МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи

Смерчинская Светлана Олеговна

НЕПРОТИВОРЕЧИВОЕ АГРЕГИРОВАНИЕ ПРЕДПОЧТЕНИЙ ПРИ ПРИНЯТИИ РЕШЕНИЙ

Специальность 05.13.18
Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Специальность 05.13.01
Системный анализ, управление и обработка информации
(авиационная и ракетно-космическая техника)

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор А.В. Пантелеев

Москва, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Проблемы принятия сложных решений возникают практически во всех областях деятельности человека и в последнее время становятся все более актуальными, в связи с постоянно ускоряющимся научно-техническим прогрессом, динамичными изменениями в экономике, политике, окружающей среде. Различают два основных типа задач, связанных с принятием решений: группового и индивидуального выбора. Групповой выбор осуществляют эксперты, индивидуальный – один человек (лицо, принимающее решения – ЛПР), обычно на основе многокритериальной информации. Традиционно для решения этих задач использовались совершенно разные математические методы, хотя и в том и в другом случае необходимо агрегировать заданные на множестве альтернатив предпочтения: экспертные или критериальные. При групповом выборе агрегируют предпочтения экспертов на множестве альтернатив; при многокритериальном – предпочтения по критериям качества. Каким бы способом ни были получены исходные предпочтения, к суммарному отношению предпочтения предъявляются требования непротиворечивости и наиболее полного учета исходной информации.

В диссертационной работе предлагается один из способов непротиворечивого агрегирования предпочтений при попарном сравнении альтернатив, с целью дальнейшего упорядочения альтернатив и/или выбора наилучших из них. Информация о попарном сравнении альтернатив может быть качественной или количественной. К качественной отнесем информацию о предпочтительности одной альтернативы над другой, их равноценности или несравнимости. Количественная информация дополняет качественную числовой оценкой альтернатив или информацией о том, во сколько раз одна альтернатива предпочтительней другой. Информация о попарном сравнении альтернатив может быть задана экспертами, а может быть вычислена на основе оценок альтернатив по критериям качества.

Груз ответственности за принятие того или иного решения, лежащий на ЛПР, можно смягчить, привлекая экспертов. В качестве экспертов могут выступать квалифицированные специалисты в различных областях народного хозяйства, члены жюри конкурсов, спортивные арбитры и даже обычные люди, например, при изучении потребительского спроса.

Классическая задача группового выбора включает в себя следующие этапы:

– получение экспертной информации;

– построение агрегированного отношения предпочтения на основе профиля индивидуальных предпочтений экспертов;

– ранжирование альтернатив, выбор наилучших из них.

При получении исходной информации экспертам предлагается попарно сравнить альтернативы, с целью выявления превосходства одной альтернативы над другой или выбрать наиболее предпочтительные на его взгляд альтернативы. Полученная в ходе такого опроса информация фактически представляет собой бинарное отношение предпочтения на множестве альтернатив, в частности, строгое или нестрогое ранжирование альтернатив. Эксперты могут также численно оценить альтернативы. Опрос необходимо организовывать таким образом, чтобы информация, полученная от каждого эксперта, была наиболее полной и непротиворечивой. При этом число задаваемых эксперту вопросов желательно минимизировать, что позволит не только сэкономить время проведения опроса, но и минимизировать противоречия в формируемом предпочтении.

Следует отметить, что множество альтернатив может быть заранее полностью не сформировано ЛПР, и будет пополняться во время проведения экспертного опроса. В этом случае в рассмотрение могут быть включены альтернативы возможно даже неизвестные ранее ЛПР. Web-пространство позволяет формировать экспертное сообщество из специалистов, находящихся в разных городах и даже странах, что способствует наиболее полному, всестороннему изучению аспектов решаемой задачи.

Полученную от разных экспертов, обычно разрозненную информацию необходимо структуризовать и формализовать так, чтобы на ее основе с помощью имеющихся алгоритмов агрегирования построить коллективную структуру предпочтений. В случае получения противоречивой, несогласованной экспертной информации используются дополнительные алгоритмы, позволяющие устранять имеющиеся противоречия.

При формировании коллективной структуры предпочтений необходимо учитывать ряд условий. Перечислим некоторые, наиболее важные из них. Агрегированное отношение должно наиболее полно отражать профиль индивидуальных предпочтений экспертов и не содержать противоречивой информации. Желательно, также, чтобы агрегированное отношение не имело большого числа несравнимых пар альтернатив: это позволит при выборе наилучших решений значительно сузить исходное множество альтернатив. Разрабатываемые алгоритмы должны иметь небольшую вычислительную сложность, что позволит при принятии решения не ограничивать число альтернатив и экспертов. В настоящее время появилась возможность проводить интернет-голосование, в котором могут принять участие миллионы экспертов. В связи с этим требование минимальной вычислительной сложности становится особенно актуальным.

Этой тематике посвящено значительное количество работ и в первую очередь исследование К. Эрроу о невозможности группового выбора, удовлетворяющего заданным им условиям. Но поиск компромиссных алгоритмов, привлечение экспертов – квалифицированных специалистов в рассматриваемой предметной области, дает возможность повысить достоверность принятых решений. В наиболее известных работах по теории группового выбора [10,21,36,48,86] обычно выполняются только некоторые из условий, предъявляемых к агрегированному отношению предпочтения. Так, при построении классического мажоритарного графа [10,36] соответствующее отношение предпочтения может быть противоречивым и оптимальный выбор альтернатив в этом случае будет неоднозначным. Нахождение медианы Кемени [21] является сложным (переборным) алгоритмом, что значительно ограничивает не только число привлекаемых экспертов, но и число рассматриваемых альтернатив. Алгоритм построения агрегированного отношения предпочтения, предложенный в работе [48], обладает полиномиальной сложностью и не содержит противоречий, но вероятность сравнения альтернатив после устранения всех противоречивых контуров обычно невелика. В этом случае может оказаться, что множество наилучших альтернатив практически совпадает с исходным множеством, и для сужения выбора необходимо получить дополнительную информацию о предпочтениях экспертов.

В диссертационной работе предлагаются оригинальные алгоритмы непротиворечивого агрегирования различных типов экспертной информации, использующие нагруженный мажоритарный граф. Метод основывается на известной процедуре построения мажоритарного графа [36]. Классический мажоритарный граф отражает предпочтения большинства экспертов, но не содержит информацию о числе голосов, отданных за ту или иную альтернативу. Этого недостатка лишен нагруженный мажоритарный граф. Разработанная методика полнее учитывает различия в предпочтениях альтернатив, что позволяет устранять противоречия в агрегированном упорядочении, максимально сохраняя информацию каждого эксперта.

Параллельно в работе решается задача оценки согласованности экспертной информации. Методы оценки качества экспертов подробно описаны в работе [34]. Наряду с методами самооценки и взаимооценки экспертов в [34] предлагается оценивать качество эксперта по степени отклонения его оценки от итоговой. На основе этой информации находятся коэффициенты отклонения суждений экспертов, делением отклонения конкретного эксперта на максимальное отклонение.

В данной работе компетентность каждого эксперта оценивается суммарным отклонением предпочтений конкретного эксперта от всех других. Изначально предполагается, что все приглашенные эксперты имеют приблизительно одинаково высокий уровень знаний в исследуемой предметной области. В этом случае естественно считать, наименее компетентным является эксперт, индивидуальные предпочтения которого значительно расходятся с предпочтениями других экспертов. Проведение сравнительного анализа индивидуальных предпочтений экспертов позволяет сформировать группу наиболее компетентных специалистов. Кроме того, предлагается использовать модифицированный алгоритм агрегирования индивидуальных предпочтений экспертов с учетом различий в их квалификации. Для этого разработана методика нахождения весовых коэффициентов участия экспертов в построении агрегированного упорядочения.

Алгоритм построения непротиворечивого агрегированного упорядочения альтернатив может быть использован и в задачах многокритериального выбора. В этом случае в качестве исходных отношений рассматриваются упорядочения альтернатив по каждому критерию или числовые оценки альтернатив по критериям. Весовые коэффициенты важности критериев могут быть заданы или вычислены на основе одной из методик, описанных в работах [15,22,26,34,49,82].

Существующие методы решения многокритериальных задач можно разделить на три типа:

1) методы, основанные на построения функции полезности [22,26,40,57,82];

2) аксиоматические методы сравнения альтернатив на основе информации о важности критериев и групп критериев [39,44]; методы агрегирования предпочтений по критериям [46,55,64];

3) вербальные методы, оценивающие предпочтения альтернатив по критериям без задания числовых оценок [27,30,55].

