны только те уравнения, которые не совпадают с приведенными выше) и их решения:

$$\dot{m}_2^*(t) = \frac{1}{2}, \quad m_2^*(0) = 0, \quad m_2^*(t) = \frac{t}{2},$$

$$\begin{aligned}\dot{\Gamma}_{22}^*(t) &= \mathbb{E}[2f_2^*(t, X(t))X_2(t) + g_{22}(t, X(t))] = \mathbb{E}(X_2(t) + X_1^2(t)) = \\ &= m_2^*(t) + \Gamma_{11}^*(t) = \frac{3t}{2}, \quad \Gamma_{22}^*(0) = 0, \quad \Gamma_{22}^*(t) = \frac{3t^2}{4}, \\ \dot{\Gamma}_{33}^*(t) &= \mathbb{E}[g_{33}(t, X(t))] = \mathbb{E}X_2^2(t) = \Gamma_{22}^*(t) = \frac{3t^2}{4}, \quad \Gamma_{33}^*(0) = 0, \quad \Gamma_{33}^*(t) = \frac{t^3}{4},\end{aligned}$$

следовательно,

$$\mathbb{E}^S \mathcal{J}_T^{W(112)} \mathbb{k}(\cdot) = m_3^*(1) = 0, \quad \mathbb{E}({}^S \mathcal{J}_T^{W(112)} \mathbb{k}(\cdot))^2 = \Gamma_{33}^*(1) = \frac{1}{4}.$$

В ходе решения этого примера найдены первые два момента повторных стохастических интегралов Ито ${}^I \mathcal{J}_T^{W(11)} \mathbb{k}(\cdot)$ и Стратоновича ${}^S \mathcal{J}_T^{W(11)} \mathbb{k}(\cdot)$ кратности $k = 2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^I \mathcal{J}_T^{W(11)} \mathbb{k}(\cdot) &= m_2(1) = 0, & \mathbb{E}({}^I \mathcal{J}_T^{W(11)} \mathbb{k}(\cdot))^2 &= \Gamma_{22}(1) = \frac{1}{2}, \\ \mathbb{E}^S \mathcal{J}_T^{W(11)} \mathbb{k}(\cdot) &= m_2^*(1) = \frac{1}{2}, & \mathbb{E}({}^S \mathcal{J}_T^{W(11)} \mathbb{k}(\cdot))^2 &= \Gamma_{22}^*(1) = \frac{3}{4},\end{aligned}$$

и эти результаты совпадают со значениями из табл. 5.3 и 5.4. \blacksquare

Пример 6.10. Найти первые два момента повторных стохастических интегралов Ито ${}^I \mathcal{J}_T^{W(1122)} \mathbb{k}(\cdot)$ и Стратоновича ${}^S \mathcal{J}_T^{W(1122)} \mathbb{k}(\cdot)$ кратности $k = 4$ при условии $\mathbb{T} = [0, 1]$, т.е. $T = 1$.

□ Как и в предыдущем примере, воспользуемся алгоритмом 6.1. Запишем систему стохастических дифференциальных уравнений Ито (6.21), которая соответствует повторному стохастическому интегралу ${}^I \mathcal{J}_T^{W(1122)} \mathbb{k}(\cdot)$:

$$\begin{aligned}dX_1(t) &= dW_1(t), & X_1(0) &= 0, \\ dX_2(t) &= X_1(t)dW_1(t), & X_2(0) &= 0, \\ dX_3(t) &= X_2(t)dW_2(t), & X_3(0) &= 0, \\ dX_4(t) &= X_3(t)dW_2(t), & X_4(0) &= 0,\end{aligned}$$

где $W_1(\cdot)$ и $W_2(\cdot)$ — независимые стандартные винеровские процессы. Сравнивая эту систему с уравнением (3.1), имеем

$$\begin{aligned}n = 4, \quad s = 2, \quad X(t) &= [X_1(t) \ X_2(t) \ X_3(t) \ X_4(t)]^T, \quad W(t) = [W_1(t) \ W_2(t)]^T, \\ f(t, x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma(t, x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{bmatrix}, \quad g(t, x) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2^2 & x_2 x_3 \\ 0 & 0 & x_2 x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Первые три уравнения системы (6.88) и (6.89) совпадают с уравнениями из примера 6.9, поэтому достаточно опираться на полученный ранее результат. Тогда

$$\begin{aligned}\dot{m}_4(t) &= 0, \quad m_4(0) = 0, \quad m_4(t) \equiv 0, \\ \dot{\Gamma}_{44}(t) &= \mathbb{E}[g_{44}(t, X(t))] = \mathbb{E}X_3^2(t) = \Gamma_{33}(t) = \frac{t^3}{6}, \quad \Gamma_{44}(0) = 0, \quad \Gamma_{44}(t) = \frac{t^4}{24},\end{aligned}$$

т.е.

$$\mathbb{E}^I \mathcal{J}_T^{W(1122)} \mathbb{k}(\cdot) = m_4(1) = 0, \quad \mathbb{E}({}^I \mathcal{J}_T^{W(1122)} \mathbb{k}(\cdot))^2 = \Gamma_{44}(1) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24},$$

что совпадает со значениями из табл. 5.3 (см. также формулу (5.66)).

Следующий этап — это решение системы уравнений (6.90) и (6.91), которым удовлетворяют первые два момента повторного стохастического интеграла ${}^S\mathcal{J}_T^{W(1122)}\mathbb{k}(\cdot)$. Ему отвечает система стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича (6.2):

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= dW_1(t), & X_1(0) &= 0, \\ dX_2(t) &= X_1(t) \circ dW_1(t), & X_2(0) &= 0, \\ dX_3(t) &= X_2(t) \circ dW_2(t), & X_3(0) &= 0, \\ dX_4(t) &= X_3(t) \circ dW_2(t), & X_4(0) &= 0, \end{aligned}$$

или же система стохастических дифференциальных уравнений Ито (6.25):

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= dW_1(t), & X_1(0) &= 0, \\ dX_2(t) &= \frac{1}{2} dt + X_1(t) dW_1(t), & X_2(0) &= 0, \\ dX_3(t) &= X_2(t) dW_2(t), & X_3(0) &= 0, \\ dX_4(t) &= \frac{1}{2} X_2(t) dt + X_3(t) dW_2(t), & X_4(0) &= 0, \end{aligned}$$

т.е.

$$f^*(t, x) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} x_2 \end{bmatrix}^T.$$

Следовательно, с учетом результатов примера 6.9 находим

$$\begin{aligned} \dot{m}_4^*(t) &= E f_4^*(t, X(t)) = \frac{1}{2} E X_2(t) = \frac{1}{2} m_2^*(t) = \frac{t}{4}, \quad m_4^*(0) = 0, \quad m_4^*(t) = \frac{t^2}{8}, \\ \dot{\Gamma}_{24}^*(t) &= E [f_2^*(t, X(t)) X_4(t) + f_4^*(t, X(t)) X_2(t) + g_{24}(t, X(t))] = E \left(\frac{1}{2} X_4(t) + \frac{1}{2} X_2^2(t) \right) = \\ &= \frac{1}{2} m_4^*(t) + \frac{1}{2} \Gamma_{22}^*(t) = \frac{7t^2}{16}, \quad \Gamma_{24}^*(0) = 0, \quad \Gamma_{24}^*(t) = \frac{7t^3}{48}, \\ \dot{\Gamma}_{44}^*(t) &= E [2f_4^*(t, X(t)) X_4(t) + g_{44}(t, X(t))] = E (X_2(t) X_4(t) + X_3^2(t)) = \\ &= \Gamma_{24}^*(t) + \Gamma_{33}^*(t) = \frac{19t^3}{48}, \quad \Gamma_{44}^*(0) = 0, \quad \Gamma_{44}^*(t) = \frac{19t^4}{192}, \end{aligned}$$

а это означает, что

$$E {}^S\mathcal{J}_T^{W(1122)}\mathbb{k}(\cdot) = m_4^*(1) = \frac{1}{8}, \quad E ({}^S\mathcal{J}_T^{W(1122)}\mathbb{k}(\cdot))^2 = \Gamma_{44}^*(1) = \frac{19}{192},$$

т.е. найденные первые два момента совпадают с соответствующими значениями из табл. 5.4.

Отметим, что для второго начального момента повторного стохастического интеграла ${}^S\mathcal{J}_T^{W(1122)}\mathbb{k}(\cdot)$ потребовалось найти смешанный момент

$$\Gamma_{24}^*(t) = \Gamma_{42}^*(t) = E X_2(t) X_4(t) = \frac{7t^3}{48},$$

что позволяет записать следующее соотношение:

$$E {}^S\mathcal{J}_T^{W(11)}\mathbb{k}(\cdot) {}^S\mathcal{J}_T^{W(1122)}\mathbb{k}(\cdot) = \Gamma_{24}^*(1) = \frac{7}{48}. \quad \blacksquare$$

З а м е ч а н и е 6.10. Описанная методика нахождения первых двух моментов (математического ожидания и второго начального момента) повторных стохастических интегралов Стратоновича (6.1) и Ито (6.20) может быть расширена на повторные стохастические интегралы Стратоновича (6.7) и Ито (6.48), а также на повторные стохастические θ -интегралы (6.82).

Аналогично можно поступить и с повторными стохастическими интегралами смешанного типа (см. п. 8 замечаний 6.1 и п. 5 замечаний 6.8), поскольку им соответствуют системы стохастических дифференциальных уравнений Ито, а также системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6.88) и (6.89) для нахождения указанных моментов.

Пример 6.11. Найти первые два момента повторных стохастических интегралов Ито смешанного типа ${}^I\mathcal{J}_T^{W(0120)}\mathbb{k}(\cdot)$ и ${}^I\mathcal{J}_T^{W(1002)}\mathbb{k}(\cdot)$ кратности $k = 4$ при условии $T = [0, 1]$, т.е. $T = 1$.

□ Применим алгоритм, аналогичный алгоритму 6.1 (см. замечание 6.10). Система стохастических дифференциальных уравнений Ито (6.78), соответствующая повторному стохастическому интегралу ${}^I\mathcal{J}_T^{W(0120)}\mathbb{k}(\cdot)$ имеет вид

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= dt, & X_1(0) &= 0, \\ dX_2(t) &= X_1(t)dW_1(t), & X_2(0) &= 0, \\ dX_3(t) &= X_2(t)dW_2(t), & X_3(0) &= 0, \\ dX_4(t) &= X_3(t)dt, & X_4(0) &= 0, \end{aligned}$$

где $W_1(\cdot)$ и $W_2(\cdot)$ — независимые стандартные винеровские процессы. Сравнение данной системы с уравнением (3.1) показывает, что

$$n = 4, \quad s = 2, \quad X(t) = [X_1(t) \ X_2(t) \ X_3(t) \ X_4(t)]^T, \quad W(t) = [W_1(t) \ W_2(t)]^T,$$

$$f(t, x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \sigma(t, x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g(t, x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее приведем необходимую часть системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6.88) и (6.89):

$$\begin{aligned} \dot{m}_1(t) &= 1, & \dot{m}_3(t) &= 0, & \dot{m}_4(t) &= m_3(t), \\ m_1(0) &= m_3(0) = m_4(0) = 0, & m_1(t) &= t, & m_3(t) &= m_4(t) \equiv 0, \end{aligned}$$

$$\dot{\Gamma}_{11}(t) = \mathbb{E}[2f_1(t, X(t))X_1(t)] = 2\mathbb{E}X_1(t) = 2m_1(t) = 2t, \quad \Gamma_{11}(0) = 0, \quad \Gamma_{11}(t) = t^2,$$

$$\dot{\Gamma}_{22}(t) = \mathbb{E}[g_{22}(t, X(t))] = \mathbb{E}X_1^2(t) = \Gamma_{11}(t) = \Gamma_{11}(t) = t^2, \quad \Gamma_{22}(0) = 0, \quad \Gamma_{22}(t) = \frac{t^3}{3},$$

$$\dot{\Gamma}_{33}(t) = \mathbb{E}[g_{33}(t, X(t))] = \mathbb{E}X_2^2(t) = \Gamma_{22}(t) = \frac{t^3}{3}, \quad \Gamma_{33}(0) = 0, \quad \Gamma_{33}(t) = \frac{t^4}{12},$$

$$\dot{\Gamma}_{34}(t) = \mathbb{E}[f_4(t, X(t))X_3(t)] = \mathbb{E}X_3^2(t) = \Gamma_{33}(t) = \frac{t^4}{12}, \quad \Gamma_{34}(0) = 0, \quad \Gamma_{34}(t) = \frac{t^5}{60},$$

$$\dot{\Gamma}_{44}(t) = \mathbb{E}[2f_4(t, X(t))X_4(t)] = 2\mathbb{E}X_3(t)X_4(t) = 2\Gamma_{34}(t) = \frac{t^5}{30}, \quad \Gamma_{44}(0) = 0, \quad \Gamma_{44}(t) = \frac{t^6}{180},$$

т.е.

$$\mathbb{E}^I\mathcal{J}_T^{W(0120)}\mathbb{k}(\cdot) = m_4(1) = 0, \quad \mathbb{E}({}^I\mathcal{J}_T^{W(0120)}\mathbb{k}(\cdot))^2 = \Gamma_{44}(1) = \frac{1}{180},$$

а это соответствует результатам примера 6.7 (такие же моменты у повторного стохастического интеграла ${}^I\mathcal{J}_T^{W(0110)}\mathbb{k}(\cdot)$).

Можно обойтись меньшим числом уравнений, если принять во внимание равенство (см. пример 6.7)

$${}^I \mathcal{J}_T^{W(0120)} \mathbb{k}(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_T^{W(12)} (1 - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) \mathbb{k}_{10}(\cdot),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= t dW_1(t), & X_1(0) &= 0, \\ dX_2(t) &= (1-t) X_1(t) dW_2(t), & X_2(0) &= 0, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} n &= 2, \quad s = 2, \quad X(t) = [X_1(t) \ X_2(t)]^T, \quad W(t) = [W_1(t) \ W_2(t)]^T, \\ f(t, x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma(t, x) = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & (1-t)x_1 \end{bmatrix}, \quad g(t, x) = \begin{bmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & (1-t)^2 x_1^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда система обыкновенных дифференциальных уравнений (6.88) и (6.89) включает соотношения

$$\dot{m}_2(t) = 0, \quad m_2(0) = 0, \quad m_2(t) \equiv 0,$$

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_{11}(t) &= \mathbb{E}[g_{11}(t, X(t))] = t^2, \quad \Gamma_{11}(0) = 0, \quad \Gamma_{11}(t) = \frac{t^3}{3}, \\ \dot{\Gamma}_{22}(t) &= \mathbb{E}[g_{22}(t, X(t))] = (1-t)^2 \mathbb{E}X_1^2(t) = (1-t)^2 \Gamma_{11}(t) = \\ &= \frac{(1-t)^2 t^3}{3}, \quad \Gamma_{22}(0) = 0, \quad \Gamma_{22}(t) = \frac{(10t^2 - 24t + 15)t^4}{180}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\mathbb{E} {}^I \mathcal{J}_T^{W(12)} (1 - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) \mathbb{k}_{10}(\cdot) = m_2(1) = 0, \quad \mathbb{E} ({}^I \mathcal{J}_T^{W(12)} (1 - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) \mathbb{k}_{10}(\cdot))^2 = \Gamma_{22}(1) = \frac{1}{180}.$$

Перейдем к повторному стохастическому интегралу ${}^I \mathcal{J}_T^{W(1002)} \mathbb{k}(\cdot)$. Для него система стохастических дифференциальных уравнений Ито (6.78) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= dW_1(t), & X_1(0) &= 0, \\ dX_2(t) &= X_1(t) dt, & X_2(0) &= 0, \\ dX_3(t) &= X_2(t) dt, & X_3(0) &= 0, \\ dX_4(t) &= X_3(t) dW_2(t), & X_4(0) &= 0, \end{aligned}$$

поэтому (здесь такие же $n, s, X(\cdot)$ и $W(\cdot)$, как и в начале решения)

$$f(t, x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma(t, x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & x_3 \end{bmatrix}, \quad g(t, x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3^2 \end{bmatrix}.$$

Из системы (6.88) и (6.89) достаточно записать и решить следующие уравнения:

$$\dot{m}_4(t) = 0, \quad m_4(0) = 0, \quad m_4(t) \equiv 0,$$

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_{11}(t) &= \mathbb{E}[g_{11}(t, X(t))] = 1, \quad \Gamma_{11}(0) = 0, \quad \Gamma_{11}(t) = t, \\ \dot{\Gamma}_{12}(t) &= \mathbb{E}[f_2(t, X(t)) X_1(t)] = \mathbb{E}X_1^2(t) = \Gamma_{11}(t) = t, \quad \Gamma_{12}(0) = 0, \quad \Gamma_{12}(t) = \frac{t^2}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\Gamma}_{13}(t) &= \mathbb{E}[f_3(t, X(t))X_1(t)] = \mathbb{E}X_1(t)X_2(t) = \Gamma_{12}(t) = \frac{t^2}{2}, \quad \Gamma_{13}(0) = 0, \quad \Gamma_{13}(t) = \frac{t^3}{6}, \\ \dot{\Gamma}_{22}(t) &= \mathbb{E}[2f_2(t, X(t))X_2(t)] = 2\mathbb{E}X_1(t)X_2(t) = 2\Gamma_{12}(t) = t^2, \quad \Gamma_{22}(0) = 0, \quad \Gamma_{22}(t) = \frac{t^3}{3}, \\ \dot{\Gamma}_{23}(t) &= \mathbb{E}[f_2(t, X(t))X_3(t) + f_3(t, X(t))X_2(t)] = \mathbb{E}(X_1(t)X_3(t) + X_2^2(t)) = \\ &= \Gamma_{13}(t) + \Gamma_{22}(t) = \frac{t^3}{2}, \quad \Gamma_{23}(0) = 0, \quad \Gamma_{23}(t) = \frac{t^4}{8}, \\ \dot{\Gamma}_{33}(t) &= \mathbb{E}[2f_3(t, X(t))X_3(t)] = 2\mathbb{E}X_2(t)X_3(t) = 2\Gamma_{23}(t) = \frac{t^4}{4}, \quad \Gamma_{33}(0) = 0, \quad \Gamma_{33}(t) = \frac{t^5}{20}, \\ \dot{\Gamma}_{44}(t) &= \mathbb{E}[g_{44}(t, X(t))] = \mathbb{E}X_3^2(t) = \Gamma_{33}(t) = \frac{t^5}{20}, \quad \Gamma_{44}(0) = 0, \quad \Gamma_{44}(t) = \frac{t^6}{120},\end{aligned}$$

т.е.

$$\mathbb{E}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(1002)} \mathbb{k}(\cdot) = m_4(1) = 0, \quad \mathbb{E}^I (\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(1002)} \mathbb{k}(\cdot))^2 = \Gamma_{44}(1) = \frac{1}{120},$$

что также совпадает с результатом примера 6.7 (такие же моменты у повторного стохастического интеграла ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(1001)} \mathbb{k}(\cdot)$). ■

6.4. Моделирование повторных стохастических интегралов

В этом разделе приведены алгоритмы моделирования повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито по винеровским процессам, построенные на основе теорем 6.2 и 6.6, а также их частных случаев — теорем 6.1 и 6.3. Здесь и далее $l = 1, \dots, k$ и $j = 1, \dots, s$; k, s — заданные натуральные числа.

Пусть $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$ (см. разд. 1.1). Напомним некоторые обозначения для спектральных характеристик, определенных относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$:

- 1) $\mathbf{1}$ — спектральная характеристика функции $f_0(t) \equiv 1$ (см. разд. 1.1);
- 2) Ψ_l — спектральные характеристики операторов умножения на весовые функции $\psi_l(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ (см. разд. 1.5);
- 3) P^{-1} — спектральная характеристика оператора интегрирования (см. разд. 1.6);
- 4) V — спектральная характеристика оператора умножения функций (см. разд. 1.5);
- 5) \mathcal{V}_j — спектральные характеристики гауссовских белых шумов $V_j(\cdot)$ (см. разд. 2.3 и выражение (2.26)).

Спектральные характеристики $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_s$ образованы независимыми случайными величинами $\zeta_{i_1}^{(1)}, \dots, \zeta_{i_s}^{(s)}$, имеющими стандартное нормальное распределение.

При дополнительном условии (4.26) все спектральные характеристики Ψ_l выражаются через спектральную характеристику A оператора умножения на функцию $a_1(t) = t - t_0$ с помощью формулы (4.55).

Приведем алгоритм моделирования повторных стохастических интегралов Стратоновича (6.1) и (6.7) спектральным методом.

Алгоритм 6.2.

1. Выбрать базисную систему $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$.
2. Найти спектральные характеристики Ψ_l операторов умножения на функции $\psi_l(\cdot)$ (для моделирования интеграла (6.7)), спектральные характеристики \mathcal{V}_j гауссовских белых шумов $V_j(\cdot)$, спектральную характеристику P^{-1} оператора интегрирования, спектральную характеристику V оператора умножения функций.
3. Представить повторный стохастический интеграл (6.1) с помощью соотношений (6.5) или в явном виде (6.6), для повторного стохастического интеграла (6.7) использовать соотношения (6.11) или явную формулу (6.12).
4. Для получения реализаций соответствующих случайных величин (повторных стохастических интегралов Стратоновича) использовать реализации спектральных характеристик \mathcal{V}_j .

Алгоритм моделирования повторных стохастических интегралов Ито (6.20) и (6.48) спектральным методом, приведенный ниже, отличается от алгоритма 6.2 ссылками на формулы и содержит один дополнительный шаг.

Алгоритм 6.3.

1. Выбрать базисную систему $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$.
2. Найти спектральную характеристику $\mathbf{1}$ функции $f_0(t) \equiv 1$ (см. разд. 1.1);
3. Найти спектральные характеристики Ψ_l операторов умножения на функции $\psi_l(\cdot)$ (для моделирования интеграла (6.48)), спектральные характеристики \mathcal{V}_j белых шумов $V_j(\cdot)$, спектральную характеристику P^{-1} оператора интегрирования, спектральную характеристику V оператора умножения функций.
4. Представить повторный стохастический интеграл (6.20) с помощью соотношений (6.26), для повторного стохастического интеграла (6.48) использовать соотношения (6.53).
5. Для получения реализаций соответствующих случайных величин (повторных стохастических интегралов Ито) использовать реализации спектральных характеристик \mathcal{V}_j .

Дополнительно рассмотрим площадь Леви [77, 86] — случайную величину, которая выражается через повторные стохастические интегралы Ито кратности $k = 2$:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) = \frac{1}{2} (\mathcal{I}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) - \mathcal{I}_{\mathbb{T}}^{W(j_2 j_1)} \mathbb{k}(\cdot)), \quad j_1 \neq j_2, \quad (6.92)$$

где каждая реализация этой случайной величины равна по модулю площади плоской фигуры, ограниченной реализациями винеровских процессов $W_{j_1}(\cdot)$ и $W_{j_2}(\cdot)$. Отсюда, учитывая следствие 6.1 и применяя теорему 6.1, находим

$$\mathcal{A}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) = \frac{1}{2} (\mathcal{V}_{j_2}^{\mathbb{T}} P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} - \mathcal{V}_{j_1}^{\mathbb{T}} P^{-1} \mathcal{V}_{j_2}) = \frac{1}{2} (\mathcal{V}_{j_2}^{\mathbb{T}} P^{-1} \mathcal{V}_{j_1} - \mathcal{V}_{j_2}^{\mathbb{T}} [P^{-1}]^{\mathbb{T}} \mathcal{V}_{j_1}) = \frac{1}{2} \mathcal{V}_{j_2}^{\mathbb{T}} (P^{-1} - [P^{-1}]^{\mathbb{T}}) \mathcal{V}_{j_1}.$$

Далее воспользуемся представлением (1.89), согласно которому

$$P^{-1} - [P^{-1}]^{\mathbb{T}} = \frac{1}{2} \Lambda + \bar{P}^{-1} - \frac{1}{2} \Lambda - [\bar{P}^{-1}]^{\mathbb{T}} = \bar{P}^{-1} + \bar{P}^{-1} = 2\bar{P}^{-1},$$

где $\Lambda = \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^{\mathbb{T}}$, а \bar{P}^{-1} — кососимметрическая матрица: $[\bar{P}^{-1}]^{\mathbb{T}} = -\bar{P}^{-1}$. Для полиномов Лежандра (1.5), косинусоид (1.6), функций Уолша (1.7), функций Хаара (1.8) и тригонометрических

функций (1.9) матрица \bar{P}^{-1} отличается от матрицы P^{-1} только тем, что $\bar{P}_{00}^{-1} = 0$. Тогда

$$\mathcal{A}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_2}^{\mathbb{T}} \bar{P}^{-1} \mathcal{V}_{j_1}, \quad j_1 \neq j_2.$$

Используя соотношение между повторными стохастическими интегралами ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot)$ и ${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_2 j_1)} \mathbb{k}(\cdot)$ [77, 86], находим

$$\begin{aligned} {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) &= {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathcal{A}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) + \frac{1}{2} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1)} f_0(\cdot) \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_2)} f_0(\cdot), \\ {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_2 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) &= {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_2 j_1)} \mathbb{k}(\cdot) = -\mathcal{A}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) + \frac{1}{2} \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1)} f_0(\cdot) \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_2)} f_0(\cdot), \end{aligned}$$

что можно использовать для моделирования повторных стохастических интегралов кратности $k = 2$ с помощью моделирования площади Леви при условии $j_1 \neq j_2$.

Приближенное моделирование повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито осуществляется при усечении всех спектральных характеристик до некоторого выбранного порядка L [220–222], т.е. все матрицы, входящие в соотношения (6.5), (6.6) и (6.11), (6.12), а также (6.26) и (6.53) полагаются конечными размера L по каждому измерению: L для матриц-столбцов, $L \times L$ для плоских и $L \times L \times L$ для пространственных матриц.

По ансамблю реализаций повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито по винеровским процессам можно получить оценки их первых двух моментов: математического ожидания и второго начального момента (см. разд. 5.7, а также формулы (5.75) и (5.76)). Обозначим количество реализаций M (объем выборки), а реализации стохастических интегралов Стратоновича и Ито, соответствующие реализациям \mathcal{V}_j^m спектральных характеристик \mathcal{V}_j , — S_m и I_m (при фиксированных значениях j_1, \dots, j_k), где $m = 1, 2, \dots, M$. Тогда

$$\mathbb{E}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_{\psi}(\cdot) \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M S_m, \quad \mathbb{E} \left({}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_{\psi}(\cdot) \right)^2 \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M S_m^2, \quad (6.93)$$

$$\mathbb{E}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_{\psi}(\cdot) \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M I_m, \quad \mathbb{E} \left({}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_{\psi}(\cdot) \right)^2 \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M I_m^2. \quad (6.94)$$

З а м е ч а н и е 6.11. В этой главе вопросы, связанные с вычислением погрешностей аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито по винеровским процессам, подробно не рассматриваются. Причина состоит в том, что при усечении всех спектральных характеристик до порядка L моделирование повторных стохастических интегралов Стратоновича эквивалентно моделированию соответствующих кратных стохастических интегралов согласно формуле (5.71) (см. разд. 5.7 и п. 7 замечаний 6.1), т.е. достаточно воспользоваться формулой (5.73) для точного вычисления погрешностей аппроксимации кратных стохастических интегралов Стратоновича.

Для повторных стохастических интегралов Ито ситуация более сложная. Это обусловлено тем, что соотношения (6.26) и (6.53), вообще говоря, неэквивалентны формуле (5.68). Сравнение соотношений (6.26), (6.53), а также выражений из п. 1 замечаний 5.2 показывает, что соотношения (6.26), (6.53) не содержат слагаемых, которые в общем случае стремятся к нулю при $L \rightarrow \infty$ (см. п. 2 замечаний 5.6 и следствия 6.1, 6.3). А значит, формула (5.70) для точного вычисления погрешностей аппроксимации кратных стохастических интегралов Ито в данном случае определяет оценку погрешностей аппроксимации повторных стохастических

интегралов Ито.

Пример 6.12. Оценить первые два момента повторных стохастических интегралов Стратоновича ${}^S\mathcal{J}_T^{W(j_1j_2)}\mathbb{k}_\psi(\cdot)$ и Ито ${}^I\mathcal{J}_T^{W(j_1j_2)}\mathbb{k}_\psi(\cdot)$ кратности $k = 2$, где

$$\mathbb{k}_\psi(t_1, t_2) = \psi_1(t_1)\psi_2(t_2)1(t_2 - t_1),$$

применяя спектральный метод и базисные системы (1.5)–(1.9), $T = [0, 1]$, при условии

$$\text{а) } \psi_1(t) = e^{\mu_1 t}, \psi_2(t) \equiv 1; \quad \text{б) } \psi_1(t) \equiv 1, \psi_2(t) = e^{\mu_2 t},$$

если $\mu_1 = 1$ и $\mu_2 = -1$. Порядки усечения спектральных характеристик: $L = 4, 8, \dots, 64$.

□ Применим алгоритмы 6.2 и 6.3 для решения этого примера (спектральное представление для заданных повторных стохастических интегралов при произвольных $\mu_1, \mu_2 \neq 0$ получено в примерах 6.1 и 6.5).

Для базисных систем (1.5)–(1.9) спектральные характеристики $\mathbf{1}$, P^{-1} и V , т.е. спектральные характеристики функции $f_0(t) \equiv 1$, оператора интегрирования и оператора умножения функций, приведены в разд. 1.1, 1.5 и 1.6 соответственно, а спектральные характеристики $\tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_2$ функций $\psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot)$ найдем, используя описанный в разд. 1.8 способ (см. пример 1.14 и табл. 1.1), а именно $\tilde{\Psi}_1 = (P - \mu_1 E)^{-1}\Delta_0$, $\tilde{\Psi}_2 = (P - \mu_2 E)^{-1}\Delta_0$, где P — спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом начального значения, E — бесконечная единичная матрица, Δ_0 — спектральная характеристика дельта-функции $\delta(\cdot)$. Для всех применяемых базисных систем спектральные характеристики Δ_0 и P можно найти в разд. 1.1 и 1.7 соответственно.

Спектральные характеристики Ψ_1, Ψ_2 операторов умножения на функции $\psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot)$ выразим при помощи формулы (1.78): $\Psi_1 = V\tilde{\Psi}_1$, $\Psi_2 = V\tilde{\Psi}_2$.

Для каждой базисной системы и каждого порядка усечения моделировались реализации повторных стохастических интегралов Стратоновича $\{S_m\}_{m=1}^M$ и Ито $\{I_m\}_{m=1}^M$, где $M = 10^6$ — объем выборки. Далее по формулам (6.93) и (6.94) оценивались математическое ожидание и второй начальный момент.

Полученные оценки для условия $\psi_1(t) = e^{\mu_1 t}$ и $\psi_2(t) \equiv 1$ отражены в табл. 6.1–6.3, а для условия $\psi_1(t) \equiv 1$ и $\psi_2(t) = e^{\mu_2 t}$ — в табл. 6.4–6.6.

Точные значения математического ожидания и второго начального момента рассматриваемых повторных стохастических интегралов можно взять из примера 6.5. Запишем их при заданных значениях μ_1 и μ_2 , а также $t_0 = 0$ и $T = 1$, чтобы убедиться в согласованности результатов оценивания даже с учетом того, что элементы спектральных характеристик $\tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_2$ и Ψ_1, Ψ_2 вычисляются неточно.

Если $j_1 \neq j_2$, то повторные стохастические интегралы Стратоновича и Ито совпадают и

$$\text{а) } E^S \mathcal{J}_T^{W(j_1j_2)}\mathbb{k}_\psi(\cdot) = E^I \mathcal{J}_T^{W(j_1j_2)}\mathbb{k}_\psi(\cdot) = 0,$$

$$E(S \mathcal{J}_T^{W(j_1j_2)}\mathbb{k}_\psi(\cdot))^2 = E(I \mathcal{J}_T^{W(j_1j_2)}\mathbb{k}_\psi(\cdot))^2 = \frac{e^2 - 1}{4} - \frac{1}{2} \approx 1.097264;$$

$$\text{б) } E^S \mathcal{J}_T^{W(j_1j_2)}\mathbb{k}_\psi(\cdot) = E^I \mathcal{J}_T^{W(j_1j_2)}\mathbb{k}_\psi(\cdot) = 0,$$

$$E(S \mathcal{J}_T^{W(j_1j_2)}\mathbb{k}_\psi(\cdot))^2 = E(I \mathcal{J}_T^{W(j_1j_2)}\mathbb{k}_\psi(\cdot))^2 = \frac{1 - e^{-2}}{4} - \frac{e^{-2}}{2} \approx 0.148499.$$

Если $j_1 = j_2$, то для интегралов Стратоновича (для интегралов Ито первые два момента такие же, как и при $j_1 \neq j_2$) имеем

$$\begin{aligned} \text{а) } E^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}_\psi(\cdot) &= \frac{e-1}{2} \approx 0.859141, \\ E^S \left(\mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}_\psi(\cdot) \right)^2 &= \frac{e^2-1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{(e-1)^2}{4} \approx 1.835387; \\ \text{б) } E^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}_\psi(\cdot) &= \frac{1-e^{-1}}{2} \approx 0.316060, \\ E^S \left(\mathcal{J}_T^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}_\psi(\cdot) \right)^2 &= \frac{1-e^{-2}}{4} - \frac{e^{-2}}{2} + \frac{(1-e^{-1})^2}{4} \approx 0.248393. \end{aligned}$$

Погрешность оценивания моментов повторных стохастических интегралов включает не только методическую погрешность, связанную с усечением спектральных характеристик, но и статистическую погрешность. Первая из них вычисляется точно (см. разд. 1.10 и 5.7), но, даже не делая этого, из полученных данных нетрудно сделать вывод, что минимальную погрешность в большинстве случаев гарантирует выбор полиномов Лежандра (1.5) или косинусоид (1.6) в качестве базисной системы, причем полиномы Лежандра обеспечивают этот результат при всех заданных порядках усечения. Точность оценивания немного снижается для тригонометрических функций (1.9), при выборе функций Уолша (1.7) и функций Хаара (1.8) ее можно считать неудовлетворительной за исключением порядка усечения $L = 64$.

Продemonстрируем, что погрешность оценивания повторных стохастических интегралов можно уменьшить за счет точного нахождения спектральных характеристик Ψ_1, Ψ_2 на примере функций Уолша и Хаара. Воспользуемся соотношениями для вычисления элементов спектральной характеристики F^μ показательной функции $f_\mu(t) = e^{\mu t}$, которые приведены в примере 6.1. Отметим, что для функций Уолша и Хаара элементы спектральных характеристик оператора умножения, полученные на основе формулы (1.78) при усечении всех спектральных характеристик, вычисляются точно. Последнее обстоятельство связано со свойствами функций Уолша и Хаара, а также с выбором порядка усечения в виде $L = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, т.е. фактически со структурой соответствующих трехмерных матриц V .

Результаты оценивания можно найти в табл. 6.7–6.12, порядок которых соответствует порядку табл. 6.1–6.6. По этим данным хорошо видно уменьшение погрешности. ■

Пример 6.13. Оценить первые два момента повторных стохастических интегралов Стратоновича ${}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot)$ и Ито ${}^I \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot)$, где функция $\mathbb{k}(\cdot)$ задается формулой (4.15), применяя спектральный метод и базисные системы (1.5)–(1.9); $T = [0, 1]$, $k = 2, 3, 4$. Порядки усечения спектральных характеристик: $L = 4, 8, \dots, 64$.

□ Для оценки первых двух моментов повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито воспользуемся алгоритмами 6.2 и 6.3 соответственно.

Необходимые для моделирования спектральные характеристики, а именно спектральная характеристика P^{-1} оператора интегрирования и спектральная характеристика V оператора умножения функций для базисных систем (1.5)–(1.9) приведены в разд. 1.5 и 1.6.

Для каждой базисной системы и каждого порядка усечения моделировались реализации повторных стохастических интегралов Стратоновича $\{S_m\}_{m=1}^M$ и Ито $\{I_m\}_{m=1}^M$, где $M = 10^6$ —

Таблица 6.1. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито ($j_1 \neq j_2$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.000352	0.000819	-0.000273	-0.000480	-0.000535
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	-0.001324	-0.001870	-0.000004	0.000295	0.000738
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	-0.000838	-0.001348	-0.000426	0.001158	0.000795
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.000500	0.001262	-0.000780	-0.000206	0.000109
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	-0.000389	-0.001022	-0.000745	0.000334	0.001225
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.983365	1.045955	1.070048	1.085067	1.090397
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.911140	1.030605	1.072274	1.084752	1.090230
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	1.400211	1.217421	1.151804	1.122799	1.110871
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	1.398288	1.216679	1.149095	1.120177	1.110615
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	1.141538	1.099092	1.091755	1.091734	1.098036

Таблица 6.2. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича ($j_1 = j_2$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.857598	0.859633	0.856120	0.860099	0.859643
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.835532	0.854950	0.855953	0.859721	0.858885
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	1.078699	0.954266	0.904316	0.880925	0.869735
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	1.080802	0.954900	0.902838	0.880439	0.870850
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.909738	0.880845	0.869267	0.863548	0.861147
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	1.831089	1.838533	1.817070	1.841116	1.842263
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	1.716331	1.813193	1.814154	1.837306	1.839584
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	2.885716	2.248376	2.021804	1.923480	1.880939
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	2.897748	2.250739	2.014444	1.919888	1.884506
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	2.228106	1.997845	1.911258	1.875856	1.851286

Таблица 6.3. Моменты повторных стохастических интегралов Ито ($j_1 = j_2$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	-0.000978	-0.001183	-0.000036	-0.000493	0.000124
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	-0.001292	0.000531	-0.002127	0.000829	-0.000195
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	-0.001548	-0.000876	0.000114	-0.000080	-0.000178
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.000555	-0.000243	-0.001364	-0.000566	0.000937
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	-0.000331	-0.000045	0.000054	-0.000443	-0.000374
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	1.098465	1.094697	1.095518	1.095138	1.100785
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	1.018219	1.082254	1.081503	1.098187	1.101900
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	1.722128	1.337752	1.204016	1.147452	1.124499
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	1.729616	1.338905	1.199329	1.144716	1.126126
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	1.400483	1.221957	1.155632	1.130141	1.109712

Таблица 6.4. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито ($j_1 \neq j_2$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000637	-0.000001	-0.000056	0.000295	0.000129
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000399	-0.000701	0.000151	0.000199	0.000388
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000406	0.000619	-0.000145	0.000019	0.000301
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000127	-0.000461	-0.000095	0.000596	0.001267
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000697	-0.000324	-0.000473	0.000367	-0.000076
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.133474	0.141399	0.145681	0.146240	0.148352
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.133149	0.141585	0.145525	0.146958	0.147683
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.112916	0.128627	0.137727	0.142835	0.146166
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.112737	0.128714	0.138062	0.142797	0.146464
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.143751	0.143638	0.145963	0.147385	0.147621

Таблица 6.5. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича ($j_1 = j_2$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.315992	0.315996	0.316065	0.315903	0.316627
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.314643	0.316068	0.314901	0.316385	0.315991
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.294823	0.304805	0.310448	0.313053	0.314753
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.295294	0.304938	0.310065	0.312861	0.314781
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.322255	0.318804	0.317298	0.316908	0.316141
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.248783	0.248029	0.248476	0.248869	0.249124
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.246814	0.248583	0.245858	0.249093	0.249251
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.222885	0.233895	0.240719	0.244130	0.246833
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.223492	0.233525	0.239911	0.243546	0.246485
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.279640	0.261481	0.254671	0.252318	0.249320

Таблица 6.6. Моменты повторных стохастических интегралов Ито ($j_1 = j_2$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000271	-0.000147	-0.000181	0.000174	-0.000589
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000522	0.000217	-0.001109	0.000337	-0.000664
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000377	-0.000323	-0.000009	-0.000170	0.000120
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000094	-0.000190	-0.000392	-0.000362	0.000149
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000449	-0.000153	-0.000115	0.000193	-0.000241
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.148947	0.148402	0.148471	0.148553	0.148945
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.147814	0.148684	0.146697	0.148993	0.149401
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.135965	0.140990	0.144341	0.146127	0.147764
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.136293	0.140538	0.143771	0.145665	0.147397
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.175792	0.159845	0.153993	0.151887	0.149375

Таблица 6.7. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито ($j_1 \neq j_2$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000709	0.001259	-0.000951	0.000756	0.000134
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000346	0.001170	-0.000749	-0.000196	0.000109
2	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.926326	1.004030	1.048404	1.070854	1.087241
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.924481	1.003394	1.046522	1.069700	1.085475

Таблица 6.8. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича ($j_1 = j_2$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.857903	0.858336	0.859245	0.859060	0.858967
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.859562	0.858901	0.857845	0.858585	0.860064
2	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	1.860847	1.837074	1.834182	1.833574	1.836830
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	1.868342	1.838870	1.827506	1.830122	1.840286

Таблица 6.9. Моменты повторных стохастических интегралов Ито ($j_1 = j_2$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.001238	-0.000805	0.000105	-0.000081	-0.000174
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000421	-0.000239	-0.001296	-0.000556	0.000923
2	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	1.124850	1.100335	1.095879	1.095591	1.099006
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	1.129495	1.101158	1.091610	1.092954	1.100576

Таблица 6.10. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито ($j_1 \neq j_2$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000255	-0.000524	-0.000026	0.000349	0.000484
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000148	0.000598	-0.000224	0.000128	0.000174
2	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.125471	0.135775	0.142123	0.145142	0.146922
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.125158	0.135748	0.141690	0.144744	0.146767

Таблица 6.11. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича ($j_1 = j_2$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.315559	0.316251	0.314949	0.316379	0.315979
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.315613	0.315704	0.315952	0.315810	0.316119
2	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.251204	0.249729	0.246206	0.249217	0.249126
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.251647	0.248767	0.248203	0.247870	0.248677

Таблица 6.12. Моменты повторных стохастических интегралов Ито ($j_1 = j_2$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000501	0.000191	-0.001111	0.000318	-0.000082
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000447	-0.000356	-0.000108	-0.000250	0.000059
2	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.151627	0.149714	0.147014	0.149122	0.149283
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.152036	0.149098	0.148377	0.148134	0.148746

объем выборки. Затем с помощью формул (6.93) и (6.94) оценивались математическое ожидание и второй начальный момент.

Найденные оценки для кратности $k = 2$ приведены в табл. 6.13–6.15, для $k = 3$ — в табл. 6.16–6.23 и для $k = 4$ — в табл. 6.24–6.38. Для кратности $k = 4$ среди разных комбинаций равенств или неравенств значений j_1, \dots, j_4 при условии совпадения повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито рассмотрен только вариант попарно различных j_1, \dots, j_4 . Результаты оценивания согласуются со значениями из табл. 5.3 и 5.4, а также с примерами 5.11, 6.9 и 6.10. ■

Далее приведем примеры моделирования повторных стохастических интегралов смешанного типа от функций (4.15), они же являются повторными стохастическими интегралами от функций, которые можно представить линейными комбинациями функций (4.24) с дополнительным условием (4.26).

Пример 6.14. Оценить первые два момента повторных стохастических интегралов Стратоновича смешанного типа кратностей $k = 2$ и $k = 3$ из примеров 6.3 и 6.4, применяя спектральный метод и базисные системы (1.5)–(1.9); $\mathbb{T} = [0, 1]$. Порядки усечения спектральных характеристик: $L = 4, 8, \dots, 64$.

□ Начнем с повторных стохастических интегралов Стратоновича из примера 6.3:

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \int_0^{t_2} dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2)$$

кратности $k = 2$ для двух вариантов:

$$\text{а) } j_1 = 0, j_2 \neq 0; \quad \text{б) } j_2 = 0, j_1 \neq 0.$$

Напомним (см. пример 6.3), что эти интегралы выражаются через стохастические интегралы кратности $k = 1$ от детерминированных функций:

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(0 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_2)} f_1(\cdot), \quad {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 0)} \mathbb{k}(\cdot) = \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1)} (T - f_1(\cdot)),$$

где функция $\mathbb{k}(\cdot)$ задается формулой (4.15) и $f_1(t) = t$.

Для оценки первых двух моментов повторных стохастических интегралов Стратоновича воспользуемся алгоритмом 6.2 с введением спектральной характеристики $\mathcal{V}_0 = \mathbf{1}$ функции $f_0(t) \equiv 1$ (см. пример 1.1). Необходимые для моделирования спектральные характеристики P^{-1} оператора интегрирования относительно базисных систем (1.5)–(1.9) приведены в разд. 1.6.

Для каждой базисной системы и каждого порядка усечения моделировались реализации повторных стохастических интегралов Стратоновича $\{S_m\}_{m=1}^M$, где $M = 10^6$ — объем выборки, и оценивались математическое ожидание и второй начальный момент по формулам (6.93).

Найденные оценки указаны в табл. 6.39 и 6.40. Результаты оценивания согласуются со значениями, которые приведены в п. 2 замечаний 6.3.

Перейдем к повторным стохастическим интегралам Стратоновича из примера 6.4:

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2) \circ dW_{j_3}(t_3)$$

Таблица 6.13. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито
($k = 2, j_1 \neq j_2$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000288	0.000371	-0.000325	-0.000067	0.001870
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000060	0.000876	-0.001349	0.000281	0.000434
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000320	-0.001054	-0.000278	0.000290	0.001301
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.001148	-0.000246	-0.001063	0.000880	0.000584
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000450	0.000275	0.000498	-0.000187	-0.000132
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.462109	0.482965	0.491277	0.495657	0.497613
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.465907	0.483632	0.492898	0.495102	0.498588
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.436710	0.468835	0.483437	0.492592	0.496897
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.437996	0.467018	0.484564	0.492725	0.496374
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.426607	0.463319	0.479926	0.491145	0.493053

Таблица 6.14. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича
($k = 2, j_1 = j_2$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.498999	0.500191	0.498248	0.500619	0.499881
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.499242	0.499384	0.499971	0.499813	0.500034
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.500101	0.499677	0.499251	0.499521	0.500392
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.499551	0.499974	0.499955	0.499924	0.499632
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.499867	0.499904	0.499622	0.500227	0.499657
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.747124	0.751189	0.742385	0.752166	0.752722
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.749058	0.747995	0.748770	0.748836	0.750799
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.751318	0.747780	0.745994	0.746874	0.750747
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.749250	0.748656	0.749829	0.752009	0.748777
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.750222	0.749742	0.749915	0.750591	0.748818

Таблица 6.15. Моменты повторных стохастических интегралов Ито
($k = 2, j_1 = j_2$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.001001	0.000191	-0.001752	0.000619	-0.000119
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000758	-0.000616	-0.000029	-0.000187	0.000034
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000101	-0.000323	-0.000749	-0.000479	0.000392
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000449	-0.000026	-0.000045	-0.000076	-0.000368
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000133	-0.000096	-0.000378	0.000227	-0.000343
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.498124	0.500998	0.494137	0.501547	0.502841
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.499816	0.498611	0.498799	0.499023	0.500765
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.501217	0.498104	0.496743	0.497354	0.500355
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.499699	0.498682	0.499874	0.502085	0.499146
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.500355	0.499838	0.500293	0.500364	0.499161

Таблица 6.16. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито
 ($k = 3$; j_1, j_2, j_3 попарно различны)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000315	0.000327	-0.000304	0.000320	0.000371
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000439	0.000092	-0.000645	-0.000003	-0.000473
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000071	0.000079	-0.000455	-0.000092	0.000288
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000495	0.000110	0.000305	-0.000691	-0.000169
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000333	0.000631	-0.000289	-0.000293	-0.000389
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.130476	0.149347	0.158863	0.164229	0.164965
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.132299	0.151835	0.160826	0.163014	0.163898
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.112706	0.138052	0.151843	0.159341	0.163930
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.113568	0.137966	0.151411	0.158405	0.162616
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.119393	0.144292	0.154266	0.161090	0.163791

Таблица 6.17. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича
 ($k = 3$, $j_1 = j_2 \neq j_3$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000177	0.000639	0.000199	0.000189	-0.000340
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000531	0.000386	0.000308	0.000136	0.000490
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000429	-0.000296	0.000717	-0.000035	-0.000818
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000377	-0.000332	0.000219	-0.000052	-0.000306
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000472	0.000552	0.000446	0.000339	0.000635
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.230419	0.240881	0.244054	0.248567	0.248685
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.231989	0.243090	0.248019	0.248301	0.249108
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.223151	0.234245	0.242170	0.243756	0.246081
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.223638	0.236978	0.242554	0.245734	0.245243
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.220188	0.236843	0.243688	0.247134	0.248331

Таблица 6.18. Моменты повторных стохастических интегралов Ито
 ($k = 3$, $j_1 = j_2 \neq j_3$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000304	0.000315	0.000240	0.000123	0.000180
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000190	0.000473	0.000057	-0.000018	0.000113
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000080	0.000388	0.000116	-0.000073	-0.000282
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000002	0.000194	-0.000255	-0.000161	0.000047
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000412	0.000671	0.000164	0.000083	-0.000437
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.130412	0.149317	0.158983	0.162364	0.164755
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.149313	0.159617	0.164400	0.165510	0.164671
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.141629	0.151907	0.158003	0.163171	0.164306
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.138793	0.152133	0.159574	0.163049	0.163053
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.144120	0.155778	0.158775	0.164820	0.164789

Таблица 6.19. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито
 $(k = 3, j_1 = j_3 \neq j_2)$

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000415	0.000095	0.000345	0.000080	0.000431
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000228	-0.000588	-0.000414	-0.000665	-0.000616
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000107	-0.000286	0.000164	-0.000470	-0.000002
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000313	-0.000197	-0.000501	-0.000038	0.000209
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000236	-0.000206	0.000283	-0.000006	-0.000673
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.130519	0.150282	0.156797	0.163371	0.165064
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.134000	0.151443	0.158948	0.163769	0.164130
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.121331	0.140014	0.152097	0.158904	0.162455
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.121315	0.139859	0.151488	0.160074	0.162491
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.128241	0.147612	0.157415	0.162902	0.163489

Таблица 6.20. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича
 $(k = 3, j_1 \neq j_2 = j_3)$

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000110	0.000328	-0.000103	0.000258	0.000473
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000416	0.001048	-0.000406	-0.000416	-0.000193
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000711	-0.000037	0.000024	0.000323	0.000110
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000387	0.000961	-0.000383	-0.000540	0.000366
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000331	0.000802	-0.000335	-0.000601	-0.000063
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.230572	0.240895	0.245846	0.249202	0.248103
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.231337	0.242854	0.246821	0.247515	0.248243
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.221750	0.237741	0.241409	0.247643	0.246838
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.220493	0.234615	0.242536	0.246054	0.248345
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.219468	0.236447	0.243450	0.245610	0.247684

Таблица 6.21. Моменты повторных стохастических интегралов Ито
 $(k = 3, j_1 \neq j_2 = j_3)$

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000523	0.000386	-0.000398	-0.000624	0.000508
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000429	0.000257	-0.000346	-0.000567	0.000623
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000511	-0.000008	-0.000064	-0.000575	0.000771
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000331	0.000146	-0.000239	-0.000016	0.000704
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000455	-0.000012	0.000526	0.000039	0.000030
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.149593	0.159411	0.163325	0.164405	0.165415
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.148604	0.159427	0.163231	0.165468	0.166373
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.138723	0.152065	0.158775	0.163503	0.165758
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.139031	0.151710	0.159236	0.163007	0.165099
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.144592	0.157452	0.160420	0.165338	0.164607

Таблица 6.22. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича
($k = 3, j_1 = j_2 = j_3$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000021	0.001412	-0.000363	-0.000109	0.000432
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000017	0.001379	-0.000369	-0.000111	0.000431
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000231	0.000963	-0.000875	0.000799	-0.000101
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.001693	0.001457	-0.000487	-0.000533	-0.000185
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000032	0.001478	-0.000426	-0.000111	0.000451
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.453027	0.433922	0.423450	0.424265	0.422047
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.451087	0.432105	0.422265	0.423596	0.421706
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.492358	0.453187	0.422495	0.425380	0.423507
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.497297	0.455436	0.434119	0.424758	0.415045
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.536744	0.482593	0.449678	0.438180	0.429303

Таблица 6.23. Моменты повторных стохастических интегралов Ито
($k = 3, j_1 = j_2 = j_3$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000344	0.000710	0.000246	0.000278	0.000185
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000450	-0.000089	-0.000064	-0.000037	0.000101
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000257	0.000139	0.000004	0.000253	0.000212
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000516	0.000068	0.000173	-0.000200	0.000385
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000396	0.000627	0.000204	0.000064	0.000390
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.169918	0.168730	0.161173	0.165762	0.169517
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.174227	0.168281	0.166097	0.168727	0.166087
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.182791	0.167445	0.169688	0.166370	0.167764
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.183535	0.169308	0.167549	0.166496	0.169794
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.217649	0.197331	0.176501	0.175349	0.173893

Таблица 6.24. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито
($k = 4; j_1, j_2, j_3, j_4$ попарно различны)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000190	0.000026	-0.000110	0.000073	0.000082
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000206	0.000197	0.000006	0.000222	0.000064
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000074	-0.000067	0.000252	0.000223	0.000153
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000212	0.000041	0.000034	-0.000318	0.000054
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000006	0.000109	-0.000169	-0.000207	0.000254
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.025351	0.033116	0.038112	0.039362	0.040343
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.026284	0.034340	0.038080	0.039713	0.040704
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.020100	0.028711	0.034360	0.037753	0.039522
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.020333	0.028077	0.034366	0.038001	0.039583
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.023306	0.032613	0.037427	0.039694	0.040606

Таблица 6.25. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича
($k = 4, j_1 = j_2; j_2, j_3, j_4$ попарно различны)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000039	-0.000286	0.000247	0.000111	-0.000185
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000244	0.000266	-0.000269	0.000202	0.000072
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000107	0.000440	-0.000103	-0.000298	0.000202
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000135	0.000057	-0.000253	-0.000006	-0.000078
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000193	0.000080	-0.000371	-0.000028	-0.000109
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.049442	0.055137	0.059094	0.060857	0.061186
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.050212	0.056589	0.059438	0.061003	0.061857
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.043817	0.051173	0.055896	0.059865	0.060904
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.043975	0.051263	0.055797	0.059129	0.061231
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.048552	0.056305	0.059307	0.060746	0.061796

Таблица 6.26. Моменты повторных стохастических интегралов Ито
($k = 4, j_1 = j_2; j_2, j_3, j_4$ попарно различны)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000083	-0.000127	0.000223	-0.000027	0.000160
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000214	0.000233	-0.000062	0.000181	-0.000006
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000008	0.000110	0.000117	-0.000172	0.000194
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000060	0.000049	-0.000071	0.000064	-0.000052
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000109	0.000160	-0.000182	-0.000107	-0.000082
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.031119	0.035726	0.038859	0.040324	0.040754
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.032121	0.036981	0.039293	0.040423	0.041142
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.027351	0.032757	0.036484	0.039595	0.040274
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.027510	0.032818	0.036459	0.038970	0.040603
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.031338	0.037219	0.039458	0.040360	0.041171

Таблица 6.27. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича
($k = 4, j_2 = j_3; j_1, j_3, j_4$ попарно различны)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000294	0.000009	-0.000180	0.000211	0.000251
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000025	0.000069	0.000114	0.000152	-0.000144
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000395	-0.000064	-0.000127	0.000402	-0.000390
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000280	-0.000142	-0.000176	0.000059	-0.000068
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000058	-0.000096	0.000180	0.000025	-0.000238
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.052763	0.057238	0.059354	0.060418	0.062032
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.052415	0.057739	0.060423	0.061155	0.061768
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.046784	0.054375	0.057190	0.060043	0.061246
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.046923	0.053854	0.057668	0.060634	0.062341
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.047458	0.055820	0.058583	0.060300	0.061788

Таблица 6.28. Моменты повторных стохастических интегралов Ито
 ($k = 4, j_2 = j_3; j_1, j_3, j_4$ попарно различны)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000316	0.000153	-0.000229	-0.000345	0.000193
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000232	0.000161	0.000048	0.000002	0.000069
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000423	-0.000224	0.000057	0.000297	-0.000350
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000216	-0.000393	-0.000136	0.000058	-0.000030
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000122	-0.000082	0.000112	-0.000072	0.000053
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.032784	0.036745	0.038824	0.039893	0.041166
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.031948	0.036993	0.039712	0.040393	0.040891
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.027109	0.033591	0.036658	0.039182	0.040402
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.027232	0.033379	0.036958	0.039596	0.041125
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.028958	0.035986	0.038594	0.039930	0.041044

Таблица 6.29. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича
 ($k = 4, j_3 = j_4; j_1, j_2, j_3$ попарно различны)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000090	-0.000030	-0.000074	-0.000211	-0.000088
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000130	-0.000358	-0.000220	-0.000146	0.000642
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000155	-0.000061	0.000126	-0.000051	-0.000188
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000034	-0.000309	-0.000057	0.000318	-0.000631
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000022	0.000145	0.000140	-0.000231	0.000168
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.048176	0.055208	0.058571	0.060201	0.062036
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.048897	0.056715	0.058994	0.061011	0.061813
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.043944	0.051577	0.056521	0.059512	0.061378
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.043188	0.051368	0.056123	0.059644	0.059981
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.048525	0.056203	0.059398	0.061334	0.062170

Таблица 6.30. Моменты повторных стохастических интегралов Ито
 ($k = 4, j_3 = j_4; j_1, j_2, j_3$ попарно различны)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000121	-0.000041	0.000160	-0.000153	-0.000244
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000027	-0.000215	-0.000132	0.000028	0.000647
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000012	0.000053	0.000119	-0.000025	-0.000075
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000114	-0.000082	-0.000006	0.000026	-0.000508
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000020	0.000196	0.000080	-0.000030	0.000233
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.030249	0.035703	0.038602	0.039873	0.041274
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.031347	0.037081	0.038916	0.040413	0.041087
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.027589	0.033154	0.037032	0.039256	0.040734
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.027119	0.033001	0.036654	0.039251	0.039697
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.031470	0.037095	0.039517	0.040892	0.041495

Таблица 6.31. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича
 $(k = 4, j_1 = j_2 \neq j_3 = j_4)$

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.124626	0.125214	0.124541	0.125153	0.124898
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.125107	0.124648	0.125088	0.124751	0.124513
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.125074	0.124971	0.124560	0.125231	0.124552
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.124683	0.124913	0.125006	0.125200	0.125220
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.125025	0.124923	0.124928	0.124622	0.124698
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.093691	0.097697	0.096529	0.098615	0.099411
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.096154	0.096997	0.098125	0.097580	0.096876
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.094479	0.095445	0.095254	0.097444	0.096027
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.093350	0.095546	0.097384	0.098857	0.098562
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.101222	0.101315	0.099771	0.098830	0.098160

Таблица 6.32. Моменты повторных стохастических интегралов Ито
 $(k = 4, j_1 = j_2 \neq j_3 = j_4)$

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000019	0.000023	-0.000285	-0.000007	0.000212
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000302	-0.000172	0.000056	-0.000297	-0.000267
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000081	0.000145	0.000011	0.000208	-0.000348
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000131	0.000050	0.000033	0.000107	0.000273
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000268	-0.000019	-0.000065	-0.000387	-0.000144
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.036338	0.039664	0.039798	0.041054	0.041827
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.038102	0.039869	0.040555	0.040781	0.040494
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.035940	0.037826	0.038607	0.040102	0.039876
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.035457	0.037805	0.039798	0.041055	0.040908
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.040454	0.042195	0.041568	0.041450	0.041127

Таблица 6.33. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича
 $(k = 4, j_1 = j_2 = j_3 \neq j_4)$

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000263	-0.000181	0.000196	-0.000407	0.000126
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000181	-0.000075	0.000050	0.000609	0.000295
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000087	0.000830	0.000347	-0.000042	0.000076
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000163	-0.000281	0.000373	-0.000155	-0.000367
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000260	-0.000386	-0.000282	-0.000205	-0.000553
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.111851	0.106962	0.105469	0.104425	0.103549
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.109809	0.105472	0.105562	0.102574	0.102797
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.119604	0.106702	0.104643	0.102724	0.102880
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.118692	0.108561	0.106207	0.103176	0.104125
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.125179	0.116607	0.110992	0.108584	0.107031

Таблица 6.34. Моменты повторных стохастических интегралов Ито
 $(k = 4, j_1 = j_2 = j_3 \neq j_4)$

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000268	-0.000118	-0.000227	-0.000454	-0.000132
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000216	0.000226	0.000085	0.000247	0.000188
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000044	0.000129	0.000211	0.000197	0.000200
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000023	-0.000316	0.000078	-0.000321	0.000280
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000045	-0.000417	-0.000159	-0.000094	-0.000375
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.040266	0.040409	0.040944	0.041155	0.040869
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.039374	0.039681	0.041205	0.040540	0.040751
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.041991	0.037878	0.038920	0.039269	0.039928
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.041810	0.039180	0.039672	0.039595	0.040892
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.047831	0.046473	0.044258	0.043928	0.042956

Таблица 6.35. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича
 $(k = 4, j_1 \neq j_2 = j_3 = j_4)$

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000060	0.000143	-0.000070	0.000310	-0.000249
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000196	-0.000040	0.000205	0.000521	-0.000094
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000272	0.000290	-0.000223	-0.000207	0.000148
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000137	-0.000223	0.000158	-0.000884	0.000334
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000282	-0.000063	-0.000298	-0.000109	0.000569
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.110383	0.105199	0.105951	0.103715	0.103786
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.111217	0.105296	0.104803	0.103760	0.102975
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.116819	0.106968	0.106211	0.105556	0.105605
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.116744	0.109093	0.106946	0.104811	0.104962
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.127625	0.116781	0.110614	0.109968	0.106180

Таблица 6.36. Моменты повторных стохастических интегралов Ито
 $(k = 4, j_1 \neq j_2 = j_3 = j_4)$

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000109	0.000333	-0.000023	0.000168	-0.000119
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000244	-0.000224	0.000035	0.000141	-0.000388
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000237	0.000176	0.000078	0.000116	-0.000236
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000131	0.000117	0.000075	-0.000329	0.000072
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000047	-0.000154	-0.000259	0.000124	0.000281
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.039470	0.039379	0.041109	0.040540	0.041167
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.040374	0.039917	0.040760	0.040617	0.040515
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.040639	0.038041	0.039552	0.041045	0.041852
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.040494	0.039162	0.040103	0.040328	0.041229
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.049522	0.046481	0.044377	0.044553	0.042664

Таблица 6.37. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича ($k = 4, j_1 = j_2 = j_3 = j_4$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.160279	0.140823	0.133374	0.129274	0.126762
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.158683	0.139131	0.132259	0.128635	0.126425
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.186951	0.155451	0.140939	0.133094	0.128698
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.186942	0.155447	0.140934	0.133102	0.128694
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.197268	0.160852	0.144142	0.134780	0.129595
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.238610	0.203727	0.194218	0.191901	0.181322
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.235501	0.201176	0.192693	0.191046	0.180914
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.307107	0.230435	0.205726	0.197246	0.183851
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.307158	0.230343	0.205683	0.197169	0.183868
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.444800	0.317962	0.258958	0.226452	0.199495

Таблица 6.38. Моменты повторных стохастических интегралов Ито ($k = 4, j_1 = j_2 = j_3 = j_4$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.017896	0.007925	0.004147	0.002447	0.000753
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.017100	0.007091	0.003595	0.002127	0.000586
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.031168	0.015249	0.007934	0.004343	0.001720
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.031159	0.015245	0.007929	0.004351	0.001715
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.036415	0.017911	0.009599	0.005199	0.002190
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.051122	0.043808	0.042427	0.043357	0.040071
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.049875	0.043431	0.042314	0.043318	0.040078
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.067311	0.047772	0.043386	0.043646	0.040120
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.067340	0.047709	0.043364	0.043603	0.040132
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.128908	0.088081	0.068378	0.057684	0.047688

кратности $k = 3$ для трех вариантов:

$$\text{а) } j_1 = 0, j_2, j_3 \neq 0; \quad \text{б) } j_2 = 0, j_1, j_3 \neq 0; \quad \text{в) } j_3 = 0, j_1, j_2 \neq 0.$$

Они эквивалентны повторным стохастическим интегралам Стратоновича кратности $k = 2$ (см. пример 6.4):

$$\begin{aligned} {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(0j_2j_3)} \mathbb{k}(\cdot) &= {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_2j_3)} \mathbb{k}_{10}(\cdot), \\ {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_10j_3)} \mathbb{k}(\cdot) &= {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1j_3)} (\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot)), \quad {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1j_20)} \mathbb{k}(\cdot) = {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1j_2)} (T\mathbb{k}(\cdot) - \mathbb{k}_{01}(\cdot)), \end{aligned}$$

где в левых частях $\mathbb{k}(\cdot)$ — функция (4.15) при $k = 3$, а в правых частях $\mathbb{k}_{10}(t_1, t_2) = t_1 1(t_2 - t_1)$, $\mathbb{k}_{01}(t_1, t_2) = t_2 1(t_2 - t_1)$, $\mathbb{k}(t_1, t_2) = 1(t_2 - t_1)$.

Также применим алгоритм 6.2 с введением спектральной характеристики $\mathcal{V}_0 = \mathbf{1}$ функции $f_0(t) \equiv 1$, чтобы оценить первые два момента этих интегралов. В дополнение к обозначенным выше спектральным характеристикам здесь требуются спектральные характеристики V оператора умножения функций относительно базисных систем (1.5)–(1.9), их нетрудно найти в разд. 1.5.

Далее аналогично для каждой базисной системы и каждого порядка усечения моделировались реализации повторных стохастических интегралов Стратоновича $\{S_m\}_{m=1}^M$ при том же

Таблица 6.39. Моменты стохастических интегралов Стратоновича ($k = 2, j_1 = 0, j_2 \neq 0$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000599	0.000413	0.000852	0.000088	0.000171
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000673	0.000270	0.000992	0.000094	0.000880
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000008	0.000026	-0.000242	-0.000918	0.000688
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000361	-0.000350	0.000376	-0.000552	-0.000386
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000430	-0.000462	0.000937	-0.000514	0.000601
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.332299	0.333637	0.333166	0.333672	0.333392
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.333084	0.333516	0.333084	0.333708	0.333603
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.327462	0.332358	0.332896	0.333633	0.332830
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.327617	0.332071	0.332572	0.333309	0.333221
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.313502	0.322546	0.327174	0.329705	0.331492

Таблица 6.40. Моменты стохастических интегралов Стратоновича ($k = 2, j_1 \neq 0, j_2 = 0$)

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000859	0.000017	-0.000296	-0.000142	0.000005
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000173	-0.000478	0.000681	-0.001068	-0.000521
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000548	-0.000552	-0.000810	0.000212	-0.000508
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000614	0.000236	0.000080	-0.000921	0.000561
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000213	0.000482	0.000046	0.000197	-0.000346
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.333883	0.333196	0.333284	0.333862	0.333326
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.332580	0.333038	0.333632	0.333226	0.333545
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.328559	0.332214	0.332861	0.332730	0.332759
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.329276	0.332203	0.332678	0.332686	0.333895
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.313352	0.322332	0.326650	0.330449	0.331707

объеме выборки $M = 10^6$ и оценивались математическое ожидание и второй начальный момент по формулам (6.93).

Полученные оценки приведены в табл. 6.41–6.46 и они в полной мере соответствуют значениям из примера 6.4. ■

Пример 6.15. Оценить первые два момента повторных стохастических интегралов Ито смешанного типа кратности $k = 4$ из примера 6.7, применяя спектральный метод и базисные системы (1.5)–(1.9); $\mathbb{T} = [0, 1]$. Порядки усечения спектральных характеристик: $L = 4, 8, \dots, 64$.

□ В примере 6.7 изучались повторные стохастические интегралы Ито

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \int_{t_0}^{t_4} \int_{t_0}^{t_3} \int_{t_0}^{t_2} dW_{j_1}(t_1) dW_{j_2}(t_2) dW_{j_3}(t_3) dW_{j_4}(t_4)$$

кратности $k = 4$ для двух вариантов:

$$\text{а) } j_1 = j_4 = 0, j_2, j_3 \neq 0; \quad \text{б) } j_2 = j_3 = 0, j_1, j_4 \neq 0,$$

и там же показано, что

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(0j_2j_30)} \mathbb{k}(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_2j_3)} (T - \mathbb{k}_{01}(\cdot)) \mathbb{k}_{10}(\cdot), \quad {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_100j_4)} \mathbb{k}(\cdot) = {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1j_4)} \frac{(\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot))^2}{2},$$

Таблица 6.41. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича
 $(k = 3, j_1 = 0, j_2, j_3 \neq 0, j_2 \neq j_3)$

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000188	0.000259	-0.000174	0.000422	-0.000305
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000318	-0.000450	-0.000073	-0.000035	0.000063
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000106	-0.000245	-0.000236	0.000249	0.000127
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000252	0.000185	-0.000175	-0.000240	-0.000046
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000236	0.000248	-0.000660	0.000154	-0.000056
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.071696	0.078250	0.080324	0.081776	0.082697
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.071585	0.078284	0.081038	0.082065	0.082623
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.065353	0.073667	0.078199	0.080700	0.082130
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.065259	0.073533	0.078147	0.080628	0.082138
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.068059	0.076311	0.080221	0.081884	0.082785

Таблица 6.42. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича
 $(k = 3, j_1 = 0, j_2 = j_3 \neq 0)$

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.249742	0.249516	0.250028	0.249727	0.250189
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.249730	0.250223	0.249676	0.250131	0.249955
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.250226	0.250041	0.249602	0.249960	0.250319
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.250248	0.250021	0.249618	0.249927	0.250326
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.250257	0.249738	0.249282	0.249960	0.250292
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.146447	0.145432	0.145863	0.145586	0.146017
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.146081	0.146278	0.145026	0.145822	0.145959
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.149181	0.146452	0.145224	0.145659	0.146476
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.149183	0.146406	0.145221	0.145673	0.146472
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.152541	0.149101	0.146903	0.146887	0.147096

Таблица 6.43. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича
 $(k = 3, j_2 = 0, j_1, j_3 \neq 0, j_1 \neq j_3)$

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000127	0.000104	-0.000278	0.000175	-0.000167
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000050	-0.000242	0.000250	-0.000457	0.000233
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000138	-0.000473	0.000277	-0.000307	0.000150
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000404	0.000061	-0.000173	-0.000223	0.000078
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000031	-0.000449	0.000263	0.000024	-0.000392
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.082973	0.083156	0.083325	0.083546	0.083544
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.083264	0.083506	0.083094	0.083265	0.083134
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.079223	0.082187	0.083075	0.082987	0.083103
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.078955	0.082415	0.082976	0.083043	0.083496
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.076974	0.079956	0.081495	0.082178	0.082938

Таблица 6.44. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича
 $(k = 3, j_2 = 0, j_1 = j_3 \neq 0)$

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.036410	0.016545	0.008251	0.004102	0.001603
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.034169	0.014876	0.007123	0.003134	0.001025
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.062630	0.030661	0.015657	0.007977	0.004164
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.062277	0.031271	0.015392	0.007785	0.003798
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.072887	0.036545	0.018595	0.009226	0.004909
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.084675	0.083377	0.083966	0.083090	0.083202
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.083459	0.083667	0.083266	0.082823	0.082827
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.083955	0.083188	0.083049	0.083231	0.083319
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.083975	0.083108	0.083182	0.082932	0.083662
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.096007	0.088401	0.085932	0.084353	0.083886

Таблица 6.45. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича
 $(k = 3, j_3 = 0, j_1, j_2 \neq 0, j_1 \neq j_2)$

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000381	-0.000489	-0.000178	0.000335	0.000066
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000211	-0.000373	0.000212	0.000016	0.000191
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000175	-0.000300	-0.000064	0.000099	0.000346
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000184	-0.000297	0.000057	-0.000115	-0.000030
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000159	-0.000396	0.000100	0.000106	0.000233
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.071763	0.078111	0.080954	0.082219	0.083007
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.071700	0.078237	0.081177	0.082113	0.083014
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.065522	0.073599	0.078553	0.080628	0.082437
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.065545	0.073590	0.078513	0.080785	0.082317
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.068437	0.076275	0.080373	0.082096	0.082942

Таблица 6.46. Моменты повторных стохастических интегралов Стратоновича
 $(k = 3, j_3 = 0, j_1 = j_2 \neq 0)$

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.249684	0.250298	0.249922	0.250165	0.250002
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.249746	0.250457	0.249639	0.250139	0.249702
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.249728	0.250410	0.250387	0.249726	0.250043
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.249761	0.250408	0.250279	0.249712	0.250149
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.249556	0.249741	0.250174	0.250053	0.250063
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.146078	0.146579	0.145737	0.146139	0.145972
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.146159	0.146750	0.145477	0.146125	0.145315
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.148350	0.146922	0.146502	0.145558	0.146131
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.148193	0.146834	0.146220	0.145601	0.146471
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.151557	0.149309	0.148223	0.147424	0.146693

где функция $\mathbb{k}(\cdot)$ задается формулой (4.15) и $\mathbb{k}_{10}(t_1, t_2) = t_1 1(t_2 - t_1)$, $\mathbb{k}_{01}(t_1, t_2) = t_2 1(t_2 - t_1)$.

Чтобы оценить первые два момента повторных стохастических интегралов Ито, применим алгоритм 6.3 с дополнительным определением спектральной характеристики $\mathcal{V}_0 = \mathbf{1}$ функции $f_0(t) \equiv 1$. Спектральные характеристики $\mathbf{1}$, а также спектральные характеристики P^{-1} и V оператора интегрирования и оператора умножения функций для всех базисных систем (1.5) – (1.9) содержатся в примере 1.1, разд. 1.5 и 1.6.

Для каждой базисной системы и каждого порядка усечения моделировались реализации повторных стохастических интегралов Ито $\{I_m\}_{m=1}^M$, где $M = 10^6$ — объем выборки, и оценивались математическое ожидание и второй начальный момент согласно формулам (6.94).

Найденные оценки указаны в табл. 6.47–6.50. Результаты оценивания согласуются со значениями, полученными в примерах 6.7 и 6.11. ■

Таблица 6.47. Моменты повторных стохастических интегралов Ито

$$(k = 4, j_1 = j_4 = 0, j_2, j_3 \neq 0, j_2 \neq j_3)$$

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000045	0.000128	-0.000043	0.000097	-0.000038
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000025	-0.000127	-0.000044	-0.000015	0.000097
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000037	-0.000095	-0.000041	-0.000034	-0.000054
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000028	-0.000063	-0.000046	0.000016	0.000045
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000042	-0.000065	-0.000097	0.000032	0.000011
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.004773	0.005032	0.005256	0.005400	0.005464
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.004809	0.005161	0.005336	0.005439	0.005497
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.004377	0.004738	0.005094	0.005286	0.005430
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.004372	0.004748	0.005076	0.005293	0.005422
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.006571	0.006342	0.006133	0.005938	0.005775

Таблица 6.48. Моменты повторных стохастических интегралов Ито

$$(k = 4, j_1 = j_4 = 0, j_2 = j_3 \neq 0)$$

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000098	0.000028	-0.000022	0.000070	-0.000023
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000042	-0.000078	-0.000139	-0.000215	-0.000322
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000107	-0.000072	0.000206	-0.000204	-0.000151
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000003	-0.000198	0.000007	-0.000065	-0.000162
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000029	-0.000150	0.000129	-0.000030	0.000062
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.015041	0.015555	0.016063	0.016460	0.016665
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.014480	0.015345	0.016074	0.016333	0.016526
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.013916	0.014728	0.015446	0.016040	0.016447
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.013914	0.014652	0.015477	0.015947	0.016393
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.015591	0.016524	0.016964	0.016973	0.016795

Таблица 6.49. Моменты повторных стохастических интегралов Ито

$$(k = 4, j_2 = j_3 = 0, j_1, j_4 \neq 0, j_1 \neq j_4)$$

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000039	-0.000094	-0.000157	-0.000075	-0.000038
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000040	0.000041	-0.000105	0.000037	-0.000004
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000000	-0.000008	0.000026	0.000012	-0.000031
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000107	-0.000032	-0.000029	-0.000004	0.000089
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	-0.000077	0.000041	-0.000027	-0.000098	0.000116
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.008317	0.008298	0.008343	0.008326	0.008319
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.008310	0.008315	0.008345	0.008317	0.008321
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.008462	0.008293	0.008321	0.008323	0.008295
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.008396	0.008334	0.008339	0.008342	0.008316
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.009319	0.008777	0.008550	0.008427	0.008431

Таблица 6.50. Моменты повторных стохастических интегралов Ито

$$(k = 4, j_2 = j_3 = 0, j_1 = j_4 \neq 0)$$

Момент	Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
1	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000082	0.000092	-0.000067	-0.000133	-0.000029
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.000223	0.000027	-0.000074	0.000062	0.000028
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.007804	0.001893	0.000532	0.000171	-0.000057
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.007945	0.001959	0.000557	0.000136	-0.000043
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.029781	0.016750	0.008964	0.004623	0.002507
2	$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.008332	0.008331	0.008351	0.008370	0.008313
	$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.008242	0.008352	0.008332	0.008365	0.008324
	$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.008358	0.008316	0.008309	0.008351	0.008346
	$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.008505	0.008323	0.008320	0.008374	0.008348
	$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.011728	0.009848	0.008980	0.008623	0.008486

6.5. Численно-спектральные методы решения стохастических дифференциальных уравнений

Решение линейных стохастических дифференциальных уравнений можно получить, применяя спектральную форму математического описания (см. разд. 3.3), и спектральный метод рассматривается как альтернатива численным методам [4, 77, 240, 300, 305, 321]. Для нелинейных стохастических дифференциальных уравнений (см. разд. 3.1) обойтись только спектральным методом вряд ли возможно (исключение составляют уравнения, приводимые к линейным с помощью замены переменных). Однако можно предложить комбинированный метод, а именно численный метод, на каждом шаге которого задействуется спектральный метод для моделирования повторных стохастических интегралов по винеровским процессам.

Следуя порядку изложения, принятому в этой главе, запишем сначала разложение решения

$X(\cdot)$ стохастического дифференциального уравнения Стратоновича (3.2):

$$\begin{aligned}
X(\vartheta + h) &= X(\vartheta) + \underbrace{ha(\vartheta, X(\vartheta)) + \sum_{j_1=1}^s \sigma_{*j_1}(\vartheta, X(\vartheta)) \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1)} f_0(\cdot)}_{\text{---}} + \\
&+ \underbrace{\sum_{j_1, j_2=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \sigma_{*j_2}(\vartheta, X(\vartheta))^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1, j_2)} \mathbb{k}(\cdot)}_{\text{====}} + \frac{h^2}{2} \mathcal{L}_0 a(\vartheta, X(\vartheta)) + \\
&+ \underbrace{\sum_{j_1=1}^s \left[\mathcal{L}_0 \sigma_{*j_1}(\vartheta, X(\vartheta))^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(0j_1)} \mathbb{k}(\cdot) + \mathcal{L}_{j_1} a(\vartheta, X(\vartheta))^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 0)} \mathbb{k}(\cdot) \right]}_{\text{====}} + \\
&+ \underbrace{\sum_{j_1, j_2, j_3=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} \sigma_{*j_3}(\vartheta, X(\vartheta))^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot)}_{\text{====}} + \underbrace{\sum_{j_1, j_2=1}^s \mathcal{L}_0 \mathcal{L}_{j_1} \sigma_{*j_2}(\vartheta, X(\vartheta))^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(0j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot)}_{\text{====}} + \\
&+ \underbrace{\sum_{j_1, j_2=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_0 \sigma_{*j_2}(\vartheta, X(\vartheta))^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 0 j_2)} \mathbb{k}(\cdot)}_{\text{====}} + \underbrace{\sum_{j_1, j_2=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} a(\vartheta, X(\vartheta))^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2 0)} \mathbb{k}(\cdot)}_{\text{====}} + \\
&+ \underbrace{\sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} \mathcal{L}_{j_3} \sigma_{*j_4}(\vartheta, X(\vartheta))^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot)}_{\text{====}} + \dots, \tag{6.95}
\end{aligned}$$

в котором $\vartheta \geq t_0$ и $h > 0$, а функции $a_i(\cdot)$ и $\sigma_{il}(\cdot)$ должны иметь достаточную гладкость, $i = 1, 2, \dots, n$ и $l = 1, 2, \dots, s$, $\mathbb{k}(\cdot)$ — функция с числом аргументов, совпадающим с кратностью повторного стохастического интеграла, задается формулой (4.15):

$$\begin{aligned}
k = 2: \quad & \mathbb{k}(t_1, t_2) = 1(t_2 - t_1), \\
k = 3: \quad & \mathbb{k}(t_1, t_2, t_3) = 1(t_2 - t_1)1(t_3 - t_2), \\
k = 4: \quad & \mathbb{k}(t_1, t_2, t_3, t_4) = 1(t_2 - t_1)1(t_3 - t_2)1(t_4 - t_3), \quad \dots
\end{aligned}$$

Формула (6.95) определяет разложение Тейлора – Стратоновича [300, 337]. В нем

$$\mathcal{L}_0 \psi(t, x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x_i} a_i(t, x), \quad \mathcal{L}_j \psi(t, x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x_i} \sigma_{ij}(t, x), \quad j = 1, \dots, s,$$

а все повторные стохастические интегралы понимаются в смысле Стратоновича, причем для интегралов смешанного типа справедливы соотношения (см. п. 8 замечаний 6.1, а также примеры 6.3 и 6.4):

$$\begin{aligned}
{}^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(0j_1)} \mathbb{k}(\cdot) &= \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1)} f_1(\cdot), & {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 0)} \mathbb{k}(\cdot) &= \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1)} (h - f_1(\cdot)), \\
{}^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(0j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) &= {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}_{10}(\cdot), & {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 0 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) &= {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2)} (\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot)), \\
{}^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2 0)} \mathbb{k}(\cdot) &= {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2)} (h \mathbb{k}(\cdot) - \mathbb{k}_{01}(\cdot)),
\end{aligned}$$

где в правых частях равенств

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= t - \vartheta, & \mathbb{k}_{10}(t_1, t_2) &= (t_1 - \vartheta)1(t_2 - t_1), \\
\mathbb{k}(t_1, t_2) &= 1(t_2 - t_1), & \mathbb{k}_{01}(t_1, t_2) &= (t_2 - \vartheta)1(t_2 - t_1).
\end{aligned}$$

При их подстановке в выражение (6.95) с точностью до знаков получается унифицированное разложение Тейлора – Стратоновича [77, 305]. Отличие состоит в том, что в разложении (6.95) используются повторные стохастические интегралы только от функций вида (4.15), но

часть этих интегралов смешанного типа. В унифицированном разложении интегралы смешанного типа отсутствуют за счет перехода к функциям вида (4.24) с дополнительным условием (4.26). Эти разложения эквивалентны, но последнее содержит меньше типов повторных стохастических интегралов. Например, анализируя записанные в правой части выражения (6.95) слагаемые, можно выделить 9 типов интегралов, а в соответствующем унифицированном разложении их только лишь 7.

Для стохастического дифференциального уравнения Ито (3.1) имеет место аналогичное разложение:

$$\begin{aligned}
X(\vartheta + h) &= X(\vartheta) + hf(\vartheta, X(\vartheta)) + \sum_{j_1=1}^s \sigma_{*j_1}(\vartheta, X(\vartheta)) \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1)} f_0(\cdot) + \\
&+ \sum_{j_1, j_2=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \sigma_{*j_2}(\vartheta, X(\vartheta))^I \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) + \frac{h^2}{2} \mathcal{A}^* f(\vartheta, X(\vartheta)) + \\
&+ \sum_{j_1=1}^s \left[\mathcal{A}^* \sigma_{*j_1}(\vartheta, X(\vartheta))^I \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(0j_1)} \mathbb{k}(\cdot) + \mathcal{L}_{j_1} f(\vartheta, X(\vartheta))^I \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 0)} \mathbb{k}(\cdot) \right] + \\
&+ \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} \sigma_{*j_3}(\vartheta, X(\vartheta))^I \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) + \sum_{j_1, j_2=1}^s \mathcal{A}^* \mathcal{L}_{j_1} \sigma_{*j_2}(\vartheta, X(\vartheta))^I \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(0j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) + \\
&+ \sum_{j_1, j_2=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{A}^* \sigma_{*j_2}(\vartheta, X(\vartheta))^I \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 0 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) + \sum_{j_1, j_2=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} f(\vartheta, X(\vartheta))^I \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2 0)} \mathbb{k}(\cdot) + \\
&+ \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} \mathcal{L}_{j_3} \sigma_{*j_4}(\vartheta, X(\vartheta))^I \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) + \dots, \tag{6.96}
\end{aligned}$$

где функции $f_i(\cdot)$ должны иметь достаточную гладкость, $i = 1, 2, \dots, n$.

Формула (6.96) описывает разложение Тейлора – Ито [300, 337]. Здесь используется обратный производящий оператор \mathcal{A}^* случайного процесса $X(\cdot)$, заданный формулой (3.8), а все повторные стохастические интегралы следует понимать в смысле Ито, что отражено в обозначениях. Для них справедливы аналогичные соотношения (см. п. 5 замечаний 6.8 и пример 6.7):

$$\begin{aligned}
{}^I \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(0j_1)} \mathbb{k}(\cdot) &= \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1)} f_1(\cdot), & {}^I \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 0)} \mathbb{k}(\cdot) &= \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1)} (h - f_1(\cdot)), \\
{}^I \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(0j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) &= {}^I \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}_{10}(\cdot), & {}^I \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 0 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) &= {}^I \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2)} (\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot)), \\
{}^I \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2 0)} \mathbb{k}(\cdot) &= {}^I \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2)} (h \mathbb{k}(\cdot) - \mathbb{k}_{01}(\cdot)).
\end{aligned}$$

Результат их подстановки в формулу (6.96) с точностью до знаков дает унифицированное разложение Тейлора – Ито [77, 305]. Как и в случае унифицированного разложения Тейлора – Стратоновича, унифицированное разложение Тейлора – Ито не содержит интегралов смешанного типа и общее количество типов повторных стохастических интегралов меньше.

Отличие между дифференциальными операторами \mathcal{L}_0 и \mathcal{A}^* отражает правила дифференцирования при нелинейном преобразовании решений стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича и Ито: обычное правило дифференцирования сложной функции и формулу Ито соответственно [4, 77, 300].

Операторы $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_j$, где $j = 1, \dots, s$, и \mathcal{A}^* определены для скалярных функций, в приведенных же разложениях они применяются для вектор-функций по координатам, например

$$\mathcal{L}_0 f(\cdot) = [\mathcal{L}_0 f_1(\cdot) \quad \dots \quad \mathcal{L}_0 f_n(\cdot)]^T,$$

и чтобы избежать путаницы, важно пояснить, что здесь $f_1(\cdot)$ — это коэффициент сноса в уравнении (3.1), т.е. первый элемент вектор-функции $f(\cdot)$ — вектора сноса (см. разд. 3.1), а в соотношениях для повторных стохастических интегралов $f_1(\cdot)$ — это функция одной переменной $f_1(t) = t - \vartheta$.

На основе разложений Тейлора–Стратоновича и Тейлора–Ито построено семейство численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений [4, 77, 240, 300, 305, 321].

Введем равномерную сетку $\{\vartheta_i\}$ с заданным постоянным шагом h — шагом численного интегрирования, определяющую разбиение отрезка $[t_0, T]$:

$$\vartheta_{i+1} = \vartheta_i + h, \quad i = 0, 1, \dots, N-1; \quad \vartheta_0 = t_0, \quad \vartheta_N = T; \quad N = \frac{T - t_0}{h}.$$

Более общий случай переменного шага, задающего разбиение отрезка $[t_0, T]$, также может быть рассмотрен. При численном решении формируется дискретная аппроксимация случайного процесса $X(\cdot)$ в узлах сетки $\{\vartheta_i\}$. Обозначим ее $\{X_i\}$: $X(\vartheta_i) \approx X_i$.

Для численных методов ключевым является то, в каком смысле понимается сходимость и каким является порядок сходимости. Будем говорить, что численный метод имеет порядок среднеквадратической сходимости p , если

$$\max_{i \in \{1, \dots, N\}} (\mathbb{E} |X(\vartheta_i) - X_i|^2)^{\frac{1}{2}} \leq Ch^p,$$

и численный метод имеет порядок сильной сходимости p , если

$$\max_{i \in \{1, \dots, N\}} \mathbb{E} |X(\vartheta_i) - X_i| \leq Ch^p.$$

В обоих определениях предполагается, что $C > 0$ — константа, не зависящая от величины h , и $h \rightarrow 0$. Отметим также, что второе неравенство следует из первого. Это можно показать с помощью неравенства Йенсена или неравенства Коши–Буняковского [37].