Задачи первых типов объединяет необходимость приведения шкал критериев к однородным, процедура сложная и неоднозначная. Вербальные методы, предложенные в работах Ларичева О.И. и Петровского А.Б. [27,30,55] не требуют задания шкал критериев и основываются на информации о попарных предпочтениях альтернатив. Считается, что первая альтернатива не менее предпочтительна второй, если она не менее предпочтительна по всем рассматриваемым критериям. Предложенный в диссертации алгоритм агрегирования предпочтений работает без приведения критериев к однородным шкалам и не требует безусловного предпочтения одной альтернативы над другой по всем критериям. В предложенном методе необходимо, чтобы первая альтернатива была предпочтительнее второй по большему числу критериев, чем вторая первой. Кроме того, разработанные процедуры позволяют одновременно использовать качественные и количественные шкалы критериев, значения по которым могут как максимизироваться, так и минимизироваться. Методика позволяет агрегировать информацию по критериям и в том случае, когда часть оценок альтернатив по критериям не задана. Более того, можно учитывать приоритеты ЛПР независимо от оценок альтернатив. Лучшим для конкретного ЛПР может быть среднее, а не минимальное или максимальное, значение по шкале критерия.

Алгоритмы принятия решений часто имеют экспоненциальную сложность [21,39,44,46,65]. Так, в работе [65] алгоритм построения агрегированного предпочтения, использующий информацию о том, во сколько раз одна альтернатива предпочтительнее другой, основывается на приближенных методах нахождении собственных значений матриц предпочтений, и, следовательно, имеют большую вычислительную сложность. Все алгоритмы, предложенные в данной работе, имеют полиномиальную сложность.

Решение задач группового и многокритериального выбора – процесс сложный и многоэтапный. Большой объем исходной информации, причем часто противоречивой и разрозненной, сложность алгоритмов, а также необходимость анализа и корректировки полученной информации на каждом этапе принятия решений требуют использования современных вычислительных средств. Решение всех этих проблем целесообразно возложить на программную систему. В работах [28,52,81] представлены пакеты программ для принятия сложных решений. Отличие программных систем состоит в использовании различных методов и алгоритмов принятия решений, основывающихся на различных видах исходной информации. Объединяющим является необходимость принятия решений в диалоговом режиме с ЛПР: выявление входной информации и анализ результатов работы программы [4,15,65]. Особое внимание уделяется проблеме получения от ЛПР и экспертов непротиворечивой информации [28,48,81]. В диссертации разработана и реализована система поддержки принятия решений (СППР), основанная на предложенных методах агрегирования исходной информации.

Целью диссертационной работы является разработка математически обоснованных методов агрегирования экспертных и критериальных предпочтений.

В соответствии с целью исследования были поставлены следующие задачи.

В соответствии с целью исследования были поставлены следующие задачи.

1. Разработать математическую модель задачи принятия решений при непротиворечивом агрегировании предпочтений.
2. Разработать и обосновать методику непротиворечивого агрегирования различных типов экспертной информации.
3. Разработать и обосновать методику агрегирования критериальных предпочтений.

4. Разработать методику оценки согласованности экспертной информации.
5. Создать комплекс программ для реализации методов агрегирования.
6. Решить тестовые прикладные задачи выбора оптимальных вариантов решений в авиационно-промышленном комплексе разработанными методами агрегирования.

Методы исследования. Для решения поставленных задач использовался математический аппарат теории принятия решений, теории графов и теории отношений.

Научная новизна. В диссертационной работе получены методы непротиворечивого агрегирования отношений квазипорядка и строгого порядка, основывающиеся на построении нагруженного мажоритарного графа. Агрегированное отношение предпочтения также является квазипорядком или строгим порядком и, следовательно, не содержит противоречивых контуров, что позволяет осуществить непустой и однозначный выбор наилучших альтернатив. Разработаны алгоритмы агрегирования предпочтений, заданных численными оценками альтернатив. Преимуществом данного метода по сравнению с известными ранее является возможность агрегирования различных типов исходной информации одновременно, а также небольшая вычислительная сложность алгоритмов. В диссертации разработана методика оценки компетентности экспертов. Приведен алгоритм нахождения весовых коэффициентов участия экспертов в построении суммарного упорядочения.

Алгоритмы агрегирования предпочтений модифицированы для решения многокритериальных задач. Особенности метода позволяют строить суммарное упорядочение альтернатив, оцениваемых по критериям качества, не приводя шкалы критериев к однородным. Проведен сравнительный анализ результатов, полученных при использовании метода агрегирования, с результатами, полученными при построении аддитивной свертки, показавший преимущества предложенного метода для решения практических задач.

Достоверность результатов. Достоверность научных утверждений и выводов, полученных в диссертационной работе, подтверждена строгими математическими доказательствами, сравнением полученных результатов с уже существующими.

Теоретическая ценность и практическая значимость. Разработаны алгоритмы непротиворечивого агрегирования экспертных и критериальных предпочтений и выбора оптимальных вариантов решений. СППР может быть использована для решения практических задач оптимального выбора.

Апробация работы и публикации. Основные результаты диссертации доложены и обсуждены на трех международных научно-методических конференциях «Информатизация инженерного образования». По теме диссертации опубликовано 18 печатных работ, в том числе 7 в профильных журналах из Перечня ВАК РФ [42,62,66,74-76,79], 2 статьи из баз данных SCOPUS и Web of Science [42,113], в других изданиях [68-72] и в трудах научных конференций [67,73,77,78,80]. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 173 страницах текста и состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы (119 наименований). Работа содержит 38 рисунков и 19 таблиц. Рисунки и таблицы пронумерованы по главам.

На защиту выносятся следующие основные результаты.

1. Исследован класс математических моделей задач принятия решений. Разработана математическая модель непротиворечивого агрегирования экспертных и критериальных предпочтений [66,77].
2. Разработана процедура непротиворечивого агрегирования для различных типов экспертной информации. Доказаны теоремы о непротиворечивости и единственности построенных отношений, а

также найдены условия минимальности суммарного расстояния до экспертных предпочтений [42,74,75].

3. Разработана процедура агрегирования предпочтений, заданных по критериям. Доказана транзитивность агрегированного отношения для двух критериев. Для m критериев доказана теорема о наилучшей по методу непротиворечивого агрегирования векторной оценке среди всех оценок с равной суммой компонент [62,76,79,113].
4. Разработана методика оценки согласованности экспертной информации [75].
5. Разработан и реализован комплекс программ поддержки принятия решений [66,67,70,73,78,80].
6. Решены практические задачи выбора оптимальных моделей пассажирских самолетов и перспективных инновационных в области авиации и космонавтики проектов-стартапов с применением разработанных методов. Для выбора метода решения и нахождения весовых коэффициентов важности критериев использовались численные методы аппроксимации [62,71,79].

В первой главе диссертации предложены алгоритмы построения агрегированного отношения предпочтения для различных типов исходной информации. В параграфах 1.1, 1.2 дана математическая постановка задачи группового выбора и описаны способы задания исходной информации. В параграфе 1.3 профиль индивидуальных предпочтений экспертов задается отношениями строгого порядка, на основе которых строится агрегированное отношение, также являющееся строгим порядком. В параграфе 1.4 отношения, задающие индивидуальные предпочтения экспертов, и агрегированное предпочтение – квазипорядки. В параграфах 1.5 и 1.6 предложенные алгоритмы распространяются для агрегирования произвольной экспертной информации, в частности, для информации, заданной числовыми оценками альтернатив.

Во второй главе предложена методика учета компетентности экспертов при формировании агрегированного отношения предпочтения. В параграфе 2.1 дана математическая постановка задачи. В параграфе 2.2 разработаны алгоритмы нахождения коэффициентов участия экспертов в формировании агрегированного предпочтения. В параграфе 2.3 предложены модифицированные алгоритмы построения агрегированного предпочтения с учетом задания весовых коэффициентов участия экспертов. В параграфе 2.4 доказаны теоремы о влиянии выбора отрезка для коэффициентов участия экспертов на вид агрегированного предпочтения.