Для построения численного метода с порядком среднеквадратической или сильной сходимости p достаточно оставить в правых частях формул (6.95) и (6.96) слагаемые, подчеркнутые $r = 2p$ раз, но при нечетных r старший член разложения, не содержащий стохастических интегралов, нужно брать из формулы (6.96). Например, из разложения (6.96) получаем следующие явные разностные схемы для численного решения стохастического дифференциального уравнения Ито (3.1):

$p = 0.5$ (стохастический метод Эйлера, метод Эйлера–Маруямы):

$$X_{i+1} = X_i + hf(\vartheta_i, X_i) + \sum_{j_1=1}^s \sigma_{*j_1}(\vartheta_i, X_i) \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1)} f_0(\cdot), \quad (6.97)$$

$p = 1.0$ (метод порядка 1.0):

$$X_{i+1} = X_i + hf(\vartheta_i, X_i) + \sum_{j_1=1}^s \sigma_{*j_1}(\vartheta_i, X_i) \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1)} f_0(\cdot) + \sum_{j_1, j_2=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \sigma_{*j_2}(\vartheta_i, X_i)^I \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot), \quad (6.98)$$

$p = 1.5$ (метод порядка 1.5):

$$\begin{aligned}
X_{i+1} = & X_i + hf(\vartheta_i, X_i) + \sum_{j_1=1}^s \sigma_{*j_1}(\vartheta_i, X_i) \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1)} f_0(\cdot) + \sum_{j_1, j_2=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \sigma_{*j_2}(\vartheta_i, X_i)^I \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) + \\
& + \frac{h^2}{2} \mathcal{A}^* f(\vartheta_i, X_i) + \sum_{j_1=1}^s \left[\mathcal{A}^* \sigma_{*j_1}(\vartheta_i, X_i)^I \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(0j_1)} \mathbb{k}(\cdot) + \mathcal{L}_{j_1} f(\vartheta_i, X_i)^I \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 0)} \mathbb{k}(\cdot) \right] + \\
& + \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} \sigma_{*j_3}(\vartheta_i, X_i)^I \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot), \tag{6.99}
\end{aligned}$$

$p = 2.0$ (метод порядка 2.0):

$$\begin{aligned}
X_{i+1} = & X_i + hf(\vartheta_i, X_i) + \sum_{j_1=1}^s \sigma_{*j_1}(\vartheta_i, X_i) \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1)} f_0(\cdot) + \sum_{j_1, j_2=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \sigma_{*j_2}(\vartheta_i, X_i)^I \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) + \\
& + \frac{h^2}{2} \mathcal{A}^* f(\vartheta_i, X_i) + \sum_{j_1=1}^s \left[\mathcal{A}^* \sigma_{*j_1}(\vartheta_i, X_i)^I \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(0j_1)} \mathbb{k}(\cdot) + \mathcal{L}_{j_1} f(\vartheta_i, X_i)^I \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 0)} \mathbb{k}(\cdot) \right] + \\
& + \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} \sigma_{*j_3}(\vartheta_i, X_i)^I \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) + \sum_{j_1, j_2=1}^s \mathcal{A}^* \mathcal{L}_{j_1} \sigma_{*j_2}(\vartheta_i, X_i)^I \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(0j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) + \\
& + \sum_{j_1, j_2=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{A}^* \sigma_{*j_2}(\vartheta_i, X_i)^I \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 0 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) + \sum_{j_1, j_2=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} f(\vartheta_i, X_i)^I \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2 0)} \mathbb{k}(\cdot) + \\
& + \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} \mathcal{L}_{j_3} \sigma_{*j_4}(\vartheta_i, X_i)^I \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot), \tag{6.100}
\end{aligned}$$

и аналогично для стохастического дифференциального уравнения Стратоновича (3.2):

$p = 1.0$ (метод порядка 1.0):

$$\begin{aligned}
X_{i+1} = & X_i + ha(\vartheta_i, X_i) + \sum_{j_1=1}^s \sigma_{*j_1}(\vartheta_i, X_i) \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1)} f_0(\cdot) + \sum_{j_1, j_2=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \sigma_{*j_2}(\vartheta_i, X_i)^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot), \tag{6.101}
\end{aligned}$$

$p = 1.5$ (метод порядка 1.5):

$$\begin{aligned}
X_{i+1} = & X_i + ha(\vartheta_i, X_i) + \sum_{j_1=1}^s \sigma_{*j_1}(\vartheta_i, X_i) \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1)} f_0(\cdot) + \sum_{j_1, j_2=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \sigma_{*j_2}(\vartheta_i, X_i)^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) + \\
& + \frac{h^2}{2} \mathcal{A}^* f(\vartheta_i, X_i) + \sum_{j_1=1}^s \left[\mathcal{L}_0 \sigma_{*j_1}(\vartheta_i, X_i)^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(0j_1)} \mathbb{k}(\cdot) + \mathcal{L}_{j_1} a(\vartheta_i, X_i)^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 0)} \mathbb{k}(\cdot) \right] + \\
& + \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} \sigma_{*j_3}(\vartheta_i, X_i)^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot), \tag{6.102}
\end{aligned}$$

$p = 2.0$ (метод порядка 2.0):

$$\begin{aligned}
X_{i+1} = & X_i + ha(\vartheta_i, X_i) + \sum_{j_1=1}^s \sigma_{*j_1}(\vartheta_i, X_i) \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1)} f_0(\cdot) + \sum_{j_1, j_2=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \sigma_{*j_2}(\vartheta_i, X_i)^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) + \\
& + \frac{h^2}{2} \mathcal{L}_0 a(\vartheta_i, X_i) + \sum_{j_1=1}^s \left[\mathcal{L}_0 \sigma_{*j_1}(\vartheta_i, X_i)^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(0j_1)} \mathbb{k}(\cdot) + \mathcal{L}_{j_1} a(\vartheta_i, X_i)^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 0)} \mathbb{k}(\cdot) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} \sigma_{*j_3}(\vartheta_i, X_i)^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) + \sum_{j_1, j_2=1}^s \mathcal{L}_0 \mathcal{L}_{j_1} \sigma_{*j_2}(\vartheta_i, X_i)^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(0 j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) + \\
& + \sum_{j_1, j_2=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_0 \sigma_{*j_2}(\vartheta_i, X_i)^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 0 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) + \sum_{j_1, j_2=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} a(\vartheta_i, X_i)^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2 0)} \mathbb{k}(\cdot) + \\
& + \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} \mathcal{L}_{j_3} \sigma_{*j_4}(\vartheta_i, X_i)^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot). \tag{6.103}
\end{aligned}$$

Отметим, что моделирование повторных стохастических интегралов на отрезке $[\vartheta, \vartheta + h]$ не отличается от моделирования повторных стохастических интегралов на отрезке $[0, h]$. Вообще говоря, достаточно ограничиться отрезком $[0, 1]$, а величину шага h учитывать как числовой коэффициент (см. свойства повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито в разд. 6.1 и 6.2). Тогда согласно формуле (6.15) с учетом п. 8 замечаний 6.1 и формуле (6.55) с учетом п. 5 замечаний 6.8 получаем соответствие между числовыми коэффициентами и мультимножествами \bar{J} , определяющими повторные стохастические интегралы от функций $\mathbb{k}(\cdot)$ в разложениях (6.95) и (6.96):

$$\begin{aligned}
h^{0.5}: & \quad (j_1), & h^{1.0}: & \quad (j_1 j_2), \\
h^{1.5}: & \quad (0 j_1), (j_1 0), (j_1 j_2 j_3), & h^{2.0}: & \quad (0 j_1 j_2), (j_1 0 j_2), (j_1 j_2 0), (j_1 j_2 j_3 j_4),
\end{aligned}$$

и эти числовые коэффициенты, очевидно, формируют порядок p среднеквадратической или сильной сходимости численного метода.

Точное моделирование некоторых повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито, а именно

$$\begin{array}{cccc}
\mathcal{J}_{[0,1]}^{W(j)} f_0(\cdot), & \mathcal{J}_{[0,1]}^{W(j)} f_1(\cdot), & {}^S \mathcal{J}_{[0,1]}^{W(jj)} \mathbb{k}(\cdot), & {}^I \mathcal{J}_{[0,1]}^{W(jj)} \mathbb{k}(\cdot), \\
{}^S \mathcal{J}_{[0,1]}^{W(jjj)} \mathbb{k}(\cdot), & {}^I \mathcal{J}_{[0,1]}^{W(jjj)} \mathbb{k}(\cdot), & {}^S \mathcal{J}_{[0,1]}^{W(jjjj)} \mathbb{k}(\cdot), & {}^I \mathcal{J}_{[0,1]}^{W(jjjj)} \mathbb{k}(\cdot)
\end{array}$$

не составляет проблемы (см. примеры 2.5, 2.12 и 5.5), $j = 1, \dots, s$. Для остальных интегралов или же в общем случае при приближенном моделировании может применяться алгоритм 5.1 из разд. 5.8 либо алгоритмы 6.2 и 6.3 из разд. 6.4, построенные на основе спектральной формы математического описания. Алгоритмы 6.2 и 6.3 применяются с минимальными изменениями для моделирования повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито смешанного типа. При моделировании повторных стохастических интегралов на основе спектральной формы математического описания будем называть соответствующие методы численно-спектральными методами решения стохастических дифференциальных уравнений.

Замечания 6.12.

1. Выше представлены разностные схемы для численного решения стохастических дифференциальных уравнений: формула (6.97) стохастического метода Эйлера, формулы (6.98) и (6.101) метода порядка 1.0, формулы (6.99) и (6.102) метода порядка 1.5, а также формулы (6.100) и (6.103) метода порядка 2.0. Все они относятся к явным одношаговым методам, основанным на разложениях (6.95) и (6.96). Учет дополнительных слагаемых в разложении позволяет строить явные одношаговые методы с порядками сходимости 2.5, 3.0 и т.д. Кроме них существуют явные одношаговые конечно-разностные численные методы (предпо-

лагающие конечно-разностную аппроксимацию производных детерминированных функций), неявные одношаговые численные методы, явные и неявные многошаговые численные методы [4, 77, 93, 240, 300, 305, 321].

2. Переход от разложений Тейлора–Стратоновича и Тейлора–Ито к соответствующим унифицированным разложениям может быть мотивирован не только меньшим числом используемых в них типов повторных стохастических интегралов, но и меньшими вычислительными затратами для их моделирования за счет сокращения кратности некоторых интегралов. В спектральной форме математического описания переход к унифицированным разложениям базируется, например, на формулах (1.91), полученных в примере 1.10 (см. также пример 6.4).

3. Приближенное моделирование повторных стохастических интегралов Стратоновича или Ито предполагает выбор порядка усечения спектральных характеристик L . Он может выбираться для каждой кратности k повторных стохастических интегралов и для каждого интеграла отдельно или же быть единым для всех интегралов. В этой и предыдущих главах приведено много примеров, в которых явно или косвенно вычислена среднеквадратическая погрешность аппроксимации типовых повторных стохастических интегралов. Здесь под косвенным вычислением понимается нахождение погрешности аппроксимации функции одной или многих переменных, через которую выражается среднеквадратическая погрешность аппроксимации конкретного повторного стохастического интеграла Стратоновича или Ито (см. разд. 5.7).

Так, аппроксимации повторных стохастических интегралов, которые используются в методах порядка 1.0, соответствуют примеры 1.21 и 1.22, для методов порядка 1.5 — примеры 1.20 и 4.13, для методов порядка 2.0 — примеры 1.23, 4.12 и 4.13. Для некоторых симметризованных функций по отношению к функции $\mathbb{k}(\cdot)$ и, как следствие, для соответствующих кратных и повторных стохастических интегралов (см. разд. 5.5) рекомендуется пример 4.16. В примере 5.9 найдена среднеквадратическая погрешность аппроксимации повторных стохастических интегралов (как абсолютная, так и относительная) для методов порядка 1.0, 1.5 и 2.0. Чтобы достичь более высоких порядков сходимости, требуются повторные стохастические интегралы, среднеквадратическая погрешность аппроксимации которых может быть найдена с помощью результатов из примеров 4.14 и 4.15. Во всех перечисленных примерах использовались пять базисных систем: полиномы Лежандра (1.5), косинусоиды (1.6), функции Уолша (1.7), функции Хаара (1.8) и тригонометрические функции (1.9).

Методика выбора порядка усечения спектральных характеристик L описана в работах [77, 310, 311]. Порядок усечения L должен выбираться из условия, чтобы среднеквадратические погрешности аппроксимации задействованных повторных стохастических интегралов не превосходили величины Ch^{r+1} , где $C > 0$ — константа, не зависящая от величины h , $r = 2p$ — удвоенный порядок сходимости численного метода ($r = 2$ для метода порядка 1.0, $r = 3$ для метода порядка 1.5, $r = 4$ для метода порядка 2.0 и т.д.). Константа C связывает порядки усечения для всех повторных стохастических интегралов, которые используются в конкретном численном методе, обеспечивая их согласованный выбор. Эта методика иллюстрируется в работе [311] при выборе полиномов Лежандра в качестве базисной системы.

4. Моделирование повторных стохастических интегралов с помощью алгоритмов 6.2 и 6.3 уступает по точности моделированию повторных стохастических интегралов согласно алгоритму 5.1. Однако важное преимущество алгоритмов 6.2 и 6.3 состоит в том, что достаточно найти усеченные спектральные характеристики $\mathbf{1}$, P^{-1} , A и V (одну матрицу-столбец, две плоские и одну пространственную матрицы) для моделирования повторных стохастических интегралов произвольной кратности, которые используются в численных методах решения стохастических дифференциальных уравнений, причем необходимость в спектральной характеристике V возникает для численно-спектральных методов с порядком сходимости $p \geq 1.5$, а спектральная характеристика A нужна при использовании унифицированных разложений Тейлора – Стратоновича и Тейлора – Ито также при $p \geq 1.5$. Алгоритм 5.1 требует нахождения усеченных спектральных характеристик \mathbb{K} функций (4.15) для разных значений k , что более трудоемко.

При использовании унифицированных разложений дополнительно нужна спектральная характеристика F функции $f_1(t) = t - \vartheta$, но ее можно выразить в виде (6.28). Кроме того, для базисных систем (1.5) – (1.9) она отличается от столбцов спектральных характеристик A или P^{-1} с номером $j = 0$ только числовым коэффициентом \sqrt{h} , а при $h = 1$ совпадает с ними (см. разд. 1.5 и 1.6). Чтобы применить алгоритм 5.1, необходимо найти усеченные спектральные характеристики $\mathbb{K}^{n_1 \dots n_k}$ функций (4.24) с дополнительным условием (4.26) для разных значений k и n_1, \dots, n_k .

5. В методе Мильштейна при $j_1 \neq j_2$ повторные стохастические интегралы кратности $k = 2$ аппроксимируются следующим образом [93, 321]:

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2)}} \mathbb{K}(\cdot) &= {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{K}(\cdot) \approx \frac{h}{2} \zeta^{(j_1)} \zeta^{(j_2)} + \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^n \frac{\zeta^{(j_1)} \xi_i^{(j_2)} - \xi_i^{(j_1)} \zeta^{(j_2)}}{i} + \\ &+ \frac{h}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i^{(j_1)} \eta_i^{(j_2)} - \eta_i^{(j_1)} \xi_i^{(j_2)}}{i} + h \left\{ \frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \right\}^{\frac{1}{2}} (\zeta^{(j_1)} \xi_0^{(j_2)} - \xi_0^{(j_1)} \zeta^{(j_2)}), \end{aligned}$$

где случайные величины $\zeta^{(j)}$, $\xi_i^{(j)}$ при $i = 0, 1, \dots, n$ и $\eta_i^{(j)}$ при $i = 1, \dots, n$ имеют стандартное нормальное распределение и независимы в совокупности для $j = j_1$ и $j = j_2$, а n — заданное натуральное число. Это выражение соответствует выбору тригонометрических функций (1.9) в качестве базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2([\vartheta, \vartheta + h])$ с учетом п. 1 замечаний 1.1, но отличается от частичной суммы ряда $\mathcal{V}_{j_2}^T P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}$ слагаемым

$$h \left\{ \frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \right\}^{\frac{1}{2}} (\zeta^{(j_1)} \xi_0^{(j_2)} - \xi_0^{(j_1)} \zeta^{(j_2)}),$$

а среднеквадратическая погрешность аппроксимации (см. разд. 5.7) определяется выражением

$$I_{\mathcal{E}_k}^{W(j_1 j_2)} = h^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \right).$$

Эту погрешность полезно сравнить с данными из табл. 5.5 при условии $L = 2(n + 1)$ и данными из табл. 5.20, она приведена в табл. 6.51 для $n = 1, 3, 7, 15, 31$, что отвечает значениям $L = 4, 8, 16, 32, 64$. Такой вариант по точности аппроксимации близок выбору косинусов (1.6), которые не требуют введения каких-либо дополнительных слагаемых для достижения такого

же результата.

Таблица 6.51. Погрешности аппроксимации $I_{\varepsilon_{\mathbb{k}}}^W(j_1, j_2)$ и $S_{\varepsilon_{\mathbb{k}}}^W(j_1, j_2)$ ($k = 2, j_1 \neq j_2$) в методе Мильштейна

Базис	$n = 1$ ($L = 4$)	$n = 3$ ($L = 8$)	$n = 7$ ($L = 16$)	$n = 15$ ($L = 32$)	$n = 31$ ($L = 64$)
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$	0.032673	0.014379	0.006745	0.003267	0.001608

Напомним, что без указанного выше слагаемого точность аппроксимации повторных стохастических интегралов $S_{[\vartheta, \vartheta+h]}^W(j_1, j_2)_{\mathbb{k}}(\cdot)$ и $I_{[\vartheta, \vartheta+h]}^W(j_1, j_2)_{\mathbb{k}}(\cdot)$ при выборе тригонометрических функций и $j_1 \neq j_2$ наименьшая среди базисных систем (1.5)–(1.9). Аппроксимирующая формула для повторных стохастических интегралов в методе Мильштейна только обозначениями отличается от аппроксимации, которая получается с помощью методики уменьшения среднеквадратических погрешностей (см. п. 3 замечаний 5.6). Ее применение иллюстрируется в примере 5.10, там же показано, откуда появляется константа $1/12$.

6. Аprobация алгоритма 5.1 проведена в примере 5.11, а аprobация алгоритмов 6.2 и 6.3 — в примерах 6.13 и 6.14. В них оценивались первые два момента повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито, которые нужны для реализации численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений с порядками среднеквадратической и сильной сходимости $p = 1.0, 1.5, 2.0$ при использовании базисных систем (1.5)–(1.9).

Пример 6.16. Найти порядки усечения L для представления повторных стохастических интегралов, которые используются в численных методах с порядками среднеквадратической и сильной сходимости $p = 1.0, 1.5, 2.0$ и шагом численного интегрирования $h = 0.1$ для полиномов Лежандра (1.5), косинусоид (1.6) и тригонометрических функций (1.9).

□ Воспользуемся методикой выбора значений L из работ [77, 310, 311] (см. п. 3 замечаний 6.12), т.е. подберем порядки усечения L таким образом, чтобы среднеквадратические погрешности аппроксимации повторных стохастических интегралов не превосходили величины Ch^{r+1} , где $C > 0$ — константа, не зависящая от величины h , $r = 2p$ — удвоенный порядок сходимости численного метода. Фактически, решается обратная задача по отношению к задаче нахождения среднеквадратических погрешностей аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито (см. пример 5.9).

Положим $C = 1$ и найдем минимальные значения L , удовлетворяющие сформулированному выше условию. Результаты расчетов представим в виде таблиц. Табл. 6.52 содержит данные для методов с порядками сходимости $p = 1.0, 1.5, 2.0$ (в случае $j_1 = j_2$ достаточно взять $L = 1$ для точного представления интеграла при любых C и h), табл. 6.53 и 6.54 — для методов с порядками сходимости $p = 1.5, 2.0$ (для данных в табл. 6.54 использован следующий порядок: j_1, j_2, j_3 различны / $j_1 = j_2 \neq j_3$ или $j_1 \neq j_2 = j_3$ / $j_1 = j_3 \neq j_2$), табл. 6.55 и 6.56 — только для методов с порядком сходимости $p = 2.0$ (любые комбинации величин j_1, j_2, j_3, j_4).

В общем случае порядок усечения L , очевидно, зависит от C и h . Например, при заданном значении C и величине $h = 0.01$ порядки усечения для методов с порядком сходимости $p = 2.0$

указаны в табл. 6.57 и 6.58. Для данных в табл. 6.57 принят следующий порядок: ${}^I\mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(0j_1j_2)}\mathbb{k}(\cdot)$ / ${}^I\mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_10j_2)}\mathbb{k}(\cdot)$ / ${}^I\mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1j_20)}\mathbb{k}(\cdot)$ (для краткости описан только случай $j_1 \neq j_2$), а в табл. 6.58 — j_1, j_2, j_3, j_4 различны / $j_1 = j_2$; j_2, j_3, j_4 различны или $j_2 = j_3$; j_1, j_2, j_4 различны или $j_3 = j_4$; j_1, j_2, j_3 различны / $j_1 = j_2 \neq j_3 = j_4$ / $j_1 = j_2 = j_3 \neq j_4$ или $j_1 \neq j_2 = j_3 = j_4$.

В таблицах отражены только повторные стохастические интегралы Ито и вариант, соответствующий применению алгоритма 5.1, когда повторные стохастические интегралы смешанного типа от функций вида (4.15) заменяются на повторные стохастические интегралы от функций вида (4.24) с дополнительным условием (4.26). Для повторных стохастических интегралов Стратоновича результаты почти не отличаются. Различия появляются только при выборе тригонометрических функций в качестве базисной системы, которые вряд ли целесообразно применять, так как они не обеспечивают высокой точности аппроксимации в отличие от полиномов Лежандра и косинусоид. Например, для повторных стохастических интегралов Стратоновича вместо значений 21/16/21 в табл. 6.54 будут значения 21/18/21, а вместо значений 9/7/5/5 в табл. 6.58 — значения 9/9/6/7.

Погрешность аппроксимации повторных стохастических интегралов при применении алгоритмов 6.2 и 6.3 выше, но порядок усечения увеличивается только для тригонометрических функций. Например, вместо значений 21/16/21 в табл. 6.54 будут значения 24/18/26, а вместо значений 7/6/7 в табл. 6.57 — значения 8/8/8. ■

Пример 6.17. Апробировать численно-спектральные методы решения стохастических дифференциальных уравнений на основе примера 3.7, используя полиномы Лежандра (1.5) и косинусоиды (1.6).

□ Напомним (см. пример 3.7), что рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение Ито (3.7). Соответствующее ему стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича имеет вид

$$dX(t) = X(t) \times d_{1/2}W(t) = (C^1 X(t) \circ dW_1(t) + C^2 X(t) \circ dW_2(t) + C^3 X(t) \circ dW_3(t)), \quad (6.104)$$

$$t \in \mathbb{T} = [0, 1], \quad X(0) = X_0 = [0 \ 1 \ 2]^T,$$

в котором

$$X(t) = [X_1(t) \ X_2(t) \ X_3(t)]^T, \quad W(t) = [W_1(t) \ W_2(t) \ W_3(t)]^T,$$

$$C^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и $W_1(\cdot), W_2(\cdot), W_3(\cdot)$ — независимые стандартные винеровские процессы.

Ограничимся численно-спектральными методами, построенными на основе разложения Тейлора–Стратоновича, поскольку, во-первых, методы на основе разложения Тейлора–Ито дают тот же результат, а во-вторых, в этом примере формулы (6.101)–(6.103) принимают более простой вид по сравнению с формулами (6.98)–(6.100).

Далее записываем необходимые соотношения для применения численно-спектральных ме-

Таблица 6.52. Порядки усечения L для ${}^I\mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot)$ ($j_1 \neq j_2$)

Базис	$p = 1.0$	$p = 1.5$	$p = 2.0$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	2	13	126
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	2	12	104
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	3	31	304

Таблица 6.53. Порядки усечения L для ${}^I\mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(0j_1)} \mathbb{k}(\cdot)$ и ${}^I\mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 0)} \mathbb{k}(\cdot)$

Базис	$p = 1.0$	$p = 1.5$	$p = 2.0$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	—	1	1
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	—	2	2
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	—	2	10

Таблица 6.54. Порядки усечения L для ${}^I\mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot)$

Базис	$p = 1.0$	$p = 1.5$	$p = 2.0$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	—	2/2/2	14/7/14
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	—	2/2/2	12/7/12
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	—	3/2/2	21/16/21

Таблица 6.55. Порядки усечения L для ${}^I\mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(0j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot)$, ${}^I\mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 0 j_2)} \mathbb{k}(\cdot)$ и ${}^I\mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2 0)} \mathbb{k}(\cdot)$

Базис	$p = 1.0$	$p = 1.5$	$p = 2.0$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	—	—	1
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	—	—	1
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	—	—	1

Таблица 6.56. Порядки усечения L для ${}^I\mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot)$

Базис	$p = 1.0$	$p = 1.5$	$p = 2.0$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	—	—	1
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	—	—	1
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	—	—	1

Таблица 6.57. Порядки усечения L для ${}^I\mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(0j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot)$, ${}^I\mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 0 j_2)} \mathbb{k}(\cdot)$ и ${}^I\mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2 0)} \mathbb{k}(\cdot)$

Базис	$p = 1.0$	$p = 1.5$	$p = 2.0$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	—	—	5/2/5
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	—	—	5/2/5
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	—	—	7/6/7

Таблица 6.58. Порядки усечения L для ${}^I\mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot)$

Базис	$p = 1.0$	$p = 1.5$	$p = 2.0$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	—	—	7/5/3/3
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	—	—	7/5/3/3
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	—	—	9/7/5/5

ТООДОВ:

$$a(t, x) = \bar{O}_3, \quad \mathcal{L}_0 a(t, x) = \bar{O}_3, \quad f(t, x) = -x, \quad \mathcal{A}^* f(t, x) = x, \quad \sigma_{*j_1}(t, x) = C^{j_1} x,$$

$$\mathcal{L}_{j_1} \sigma_{*j_2}(t, x) = C^{j_2} C^{j_1} x, \quad \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} \sigma_{*j_3}(t, x) = C^{j_3} C^{j_2} C^{j_1} x, \quad \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} \mathcal{L}_{j_3} \sigma_{*j_4}(t, x) = C^{j_4} C^{j_3} C^{j_2} C^{j_1} x,$$

где \bar{O}_3 — нулевая матрица-столбец размеров 3×1 и $j_1, j_2, j_3, j_4 = 1, 2, 3$.

Целесообразно принять во внимание равенство $C^i C^j C^k = O_3$, справедливое при условии $i = k \neq j$ [53], где O_3 — нулевая матрица порядка 3, что позволяет сократить количество моделируемых повторных стохастических интегралов.

Точное решение этого уравнения с вероятностью 1 удовлетворяет условию $|X(t)|^2 = |X_0|^2 = 5$ для любых $t \in \mathbb{T}$, однако численное решение из-за погрешности этому условию может не удовлетворять и за характеристику точности метода допустимо принять величину $\varepsilon = E||X(T)|^2 - |X_0|^2|$, где $T = 1$ — правая граница отрезка \mathbb{T} .

С помощью стохастического метода Эйлера (6.97), методов (6.101), (6.102) и (6.103) порядков 1.0, 1.5 и 2.0 соответственно моделировались реализации дискретной аппроксимации $\{X_i^k\}_{k=1}^M$, $i = 1, \dots, N$, векторного случайного процесса $X(\cdot)$, где $M = 10^6$ — объем выборки, $N = 1/h$ соответствует моменту времени T , шаги численного интегрирования $h = 0.1, 0.05, 0.025$. Для моделирования повторных стохастических интегралов Стратоновича использовался алгоритм 6.2, порядки усечения спектральных характеристик $L = 8$. Тогда погрешность оценивается величиной

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M ||X_N^k|^2 - 5|.$$

Результаты расчетов при выборе полиномов Лежандра в качестве базисной системы пространства $L_2(\mathbb{T})$ приведены в табл. 6.59, а при выборе косинусоид — в табл. 6.60. Они очень близки и отличия продиктованы не столько методической составляющей погрешности, которая обусловлена усечением спектральных характеристик, сколько наличием статистической составляющей погрешности.

Таблица 6.59. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}$, полиномы Лежандра, $M = 10^6$

Метод	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
Стохастический метод Эйлера	2.426639	1.736675	1.240764
Метод порядка 1.0	1.705126	0.798418	0.385190
Метод порядка 1.5	0.227283	0.086848	0.032848
Метод порядка 2.0	0.082719	0.022371	0.005795

Таблица 6.60. Погрешности аппроксимации $\bar{\varepsilon}$, косинусоиды, $M = 10^6$

Метод	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
Стохастический метод Эйлера	2.429597	1.735973	1.240797
Метод порядка 1.0	1.707077	0.799061	0.385504
Метод порядка 1.5	0.228268	0.086977	0.032777
Метод порядка 2.0	0.082128	0.022232	0.005755

Представленные результаты вычислений соответствуют порядкам среднеквадратической или сильной сходимости используемых численных методов, т.е. уменьшение шага численного интегрирования в 2 раза приводит к сокращению погрешности примерно в 2^p раз, где p — порядок сходимости метода: $p = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$. Однако в данном примере сравнение не проводится с точным решением, а рассматривается точность попадания траекторий случайного процесса $X(\cdot)$ на многообразии (сферу) [10, 241]. ■

Выводы по главе 6

1. Получены спектральные представления повторных стохастических интегралов Стратоновича по винеровским процессам, включая интегралы смешанного типа.
2. Получены спектральные представления повторных стохастических интегралов Ито по винеровским процессам, включая интегралы смешанного типа.
3. Детально разобраны частные случаи повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито второй, третьей и четвертой кратностей. Доказаны теоремы, показывающие эквивалентность полученных спектральных представлений и известных разложений.
4. Сформированы алгоритмы статистического моделирования повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито на основе их спектральных представлений.
5. На основе спектральных представлений повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито предложен численно-спектральный метод анализа и статистического моделирования нелинейных непрерывных стохастических систем.

Основные результаты опубликованы в работах [11, 151, 167, 168, 342, 344, 345, 347].

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА АНАЛИЗА И СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Программное обеспечение спектральных преобразований и спектрального метода реализовано в системе компьютерной математики Mathcad. Оно имеет модульную структуру (насколько такую структуру возможно реализовать в Mathcad).

Это прежде всего модули (отдельные файлы для Mathcad) с общими функциями, которых нет в перечне встроенных функций, и программы спектрального метода, реализация которых не зависит от конкретной базисной системы, например программы численного расчета спектральных характеристик функций и линейных операторов или обратное спектральное преобразование. Такой подход позволяет задать только базисные функции и в первом приближении сразу получить необходимые спектральные характеристики, дополняя набор программ или заменяя имеющиеся программы по мере необходимости. В этом состоит принципиальное отличие от используемого ранее программного обеспечения спектрального метода [179, 200], также реализованного в Mathcad.

Для каждой базисной системы сформирован отдельный модуль, в котором определены базисные функции и добавлены программы для нахождения спектральных характеристик типовых функций и линейных операторов, спектральной характеристики оператора умножения функций, нестационарных спектральных плотностей типовых случайных процессов. Все спектральные характеристики являются усеченными. Остальные модули — это программы для конкретных примеров, приведенных в работе: нахождение погрешностей аппроксимации функций, моделирование типовых случайных процессов, моделирование кратных и повторных стохастических интегралов.

Отметим, что во многих программах осознанно не используется такая оптимизация, как введение вспомогательных переменных (за редким исключением), чтобы эти программы визуально в значительной степени соответствовали формулам из основной части работы, по возможности используются те же обозначения.

Часть соотношений для расчета спектральных характеристик взяты из [210, 220–222, 228], а часть получена автором. Некоторые программы заимствованы из специализированного пакета расширения Mathcad [179, 200].

Программное обеспечение спектральных преобразований и спектрального метода также реализовано в виде приложения для операционной системы Microsoft Windows на языке

Pascal/Delphi с применением различных технологий параллельного программирования (для центральных процессоров и видеоадаптеров). Его описание приведено в [179, 185].

П.1. Программы для главы 1

Базисные системы

В основе спектральной формы математического описания лежит представление функций в виде рядов по функциям базисной системы. Для представления функций одной переменной, заданных на отрезке $\Gamma = [0, T]$, такие базисные системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ описаны в разд. 1.1. Это полиномы Лежандра (1.5), косинусоиды (1.6), функции Уолша (1.7), функции Хаара (1.8) и тригонометрические функции (1.9). Программы $q(i, t)$ для них приведены на рис. П.1–П.5.

$$C(k, i) := \frac{k!}{i!(k-i)!} \quad l(i, k) := (-1)^{i-k} C(i+k, i) C(i, i-k)$$

$$q(i, t) := \sqrt{\frac{2i+1}{T}} \sum_{k=0}^i \left[l(i, k) \left(\frac{t}{T}\right)^k \right]$$

Рис. П.1. Полиномы Лежандра

На этих рисунках есть и все вспомогательные функции, например коэффициенты полиномов Лежандра (см. рис. П.1) или функции Радемахера, которые требуются для определения функций Уолша (см. рис. П.3).

$$q(i, t) := \sqrt{\frac{1+(i>0)}{T}} \cos\left(\frac{i\pi t}{T}\right)$$

Рис. П.2. Косинусоиды

$$\text{Rademacher}(k, t) := (-1)^{\text{floor}\left(\frac{2^k t}{T}\right)} \quad q(i, t) := \frac{1}{\sqrt{T}} \left| \begin{array}{l} c \leftarrow 1 \\ \text{while } i \neq 0 \\ \quad \left| \begin{array}{l} k \leftarrow \text{floor}(\log(i, 2)) \\ i \leftarrow i - 2^k \\ c \leftarrow c \cdot \text{Rademacher}(k+1, t) \end{array} \right. \\ c \end{array} \right.$$

Рис. П.3. Функции Уолша

$$\chi(\tau) := \begin{cases} 0 & \text{if } (\tau < 0) \vee (\tau \geq 1) \\ 1 & \text{if } 0 \leq \tau < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{if } \frac{1}{2} \leq \tau < 1 \end{cases} \quad q(i, t) := \left| \begin{array}{l} c \leftarrow \sqrt{\frac{1}{T}} \text{ if } i = 0 \\ \text{otherwise} \\ \quad \left| \begin{array}{l} n \leftarrow \text{floor}(\log(i, 2)), m \leftarrow \text{floor}(\log(i+1, 2)) \\ c \leftarrow -\sqrt{\frac{2^n}{T}} \text{ if } (t = T) \wedge (m = \text{ceil}(m)) \\ \text{otherwise} \\ \quad \left| \begin{array}{l} k \leftarrow i - 2^n \\ c \leftarrow \sqrt{\frac{2^n}{T}} \chi\left(\frac{2^n t}{T} - k\right) \end{array} \right. \end{array} \right. \\ c \end{array} \right.$$

Рис. П.4. Функции Хаара

Программа для функций Хаара (см. рис. П.4) сформирована на основе определения, предполагающего сжатия, сдвиги и нормировку порождающей функции (см. п. 3 замечаний 1.1), так как это определение проще для программной реализации, чем формула (1.8).

Предполагается, что до вызова любой из представленных здесь и далее программ инициализируется переменная T — правая граница отрезка \mathbb{T} .

Отметим, что базисные системы для представления функций одной переменной, заданных на отрезке $\mathbb{T} = [t_0, T]$, можно получить с помощью свойств базисных систем, а именно свойства сдвига и масштабирования (см. свойства базисных систем в разд. 1.1 и п. 1 замечаний 1.1). Везде далее полагается $t_0 = 0$.

$$q(i, t) := \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{T}} & \text{if } i = 0 \\ \text{otherwise} \\ \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{i\pi t}{T}\right) & \text{if } \text{mod}(i, 2) = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left[\frac{(i+1)\pi t}{T}\right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

Рис. П.5. Тригонометрические функции

Спектральные характеристики функций и линейных функционалов

В этой части начнем с программ `spF(L,f)` и `splnvert(t,F)` для нахождения спектральных характеристик F функций $f(\cdot)$ (спектральное преобразование) и для реализации формулы обращения (обратное спектральное преобразование). При спектральном преобразовании в данном случае (см. рис. П.6) применяется либо численное интегрирование, либо задействуется символьный процессор `Mathcad` в зависимости от контекста.

$$\text{spF}(L, f) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..L-1 \\ c_i \leftarrow \int_0^T f(t) q(i, t) dt \end{cases} \quad \text{splnvert}(t, F) := \sum_{i=0}^{\text{rows}(F)-1} (F_i, q(i, t))$$

Рис. П.6. Спектральная характеристика F и формула обращения

Аналогичные программы `spF2(L,f)` и `splnvert2(t,τ,F)`, но для двумерных спектральных характеристик функций двух переменных $f(\cdot)$ (см. разд. 1.2) демонстрируются на рис. П.7.

$$\text{spF2}(L, f) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..L-1 \\ \text{for } j \in 0..L-1 \\ c_{i,j} \leftarrow \int_0^T q(i, t) \int_0^T f(t, \tau) q(j, \tau) d\tau dt \end{cases}$$

$$\text{splnvert2}(t, \tau, F) := \sum_{i=0}^{\text{rows}(F)-1} \sum_{j=0}^{\text{cols}(F)-1} (F_{i,j}, q(i, t) q(j, \tau))$$

Рис. П.7. Двумерная спектральная характеристика F и формула обращения

$$\text{spF1(L)} := \sqrt{T} \left| \begin{array}{l} c_0 \leftarrow 1 \\ \text{for } i \in 1..L-1 \\ c_i \leftarrow 0 \\ c \end{array} \right.$$

Далее перейдем к программам для нахождения спектральных характеристик некоторых элементарных функций. Простейшая из них — это функция $f_0(t) \equiv 1$. Спектральная характеристика **1** для нее найдена в примере 1.1, она одинакова для базисных систем (1.5)–(1.9). Соответствующая программа **spF1(L)**

Рис. П.8. Спектральная характеристика **1**

показана на рис. П.8. В ней, как и в следующих программах, параметр **L** — это порядок усечения спектральных характеристик.

Кроме того, **1** — спектральная характеристика линейного функционала \mathcal{J}_T , ставящего в соответствие функции $f(\cdot)$ интеграл от этой функции по отрезку **T** (см. примеры линейных функционалов на множестве функций одной переменной в разд. 1.1).

В примерах 1.2 и 1.3 найдены спектральные характеристики F^n функций $f_n(t) = t^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, относительно полиномов Лежандра (1.5) и косинусоид (1.6), соответствующие программы **spFtn(L,n)** можно найти на рис. П.9 и П.10, а программы **spFt1(L)**, **spFt2(L)** и **spFt3(L)** для частных случаев $n = 1, 2, 3$ — на рис. П.11 и П.12.

$$\text{spFtn(L,n)} := T^n \sqrt{T} \left| \begin{array}{l} c_0 \leftarrow \frac{1}{n+1} \\ c_1 \leftarrow \frac{2}{n+2} - \frac{1}{n+1} \\ \text{for } i \in 2..L-1 \quad \text{if } L > 1 \\ c_i \leftarrow -\frac{(2i-1)c_{i-1} + (i-n-2)c_{i-2}}{i+n+1} \\ \text{for } i \in 0..L-1 \\ c_i \leftarrow \sqrt{2i+1} c_i \\ c \end{array} \right.$$

Рис. П.9. Спектральная характеристика F^n (полиномы Лежандра)

$$\text{spFtn(L,n)} := T^n \sqrt{T} \left| \begin{array}{l} c_0 \leftarrow \frac{1}{n+1} \\ \text{for } i \in 1..L-1 \\ c_i \leftarrow \sqrt{2} n! \cdot (-1)^i \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(n-k)! \cdot (i\pi)^{k+1}} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right] - \frac{1}{(i\pi)^{n+1}} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ c \end{array} \right.$$

Рис. П.10. Спектральная характеристика F^n (косинусоиды)

Эти же спектральные характеристики определяют линейный функционал \mathcal{J}_T^n в спектральной форме математического описания, который ставит в соответствие функции $f(\cdot)$ интеграл от этой функции с весом t^n по отрезку **T** (см. примеры линейных функционалов на множестве функций одной переменной в разд. 1.1).

В качестве дополнения укажем, что программа **spFtn(L,n)** для нахождения спектральной характеристики F^n функции $f_n(t) = t^n$ относительно полиномов Лежандра может без изменений применяться для действительных $n > 0$, а не только для натуральных n .

Рис. П.13 и П.14 соответствуют спектральным характеристикам $F = F^1$ функции $f_1(t) = t$ относительно функций Уолша (1.7) и функций Хаара (1.8), а также тригонометрических функ-

$$\begin{array}{l}
 \text{spFt1}(L) := T\sqrt{T} \left| \begin{array}{l} c_0 \leftarrow \frac{1}{2} \\ c_1 \leftarrow \frac{\sqrt{3}}{6} \\ c_{L-1} \leftarrow 0 \text{ if } L > 2 \\ c \end{array} \right. \\
 \text{spFt2}(L) := T^2\sqrt{T} \left| \begin{array}{l} c_0 \leftarrow \frac{1}{3} \\ c_1 \leftarrow \frac{\sqrt{3}}{6} \\ c_2 \leftarrow \frac{\sqrt{5}}{30} \text{ if } L > 2 \\ c_{L-1} \leftarrow 0 \text{ if } L > 3 \\ c \end{array} \right. \\
 \text{spFt3}(L) := T^3\sqrt{T} \left| \begin{array}{l} c_0 \leftarrow \frac{1}{4} \\ c_1 \leftarrow \frac{3\sqrt{3}}{20} \\ c_2 \leftarrow \frac{\sqrt{5}}{20} \text{ if } L > 2 \\ c_3 \leftarrow \frac{\sqrt{7}}{140} \text{ if } L > 3 \\ c_{L-1} \leftarrow 0 \text{ if } L > 4 \\ c \end{array} \right.
 \end{array}$$

Рис. П.11. Спектральные характеристики F^n (полиномы Лежандра), $n = 1, 2, 3$

$$\begin{array}{l}
 \text{spFt1}(L) := T\sqrt{T} \left| \begin{array}{l} c_0 \leftarrow \frac{1}{2} \\ \text{for } i \in 1..L-1 \\ c_i \leftarrow \frac{\sqrt{2} \lceil (-1)^i - 1 \rceil}{i^2 \pi^2} \\ c \end{array} \right. \\
 \text{spFt2}(L) := T^2\sqrt{T} \left| \begin{array}{l} c_0 \leftarrow \frac{1}{3} \\ \text{for } i \in 1..L-1 \\ c_i \leftarrow \frac{2\sqrt{2}(-1)^i}{i^2 \pi^2} \\ c \end{array} \right. \\
 \text{spFt3}(L) := T^3\sqrt{T} \left| \begin{array}{l} c_0 \leftarrow \frac{1}{4} \\ \text{for } i \in 1..L-1 \\ c_i \leftarrow \frac{3\sqrt{2} \lceil (-1)^i (i^2 \pi^2 - 2) + 2 \rceil}{i^4 \pi^4} \\ c \end{array} \right.
 \end{array}$$

Рис. П.12. Спектральные характеристики F^n (косинусоиды), $n = 1, 2, 3$

ций (1.9).

$$\begin{array}{l}
 \text{spFt1}(L) := T\sqrt{T} \left| \begin{array}{l} c_0 \leftarrow \frac{1}{2} \\ \text{for } m \in 0..\log(L,2) - 1 \\ c_{2^m} \leftarrow -\frac{1}{2^{m+2}} \\ c_{L-1} \leftarrow 0 \text{ if } L > 2 \\ c \end{array} \right. \\
 \text{spFt1}(L) := T\sqrt{T} \left| \begin{array}{l} c_0 \leftarrow \frac{1}{2} \\ \text{for } m \in 0..\log(L,2) - 1 \\ \text{for } k \in 0..2^m - 1 \\ c_{2^{m+k}} \leftarrow -\frac{1}{4\sqrt{2}3^m} \\ c \end{array} \right.
 \end{array}$$

Рис. П.13. Спектральные характеристики F (слева — функции Уолша, справа — функции Хаара)

$$\text{spFt1}(L) := T\sqrt{T} \left| \begin{array}{l} c_0 \leftarrow \frac{1}{2} \\ \text{for } i \in 1..L-1 \\ \left| \begin{array}{l} c_i \leftarrow 0 \text{ if } \text{mod}(i,2) = 0 \\ c_i \leftarrow -\frac{\sqrt{2}}{\pi(i+1)} \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ c \end{array} \right.$$

Рис. П.14. Спектральная характеристика F (тригонометрические функции)

Важное замечание состоит в том, что программы $\text{spFt1}(L)$ для нахождения спектральных характеристик F относительно функций Уолша и Хаара предполагают выполнение условия $L = 2^n, n \in \mathbb{N}$, хотя оно явно и не проверяется. Такой порядок усечения спектральных характеристик считается оптимальным для указанных базисных систем.

Программа $\text{spF1}(L)$ для спектральной характеристики $\mathbf{1}$ применялась в примерах 3.3, 3.6 и 3.7, а программы $\text{spFt1}(L)$ для спектральных характеристик F — в примерах 1.20, 2.23 и 3.3. Также они использовались в примерах 6.12, 6.14 и 6.15.

$$\text{spF}\chi(L,t) := \begin{cases} c_0 \leftarrow \frac{t}{\sqrt{T}} \\ \text{for } i \in 1..L-1 \\ c_i \leftarrow \frac{\sqrt{2T}}{i\pi} \sin\left(\frac{i\pi t}{T}\right) \\ c \end{cases}$$

Рис. П.15. Спектральная характеристика $\mathbf{1}_t^*$ (косинусоиды)

Дополнительно приведем программу $\text{spF}\chi(L,t)$ для спектральной характеристики $\mathbf{1}_t^*$ индикатора множества $[0, t]$ относительно косинусоид, где $t \in \mathbb{T}$, найденной в примере 1.4. Она показана на рис. П.15 и применена в примере 3.8. Аналогичные программы можно сформировать и для других базисных систем, однако в этой работе достаточно косинусоид.

$$\text{sp}\Delta_0(L) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..L-1 \\ c_i \leftarrow q(i,0) \\ c \end{cases} \quad \text{sp}\Delta_\tau(L,\tau) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..L-1 \\ c_i \leftarrow q(i,\tau) \\ c \end{cases}$$

Рис. П.16. Спектральные характеристики Δ_0 и Δ_τ

На рис. П.16 показаны программы $\text{sp}\Delta_0(L)$ и $\text{sp}\Delta_\tau(L)$, с помощью которых можно найти спектральные характеристики Δ_0 и Δ_τ дельта-функций $\delta(\cdot)$ и $\delta((\cdot) - \tau)$ для произвольной базисной системы, так как ее элементы — это всего лишь значения базисных функций при $t = 0$ и $t = \tau$. Напомним (см. примеры линейных функционалов на множестве функций одной переменной в разд. 1.1), что Δ_0 и Δ_τ являются спектральными характеристиками линейных функционалов δ_0 и δ_τ , ставящих в соответствие функции $f(\cdot)$ значения этой функции в точках $t = 0$ и $t = \tau$. Программы $\text{sp}\Delta_0(L)$ сформированы и для каждой из базисных систем (1.5) – (1.9) (см. рис. П.17–П.19). Они применялись для расчетов в примерах 2.24 и 3.3–3.10.

Рис. П.20 содержит программу $\text{sp}\Lambda(L)$ для нахождения двумерной спектральной характеристики Λ функции $z(t, \tau) \equiv 1$, или двумерной спектральной характеристики линейного функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}$, ставящего в соответствие функции двух переменных $f(\cdot)$ интеграл от этой функции по квадрату \mathbb{T}^2 , а также программу $\text{sp}\Delta_{00}(L)$ для нахождения матрицы начальных значений $\Delta_{0,0}$, или двумерной спектральной характеристики линейного функционала $\delta_{0,0}$, ставящего в соответствие функции двух переменных $f(\cdot)$ значение этой функции в точке $(0, 0)$ (см. примеры линейных функционалов на множестве функций двух переменных в разд. 1.2).

Изменение базисной системы

Спектральные характеристики функций зависят от выбранной базисной системы. В общем случае спектральные характеристики одной и той же функции относительно двух различных базисных систем отличаются, но в то же время одну из них можно выразить через другую,

$$\text{sp}\Delta_0(L) := \frac{1}{\sqrt{T}} \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..L-1 \\ c_i \leftarrow (-1)^i \sqrt{2i+1} \\ c \end{array} \right. \quad \text{sp}\Delta_0(L) := \frac{1}{\sqrt{T}} \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..L-1 \\ c_i \leftarrow \sqrt{1+(i>0)} \\ c \end{array} \right.$$

Рис. П.17. Спектральные характеристики Δ_0 (слева — полиномы Лежандра, справа — косинусоиды)

$$\text{sp}\Delta_0(L) := \frac{1}{\sqrt{T}} \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..L-1 \\ c_i \leftarrow 1 \\ c \end{array} \right. \quad \text{sp}\Delta_0(L) := \frac{1}{\sqrt{T}} \left| \begin{array}{l} c_0 \leftarrow 1, c_{L-1} \leftarrow 0 \\ \text{for } m \in 0..\log(L,2)-1 \\ c_{2^m} \leftarrow \sqrt{2^m} \\ c \end{array} \right.$$

Рис. П.18. Спектральные характеристики Δ_0 (слева — функции Уолша, справа — функции Хаара)

$$\text{sp}\Delta_0(L) := \frac{1}{\sqrt{T}} \left| \begin{array}{l} c_0 \leftarrow 1 \\ \text{for } i \in 1..L-1 \\ c_i \leftarrow \sqrt{2} \cdot (\text{mod}(i,2) = 0) \\ c \end{array} \right.$$

Рис. П.19. Спектральная характеристика Δ_0 (тригонометрические функции)

$$\text{sp}\Lambda(L) := \text{spF1}(L) \text{spF1}(L)^T \quad \text{sp}\Delta_{0,0}(L) := \text{sp}\Delta_0(L) \text{sp}\Delta_0(L)^T$$

Рис. П.20. Спектральные характеристики Λ (слева) и $\Delta_{0,0}$ (справа)

используя матрицы изменения базисных систем и применяя соотношения из разд. 1.3. Там же приведены примеры матриц для следующих пар базисов: косинусоиды и полиномы Лежандра, косинусоиды и функции Хаара, косинусоиды и тригонометрические функции, функции Хаара и функции Уолша. Соответствующие программы $\text{sp}\Delta\text{CP}(L)$, $\text{sp}\Delta\text{CX}(L)$, $\text{sp}\Delta\text{CF}(L)$ и $\text{sp}\Delta\text{XW}(L)$ для вычисления этих матриц показаны на рис. П.21 – П.24.

Например, в предыдущем разделе описан набор программ $\text{spFt1}(L)$, $\text{spFt2}(L)$, $\text{spFt3}(L)$ и $\text{spFtn}(L,n)$ для нахождения спектральных характеристик F^n функций $f_n(t) = t^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, относительно полиномов Лежандра и косинусоид, а для функций Уолша и Хаара, а также тригонометрических функций параметр ограничен значением $n = 1$ (он ограничен только в рамках этого приложения, так как получить спектральные характеристики F^n относительно функций Уолша и Хаара не составляет проблемы [210, 222]). Но для этих базисных систем спектральные характеристики F^n можно найти, изменяя базисную систему. Аналогично можно поступить со спектральными характеристиками F^a показательной функции $f(t) = e^{at}$, которые рассматриваются в следующих разделах. Для программы $\text{sp}\Delta\text{XW}(L)$, показанной на рис. П.24, $\text{Walsh}(i,t)$ — значение базисной функции $q(i,t)$ системы функций Уолша (см. также рис. П.3). Кроме того, на рис. П.25 и П.26 приведены программы $\text{sp}\Delta\text{XП}(L)$ и $\text{sp}\Delta\text{WП}(L)$ для вычисления матриц, связывающих блочно-импульсные функции (1.15) с функциями Уолша и Хаара. Эти программы задействованы в примерах 2.22 и 2.23.

$$\text{sp}\Delta\text{CP}(L) := \left| \begin{array}{l} c_{0,0} \leftarrow 1 \\ \text{for } m \in 1..L-1 \\ \quad \text{for } k \in 0..m-1 \\ \quad \quad \text{if } \text{mod}(k,2) = 0 \\ \quad \quad \quad A \leftarrow \frac{[(-1)^{m-k} + (-1)^m] \sqrt{2(2m+1)}}{(m-k)^2 \pi^2} \\ \quad \quad \quad c_{m-k,m} \leftarrow A \sum_{s=0}^{\text{floor}\left(\frac{m-1}{2}\right)} \left[\frac{(-1)^s (m+2s+1)!}{(2s+1)! \cdot (m-2s-1)! \cdot (m-k)^{2s} \pi^{2s}} \right] \\ \quad \quad \quad A \leftarrow \frac{[(-1)^{m-k} + (-1)^m] \sqrt{2(2m-2k+1)}}{m^2 \pi^2} \\ \quad \quad \quad c_{m,m-k} \leftarrow A \sum_{s=0}^{\text{floor}\left(\frac{m-k-1}{2}\right)} \frac{(-1)^s (m-k+2s+1)!}{(2s+1)! \cdot (m-k-2s-1)! \cdot m^{2s} \pi^{2s}} \end{array} \right|_c$$

Рис. П.21. Косинусоиды и полиномы Лежандра

$$\text{sp}\Delta\text{CX}(L) := \left| \begin{array}{l} c_{0,0} \leftarrow 1 \\ \text{for } s \in 1..L-1 \\ \quad \text{for } m \in 0.. \log(L,2) - 1 \\ \quad \quad \text{for } k \in 0..2^m - 1 \\ \quad \quad \quad c_{s,2^m+k} \leftarrow -\frac{1}{s\pi} 2^{\frac{m+3}{2}} \sin\left[\frac{(2k+1)s\pi}{2^{m+1}}\right] \left(\cos\left(\frac{s\pi}{2^{m+1}}\right) - 1\right) \end{array} \right|_c$$

Рис. П.22. Косинусоиды и функции Хаара

$$\text{sp}\Delta\text{CF}(L) := \left| \begin{array}{l} c_{0,0} \leftarrow 1 \\ \text{for } i \in 1..L-1 \\ \quad \text{for } j \in 1..L-1 \\ \quad \quad \left| \begin{array}{l} c_{i,j} \leftarrow i=j \text{ if } \text{mod}(j,2) = 0 \\ c_{i,j} \leftarrow \frac{2}{\pi} \frac{[1 + (-1)^{i+j}](j+1)}{(j+1)^2 - i^2} \text{ otherwise} \end{array} \right. \end{array} \right|_c$$

Рис. П.23. Косинусоиды и тригонометрические функции

$$\text{sp}\Delta\text{XW}(L) := \left| \begin{array}{l} c_{0,0} \leftarrow 1, c_{1,1} \leftarrow 1 \\ \text{for } m \in 1.. \log(L,2) - 1 \quad \quad \quad \text{if } L > 1 \\ \quad \text{for } k \in 0..2^m - 1 \\ \quad \quad \text{for } l \in 0..2^m - 1 \\ \quad \quad \quad c_{2^m+k, 2^m+l} \leftarrow \sqrt{\frac{T}{2^m}} \text{Walsh}\left[1, \frac{(2k+1)T}{2^{m+1}}\right] \end{array} \right|_c$$

Рис. П.24. Функции Хаара и функции Уолша

$$\text{sp}\Delta\text{ВП}(L) := \frac{1}{\sqrt{L}} \left| \begin{array}{l} c_{0,0} \leftarrow 1 \\ \text{for } k \in 0.. \log(L,2) - 1 \\ \quad \text{for } n \in 0..2^k - 1 \\ \quad \quad \text{for } m \in 0..2^k - 1 \\ \quad \quad \quad Q_{2n,m} \leftarrow c_{n,m}, Q_{2n+1,m} \leftarrow c_{n,m} \\ \quad \quad \quad Q_{2n,2^k+m} \leftarrow c_{n,m}, Q_{2n+1,2^k+m} \leftarrow -c_{n,m} \\ \quad c \leftarrow Q \\ c \end{array} \right. \quad \text{if } L > 1$$

Рис. П.25. Функции Уолша и блочно-импульсные функции

$$\text{sp}\Delta\text{ХП}(L) := \frac{1}{\sqrt{L}} \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..L - 1 \\ c_{0,i} \leftarrow 1 \\ \text{for } k \in 0.. \log(L,2) - 1 \\ \quad \text{for } n \in 0..2^k - 1 \\ \quad \quad \text{for } m \in 0..L \cdot 2^{-k} - 1 \\ \quad \quad \quad c_{n+2^k, m+nL \cdot 2^{-k}} \leftarrow \text{if}(m < L \cdot 2^{-k-1}, \sqrt{2^k}, -\sqrt{2^k}) \\ c \end{array} \right. \quad \text{if } L > 1$$

Рис. П.26. Функции Хаара и блочно-импульсные функции

Спектральные характеристики операторов умножения

$$\text{sp}A(L, a) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..L - 1 \\ \quad \text{for } j \in i..L - 1 \\ \quad \quad c_{i,j} \leftarrow \int_0^T a(t) q(i,t) q(j,t) dt \\ \quad \quad c_{j,i} \leftarrow c_{i,j} \quad \text{if } i \neq j \\ c \end{array} \right.$$

В этой части собраны программы для нахождения спектральных характеристик операторов умножения (см. разд. 1.5). Наряду с операторами интегрирования и дифференцирования операторы умножения играют важную роль. Им соответствует одно из элементарных звеньев линейных систем управления, а именно усилительное звено (выход-

ной сигнал — это входной сигнал с дополнительным коэффициентом, который в общем случае зависит от времени [105]). Рис. П.27 содержит программу $\text{sp}A(L, a)$ для нахождения спектральных характеристик оператора умножения на функцию $a(\cdot)$, реализация которой не зависит от базисной системы и использует встроенные в Mathcad функции интегрирования. Далее основное внимание уделено спектральным характеристикам A оператора умножения на функцию $a_1(t) = t$ относительно базисных систем (1.5)–(1.9) (см. рис. П.28–П.31).

Спектральная характеристика A оператора умножения на функцию $a_1(t) = t$ важна не только для описания в спектральной форме операторов умножения на функции $a_n(t) = t^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ Ее можно использовать для приближенного представления спектральных характеристик операторов умножения на функции, которые аппроксимируются полиномами как с помощью разложения в степенные ряды (ряды Тейлора [50, 233]), так и в ортогональные ряды (см. разд. 1.1), например по полиномам Лежандра (1.5).

Существенное значение спектральные характеристики A имеют для спектрального пред-

$$\begin{array}{l}
 \text{spAt1}(L) := T \left| \begin{array}{l}
 \text{for } m \in 0..L-1 \\
 \left| \begin{array}{l}
 c_{m,m} \leftarrow \frac{1}{2} \\
 \text{if } m > 0 \\
 \left| \begin{array}{l}
 c_{m-1,m} \leftarrow \frac{m}{2\sqrt{4m^2-1}} \\
 c_{m,m-1} \leftarrow c_{m-1,m}
 \end{array}
 \right. \\
 \left. c
 \end{array}
 \right. \\
 \text{spAt1}(L) := T \left| \begin{array}{l}
 \text{for } m \in 0..L-1 \\
 \left| \begin{array}{l}
 c_{m,m} \leftarrow \frac{1}{2} \\
 \text{if } m > 0 \\
 \left| \begin{array}{l}
 c_{0,m} \leftarrow \sqrt{2} \frac{(-1)^m - 1}{m^2 \pi^2} \\
 c_{m,0} \leftarrow c_{0,m}
 \end{array}
 \right. \\
 \left. \text{for } m \in 2..L-1 \quad \text{if } L > 2 \\
 \text{for } k \in 1..m-1 \\
 \left| \begin{array}{l}
 c_{m-k,m} \leftarrow 2 \frac{[m^2 + (m-k)^2][(-1)^k - 1]}{k^2(k-2m)^2 \pi^2} \\
 c_{m,m-k} \leftarrow c_{m-k,m}
 \end{array}
 \right. \\
 \left. c
 \end{array}
 \right.
 \end{array}$$

Рис. П.28. Спектральные характеристики A (слева — полиномы Лежандра, справа — косинусоиды)

$$\begin{array}{l}
 \text{xor}(x,y) := \left| \begin{array}{l}
 \text{if } xy > 0 \\
 \left| \begin{array}{l}
 n \leftarrow \max(\text{floor}(\log(x,2)), \text{floor}(\log(y,2))) \\
 \text{for } i \in 0..n \\
 \left| \begin{array}{l}
 q1 \leftarrow \text{floor}(\text{mod}(2^{i-n}x, 2)) \\
 q2 \leftarrow \text{floor}(\text{mod}(2^{i-n}y, 2)) \\
 r \leftarrow r + 2^{n-i}(q1 \oplus q2)
 \end{array}
 \right. \\
 r \leftarrow \max(x,y) \text{ otherwise} \\
 \left. r
 \end{array}
 \right. \\
 \text{spAt1}(L) := T \left| \begin{array}{l}
 \text{for } i \in 0..L-1 \\
 \text{for } j \in i..L-1 \\
 \left| \begin{array}{l}
 c_{i,j} \leftarrow \frac{1}{2} \text{ if } i=j \\
 \text{otherwise} \\
 \left| \begin{array}{l}
 m \leftarrow \log(\text{xor}(i,j), 2) \\
 \text{if } m = \text{floor}(m) \\
 \left| \begin{array}{l}
 c_{i,j} \leftarrow -\frac{1}{2^{m+2}} \\
 c_{j,i} \leftarrow c_{i,j}
 \end{array}
 \right. \\
 \left. c
 \end{array}
 \right.
 \end{array}$$

Рис. П.29. Спектральная характеристика A (функции Уолша)

$$\begin{array}{l}
 \text{spAt1}(L) := T \left| \begin{array}{l}
 c_{0,0} \leftarrow \frac{1}{2} \\
 c_{1,1} \leftarrow \frac{1}{2} \\
 \text{for } s \in 0.. \log(L,2) - 1 \\
 \text{for } k \in 0..2^s - 1 \\
 \left| \begin{array}{l}
 c_{0,2^s+k} \leftarrow -\frac{1}{4\sqrt{2^{3s}}} \\
 c_{2^s+k,0} \leftarrow c_{0,2^s+k}
 \end{array}
 \right. \\
 \text{for } m \in 1.. \log(L,2) - 1 \\
 \text{for } s \in 0.. \log(L,2) - m - 1 \\
 \text{for } k \in 0..2^s - 1 \\
 \text{for } l \in 0..2^{m-1} - 1 \\
 \left| \begin{array}{l}
 c_{2^s+k, 2^m(2^s+k)+1} \leftarrow -\frac{1}{2^{s+2}\sqrt{2^{3m}}} \\
 c_{2^m(2^s+k)+1, 2^s+k} \leftarrow c_{2^s+k, 2^m(2^s+k)+1} \\
 c_{2^s+k, 2^m(2^s+k)+2^{m-1}+1} \leftarrow \frac{1}{2^{s+2}\sqrt{2^{3m}}} \\
 c_{2^m(2^s+k)+2^{m-1}+1, 2^s+k} \leftarrow c_{2^s+k, 2^m(2^s+k)+2^{m-1}+1} \\
 c_{2(2^s+k), 2(2^s+k)} \leftarrow c_{2^s+k, 2^s+k} - \frac{1}{2^{s+2}} \\
 c_{2(2^s+k)+1, 2(2^s+k)+1} \leftarrow c_{2^s+k, 2^s+k} + \frac{1}{2^{s+2}}
 \end{array}
 \right. \\
 \left. c
 \end{array}$$

Рис. П.30. Спектральная характеристика A (функции Хаара)

ставления функций, задающих повторные детерминированные и стохастические интегралы специального вида, и для представления самих повторных стохастических интегралов (см. разд. 4.2, 6.1 и 6.2).

Здесь, как и для спектральных характеристик функций и линейных функционалов, в программах `spAt1(L)`, соответствующих функциям Уолша и Хаара, подразумевается, что порядок усечения $L = 2^n, n \in \mathbb{N}$. Аналогичное замечание справедливо для программ расчета спектральных характеристик операторов интегрирования и дифференцирования, которые рассмотрены далее. Программы `spAt1(L)` для нахождения спектральных характеристик A использовались в примерах 1.23, 3.3, 4.12 и 4.14.

```

spAt1(L) := T
  for n ∈ 0..L - 1
    cn,n ← 1/2
    if mod(n,2) ≠ 0
      c0,n ← -√2 / ((n+1)π)
      cn,0 ← c0,n
    for s ∈ n..L - 1
      if n < s
        if (mod(n,2) = 0) ∧ (mod(s,2) ≠ 0)
          cn,s ← 1 / ((n+s+1)π) - 1 / ((s-n+1)π)
          cs,n ← cn,s
        if (mod(n,2) ≠ 0) ∧ (mod(s,2) = 0)
          cn,s ← 1 / ((n+s+1)π) + (n+1 ≠ s) / ((s-n-1)π)
          cs,n ← cn,s
  c
  
```

Рис. П.31. Спектральная характеристика A (тригонометрические функции)

Согласно свойству (1.64) спектрального преобразования композиции операторов спектральная характеристика A^n оператора умножения на функцию $a_n(t) = t^n$ относительно произвольной базисной системы представляется в виде $A^n = (A)^n$. Соответствующая программа `spAtn(L,n)` показана на рис. П.32, однако следует помнить, что за счет усечения спектральной характеристики A элементы спектральной характеристики A^n в общем случае вычисляются неточно. Если потери в точности нежелательны, то требуется находить спектральную характеристику A^n для каждого n тем или иным способом (см. пример 1.10).

Как нетрудно заметить, во всех программах из этой части применяется свойство (1.74) симметричности спектральной характеристики оператора умножения.

Перейдем к программам, которые требуются для нахождения спектральных характеристик V оператора умножения функций. Напомним (см. разд. 1.5), что эта спектральная характеристика представляется в виде трехмерной матрицы, что вносит опреде-

$$\text{spAtn}(L,n) := \text{spAt1}(L)^n$$

Рис. П.32. Спектральная характеристика A^n

```

spV(L) :=
  for k ∈ 0..L - 1
    ck ← Vk(L,k)
  c
  
```

$$\text{VF}(V,F) := \sum_{k=0}^{\text{rows}(F)-1} (V_k F_k)$$

```

VA(V,A) :=
  for k ∈ 0..rows(A) - 1
    ck ← tr(VkA)
  c
  
```

Рис. П.33. Спектральная характеристика V

ленные сложности, связанные с тем, что Mathcad такие объекты в явном виде не поддерживает. Однако есть возможность использовать векторы и матрицы, элементами которых могут быть не только числа, что позволяет задавать многомерные матрицы (не обязательно трехмерные), применяя табличную (блочно-иерархическую) форму [112].

Для этих объектов следует сформировать специальные программы для выполнения нужных алгебраических операций. В частности, трехмерная матрица представляется в виде вектора, каждый элемент которого — квадратная матрица — соответствующее простое сечение спектральной характеристики V (см. п. 3 замечаний 1.10). Вспомогательная подпрограмма $\text{spV}(L)$ для задания трехмерной матрицы, а также программы $\text{VF}(V,F)$ и $\text{VA}(V,A)$ для умножения трехмерной матрицы V на матрицу-столбец F и на квадратную матрицу A (см. п. 5 замечаний 1.10) показаны на рис. П.33, а на рис. П.34–П.39 отражены программы $\text{spVk}(L,k)$ для нахождения простых сечений спектральной характеристики V , в том числе относительно базисных систем (1.5)–(1.9).

$$\text{spVk}(L,k) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..L-1 \\ \text{for } j \in i..L-1 \\ \left| \begin{array}{l} c_{i,j} \leftarrow \int_0^T q(i,t) q(j,t) q(k,t) dt \\ c_{j,i} \leftarrow c_{i,j} \text{ if } i \neq j \end{array} \right. \\ c \end{array} \right.$$

Рис. П.34. Сечение спектральной характеристики V

$$\begin{aligned} _f(n) &:= \text{if} \left(n \geq 2, \prod_{s=1}^{n \div 2} \frac{2s-1}{2s}, 1 \right) & _g(n) &:= \text{if} \left(n \geq 2, \prod_{s=1}^{n \div 2} \frac{2s}{2s+1}, 1 \right) \\ \text{Vk}(L,k) &:= \frac{1}{\sqrt{T}} \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..L-1 \\ \text{for } j \in 0..L-1 \\ \text{if } (\text{mod}(i+j+k,2) = 0) \wedge (|j-k| \leq i \leq j+k) \\ \left| \begin{array}{l} A \leftarrow \sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)} \\ c_{i,j} \leftarrow A _f(i+j-k) _f(j+k-i) _f(k+i-j) _g(i+j+k) \end{array} \right. \\ c \end{array} \right. \end{array}$$

Рис. П.35. Сечение спектральной характеристики V (полиномы Лежандра)

$$\text{Vk}(L,k) := \frac{1}{\sqrt{T}} \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..L-1 \\ \text{for } j \in 0..L-1 \\ \left| \begin{array}{l} c_{i,j} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{1+(i>0)(j>0)(k>0)}} \text{ if } (|i-j| = k) \vee (|i+j| = k) \end{array} \right. \\ c \end{array} \right.$$

Рис. П.36. Сечение спектральной характеристики V (косинусоиды)

$$\text{Vk}(L,k) := \frac{1}{\sqrt{T}} \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..L-1 \\ \text{for } j \in 0..L-1 \\ \left| \begin{array}{l} c_{i,j} \leftarrow (\text{xor}(i,j) = k) \end{array} \right. \\ c \end{array} \right.$$

Рис. П.37. Сечение спектральной характеристики V (функции Уолша)

В полной мере при такой реализации не получается использовать свойство (1.81) симметричности спектральной характеристики оператора умножения функций, а для простых сечений оно применяется выборочно.

$$\text{Vk}(L,k) := \frac{1}{\sqrt{T}} \left| \begin{array}{l}
 c_{0,0} \leftarrow k = 0, c_{1,1} \leftarrow k = 0 \\
 \text{for } s \in 0 \dots \log(L,2) - 1 \\
 \quad \text{for } h \in 0 \dots 2^s - 1 \\
 \quad \quad c_{0,2^s+h} \leftarrow (2^s + h = k), c_{2^s+h,0} \leftarrow c_{0,2^s+h} \\
 \text{for } m \in 1 \dots \log(L,2) - 1 \\
 \quad \text{for } s \in 0 \dots \log(L,2) - m - 1 \\
 \quad \quad \text{for } h \in 0 \dots 2^s - 1 \\
 \quad \quad \quad \text{for } l \in 0 \dots 2^{m-1} - 1 \\
 \quad \quad \quad \quad c_{2^s+h,2^m(2^s+h)+1} \leftarrow \sqrt{2^s} c_{0,2^m(2^s+h)+1} \\
 \quad \quad \quad \quad c_{2^m(2^s+h)+1,2^s+h} \leftarrow c_{2^s+h,2^m(2^s+h)+1} \\
 \quad \quad \quad \quad c_{2^s+h,2^m(2^s+h)+2^{m-1}+1} \leftarrow -\sqrt{2^s} c_{0,2^m(2^s+h)+2^{m-1}+1} \\
 \quad \quad \quad \quad c_{2^m(2^s+h)+2^{m-1}+1,2^s+h} \leftarrow c_{2^s+h,2^m(2^s+h)+2^{m-1}+1} \\
 \quad \quad \quad \quad c_{2(2^s+h),2(2^s+h)} \leftarrow c_{2^s+h,2^s+h} + \sqrt{2^s} c_{0,2^s+h} \\
 \quad \quad \quad \quad c_{2(2^s+h)+1,2(2^s+h)+1} \leftarrow c_{2^s+h,2^s+h} - \sqrt{2^s} c_{0,2^s+h}
 \end{array} \right|_c$$

Рис. П.38. Сечение спектральной характеристики V (функции Хаара)

В программе $\text{spVk}(L,k)$ для нахождения простых сечений спектральной характеристики V относительно функций Уолша задействуется функция $\text{xor}(i,j)$, ее реализацию можно найти на рис. П.29. Программы $\text{spV}(L)$ и $\text{spVk}(L,k)$ для нахождения спектральных характеристик V применялись в примерах 2.22, 3.5–3.7, 4.13–4.16 и 6.12–6.15.

$$\text{Vk}(L,k) := \frac{1}{\sqrt{T}} \left| \begin{array}{l}
 \text{for } i \in 0 \dots L - 1 \\
 \quad \left| \begin{array}{l}
 c_{0,i} \leftarrow i = k \\
 c_{i,0} \leftarrow i = k
 \end{array} \right. \\
 \text{for } i \in 1 \dots L - 1 \\
 \quad \text{for } j \in i \dots L - 1 \\
 \quad \quad \left| \begin{array}{l}
 c_{i,j} \leftarrow \frac{\sqrt{1 + (i=j)(j-i=k) + (i+j=k)}}{\sqrt{2}} \text{ if } \text{mod}(i,2) = 0 \\
 \text{otherwise} \\
 \quad \left| \begin{array}{l}
 c_{i,j} \leftarrow \frac{(i+j=k) - (j-i-2=k)}{\sqrt{2}} \text{ if } \text{mod}(j,2) = 0 \\
 c_{i,j} \leftarrow \frac{\sqrt{1 + (i=j)(j-i=k) - (i+j+2=k)}}{\sqrt{2}} \text{ otherwise}
 \end{array} \right. \\
 c_{j,i} \leftarrow c_{i,j}
 \end{array} \right.
 \end{array} \right|_c$$

Рис. П.39. Сечение спектральной характеристики V (тригонометрические функции)

Спектральные характеристики операторов интегрирования

Оператор интегрирования соответствует интегрирующему звену, которое используется при описании линейных систем управления (выходной сигнал — это первообразная входного сигнала при нулевом начальном условии [105]). Его спектральная характеристика P^{-1} — это двумерная спектральная характеристика единичной ступенчатой функции, или функции Хевисайда (1.28), как функции двух переменных (см. разд. 1.6, а также пример 1.7). Соответствующие программы $\text{spl}(L)$ можно найти на рис. П.40 для общего случая и на рис. П.41–П.44 для базисных систем (1.5)–(1.9).

$$\text{spl}(L) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..L-1 \\ \text{for } j \in 0..L-1 \\ c_{i,j} \leftarrow \int_0^T q(i,t) \int_0^t q(j,\tau) d\tau dt \\ c \end{cases}$$

Рис. П.40. Спектральная характеристика P^{-1}

$$\begin{aligned} \text{spl}(L) := T \begin{cases} c_{0,0} \leftarrow \frac{1}{2} \\ \text{for } m \in 1..L-1 \\ \begin{cases} c_{m-1,m} \leftarrow -\frac{1}{2\sqrt{4m^2-1}} \\ c_{m,m-1} \leftarrow -c_{m-1,m} \end{cases} \\ c \end{cases} & \quad \text{spl}(L) := T \begin{cases} c_{0,0} \leftarrow \frac{1}{2} \\ \text{for } m \in 1..L-1 \\ \begin{cases} c_{0,m} \leftarrow \sqrt{2} \frac{1-(-1)^m}{m^2 \pi^2} \\ c_{m,0} \leftarrow -c_{0,m} \end{cases} \\ \text{for } m \in 2..L-1 & \quad \text{if } L > 2 \\ \text{for } k \in 1..m-1 \\ \begin{cases} c_{m-k,m} \leftarrow 2 \frac{1-(-1)^k}{k(2m-k) \pi^2} \\ c_{m,m-k} \leftarrow -c_{m-k,m} \end{cases} \\ c \end{cases} \end{aligned}$$

Рис. П.41. Спектральные характеристики P^{-1} (слева — полиномы Лежандра, справа — косинусоиды)

Под общим случаем понимается численное интегрирование, но именно для этой спектральной характеристики оно требует значительных вычислительных ресурсов при нахождении повторных интегралов, которые отвечают различным значениям индексов функций базисной системы. Другой путь предполагает использование символьного процессора Mathcad, однако он не гарантирует получение результата. Рациональные варианты применения программы, показанной на рис. П.40, — это нахождение спектральной характеристики P^{-1} оператора интегрирования при отсутствии простых соотношений для выбранной базисной системы или проверка программ, реализующих имеющиеся соотношения.

Эти спектральные характеристики важны при решении линейных обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений спектральным методом (см. разд. 1.8 и 3.3). Без них невозможно обойтись при спектральном представлении повторных детерминированных и стохастических интегралов (см. разд. 4.2, 6.1 и 6.2).

Во всех программах $\text{spl}(L)$, описанных в этой части, используется связь (1.87) спектральных характеристик оператора интегрирования и сопряженного с ним. Они применялись для

$$\text{spl}(L) := \text{T} \left| \begin{array}{l} c_{0,0} \leftarrow \frac{1}{2} \\ \text{for } m \in 0 \dots \log(L,2) - 1 \\ \quad \text{for } k \in 0 \dots 2^m - 1 \\ \quad \quad \left| \begin{array}{l} c_{k,2^m+k} \leftarrow \frac{1}{2^{m+2}} \\ c_{2^m+k,k} \leftarrow -c_{k,2^m+k} \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad c \end{array} \right.$$

Рис. П.42. Спектральная характеристика P^{-1} (функции Уолша)

$$\text{spl}(L) := \text{T} \left| \begin{array}{l} c_{0,0} \leftarrow \frac{1}{2} \\ \text{for } s \in 0 \dots \log(L,2) - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} A \leftarrow \frac{\sqrt{2^s}}{2^{2(s+1)}} \\ \text{for } k \in 0 \dots 2^s - 1 \\ \quad \quad \left| \begin{array}{l} c_{0,2^s+k} \leftarrow A, c_{2^s+k,0} \leftarrow -A \end{array} \right. \\ \text{for } s \in 0 \dots \log(L,2) - 2 \\ \quad \text{for } m \in 1 \dots \log(L,2) - 1 - s \\ \quad \quad \left| \begin{array}{l} A \leftarrow \frac{\sqrt{2^m}}{2^{2(m+1)+s}} \\ \text{for } k \in 0 \dots 2^s - 1 \\ \quad \quad \text{for } l \in 0 \dots 2^{m-1} - 1 \\ \quad \quad \quad \left| \begin{array}{l} c_{2^s+k,2^m(2^s+k)+1} \leftarrow A, c_{2^m(2^s+k)+1,2^s+k} \leftarrow -A \\ c_{2^s+k,2^m(2^s+k)+2^{m-1}+1} \leftarrow -A, c_{2^m(2^s+k)+2^{m-1}+1,2^s+k} \leftarrow A \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad \quad c \end{array} \right.$$

Рис. П.43. Спектральная характеристика P^{-1} (функции Хаара)

расчетов в примерах 1.21–1.23, 3.1, 3.2, 4.12–4.16 и 6.12–6.15.

$$\text{spl}(L) := \text{T} \left| \begin{array}{l} c_{0,0} \leftarrow \frac{1}{2} \\ \text{for } m \in 1 \dots L - 1 \quad \text{if } L > 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{if } \text{mod}(m,2) = 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} c_{0,m} \leftarrow \frac{\sqrt{2}}{(m+1)\pi} \\ c_{m,0} \leftarrow -c_{0,m} \end{array} \right. \\ \text{otherwise} \\ \quad \left| \begin{array}{l} c_{m-1,m} \leftarrow \frac{1}{m\pi} \\ c_{m,m-1} \leftarrow -c_{m-1,m} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \quad \quad c \end{array} \right.$$

Рис. П.44. Спектральная характеристика P^{-1} (тригонометрические функции)

Опираясь на свойство (1.64) спектрального преобразования композиции операторов, можно выразить спектральную характеристику P^{-n} оператора интегрирования n -го порядка относительно произвольной базисной системы как $[P^{-1}]^n$. Соответствующая программа `spIn(L)` приведена на рис. П.45.

$$\text{spIn}(L, n) := \text{spI}(L)^n$$

Рис. П.45. Спектральная характеристика P^{-n}

Спектральные характеристики операторов дифференцирования

Последний из трех линейных операторов, подробно изученных в контексте применения спектральной формы математического описания, — оператор дифференцирования. Он соответствует дифференцирующему звену при описании линейных систем управления (выходной сигнал — это производная входного сигнала [105]). Программа `spP(L)` для нахождения его спектральной характеристики \mathcal{P} приведена на рис. П.46, там же показана программа `spP0(L)` для расчета спектральной характеристики P оператора дифференцирования с учетом начального значения (см. разд. 1.7). Далее, рис. П.47 – П.51 и П.53 – П.57 содержат программы `spP(L)` и `spP0(L)` для спектральных характеристик \mathcal{P} и P относительно тех же базисных систем (1.5) – (1.9).

$$\text{spP}(L) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..L-1 \\ \text{for } j \in 0..L-1 \\ c_{i,j} \leftarrow \int_0^T q(i,t) \frac{d}{dt} q(j,t) dt \\ c \end{array} \right. \quad \text{spP0}(L) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..L-1 \\ \text{for } j \in 0..L-1 \\ c_{i,j} \leftarrow \int_0^T q(i,t) \frac{d}{dt} q(j,t) dt + q(i,0) q(j,0) \\ c \end{array} \right.$$

Рис. П.46. Спектральные характеристики \mathcal{P} и P

Программы `spP(L)` и `spP0(L)`, реализация которых основана на определении спектральных характеристик \mathcal{P} и P операторов дифференцирования и показана на рис. П.46, используют численные методы дифференцирования и интегрирования или символьный процессор `Mathcad`. Оба подхода имеют свои недостатки. В первом из них неизбежно появляются погрешности вычисления элементов указанных спектральных характеристик, а во втором нет гарантий, что результат будет получен из-за имеющихся ограничений символьного процессора. Поэтому такой вариант может быть рекомендован в основном для сравнения в процессе отладки и тестирования программ, соответствующих конкретным базисным системам.

$$\text{spP}(L) := \frac{1}{T} \left| \begin{array}{l} \text{for } m \in 0..L-1 \\ \text{for } k \in 0..m \\ c_{m-k,m} \leftarrow [(-1)^{k+1} + 1] \sqrt{(2m-2k+1)(2m+1)} \\ c \end{array} \right.$$

Рис. П.47. Спектральная характеристика \mathcal{P} (полиномы Лежандра)

Эти спектральные характеристики связаны формулой (1.97), а именно с помощью двумерной спектральной характеристики линейного функционала $\delta_{0,0}$, ставящего в соответствие

$$\text{spP}(L) := \frac{1}{T} \left\{ \begin{array}{l} \text{for } m \in 1 \dots L-1 \\ c_{0,m} \leftarrow 2(-1)^m \sqrt{1 - (-1)^m} \\ \text{for } m \in 2 \dots L-1 \quad \text{if } L > 2 \\ \text{for } k \in 1 \dots m-1 \\ \left| \begin{array}{l} c_{m-k,m} \leftarrow \frac{2m^2 \cdot [(-1)^k - 1]}{k(2m-k)} \\ c_{m,m-k} \leftarrow \frac{2(m-k)^2 \cdot [(-1)^k - 1]}{k(k-2m)} \end{array} \right. \\ c_{1,1} \leftarrow 0 \text{ otherwise} \\ c \end{array} \right.$$

Рис. П.48. Спектральная характеристика \mathcal{P} (косинусиды)

функции двух переменных $f(\cdot) \in D(\mathbb{T}^2)$ значение этой функции в точке $(0, 0)$ (см. примеры линейных функционалов на множестве функций двух переменных в разд. 1.2).

Спектральные характеристики P операторов дифференцирования с учетом начального значения необходимы для решения линейных обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений спектральным методом (см. разд. 1.8 и 3.3). Приведенные программы $\text{spP0}(L)$ задействованы в примерах 2.24, 3.3–3.10 и 6.12.

Имея программы $\text{spP}(L)$ и $\text{sp}\Delta_0(L)$ для нахождения спектральной характеристики \mathcal{P} оператора дифференцирования и спектральной характеристики Δ_0 дельта-функции $\delta(\cdot)$, несложно сформировать программу $\text{spP0}(L)$ для нахождения спектральной характеристики P оператора дифференцирования с учетом начального значения (см. рис. П.52), чтобы не рассматривать каждую базисную систему отдельно, но важно помнить о п. 1 замечаний 1.12, который касается тригонометрических функций.

Один из вариантов приближенного нахождения спектральной характеристики P оператора дифференцирования с учетом начального значения состоит в обращении спектральной характеристики P^{-1} оператора интегрирования.

В разд. 1.7 определена спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом конечного значения функции. Здесь не приводятся программы для их нахождения, как и не приведены соотношения для вычисления их элементов при выборе базисных систем (1.5)–(1.9) в основной части работы. Однако вывод таких соотношений и формирование соответствующих программ не составляет сложной задачи. Для этого достаточно использовать спектральную характеристику Δ_T дельта-функции $\delta(T - (\cdot))$, или спектральную характеристику линейного функционала δ_T , ставящего в соответствие функции $f(\cdot)$ значение этой функции в точке $t = T$ (см. примеры линейных функционалов на множестве функций одной переменной в разд. 1.1). Программа для нахождения спектральной характеристики Δ_T реализуется тривиально по аналогии с программой для нахождения спектральных характеристик Δ_0 дельта-функции $\delta(\cdot)$, показанной на рис. П.16, вне зависимости от базисной системы.

Спектральная характеристика \mathcal{P}^n оператора дифференцирования n -го порядка относительно произвольной базисной системы представляется в виде $(\mathcal{P})^n$ (см. свойство (1.64) спект-

$$\text{spP}(L) := \frac{1}{T} \left| \begin{array}{l} c_{0,0} \leftarrow 0 \\ \text{for } m \in 0 \dots \log(L,2) - 1 \\ \quad \text{for } k \in 0 \dots 2^m - 1 \\ \quad \quad \text{for } l \in 0 \dots 2^m - 1 \\ \quad \quad \quad \left| \begin{array}{l} c_{2^{m+k}, l} \leftarrow c_{k, l} \\ c_{k, 2^{m+l}} \leftarrow -c_{k, l} - 2 \\ c_{2^{m+k}, 2^{m+l}} \leftarrow -c_{k, l} - 2 \text{ if } k \neq l \\ c_{2^{m+k}, 2^{m+k}} \leftarrow 2^{m+2} - c_{k, k} - 2 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad c \end{array} \right.$$

Рис. П.49. Спектральная характеристика \mathcal{P} (функции Уолша)

$$\text{spP}(L) := \frac{1}{T} \left| \begin{array}{l} \text{for } s \in 0 \dots \log(L,2) - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} c_{0, 2^{s+1}-1} \leftarrow -\sqrt{2^s} - (s=0) \\ \text{for } k \in 0 \dots 2^s - 1 \\ \quad c_{2^s+k, 2^s+k} \leftarrow [3 - (k=0)] \cdot 2^s \end{array} \right. \\ \text{for } s \in 0 \dots \log(L,2) - 2 \\ \quad \text{for } m \in 1 \dots \log(L,2) - 1 - s \\ \quad \quad \left| \begin{array}{l} A \leftarrow \sqrt{2^{2s+m}} \\ \text{for } k \in 0 \dots 2^s - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} c_{2^s+k, 2^m(2^s+k+1)-1} \leftarrow A, c_{2^m(2^s+k), 2^s+k} \leftarrow A[1 - (k=0)] \\ c_{2^s+k, 2^m(2^s+k)+2^{m-1}-1} \leftarrow -A[2 + [(k=0) \wedge (m=1)]], c_{2^m(2^s+k)+2^{m-1}, 2^s+k} \leftarrow -2A \end{array} \right. \\ \text{for } s \in 1 \dots \log(L,2) - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} c_{0, 2^s} \leftarrow -\sqrt{2^s} \\ \text{for } m \in 0 \dots s - 2 \quad \text{if } s > 1 \\ \quad c_{2^m, 2^s} \leftarrow -\sqrt{2^{s+m}} \\ \text{for } m \in 0 \dots \log(L,2) - 1 - s \\ \quad \quad \left| \begin{array}{l} A \leftarrow \sqrt{2^{2s+m}} \\ \text{for } k \in 0 \dots 2^s - 2 \\ \quad c_{2^s+k+1, 2^m(2^s+k+1)-1} \leftarrow A, c_{2^m(2^s+k+1), 2^s+k} \leftarrow A \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad c \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Рис. П.50. Спектральная характеристика \mathcal{P} (функции Хаара)

$$\text{spP}(L) := \frac{1}{T} \left| \begin{array}{l} c_{L-1, L-1} \leftarrow 0 \\ \text{for } m \in 1 \dots L - 1 \\ \quad \text{if } (\text{mod}(m,2) = 1) \wedge (m+1 < L) \\ \quad \quad \left| \begin{array}{l} c_{m+1, m} \leftarrow (m+1)\pi \\ c_{m, m+1} \leftarrow -c_{m+1, m} \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad c \end{array} \right.$$

Рис. П.51. Спектральная характеристика \mathcal{P} (тригонометрические функции)

$$\text{spP0}(L) := \text{spP}(L) + \text{sp}\Delta 0(L) \text{sp}\Delta 0(L)^T$$

Рис. П.52. Связь спектральных характеристик \mathcal{P} и P

$$\text{spP0}(L) := \frac{1}{T} \left| \begin{array}{l} \text{for } m \in 0..L-1 \\ \quad \text{for } k \in 0..m \\ \quad \left| \begin{array}{l} c_{m-k,m} \leftarrow \sqrt{(2m-2k+1)(2m+1)} \\ c_{m,m-k} \leftarrow (-1)^k c_{m-k,m} \text{ if } k > 0 \end{array} \right. \\ c \end{array} \right.$$

Рис. П.53. Спектральная характеристика P (полиномы Лежандра)

$$\text{spP0}(L) := \frac{1}{T} \left| \begin{array}{l} c_{0,0} \leftarrow 1 \\ \text{for } m \in 1..L-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} c_{0,m} \leftarrow (-1)^m \sqrt{2} \\ c_{m,0} \leftarrow \sqrt{2} \\ c_{m,m} \leftarrow 2 \end{array} \right. \\ \text{for } m \in 2..L-1 \quad \text{if } L > 2 \\ \quad \text{for } k \in 1..m-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} c_{m-k,m} \leftarrow 2 \frac{(m-k)^2 - (-1)^k m^2}{(m-k)^2 - m^2} \\ c_{m,m-k} \leftarrow 2 \frac{(-1)^k (m-k)^2 - m^2}{(m-k)^2 - m^2} \end{array} \right. \\ c \end{array} \right.$$

Рис. П.54. Спектральная характеристика P (косинусоиды)

$$\text{spP0}(L) := \frac{1}{T} \left| \begin{array}{l} c_{0,0} \leftarrow 1 \\ \text{for } m \in 0.. \log(L,2) - 1 \\ \quad \text{for } k \in 0..2^m - 1 \\ \quad \quad \text{for } l \in 0..2^m - 1 \\ \quad \quad \left| \begin{array}{l} c_{2^{m+k},1} \leftarrow c_{k,1} \\ c_{k,2^{m+1}} \leftarrow -c_{k,1} \\ c_{2^{m+k},2^{m+1}} \leftarrow -c_{k,1} \text{ if } k \neq 1 \\ c_{2^{m+k},2^{m+k}} \leftarrow 2^{m+2} - c_{k,k} \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ c \end{array} \right.$$

Рис. П.55. Спектральная характеристика P (функции Уолша)

рального преобразования композиции операторов). Соответствующая программа $\text{spPn}(L)$ для нахождения этой спектральной характеристики, а также аналогичная ей программа $\text{spP0n}(L)$ представлены на рис. П.58.

Аналогично реализуются программы нахождения спектральных характеристик других линейных операторов. В качестве примера можно привести спектральные характеристики операторов отражения (инверсии) и дробного интегродифференцирования [154, 177, 180, 181, 201].

$$\text{spP0}(L) := \frac{1}{T} \left| \begin{array}{l} c_{0,0} \leftarrow 1 \\ \text{for } s \in 0 \dots \log(L,2) - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} A \leftarrow \sqrt{2^s} \\ c_{0,2^{s+1}-1} \leftarrow -A, c_{2^s,0} \leftarrow A \\ \text{for } k \in 0 \dots 2^s - 1 \\ \quad c_{2^s+k,2^s+k} \leftarrow 3 \cdot 2^s \end{array} \right. \\ \text{for } s \in 0 \dots \log(L,2) - 2 \\ \quad \text{for } m \in 1 \dots \log(L,2) - 1 - s \\ \quad \left| \begin{array}{l} A \leftarrow \sqrt{2^{2s+m}} \\ \text{for } k \in 0 \dots 2^s - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} c_{2^s+k,2^m(2^s+k+1)-1} \leftarrow A, c_{2^m(2^s+k),2^s+k} \leftarrow A \\ c_{2^s+k,2^m(2^s+k)+2^{m-1}-1} \leftarrow -2A, c_{2^m(2^s+k)+2^{m-1},2^s+k} \leftarrow -2A \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \text{for } s \in 1 \dots \log(L,2) - 1 \\ \quad \text{for } m \in 0 \dots \log(L,2) - 1 - s \\ \quad \left| \begin{array}{l} A \leftarrow \sqrt{2^{2s+m}} \\ \text{for } k \in 0 \dots 2^s - 2 \\ \quad c_{2^s+k+1,2^m(2^s+k+1)-1} \leftarrow A, c_{2^m(2^s+k+1),2^s+k} \leftarrow A \end{array} \right. \end{array} \right. \\ c$$

Рис. П.56. Спектральная характеристика P (функции Хаара)

$$\text{spP0}(L) := \frac{1}{T} \left| \begin{array}{l} c_{0,0} \leftarrow 2, c_{L-1,L-1} \leftarrow 0 \\ \text{for } k \in 1 \dots \text{floor}(L \div 2) \\ \quad \left| \begin{array}{l} m \leftarrow 2k \\ \text{if } m < L \\ \quad \left| \begin{array}{l} c_{0,m} \leftarrow 2\sqrt{2}, c_{m,0} \leftarrow 2\sqrt{2} \\ \text{for } q \in 1 \dots \text{floor}(L \div 2) \\ \quad c_{m,2q} \leftarrow 4 \text{ if } 2q < L \\ c_{m-1,m} \leftarrow -m\pi, c_{m,m-1} \leftarrow m\pi \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \\ c$$

Рис. П.57. Спектральная характеристика P (тригонометрические функции)

$$\text{spPn}(L,n) := \text{spP}(L)^n \quad \text{spP0n}(L,n) := \text{spP0}(L)^n$$

Рис. П.58. Спектральные характеристики \mathcal{P}^n и P^n

Линейные преобразования функций времени

Выше приведены программы для нахождения спектральных характеристик функций одной переменной: универсальная, но использующая численное интегрирование с возможностью применения символьного процессора Mathcad, и набор программ для некоторых элементарных функций, причем отдельные программы в общем случае нужны не только для конкретных функций, но и для конкретных базисных систем, относительно которых требуется найти спектральные характеристики.