В третьей главе рассмотрена возможность применения алгоритмов построения агрегированного отношения предпочтения для решения многокритериальных задач. В параграфе 3.1 дана математическая постановка задачи многокритериального выбора. В параграфе 3.2 описан алгоритм агрегирования предпочтений для различных видов оценок альтернатив по критериям качества. В параграфе 3.3 доказаны теоремы об особенностях построения агрегированного предпочтения в задачах с двумя критериями качества, в частности о транзитивности, а, следовательно, и непротиворечивости построенного отношения. В параграфе 3.4 проведен сравнительный анализ алгоритмов агрегирования и построения аддитивной функции полезности для двух критериев, а в параграфе 3.5 – для m критериев. В параграфе 3.6 проведен вероятностный анализ существования контура в мажоритарном графе.

В четвертой главе разработана структура интеллектуальной системы процесса поддержки принятия решений. В параграфах 4.1. и 4.2 предлагаются математическая модель задачи группового выбора и логическая структура подсистемы группового выбора. В параграфе 4.3 разработаны этапы проведение экспертного опроса. В параграфах 4.4 описана математическая модель и логическая схема процесса многокритериального выбора. В параграфе 4.5. проведено обобщение результатов работы подсистем многокритериального и экспертного выбора.

В пятой главе разработанная на основе методики агрегирования экспертных и критериальных предпочтений СППР позволила решить прикладные задачи, связанные с авиационной и ракетно-космической техникой. В параграфе 5.1 решена задача выбора оптимальных моделей пассажирских самолетов, оцениваемых по критериям стоимости, летно-техническим характеристикам и послепродажному обслуживанию. Задача решена для равных и различающихся по важности критериев качества. В параграфе 5.2 рассмотрен практический тестовый пример выбора венчурным фондом наиболее перспективных инновационных проектов-стартапов на основе экспертной информации и информации по критериям.

ГЛАВА 1

Алгоритмы построения агрегированного отношения предпочтения на основе индивидуальных предпочтений экспертов

Предложенная в этой главе теория агрегирования экспертных предпочтений является продолжением работ Миркина Б.Г. [36], Вольского В.И. [10], Подиновского В.В. [48], Айзермана М. А. и Алескерова Ф. Т [1,2, 88,89]. Теория агрегирования предпочтений основывается на построении непротиворечивого суммарного предпочтения [1,14,48] на основе классического мажоритарного графа [10,36], дополненного весами на дугах [108,115], характеризующими степень предпочтения одной альтернативы над другой.

1.1. Постановка задачи

Дано множество альтернатив $A = \{a_1,\ a_2, \dots, a_n\}$ и множество экспертов $E = \{E_1,\ E_2, \dots, E_m\}$. Профиль индивидуальных предпочтений экспертов на множестве A задан бинарными отношениями предпочтения ρ_1, $\rho_2, \dots, \rho_m$. Требуется построить непротиворечивое агрегированное отношение предпочтения $\hat{\rho}$, согласованное с предпочтениями $\rho_1,\ \rho_2, \dots, \rho_m$.

Индивидуальные предпочтения экспертов могут быть заданы отношениями строгого порядка, отношениями квазипорядка (в частности строгим или нестрогим ранжированием), произвольными бинарными отношениями. В зависимости от вида экспертных предпочтений, а также от пожеланий ЛПР, обычно требуется построить агрегированное отношение предпочтения $\hat{\rho}$, являющееся строгим порядком или квазипорядком. Под отношением строгого порядка будем понимать транзитивное и асимметричное отношение, а отношением квазипорядка – транзитивное и рефлексивное [84].

1.2. Способы задания экспертной информации

Воспользуемся матричным способом задания бинарных отношений. Отношения предпочтения будем задавать двумя способами: матрицами предпочтений и матрицами смежности соответствующих графов.

<u>Задание отношений матрицами предпочтений</u>.

Бинарному отношению ρ поставим в соответствие квадратную матрицу $R = \|r_{ij}\|$ порядка n (n – число альтернатив) с элементами

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } a_i \text{ менее предпочтительна } a_j; \\ \frac{1}{2}, \text{если } a_i \text{ и } a_j \text{ равноценны;} \\ 0, \text{если } a_j \text{ менее предпочтительна } a_i \text{ или } a_i \text{ и } a_j \text{ не сравнимы} \end{cases}$$

при $i \neq j$. Элемент $r_{ii} = 1$, (i=1, …, n), если отношение ρ рефлексивно; в противном случае $r_{ii} = 0$.

Равноценность двух альтернатив a_i и a_j означает, что отношению ρ одновременно принадлежат пары $< a_i, a_j >$ и $< a_j, a_i >$ (i, j=1, …, n, $i \neq j$). В частности, симметричные пары может содержать отношение квазипорядка.

В случае, если отношение ρ асимметрично, элементы матрицы R определяются следующим образом:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } a_i \text{ менее предпочтительна } a_j; \\ 0, \text{если } a_j \text{ менее предпочтительна } a_i \text{ или } a_i \text{ и } a_j \text{ не сравнимы.} \end{cases}$$

Примером такого отношения является строгий порядок, в частности, строгое ранжирование.

Заметим, что для элементов матрицы предпочтения выполняется $r_{ij} + r_{ji} = 1$, если альтернативы a_i и a_j сравнимы между собой и $r_{ij} + r_{ji} = 0$, если a_i и a_j не сравнимы.

Задание отношений матрицами смежности.

Предложенные в данной работе алгоритмы агрегирования экспертных предпочтений используют процедуры на графах, в частности процедуру построения нагруженного мажоритарного графа. Кроме того, для выбора наилучших вариантов альтернатив или упорядочения их по предпочтительности применяются такие классические алгоритмы на графах, как нахождение внешне и внутренне устойчивых подмножеств графа, ядра графа, разбиение графа на уровни. В связи с этим введем в рассмотрение графы отношений. Поставим бинарному отношению ρ в соответствие граф $G = (A, \rho)$ – ориентированный граф с множеством вершин-альтернатив $A = \{a_1,\ a_2, \dots, a_n\}$ и множеством дуг ρ. Множество дуг – это множество упорядоченных пар $< a_i, a_j >$ $(a_i, a_j \in A)$, входящих в отношение ρ. Под матрицей смежности произвольного бинарного отношения ρ будем понимать матрицу смежности соответствующего графа.

Для асимметричных отношений матрица предпочтений и матрица смежности совпадают. Если отношение содержит равноценные альтернативы, то матрица смежности соответствующего графа получается из матрицы предпочтений заменой всех элементов, равных $1/2$, на элементы, равные 1.

Профиль индивидуальных предпочтений экспертов – бинарные отношения $\rho_1,\ \rho_2, \dots, \rho_m$. на множестве альтернатив $A = \{a_1,\ a_2, \dots, a_n\}$ будем задавать матрицами предпочтений $R^1, \dots, R^m$, где m – число экспертов.

1.3. Агрегирование отношений строгого порядка

На множестве альтернатив A заданы отношения предпочтения экспертов $\rho_1,\ \rho_2, \dots, \rho_m$, являющиеся отношениями строгого порядка, в частности, строгие ранжирования. Построим агрегированное отношение предпочтения $\hat{\rho}$, также являющееся строгим порядком, и согласованное с предпочтениями $\rho_1,\ \rho_2, \dots, \rho_m$.

Будем полагать, что упорядоченная пара альтернатив из A $< a_i, a_j > \in \rho_t$ (или $a_i \rho_t a_j$), где $\hat{\rho}$ $(t = 1, \dots, m)$, если элемент a_i менее предпочтителен, чем элемент a_j[1]. Напомним, что строгим порядком называется транзитивное и асимметричное отношение.

Потребуем от агрегированного отношения $\hat{\rho}$, чтобы оно удовлетворяло следующим условиям:

Условие 1: было непротиворечивым;

Условие 2: наиболее полно отражало индивидуальные предпочтения экспертов $\rho_1,\ \rho_2, \dots, \rho_m$, т. е. было с ними согласовано.

Формализуем условие 1.

Будем говорить «контуры отношения», имея в виду контуры соответствующего графа.

Определение 1.1. Отношение ρ называется противоречивым, если оно содержит контуры.

Таким образом, выполнение условия 1 о непротиворечивости отношения означает, что агрегированное отношение $\hat{\rho}$ не должно содержать контуров. Отсутствие контуров – необходимое условие для осуществления однозначного непустого выбора наилучших альтернатив.

Способы выбора наилучших альтернатив подробно описаны в работах [10,36] и основываются на стандартных алгоритмах на графах: нахождения внутренне и внешне устойчивых подмножеств, ядра графа, разбиения графа на уровни [7,23,41,50].