Можно предложить еще один вариант, связанный с линейными преобразованиями функций (см. разд. 1.8 и табл. 1.1). Он предполагает выражение спектральных характеристик функций через спектральные характеристики других функций, включая и обобщенные, и спектральные характеристики типовых линейных операторов: умножения, интегрирования и дифференцирования. Здесь для иллюстрации полезно сослаться на пример 1.13.

Далее на рис. П.59 приведены программы для нахождения спектральных характеристик некоторых элементарных функций, которые формируют решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [115]. Все они предполагают, что заранее вычислены: Δ — спектральная характеристика Δ_0 дельта-функции $\delta(\cdot)$, I — спектральная характеристика P^{-1} оператора интегрирования, P — спектральная характеристика P оператора дифференцирования с учетом начального значения. Кроме того, необходимо сформировать единичную матрицу E с теми же размерами, что и матрицы I и P , и инициализировать переменные n , a и ω (числовые параметры). Такой подход не обеспечивает в общем случае точного вычисления элементов спектральных характеристик, но имеет некоторые преимущества: простоту реализации и независимость от базисной системы. Одна из описанных программ для нахождения спектральных характеристик показательной функции применялась при решении примера 6.12.

$f(t) := 1$	$F := I \Delta$
$f(t) := t^n$	$F := n! \cdot I^{n+1} \Delta$
$f(t) := e^{at}$	$F := (P - aE)^{-1} \Delta$
$f(t) := t^n e^{at}$	$F := n! \cdot (P - aE)^{-n-1} \Delta$
$f(t) := \cos(\omega t)$	$F := (P^2 + \omega^2 E)^{-1} P \Delta$
$f(t) := \sin(\omega t)$	$F := \omega (P^2 + \omega^2 E)^{-1} \Delta$
$f(t) := e^{at} \cos(\omega t)$	$F := [(P - aE)^2 + \omega^2 E]^{-1} (P - aE) \Delta$
$f(t) := e^{at} \sin(\omega t)$	$F := \omega [(P - aE)^2 + \omega^2 E]^{-1} \Delta$
$f(t) := t \cos(\omega t)$	$F := (P^2 + \omega^2 E)^{-2} (P^2 - \omega^2 E) \Delta$
$f(t) := t \sin(\omega t)$	$F := 2\omega (P^2 + \omega^2 E)^{-2} P \Delta$
$f(t) := \cosh(at)$	$F := (P^2 - a^2 E)^{-1} P \Delta$
$f(t) := \sinh(at)$	$F := \omega (P^2 - a^2 E)^{-1} \Delta$
$f(t) := t \cosh(at)$	$F := (P^2 - a^2 E)^{-2} (P^2 + a^2 E) \Delta$
$f(t) := t \sinh(at)$	$F := 2a (P^2 - a^2 E)^{-2} P \Delta$

Рис. П.59. Соответствие функций и их спектральных характеристик

П.2. Программы для главы 2

Нестационарные спектральные плотности случайных процессов

Первая нестационарная спектральная плотность случайного процесса — это спектральная характеристика его математического ожидания, а вторая (начальная) нестационарная спектральная плотность случайного процесса — это двумерная спектральная характеристика корреляционной функции (моментной функции второго порядка). Фактически, эта часть дополняет разд. П.1, но, следуя изложению основной части работы (см. разд. 2.1), она выделена отдельно.

На рис. П.60 и П.61 показаны программы `spFexp(L,a)` для нахождения спектральных характеристик F^a показательной функции $f(t) = e^{at}$ относительно полиномов Лежандра (1.5) и косинусоид (1.6). Эти спектральные характеристики с точностью до постоянного множителя — первые нестационарные спектральные плотности процесса Орнштейна–Уленбека и геометрического броуновского движения (см. примеры случайных процессов в разд. 2.1).

$$\text{spFexp}(L, a) := \left| \begin{array}{l} a \leftarrow T a \\ c_0 \leftarrow \frac{e^a - 1}{a} \\ \text{for } i \in 1..L - 1 \\ c_i \leftarrow \frac{\sqrt{2i+1}}{a} (-1)^i \sum_{k=0}^i \left[\frac{l(i,k) k! [e^a - (-1)^{i-k}]}{a^k} \right] \\ \sqrt{T} c \end{array} \right.$$

Рис. П.60. Спектральная характеристика F^a (полиномы Лежандра)

Вторая из приведенных программ `spFexp(L,a)` использовалась в примерах 2.21, 3.4 и 3.5, а соответствующая спектральная характеристика найдена в примере 2.1.

$$\text{spFexp}(L, a) := \left| \begin{array}{l} a \leftarrow T a \\ c_0 \leftarrow \frac{e^a - 1}{a} \\ \text{for } i \in 1..L - 1 \\ c_i \leftarrow \sqrt{2} a \frac{(-1)^i \cdot e^a - 1}{a^2 + \pi^2 i^2} \\ \sqrt{T} c \end{array} \right.$$

Рис. П.61. Спектральная характеристика F^a (косинусоиды)

Далее на рис. П.62–П.64 показаны программы `spSW(L)` для нахождения вторых нестационарных спектральных плотностей S^W винеровского процесса (двумерных спектральных характеристик функции $R_W(t, \tau) = \min\{t, \tau\}$) относительно базисных систем (1.5)–(1.9).

Данные двумерные спектральные характеристики относительно полиномов Лежандра (1.5) и тригонометрических функций (1.9) найдены в примерах 2.2 и 2.16 соответственно, а для косинусоид (1.6), функций Уолша (1.7) и функций Хаара (1.8) — в примере 2.22. Отметим,

$$\begin{array}{l}
 \text{spSW(L)} := T^2 \left| \begin{array}{l}
 \text{for } m \in 0..L-1 \\
 \left| \begin{array}{l}
 c_{m,m} \leftarrow \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{if } m=0 \\ \frac{1}{2(2m-1)(2m+3)} & \text{otherwise} \end{cases} \\
 \text{if } m=1 \\
 \left| \begin{array}{l}
 c_{m-1,m} \leftarrow \frac{\sqrt{3}}{12} \\
 c_{m,m-1} \leftarrow c_{m-1,m}
 \end{array} \right. \\
 \text{if } m > 1 \\
 \left| \begin{array}{l}
 c_{m-2,m} \leftarrow \frac{1}{4\sqrt{[4(m-1)^2-1]}(4m^2-1)} \\
 c_{m,m-2} \leftarrow c_{m-2,m}
 \end{array} \right.
 \end{array} \right. \\
 c
 \end{array}
 \right.
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{spSW(L)} := T^2 \left| \begin{array}{l}
 c_{0,0} \leftarrow \frac{1}{3} \\
 \text{for } i \in 1..L-1 \\
 \left| \begin{array}{l}
 c_{i,i} \leftarrow \frac{1}{i^2\pi^2} \\
 c_{0,i} \leftarrow -\sqrt{2}c_{i,i} \\
 c_{i,0} \leftarrow c_{i,0}
 \end{array} \right. \\
 c
 \end{array}
 \right.
 \end{array}$$

Рис. П.62. Вторые нестационарные спектральные плотности S^W (слева — полиномы Лежандра, справа — косинусоиды)

что при расчете вторых нестационарных спектральных плотностей S^W относительно функций Уолша и Хаара используются блочно-импульсные функции (1.15), поэтому здесь применяются матрицы, связывающие блочно-импульсные функции с функциями Уолша и Хаара (см. разд. 1.3 и П.1, а также рис. П.25 и П.26).

$$\begin{array}{l}
 \text{spSW(L)} := \left(\frac{T}{L}\right)^2 \left| \begin{array}{l}
 \text{for } i \in 0..L-1 \\
 \text{for } j \in 0..i \\
 \left| \begin{array}{l}
 c_{i,i} \leftarrow i + \frac{1}{3} \text{ if } i=j \\
 \text{otherwise} \\
 \left| \begin{array}{l}
 c_{i,j} \leftarrow j + \frac{1}{2} \\
 c_{j,i} \leftarrow c_{i,j}
 \end{array} \right. \\
 \Delta \leftarrow \text{spWII(L)} \\
 \Delta c \Delta
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \right.
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{spSW(L)} := \left(\frac{T}{L}\right)^2 \left| \begin{array}{l}
 \text{for } i \in 0..L-1 \\
 \text{for } j \in 0..i \\
 \left| \begin{array}{l}
 c_{i,i} \leftarrow i + \frac{1}{3} \text{ if } i=j \\
 \text{otherwise} \\
 \left| \begin{array}{l}
 c_{i,j} \leftarrow j + \frac{1}{2} \\
 c_{j,i} \leftarrow c_{i,j}
 \end{array} \right. \\
 \Delta \leftarrow \text{spXII(L)} \\
 \Delta c \Delta^T
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \right.
 \end{array}$$

Рис. П.63. Вторые нестационарные спектральные плотности S^W (слева — функции Уолша, справа — функции Хаара)

Так как первая нестационарная спектральная плотность винеровского процесса — это нулевая матрица-столбец (винеровский процесс имеет нулевое математическое ожидание), для любой базисной системы вторая нестационарная спектральная плотность S^W совпадает со второй начальной нестационарной спектральной плотностью B^W .

Все перечисленные программы spSW(L) применялись для расчетов в примерах 2.22, 2.23, 3.1 и 3.3.

Для второй нестационарной спектральной плотности S^Y броуновского моста (а это двумерная спектральная характеристика функции $R_Y(t, \tau) = \min\{t, \tau\} - t\tau/T$) достаточно использовать имеющиеся программы для нахождения второй нестационарной спектральной плотности S^W винеровского процесса и спектральной характеристики $F = F^1$ функции $f_1(t) = t$ (см.

$$\text{spSW}(L) := \mathbb{T}^2 \left| \begin{array}{l} c_{0,0} \leftarrow \frac{1}{3} \\ \text{for } j \in 1..L-1 \\ \left| \begin{array}{l} c_{0,j} \leftarrow -\frac{\sqrt{2}}{j^2 \pi^2} \text{ if } \text{mod}(j,2) = 0 \\ c_{0,j} \leftarrow -\frac{\sqrt{2}}{2(j+1)\pi} \text{ otherwise} \\ c_{j,0} \leftarrow c_{0,j} \end{array} \right. \\ \text{for } i \in 1..L-1 \\ \text{for } j \in i..L-1 \\ \left| \begin{array}{l} c_{i,i} \leftarrow \frac{1}{i^2 \pi^2} \text{ if } (i=j) \wedge (\text{mod}(i,2) = 0) \\ c_{i,i} \leftarrow \frac{3}{(i+1)^2 \pi^2} \text{ if } (i=j) \wedge (\text{mod}(i,2) = 1) \\ \text{if } (i \neq j) \wedge (\text{mod}(i,2) \cdot \text{mod}(j,2) = 1) \\ \left| \begin{array}{l} c_{i,j} \leftarrow \frac{2}{(i+1)(j+1)\pi^2} \\ c_{j,i} \leftarrow c_{i,j} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ c \end{array} \right.$$

Рис. П.64. Вторая нестационарная спектральная плотность S^W (тригонометрические функции)

пример 2.23 и разд. П.1). Соответствующая программа $\text{spSBB}(L)$ приведена на рис. П.65, она использовалась в примерах 2.23 и 3.3.

$$\text{spSBB}(L) := \text{spSW}(L) - \frac{\text{spFt1}(L) \text{spFt1}(L)^T}{\Gamma}$$

Рис. П.65. Вторая нестационарная спектральная плотность S^Y

На рис. П.66 демонстрируется программа $\text{spSOU}(L, \mu, \sigma)$ для нахождения второй нестационарной спектральной плотности S^X процесса Орнштейна – Уленбека (двумерной спектральной характеристики функции $R_X(t, \tau) = \sigma^2(e^{\mu(t+\tau)} - e^{\mu|t-\tau|})/(2\mu)$) относительно косинусоид (см. пример 2.17). Эта программа задействована в примере 2.24.

Во всех представленных программах для нахождения вторых нестационарных спектральных плотностей используется свойство, согласно которому эти характеристики задаются симметрическими матрицами (см. разд. 2.1).

Спектральные характеристики случайных процессов

Здесь ограничимся программами $\text{spGWN}(L)$ и $\text{spPWN}(L)$ для моделирования реализаций спектральных характеристик гауссовского белого шума \mathcal{V} и пуассоновского белого шума \mathcal{N} интенсивности λ (см. разд. 2.3), которая должна быть инициализирована как глобальная переменная.

Спектральная характеристика \mathcal{V} не зависит от базисной системы (см. п. 1 замечаний 2.3, в том числе и поэтому реализация программы $\text{spGWN}(L)$ тривиальна. При моделировании реализаций спектральной характеристики \mathcal{N} используются значения базисных функций в виде

$$\text{spSOU}(L, \mu, \sigma) := \left| \begin{array}{l} \mu \leftarrow T\mu \\ c_{0,0} \leftarrow \frac{1}{2\mu^3} \left[(e^\mu - 1)^2 + 2(\mu - e^\mu + 1) \right] \\ \text{for } i \in 1..L-1 \\ \left| \begin{array}{l} c_{i,0} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}\mu} \frac{[(-1)^i \cdot (e^\mu - 1) - 2](e^\mu - 1)}{\pi^2 i^2 + \mu^2} \\ c_{0,i} \leftarrow c_{i,0} \\ \text{for } j \in i..L-1 \\ \left| \begin{array}{l} c_{i,j} \leftarrow \mu \frac{(-1)^{i+j} \cdot (e^{2\mu} + 1) - 2[(-1)^i + (-1)^j]e^\mu + 2}{(\pi^2 i^2 + \mu^2)(\pi^2 j^2 + \mu^2)} + \frac{i=j}{\pi^2 j^2 + \mu^2} \\ c_{j,i} \leftarrow c_{i,j} \text{ if } i \neq j \end{array} \right. \\ \end{array} \right. \\ \sigma^2 T^2 c \end{array} \right.$$

Рис. П.66. Вторая нестационарная спектральная плотность S^X (косинусоиды)

спектральной характеристики Δ_τ дельта-функции $\delta((\cdot) - \tau)$, или спектральной характеристики линейного функционала δ_τ , ставящего в соответствие функции $f(\cdot)$ ее значения в точке $t = \tau$ (см. примеры линейных функционалов на множестве функций одной переменной в разд. 1.1, п. 1 замечаний 2.4, а также рис. П.16). Соответствующие программы применялись во многих примерах, а именно 3.1–3.10.

$$\text{spGWN}(L) := \text{norm}(L, 0, 1) \quad \text{spPWN}(L) := \left| \begin{array}{l} S_{L-1} \leftarrow 0, \tau \leftarrow 0 \\ \text{while } 1 \\ \left| \begin{array}{l} \tau \leftarrow \tau + \text{rexp}(1, \lambda)_0 \\ S \leftarrow S + \text{sp}\Delta\tau(L, \tau) \text{ if } \tau < T \\ \text{break otherwise} \end{array} \right. \\ S - \text{spF1}(L) \end{array} \right.$$

Рис. П.67. Спектральные характеристики гауссовского и пуассоновского белых шумов

Программы для моделирования типовых случайных процессов рассматриваются в следующем разделе.

Линейные преобразования случайных процессов

Другой вариант нахождения нестационарных спектральных плотностей состоит в применении результатов, изложенных в разд. 2.4, т.е. с помощью формирующих фильтров. Для типовых случайных процессов можно ограничиться готовыми программами расчета спектральных характеристик функций и линейных операторов. Например, чтобы получить вторую нестационарную спектральную плотность S^W винеровского процесса согласно формуле (2.61), достаточно сформировать спектральную характеристику P^{-1} оператора интегрирования, а чтобы получить вторую нестационарную спектральную плотность S^X процесса Орнштейна–Уленбека, требуется спектральная характеристика P оператора дифференцирования с учетом начального значения (см. пример 2.17). Все необходимые для этого программы приведены в

разд. П.1, а рис. П.68 содержит программы $\text{spSW}(L)$ и $\text{spSOU}(L, \mu, \sigma)$, составленные на основе формирующих фильтров.

$$\text{spSW}(L) := I^T \quad \text{spSOU}(L, \mu, \sigma) := \begin{cases} A \leftarrow \sigma (P - \mu E)^{-1} \\ AA^T \end{cases}$$

Рис. П.68. Вторые нестационарные спектральные плотности S^W и S^X

Для первой из них (она применялась в примере 2.22) предварительно должна быть вычислена матрица I — спектральная характеристика оператора интегрирования. Для второй из них (часть результатов примера 2.24 получена с ее помощью) необходимо сформировать матрицу P — спектральную характеристику оператора дифференцирования с учетом начального значения, единичную матрицу E таких же размеров, и должны быть инициализированы переменные μ и σ — числовые параметры, характеризующие процесс Орнштейна–Уленбека.

Аналогично можно поступить и для броуновского моста. Здесь дополнительно нужна спектральная характеристика A оператора умножения на функцию $a_1(t) = t$, однако более простой путь — использование программы, показанной на рис. П.65.

П.3. Программы для главы 3

Нестационарные спектральные плотности случайных процессов

Дополним материал предыдущего раздела. На рис. П.69 и П.70 представлены программы $\text{spFexp}(L, a)$ для нахождения спектральных характеристик F^a показательной функции $f(t) = e^{at}$ относительно функций Уолша (1.7) и функций Хаара (1.8). Они с точностью до постоянного множителя задают первые нестационарные спектральные плотности процесса Орнштейна–Уленбека и геометрического броуновского движения (см. примеры случайных процессов в разд. 2.1). Соотношения для них приведены в примере 3.5 и там же эти программы использованы для расчетов. Кроме того, они задействованы в примере 6.12.

$$\text{spFexp}(L, a) := \begin{cases} c_0 \leftarrow \frac{1}{a\sqrt{T}}(e^{aT} - 1) \\ \text{for } m \in 0.. \log(L, 2) - 1 \\ \quad \text{for } k \in 0.. 2^m - 1 \\ \quad \quad c_{2^m+k} \leftarrow \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{2^{m+1}} (-1)^{j+1} q\left(k, \frac{2j-1}{2^{m+2}}T\right) \cdot \left[e^{\frac{ajT}{2^{m+1}}} - e^{\frac{a(j-1)T}{2^{m+1}}} \right] \end{cases}$$

Рис. П.69. Спектральная характеристика F^a (функции Уолша)

$$\text{spFexp}(L, a) := \left| \begin{array}{l} c_0 \leftarrow \frac{1}{a\sqrt{T}} \left(e^{\frac{aT}{2}} - 1 \right) \\ \text{for } m \in 0 \dots \log(L, 2) - 1 \\ \quad \text{for } k \in 0 \dots 2^m - 1 \\ \qquad c_{2^m+k} \leftarrow \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2^m}{T}} e^{\frac{k a T}{2^m}} \left(e^{\frac{a T}{2^{m+1}}} - 1 \right)^2 \\ c \end{array} \right.$$

Рис. П.70. Спектральная характеристика F^a (функции Хаара)

Моделирование типовых случайных процессов

Далее перейдем к основной части этого раздела — программам моделирования типовых случайных процессов (см. разд. 3.5): винеровского процесса (броуновского движения) (см. рис. П.71), броуновского моста (см. рис. П.72), процесса Орнштейна–Уленбека (см. рис. П.73), геометрического броуновского движения (см. рис. П.74), осциллятора Кубо (см. рис. П.75) и вращательной диффузии (см. рис. П.76).

$\Upsilon := \text{spGWN}(L)$	- спектральная характеристика гауссовского белого шума
$v(t) := \text{spInvert}(t, \Upsilon)$	- гауссовский белый шум
$I := \text{spI}(L)$	- спектральная характеристика оператора интегрирования
$W := I \Upsilon$	- спектральная характеристика винеровского процесса
$w(t) := \text{spInvert}(t, W)$	- винеровский процесс

Рис. П.71. Моделирование винеровского процесса

Предполагается, что до вызова любой из представленных в этой части программ инициализируются следующие переменные: T — правая граница отрезка T , L — порядок усечения спектральных характеристик, а также загружается модуль с программами расчета спектральных характеристик типовых функций и линейных операторов для выбранной базисной системы. С помощью этих программ решены примеры 3.1–3.7.

$\Upsilon := \text{spGWN}(L)$	- спектральная характеристика белого шума
$v(t) := \text{spInvert}(t, \Upsilon)$	- белый шум
$P := \text{spP0}(L)$	- спектральная характеристика оператора дифференцирования
$E := \text{identity}(L)$	- единичная матрица
$U := (TE - \text{spAt1}(L))^{-1}$	- спектральная характеристика оператора умножения на $(T-t)^{-1}$
$F1 := \text{spF1}(L)$	- спектральная характеристика функции $f(t) = 1$
$\Delta := \text{sp}\Delta 0(L)$	- спектральная характеристика дельта-функции
$\alpha := 0 \quad \beta := 1$	- краевые условия
$x0 := \alpha$	- начальное условие
$BB := (P + U)^{-1}(x0 \Delta + \beta U F1 + \Upsilon)$	- спектральная характеристика броуновского моста
$bb(t) := \text{spInvert}(t, BB)$	- броуновский мост

Рис. П.72. Моделирование броуновского моста

С точки зрения применения спектральной формы математического описания и спектрального метода перечисленные примеры имеют свои особенности. Первый из них (винеровский

процесс) требует нахождения только спектральной характеристики P^{-1} оператора интегрирования. Для второго примера (броуновский мост) необходимо найти спектральную характеристику P оператора дифференцирования с учетом начального значения, а также спектральную характеристику U оператора умножения на функцию $1/(T-t)$ и это единственный пример из рассмотренных, для которого подобная спектральная характеристика нетривиальна, т.е. не является диагональной матрицей, соответствующей умножению на константу. Кроме того, в этом примере неявно задано конечное условие, что представляет некоторый интерес для апробации алгоритма решения линейного стохастического дифференциального уравнения спектральным методом.

$\Upsilon := \text{spGWN}(L)$	- спектральная характеристика белого шума
$v(t) := \text{spInvert}(t, \Upsilon)$	- белый шум
$P := \text{spP0}(L)$	- спектральная характеристика оператора дифференцирования
$E := \text{identity}(L)$	- единичная матрица
$\Delta := \text{sp}\Delta 0(L)$	- спектральная характеристика дельта-функции
$\mu := -1 \quad \sigma := 1$	- числовые параметры
$x0 := 1$	- начальное условие
$OU := (P - \mu E)^{-1}(x0 \Delta + \sigma \Upsilon)$	- спектральная характеристика процесса Орнштейна-Уленбека
$ou(t) := \text{spInvert}(t, OU)$	- процесс Орнштейна-Уленбека

Рис. П.73. Моделирование процесса Орнштейна – Уленбека

В третьем и четвертом примерах (процесс Орнштейна – Уленбека и геометрическое броуновское движение) рассматриваются простейшие линейные стохастические системы с аддитивным и мультипликативным шумом соответственно, поэтому для пятого примера требуется дополнительно рассчитать спектральную характеристику V оператора умножения функций.

$\Upsilon := \text{spGWN}(L)$	- спектральная характеристика белого шума
$v(t) := \text{spInvert}(t, \Upsilon)$	- белый шум
$P := \text{spP0}(L)$	- спектральная характеристика оператора дифференцирования
$E := \text{identity}(L)$	- единичная матрица
$V := \text{spV}(L)$	- спектральная характеристика оператора умножения функций
$\Delta := \text{sp}\Delta 0(L)$	- спектральная характеристика дельта-функции
$\mu := 1 \quad \sigma := 0.5$	- числовые параметры
$\nu := \mu - \frac{\sigma^2}{2}$	- переход к уравнению Стратоновича
$x0 := 1$	- начальное условие
$GBM := (P - \nu E - \sigma \text{VF}(V, \Upsilon))^{-1}(x0 \Delta)$	- спектральная характеристика геом. броуновского движения
$gbm(t) := \text{spInvert}(t, GBM)$	- геометрическое броуновское движение

Рис. П.74. Моделирование геометрического броуновского движения

В пятом примере (осциллятор Кубо) в отличие от предыдущих примеров, которые иллюстрируют одномерный случай, описывается двумерный случай, т.е. решается векторное линейное стохастическое дифференциальное уравнение (см. разд. 3.3). Помимо этого он интересен тем, что является одним из примеров линейной инвариантной стохастической системы [47, 53, 242]. Это означает, что решение задачи Коши для стохастических дифференциальных уравнений, которые описывают данную стохастическую систему, с вероятностью 1

принадлежит многообразию, в данном случае круговому цилиндру, который характеризуется начальными данными. И спектральный метод применяется не только для приближенного моделирования траекторий, но и для вычисления их отклонения от многообразия вследствие методической погрешности.

$\Upsilon := \text{spGWN}(L)$	- спектральная характеристика белого шума
$v(t) := \text{spInvert}(t, \Upsilon)$	- белый шум
$P := \text{spP0}(L)$	- спектральная характеристика оператора дифференцирования
$E := \text{identity}(L)$	- единичная матрица
$V := \text{spV}(L)$	- спектральная характеристика оператора умножения функций
$F1 := \text{spF1}(L)$	- спектральная характеристика функции $f(t) = 1$
$\Delta := \text{sp}\Delta 0(L)$	- спектральная характеристика дельта-функции
$x10 := 1 \quad x20 := 1$	- начальные условия
$Q := \text{stack}(x10 \Delta, x20 \Delta)$	- агрегирование
$Z := \text{stack}(\text{augment}(P, -E - \sqrt{2} VF(V, \Upsilon)), \text{augment}(E + \sqrt{2} VF(V, \Upsilon), P))$	- агрегирование
$X := Z^{-1}Q$	- нахождение решения в спектральной области
$X1 := \text{submatrix}(X, 0, L - 1, 0, 0)$	- спектральная характеристика 1-й координаты (декомпозиция)
$X2 := \text{submatrix}(X, L, 2L - 1, 0, 0)$	- спектральная характеристика 2-й координаты (декомпозиция)
$x1(t) := \text{spInvert}(t, X1)$	- 1-я координата
$x2(t) := \text{spInvert}(t, X2)$	- 2-я координата

Рис. П.75. Моделирование осциллятора Кубо

Шестой пример (вращательная диффузия) содержит трехмерную линейную инвариантную стохастическую систему [53] с тремя независимыми винеровскими процессами. Решение задачи Коши для заданных стохастических дифференциальных уравнений с вероятностью 1 принадлежит многообразию — сфере в трехмерном пространстве. И спектральный метод здесь также применяется не только для приближенного моделирования траекторий, но и для вычисления их отклонения от рассматриваемого многообразия.

$\Upsilon := \text{spGWNs}(L, 3)$	- спектральные характеристики белых шумов
$P := \text{spP0}(L)$	- спектральная характеристика оператора дифференцирования
$E := \text{identity}(L)$	- единичная матрица
$V := \text{spV}(L)$	- спектральная характеристика оператора умножения функций
$F1 := \text{spF1}(L)$	- спектральная характеристика функции $f(t) = 1$
$\Delta := \text{sp}\Delta 0(L)$	- спектральная характеристика дельта-функции
$x10 := 0 \quad x20 := 1 \quad x30 := 2$	- начальные условия
$K0 := VF(V, \Upsilon_0) \quad K1 := VF(V, \Upsilon_1) \quad K2 := VF(V, \Upsilon_2)$	- вспомогательные матрицы
$Q := \text{stack}(x10 \Delta, x20 \Delta, x30 \Delta)$	- агрегирование
$Z := \text{stack}(\text{augment}(P, K2, -K1), \text{augment}(-K2, P, K0), \text{augment}(K1, -K0, P))$	- агрегирование
$X := Z^{-1}Q$	- нахождение решения в спектральной области
$X1 := \text{submatrix}(X, 0, L - 1, 0, 0)$	- спектральная характеристика 1-й координаты (декомпозиция)
$X2 := \text{submatrix}(X, L, 2L - 1, 0, 0)$	- спектральная характеристика 2-й координаты (декомпозиция)
$X3 := \text{submatrix}(X, 2L, 3L - 1, 0, 0)$	- спектральная характеристика 3-й координаты (декомпозиция)
$x1(t) := \text{spInvert}(t, X1)$	- 1-я координата
$x2(t) := \text{spInvert}(t, X2)$	- 2-я координата
$x3(t) := \text{spInvert}(t, X3)$	- 3-я координата

Рис. П.76. Моделирование вращательной диффузии

Спектральный метод может применяться и в теории оценивания, в разд. 3.4 содержатся теоретические основы этого подхода. Здесь же приведем дополнение к программе моделирования процесса Орнштейна – Уленбека (см. рис. П.73), которое требуется для решения задачи оценивания из примера 3.8. Оно показано на рис. П.77 и в нем представлено только моделирование оцениваемой траектории, измерений и пример вычисления весовых коэффициентов для одной реализации. Кроме того, на этом рисунке есть программа $\text{spA}\chi(L,t)$ для нахождения спектральной характеристики оператора умножения на индикатор множества $[0, t]$ относительно косинусоид, где $t \in \mathbb{T}$.

$$\text{spA}\chi(L,t) := \left\{ \begin{array}{l} F \leftarrow \text{spF}\chi(2L,t) \\ \text{for } i \in 0..L-1 \\ \quad \text{for } j \in i..L-1 \\ \quad \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{i,j} \leftarrow \frac{F_{j-i} \sqrt{1 + (i=j)(i>0)} + F_{i+j}(i>0)}{\sqrt{[1 + (i>0)]T}} \\ c_{j,i} \leftarrow c_{i,j} \text{ if } i \neq j \end{array} \right. \\ c \end{array} \right.$$

$Q := \text{spGWN}(L)$	- спектральная характеристика белого шума
$q(t) := \text{spInvert}(t, Q)$	- белый шум
$V := \text{spV}(L)$	- спектральная характеристика множительного звена
$A\chi := \text{spA}\chi(L, 0.5)$	- спектральная характеристика оператора умножения на индикатор множества $[0, 0.5]$
$\lambda := 5 \quad \gamma := 1 \quad \zeta := 0.2$	- числовые параметры
$Z := \lambda \text{VF}(V, \text{OU})^{\gamma-1} \text{OU} + \zeta Q$	- спектральная характеристика измерений
$z(t) := \text{spInvert}(t, Z)$	- измерения
$\Lambda := \lambda \text{VF}(V, \text{OU})^{\gamma-1} \text{OU}$	- вспомогательная спектральная характеристика
$\omega := e^{\zeta^{-2} \Lambda^T (Z-0.5\Lambda)}$	- весовой коэффициент при $t = 1$
$\omega := e^{\zeta^{-2} \Lambda^T A\chi(Z-0.5\Lambda)}$	- весовой коэффициент при $t = 0.5$

Рис. П.77. Оценивание траектории процесса Орнштейна – Уленбека

Моделирование турбулентного ветра

В развитие разд. 3.5 моделирование типовых случайных процессов затрагивается в разд. 3.6, но в нем задачи формулируются как прикладные, т.е. описывающие реальные процессы. Речь идет о моделировании турбулентного ветра с помощью формирующего фильтра Драйдена в двух постановках: самой простой (одномерной, см. пример 3.9) и более сложной (двумерной, см. пример 3.10). Соответствующие программы показаны на рис. П.78 и П.79.

Указанные программы составляют основу решения примеров 3.9 и 3.10. Первая из них отличается от программы для моделирования процесса Орнштейна – Уленбека только числовыми параметрами (см. рис. П.73). Вторая в отличие от программ, показанных на рис. П.75 и П.76, не использует операций агрегирования и декомпозиции.

Аналогично, до вызова этих программ необходимо инициализировать две переменные: T — правую границу отрезка \mathbb{T} , L — порядок усечения спектральных характеристик, и загрузить

$\Upsilon := \text{spGWN}(L)$	- спектральная характеристика белого шума
$v(t) := \text{spInvert}(t, \Upsilon)$	- белый шум
$P := \text{spP0}(L)$	- спектральная характеристика оператора дифференцирования
$E := \text{identity}(L)$	- единичная матрица
$\Delta := \text{sp}\Delta 0(L)$	- спектральная характеристика дельта-функции
$Vt := 60$	- продольная скорость полета
$Lt := 1000$	- масштаб турбулентности
$\nu := Vt \div Lt$	- числовой параметр
$\sigma := 1.5$	- среднеквадратическое отклонение скорости ветра
$x0 := \text{morm}(1, 0, \sigma)_0$	- начальная скорость ветра
$X := (P + \nu E)^{-1}(x0 \Delta + \sqrt{2\nu} \sigma \Upsilon)$	- спектральная характеристика скорости ветра
$x(t) := \text{spInvert}(t, X)$	- скорость ветра

Рис. П.78. Формирующий фильтр Драйдена

$\Upsilon := \text{spGWN}(L)$	- спектральная характеристика белого шума
$v(t) := \text{spInvert}(t, \Upsilon)$	- белый шум
$P := \text{spP0}(L)$	- спектральная характеристика оператора дифференцирования
$E := \text{identity}(L)$	- единичная матрица
$\Delta := \text{sp}\Delta 0(L)$	- спектральная характеристика дельта-функции
$Vt := 60$	- продольная скорость полета
$Lt := 1000$	- масштаб турбулентности
$\nu := Vt \div Lt$	$\lambda := 10\nu$ - числовые параметры
$\sigma := 1.5$	- среднеквадратическое отклонение скорости ветра
$x0 := \text{morm}(1, 0, \sigma)_0$	$y0 := 0$ - начальные условия
$X1 := [P^2 + (\lambda + \nu)P + \lambda \nu E]^{-1} [x0[P + (\lambda + \nu)E]\Delta + y0 \Delta + \sqrt{2\lambda \nu (\lambda + \nu)} \sigma \Upsilon]$	- спектральная характеристика скорости ветра
$x1(t) := \text{spInvert}(t, X1)$	- скорость ветра

Рис. П.79. Модифицированный формирующий фильтр Драйдена

модуль с программами расчета спектральных характеристик типовых функций и линейных операторов для выбранной базисной системы.

П.4. Программы для главы 4

Спектральные характеристики функций и линейных функционалов

Глава 4 имеет вполне определенную направленность, связанную с представлением функций $\mathbb{k}(\cdot)$ и $\mathbb{k}_\psi(\cdot)$, заданных формулами (4.15) и (4.24) соответственно, причем для функции $\mathbb{k}_\psi(\cdot)$ основное внимание уделяется варианту (4.26), т.е. функции $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$, $n_l \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $l = 1, \dots, k$. Это, разумеется, находит отражение и в программах.

Так, на рис. П.80 и П.81 показаны программы $\text{spK3coef}(i)$ для расчета коэффициентов разложения функции $\mathbb{k}(\cdot)$ — элементов спектральных характеристик \mathbb{K} — при $k = 3$ относительно полиномов Лежандра (1.5) и косинусоид (1.6) (см. пример 4.3). Значениям $k = 1$ и $k = 2$ соответствуют функция $f_0(t) \equiv 1$ и единичная ступенчатая функция $1(\cdot)$, а программы для нахождения их спектральных характеристик описаны в разд. П.1 с учетом того, что дву-

мерная спектральная характеристика единичной ступенчатой функции — это спектральная характеристика P^{-1} оператора интегрирования. Векторный параметр i описан ниже.

$$\begin{aligned}
 H(i,j) &:= T \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } i+j=0 \\ \text{otherwise} & \\ \begin{cases} \frac{i-j}{2\sqrt{4\max(i,j)^2-1}} & \text{if } |i-j|=1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} & \end{cases} \\
 V(i,j,k) &:= \sqrt{\frac{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}{T}} \begin{cases} z \leftarrow (\text{mod}(i+j+k,2)=0) \wedge (|j-k| \leq i \leq j+k) \\ _f(i+j-k) _f(j+k-i) _f(k+i-j) _g(i+j+k) & \text{if } z \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 \Delta(i,k) &:= \text{if}(k > 0, H(k-1,k), H(0,0))(i = \max(k-1,0)) \\
 \text{spK3coef}(i) &:= \begin{cases} \sum_{k=|i_0-i_1-1|}^{i_0+i_1-1} [V(i_0-1, i_1, k) H(i_0-1, i_0) [\Delta(i_2, k) + H(k+1, k)(i_2 = k+1)]] \dots & \text{if } i_0 > 0 \\ + \sum_{k=|i_0-i_1+1|}^{i_0+i_1+1} [V(i_0+1, i_1, k) H(i_0+1, i_0) [\Delta(i_2, k) + H(k+1, k)(i_2 = k+1)]] \\ \text{otherwise} \\ \frac{H(0,0)[H(i_1-1, i_1)(i_2 = i_1-1) + H(i_1+1, i_1)(i_2 = i_1+1)]}{\sqrt{T}} \dots & \text{if } i_1 > 0 \\ + H(1,0) \sum_{k=|1-i_1|}^{i_1+1} [V(1, i_1, k) [\Delta(i_2, k) + H(k+1, k)(i_2 = k+1)]] \\ \frac{[(H(0,0))^2 + H(1,0)H(0,1)](i_2 = 0) + H(0,0)H(1,0)(i_2 = 1) + H(1,0)H(2,1)(i_2 = 2)}{\sqrt{T}} & \text{otherwise} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Рис. П.80. Элементы спектральной характеристики \mathbb{K} при $k = 3$ (полиномы Лежандра)

На рис. П.80 можно найти вспомогательные подпрограммы $H(i,j)$ и $V(i,j,k)$ для вычисления элементов спектральной характеристики $H = P^{-1}$ оператора интегрирования и спектральной характеристики V оператора умножения функций (см. также разд. П.1 и рис. П.35, П.41). Их параметры i, j и k — это скаляры.

Затем на рис. П.82–П.84 представлен набор вспомогательных подпрограмм, соответствующих следующим операциям (см. выражения (4.17), (4.18) и (4.30)):

- \mathbb{D}^{-1} — подпрограмма `polyint(M)`,
- \mathbb{V}_j — подпрограмма `polymult(M,j)`,
- \mathbb{L}_k — подпрограмма `polymultint(M,k)`,
- \mathbb{M}_n — подпрограмма `polymultmonom(M,n)`,
- \mathbb{U} — подпрограммы `polydegree(M)` и `polysimplify(M)`,

включая дополнительную программу `Atn(i,j,n)` вычисления элементов спектральной характеристики A^n оператора умножения на функцию $a_n(t) = t^n$ относительно полиномов Лежандра, рекуррентные формулы для которых получены в примере 1.10, $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{array}{l}
\text{spK3coef}(i) := \\
\Gamma\sqrt{T} \left| \begin{array}{l}
\text{if } i_0 \neq 0 \\
\left[\begin{array}{l}
\frac{1}{i_0 \pi^2} \left[\frac{(i_2 = 0)\sqrt{2} - (i_0 + i_1 = i_2)}{(i_0 + i_1)\sqrt{2}} + \frac{(i_2 = 0)\sqrt{2} - (|i_0 - i_1| = i_2)}{(i_0 - i_1)\sqrt{2}} \text{ if } i_0 \neq i_1 \\
0 \text{ otherwise} \right] \text{ if } i_1 > 0 \\
\frac{(i_2 = 0)\sqrt{2} - (i_0 = i_2)}{(i_0)^2 \pi^2} \text{ otherwise}
\end{array} \right. \\
\text{otherwise} \\
\left[\begin{array}{l}
\frac{(i_1 = i_2) - (i_2 = 0)\sqrt{2}}{(i_1)^2 \pi^2} - \frac{1}{i_1 \pi^2 \sqrt{1 + (i_2 = 0)}} \left[\frac{(-1)^{i_1+i_2}}{i_1 + i_2} + \frac{(-1)^{i_1-i_2}}{i_1 - i_2} \text{ if } i_1 \neq i_2 \\
\frac{(-1)^{i_1+i_2}}{i_1 + i_2} \text{ otherwise} \right] \text{ if } i_1 \neq 0 \\
\text{otherwise} \\
\left[\begin{array}{l}
\frac{(-1)^{i_2}\sqrt{2}}{(i_2)^2 \pi^2} \text{ if } i_2 \neq 0 \\
\frac{1}{6} \text{ otherwise}
\end{array} \right.
\end{array} \right.
\end{array}
\right.
\end{array}$$

Рис. П.81. Элементы спектральной характеристики \mathbb{K} при $k = 3$ (косинусоиды)

$$\begin{array}{l}
\text{polyint}(M) := \\
\left[\begin{array}{l}
\text{col} \leftarrow 0 \\
\text{for } l \in 0 \dots \text{cols}(M) - 1 \\
\left[\begin{array}{l}
i \leftarrow M_{0,l} \\
\text{if } i = 0 \\
\left[\begin{array}{l}
R_{0,\text{col}} \leftarrow 0, R_{1,\text{col}} \leftarrow H(0,0) M_{1,1} \\
R_{0,\text{col}+1} \leftarrow 1, R_{1,\text{col}+1} \leftarrow H(1,0) M_{1,1}
\end{array} \right. \\
\text{otherwise} \\
\left[\begin{array}{l}
R_{0,\text{col}} \leftarrow i - 1, R_{1,\text{col}} \leftarrow H(i-1,i) M_{1,1} \\
R_{0,\text{col}+1} \leftarrow i + 1, R_{1,\text{col}+1} \leftarrow H(i+1,i) M_{1,1}
\end{array} \right. \\
\text{col} \leftarrow \text{col} + 2
\end{array} \right. \\
R
\end{array} \right.
\end{array}$$

Рис. П.82. Операция \mathbb{D}^{-1} (полиномы Лежандра)

Здесь уместно напомнить используемый формат данных (см. разд. 4.1): M — это матрица, каждый столбец которой содержит пару чисел (i, a) , где $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ и $a \in \mathbb{R}$. Эта пара задает полином $a\hat{P}(i, t)$, т.е. полином Лежандра степени i с коэффициентом a , а вся матрица M содержит информацию о линейной комбинации полиномов Лежандра.

Указанный набор вспомогательных подпрограмм нужен при формировании программ $\text{spKcoef}(i)$ и $\text{spKncoef}(i, n)$ расчета коэффициентов разложения функций $\mathbb{k}(\cdot)$ и $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$ для произвольного $k \in \mathbb{N}$ относительно полиномов Лежандра (см. рис. П.85 и П.86). В данном случае векторный параметр i содержит значения индексов i_1, \dots, i_k (в этой и следующих программах нумерация их индексов начинается с нуля из-за особенностей реализации, аналогичная ситуация для программ $\text{spK3coef}(i)$, показанных на рис. П.80 и П.81). Величина k определяется как размер вектора i .

$$\begin{array}{l}
\text{polymult}(M, j) := \left[\begin{array}{l} \text{col} \leftarrow 0 \\ \text{for } 1 \in 0 \dots \text{cols}(M) - 1 \\ \quad \left[\begin{array}{l} i \leftarrow M_{0,1} \\ \text{for } k \in |i - j| \dots i + j \\ \quad \left[\begin{array}{l} c \leftarrow V(i, j, k) \\ \text{if } c \neq 0 \\ \quad \left[\begin{array}{l} R_{0, \text{col}} \leftarrow k \\ R_{1, \text{col}} \leftarrow cM_{1,1} \\ \text{col} \leftarrow \text{col} + 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \text{polysimplify}(R) \end{array} \right. \end{array} \right. \\
\text{polymultint}(M, k) := \left[\begin{array}{l} R \leftarrow 0 \\ \text{col} \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 0 \dots \text{cols}(M) - 1 \\ \quad \left[\begin{array}{l} i \leftarrow M_{0,j} \\ R \leftarrow R + M_{1,j} \text{ if } i = k \end{array} \right. \\ R \end{array} \right. \\
\text{polydegree}(M) := \left[\begin{array}{l} \text{deg} \leftarrow 0 \\ \text{for } 1 \in 0 \dots \text{cols}(M) - 1 \\ \quad \text{deg} \leftarrow M_{0,1} \text{ if } M_{0,1} > \text{deg} \\ \text{deg} \end{array} \right. \\
\text{polysimplify}(M) := \left[\begin{array}{l} \text{deg} \leftarrow \text{polydegree}(M) \\ X_{\text{deg}} \leftarrow 0 \\ \text{for } 1 \in 0 \dots \text{cols}(M) - 1 \\ \quad X_{M_{0,1}} \leftarrow X_{M_{0,1}} + M_{1,1} \\ \text{col} \leftarrow 0 \\ M \leftarrow 0 \\ \text{for } 1 \in 0 \dots \text{deg} \\ \quad \text{if } X_1 \neq 0 \\ \quad \quad \left[\begin{array}{l} R_{0, \text{col}} \leftarrow 1, R_{1, \text{col}} \leftarrow X_1 \\ \text{col} \leftarrow \text{col} + 1 \end{array} \right. \\ R \end{array} \right.
\end{array}$$

Рис. П.83. Операции \mathbb{V}_j , \mathbb{L}_k и \mathbb{U} (полиномы Лежандра)

$$\begin{array}{l}
\text{Atn}(i, j, n) := \left[\begin{array}{l} i = j \text{ if } n = 0 \\ \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} \frac{i+1}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}} \text{Atn}(i+1, j, n-1) \dots \\ + \text{Atn}(i, j, n-1) + \frac{i}{\sqrt{(2i-1)(2i+1)}} \text{Atn}(i-1, j, n-1) \end{array} \right] \end{array} \right] \text{ otherwise} \\
\text{polymultmonom}(M, n) := \left[\begin{array}{l} \text{col} \leftarrow 0 \\ \text{for } 1 \in 0 \dots \text{cols}(M) - 1 \\ \quad \left[\begin{array}{l} i \leftarrow M_{0,1} \\ \text{for } j \in \max(0, i - n) \dots i + n \\ \quad \left[\begin{array}{l} R_{0, \text{col}} \leftarrow j, R_{1, \text{col}} \leftarrow \text{Atn}(i, j, n) M_{1,1} \\ \text{col} \leftarrow \text{col} + 1 \end{array} \right. \\ \text{polysimplify}(R) \end{array} \right. \end{array} \right.
\end{array}$$

Рис. П.84. Операция \mathbb{M}_n (полиномы Лежандра)

$$\begin{array}{l}
\text{spKcoef}(i) := \left[\begin{array}{l} k \leftarrow \text{rows}(i) \\ M \leftarrow \begin{pmatrix} i_0 & 1 \end{pmatrix}^T \\ \text{for } 1 \in 2 \dots k - 1 \quad \text{if } k > 2 \\ \quad \left[\begin{array}{l} M \leftarrow \text{polyint}(M) \\ M \leftarrow \text{polymult}(M, i_{1-1}) \end{array} \right. \\ M \leftarrow \text{polyint}(M) \\ \text{polymultint}(M, i_{k-1}) \end{array} \right.
\end{array}$$

Рис. П.85. Элементы спектральной характеристики \mathbb{K} (полиномы Лежандра)

Произвольность k и n_1, \dots, n_k , а также L понимается в том смысле, что никаких формальных ограничений на эти величины не накладываемся. В то же время здесь рассматриваются не алгоритмы вычислений, а их конкретная реализация в виде программ, поэтому эти величины в неявной форме ограничены, например объемом памяти, которую выделяет Mathcad для хранения данных.

Далее на рис. П.87–П.90 показаны вспомогательные подпрограммы, которые соответству-

```

spKcoef(i,n) :=
  k ← rows(i)
  M ← (i_0 1)^T
  M ← polymultmonom(M,n_0) if n_0 > 0
  for l ∈ 2..k-1
    if k > 2
      M ← polyint(M)
      M ← polymultmonom(M,n_{l-1}) if n_{l-1} > 0
      M ← polymult(M,i_{l-1})
  M ← polyint(M)
  M ← polymultmonom(M,n_{k-1}) if n_{k-1} > 0
  polymultint(M,i_{k-1})

```

Рис. П.86. Элементы спектральной характеристики $\mathbb{K}^{n_1 \dots n_k}$ (полиномы Лежандра)

ют следующим операциям (см. выражения (4.20), (4.21) и (4.27)):

- \mathbb{D}^{-1} — подпрограмма `trigint(M)`,
- \mathbb{A}_j^{\sin} — подпрограмма `trigmult1(M,j)`,
- \mathbb{A}_j^{\cos} — подпрограмма `trigmult2(M,j)`,
- \mathbb{Q}_π — подпрограмма `trigvalue(M,t)`,
- \mathbb{M}_n — подпрограмма `trigmult0(M,n)`.

Можно дополнить, что, вообще говоря, вместо операции \mathbb{Q}_π реализована более общая операция \mathbb{Q}_t , но здесь она применяется при условии $t = \pi$.

Для перечисленных выше вспомогательных подпрограмм принят специальный формат данных (см. разд. 4.1): M — это матрица, каждый столбец которой определяет четверку чисел (γ, a, ν, i) , где $\gamma \in \{0, 1, 2\}$, $a \in \mathbb{R}$, $\nu \in \{0, 1, 2, \dots\}$ и $i \in \mathbb{N}$. Любая такая четверка задает функцию одной переменной, а именно при $\gamma = 0$ — at^ν , при $\gamma = 1$ — $at^\nu \sin it$ и при $\gamma = 2$ — $at^\nu \cos it$. Вся матрица M определяет сумму соответствующих функций.

На основе вспомогательных подпрограмм сформированы программы `spKcoef(i)` и `spKcoef(i,n)` расчета коэффициентов разложения функций $\mathbb{K}(\cdot)$ и $\mathbb{K}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$ для произвольного $k \in \mathbb{N}$ относительно косинусов (см. рис. П.91 и П.92) и тригонометрических функций (см. рис. П.93 и П.94).

Предложенные алгоритмы расчета элементов спектральных характеристик \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 \dots n_k}$ (см. разд. 4.1) и соответствующие им программы вряд ли можно считать оптимальными по таким критериям, как количество выполняемых операций и время вычислений. Но они являются компромиссными по сравнению с двумя другими вариантами: применением символьного процессора `Mathcad` и получением явных формул для коэффициентов разложения функций $\mathbb{K}(\cdot)$ и $\mathbb{K}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$ при произвольных k и n_1, \dots, n_k .

Рис. П.95 содержит вспомогательные подпрограммы, которые необходимы для расчета коэффициентов разложения функции $\mathbb{K}(\cdot)$ при любом $k \in \mathbb{N}$ относительно блочно-импульсных функций (1.15), единственный входной параметр для которых — это упорядоченный набор значений $i = (i_1 \dots i_k)^T$ (в программах нумерация индексов начинается с нуля):

$\text{trigint}(M) := \left \begin{array}{l} \text{col} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0 \dots \text{cols}(M) - 1 \\ \quad \text{if } M_{0,i} = 0 \\ \quad \quad \left \begin{array}{l} R^{\langle \text{col} \rangle} \leftarrow \left(0 \quad \frac{M_{1,i}}{M_{2,i+1}} \quad M_{2,i+1} \quad 0 \right)^T \\ \text{col} \leftarrow \text{col} + 1 \end{array} \right. \\ \quad \text{if } M_{0,i} = 1 \\ \quad \quad \left \begin{array}{l} \nu \leftarrow M_{2,i} \\ \text{for } k \in 0 \dots \nu \\ \quad \quad \left \begin{array}{l} R^{\langle \text{col} \rangle} \leftarrow \left[1 + (\text{mod}(k,2) = 0) \quad -\frac{M_{1,i-f1(k)}}{(M_{3,i})^{k+1}} \frac{\nu!}{(\nu-k)!} \quad \nu - k \quad M_{3,i} \right]^T \\ \text{if } (R_{0,\text{col}} = 2) \wedge (k = \nu) \\ \quad \quad \left \begin{array}{l} R^{\langle \text{col}+1 \rangle} \leftarrow \left[0 \quad \frac{M_{1,i-f1(\nu)}}{(M_{3,i})^{\nu+1}} \quad \nu! \quad 0 \quad 0 \right]^T \\ \text{col} \leftarrow \text{col} + 2 \end{array} \right. \\ \text{col} \leftarrow \text{col} + 1 \quad \text{otherwise} \end{array} \right. \\ \quad \text{if } M_{0,i} = 2 \\ \quad \quad \left \begin{array}{l} \nu \leftarrow M_{2,i} \\ \text{for } k \in 0 \dots \nu \\ \quad \quad \left \begin{array}{l} R^{\langle \text{col} \rangle} \leftarrow \left[1 + (\text{mod}(k,2) \neq 0) \quad \frac{M_{1,i-f2(k)}}{(M_{3,i})^{k+1}} \frac{\nu!}{(\nu-k)!} \quad \nu - k \quad M_{3,i} \right]^T \\ \text{if } (R_{0,\text{col}} = 2) \wedge (k = \nu) \\ \quad \quad \left \begin{array}{l} R^{\langle \text{col}+1 \rangle} \leftarrow \left[0 \quad -\frac{M_{1,i-f2(\nu)}}{(M_{3,i})^{\nu+1}} \quad \nu! \quad 0 \quad 0 \right]^T \\ \text{col} \leftarrow \text{col} + 2 \end{array} \right. \\ \text{col} \leftarrow \text{col} + 1 \quad \text{otherwise} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ R \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} _f1(k) := \left \begin{array}{l} x \leftarrow \text{mod}(k,4) \\ -1 \quad \text{if } (x = 1) \vee (x = 2) \\ 1 \quad \text{otherwise} \end{array} \right. \\ _f2(k) := \left \begin{array}{l} x \leftarrow \text{mod}(k,4) \\ 1 \quad \text{if } (x = 0) \vee (x = 1) \\ -1 \quad \text{otherwise} \end{array} \right. \end{array}$
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Рис. П.87. Операция \mathbb{D}^{-1} (косинусоиды, тригонометрические функции)

- подсчет максимального числа размещений элементов из классов эквивалентности, которые соответствуют множеству элементов вектора i и бинарному отношению «= \Rightarrow » — подпрограмма $\text{coincidence}(i)$,
- проверка упорядоченности элементов вектора i по бинарным отношениям « \langle » и « \leq » — подпрограммы $\text{order1}(i)$ и $\text{order2}(i)$.

Через блочно-импульсные функции выражаются как функции Уолша (1.7), так и функции Хаара (1.8), при этом они обеспечивают наиболее простые расчетные и легко реализуемые в виде программы формулы. Соответствующая программа отражена на рис. П.96.

Чтобы получить коэффициенты разложения функции $k(\cdot)$ относительно функций Уолша и Хаара, применяется процедура изменения базисной системы (см. свойства спектрального преобразования функций многих переменных в разд. 4.1). Для этого задействуются программы $\text{sp}\Delta\text{X}\Pi(L)$ и $\text{sp}\Delta\text{W}\Pi(L)$ нахождения матриц, связывающих блочно-импульсные функции

```

trigmult1(M,j) :=
  col ← 0
  for i ∈ 0 .. cols(M) - 1
    if M0,i = 0
      R<col> ← (1 M1,i M2,i j)T
      col ← col + 1
    if M0,i = 1
      R<col> ← [ 2 - 2(M3,i - j = 0)  $\frac{M_{1,i}}{2}$  M2,i |M3,i - j | ]T
      R<col+1> ← ( 2  $-\frac{M_{1,i}}{2}$  M2,i M3,i + j )T
      col ← col + 2
    if M0,i = 2
      R<col> ← ( 1  $\frac{M_{1,i}}{2}$  M2,i j + M3,i )T
      if j - M3,i ≠ 0
        R<col+1> ← ( 1  $\frac{M_{1,i}}{2}$  sign(j - M3,i) M2,i |j - M3,i| )T
        col ← col + 2
      col ← col + 1 otherwise
  R

```

Рис. П.88. Операция \mathbb{A}_j^{\sin} (косинусоиды, тригонометрические функции)

```

trigmult2(M,j) :=
  col ← 0
  for i ∈ 0 .. cols(M) - 1
    if M0,i = 0
      R<col> ← (2 M1,i M2,i j)T
      col ← col + 1
    if M0,i = 1
      R<col> ← ( 1  $\frac{M_{1,i}}{2}$  M2,i M3,i + j )T
      if M3,i - j ≠ 0
        R<col+1> ← ( 1  $\frac{M_{1,i}}{2}$  sign(M3,i - j) M2,i |M3,i - j | )T
        col ← col + 2
      col ← col + 1 otherwise
    if M0,i = 2
      R<col> ← [ 2 - 2(M3,i - j = 0)  $\frac{M_{1,i}}{2}$  M2,i |M3,i - j | ]T
      R<col+1> ← ( 2  $\frac{M_{1,i}}{2}$  M2,i M3,i + j )T
      col ← col + 2
  R

```

Рис. П.89. Операция \mathbb{A}_j^{\cos} (косинусоиды, тригонометрические функции)

<pre> trigvalue(M,t) := R ← 0 for i ∈ 0 .. cols(M) - 1 R ← R + M_{1,i}t^{M_{2,i}} if M_{0,i} = 0 R ← R + M_{1,i}t^{M_{2,i}} sin(M_{3,i}t) if M_{0,i} = 1 R ← R + M_{1,i}t^{M_{2,i}} cos(M_{3,i}t) if M_{0,i} = 2 R </pre>	<pre> trigmult0(M,n) := col ← 0 for i ∈ 0 .. cols(M) - 1 M_{1,i} ← $\frac{M_{1,i}}{\pi^n}$ M_{2,i} ← M_{2,i} + n M </pre>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Рис. П.90. Операции \mathbb{Q}_t и \mathbb{M}_n (косинусоиды, тригонометрические функции)

```

spKcoef(i) :=
  k ← rows(i)
  M ← (0 1 0 0)T if i0 = 0
  M ← (2 1 0 i0)T otherwise
  a ←  $\frac{T}{\pi} \sqrt{\frac{1 + (i_0 > 0)}{T}}$ 
  for l ∈ 2..k if k > 1
  | M ← trigint(M)
  | M ← trigmult2(M, il-1) if il-1 ≠ 0
  | a ← a  $\frac{T}{\pi} \sqrt{\frac{1 + (i_{l-1} > 0)}{T}}$ 
  M ← trigint(M)
  a trigvalue(M, π)

```

Рис. П.91. Элементы спектральной характеристики \mathbb{K} (косинусоиды)

```

spKncoef(i, n) :=
  k ← rows(i)
  M ← (0 1 0 0)T if i0 = 0
  M ← (2 1 0 i0)T otherwise
  M ← trigmult0(M, n0) if n0 > 0
  a ←  $\frac{T^{1+n_0}}{\pi} \sqrt{\frac{1 + (i_0 > 0)}{T}}$ 
  for l ∈ 2..k if k > 1
  | M ← trigint(M)
  | M ← trigmult2(M, il-1) if il-1 ≠ 0
  | M ← trigmult0(M, nl-1) if nl-1 > 0
  | a ← a  $\frac{T^{1+n_{l-1}}}{\pi} \sqrt{\frac{1 + (i_{l-1} > 0)}{T}}$ 
  M ← trigint(M)
  a trigvalue(M, π)

```

Рис. П.92. Элементы спектральной характеристики $\mathbb{K}^{n_1 \dots n_k}$ (косинусоиды)

(1.15) с функциями Уолша и Хаара (см. рис. П.25 и П.26). Отметим, что схожий подход применялся ранее в разд. П.2, а именно в программах расчета второй нестационарной спектральной плотности винеровского процесса и, следовательно, второй нестационарной спектральной плотности броуновского моста (см. рис. П.63 и П.65). Реализация программы `spKcoef(i)` для функций Уолша и Хаара показана на рис. П.97, она требует предварительного расчета матрицы Δ изменения базисной системы. При вычислении используется свойство коэффициентов разложения функции $\mathbb{K}(\cdot)$ относительно блочно-импульсных функций, позволяющее сократить число слагаемых.

В программе `spKcoef(i)` имеется ограничение на величину k : $k = 2, 3, 4$, однако не составляет труда такое ограничение снять.

Следом на рис. П.98 показана программа расчета коэффициентов разложения функций $\mathbb{K}_{n_1 n_2}(\cdot)$, т.е. при $k = 2$, относительно блочно-импульсных функций для двух вариантов: $n_1 = 0$, $n_2 = 1$ и $n_1 = 1$, $n_2 = 0$. Эти величины используются для вычисления коэффициентов разложе-

```

spKcoef(i) :=
  k ← rows(i)
  M ← (0 1 0 0)T if i0 = 0
  otherwise
    M ← (2 1 0 i0)T if mod(i0, 2) = 0
    M ← (1 1 0 i0 + 1)T otherwise
  a ←  $\frac{\Gamma}{\pi} \sqrt{\frac{1 + (i_0 > 0)}{\Gamma}}$ 
  for l ∈ 2..k if k > 1
    M ← trint(M)
    if il-1 ≠ 0
      M ← trmult2(M, il-1) if mod(il-1, 2) = 0
      M ← trmult1(M, il-1 + 1) otherwise
    a ← a  $\frac{\Gamma}{\pi} \sqrt{\frac{1 + (i_{l-1} > 0)}{\Gamma}}$ 
  M ← trint(M)
  a trigvalue(M, π)

```

Рис. П.93. Элементы спектральной характеристики \mathbb{K} (тригонометрические функции)

```

spKnccoef(i, n) :=
  k ← rows(i)
  M ← (0 1 0 0)T if i0 = 0
  otherwise
    M ← (2 1 0 i0)T if mod(i0, 2) = 0
    M ← (1 1 0 i0 + 1)T otherwise
  M ← trmult0(M, n0) if n0 > 0
  a ←  $\frac{\Gamma^{1+n_0}}{\pi} \sqrt{\frac{1 + (i_0 > 0)}{\Gamma}}$ 
  for l ∈ 2..k if k > 1
    M ← trint(M)
    if il-1 ≠ 0
      M ← trmult2(M, il-1) if mod(il-1, 2) = 0
      M ← trmult1(M, il-1 + 1) otherwise
    M ← trmult0(M, nl-1) if nl-1 > 0
    a ← a  $\frac{\Gamma^{1+n_{l-1}}}{\pi} \sqrt{\frac{1 + (i_{l-1} > 0)}{\Gamma}}$ 
  M ← trint(M)
  a trigvalue(M, π)

```

Рис. П.94. Элементы спектральной характеристики $\mathbb{K}^{n_1 \dots n_k}$ (тригонометрические функции)

ния функций $\mathbb{k}_{n_1 n_2}(\cdot)$ относительно функций Уолша и Хара таким же образом, как это описано выше (программа не приводится, так как она аналогична программе с рис. П.97).

Программы $\text{spKcoef}(i)$ и $\text{spKnccoef}(i, n)$ расчета коэффициентов разложения функций $\mathbb{k}(\cdot)$ и $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$ используются в программах формирования спектральных характеристик этих функций с заданным порядком усечения L . Все спектральные характеристики представляются векторами размера L^k , а для доступа к их элементам применяется функция

$$\begin{array}{l}
\text{coincidence}(i) := \left\{ \begin{array}{l} i \leftarrow \text{sort}(i) \\ R \leftarrow 1 \\ C \leftarrow 1 \\ \text{for } j \in 1.. \text{rows}(i) - 1 \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} C \leftarrow C + 1 \text{ if } i_{j-1} = i_j \\ \text{otherwise} \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} R \leftarrow RC! \\ C \leftarrow 1 \end{array} \right. \\ R C! \end{array} \right. \end{array} \right. \\
\text{order1}(i) := \left\{ \begin{array}{l} C \leftarrow 1 \\ \text{for } j \in 1.. \text{rows}(i) - 1 \\ \quad C \leftarrow C \cdot (i_{j-1} < i_j) \\ C \end{array} \right. \\
\text{order2}(i) := \left\{ \begin{array}{l} C \leftarrow 1 \\ \text{for } j \in 1.. \text{rows}(i) - 1 \\ \quad C \leftarrow C \cdot (i_{j-1} \leq i_j) \\ C \end{array} \right.
\end{array}$$

Рис. П.95. Вспомогательные подпрограммы для блочно-импульсных функций

$$\text{spKcoefBIF}(i) := \frac{T}{L} \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ if } \text{order1}(i) = 1 \\ \text{otherwise} \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ if } \text{order2}(i) = 0 \\ \frac{1}{\text{coincidence}(i)} \text{ otherwise} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Рис. П.96. Элементы спектральной характеристики \mathbb{K} (блочно-импульсные функции)

$$\begin{aligned}
\text{spK2coef}(i_1, i_2) &:= \sum_{j_1=0}^{L-1} \sum_{j_2=j_1}^{L-1} \left[\Delta_{i_1, j_1} \Delta_{i_2, j_2} \text{spKcoefBIF}[(j_1 \ j_2)^T] \right] \\
\text{spK3coef}(i_1, i_2, i_3) &:= \sum_{j_1=0}^{L-1} \sum_{j_2=j_1}^{L-1} \sum_{j_3=j_2}^{L-1} \left[\Delta_{i_1, j_1} \Delta_{i_2, j_2} \Delta_{i_3, j_3} \text{spKcoefBIF}[(j_1 \ j_2 \ j_3)^T] \right] \\
\text{spK4coef}(i_1, i_2, i_3, i_4) &:= \sum_{j_1=0}^{L-1} \sum_{j_2=j_1}^{L-1} \sum_{j_3=j_2}^{L-1} \sum_{j_4=j_3}^{L-1} \left[\Delta_{i_1, j_1} \Delta_{i_2, j_2} \Delta_{i_3, j_3} \Delta_{i_4, j_4} \text{spKcoefBIF}[(j_1 \ j_2 \ j_3 \ j_4)^T] \right] \\
\text{spKcoef}(i) &:= \left\{ \begin{array}{l} \text{spK2coef}(i_0, i_1) \text{ if } \text{rows}(i) = 2 \\ \text{spK3coef}(i_0, i_1, i_2) \text{ if } \text{rows}(i) = 3 \\ \text{spK4coef}(i_0, i_1, i_2, i_3) \text{ if } \text{rows}(i) = 4 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Рис. П.97. Элементы спектральной характеристики \mathbb{K} (функции Уолша и Хаара)

$$\text{spKncoefBIF}(i, n) := \left(\frac{T}{L} \right)^2 \left\{ \begin{array}{l} \text{if } (n_0 = 0) \wedge (n_1 = 1) \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} c \leftarrow 0 \text{ if } i_0 > i_1 \\ c \leftarrow i_1 + \frac{1}{2} \text{ if } i_0 < i_1 \\ c \leftarrow \frac{i_0}{2} + \frac{1}{3} \text{ if } i_0 = i_1 \end{array} \right. \\ \text{if } (n_0 = 1) \wedge (n_1 = 0) \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} c \leftarrow 0 \text{ if } i_0 > i_1 \\ c \leftarrow i_0 + \frac{1}{2} \text{ if } i_0 < i_1 \\ c \leftarrow \frac{i_0}{2} + \frac{1}{6} \text{ if } i_0 = i_1 \end{array} \right. \\ c \end{array} \right.$$

Рис. П.98. Элементы спектральной характеристики $\mathbb{K}^{n_1 n_2}$ (блочно-импульсные функции)

$\text{indk}(i, L)$, которая переводит упорядоченный набор значений индексов $i = (i_1 \dots i_k)^T$ в значение $i_1 L^{k-1} + i_2 L^{k-2} + \dots + i_k$. Также реализована обратная функция $\text{invindk}(i, k, L)$. Таким образом,

устанавливается взаимнооднозначное соответствие между векторами размера L^k и k -мерными матрицами-столбцами размера L по каждому измерению (см. рис. П.99). Перечисленные программы применялись для вычислений в примерах 4.12–4.16 и 5.9–5.11.

На рис. П.100 демонстрируются программы `spK2(L)` и `spK2n(L,n)` для формирования спектральных характеристик \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 n_2}$ ($k = 2$), на рис. П.101 — программы `spK3(L)` и `spK3n(L,n)` для спектральных характеристик \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 n_2 n_3}$ ($k = 3$), а на рис. П.102 — программы `spK4(L)` и `spK4n(L,n)` для спектральных характеристик \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 n_2 n_3 n_4}$ ($k = 4$). Они не зависят от базисной системы, но предполагают, что предварительно загружается модуль с программами расчета спектральных характеристик типовых функций и линейных операторов для выбранной базисной системы, включающий программы расчета коэффициентов разложения функций $\mathbb{k}(\cdot)$ и $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$.

Как и в случае параметра i , параметр n является векторным, он содержит показатели степеней n_1, \dots, n_k , т.е. $n = (n_1 \dots n_k)^T$, однако в программе принята нумерация индексов с нуля.

Конечно, можно сформировать универсальную программу для нахождения спектральных характеристик $\mathbb{K}^{n_1 \dots n_k}$ функций $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$ при произвольном k и использовать ее в том числе для нахождения спектральных характеристик \mathbb{K} функций $\mathbb{k}(\cdot)$, полагая $n_1 = \dots = n_k = 0$ (см. рис. П.103). Но, во-первых, это отчасти нарушает принцип следования изложению основной части работы, а во-вторых, при использовании подобной универсальной программы расчета спектральных характеристик будут выполняться лишние операции и, следовательно, будет увеличиваться время вычислений.

Далее перейдем к программам для приближенного нахождения спектральных характеристик \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 \dots n_k}$ на основе утверждений 4.4 и 4.5, а также формул (4.51) и (4.56). На рис. П.104 показаны программы `spK2approx(L)` и `spK2napprox(L,n)` для нахождения спектральных характеристик \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 n_2}$ ($k = 2$), на рис. П.105 — программы `spK3approx(L)` и `spK3napprox(L,n)` для спектральных характеристик \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 n_2 n_3}$ ($k = 3$) и на рис. П.106 — программы `spK4approx(L)` и `spK4napprox(L,n)` для спектральных характеристик \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 n_2 n_3 n_4}$ ($k = 4$). Они не зависят от базисной системы, но также предполагают, что до их вызова загружен модуль с программами расчета спектральных характеристик типовых функций и линейных операторов для выбранной базисной системы, причем в данном случае достаточно программ для нахождения спектральных характеристик P^{-1} и A оператора интегрирования и оператора умножения на функцию $a_1(t) = t$, а также при $k > 2$ спектральной характеристики оператора умножения функций (см. разд. 4.2 и П.1).

Важно добавить, что из перечисленных программ `spK2approx(L)` обеспечивает точное нахождение спектральной характеристики \mathbb{K} относительно произвольной базисной системы, а ее идентификатор содержит постфикс `approx` только для того, чтобы отличать ее от программы `spK2(L)` (см. рис. П.100) и показать принадлежность к описываемому набору программ.

Здесь, как и в программах для точного нахождения спектральных характеристик \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 \dots n_k}$, на первый план выходит следование изложению основной части работы. В том чис-

$$\text{indk}(i,L) := \left| \begin{array}{l} r \leftarrow i_0 \\ \text{for } l \in 1.. \text{rows}(i) - 1 \\ \quad r \leftarrow rL + i_l \\ r \end{array} \right. \quad \text{invindk}(i,k,L) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..k-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} n \leftarrow L^{k-j-1} \\ r_j \leftarrow \text{floor}(i \div n) \\ i \leftarrow i - n \cdot r_j \end{array} \right. \\ r \end{array} \right.$$

Рис. П.99. Преобразование индексов

$$\text{spK2}(L) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i1 \in 0..L-1 \\ \quad \text{for } i2 \in 0..L-1 \\ \quad \quad \left| \begin{array}{l} i \leftarrow (i1 \ i2)^T \\ K_{\text{indk}(i,L)} \leftarrow \text{spKcoef}(i) \end{array} \right. \\ K \end{array} \right. \quad \text{spK2n}(L,n) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i1 \in 0..L-1 \\ \quad \text{for } i2 \in 0..L-1 \\ \quad \quad \left| \begin{array}{l} i \leftarrow (i1 \ i2)^T \\ K_{\text{indk}(i,L)} \leftarrow \text{spKcoef}(i,n) \end{array} \right. \\ K \end{array} \right.$$

Рис. П.100. Спектральные характеристики \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 n_2}$ ($k = 2$)

$$\text{spK3}(L) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i1 \in 0..L-1 \\ \quad \text{for } i2 \in 0..L-1 \\ \quad \quad \text{for } i3 \in 0..L-1 \\ \quad \quad \quad \left| \begin{array}{l} i \leftarrow (i1 \ i2 \ i3)^T \\ K_{\text{indk}(i,L)} \leftarrow \text{spKcoef}(i) \end{array} \right. \\ K \end{array} \right. \quad \text{spK3n}(L,n) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i1 \in 0..L-1 \\ \quad \text{for } i2 \in 0..L-1 \\ \quad \quad \text{for } i3 \in 0..L-1 \\ \quad \quad \quad \left| \begin{array}{l} i \leftarrow (i1 \ i2 \ i3)^T \\ K_{\text{indk}(i,L)} \leftarrow \text{spKcoef}(i,n) \end{array} \right. \\ K \end{array} \right.$$

Рис. П.101. Спектральные характеристики \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 n_2 n_3}$ ($k = 3$)

$$\text{spK4}(L) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i1 \in 0..L-1 \\ \quad \text{for } i2 \in 0..L-1 \\ \quad \quad \text{for } i3 \in 0..L-1 \\ \quad \quad \quad \text{for } i4 \in 0..L-1 \\ \quad \quad \quad \quad \left| \begin{array}{l} i \leftarrow (i1 \ i2 \ i3 \ i4)^T \\ K_{\text{indk}(i,L)} \leftarrow \text{spKcoef}(i) \end{array} \right. \\ K \end{array} \right. \quad \text{spK4n}(L,n) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i1 \in 0..L-1 \\ \quad \text{for } i2 \in 0..L-1 \\ \quad \quad \text{for } i3 \in 0..L-1 \\ \quad \quad \quad \text{for } i4 \in 0..L-1 \\ \quad \quad \quad \quad \left| \begin{array}{l} i \leftarrow (i1 \ i2 \ i3 \ i4)^T \\ K_{\text{indk}(i,L)} \leftarrow \text{spKcoef}(i,n) \end{array} \right. \\ K \end{array} \right.$$

Рис. П.102. Спектральные характеристики \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 n_2 n_3 n_4}$ ($k = 4$)

$$\text{spK}(k,L) := \left| \begin{array}{l} \text{for } m \in 0..L^k - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} i \leftarrow \text{invindk}(m,k,L) \\ K_m \leftarrow \text{spKcoef}(i) \end{array} \right. \\ K \end{array} \right. \quad \text{spKn}(k,L,n) := \left| \begin{array}{l} \text{for } m \in 0..L^k - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} i \leftarrow \text{invindk}(m,k,L) \\ K_m \leftarrow \text{spKcoef}(i,n) \end{array} \right. \\ K \end{array} \right.$$

Рис. П.103. Спектральные характеристики \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 \dots n_k}$ для произвольного k

ле поэтому, а также для наглядности приведены отдельные программы, отвечающие значениям $k = 2, 3, 4$. Для спектральных характеристик \mathbb{K} можно обойтись программами расчета спектральных характеристик $\mathbb{K}^{n_1 \dots n_k}$, полагая $n_1 = \dots = n_k = 0$, но это неизбежно приведет к выполнению лишних операций.

Программы для приближенного нахождения спектральных характеристик \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 \dots n_k}$ использовались при расчетах в примерах 4.12–4.16 наряду с программами для точного нахождения указанных спектральных характеристик.

$$\begin{array}{l}
\text{spK2approx}(L) := \left\{ \begin{array}{l} R \leftarrow \text{spI}(L) \\ \text{for } i1 \in 0 \dots L-1 \\ \quad \text{for } i2 \in 0 \dots L-1 \\ \quad \quad \mathbb{K}_{\text{indk}[(i1 \ i2)^T, L]} \leftarrow R_{i2, i1} \end{array} \right. \\
\mathbb{K}
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\text{spK2napprox}(L, n) := \left\{ \begin{array}{l} I \leftarrow \text{spI}(L) \\ A \leftarrow \text{spAtI}(L) \\ R \leftarrow A^{n_1} I A^{n_0} \\ \text{for } i1 \in 0 \dots L-1 \\ \quad \text{for } i2 \in 0 \dots L-1 \\ \quad \quad \mathbb{K}_{\text{indk}[(i1 \ i2)^T, L]} \leftarrow R_{i2, i1} \end{array} \right. \\
\mathbb{K}
\end{array}$$

Рис. П.104. Приближенные спектральные характеристики \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 n_2}$ ($k = 2$)

$$\begin{array}{l}
\text{spK3approx}(L) := \left\{ \begin{array}{l} I \leftarrow \text{spI}(L) \\ V \leftarrow \text{spV}(L) \\ \text{for } i2 \in 0 \dots L-1 \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} R \leftarrow I V_{i2} I \\ \text{for } i1 \in 0 \dots L-1 \\ \quad \text{for } i3 \in 0 \dots L-1 \\ \quad \quad \mathbb{K}_{\text{indk}[(i1 \ i2 \ i3)^T, L]} \leftarrow R_{i3, i1} \end{array} \right. \\ \mathbb{K} \end{array} \right. \\
\mathbb{K}
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\text{spK3napprox}(L, n) := \left\{ \begin{array}{l} I \leftarrow \text{spI}(L) \\ A \leftarrow \text{spAtI}(L) \\ V \leftarrow \text{spV}(L) \\ \text{for } i2 \in 0 \dots L-1 \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} R \leftarrow A^{n_2} I A^{n_1} V_{i2} I A^{n_0} \\ \text{for } i1 \in 0 \dots L-1 \\ \quad \text{for } i3 \in 0 \dots L-1 \\ \quad \quad \mathbb{K}_{\text{indk}[(i1 \ i2 \ i3)^T, L]} \leftarrow R_{i3, i1} \end{array} \right. \\ \mathbb{K} \end{array} \right. \\
\mathbb{K}
\end{array}$$

Рис. П.105. Приближенные спектральные характеристики \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 n_2 n_3}$ ($k = 3$)

$$\begin{array}{l}
\text{spK4approx}(L) := \left\{ \begin{array}{l} I \leftarrow \text{spI}(L) \\ V \leftarrow \text{spV}(L) \\ \text{for } i2 \in 0 \dots L-1 \\ \quad \text{for } i3 \in 0 \dots L-1 \\ \quad \quad \left\{ \begin{array}{l} R \leftarrow I V_{i3} I V_{i2} I \\ \text{for } i1 \in 0 \dots L-1 \\ \quad \text{for } i4 \in 0 \dots L-1 \\ \quad \quad \mathbb{K}_{\text{indk}[(i1 \ i2 \ i3 \ i4)^T, L]} \leftarrow R_{i4, i1} \end{array} \right. \\ \mathbb{K} \end{array} \right. \\
\mathbb{K}
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\text{spK4napprox}(L, n) := \left\{ \begin{array}{l} I \leftarrow \text{spI}(L) \\ A \leftarrow \text{spAtI}(L) \\ V \leftarrow \text{spV}(L) \\ \text{for } i2 \in 0 \dots L-1 \\ \quad \text{for } i3 \in 0 \dots L-1 \\ \quad \quad \left\{ \begin{array}{l} R \leftarrow A^{n_3} I A^{n_2} V_{i3} I A^{n_1} V_{i2} I A^{n_0} \\ \text{for } i1 \in 0 \dots L-1 \\ \quad \text{for } i4 \in 0 \dots L-1 \\ \quad \quad \mathbb{K}_{\text{indk}[(i1 \ i2 \ i3 \ i4)^T, L]} \leftarrow R_{i4, i1} \end{array} \right. \\ \mathbb{K} \end{array} \right. \\
\mathbb{K}
\end{array}$$

Рис. П.106. Приближенные спектральные характеристики \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 n_2 n_3 n_4}$ ($k = 4$)

Спектральные характеристики симметризованных функций

Рис. П.107 и П.108 содержат набор вспомогательных подпрограмм, необходимых для симметризации спектральных характеристик функций многих переменных:

- инициализация вектора размера N (заполнение массива константой c) — подпрограмма $\text{fillvector}(N, c)$,
- удаление дублирующих элементов мультимножества (прореживание) — подпрограмма $\text{thinning}(J)$,
- построение фактор-множества — подпрограмма $\text{factorization}(J, \text{type})$,
- вычисление величины M_J^2 по формуле (4.58), связанной с определением симметризованных функций, — подпрограмма $\text{maxnorm}(J)$,

- формирование подмножества значений по набору индексов F элементов исходного множества D — подпрограмма $\text{factorcopy}(D,F)$,
- формирование симметрической группы подстановок — подпрограмма $\text{permutations}(J)$,

где параметр type в подпрограмме $\text{factorization}(J,\text{type})$ может принимать два значения: 0 для факторизации множества индексов и 1 для факторизации множества значений индексов (см. разд. 4.3 и 5.2).

$$\begin{array}{l}
 \text{fillvector}(N,c) := \left\{ \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..N-1 \\ \quad M_i \leftarrow c \\ M \end{array} \right. \\
 \text{thinning}(J) := \left\{ \begin{array}{l} J \leftarrow \text{sort}(J) \\ k \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0.. \text{rows}(J) - 1 \\ \quad \text{if } (i = 0) \vee (J_i \neq J_{i-1}) \\ \quad \quad \left\{ \begin{array}{l} R_k \leftarrow J_i \\ k \leftarrow k + 1 \end{array} \right. \\ R \end{array} \right. \\
 \text{factorcopy}(D,F) := \left\{ \begin{array}{l} \text{for } i \in 0.. \text{rows}(F) - 1 \\ \quad r_i \leftarrow D_{F_i} \\ r \end{array} \right. \\
 \text{factorization}(J,\text{type}) := \left\{ \begin{array}{l} Jt \leftarrow \text{thinning}(J) \\ \text{for } k \in 0.. \text{rows}(Jt) - 1 \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} N \leftarrow 0 \\ j \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0.. \text{rows}(J) - 1 \\ \quad \text{if } J_i = Jt_k \\ \quad \quad \left\{ \begin{array}{l} N_j \leftarrow \text{if}(\text{type}, J_i, i) \\ j \leftarrow j + 1 \end{array} \right. \\ R_k \leftarrow N \end{array} \right. \\ R \end{array} \right. \\
 \text{maxnorm}(J) := \left\{ \begin{array}{l} F \leftarrow \text{factorization}(J,0) \\ r \leftarrow 1 \\ \text{for } j \in 0.. \text{rows}(F) - 1 \\ \quad r \leftarrow r \cdot \text{rows}(F_j)! \\ r \end{array} \right.
 \end{array}$$

Рис. П.107. Вспомогательные подпрограммы для симметризации (инициализация, прореживание, факторизация и др.)

Векторный параметр J — это мультимножество $\bar{J} = (j_1 \dots j_k)$. Именно \bar{J} определяет симметризованные функции и их спектральные характеристики с помощью симметрической группы подстановок (см. п. 3 замечаний 4.3).

Перечисленные вспомогательные подпрограммы задействованы в программах $\text{spK2symm}(K,L,J)$, $\text{spK3symm}(K,L,J)$, $\text{spK4symm}(K,L,J)$ симметризации спектральных характеристик функций с числом переменных $k = 2, 3, 4$, например, спектральных характеристик \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 \dots n_k}$ функций $\mathbb{k}(\cdot)$ и $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$ соответственно или спектральных характеристик из примера 4.4 (см. рис. П.1–П.5). Эти программы использовались в примере 4.16.

Как и для нахождения спектральных характеристик \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 \dots n_k}$, можно сформировать универсальную программу симметризации, однако в описываемом программном обеспечении реализовано три отдельных варианта, которые отвечают разным значениям k . Программы для вычисления погрешности аппроксимации функций $\mathbb{k}(\cdot)$, $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$ или соответствующих им симметризованных функций здесь не приводятся, поскольку их реализация тривиальна (см. формулы (4.97) или (4.98)).

Конечно, симметризация спектральных характеристик при конкретных значениях j_1, \dots, j_k реализуется значительно проще, но количество разных комбинаций их равенств или неравенств растет с увеличением k . Если ограничиться только задачами представления повторных

```

permutations(Js) :=
  F ← factorization(Js,0)
  N ← rows(Js)
  for j ∈ 0..rows(F) - 1
    for i ∈ 0..rows(Fj) - 1
      M(Fj)i ← rows(Fj)
      CN-1 ← 0
      k ← 0
      Run ← 1
      while Run
        C0 ← C0 + 1
        for i ∈ 0..N - 1
          if Ci = Mi
            Run ← 0 if i = N - 1
            otherwise
              Ci ← 0
              Ci+1 ← Ci+1 + 1
        Z ← 1
  for j ∈ 0..rows(F) - 1
    if rows(Fj) > 1
      S ← sort(factorcopy(C, Fj))
      for i ∈ 1..rows(Fj) - 1
        Z ← Z · (Si ≠ Si-1)
      break if Z = 0
    if Run ∧ Z
      for j ∈ 0..rows(F) - 1
        for i ∈ 0..rows(Fj) - 1
          -C(Fj)i ← (Fj)i C(Fj)i
      Rk ← -C
      k ← k + 1
    if k = 0
      for i ∈ 0..N - 1
        Ci ← i
      R0 ← C
R

```

Рис. П.108. Вспомогательная подпрограмма для симметризации (формирование симметрической группы подстановок)

```

spK2symm(K,L,J) :=
  P ← permutations(J)
  R ← fillvector(L2, ∞)
  for i1 ∈ 0..L - 1
    for i2 ∈ 0..L - 1
      i ← (i1 i2)T
      if Rindk(i,L) = ∞
        C ← 0
        for p ∈ 0..rows(P) - 1
          -P ← Pp
          C ← C + Kindk[[i(-p0) i(-p1)]T, L]
        for p ∈ 0..rows(P) - 1
          -P ← Pp
          Rindk[[i(-p0) i(-p1)]T, L] ←  $\frac{C}{\text{rows}(P)}$ 
R

```

Рис. П.109. Симметризация спектральных характеристик ($k = 2$)

стохастических интегралов, то следует учитывать 2^{k-1} вариантов, из которых только один не требует симметризации (см. п. 4 замечаний 6.8).

```

spK3symm(K,L,J) :=
  P ← permutations(J)
  R ← fillvector(L3, ∞)
  for i1 ∈ 0..L-1
    for i2 ∈ 0..L-1
      for i3 ∈ 0..L-1
        i ← (i1 i2 i3)T
        if Rindk(i,L) = ∞
          C ← 0
          for p ∈ 0..rows(P)-1
            P ← Pp
            C ← C + Kindk[[i(-p0) i(-p1) i(-p2)]T, L]
          for p ∈ 0..rows(P)-1
            P ← Pp
            Rindk[[i(-p0) i(-p1) i(-p2)]T, L] ←  $\frac{C}{\text{rows}(P)}$ 
  R

```

Рис. П.110. Симметризация спектральных характеристик ($k = 3$)

```

spK4symm(K,L,J) :=
  P ← permutations(J)
  R ← fillvector(L4, ∞)
  for i1 ∈ 0..L-1
    for i2 ∈ 0..L-1
      for i3 ∈ 0..L-1
        for i4 ∈ 0..L-1
          i ← (i1 i2 i3 i4)T
          if Rindk(i,L) = ∞
            C ← 0
            for p ∈ 0..rows(P)-1
              P ← Pp
              C ← C + Kindk[[i(-p0) i(-p1) i(-p2) i(-p3)]T, L]
            for p ∈ 0..rows(P)-1
              P ← Pp
              Rindk[[i(-p0) i(-p1) i(-p2) i(-p3)]T, L] ←  $\frac{C}{\text{rows}(P)}$ 
  R

```

Рис. П.111. Симметризация спектральных характеристик ($k = 4$)

П.5. Программы для главы 5

Базисные системы

Начнем с программ для базисных систем, которые используются при представлении функций, заданных на неограниченных множествах: полиномы Эрмита (5.8), полиномы Лагерра (5.10) и полиномы (5.11), ортогональные относительно плотности вероятности гамма-распределения. Здесь рассматриваются только ненормированные варианты, они все описаны в

разд. 5.1, а программы $H(i,x)$, $L(i,x,\alpha)$ и $G(i,x)$ для них и для соответствующих весовых функций показаны на рис. П.112 – П.114.

$$\rho(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad H(i,x) := i! \sum_{k=0}^{\text{floor}(i \div 2)} \frac{(-1)^k \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^{i-2k}}{k! \cdot (i-2k)! \cdot 2^k}$$

Рис. П.112. Ненормированные полиномы Эрмита

$$\rho(x) := x^\alpha e^{-x} \quad \text{pfact}(z,k) := \begin{cases} c \leftarrow 1 \\ \text{for } i \in 0..k-1 \text{ if } k > 0 \\ c \leftarrow c(z-i) \\ c \end{cases}$$

$$L(i,x,\alpha) := \sum_{k=0}^i \left[(-1)^k C(i,k) \text{pfact}(\alpha+i, i-k) x^k \right]$$

Рис. П.113. Ненормированные полиномы Лагерра

В разд. П.1 приведены программы $q(i,t)$ для базисных систем (1.5) – (1.9) и все они имеют один идентификатор и набор параметров. Это сделано для простоты изменения базисной системы, что лежит в основе модульной структуры описываемого программного обеспечения спектральных преобразований и спектрального метода. В этом разделе программы $H(i,x)$, $L(i,x,\alpha)$, $G(i,x)$ для вычисления значений полиномов (5.8), (5.10) и (5.11) имеют разные идентификаторы, поскольку применяются для разных целей. Переменным m , σ , α и κ должны быть предварительно присвоены нужные значения. В частности, полиномы Эрмита необходимы для ортогонализации последовательности случайных величин, образованных в результате преобразования нормально распределенной с параметрами m и σ случайной величины.

Для ортогонализации последовательности случайных величин, элементы которой получены в результате преобразования случайной величины, имеющей пуассоновское распределение с параметром λ , применяются полиномы Шарлье (5.16). Программы для вычисления их значений показаны на рис. П.115. Конкретное значение переменной λ присваивается заранее, т.е. до вызова программ $S(i,n)$ и $Sm(i,n)$.

$$\rho(x) := \frac{\kappa^{\alpha+1} x^\alpha e^{-\kappa x}}{\Gamma(\alpha+1)} \quad G(i,x) := (-\kappa)^{-i} L(i,\kappa x,\alpha)$$

Рис. П.114. Ненормированные полиномы, ортогональные относительно плотности вероятности гамма-распределения

$$S(i,n) := L(i,\lambda,n-i) \quad Sm(i,n) := L(i,\lambda,n+\lambda-i)$$

Рис. П.115. Полиномы Шарлье (стандартные и модифицированные)

Описанные здесь программы применялись в примере 5.1 для моделирования случайных величин с последующей статистической обработкой.