---

[1] Отношения ρ_t (t=1, ..., m) можно выбрать и по-другому: $< a_i,\ a_j > \in \rho_t \Leftrightarrow$ элемент a_i предпочтительней, чем элемент a_j, но стандартные процедуры выбора наилучших альтернатив (ядро, доминирующее подмножество и т. п.) удобнее реализовывать для отношения «менее предпочтителен»

Следующие два примера демонстрируют, что в графе, содержащем контуры, такая стандартная процедура выбора наилучших альтернатив как нахождение ядра графа вообще невозможна для графа, представленного на рис. 1.1 и неоднозначна для графа на рис. 1.2.

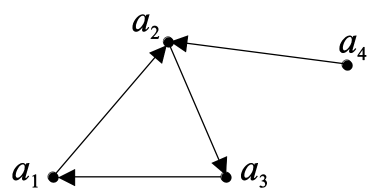

рис. 1.1

Действительно, граф, представленный на рис. 1.1 и содержащий контур нечетной длины, имеет максимальные внутренне устойчивые подмножества: $\{a_1, a_4\}$, $\{a_2\}$, $\{a_3, a_4\}$; а минимальные внешне устойчивые подмножества: $\{a_1, a_2\}$, $\{a_2, a_3\}$ и $\{a_1, a_3, a_4\}$. Таким образом, не существует подмножества, являющегося одновременно внутренне и внешне устойчивым, т. е. ядра.

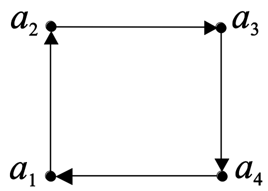

рис. 1.2

Граф на рис. 1.2 имеет два ядра: $\{a_1, a_3\}$ и $\{a_2, a_4\}$.

Обозначим $\mathrm{Tr}\,\rho$ – транзитивное замыкание отношения ρ, т.е. наименьшее транзитивное отношение, содержащее ρ. Симметричная часть отношения ρ, заданного на множестве A (обозначается $Sym\,\rho$), содержит все такие пары, для которых выполняется: $< a_i, a_j >\in \rho$ и $< a_j, a_i >\in \rho$ одновременно ($a_i, a_j \in A$). Асимметричная часть отношения $As\,\rho = \rho \backslash Sym\,\rho$ [48]. Заметим, что по определению отношение строгого порядка асимметрично и, следовательно, совпадает со своей асимметричной частью $\rho = As\,\rho$.

Покажем, что для отношения строгого порядка выполняется условие 1. В работе [84] доказано, что отношение строгого порядка не содержит контуров. Из этого следует важное для нас утверждение.

Теорема 1.1. Отношение строгого порядка непротиворечиво.

Формализуем условие 2 о согласованности агрегированного отношения предпочтения с индивидуальными предпочтениями экспертов. Для этого введем понятие расстояния между отношениями.

Определение 1.2. Расстоянием между двумя отношениями ρ_k и ρ_t назовем величину $d(\rho_k, \rho_t)$ (или d_{kt}), определяемую по формуле

$$d(\rho_k, \rho_t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| r_{ij}^k - r_{ij}^t \right|. \qquad (1.1)$$

Для отношений строгого порядка $d(\rho_k, \rho_t)$ равно числу несовпадений элементов r_{ij}^k и r_{ij}^t матриц предпочтения этих отношений R^k и R^t $(i, j = 1, \dots, n)$ и, следовательно, является расстоянием Хэмминга.

Введенное отношение удовлетворяет аксиомам метрики:

1. $d(\rho_k, \rho_t) \geq 0$, причем $d(\rho_k, \rho_t) = 0$ тогда и только тогда, когда $\rho_k = \rho_t$;
2. $d(\rho_k, \rho_t) = d(\rho_t, \rho_k)$;
3. $d(\rho_k, \rho_s) + d(\rho_s, \rho_t) \geq d(\rho_k, \rho_t)$ для любых ρ_k, ρ_s, ρ_t.

Для построения агрегированного отношения, удовлетворяющего условию 2 о согласовании с экспертными предпочтениями, необходимо, чтобы сумма расстояний между агрегированным отношением $\hat{\rho}$ и отношениями $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ была минимальной.

Определение 1.3. Отношение $\hat{\rho}$ согласовано с профилем экспертных предпочтений, если суммарное расстояние $D(\hat{\rho})$ от отношения $\hat{\rho}$ до отношений $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ минимально:

$$D(\hat{\rho}) = \sum_{t=1}^{m} d(\hat{\rho}, \rho_t) \to \min. \qquad (1.2)$$

При построении искомого агрегированного отношения будем использовать отношение предпочтения, соответствующее классическому мажоритарному графу [36]. Напомним, что мажоритарный граф – это ориентированный граф, вершинами которого являются альтернативы, а дуга из вершины a_i в вершину a_j существует в том и только в том случае, когда число экспертов, предпочитающих альтернативу a_i альтернативе a_j, не менее половины общего числа экспертов (правило большинства). Для удобства применения классических процедур на графах изменим ориентацию дуг мажоритарного графа на противоположную. Заменим требование «не менее половины» на «большинство» экспертов, а также поставим в соответствие каждой дуге графа вес, равный разности числа экспертов, проголосовавших за альтернативу a_j и за альтернативу a_i.

Определение 1.4. Строгим нагруженным мажоритарным графом назовем ориентированный нагруженный граф $G = (A,\ \rho_\Sigma)$ с множеством вершин-альтернатив $A = \{a_1,\ a_2, \dots, a_n\}$ и дугами $\rho_\Sigma = \{< a_i, a_j > \mid a_i, a_j \in A \text{ и } l_{ij} > 0\}$, где $l_{ij} = \sum_{k=1}^{m}(r_{ij}^k - r_{ji}^k)$. Причем каждой дуге $< a_i, a_j > \in \rho_\Sigma$ поставим в соответствие вес l_{ij}.

Напомним, что r_{ij}^k и r_{ji}^k – элементы матрицы предпочтения R^k отношения ρ_k, где $i, j = 1, \dots, n$, k=1,…,m. Вес дуги $< a_i, a_j > \in \rho_\Sigma$ равен числу экспертов, для которых альтернатива a_i менее предпочтительна, чем альтернатива a_j минус число экспертов, предпочитающих альтернативу a_i альтернативе a_j $(i, j \in \{1, \dots, n\})$.

Матрицу смежности строгого мажоритарного графа $G = (A,\ \rho_\Sigma)$ обозначим R_Σ. По определению отношение ρ_Σ асимметрично, следовательно, матрица предпочтений ρ_Σ совпадает с матрицей смежности R_Σ.

Определим матрицу весов мажоритарного графа $C = \|c_{ij}\|$, как квадратную матрицу порядка n, где n – число альтернатив, с элементами

$$c_{ij} = \begin{cases} l_{ij}, \text{если дуга} < a_i, a_j > \in \rho_\Sigma\ , \\ \infty, \text{иначе.} \end{cases}$$

Не оговаривается, что дуга графа $< a_i, a_j > \in \rho_\Sigma$ существует только в том случае, когда число экспертов, предпочитающих альтернативу a_i альтернативе a_j больше половины всех экспертов. Это условие будет выполнено в случае, если индивидуальные предпочтения экспертов – строгие ранжирования (строгие линейные порядки).

Введем вспомогательную матрицу суммарных предпочтений $P = \|p_{ij}\|$ – квадратная матрица порядка n (число альтернатив), где $p_{ij} = \sum_{k=1}^{m} r_{ij}^k$. С ее помощью удобно находить матрицу весов C:

$$c_{ij} = \begin{cases} p_{ij} - p_{ji}, \text{если дуга} < a_i, a_j > \in \rho_\Sigma\ , \\ \infty, \text{иначе.} \end{cases}$$

Приведем пример построения матрицы смежности строгого мажоритарного графа R_Σ.

Пример 1.1. Рассмотрим случай трехэлементного множества альтернатив $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ и профиль предпочтений трех экспертов – строгое ранжирование (верхняя строка содержит наиболее предпочтительные альтернативы).

ρ_1	ρ_2	ρ_3
a_2	a_1	a_3
a_3	a_2	a_1
a_1	a_3	a_2

Этим отношениям соответствуют матрицы предпочтений

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица суммарных предпочтений имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

На основе матрицы суммарных предпочтений P составим матрицу весов C:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 1 \\ 1 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & \infty \end{pmatrix}.$$

В этом случае матрица смежности отношения ρ_Σ:

$$R_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующий граф изображен на рис. 1.3.