Кратные стохастические интегралы Ито и Стратоновича

Для моделирования кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича разработанное программное обеспечение содержит программы $\text{spGWNs}(L,s)$ и $\text{spPWNs}(L,s)$. Эти программы нужны для получения s реализаций спектральных характеристик независимых гауссовских белых шумов \mathcal{V}_j и пуассоновских белых шумов \mathcal{N}_j интенсивности λ (см. разд. 2.3), $j = 1, \dots, s$. Они основаны на программах, показанных на рис. П.67. Их применение позволило решить примеры 6.12 – 6.15, программа $\text{spGWNs}(L,s)$ также применялась при решении примера 3.7. Интенсивность запоминается в глобальной переменной λ , а не передается в программы $\text{spPWN}(L)$ и $\text{spPWNs}(L,s)$ как параметр для унификации списка параметров с программами $\text{spGWN}(L)$ и $\text{spGWNs}(L,s)$.

$$\text{spGWNs}(L,s) := \begin{cases} \text{for } j \in 0..s-1 \\ \gamma_j \leftarrow \text{spGWN}(L) \\ \gamma \end{cases} \quad \text{spPWNs}(L,s) := \begin{cases} \text{for } j \in 0..s-1 \\ N_j \leftarrow \text{spPWN}(L) \\ N \end{cases}$$

Рис. П.116. Спектральные характеристики независимых гауссовских и пуассоновских белых шумов

Приведем программы нахождения произведений Вика для наборов случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение (см. разд. 5.3). Разработано два варианта таких программ. Первый вариант рассчитан на наборы двух, трех и четырех случайных величин и он соответствует формулам из п. 1 замечания 5.2. Параметры этих программ включают: ζ — набор реализаций случайных величин, i — значения их индексов, J — номера случайных процессов, которые им соответствуют. Все перечисленные параметры — это векторы одинаковой размерности k : 2 для $\text{Wick2}(\zeta,i,J)$, 3 для $\text{Wick3}(\zeta,i,J)$, 4 для $\text{Wick4}(\zeta,i,J)$ (см. рис. П.117).

$$\begin{aligned} \text{Wick2}(\zeta,i,J) &:= \zeta_0 \zeta_1 - (J_0 = J_1)(i_0 = i_1) \\ \text{Wick3}(\zeta,i,J) &:= \zeta_0 \zeta_1 \zeta_2 - (J_0 = J_1)(i_0 = i_1) \zeta_2 - (J_0 = J_2)(i_0 = i_2) \zeta_1 - (J_1 = J_2)(i_1 = i_2) \zeta_0 \\ \text{Wick4}(\zeta,i,J) &:= \zeta_0 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 - (J_0 = J_1)(i_0 = i_1) \zeta_2 \zeta_3 - (J_0 = J_2)(i_0 = i_2) \zeta_1 \zeta_3 - (J_0 = J_3)(i_0 = i_3) \zeta_1 \zeta_2 \dots \\ &\quad + (J_1 = J_2)(i_1 = i_2) \zeta_0 \zeta_3 - (J_1 = J_3)(i_1 = i_3) \zeta_0 \zeta_2 - (J_2 = J_3)(i_2 = i_3) \zeta_0 \zeta_1 \dots \\ &\quad + (J_0 = J_1)(i_0 = i_1)(J_2 = J_3)(i_2 = i_3) + (J_0 = J_2)(i_0 = i_2)(J_1 = J_3)(i_1 = i_3) \dots \\ &\quad + (J_0 = J_3)(i_0 = i_3)(J_1 = J_2)(i_1 = i_2) \end{aligned}$$

Рис. П.117. Произведение Вика для случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение ($k = 2, 3, 4$)

Второй вариант — программа $\text{Wick}(\xi,i,J,P)$ — является универсальным, т.е. без ограничений на количество случайных величин и их закон распределения (см. рис. П.118). Здесь набор случайных величин обозначен ξ . Информация о законе распределения передается параметром P — идентификатором программы вычисления значений ортогональных полиномов: полиномов Эрмита H для нормального закона распределения или модифицированных полиномов Шарлье Sm для централизованного пуассоновского закона распределения. Этот вариант использует как ранее описанные вспомогательные подпрограммы $\text{factorization}(J,type)$ и $\text{factorcopy}(D,F)$ (см. рис. П.107), так и новую подпрограмму $\text{preWick}(\xi,i,J)$ для построения фактор-множества

по набору реализаций случайных величин. Его можно использовать совместно не только с идентификаторами программ \mathbf{H} и \mathbf{Sm} , но и, например, с \mathbf{G} и \mathbf{S} , т.е. для гамма-распределения и нецентрированного пуассоновского распределения.

<pre> preWick(ξ, i, J) := k ← 0 F ← factorization(J, 0) for j ∈ 0 .. rows(F) - 1 T ← factorcopy(i, F_j) Ξ ← factorcopy(ξ, F_j) if rows(T) > 1 _F ← factorization(T, 0) for m ∈ 0 .. rows(_F) - 1 r_{k+m} ← factorcopy(Ξ, _F_m) k ← k + m + 1 otherwise r_k ← Ξ k ← k + 1 r </pre>	<pre> Wick(ξ, i, J, P) := r ← 1 data ← preWick(ξ, i, J) for j ∈ 0 .. rows(data) - 1 z ← data_j r ← r · P(rows(z), z₀) r </pre>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Рис. П.118. Произведение Вика (универсальный вариант)

Следующие из перечисленных ниже программ востребованы для приближенного моделирования кратных стохастических интегралов Ито и Стратоновича кратностей $k = 2, 3, 4$: $\text{isi2}(K, L, \Upsilon, J)$, $\text{isi3}(K, L, \Upsilon, J)$, $\text{isi4}(K, L, \Upsilon, J)$ и $\text{ssi2}(K, L, \Upsilon, J)$, $\text{ssi3}(K, L, \Upsilon, J)$, $\text{ssi4}(K, L, \Upsilon, J)$. У них одинаковый набор параметров: K — спектральная характеристика функции, интеграл от которой следует моделировать, например \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 \dots n_k}$ для функций $\mathbb{k}(\cdot)$ и $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$, программы для их нахождения описаны в разд. П.4, L — порядок усечения (он может быть меньше, чем порядок усечения спектральной характеристики K), Υ — набор реализаций спектральных характеристик независимых гауссовских или пуассоновских белых шумов в зависимости от того, по винеровским или центрированным пуассоновским процессам определен моделируемый кратный стохастический интеграл (возможность выбора центрированных пуассоновских процессов предусмотрена для интегралов, понимаемых в смысле Ито), J — это мультимножество $\bar{J} = (j_1 \dots j_k)$, которое определяет индексы винеровских случайных процессов (см. разд. 5.2).

Все перечисленные программы показаны на рис. П.119–П.124, с их помощью можно решить такие примеры, как 5.11. Отметим, что приведенная в разд. П.4 вспомогательная подпрограмма $\text{maxnorm}(J)$ используется для вычисления нормы кратных стохастических интегралов, в том числе и для подсчета погрешности их аппроксимации (см. разд. 5.7), она применялась в примере 5.9.

Рис. П.125 содержит программы приближенного моделирования кратных стохастических интегралов Ито и Стратоновича произвольной кратности: $\text{isi}(K, L, \Upsilon, J, P)$ и $\text{ssi}(K, L, \Upsilon, J)$. У первой из них дополнительный параметр P — идентификатор программы вычисления значений ортогональных полиномов. Этот параметр выбирается так же, как и для программы $\text{Wick}(\xi, i, J, P)$. Подобная реализация, безусловно, имеет компактный вид, однако вряд ли ее можно считать оптимальной по такому критерию, как время вычислений.

$$\text{isi2}(K, L, \Upsilon, J) := \left| \begin{array}{l} I \leftarrow 0 \\ \text{for } i_1 \in 0 \dots L - 1 \\ \quad \text{for } i_2 \in 0 \dots L - 1 \\ \quad \quad \zeta \leftarrow \left[\left(\Upsilon_{J_0} \right)_{i_1} \left(\Upsilon_{J_1} \right)_{i_2} \right]^T \\ \quad \quad i \leftarrow (i_1 \ i_2)^T \\ \quad \quad I \leftarrow I + K_{\text{indk}(i, L)} \text{Wick2}(\zeta, i, J) \end{array} \right| I$$
Рис. П.119. Кратный стохастический интеграл Ито ($k = 2$)
$$\text{isi3}(K, L, \Upsilon, J) := \left| \begin{array}{l} I \leftarrow 0 \\ \text{for } i_1 \in 0 \dots L - 1 \\ \quad \text{for } i_2 \in 0 \dots L - 1 \\ \quad \quad \text{for } i_3 \in 0 \dots L - 1 \\ \quad \quad \quad \zeta \leftarrow \left[\left(\Upsilon_{J_0} \right)_{i_1} \left(\Upsilon_{J_1} \right)_{i_2} \left(\Upsilon_{J_2} \right)_{i_3} \right]^T \\ \quad \quad \quad i \leftarrow (i_1 \ i_2 \ i_3)^T \\ \quad \quad \quad I \leftarrow I + K_{\text{indk}(i, L)} \text{Wick3}(\zeta, i, J) \end{array} \right| I$$
Рис. П.120. Кратный стохастический интеграл Ито ($k = 3$)
$$\text{isi4}(K, L, \Upsilon, J) := \left| \begin{array}{l} I \leftarrow 0 \\ \text{for } i_1 \in 0 \dots L - 1 \\ \quad \text{for } i_2 \in 0 \dots L - 1 \\ \quad \quad \text{for } i_3 \in 0 \dots L - 1 \\ \quad \quad \quad \text{for } i_4 \in 0 \dots L - 1 \\ \quad \quad \quad \quad \zeta \leftarrow \left[\left(\Upsilon_{J_0} \right)_{i_1} \left(\Upsilon_{J_1} \right)_{i_2} \left(\Upsilon_{J_2} \right)_{i_3} \left(\Upsilon_{J_3} \right)_{i_4} \right]^T \\ \quad \quad \quad \quad i \leftarrow (i_1 \ i_2 \ i_3 \ i_4)^T \\ \quad \quad \quad \quad I \leftarrow I + K_{\text{indk}(i, L)} \text{Wick4}(\zeta, i, J) \end{array} \right| I$$
Рис. П.121. Кратный стохастический интеграл Ито ($k = 4$)

П.6. Программы для главы 6

Здесь опишем реализацию алгоритмов моделирования повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито по винеровским процессам с применением спектральной формы математического описания (см. разд. 6.1 и 6.2, а именно теоремы 6.1–6.6). Речь идет о повторных стохастических интегралах, которые можно рассматривать как кратные от функций $\mathbb{k}(\cdot)$ и $\mathbb{k}_\psi(\cdot)$, заданных формулами (4.15) и (4.24) соответственно. В последнем случае предполагается, что справедливо дополнительное условие (4.26), т.е. $\mathbb{k}_\psi(\cdot)$ — это функция $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$, $n_l \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $l = 1, \dots, k$.

Описанные далее программы не предполагают предварительного нахождения спектральных характеристик \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 \dots n_k}$ функций $\mathbb{k}(\cdot)$ и $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$, в этом их преимущество. При наличии же таких спектральных характеристик достаточно пользоваться программами из разд. П.5.

$$\text{ssi2}(K,L,\Upsilon,J) := \left| \begin{array}{l} I \leftarrow 0 \\ \text{for } i_1 \in 0..L-1 \\ \quad \text{for } i_2 \in 0..L-1 \\ \quad \quad \zeta \leftarrow \left[\left(\Upsilon_{J_0} \right)_{i_1} \left(\Upsilon_{J_1} \right)_{i_2} \right]^T \\ \quad \quad i \leftarrow (i_1 \ i_2)^T \\ \quad \quad I \leftarrow I + K_{\text{indk}(i,L)} \zeta_0 \zeta_1 \\ I \end{array} \right.$$

Рис. П.122. Кратный стохастический интеграл Стратоновича ($k = 2$)

$$\text{ssi3}(K,L,\Upsilon,J) := \left| \begin{array}{l} I \leftarrow 0 \\ \text{for } i_1 \in 0..L-1 \\ \quad \text{for } i_2 \in 0..L-1 \\ \quad \quad \text{for } i_3 \in 0..L-1 \\ \quad \quad \quad \zeta \leftarrow \left[\left(\Upsilon_{J_0} \right)_{i_1} \left(\Upsilon_{J_1} \right)_{i_2} \left(\Upsilon_{J_2} \right)_{i_3} \right]^T \\ \quad \quad \quad i \leftarrow (i_1 \ i_2 \ i_3)^T \\ \quad \quad \quad I \leftarrow I + K_{\text{indk}(i,L)} \zeta_0 \zeta_1 \zeta_2 \\ I \end{array} \right.$$

Рис. П.123. Кратный стохастический интеграл Стратоновича ($k = 3$)

$$\text{ssi4}(K,L,\Upsilon,J) := \left| \begin{array}{l} I \leftarrow 0 \\ \text{for } i_1 \in 0..L-1 \\ \quad \text{for } i_2 \in 0..L-1 \\ \quad \quad \text{for } i_3 \in 0..L-1 \\ \quad \quad \quad \text{for } i_4 \in 0..L-1 \\ \quad \quad \quad \quad \zeta \leftarrow \left[\left(\Upsilon_{J_0} \right)_{i_1} \left(\Upsilon_{J_1} \right)_{i_2} \left(\Upsilon_{J_2} \right)_{i_3} \left(\Upsilon_{J_3} \right)_{i_4} \right]^T \\ \quad \quad \quad \quad i \leftarrow (i_1 \ i_2 \ i_3 \ i_4)^T \\ \quad \quad \quad \quad I \leftarrow I + K_{\text{indk}(i,L)} \zeta_0 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \\ I \end{array} \right.$$

Рис. П.124. Кратный стохастический интеграл Стратоновича ($k = 4$)

$$\begin{array}{l} \text{isi}(K,L,\Upsilon,J,P) := \left| \begin{array}{l} I \leftarrow 0 \\ k \leftarrow \text{rows}(J) \\ \text{for } m \in 0..L^k-1 \\ \quad i \leftarrow \text{invindk}(m,k,L) \\ \quad \text{for } l \in 0..k-1 \\ \quad \quad \zeta_l \leftarrow \left(\Upsilon_{J_l} \right)_{i_l} \\ \quad \quad I \leftarrow I + K_m \text{Wick}(\zeta, i, J, P) \\ I \end{array} \right. \\ \text{ssi}(K,L,\Upsilon,J) := \left| \begin{array}{l} I \leftarrow 0 \\ k \leftarrow \text{rows}(J) \\ \text{for } m \in 0..L^k-1 \\ \quad i \leftarrow \text{invindk}(m,k,L) \\ \quad \quad I \leftarrow I + K_m \prod_{l=0}^{k-1} \left(\Upsilon_{J_l} \right)_{i_l} \\ I \end{array} \right. \end{array}$$

Рис. П.125. Кратные стохастические интегралы Ито (слева) и Стратоновича (справа) произвольной кратности k

Повторные стохастические интегралы Стратоновича

Для моделирования повторных стохастических интегралов Стратоновича должны быть предварительно вычислены: I — спектральная характеристика P^{-1} оператора интегрирова-

ния, A — спектральная характеристика A оператора умножения на функцию $a_1(t) = t$ (только для интегралов, соответствующих функции $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$), а при $k > 2$ дополнительно V — спектральная характеристика V оператора умножения функций. Для моделирования повторных стохастических интегралов Ито к ним добавляется $F1$ — спектральная характеристика $\mathbf{1}$ функции $f_0(t) \equiv 1$. При моделировании повторных стохастических интегралов смешанного типа спектральная характеристика $\mathbf{1}$ требуется в любом случае (см. п. 8 замечаний 6.1 и п. 5 замечаний 6.8).

Если для расчетов выбрать базисные системы (1.5)–(1.9), то необходимые программы $\text{spl}(L)$, $\text{spAt1}(L)$, $\text{spV}(L)$ и $\text{spF1}(L)$ можно найти в разд. П.1.

Отметим, что если ориентироваться на программы моделирования стохастических интегралов кратности k , которые описаны в разд. П.5, то при усечении до порядка L нужно хранить L^k элементов спектральной характеристики (можно предложить программы моделирования кратных стохастических интегралов без предварительного расчета спектральных характеристик \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 \dots n_k}$, но это не имеет практического смысла, так как неэффективно при многократном моделировании). Здесь же достаточно хранить $2L^2 + L$ элементов при $k = 2$ (матрицы P^{-1} , A и матрица-столбец $\mathbf{1}$). При $k > 2$ к ним следует добавить L^3 элементов трехмерной матрицы V и общее число элементов $L^3 + 2L^2 + L = (L + 1)^2 L$ не зависит от k . Применение инвариантных соотношений для спектральных характеристик \mathbb{K} и $\mathbb{K}^{n_1 \dots n_k}$ [344] позволяет снизить число элементов примерно в два раза, но и для матриц P^{-1} , A и V можно использовать свойства симметрии и ограничиться $L(L + 1)/2$ элементами матриц P^{-1} , A и $L(L + 1)(L + 2)/6$ элементами матрицы V , т.е. хранить всего $L(L + 2)(L + 7)/6$ элементов.

Рис. П.126–П.128 содержат программы моделирования повторных стохастических интегралов Стратоновича. Для программ $\text{ssi2}(\Upsilon, J)$, $\text{ssi3}(\Upsilon, J)$, $\text{ssi4}(\Upsilon, J)$ используются следующие параметры (см. рис. П.126): Υ — это набор реализаций спектральных характеристик независимых гауссовских белых шумов, который можно получить с помощью программы, показанной на рис. П.116, а также векторный параметр J — это мультимножество $\bar{J} = (j_1 \dots j_k)$ с номерами винеровских процессов, относительно которых определены повторные стохастические интегралы. Они соответствуют функции $\mathbb{k}(\cdot)$, т.е. единичным весовым функциям.

Идентификаторы программ, которые приведены на рис. П.127, содержат постфикс n и дополнительный векторный параметр n с показателями степеней n_1, \dots, n_k (в программе принята нумерация индексов с нуля). Они соответствуют функции $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$, т.е. в общем случае неединичным весовым функциям. Программы $\text{ssi}(\Upsilon, J)$ и $\text{ssin}(\Upsilon, J, n)$ подходят для произвольной кратности (см. рис. П.128).

Повторные стохастические интегралы Ито

Далее на рис. П.129–П.131 показаны программы моделирования повторных стохастических интегралов Ито, они имеют те же параметры, а их идентификаторы отличаются одной буквой: $\text{isi2}(\Upsilon, J)$, $\text{isi3}(\Upsilon, J)$, $\text{isi4}(\Upsilon, J)$, $\text{isi}(\Upsilon, J)$, $\text{isi2n}(\Upsilon, J, n)$, $\text{isi3n}(\Upsilon, J, n)$, $\text{isi4n}(\Upsilon, J, n)$ и $\text{isin}(\Upsilon, J, n)$.

$$\begin{aligned} \text{ssi2}(\Upsilon, J) &:= \Upsilon_{J_1}^T I \Upsilon_{J_0} \\ \text{ssi3}(\Upsilon, J) &:= \Upsilon_{J_2}^T \text{IVF}(V, \Upsilon_{J_1}) I \Upsilon_{J_0} \\ \text{ssi4}(\Upsilon, J) &:= \Upsilon_{J_3}^T \text{IVF}(V, \Upsilon_{J_2}) \text{IVF}(V, \Upsilon_{J_1}) I \Upsilon_{J_0} \end{aligned}$$

Рис. П.126. Повторные стохастические интегралы Стратоновича, соответствующие функции $\mathbb{k}(\cdot)$ ($k = 2, 3, 4$)

$$\begin{aligned} \text{ssi2n}(\Upsilon, J, n) &:= \Upsilon_{J_1}^T A^{n_1} I A^{n_0} \Upsilon_{J_0} \\ \text{ssi3n}(\Upsilon, J, n) &:= \Upsilon_{J_2}^T A^{n_2} I A^{n_1} \text{VF}(V, \Upsilon_{J_1}) I A^{n_0} \Upsilon_{J_0} \\ \text{ssi4n}(\Upsilon, J, n) &:= \Upsilon_{J_3}^T A^{n_3} I A^{n_2} \text{VF}(V, \Upsilon_{J_2}) I A^{n_1} \text{VF}(V, \Upsilon_{J_1}) I A^{n_0} \Upsilon_{J_0} \end{aligned}$$

Рис. П.127. Повторные стохастические интегралы Стратоновича, соответствующие функции $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$ ($k = 2, 3, 4$)

$$\text{ssi}(\Upsilon, J) := \begin{cases} k \leftarrow \text{rows}(J) \\ X_1 \leftarrow I \Upsilon_{J_0} \\ \text{for } 1 \in 2 \dots k-1 & \text{if } k > 2 \\ X_l \leftarrow \text{IVF}(V, \Upsilon_{J_{l-1}}) X_{l-1} \\ \Upsilon_{J_{k-1}}^T X_{k-1} \end{cases} \quad \text{ssin}(\Upsilon, J, n) := \begin{cases} k \leftarrow \text{rows}(J) \\ X_1 \leftarrow I A^{n_0} \Upsilon_{J_0} \\ \text{for } 1 \in 2 \dots k-1 & \text{if } k > 2 \\ X_l \leftarrow I A^{n_{l-1}} \text{VF}(V, \Upsilon_{J_{l-1}}) X_{l-1} \\ \Upsilon_{J_{k-1}}^T A^{n_{k-1}} X_{k-1} \end{cases}$$

Рис. П.128. Повторные стохастические интегралы Стратоновича произвольной кратности k

Перечисленные в этом разделе программы использовались в примерах 6.13–6.15. Если весовые функции определены иначе, нежели условием (4.26), то соответствующие программы моделирования повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито отличаются только используемыми спектральными характеристиками операторов умножения на весовые функции. Например, такие программы (здесь они не приводятся) потребовались при решении примера 6.12. Также небольшие изменения в программах потребуются для моделирования повторных стохастических интегралов смешанного типа и повторных стохастических θ -интегралов.

В обязательном порядке до вызова программ, которые показаны на рис. П.126–П.131, необходимо инициализировать следующие переменные: T — правая граница отрезка T , L — порядок усечения спектральных характеристик. Кроме того, должен быть загружен модуль с программами расчета спектральных характеристик типовых функций и линейных операторов для выбранной базисной системы.

Основные результаты, касающиеся разработанного программного обеспечения, опубликованы в работах [150, 174, 175, 179, 185].

$$\begin{array}{l}
\text{isi2}(\Upsilon, J) := \left\{ \begin{array}{l} X_0 \leftarrow F1 \\ X_1 \leftarrow I\Upsilon_{J_0} \\ \Upsilon_{J_1}^T X_1 - \frac{J_0 = J_1}{2} F1^T X_0 \end{array} \right. \\
\text{isi3}(\Upsilon, J) := \left\{ \begin{array}{l} X_0 \leftarrow F1 \\ X_1 \leftarrow I\Upsilon_{J_0} \\ X_2 \leftarrow IVF(V, \Upsilon_{J_1}) X_1 - \frac{J_0 = J_1}{2} IX_0 \\ \Upsilon_{J_2}^T X_2 - \frac{J_1 = J_2}{2} F1^T X_1 \end{array} \right. \\
\text{isi4}(\Upsilon, J) := \left\{ \begin{array}{l} X_0 \leftarrow F1 \\ X_1 \leftarrow I\Upsilon_{J_0} \\ X_2 \leftarrow IVF(V, \Upsilon_{J_1}) X_1 - \frac{J_0 = J_1}{2} IX_0 \\ X_3 \leftarrow IVF(V, \Upsilon_{J_2}) X_2 - \frac{J_1 = J_2}{2} IX_1 \\ \Upsilon_{J_3}^T X_3 - \frac{J_2 = J_3}{2} F1^T X_2 \end{array} \right.
\end{array}$$

Рис. П.129. Повторные стохастические интегралы Ито, соответствующие функции $\mathbb{k}(\cdot)$ ($k = 2, 3, 4$)

$$\begin{array}{l}
\text{isi2n}(\Upsilon, J, n) := \left\{ \begin{array}{l} X_0 \leftarrow F1 \\ X_1 \leftarrow IA^{n_0} \Upsilon_{J_0} \\ \Upsilon_{J_1}^T A^{n_1} X_1 - \frac{J_0 = J_1}{2} F1^T A^{n_0+n_1} X_0 \end{array} \right. \\
\text{isi3n}(\Upsilon, J, n) := \left\{ \begin{array}{l} X_0 \leftarrow F1 \\ X_1 \leftarrow IA^{n_0} \Upsilon_{J_0} \\ X_2 \leftarrow IA^{n_1} VF(V, \Upsilon_{J_1}) X_1 - \frac{J_0 = J_1}{2} IA^{n_0+n_1} X_0 \\ \Upsilon_{J_2}^T A^{n_2} X_2 - \frac{J_1 = J_2}{2} F1^T A^{n_1+n_2} X_1 \end{array} \right. \\
\text{isi4n}(\Upsilon, J, n) := \left\{ \begin{array}{l} X_0 \leftarrow F1 \\ X_1 \leftarrow IA^{n_0} \Upsilon_{J_0} \\ X_2 \leftarrow IA^{n_1} VF(V, \Upsilon_{J_1}) X_1 - \frac{J_0 = J_1}{2} IA^{n_0+n_1} X_0 \\ X_3 \leftarrow IA^{n_2} VF(V, \Upsilon_{J_2}) X_2 - \frac{J_1 = J_2}{2} IA^{n_1+n_2} X_1 \\ \Upsilon_{J_3}^T A^{n_3} X_3 - \frac{J_2 = J_3}{2} F1^T A^{n_2+n_3} X_2 \end{array} \right.
\end{array}$$

Рис. П.130. Повторные стохастические интегралы Ито, соответствующие функции $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$ ($k = 2, 3, 4$)

$$\begin{array}{l}
\text{isi}(\Upsilon, J) := \left\{ \begin{array}{l} k \leftarrow \text{rows}(J) \\ X_0 \leftarrow F1 \\ X_1 \leftarrow I\Upsilon_{J_0} \\ \text{for } 1 \in 2 \dots k-1 \\ X_1 \leftarrow IVF(V, \Upsilon_{J_{l-1}}) X_{l-1} - \frac{J_{l-2} = J_{l-1}}{2} IX_{l-2} \\ \Upsilon_{J_{k-1}}^T X_{k-1} - \frac{J_{k-2} = J_{k-1}}{2} F1^T X_{k-2} \end{array} \right. \quad \text{if } k > 2 \\
\text{isin}(\Upsilon, J, n) := \left\{ \begin{array}{l} k \leftarrow \text{rows}(J) \\ X_0 \leftarrow F1 \\ X_1 \leftarrow IA^{n_0} \Upsilon_{J_0} \\ \text{for } 1 \in 2 \dots k-1 \\ X_1 \leftarrow IA^{n_{l-1}} VF(V, \Upsilon_{J_{l-1}}) X_{l-1} - \frac{J_{l-2} = J_{l-1}}{2} IA^{n_{l-2}+n_{l-1}} X_{l-2} \\ \Upsilon_{J_{k-1}}^T A^{n_{k-1}} X_{k-1} - \frac{J_{k-2} = J_{k-1}}{2} F1^T A^{n_{k-2}+n_{k-1}} X_{k-2} \end{array} \right. \quad \text{if } k > 2
\end{array}$$

Рис. П.131. Повторные стохастические интегралы Ито произвольной кратности k

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным итогом диссертационной работы является обобщение спектрального метода для анализа и статистического моделирования непрерывных стохастических систем, что заключается в следующих результатах:

1. Алгоритмическое обеспечение представления случайных процессов в спектральной форме математического описания систем управления [151, 163, 341].
2. Обобщение спектрального метода для анализа и статистического моделирования линейных непрерывных стохастических систем [155, 158, 163, 341, 343, 350].
3. Обобщение спектрального метода для оценивания состояний (фильтрация, сглаживание и прогнозирование) линейных непрерывных стохастических систем с полиномиальными измерителями [74, 341, 343].
4. Ортогональные разложения кратных стохастических интегралов Ито и Стратоновича произвольной кратности в приложении к анализу и статистическому моделированию нелинейных непрерывных стохастических систем [151, 161, 162, 165, 172, 173, 348].
5. Методы расчета коэффициентов разложения функций многих переменных, определяющих повторные стохастические интегралы, применяемые для статистического моделирования нелинейных непрерывных стохастических систем [172, 344].
6. Представления повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича произвольной кратности на основе спектральной формы математического описания систем управления [11, 342, 344, 345, 347].
7. Формулы для точного вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича на основе перехода к симметризованным функциям [173].
8. Метод аппроксимации множества спектральных характеристик функций одной переменной с ограничениями (типовые ограничения на управляющие воздействия или входные/выходные сигналы) [138, 141].
9. Алгоритмическое обеспечение статистического моделирования кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича на основе спектральной формы математического описания систем управления [131, 150, 154, 174, 179].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Аверина Т.А.* Статистический алгоритм моделирования динамических систем с переменной структурой // СибЖВМ. — 2002. Т. 5. № 1. — С. 1–10.
2. *Аверина Т.А.* Устойчивые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений в смысле Стратоновича // Вестник Бурятского гос. ун-та. — 2012. № 9. — С. 91–94.
3. *Аверина Т.А.* Модифицированный алгоритм статистического моделирования систем со случайной структурой с распределенными переходами // СибЖВМ. — 2013. Т. 16. № 2. — С. 97–105.
4. *Аверина Т.А.* Статистическое моделирование решений стохастических дифференциальных уравнений и систем со случайной структурой. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2019.
5. *Аверина Т.А., Артемьев С.С.* Новое семейство численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР. — 1986. Т. 288. № 4. — С. 777–780.
6. *Аверина Т.А., Пригарин С.М.* Вычисление стохастических интегралов от винеровских процессов // Препринт 1048. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 1995.
7. *Аверина Т.А., Рыбаков К.А.* Анализ систем управления ансамблем траекторий с учетом случайного изменения структуры на примере системы стабилизации малого искусственного спутника // Труды МАИ. — 2010. № 41.
8. *Аверина Т.А., Рыбаков К.А.* Моделирование траекторий стохастических динамических систем на заданном многообразии // XX Межд. конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2017), Алушта, 24–31 мая 2017 г.: Материалы конф. — М.: Изд-во МАИ, 2017. — С. 28–31.
9. *Аверина Т.А., Рыбаков К.А.* Численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений, сохраняющие первый интеграл // Вычислительная математика и математическая геофизика. Межд. конф., Новосибирск, 8–12 октября 2018 г.: Материалы конф. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2018. — С. 3–9.
10. *Аверина Т.А., Рыбаков К.А.* Модификация численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений с первым интегралом // СибЖВМ. — 2019. Т. 22. № 3. — С. 243–259.
11. *Аверина Т.А., Рыбаков К.А.* Методы типа Розенброка для решения стохастических дифференциальных уравнений // СибЖВМ. — 2024. Т. 27. № 2. — С. 123–145.
12. Алгоритмическое и математическое обеспечение автоматизации проектирования систем управления / Под ред. В.В. Семенова. — М.: МАИ, 1982.
13. *Александров А.Д.* Выпуклые многогранники. — М.: ГИТТЛ, 1950.
14. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. — М.: Изд-во иностранной лит-ры, 1963.
15. *Анулова С.В., Веретенников А.Ю., Крылов Н.В., Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Стохастическое исчисление // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 45. — М.: ВИНТИ, 1989.

16. *Артемяев С.С.* Численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений. — Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1993.
17. *Артемяев С.С., Марченко М.А., Корнеев В.Д., Якунин М.А., Иванов А.А., Смирнов Д.Д.* Анализ стохастических колебаний методом Монте-Карло на суперкомпьютерах. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016.
18. *Артемяев С.С., Якунин М.А.* Математическое и статистическое моделирование в финансах. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2008.
19. *Астапов Ю.М., Медведев В.С.* Статистическая теория систем автоматического регулирования и управления. — М.: Наука, 1982.
20. *Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.* Новые методы моделирования, анализа и оптимизации динамических систем с распределенными параметрами // XXI Межд. конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМ-СППС'2019), Алушта, 24–31 мая 2019 г.: Материалы конф. — М.: Изд-во МАИ, 2019. — С. 676–678.
21. *Балакрещинан А.В.* Прикладной функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.
22. *Баруча-Рид А.Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. — М.: Наука, 1969.
23. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Ч. II. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1966.
24. *Бирман М.Ш.* Простая теорема вложения для ядер интегральных операторов следового класса в $L^2(\mathbb{R}^m)$. Применение к формуле Фредгольма для следа // Алгебра и анализ. — 2015. Т. 27. № 2. — С. 211–217.
25. *Богачев В.И., Крылов Н.В., Рекнер М., Шапошников С.В.* Уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013.
26. *Боголюбов Н.Н., Крылов Н.М.* Об уравнениях Фоккера–Планка, выводящихся в теории возмущений методом, основанным на спектральных свойствах пертурбационного гамильтониана // Записки каф. мат. физики Ин-та строительной механики АН УССР. — 1939. Т. 4. — С. 5–80.
27. *Борисов И.С., Быстров А.А.* Построение стохастического интеграла от неслучайной функции без условия ортогональности интегрирующей меры // ТВП. — 2005. Т. 50. № 1. — С. 52–80.
28. *Борисов И.С., Хрущев С.Е.* Построение кратных стохастических интегралов по негауссовым произв. мерам // Математические труды. — 2012. Т. 15. № 2. — С. 37–71.
29. *Борисов И.С., Хрущев С.Е.* Кратные стохастические интегралы, построенные по специальному разложению произведения интегрирующих случайных процессов // Математические труды. — 2014. Т. 17. № 2. — С. 61–83.
30. *Бортаковский А.С., Пантелеев А.В.* Линейная алгебра в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 2005.
31. *Васильев В.В., Симак Л.А.* Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. — Киев: НАН Украины, 2008.
32. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. — М.: Наука, 1986.
33. *Виноградов В.И.* СПЕКТР — интегрированная проблемно-ориентированная система моделирования // Информатика. Автоматизация проектирования. — М.: ВИМИ, 1992. Вып. 2–3. — С. 50–56.

34. *Галанина Е.Н.* Инструментальные средства обеспечения этапа алгоритмизации расчета систем управления спектральным методом // Информатика. Автоматизация проектирования. — М.: ВИМИ, 1992. Вып. 2–3. — С. 57–60.
35. *Гихман И.И.* Об одной схеме образования случайных процессов // Доклады АН СССР. — 1947. Т. 58. № 6. — С. 961–964.
36. *Гихман И.И.* О некоторых дифференциальных уравнениях со случайными функциями // Украинский математический журнал. — 1950. Т. 2. № 3. — С. 45–69.
37. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977.
38. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. — Киев: Наукова думка, 1982.
39. *Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. — Киев: Выща школа, 1988.
40. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. — М.: Наука, 1987.
41. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
42. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963.
43. *Гришин В.Н., Дятлов В.А., Милов Л.Т.* Модели, алгоритмы и устройства идентификации сложных систем. — Л.: Энергоатомиздат, 1985.
44. *Доброленский Ю.П.* Динамика полета в неспокойной атмосфере. — М.: Машиностроение, 1969.
45. *Добрушин Р.Л., Минлос Р.А.* Полиномы от линейных случайных функций // Успехи математических наук. — 1977. Т. 32. № 2 (194). — С. 67–122.
46. *Дубко В.А.* Интегральные инварианты для одного класса систем стохастических дифференциальных уравнений // Доклады АН УССР. Серия А. — 1984. № 1. — С. 18–21.
47. *Дубко В.А., Карачанская Е.В.* Специальные разделы теории стохастических дифференциальных уравнений. — Хабаровск: Изд-во Тихоокеанского гос. ун-та, 2013.
48. *Залманзон Л.А.* Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. — М.: Наука, 1989.
49. Изучение математических дисциплин в компьютерной среде / Под ред. В.В. Семенова. — М.: Изд-во МАИ, 1996.
50. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч. 2. — М.: Наука, 1980.
51. *Кабанов Ю.М.* О расширенных стохастических интегралах // ТВП. — 1975. Т. 20. № 4. — С. 725–737.
52. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984.
53. *Карачанская Е.В.* Случайные процессы с инвариантами. — Хабаровск: Изд-во Тихоокеанского гос. ун-та, 2014.
54. *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. — М.: Изд-во АФЦ, 1999.
55. *Клевцов Ю.А.* Спектральное описание объектов с распределенными параметрами // Электронное моделирование. — 1988. Т. 10. № 3. — С. 27–31.

56. *Клевцов Ю.А.* Алгоритм решения СЛАУ в спектральных моделях объектов с распределенными параметрами // Электронное моделирование. — 1998. Т. 20. № 2. — С. 22–27.
57. *Клевцов Ю.А.* Моделирование многомерных объектов с распределенными параметрами // Электронное моделирование. — 2012. Т. 34. № 5. — С. 20–40.
58. *Клевцов Ю.А.* Структурные преобразования моделей систем с распределенными параметрами // Электронное моделирование. — 2016. Т. 38. № 1. — С. 35–46.
59. *Клешнин В.Ю., Рыбаков К.А.* О применении готовых пакетов функций матричной алгебры для расчетной системы Spectrum // Авиация и космонавтика — 2014. XIII Межд. конф., Москва, 17–21 ноября 2014 г.: Тез. докл. — СПб.: Мастерская печати, 2014. — С. 627–628.
60. *Клешнин В.Ю., Рыбаков К.А.* О применении технологий параллельного программирования для задач матричной алгебры в приложении к спектральному методу анализа, синтеза и идентификации систем управления // Математика и математ. моделирование. — 2016. № 1. — С. 1–27.
61. *Коваль В.А.* Спектральный метод анализа и синтеза распределенных систем управления. — Саратов: СГТУ, 1997.
62. *Коваль В.А., Самарский А.А., Степанов М.Ф., Торгашова О.Ю.* Спектральный метод анализа и синтеза пространственно двумерных распределенных систем управления // Известия СПбГТИ (ТУ). — 2017. № 41 (67). — С. 113–118.
63. *Коваль В.А., Торгашова О.Ю.* Решение задач анализа и синтеза для пространственно-двумерного распределенного объекта, представленного бесконечной системой дифференциальных уравнений // АиТ. — 2014. № 2. — С. 54–71.
64. *Коваль В.А., Торгашова О.Ю., Соломин М.А.* Решение задачи анализа распределенного объекта в пространственно-временной области // Математические методы в технике и технологиях. — 2020. № 9. — С. 80–85.
65. *Кожневников А.С., Рыбаков К.А.* Спектральный метод анализа стохастических систем в приложении к задачам финансовой математики на примере модели Блэка – Шоулза // Вестник МАИ. — 2009. Т. 16. № 4. — С. 113–125.
66. *Кожневников А.С., Рыбаков К.А.* Анализ нелинейных стохастических систем управления с импульсными воздействиями, образующими эрланговские потоки событий // Научный вестник МГТУ ГА. — 2012. № 184 (10). — С. 37–45.
67. *Кожневников А.С., Рыбаков К.А.* Спектральный метод анализа стохастических систем с разрывами траекторий, характеризуемыми чередованием эрланговских распределений // Наука и образование. — 2013. № 4. — С. 231–244.
68. *Кожневников А.С., Рыбаков К.А.* Спектральный метод анализа стохастических систем с разрывами траекторий, описываемыми случайной смесью эрланговских распределений // Управление большими системами. — 2013. Вып. 45. — С. 47–71.
69. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
70. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. — М.: Наука, 1978.
71. *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Наука, 1985.

72. *Краскевич В.Е., Клевцов Ю.А.* Спектральный метод структурно-параметрической идентификации объектов с распределенными параметрами // Вестник КПИ. Серия: Техническая кибернетика. — 1981. Вып. 5. — С. 10–12.
73. *Краскевич В.Е., Клевцов Ю.А.* Спектральное представление линейных объектов с распределенными параметрами // Кибернетика на морском транспорте. — 1981. Вып. 10. — С. 87–94.
74. *Кудрявцева И.А., Рыбаков К.А.* Сравнительный анализ фильтров частиц для стохастических систем с непрерывным и дискретным временем // Изв. РАН. ТиСУ. — 2022. № 5. — С. 40–49.
75. *Кузнецов Д.Ф.* Метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным системам функций // Дифф. уравн. и проц. управл. — 1997. № 1. — С. 18–77.
76. *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010.
77. *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. С программами в среде MATLAB // Дифф. уравн. и проц. управл. — 2018. № 4. — С. А.1–А.1073.
78. *Кузнецов Д.Ф.* К численному моделированию многомерных динамических систем при случайных возмущениях с порядками сильной сходимости 1.5 и 2.0 // АиТ. — 2018. № 7. — С. 80–98.
79. *Кузнецов Д.Ф.* К численному моделированию многомерных динамических систем при случайных возмущениях с порядком сильной сходимости 2.5 // АиТ. — 2019. № 5. — С. 99–117.
80. *Кузнецов Д.Ф.* Сравнительный анализ эффективности применения полиномов Лежандра и тригонометрических функций к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений Ито // ЖВМиМФ. — 2019. Т. 59. № 8. — С. 1299–1313.
81. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. — М.: Физматгиз, 1960.
82. *Куликов В.Е.* Формирующий фильтр дифференцируемого турбулентного ветра // Труды МИЭА. — 2013. Вып. 7. — С. 36–42.
83. *Латин С.В., Егупов Н.Д.* Теория матричных операторов и ее приложение к задачам автоматического управления. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997.
84. *Леваков А.А.* Стохастические дифференциальные уравнения. — Минск: БГУ, 2009.
85. *Леваков А.А.* Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений. — Минск: БГУ, 2010.
86. *Леви П.* Стохастические процессы и броуновское движение. — М.: Наука, 1972.
87. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). — М.: Наука, 1974.
88. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Теория мартингалов. — М.: Наука, 1986.
89. *Лукин А.В., Смирнов С.Н.* Численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений // Математическое моделирование. — 1990. Т. 2. № 11. — С. 108–121.
90. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 1 / Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
91. *Миллер Б.М., Панков А.Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах. — М.: Физматлит, 2002.
92. *Мильштейн Г.Н.* Метод второго порядка точности интегрирования стохастических дифференциальных уравнений // ТВП. — 1978. Т. 23. № 2. — С. 414–419.

93. *Мильштейн Г.Н.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. — Свердловск: Изд-во Уральского ун-та, 1988.
94. *Михайлов Г.А., Войтишек А.В.* Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. — М.: Издательский центр «Академия», 2006.
95. *Насыров Ф.С.* Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ. — М.: Физматлит, 2011.
96. *Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. — М.: Наука, 1972.
97. *Нефедов В.Н., Осипова В.А.* Курс дискретной математики. — М.: Изд-во МАИ, 1992.
98. *Никитин Н.Н., Разевиг В.Д.* Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешностей // ЖВМиМФ. — 1978. Т. 18. № 1. — С. 106–117.
99. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Основы теории специальных функций. — М.: Наука, 1974.
100. *Новиков Ю.И., Рыбаков К.А.* Приближенное нахождение оптимального управления детерминированными системами при ограничениях спектральным методом // Авиация и космонавтика — 2013. XII Межд. конф., Москва, 12–15 ноября 2013 г.: Тез. докл. — СПб.: Мастерская печати, 2013. — С. 609–610.
101. Общее математическое обеспечение систем автоматизированного проектирования / Под ред. В.В. Семенова. — М.: МАИ, 1981.
102. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. — М.: Мир, 2003.
103. *Панов А.П.* Математические основы теории инерциальной ориентации. — Киев: Наукова думка, 1995.
104. *Пантелеев А.В.* Метаэвристические алгоритмы оптимизации законов управления динамическими системами. — М.: Факториал, 2020.
105. *Пантелеев А.В., Бортаковский А.С.* Теория управления в примерах и задачах. — М.: Инфра-М, 2016.
106. *Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортаковский А.С.* Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. — М.: Вузовская книга, 2008.
107. *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.* Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом. — М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010.
108. *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.* Анализ нелинейных стохастических систем управления в классе обобщенных характеристических функций // АиТ. — 2011. № 2. — С. 183–194.
109. *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.* Синтез оптимальных нелинейных стохастических систем управления спектральным методом // Информатика и ее применения. — 2011. Т. 5. Вып. 2. — С. 69–81.
110. *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.* Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации. — М.: Изд-во МАИ, 2012.
111. *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.* Приближенный синтез оптимальных непрерывных стохастических систем управления с неполной обратной связью // АиТ. — 2018. № 1. — С. 130–146.
112. *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.* Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. — М.: Вузовская книга, 2006.

113. *Пантелеев А.В., Сотскова И.Л.* Приближенный метод синтеза оптимальных стохастических систем при неполной информации // Проблемы математики в физико-технических и экономических задачах: Межвед. сб. науч. тр. — М.: МФТИ, 1993. — С. 135–142.
114. *Пантелеев А.В., Якимова А.С.* Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах. — СПб.: Лань, 2015.
115. *Пантелеев А.В., Якимова А.С., Рыбаков К.А.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практикум. — М.: Инфра-М, 2016.
116. *Параев Ю.И.* Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. — М.: Советское радио, 1976.
117. *Перепелкин Г.А., Зотов В.Е.* Методические указания к работе с диалоговой системой КИПАРИС. — М.: МАИ, 1986.
118. *Переработка информации в задачах управления / Под ред. В.В. Семенова.* — М.: МАИ, 1980.
119. *Препарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия: Введение. — М.: Мир, 1989.
120. *Пригарин С.М.* Методы численного моделирования случайных процессов и полей. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2005.
121. *Пригарин С.М., Белов С.М.* Об одном применении разложений винеровского процесса в ряды // Препринт 1107. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 1998.
122. *Пугачев В.С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. — М.: ГИФМЛ, 1960.
123. *Пугачев В.С.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Изд-во МАИ, 1996.
124. *Пугачев В.С.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Физматлит, 2002.
125. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. — М.: Наука, 1990.
126. *Пупков К.А., Егупов Н.Д., Трофимов А.И.* Статистические методы анализа, синтеза и идентификации нелинейных систем автоматического управления. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998.
127. *Романов В.А., Рыбаков К.А.* Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Эрмита // Труды МАИ. — 2010. № 39.
128. *Рыбаков К.А.* Программное обеспечение спектрального метода Spectrum // Труды МАИ. — 2003. № 14.
129. *Рыбаков К.А.* Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Лагерра // Дифф. уравн. и проц. управл. — 2012. № 1. — С. 114–141.
130. *Рыбаков К.А.* Многопараметрические ортонормированные системы функций для решения задач в спектральной форме математического описания // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. VII Межд. конф., Воронеж, 26–28 ноября 2012 г.: Сб. тр. конф. Ч. 1. — Воронеж: Изд.-полиграф. центр ВГУ, 2012. — С. 327–331.
131. *Рыбаков К.А.* Многопараметрические базисные системы для представления функций в неограниченных областях // Научный вестник МГТУ ГА. — 2013. № 195 (9). — С. 45–50.
132. *Рыбаков К.А.* Решение робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи спектральным методом // Системы обработки информации. — 2013. Вып. 7 (114). — С. 139–143.