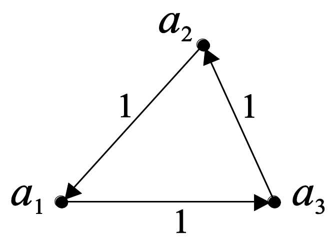

рис. 1.3 ■

Пример, приведенный выше, показывает, что строгий мажоритарный граф, совпадающий с классическим (кроме противоположных направлений дуг) [36], может быть не транзитивным и содержать контуры.

Для построения агрегированного отношения, являющегося строгим порядком, т. е. асимметричного и транзитивного, нам понадобится следующее утверждение [84].

Утверждение 1.1. Отношение ρ, заданное на множестве A, не содержит контуров тогда и только тогда, когда транзитивное замыкание ρ (Trρ) – строгий порядок.

Для нахождения агрегированного отношения строгого порядка $\hat{\rho}$ на A построим вначале отношение ρ, разрушив контуры отношения ρ_Σ. Тогда, по утверждению 1.1, $\hat{\rho} = Tr\rho$ – строгий порядок.

Напомним, что $\rho_1,\ \rho_2, \dots, \rho_m$ – отношения строгого порядка и, следовательно, по теореме 1.1 не содержат контуров, т.е. являются непротиворечивыми.

Алгоритм 1.1 построения отношения $\boldsymbol{\rho}$ без контуров по $\boldsymbol{\rho_\Sigma}$

1. Проверяем граф $G = (A,\ \rho_\Sigma)$ на наличие контуров. Если контуров нет, то граф $G = (A,\ \rho_\Sigma)$ без весов на дугах есть граф $G = (A,\ \rho)$ искомого отношения ρ. Если контуры есть, переходим к п. 2.

2. Из графа $G = (A,\ \rho_\Sigma)$ удаляем все дуги, которые принадлежат какому-либо контуру и имеют наименьший вес. Переходим к п. 1.

Разрушение контуров отношения ρ_Σ с последующим взятием транзитивного замыкания позволяет «восстановить» транзитивность агрегированного предпочтения. Удаление дуг с наименьшей разностью в предпочтениях экспертов обеспечивает лишь незначительное увеличение минимального суммарного расстояния из определения 1.3.

Теорема 1.2. Не содержащее контуров отношение ρ, построенное из отношения ρ_Σ по данному алгоритму, является единственным.

Доказательство теоремы 1.2 следует из однозначности выполнения действий на каждом шаге алгоритма. ▲

Таким образом, предложенный алгоритм позволяет построить единственное отношение ρ по ρ_Σ. Необходимость единственности объясняется следующим. Если бы удалялись не все дуги контуров, имеющие минимальный вес, а столько, сколько необходимо для разрушения контуров, то выбор наилучших альтернатив зависел от того, какие именно дуги мы удалили. Так для графа на рис.1.3, удаляя по одной дуге и беря транзитивное замыкание, получим каждый раз совершенно разные упорядочения альтернатив. Причем наилучшей может оказаться любая из них. Если удалить все дуги (рис.1.3), альтернативы будут не сравнимы, что вполне естественно при столь противоречивой исходной информации.

Работа данного алгоритма основывается на нахождении отношения ρ_K, содержащего все контуры отношения ρ_Σ.

Утверждение 1.2. Для любого контура K отношения ρ, заданного на множестве A, выполняется $\mathrm{Tr}\,K = Sym(\mathrm{Tr}\,K)$.

Доказательство утверждения 1.2. Очевидно, что $Sym(\mathrm{Tr}\,K) \subseteq \mathrm{Tr}\,K$. Докажем, что $\mathrm{Tr}\,K \subseteq Sym(\mathrm{Tr}\,K)$. Пусть контур K содержит дуги $<a_{i_1}, a_{i_2}>$, $<a_{i_2}, a_{i_3}>, \ldots, <a_{i_t}, a_{i_1}>$ $(a_{i_j} \in A; i, j, t \in \mathbb{N})$. Если дуга $<a_{i_s}, a_{i_{s+r}}> \in TrK$ $s, r \in \mathbb{N}$, то по определению транзитивного отношения существует последовательность дуг контура, соединяющая элементы a_{i_s} и $a_{i_{s+r}}$: $<a_{i_s}, a_{i_{s+1}}>, \ldots, <a_{i_{s+r-1}}, a_{i_{s+r}}>$. Но тогда существует последовательность дуг $<a_{i_{s+r}}, a_{i_{s+r+1}}>, \ldots, <a_{i_t}, a_{i_1}>, \ldots, <a_{i_{s-1}}, a_{i_s}>$, и значит дуга $<a_{i_{s+r}}, a_{i_s}> \in \mathrm{Tr}\,K$. Получаем $<a_{i_s}, a_{i_{s+r}}> \in \mathrm{Tr}\,K$ и $<a_{i_{s+r}}, a_{i_s}> \in \mathrm{Tr}\,K$. Следовательно, дуга $<a_{i_s}, a_{i_{s+r}}> \in Sym(\mathrm{Tr}\,K)$.▲

Следствие 1.1. Транзитивное замыкание любого контура отношения ρ принадлежит симметричной части отношения $\mathrm{Tr}\,\rho$.

Утверждение 1.3. Пусть q – произвольное бинарное отношение, заданное на множестве A. Тогда отношение q_K, содержащее все контуры отношения q и заданное на множестве A, вычисляется по формуле

$$q_K = (Trq) \cap (Trq)^{-1} \cap q.$$

Доказательство утверждения 1.3. По следствию 1.1 все контуры отношения q принадлежат $Sym(\mathrm{Tr}\,q)$. По определению симметричной части отношения $Symq = (\mathrm{Tr}\,q) \cap (\mathrm{Tr}\,q)^{-1}$. Учитывая, что $q_K \subseteq q$, получаем справедливость доказываемой формулы. Заметим, что операция пересечения множеств ассоциативна, и, следовательно, порядок ее применения не важен. ▲

Будем рассматривать матрицы смежности как элементы булевой алгебры. Введем на множестве матриц операцию конъюнкция &:

$$R^k \& R^t = \left\| r_{ij}^k \& r_{ij}^t \right\|$$

(поэлементное умножение матриц).

В соответствии с утверждением 1.3 найдем матрицу смежности R_K графа отношения ρ_K по следующей формуле:

$$R_K = \hat{R}_\Sigma \& (\hat{R}_\Sigma)^\intercal \& R_\Sigma, \tag{1.3}$$

где $\hat{R}_\Sigma$ – матрица смежности отношения $\mathrm{Tr}\,\rho_\Sigma$, $\intercal$ – транспонирование матрицы. В формуле (1.3) учтено, что матрица смежности графа обратного отношения равна транспонированной матрице графа исходного отношения (по определению обратного отношения).

Транзитивное замыкание отношения обычно находится по модифицированному алгоритму Уоршалла, вычислительная сложность которого $O(n^3)$, где n – число альтернатив. В работе [63] предложен алгоритм со сложностью $O(n \ln n)$, но его можно применять не для всех типов отношений. Независимо от выбора алгоритма при программной реализации данного метода число альтернатив и экспертов ограничивается только объемом оперативной памяти компьютера.

Искомое агрегированное отношение $\hat{\rho}$ должно быть строгим порядком и, следовательно, транзитивным, поэтому положим $\hat{\rho} = \mathrm{Tr}\,\rho$. По теореме 1.2 $\hat{\rho}$ – строгий порядок.

Разработанный метод относится к типу П-П (предпочтение-предпочтение). К такому типу принципов согласования экспертной информации предъявляются следующие требования: независимость, монотонность, ненавязанность, сохранение отношения Парето[11,36]. Сформулируем эти требования для методов типа П-П.

Независимость сравнения. В агрегированном отношении предпочтение двух альтернатив не зависит от того, как соотносятся эти альтернативы с другими в экспертных предпочтениях.

Монотонность. Если в агрегированном отношении содержится элемент $<a_i,\ a_j>$ и один из экспертов поменял свои предпочтения: элемент $<a_j,\ a_i>$ на $<a_i,\ a_j>$ или добавил $<a_i,\ a_j>$, которого ранее не было, то в новом агрегированном отношении $<a_i,\ a_j>$ сохранится $(a_i,\ a_j \in A)$.

Ненавязанность. В агрегированном предпочтении не должно быть пар, которые обязательно в нем содержатся (или не содержатся) независимо от индивидуальных предпочтений экспертов.

Сохранение отношения Парето. Если элемент $<a_i,\ a_j>$ принадлежит предпочтениям всех экспертов, то он принадлежит и агрегированному отношению.