133. Рыбаков К.А. Методика построения множества допустимых управлений в спектральной области // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. VIII Межд. конф., Воронеж, 12–14 декабря 2013 г.: Материалы конф. — Воронеж: Изд.-полиграф. центр «Научная книга», 2014. — С. 255–260.
134. Рыбаков К.А. О решении робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи для нестационарных систем // Информ. и телекомм. технол. — 2014. № 22. — С. 9–15.
135. Рыбаков К.А. Библиотека функций матричной алгебры для многоядерных процессоров / Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2015610524, 13.01.2015 (заявка № 2014661943, 21.11.2014).
136. Рыбаков К.А. Библиотека функций матричной алгебры для графических процессоров видеоадаптеров / Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2015616429, 09.06.2015 (заявка № 2015613412, 24.04.2015).
137. Рыбаков К.А. Идентификация стохастических систем в спектральной форме математического описания // Идентификация систем и задачи управления (SICPRO'15). X Межд. конф., Москва, 26–29 января 2015 г.: Тр. конф. — М.: ИПУ РАН, 2015. — С. 1306–1334.
138. Рыбаков К.А. Построение множества допустимых управлений в спектральной форме математического описания // Вычислительные технологии. — 2015. Т. 20. № 3. — С. 58–74.
139. Рыбаков К.А. Спектральный метод решения уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи для нестационарных систем диффузионно-скачкообразного типа // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики — 2015. Межд. конф., Новосибирск, 19–23 октября 2015 г.: Тез. докл. — Новосибирск: Академиздат, 2015. — С. 152.
140. Рыбаков К.А. Применение гибридных технологий параллельного программирования в расчетной системе Spectrum // Межд. журнал экономики и образования. — 2016. Т. 2. № 1. — С. 92–97.
141. Рыбаков К.А. Спектральные аналоги множества допустимых управлений для финитных базисных систем // Дифф. уравн. и проц. управл. — 2016. № 2. — С. 40–71.
142. Рыбаков К.А. Спектральный метод фильтрации и прогнозирования в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа // Научный вестник МГТУ ГА. — 2016. № 224 (2). — С. 14–23.
143. Рыбаков К.А. Оптимизация нелинейных стохастических систем в пространстве спектральных характеристик управлений // Научный вестник МГТУ ГА. — 2017. Т. 20. № 2. — С. 16–26.
144. Рыбаков К.А. О применении спектрального метода в задачах оптимального управления динамическими системами с ограничениями // XI Межд. Четаевская науч. конф. «Аналитическая механика, устойчивость и управление», Казань, 13–17 июня 2017 г.: Материалы конф. Т. 3 (Секция 3. Управление), ч. III. — Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. — С. 10–19.
145. Рыбаков К.А. Спектральный метод синтеза оптимальных непрерывных стохастических систем с ограничениями на управление // Математическая теория управления и механика. Межд. конф., Суздаль, 7–11 июля 2017 г.: Тез. докл. — Владимир: ООО «Аркаим», 2017. — С. 120–121.
146. Рыбаков К.А. Статистические методы анализа и фильтрации в непрерывных стохастических системах. — М.: Изд-во МАИ, 2017.
147. Рыбаков К.А. Применение спектрального метода для моделирования, анализа и оптимизации линейных стохастических систем управления // Мехатроника, автоматика и робототехника. III

- Межд. науч.-практ. конф., Новокузнецк, 22 февраля 2019 г.: Материалы конф. — Новокузнецк: НИЦ «Машиностроение», 2019. — С. 173–176.
148. Рыбаков К.А. Применение ортогональных и биортогональных функций для моделирования марковских случайных процессов // Математическое моделирование и краевые задачи. XI Всероссийская науч. конф. с межд. участием, Самара, 27–30 мая 2019 г.: Материалы конф. Т. 1. — Самара: СамГТУ, 2019. — С. 340–343.
149. Рыбаков К.А. О решении обратной задачи динамики для детерминированных и стохастических систем // XIII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2019). Москва, 17–20 июня 2019 г.: Тр. — М.: ИПУ РАН, 2019. — С. 886–890.
150. Рыбаков К.А. Развитие и перспективы программного обеспечения спектрального метода Spectrum // Информ. и телекомм. технол. — 2019. № 43. — С. 57–63.
151. Рыбаков К.А. Применение спектральной формы математического описания для представления повторных стохастических интегралов // Дифф. уравн. и проц. управл. — 2019. № 4. — С. 1–31.
152. Рыбаков К.А. О расчете спектральных характеристик оператора интегрирования дробного порядка относительно функций Уолша и Хаара // Актуальные проблемы математики и информационных технологий. I Всероссийская конф., Махачкала, 3–5 февраля 2020 г.: Материалы конф. — Махачкала: Изд-во ДГУ, 2020. — С. 146–148.
153. Рыбаков К.А. Представление повторных стохастических интегралов Стратоновича в спектральной форме математического описания // Теория управления и математическое моделирование. Всероссийская конф. с межд. участием, Ижевск, 15–19 июня 2020 г.: Тез. докл. — Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2020. — С. 332–333.
154. Рыбаков К.А. Расчет спектральных характеристик оператора интегрирования дробного порядка относительно функций Уолша и Хаара // Вестник ДГУ. Серия 1. Естественные науки. — 2020. Т. 35. Вып. 3. — С. 17–23.
155. Рыбаков К.А. Моделирование и анализ выходных процессов линейных непрерывных стохастических систем на основе ортогональных разложений случайных функций // Изв. РАН. ТиСУ. — 2020. № 3. — С. 14–29.
156. Рыбаков К.А. Применение ортогональных разложений случайных процессов в непрерывном фильтре частиц // Материалы XXXII конф. памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова (13-я Мультиконференция по проблемам управления — МКПУ-2020), Санкт-Петербург, 6–8 октября 2020 г. — СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2020. — С. 322–324.
157. Рыбаков К.А. О представлении повторных стохастических интегралов с помощью функций Уолша // XIII Межд. конф. по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАИ 2020), Алушта, 6–13 сентября 2020 г.: Материалы конф. — М.: Изд-во МАИ, 2020. — С. 710–712.
158. Рыбаков К.А. Моделирование линейных нестационарных стохастических систем спектральным методом // Дифф. уравн. и проц. управл. — 2020. № 3. — С. 98–128.
159. Рыбаков К.А. Спектральное представление операторов стохастического интегрирования // Актуальные проблемы математики и информационных технологий. II Всероссийская конф. с межд. участием, Махачкала, 5–7 февраля 2021 г.: Материалы конф. — Махачкала: Изд-во ДГУ, 2021. — С. 147–149.

160. Рыбаков К.А. К вычислению погрешностей аппроксимации кратных стохастических интегралов // XXII Межд. конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2021), Алушта, 4–13 сентября 2021 г.: Материалы конф. — М.: Изд-во МАИ, 2021. — С. 77–79.
161. Рыбаков К.А. Ортогональное разложение кратных стохастических интегралов Ито // Дифф. уравн. и проц. управл. — 2021. № 3. — С. 109–140.
162. Рыбаков К.А. Ортогональное разложение кратных стохастических интегралов Стратоновича // Дифф. уравн. и проц. управл. — 2021. № 4. — С. 81–115.
163. Рыбаков К.А. Спектральный метод моделирования линейных непрерывных стохастических систем. — М.: Изд-во МАИ, 2021.
164. Рыбаков К.А. К ортогональному разложению повторных стохастических интегралов Стратоновича // Актуальные проблемы математики и информационных технологий. III Всероссийская конф., Махачкала, 7–9 февраля 2022 г.: Материалы конф. — Махачкала: Изд-во ДГУ, 2022. — С. 174–176.
165. Рыбаков К.А. К ортогональному разложению повторных стохастических интегралов Стратоновича // Вестник ДГУ. Серия 1. Естественные науки. — 2022. Т. 37. Вып. 2. — С. 27–32.
166. Рыбаков К.А. Развитие спектрального метода моделирования повторных стохастических интегралов // Открытые эволюционирующие системы: Цифровая трансформация. Шестая межд. науч.-практ. конф., Хабаровск, 8–9 июня 2022 г.: Тез. докл. — Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2022. — С. 42–43.
167. Рыбаков К.А. Спектральное представление повторных стохастических интегралов // Открытые эволюционирующие системы: Цифровая трансформация. Шестая межд. науч.-практ. конф., Хабаровск, 8–9 июня 2022 г.: Материалы конф. — Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2022. — С. 145–162.
168. Рыбаков К.А. Применение спектрального метода анализа линейных систем управления к моделированию повторных стохастических интегралов // Математическая теория управления и ее приложения (в рамках 15-й Мультиконференции по проблемам управления — 15 МКПУ-2022), Санкт-Петербург, 4–6 октября 2022 г. — СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2022. — С. 279–281.
169. Рыбаков К.А. Вычисление погрешностей аппроксимации кратных стохастических интегралов Ито и Стратоновича // Марчуковские научные чтения — 2022. Межд. конф., Новосибирск, 3–7 октября 2022 г.: Тез. докл. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2022. — С. 59.
170. Рыбаков К.А. Расчет коэффициентов разложения типовых ядер кратных стохастических интегралов // Марчуковские научные чтения — 2022. Межд. конф., Новосибирск, 3–7 октября 2022 г.: Тез. докл. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2022. — С. 59–60.
171. Рыбаков К.А. О матричном следе линейного интегрального оператора с ядром специального вида // Актуальные проблемы математики и информационных технологий. IV Всероссийская конф., Махачкала, 7–9 февраля 2023 г.: Материалы конф. — Махачкала: Изд-во ДГУ, 2023. — С. 126–129.
172. Рыбаков К.А. Особенности разложения кратных стохастических интегралов Стратоновича с применением функций Уолша и Хаара // Дифф. уравн. и проц. управл. — 2023. № 1. — С. 137–150.
173. Рыбаков К.А. Точное вычисление погрешности аппроксимации кратных стохастических интегралов Ито // СибЖВМ. — 2023. Т. 26. № 2. — С. 205–213.

174. Рыбаков К.А. Алгоритмическое обеспечение численно-спектральных методов моделирования стохастических динамических систем // Моделирование и анализ данных. — 2023. Т. 13. № 3. — С. 79–95.
175. Рыбаков К.А. Моделирование повторных стохастических интегралов спектральным методом / Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2024616685, 22.03.2024 (заявка № 2024615542, 20.03.2024).
176. Рыбаков К.А., Клешинин В.Ю. Разработка библиотек матричной алгебры для расчетной системы Spectrum с применением технологий параллельного программирования // Научно-исследовательский и образовательный потенциал современной высшей школы. II Межд. науч.-практ. конф., Ростов-на-Дону, 17 октября 2014 г.: Тр. конф. — Ростов-на-Дону: Научное сотрудничество, 2014. — С. 117–122.
177. Рыбаков К.А., Рыбин В.В. Моделирование распределенных и дробно-распределенных процессов и систем управления спектральным методом. — М.: Изд-во МАИ, 2016.
178. Рыбаков К.А., Рыбин В.В. Расчет спектральной характеристики оператора дробного интегро-дифференцирования в базисе функций Хаара // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем. XII Межд. науч.-техн. конф., Пенза, 4–6 декабря 2017 г.: Материалы конф. — Пенза: Изд-во ПГУ, 2017. — С. 44–48.
179. Рыбаков К.А., Рыбин В.В. Алгоритмическое и программное обеспечение расчета систем автоматического управления в спектральной форме математического описания / В кн. Современная наука: теоретические, практические и инновационные аспекты развития. Т. 2. — Ростов-на-Дону: Научное сотрудничество, 2018. — С. 171–199.
180. Рыбаков К.А., Рыбин В.В. Алгоритмическое и программное обеспечение расчета спектральной характеристики оператора дробного интегродифференцирования относительно функций Хаара // Машиностроение и компьютерные технологии. — 2018. № 1. — С. 31–51.
181. Рыбаков К.А., Рыбин В.В. Алгоритмическое и программное обеспечение расчета спектральной характеристики оператора дробного интегродифференцирования относительно функций Уолша // Вестник СамГТУ. Серия: Технические науки. — 2019. № 4 (64). — С. 42–57.
182. Рыбаков К.А., Рыбин В.В. Спектральные характеристики операторов дифференцирования и интегрирования относительно ортогональных финитных функций. I. Симметричные сплайны // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2019 (АПВПМ-2019). Межд. конф., Новосибирск, 1–5 июля 2019 г.: Тр. конф. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2019. — С. 423–430.
183. Рыбаков К.А., Рыбин В.В. Спектральные характеристики операторов дифференцирования и интегрирования относительно ортогональных финитных функций. II. Несимметричные сплайны // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2019 (АПВПМ-2019). Межд. конф., Новосибирск, 1–5 июля 2019 г.: Тр. конф. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2019. — С. 431–437.
184. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем со случайными изменениями структуры // Известия вузов. Приборостроение. — 2006. Т. 49. № 3. — С. 8–16.
185. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Анализ стохастических систем на основе решения уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова / В кн. Нестационарные системы автоматического управления: ана-

- лиз, синтез и оптимизация (под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова). — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. — С. 312–338.
186. Рыбаков К.А., Хакимов З.Р. О применении спектральной формы математического описания к идентификации систем управления космическими аппаратами // Вестник МАИ. — 2010. Т. 17. № 3. — С. 226–229.
187. Рыбаков К.А., Хакимов З.Р. Алгоритмическое обеспечение решения линейных интегральных уравнений спектральным методом // Научный вестник МГТУ ГА. — 2010. № 157 (7). — С. 51–57.
188. Рыбаков К.А., Ющенко А.А. Моделирование дробного броуновского движения с применением ортогональных разложений случайных процессов // Теория управления и математическое моделирование. Всероссийская конф. с межд. участием, Ижевск, 15–19 июня 2020 г.: Тез. докл. — Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2020. — С. 334–335.
189. Рыбаков К.А., Ющенко А.А. Спектральный метод моделирования решений линейных стохастических дифференциальных уравнений дробного порядка // XIII Межд. конф. по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАИ 2020), Алушта, 6–13 сентября 2020 г.: Материалы конф. — М.: Изд-во МАИ, 2020. — С. 712–714.
190. Рыбин В.В. Спектральные алгоритмы экстраполяции // Проблемы математического обеспечения систем автоматизированного проектирования: Тем. сб. науч. тр. — М.: МАИ, 1982. — С. 49–57.
191. Рыбин В.В. Алгоритмическое обеспечение спектрального метода расчета нестационарных систем управления в базисе ультрасферических полиномов // Автоматизация математических исследований: Тем. сб. науч. тр. — М.: МАИ, 1983. — С. 8–15.
192. Рыбин В.В. Алгоритмическое обеспечение спектрального метода расчета нестационарных дискретных и непрерывно-дискретных систем управления в базисе дискретных полиномов Кравчука // Математические задачи управления движущимися объектами: Тем. сб. науч. тр. — М.: МАИ, 1987. — С. 42–48.
193. Рыбин В.В. Описание сигналов и линейных нестационарных систем управления в базисах вейвлетов и их анализ в вычислительных средах. — М.: Изд-во МАИ, 2003.
194. Рыбин В.В. Разработка и применение пакета расширения Spektr_SM пакета Simulink СКМ Matlab. — М.: Изд-во МАИ, 2004.
195. Рыбин В.В. Разработка и применение пакета расширения Spektr_SM CBM VisSim. — М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2008.
196. Рыбин В.В. Разработка пакета расширения MLSY_SM СКМ Mathcad в базисах Добеши m -го порядка // Труды МАИ. — 2009. № 33.
197. Рыбин В.В. Разработка пакета расширения MLSY_SM СКМ Mathcad в биортогональных вейвлет-базисах // Труды МАИ. — 2009. № 33.
198. Рыбин В.В. p -этапные дискретные ортонормированные и биортонормированные вейвлет-базисы в описании сигналов и линейных нестационарных дискретных систем управления на отрезке $[0, L - 1]$ // Труды МАИ. — 2009. № 36.
199. Рыбин В.В. Моделирование дробных нестационарных систем управления в СКМ спектральным методом // Вестник МАИ. — 2011. Т. 18. № 4. — С. 102–118.
200. Рыбин В.В. Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики. — М.: Изд-во МАИ, 2011.

201. *Рыбин В.В.* Моделирование нестационарных систем управления целого и дробного порядка проекционно-сеточным спектральным методом. — М.: Изд-во МАИ, 2013.
202. *Рыбин В.В.* Описание и анализ линейных нестационарных непрерывных систем управления в спектральной области в неортогональных базисах. Орторекурсивный подход // Дифф. уравн. и проц. управл. — 2018. № 4. — С. 18–40.
203. *Саульев В.К.* Численное решение уравнений случайных процессов. — М.: Изд-во МАИ, 1989.
204. Семантическое программирование в автоматизации проектирования летательных аппаратов и их систем / Под ред. В.В. Семенова. — М.: МАИ, 1988.
205. Семантическое программирование в автоматизированном проектировании систем управления летательными аппаратами / Под ред. В.В. Семенова. — М.: МАИ, 1985.
206. *Семенов В.В.* Спектральный анализ и синтез линейных систем с переменными параметрами на конечных нестационарных интервалах времени // Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Кн. 3. Ч. 1. Теория нестационарных, нелинейных и самонастраивающихся систем автоматического регулирования. — М.: Машиностроение, 1969. — С. 136–196.
207. *Семенов В.В.* Уравнение обобщенной характеристической функции вектора состояния систем автоматического управления // Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. науч. сб. — Саратов: СПИ, 1977. Вып. 2. — С. 3–36.
208. *Семенов В.В.* Синтез алгоритмов управления нелинейными системами при случайных воздействиях с ограниченным составом точных измерений // Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. науч. сб. — Саратов: СПИ, 1978. Вып. 3. — С. 3–20.
209. *Семенов В.В.* Формы математического описания линейных систем. — М.: МАИ, 1980.
210. *Семенов В.В., Рыбин В.В.* Нестационарные кусочно-постоянные и дискретные системы ортогональных функций Уолша, Хаара, Радемахера и методы вычисления одномерных и двумерных нестационарных спектральных характеристик по этим функциям / Отчет о НИР. — М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1975.
211. *Семенов В.В., Рыбин В.В.* Алгоритмическое и программное обеспечение расчета нестационарных непрерывно-дискретных систем управления ЛА спектральным методом. — М.: МАИ, 1984.
212. *Семенов В.В., Сивцов В.И.* Обобщение спектрального метода анализа нестационарных систем на конечных интервалах времени на нелинейные системы // Известия вузов. Приборостроение. — 1969. Т. 12. № 12. — С. 63–68.
213. *Семенов В.В., Солодовников В.В.* Спектральный анализ линейных систем с переменными параметрами на конечных нестационарных интервалах времени // АиТ. — 1968. № 11. — С. 14–23.
214. *Синицын И.Н.* Канонические представления случайных функций и их применение в задачах компьютерной поддержки научных исследований. — М.: Торус Пресс, 2009.
215. *Скорород А.В.* Об одном обобщении стохастического интеграла // ТВП. — 1975. Т. 20. № 2. — 223–238.
216. *Скорород А.В.* Случайные линейные операторы. — Киев: Наукова думка, 1978.
217. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. — М.: Наука, 1981.
218. *Соколов Н.П.* Введение в теорию многомерных матриц. — Киев: Наукова думка, 1972.
219. *Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егунов Н.Д.* Спектральные методы расчета и проектирования систем управления. — М.: Машиностроение, 1986.

220. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. — М.: Наука, 1974.
221. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральный метод расчета нестационарных систем управления летательными аппаратами. — М.: Машиностроение, 1975.
222. Солодовников В.В., Семенов В.В., Пешель М., Недо Д. Расчет систем управления на ЦВМ: спектральный и интерполяционный методы. — М.: Машиностроение, 1979.
223. Сотскова И.Л. Применение аппарата обобщенной характеристической функции к анализу стохастических систем управления ЛА // Задачи стохастического управления: Тем. сб. науч. тр. — М.: МАИ, 1986. — С. 71–78.
224. Сотскова И.Л. Исследование корректности краевых задач для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова в классе обобщенных характеристических функций // Новые задачи оптимизации авиационных систем: Тем. сб. науч. тр. — М.: МАИ, 1989. — С. 26–33.
225. Степанов О.А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. — СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2017.
226. Стратонович Р.Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. — М.: Изд-во МГУ, 1966.
227. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1979.
228. Таблицы и математическое обеспечение спектрального метода теории автоматического управления / Под ред. В.В. Семенова. — М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1973.
229. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. — М.: Советское радио, 1977.
230. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. — М.: Радио и связь, 1991.
231. Филиппова А.А. Теорема Мизеса о предельном поведении функционалов от эмпирических функций распределения и ее статистические применения // ТВП. — 1962. Т. 7. № 1. — С. 26–60.
232. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. — М.: Мир, 1983.
233. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. — М.: Физматлит, 2005.
234. Черных Н.В. Моделирование решений СДУ с марковскими переключениями // Управление большими системами. — 2012. Вып. 40. — С. 108–143.
235. Черных Н.В. Неявные сильные методы численного моделирования решений СДУ с марковскими переключениями // Управление большими системами. — 2014. Вып. 50. — С. 58–83.
236. Черных Н.В., Пакшин П.В. Алгоритмы численного решения стохастических дифференциальных систем с переключаемой диффузией // Управление большими системами. — 2012. Вып. 36. — С. 106–143.
237. Шварц Л. Математические методы для физических наук. — М.: Мир, 1965.
238. Шварц Л. Анализ. Т. 1. — М.: Мир, 1972.
239. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. — М.: ФАЗИС, 1998.
240. Artemiev S.S., Averina T.A. Numerical Analysis of Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. — VSP, 1997.

241. *Averina T.A., Karachanskaya E.V., Rybakov K.A.* Statistical modeling of random processes with invariants // Proc. 2017 Int. Multi-Conf. on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIR-CON). Novosibirsk Akademgorodok, Russia, September 18–22, 2017. — IEEE, 2017. — P. 34–37.
242. *Averina T.A., Karachanskaya E.V., Rybakov K.A.* Statistical analysis of diffusion systems with invariants // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2018. Vol. 33. No. 1. — P. 1–13.
243. *Averina T.A., Rybakov K.A.* Comparison of a statistical simulation method and a spectral method for analysis of stochastic multistructure systems with distributed transitions // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2007. Vol. 22. No. 5. — P. 431–447.
244. *Averina T.A., Rybakov K.A.* Systems with regime switching on manifolds // Proc. 2018 14th Int. Conf. “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference). Moscow, Russia, 30 May – 1 June, 2018. — IEEE, 2018. — P. 1–3.
245. *Bain A., Crisan D.* Fundamentals of Stochastic Filtering. — Springer, 2009.
246. *Baghdasaryan G., Mikilyan M., Panteleev A., Rybakov K.* Analysis of jump diffusion systems by spectral method // AIP Conf. Proc. — 2019. Vol. 2181. Id 020030.
247. *Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Panteleev A.V., Rybakov K.A.* Spectral method for analysis of diffusions and jump diffusions // Smart Innovation, Systems and Technologies. Vol. 173. — Springer, 2020. — P. 293–314.
248. *Bardina X., Rovira C.* On the strong convergence of multiple ordinary integrals to multiple Stratonovich integrals // Publicacions Matemàtiques. — 2021. Vol. 65. No. 2. — P. 859–876.
249. *Bardina X., Jolis M.* Weak convergence to the multiple Stratonovich integral // Stoch. Process. Their Appl. — 2000. Vol. 90. No. 2. — P. 277–300.
250. *Bernstein S.* Principes de la théorie des équations différentielles stochastiques // Труды физ.-мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1934. Т. 5. — С. 95–124.
251. *Biagini F., Hu Y., Øksendal B., Zhang T.* Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications. — Springer-Verlag, 2008.
252. *Boyd J.P.* Chebyshev and Fourier Spectral Methods. — Dover Publ., 2000.
253. *Brislaw C.* Kernels of trace class operators // Proc. Am. Math. Soc. — 1988. Vol. 104. No. 4. — P. 1181–1190.
254. *Budhiraja A.S.* Multiple stochastic integrals and Hilbert space valued traces with applications to asymptotic statistics and non-linear filtering / Ph.D. Diss., The University of North Carolina, Chapel Hill, 1994.
255. *Burrage K., Burrage P.M., Lythe G.* Effective numerical methods for simulating diffusion on a spherical surface in three dimensions // Numer. Algor. — 2022. Vol. 91. No. 4. — P. 1577–1596.
256. *Burrage K., Burrage P.M., Tian T.* Numerical methods for strong solutions of stochastic differential equations: An overview // Proc. R. Soc. Lond. A. — 2004. Vol. 460. No. 2041. — P. 373–402.
257. *Burrage K., Tian T.* Predictor-corrector methods of Runge–Kutta type for stochastic differential equations // SIAM J. Numer. Anal. — 2002. Vol. 40. No. 4. — P. 1516–1537.
258. *Cerrai S.* Second Order PDE’s in Finite and Infinite Dimension. A Probabilistic Approach. — Springer-Verlag, 2001.
259. *Chauvière C., Djellout H.* An efficient spectral method for the numerical solution to some classes of stochastic differential equations // Math. Meth. Appl. Sci. — 2021. Vol. 44. No. 7. — P. 5888–5907.

260. *Chechkin A., Pavlyukevich I.* Marcus versus Stratonovich for systems with jump noise // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2010. Vol. 47. No. 34. Id 342001.
261. *Chung K.L., Williams R.I.* Introduction to Stochastic Integration. — Birkhäuser, 1990.
262. *Clark J.M.C., Cameron R.J.* The maximum rate of convergence of discrete approximations for stochastic differential equations // *Stochastic Differential Systems. Filtering and Control* (ed. by Grigelionis B.). — Springer-Verlag, 1980. — P. 162–171.
263. *Dasgupta A., Kallianpur G.* Multiple fractional integrals // *Probab. Theory Relat. Fields.* — 1999. Vol. 115. No. 4. — P. 505–525.
264. *Delgado R.* Multiple Ogawa, Stratonovich and Skorohod anticipating integrals // *Stoch. Anal. Appl.* — 1998. Vol. 16. No. 5. — P. 859–872.
265. *Delgado R., Sanz M.* The Hu–Meyer formula for non deterministic kernels // *Mathematics Preprint Series.* No. 92. — Universitat de Barcelona, 1991.
266. *Dryden H.L.* A review of the statistical theory of turbulence // *Quart. Appl. Math.* — 1943. Vol. 1. No. 1. — P. 7–42.
267. *Einicke G.A.* Smoothing, Filtering and Prediction: Estimating the Past, Present and Future. — InTech, 2012.
268. *Falsone G.* Stochastic differential calculus for Gaussian and non-Gaussian noises: A critical review // *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat.* — 2018. Vol. 56. — P. 198–216.
269. *Farré M., Jolis M., Utzet F.* Multiple Stratonovich integral and Hu–Meyer formula for Lévy processes // *Ann. Probab.* — 2010. Vol. 38. No. 6. — P. 2136–2169.
270. *Fernández J.C.R.* Some properties of multiplication operators acting on Banach spaces of measurable functions // *Boletín de Matemáticas.* — 2016. Vol. 23. No. 2. — P. 221–237.
271. *Fisk D.L.* Quasi-martingales and stochastic integrals // *Technical Report.* — Michigan State University, 1963.
272. *Fox R., Taqqu M.S.* Multiple stochastic integrals with dependent integrators // *J. Multivar. Anal.* — 1987. Vol. 21. No. 1. — P. 105–127.
273. *Germano G., Politi M., Scalas E., Schilling R.L.* Itô and Stratonovich integrals on compound renewal processes: The normal / Poisson case // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* — 2010. Vol. 15. No. 6. — P. 1583–1588.
274. *Ghosh M.K., Bagchi A.* Modeling stochastic hybrid systems // *System Modeling and Optimization. CSMO 2003. IFIP International Federation for Information Processing.* Vol. 166. — Springer, 2005. — P. 269–280.
275. *Graham C., Talay D.* Stochastic Simulation and Monte Carlo Methods. — Springer-Verlag, 2013.
276. *Grigoriu M.* The Itô and Stratonovich integrals for stochastic differential equations with Poisson white noise // *Probabilistic Eng. Mech.* — 1998. Vol. 13. No. 3. — P. 175–182.
277. *Guo B.-Y.* Spectral Methods and Their Applications. — World Scientific, 1998.
278. *Halmos P.R.* A Hilbert Space Problem Book. — Springer-Verlag, 1982.
279. *Hanson F.B.* Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions: Modeling, Analysis, and Computation. — SIAM, 2007.
280. *Hayakawa S., Tanaka K.* Monte Carlo construction of cubature on Wiener space // *Japan J. Indust. Appl. Math.* — 2022. Vol. 39. No. 2. — P. 543–571.

281. *Hida T., Ikeda N.* Analysis on Hilbert space with reproducing kernel arising from multiple Wiener integral // Proc. 5th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. — 1967. Vol. II, part 1. — P. 117–143.
282. *Hu Y.-Z., Meyer P.-A.* Sur les intégrales multiples de Stratonovitch // Séminaire de Probabilités. — 1988. T. 22. — P. 72–81.
283. *Hu Y.-Z., Meyer P.-A.* On the approximation of multiple Stratonovich integrals // Stochastic Processes. A Festschrift in Honour of Gopinath Kallianpur (ed. by S. Cambanis, J.K. Ghosh, R.L. Karandikar, P.K. Sen). — Springer-Verlag, 1993. — P. 141–147.
284. *Huang S.T., Cambanis S.* Stochastic and multiple Wiener integrals for Gaussian processes // Ann. Probab. — 1978. Vol. 6. No. 4. — P. 585–614.
285. *Itô K.* Stochastic integral // Proc. Imp. Acad. — 1944. Vol. 20. No. 8. — P. 519–524.
286. *Itô K.* On stochastic differential equations // Mem. Am. Math. Soc. — 1951. No. 4. — P. 1–51.
287. *Itô K.* Multiple Wiener integral // J. Math. Soc. Jpn. — 1951. Vol. 3. No. 1. — P. 157–169.
288. *Itô K.* Spectral type of the shift transformation of differential processes with stationary increments // Trans. Amer. Math. Soc. — 1956. Vol. 81. — P. 253–263.
289. *Itô Y., Kubo I.* Calculus on Gaussian and Poisson white noises // Nagoya Math. J. — 1988. Vol. 111. — P. 41–84.
290. *Jarrow R., Protter P.* A short history of stochastic integration and mathematical finance: The early years, 1880–1970 // Lecture Notes – Monograph Series. Vol. 45. A Festschrift for Herman Rubin, 2004. — P. 75–91.
291. *Jolis M.* On a multiple Stratonovich-type integral for some Gaussian processes // J. Theor. Probab. — 2006. Vol. 19. No. 1. — P. 121–133.
292. *Johnson G.W., Kallianpur G.* Homogeneous chaos, p-forms, scaling and the Feynman integral // Trans. Am. Math. Soc. — 1993. Vol. 340. No. 2. — P. 503–548.
293. *Karachanskaya E.* Invariants for a dynamical system with strong random perturbations // Dynamical Systems Theory, Models, Algorithms and Applications. — IntechOpen, 2021.
294. *Karhunen K.* Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung // Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. I. Math.-Phys. — 1947. Vol. 37. — P. 1–79.
295. *Kastner F., Rößler A.* An analysis of approximation algorithms for iterated stochastic integrals and a Julia and MATLAB simulation toolbox // Numer. Algor. — 2023. Vol. 93. No. 1. — P. 27–66.
296. *Khan S.U., Ali I.* Application of Legendre spectral-collocation method to delay differential and stochastic delay differential equation // AIP Adv. — 2018. Vol. 8. Id 035301.
297. *Khan S.U., Ali M., Ali I.* A spectral collocation method for stochastic Volterra integro-differential equations and its error analysis // Adv. Differ. Equ. — 2019. Vol. 2019:161.
298. *Kleindienst H., Lüchow A.* Multiplication theorems for orthogonal polynomials // Int. J. Quantum Chem. — 1993. Vol. 48. — P. 239–247.
299. *Kloeden P.E., Pearson R.A.* The numerical solution of stochastic differential equations // J. Aust. Math. Soc. B. — 1977. Vol. 20. — P. 8–12.
300. *Kloeden P.E., Platen E.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. — Springer, 1992.
301. *Kondratiev Y., Lytvynov E.* Operators of Gamma white noise calculus // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. — 2000. Vol. 3. No. 3. — 303–335.

302. *Kubo R.* Stochastic Liouville equations // *J. Math. Phys.* — 1963. Vol. 4. No. 2. — P. 174–183.
303. *Kudryavtseva I.A., Rybakov K.A.* Modified continuous-time particle filter algorithm without overflow errors // *Smart Innovation, Systems and Technologies*. Vol. 217. — Springer, 2021. — P. 245–257.
304. *Kuznetsov D.F.* Multiple Ito and Stratonovich stochastic integrals: Fourier–Legendre and trigonometric expansions, approximations, formulas // *Дифф. уравн. и проц. управл.* — 2017. — № 1. С. А.1–А.385.
305. *Kuznetsov D.F.* Mean-square approximation of iterated Itô and Stratonovich stochastic integrals: Method of generalized multiple Fourier series. Application to numerical integration of Itô SDEs and semilinear SPDEs // *Дифф. уравн. и проц. управл.* — 2021. № 4. — С. А.1–А.788.
306. *Kuznetsov D.F.* A new approach to the series expansion of iterated Stratonovich stochastic integrals of arbitrary multiplicity with respect to components of the multidimensional Wiener process // *Дифф. уравн. и проц. управл.* — 2022. № 2. — С. 83–186.
307. *Kuznetsov D.F.* A new approach to the series expansion of iterated Stratonovich stochastic integrals of arbitrary multiplicity with respect to components of the multidimensional Wiener process. II // *Дифф. уравн. и проц. управл.* — 2022. № 4. — С. 135–194.
308. *Kuznetsov D.F.* Strong approximation of iterated Itô and Stratonovich stochastic integrals based on generalized multiple Fourier series. Application to numerical integration of Itô SDEs and semilinear SPDEs (Third edition) // *Дифф. уравн. и проц. управл.* — 2023. № 1. — С. А.1–А.947.
309. *Kuznetsov D.F.* A new approach to the series expansion of iterated Stratonovich stochastic integrals with respect to components of the multidimensional Wiener process. The case of arbitrary complete orthonormal systems in Hilbert space // *Дифференциальные уравнения и процессы управления*. — 2024. № 2. — С. 73–170.
310. *Kuznetsov M.D., Kuznetsov D.F.* SDE-MATH: A software package for the implementation of strong high-order numerical methods for Itô SDEs with multidimensional non-commutative noise based on multiple Fourier–Legendre series // *Дифф. уравн. и проц. управл.* — 2021. № 1. — С. 93–422.
311. *Kuznetsov M.D., Kuznetsov D.F.* Optimization of the mean-square approximation procedures for iterated Ito stochastic integrals of multiplicities 1 to 5 from the unified Taylor–Ito expansion based on multiple Fourier–Legendre series. arXiv:2010.13564v5 [math.PR], 2022.
312. *Li C.W., Liu X.Q.* Approximation of multiple stochastic integrals and its application to stochastic differential equations // *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.* — 1997. Vol. 30. No. 2. — P. 697–708.
313. *Li C.W., Wu S.C., Liu X.Q.* Discretization of jump stochastic differential equations in terms of multiple stochastic integrals // *J. Comput. Math.* — 1998. Vol. 16. No. 4. — P. 375–384.
314. *Loeve M.* Probability Theory II. — Springer-Verlag, 1978.
315. *Major P.* Multiple Wiener–Itô Integrals. With Applications to Limit Theorems. — Springer, 2014.
316. *Major P.* The theory of Wiener–Itô integrals in vector-valued Gaussian stationary random fields. Part I // *Moscow Math. J.* — 2020. Vol. 20. No. 4. — P. 749–812.
317. *Major P.* The theory of Wiener–Itô integrals in vector-valued Gaussian stationary random fields. Part II // *Moscow Math. J.* — 2023. Vol. 23. No. 3. — P. 331–367.
318. *Maleknejad K., Khodabin M., Rostami M.* A numerical method for solving m -dimensional stochastic Itô–Volterra integral equations by stochastic operational matrix // *Comput. Math. Appl.* — 2012. Vol. 63. No. 1. — P. 133–143.

319. *Marcus S.I.* Modeling and analysis of stochastic differential equations driven by point processes // IEEE Trans. Inf. Theory. — 1978. Vol. 24. No. 2. — P. 164–172.
320. *Maruyama G.* Continuous Markov processes and stochastic equations // Rend. Circolo Math. Palermo. — 1955. Vol. 2. No. 4. — P. 48–90.
321. *Milstein G.N., Tretyakov M.V.* Stochastic Numerics for Mathematical Physics. — Springer-Verlag, 2004.
322. *Mishura Y.* Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes. — Springer-Verlag, 2008.
323. *Mishura Y., Zili M.* Stochastic Analysis of Mixed Fractional Gaussian Processes. — ISTE Press, 2018.
324. *Mohammadi F.* Numerical solution of stochastic Ito–Volterra integral equations using Haar wavelets // Numer. Math. Theor. Meth. Appl. — 2016. Vol. 9. No. 3. — P. 416–431.
325. *Momenzade N., Vahidi A.R., Babolian E.* A computational method for solving stochastic Itô–Volterra integral equation with multi-stochastic terms // Math. Sci. — 2018. Vol. 12. No. 4. — P. 295–303.
326. *Morrison K.* Spectral approximation of multiplication operators // New York J. Math. — 1995. No. 1. — P. 75–96.
327. *Mrongowius J., Rößler A.* On the approximation and simulation of iterated stochastic integrals and the corresponding Lévy areas in terms of a multidimensional Brownian motion // Stoch. Anal. Appl. — 2022. Vol. 40. No. 3. — P. 397–425.
328. *Nualart D., Pardoux E.* Stochastic calculus with anticipating integrands // Probab. Theory Relat. Fields. — 1988. Vol. 78. No. 4. — P. 535–581.
329. *Nualart D., Schoutens W.* Chaotic and predictable representations for Lévy processes // Stoch. Process. Their Appl. — 2000. Vol. 90. No. 1. — P. 109–122.
330. *Nualart D., Zakai M.* On the relation between the Stratonovich and Ogawa integrals // Ann. Probab. — 1989. Vol. 17. No. 4. — P. 1536–1540.
331. *Nualart D., Zakai M.* Multiple Wiener–Ito integrals possessing a continuous extension // Probab. Theory Relat. Fields. — 1990. Vol. 85. No. 1. — P. 131–145.
332. *Ogawa S.* The stochastic integral of noncausal type as an extension of the symmetric integrals // Japan J. Appl. Math. — 1985. Vol. 2. — P. 229–240.
333. *Ogawa S.* Noncausal Stochastic Calculus. — Springer, 2017.
334. *Ogura H.* Orthogonal functionals of the Poisson process // IEEE Trans. Inf. Theory. — 1972. Vol. 18. No. 4. — P. 473–481.
335. *Pardoux E., Talay D.* Discretization and simulation of stochastic differential equations // Acta Applicandae Mathematica. — 1985. Vol. 3. No. 1. — P. 23–47.
336. *Platen E.* A generalized Taylor formula for solutions of stochastic differential equations // Sankhya A. — 1982. Vol. 44. No. 2. — P. 163–172.
337. *Platen E., Bruti-Liberati N.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance. — Springer, 2010.
338. *Roberts A.J.* Model Emergent Dynamics in Complex Systems. — SIAM, 2014.
339. *Rosinski J.* On stochastic integration by series of Wiener integrals // Appl. Math. Optim. — 1989. Vol. 19. No. 2. — P. 137–155.

340. *Rößler A.* Rooted tree analysis for order conditions of stochastic Runge–Kutta methods for the weak approximation of stochastic differential equations // *Stoch. Anal. Appl.* — 2006. Vol. 24. No. 1. — P. 97–134.
341. *Rybakov K.A.* Spectral method of analysis and optimal estimation in linear stochastic systems // *Int. J. Model. Simul. Sci. Comput.* — 2020. Vol. 11. No. 3. Id 2050022.
342. *Rybakov K.* Application of Walsh series to represent iterated Stratonovich stochastic integrals // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* — 2020. Vol. 927. Id 012080.
343. *Rybakov K.* Modified spectral method for optimal estimation in linear continuous-time stochastic systems // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2021. V. 1864. Id 012025.
344. *Rybakov K.A.* Using spectral form of mathematical description to represent Stratonovich iterated stochastic integrals // *Smart Innovation, Systems and Technologies*. Vol. 217. — Springer, 2021. — P. 287–304.
345. *Rybakov K.A.* Using spectral form of mathematical description to represent Itô iterated stochastic integrals // *Smart Innovation, Systems and Technologies*. Vol. 274. — Springer, 2022. — P. 331–344.
346. *Rybakov K.* Spectral representation of stochastic integration operators // *MATEC Web of Conferences*. — 2022. Vol. 362. Id 01027.
347. *Rybakov K.* Spectral representations of iterated stochastic integrals and their application for modeling nonlinear stochastic dynamics // *Mathematics*. — 2023. Vol. 11. No. 19. Id 4047.
348. *Rybakov K.* On traces of linear operators with symmetrized Volterra-type kernels // *Symmetry*. — 2023. Vol. 15. No. 10. Id 1821.
349. *Rybakov K.A., Sotskova I.L.* Spectral method for analysis of switching diffusions // *IEEE Trans. Autom. Control*. — 2007. Vol. 52. No. 7. — P. 1320–1325.
350. *Rybakov K., Yushchenko A.* Spectral method for solving linear Caputo fractional stochastic differential equations // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* — 2020. Vol. 927. Id 012077.
351. *Rydén T., Wiktorsson M.* On the simulation of iterated Itô integrals // *Stoch. Process Their Appl.* — 2001. Vol. 91. No. 1. — P. 151–168.
352. *Saito Y., Mitsui T.* Simulation of stochastic differential equations // *Ann. Inst. Statist. Math.* — 1993. Vol. 45. No. 3. — P. 419–432.
353. *Schurz H.* Numerical analysis of stochastic differential equations without tears // *Handbook of Stochastic Analysis and Applications* (ed. by V. Lakshmikantham, D. Kannan). — Marcel Dekker, 2002. — P. 237–359.
354. *Segall A., Kailath T.* Orthogonal functionals of independent-increment processes // *IEEE Trans. Inf. Theory*. — 1976. Vol. 22. No. 3. — P. 287–298.
355. *Semenov V.V., Sotskova I.L.* The spectral method for solving Fokker–Planck–Kolmogorov equation for stochastic control system analysis // *2nd IFAC Symp. on Stochastic Control: Preprints. Part 1.* — 1986. — P. 131–136.
356. *Silverman B.W.* *Density Estimation for Statistics and Data Analysis.* — Chapman & Hall/CRC, 1986.
357. *Solé J.LL., Utzet F.* Stratonovich integral and trace // *Stoch. Stoch. Rep.* — 1990. Vol. 29. No. 2. — P. 203–220.

358. *Solé J.L., Utzet F.* Intégrale multiple de Stratonovich pour le processus de Poisson // Séminaire de probabilités de Strasbourg. — 1991. Vol. 25. No. 2. — P. 270–283.
359. *Solé J.L., Utzet, F., Vives J.* Chaos expansions and Malliavin calculus for Lévy processes // Stochastic Analysis and Applications. Abel Symposia. Vol. 2. — Springer, 2007. — P. 595–612.
360. *Stroock D.W., Varadhan S.R.S.* Multidimensional Diffusion Processes. — Springer, 2006.
361. *Szulga J.* Multiple stochastic integrals with respect to symmetric infinitely divisible random measures // Ann. Probab. — 1991. Vol. 19. No. 3. — P. 1145–1156.
362. *Tudor C., Tudor M.* Approximation of multiple Stratonovich fractional integrals // Stoch. Anal. Appl. — 2007. Vol. 25. No. 4. — 781–799.
363. *Trefethen L.N.* Spectral Methods in Matlab. — SIAM, 2001.
364. *Wagner W., Platen E.* Approximation of Itô integral equations // Preprint ZIMM, Akad. Wissenschaften, DDR, Berlin, 1978.
365. *Wiener N.* Differential-space // J. Math. & Phys. — 1923. Vol. 2. No. 1–4. — P. 131–174.
366. *Wiener N.* The homogeneous chaos // Am. J. Math. — 1938. Vol. 60. No. 4. — P. 897–936.
367. *Wiktorsson M.* Joint characteristic function and simultaneous simulation of iterated Itô integrals for multiple independent Brownian motions // Ann. Appl. Probab. — 2001. Vol. 11. No. 2. — 470–487.
368. *Xin X., Qin W., Ding X.* Continuous stage stochastic Runge–Kutta methods // Adv. Differ. Equ. — 2021. Vol. 2021. Id 61.
369. *Yin Z., Gan S.* Chebyshev spectral collocation method for stochastic delay differential equations // Adv. Differ. Equ. — 2015. Vol. 2015. Id 113.
370. *Zygmund R.* Martingale integrals over Poissonian processes and the Ito-type equations with white shot noise // Physical Review E. — 2003. Vol. 68. No. 4. Id 046117.