Проведем анализ выполнения данных требований в предложенном методе согласования экспертных предпочтений. Выполнение правила ненавязанности очевидно.

Утверждение 1.4. Агрегированное отношение, построенное по приведенному алгоритму, монотонно.

Доказательство утверждения 1.4. Пусть в нагруженном мажоритарном графе была дуга $<a_i,\ a_j>$ с весом l_{ij}. Если один из экспертов поменял свои предпочтения: $<a_j,\ a_i>$ на $<a_i,\ a_j>$, то вес дуги $<a_i,\ a_j>$ увеличится на два ($l_{ij}+2$). Если дуга не входила в противоречивый контур, она остается. Если входила и не была удалена с меньшим весом, то тем более останется после увеличения ее веса. Если какой-либо эксперт добавил $<a_i,\ a_j>$, то вес дуги в мажоритарном графе увеличится на единицу и, следовательно, она также в агрегированном предпочтении. ▲

Не только мажоритарный граф, но и агрегированное отношение строгого порядка, сохраняют отношение Парето. Это следует из того, что дуга графа, соответствующая отношению Парето, для строгого порядка будет иметь наибольший возможный вес, равный числу экспертов. В силу непротиворечивости отношений строгого порядка, а также транзитивности отношения Парето, все дуги контура не могут иметь максимальный вес. Следовательно, дуга, полученная по отношению Парето, не может быть удалена.

Одним из важнейших условий, которому должно удовлетворять агрегированное предпочтение, является минимальность суммарного расстояния до экспертных предпочтений. Зададим правило подсчета величины $D(\rho_\Sigma)$, характеризующую удаленность отношения ρ_Σ от экспертных предпочтений $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$:

$$D(\rho_\Sigma) = \sum_{t=1}^{m} d(\rho_\Sigma, \rho_t).$$

Утверждение 1.5. Сумма расстояний $D(\rho_\Sigma)$ между отношением ρ_Σ, соответствующем строгому мажоритарному графу, и отношениями строгого порядка $\rho_1,\ \rho_2, \dots, \rho_m$ вычисляется по формуле:

$$D(\rho_\Sigma) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij}, \qquad (1.4)$$

где

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} p_{ij}, \text{если } r_{ij}^{\Sigma} = 0, \\ p_{ji}, \text{если } r_{ij}^{\Sigma} = 1 \end{cases} \tag{1.5}$$

(p_{ij} – элементы матрицы суммарных предпочтений $P_{n\times n} = \|p_{ij}\|$).

Доказательство утверждения 1.5. Действительно, по определению строгого мажоритарного графа, если $r_{ij}^{\Sigma} = 0$, то мнение p_{ij} экспертов, предпочитающих альтернативу a_j альтернативе a_i не учитывается в ρ_{Σ} и в формуле (1.2) величины $\left|r_{ij}^{\Sigma} - r_{ij}^{\mathrm{k}}\right| = 1$, для всех значений *k* соответствующих номерам тех экспертов, мнение которых не учитывается; $i, j = 1, \dots, n$; $k \in \{1, \dots, m\}$.

Если $r_{ij}^{\Sigma} = 1$, то мнение p_{ij} экспертов, предпочитающих альтернативу a_j альтернативе a_i, учитывается в отношении ρ_{Σ}. Но в этом случае не учитывается мнение p_{ji} экспертов, предпочитающих альтернативу a_i альтернативе a_j (по определению, если $r_{ij}^{\Sigma} = 1$, то $r_{ji}^{\Sigma} = 0$). Следовательно, для них $\left|r_{ij}^{\Sigma} - r_{ij}^{k}\right| = 1$ ($i, j = 1, \dots, n; k \in \{1, \dots, m\}$).

Заметим, что в случае $r_{ij}^{\Sigma} = 0$ и $r_{ji}^{\Sigma} = 0$ доказательство также справедливо. В этом случае $p_{ij} = p_{ji}$ из определения строгого мажоритарного графа. ▲

Утверждение 1.6. Сумма расстояний $D(\rho_{\Sigma})$ между отношением ρ_{Σ}, соответствующем строгому мажоритарному графу, и отношениями строгого ранжирования $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ вычисляется по формуле:

$$D(\rho_{\Sigma}) = 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \Delta_{ij}, \tag{1.6}$$

Предварительно докажем лемму.

Лемма 1.1. Для отношений строгого ранжирования ρ_1, $\rho_2, \dots, \rho_m$ величина Δ_{ij} из (1.5) вычисляется по формуле:

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} p_{ij}, \qquad \text{если } r_{ij}^{\Sigma} = 0, \\ m - p_{ij}, \text{если } r_{ij}^{\Sigma} = 1 \end{cases} \tag{1.7}$$

Доказательство леммы 1.1. Отношение строгого ранжирования – это отношение линейного строгого порядка (любые два элемента множества A сравнимы между собой). По условию леммы $\rho_1,\ \rho_2, \dots, \rho_m$ – строгие ранжирования. Это означает, что каждый из m экспертов попарно сравнивает все альтернативы. Следовательно, для элементов матрицы суммарных предпочтений P выполняется равенство $p_{ij} + p_{ji} = m$. Откуда получаем $p_{ji} = m - p_{ij}$. Подставляя в (1.5) получим, что выполняется (1.7).▲

Доказательство утверждения 1.6. Для обоснования формулы (1.6) достаточно доказать, что $\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$ $(i, j = 1, \dots, n)$. По лемме 1.1, если ρ_1, $\rho_2, \dots, \rho_m$ – строгие ранжирования, то для элементов матрицы предпочтений P выполняется $p_{ij} + p_{ji} = m$. Если в матрице R_Σ элемент $r_{ij}^\Sigma = 1$, а $r_{ji}^\Sigma = 0$, то $p_{ij} > p_{ji}$. Из формулы (1.7) имеем: $\Delta_{ij} = m - p_{ij}$, $\Delta_{ji} = p_{ji}$. Найдем разность $\Delta_{ij} - \Delta_{ji} = m - p_{ij} - p_{ji}$. Так как $m - p_{ij} - p_{ji} = 0$, получим $\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$. Если в матрице R_Σ элементы $r_{ij}^\Sigma = 0$ и $r_{ji}^\Sigma = 0$, то $p_{ij} = p_{ji}$. Следовательно, и в этом случае $\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$. Заметим, что $\Delta_{ii} = 0$ $(i = 1, \dots, n)$ и поэтому в формулу (1.6) не включены.▲

Сравним известные методы агрегирования предпочтений [10,36,48] с алгоритмом, предложенным в данной статье.

1. Построение классического мажоритарного графа [10,36]. В этом случае в графе могут быть контуры, и тогда выбор наилучших альтернатив затруднен.

2. Построение агрегированного отношения $\hat{\rho} = \mathrm{Tr}\,\rho'$ [48], где отношение $\rho' = \rho_\Sigma \setminus \rho_K$, и ρ_K – отношение, содержащее все контуры ρ_Σ. Таким образом, контуры из ρ_Σ удаляются полностью. В этом случае можно удалить слишком много элементов ρ_Σ, вплоть до того, что получим $\rho' = \emptyset$.

В предложенном алгоритме контуры не удаляются полностью, а только разрушаются. При этом в первую очередь убираем из контуров ρ_K дуги с наименьшим весом, т.е. с наименьшей разницей в экспертных предпочтениях между двумя альтернативами.

Покажем теперь, что строгий мажоритарный граф $G = (A, \rho_\Sigma)$ в случае, когда экспертные предпочтения являются строгими ранжированиями, удовлетворяет условию 2:

$$D(\rho_\Sigma) = \sum_{t=1}^{m} d(\rho_\Sigma, \rho_t) \to \min.$$

Пусть экспертные предпочтения $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ заданы матрицами смежности $R^1, R^2, \dots, R^m$ и q – произвольное отношение с матрицей смежности $Q = \|q_{ij}\|$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3. Суммарное расстояние $D(q) = \sum_{t=1}^{m} d(q, \rho_t)$ минимально, если $q_{ij} = 1 \Leftrightarrow r_{ij}^t = 1$ не менее, чем для половины экспертов ($i, j = 1, \dots, n; t \in \{1, \dots, m\}$). При этом в случае $\sum_{t=1}^{m} r_{ij}^t = \frac{m}{2}$ (т.е. при четном m) $D(q)$ остается минимальным и при выборе $q_{ij} = 0$.

Доказательство теоремы 1.3.

$$D(q) = \sum_{t=1}^{m} d(q, \rho_t) = \sum_{t=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| q_{ij} - r_{ij}^t \right| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{m} \left| q_{ij} - r_{ij}^t \right|.$$

Проведем декомпозицию по числу альтернатив. Тогда задача сводится к нахождению минимума величин $\sum_{t=1}^{m} \left| q_{ij} - r_{ij}^t \right|$ $(i, j = 1, \dots, n)$. Очевидно, что минимум достигается при $q_{ij} = 1 \Leftrightarrow \sum_{t=1}^{m} r_{ij}^t \geq \frac{m}{2}$, т.е. $r_{ij}^t = 1$ не менее, чем для половины экспертов. При этом в случае $\sum_{t=1}^{m} r_{ij}^t = \frac{m}{2}$ (что возможно только при четном m) минимум достигается при любом значении $q_{ij} \in \{0,1\}$.
▲

Обозначим множество отношений с минимальным суммарным расстоянием до экспертных предпочтений

$$\operatorname*{Argmin}_{q \in \rho(A)} D(q),$$

где $\rho(A)$ – множество всех бинарных отношений, заданных на множестве A.

Полученный в теореме 1.3 результат совпадает с результатом, доказанным в работе [36] для отношения-медианы по правилу большинства, допускающему равенство числа экспертов, т.е. суммарное отношение в этом случае не является асимметричным.

К сожалению, в силу неоднозначности построения отношения, для которого суммарное расстояние до экспертных предпочтений минимально, выбор его в качестве агрегированного нецелесообразен. Например, в случае, когда отношения $\rho_1,\ \rho_2,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4$ имеют матрицы смежности

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

получим: $D(q_1) = D(q_2) = D(q_3) = D(q_4) = 2$, т.е. все четыре отношения q_1, $q_2,\ q_3,\ q_4$ минимально удалены от $\rho_1,\ \rho_2$.

Пусть профиль экспертных предпочтений $\rho_1,\ \rho_2, \dots, \rho_m$ задан отношениями строгого линейного порядка (строгое ранжирование). Тогда $\forall t \in \{1, \dots, m\}\quad r_{ij}^t + r_{ji}^t = 1,$ где $i, j \in \{1, \dots, n\},\ i \neq j,$ и, следовательно, выполняется

$$\sum_{t=1}^{m} r_{ij}^t + \sum_{t=1}^{m} r_{ji}^t = m.$$

Так как $\sum_{t=1}^{m} r_{ij}^t$ – количество единиц среди $r_{ij}^t,\ t = 1, \dots, m,$ а $\sum_{t=1}^{m} r_{ji}^t$ – количество нулей среди r_{ij}^t, $t = 1, \dots, m$, то $\sum_{t=1}^{m} r_{ij}^t - \sum_{t=1}^{m} r_{ji}^t$ – разница между числом единиц и нулей среди $r_{ij}^t,\ t = 1, \dots, m$. Из этого следует, что по определению ρ_Σ в случае, когда предпочтения экспертов $\rho_1,\ \rho_2, \dots, \rho_m$ заданы отношениями строгого линейного порядка, $\rho_\Sigma \in \operatorname*{Argmin}_{q \in \rho(A)} D(q)$.

Покажем, что в случае, когда предпочтения $\rho_1,\ \rho_2, \dots, \rho_m$ – строгие линейные порядки и число экспертов нечетное, ρ_Σ является единственным отношением, для которого суммарное расстояние минимально.

Следствие 1.2. Пусть профиль экспертных предпочтений $\rho_1,\ \rho_2, \dots, \rho_m$ задан отношениями строгого линейного порядка. Тогда для произвольного бинарного отношения $\rho_* \neq \rho_\Sigma$, заданного на множестве альтернатив A, при нечетном числе экспертов m выполняется

$$D(\rho_\Sigma) < D(\rho_*).$$

Доказательство следствия 1.2. Из теоремы 1.3 получаем, что неоднозначность построения отношения, соответствующего минимальному суммарному расстоянию, возникает только в случае, когда $r_{ij}^t = 1$ ровно для половины экспертов. Но при задании отношений $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ строгими линейными порядками и нечетном числе экспертов этот случай не возможен.▲

Из последнего утверждения в силу строгого неравенства следует и обратное утверждение.

Следствие 1.3. Пусть суммарное расстояние $D(\rho_*)$ от экспертных предпочтений, заданных линейными строгими порядками с нечетным числом экспертов, до отношения ρ_*, заданного на множестве альтернатив A, является минимальным. Тогда $\rho_\Sigma = \rho_*$.

Полученные утверждения показывают, что в случае, когда экспертные предпочтения строгие ранжирования, для строгого мажоритарного графа выполняется условие 2 о согласованности агрегированного отношения с экспертными предпочтениями. Но в мажоритарном графе могут содержаться контуры, и в этом случае не выполнится условие 1 о непротиворечивости агрегированного предпочтения.

Можно ли построить единственное агрегированное отношение предпочтения не содержащее контуров и с возможно меньшей величиной $D(\hat{\rho}) = \sum_{t=1}^{m} d(\hat{\rho}, \rho_t)$? Компромиссным решением этой проблемы является предложенный алгоритм, который позволяет разрушать контуры, а не удалять их полностью. Можно модифицировать алгоритм, удаляя в контурах не все дуги с наименьшим весом, а столько, сколько необходимо для разрушения контуров. В этом случае агрегированное отношение предпочтения будет полнее учитывать экспертные предпочтения, но может быть построено неоднозначно, т. е. можно получить несколько отношений без контуров с одним и тем же значением $D(\hat{\rho})$. Таким образом, не выполнится важнейшее условие – однозначный выбор наилучших альтернатив.

Приведем пример работы предложенного алгоритма.

Пример 1.2. Пусть на множестве альтернатив $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ задан профиль предпочтений пяти экспертов $(m = 5)$:

ρ_1	$\rho_2 = \rho_4$	$\rho_3 = \rho_5$
a_1	a_2	a_3
a_2	a_3	a_4
a_3	a_4	a_1
a_4	a_1	a_2

Матрицы смежности соответствующих графов имеют вид:

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; R^2 = R^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; R^3 = R^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу суммарных предпочтений графа:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

С ее помощью вычислим матрицу весов:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 3 & 3 \\ 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 5 & \infty \end{pmatrix}$$

(соответствующий граф изображен на рис. 1.4). Матрица смежности графа отношения ρ_Σ имеет вид:

$$R_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из рис. 1.4 видно, что все дуги входят в какой-либо контур. По алгоритму 1.1 отбрасываем дуги с наименьшим весом, равным единице, получаем граф, изображенный на рис. 1.5.

Ядро: $\{a_2, a_3\}$ – наилучшие варианты альтернатив. Матрица смежности агрегированного отношения

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

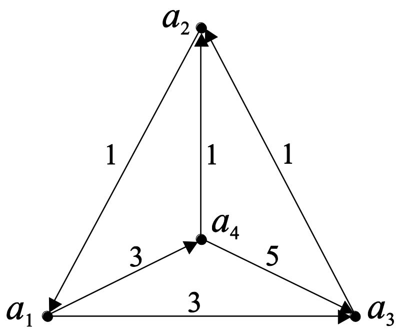

рис. 1.4

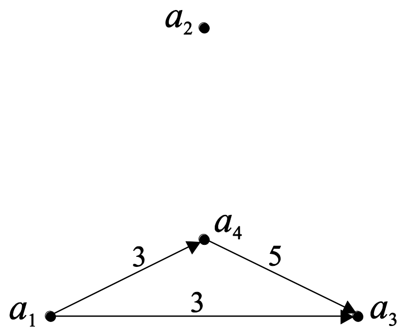

рис. 1.5

Если из графа, изображенного на рис. 1.4, удалить веса, получим классический мажоритарный граф. Данный граф не имеет ядра. Действительно, внутренне устойчивые подмножества: $\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}$; внешне устойчивые подмножества: $\{a_1, a_2\}$, $\{a_2, a_3\}$, $\{a_2, a_4\}$. Выбор наилучших альтернатив затруднен [36]. Доминирующие подмножества (внешне устойчивые): 3 варианта. Если убрать все контуры, как предлагается в работе [48], то ядро – $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. В этом случае не происходит сужения множества альтернатив.

Широко используемая для решения практических задач процедура Борда (суммирование мест в экспертных ранжированиях) дает упорядочение: $a_3 - a_2 - a_4 - a_1$. Матрица смежности

$$\hat{R}^{Б} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Лучшими в этом случае также являются альтернативы a_2 и a_3, но по методу агрегирования альтернатива a_3 не превосходит по предпочтительности a_2. Это объясняется тем, что у трех экспертов из пяти a_2 предпочтительнее a_3.

Для данных экспертных предпочтений минимальное суммарное расстояние $D(\rho_\Sigma)$=16 и по следствию 1.2 из теоремы 1.3 единственно. Суммарное расстояние до ранжирования по процедуре Борда равно $D(\hat{\rho}^{Б}) = 20$, а до агрегированного отношения, полученного с помощью процедуры разрушения контуров, $D(\hat{\rho}) = 19$. ■

Заметим, если мажоритарный граф не содержит контуров, то агрегированное отношение, полученное в данной работе, совпадет с отношением в работе [48]. Классический мажоритарный граф [10,36] совпадет со строгим нагруженным мажоритарным графом в случае, если исходные предпочтения строгие ранжирования и число экспертов нечетно. Агрегированное предпочтение в этом случае, отличается только взятием транзитивного замыкания.

1.4. Агрегирование отношений квазипорядка

Пусть профиль индивидуальных предпочтений экспертов задан на множестве A отношениями квазипорядка $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ (квазипорядок – рефлексивное и транзитивное отношение). Требуется построить агрегированное отношение предпочтения $\hat{\rho}$, также являющееся квазипорядком, и согласованное с экспертными предпочтениями $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$.

Матрица предпочтений отношения квазипорядка ρ_t (t=1, …, m) – квадратная матрица $R^t = \left\| r_{ij}^t \right\|$ порядка n (n – число альтернатив) с элементами

$$r_{ij}^t = \begin{cases} 1, \text{если } a_i \text{ менее } a_j \text{предпочтительна;} \\ \dfrac{1}{2}, \text{если } a_i \text{ и } a_j \text{ равноценны;} \\ 0, \text{если } a_j \text{ менее предпочтительна } a_i \text{ или } a_i, a_j \text{ не сравнимы} \end{cases}$$

при $i \neq j$. Элемент $r_{ii}^t = 1$, (i=1, …, n), так как отношение ρ_t рефлексивно по условию.

Для отношения квазипорядка матрицы предпочтений и смежности соответствующего графа не совпадают. Матрицу смежности можно получить из матрицы предпочтений заменой всех элементов, равных $\frac{1}{2}$, на 1.

Потребуем, как и для отношения строгого порядка, от агрегированного отношения квазипорядка $\hat{\rho}$, чтобы оно удовлетворяло следующим двум условиям:

Условие 1: было непротиворечивым;

Условие 2: наиболее полно отражало предпочтения каждого эксперта.

Формализуем эти условия с учетом особенностей отношений квазипорядка. Отношение квазипорядка ρ_t (t=1, …, n) можно разбить на симметричную $Sym\,\rho_t$ и асимметричную $As\,\rho_t$ части. К отношению $Sym\,\rho_t$ относятся все такие пары, для которых выполняется: $< a_i, a_j > \in \rho_t$ и $< a_j, a_i > \in \rho_t$ одновременно ($a_i, a_j \in A$). В этом случае будем считать, что альтернативы a_i и a_j равноценны. Если $< a_i, a_j > \in \rho_t$, а $< a_j, a_i > \notin \rho_t$, то альтернатива a_i менее предпочтительна, чем a_j, и пара $< a_i, a_j > \in As\,\rho_t$.

Отношение квазипорядка может содержать равноценные альтернативы, следовательно, в нем допускается наличие контуров, полностью принадлежащих симметричной части отношения. Кроме того, отношение квазипорядка содержит петли, так как является рефлексивным. Вследствие этого при построении непротиворечивого агрегированного отношения будем различать противоречивые и непротиворечивые контуры.

Определение 1.5. Контур отношения ρ называется противоречивым, если в нем хотя бы одна пара $< a_i, a_j > \in As\,\rho_t$, ($a_i, a_j \in A$).

Определение 1.6. Отношение ρ называется противоречивым, если оно содержит противоречивый контур.

Таким образом, выполнение условия 1 означает, что агрегированное отношение $\hat{\rho}$ не должно содержать контуров, в которых не все элементы равноценны. Отсутствие таких контуров – необходимое условие для осуществления однозначного непустого выбора наилучших альтернатив. Этому условию удовлетворяет отношение квазипорядка.

Теорема 1.4. Отношение квазипорядка непротиворечиво.

Доказательство теоремы 1.4. Отношение квазипорядка по определению транзитивно, и, следовательно, по лемме 1.1 все контуры транзитивного отношения принадлежат симметричной части отношения. Таким образом, отношение квазипорядка не может содержать противоречивых контуров, т.е. контуров, содержащих дуги из асимметричной части отношения. ▲

Расстояние между двумя отношениями ρ_t и ρ_k ($d(\rho_t, \rho_k)$ или d_{tk}), как и в предыдущем параграфе, будем вычислять по формуле (1.1). Заметим, для строгого порядка матрицы смежности и предпочтений совпадают, а для квазипорядка нет. Расстояния между матрицами предпочтений и матрицами смежности будут различаться, но только в том случае, когда в отношениях ρ_t и ρ_k существуют альтернативы в одном из них не сравнимые, а в другом эквивалентные.

Для построения агрегированного отношения, наиболее полно отражающего предпочтения каждого эксперта, т. е. для выполнения условия 2, необходимо, чтобы сумма расстояний между агрегированным отношением $\hat{\rho}$ и отношениями $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ была минимальной (1.2).

Построим агрегированное отношение предпочтения, удовлетворяющее условиям 1 и 2. Алгоритм нахождения агрегированного отношения квазипорядка так же, как и в параграфе 1.3, основывается на построении нагруженного мажоритарного графа, который в отличие от графа строгого порядка может содержать дуги из симметричной части отношения.

Определение 1.7. Нестрогим нагруженным мажоритарным графом назовем ориентированный нагруженный граф $G = (A, \rho_\Sigma)$ с множеством вершин-альтернатив $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и дугами

$\rho_\Sigma = \{< a_i, a_j > | a_i, a_j \in A$ и $l_{ij} \geq 0\}$, где $l_{ij} = \sum_{k=1}^{m}(r_{ij}^k - r_{ji}^k)$,

причем $\sum_{k=1}^{m} r_{ij}^k \neq 0$ и $\sum_{k=1}^{m} r_{ji}^k \neq 0$ одновременно. Каждой дуге $< a_i, a_j > \in \rho_\Sigma$ поставлен в соответствие вес l_{ij} $(i, j \in \{1, \dots, n\})$.

Напомним, что под знаком суммы элементы матриц предпочтений отношений ρ_t, t=1, …, m ($R^t = \|r_{ij}^t\|$).

Матрицу смежности графа $G = (A, \rho_\Sigma)$ обозначим R_Σ. При построении отношения квазипорядка мажоритарный граф может содержать дуги с нулевым весом: они соединяют равноценные альтернативы.

Как и ранее, введем матрицу весов $C = \|c_{ij}\|$ – квадратная матрица порядка n, где n – число альтернатив, причем:

$$c_{ij} = \begin{cases} l_{ij}, \text{если } \exists \text{ дуга } < a_i, a_j > \in \rho_\Sigma, \\ \infty, \text{иначе.} \end{cases}$$

А также вспомогательную матрицу суммарных предпочтений $P_{n \times n} = \|p_{ij}\|$, где $p_{ij} = \sum_{k=1}^{m} r_{ij}^k$, с помощью которой удобно находить матрицу весов C:

$$c_{ij} = \begin{cases} p_{ij} - p_{ji}, \text{если } \exists \text{ дуга } < a_i, a_j > \in \rho_\Sigma, \\ \infty, \text{иначе.} \end{cases}$$

Для нахождения агрегированного квазипорядка $\hat{\rho}$ найдем предварительно суммарное отношение, не содержащее противоречивых контуров.

Алгоритм 1.2 построения отношения $\boldsymbol{\rho}$, не содержащего противоречивых контуров по $\boldsymbol{\rho_\Sigma}$

1. Проверяем граф $G = (A, \rho_\Sigma)$ на наличие противоречивых контуров. Если таких контуров нет, то граф $G = (A, \rho_\Sigma)$ без весов на дугах и есть граф $G = (A, \rho)$ искомого отношения ρ. Если противоречивые контуры есть, переходим к п. 2.

2. Из графа $G = (A, \rho_\Sigma)$ удаляем все дуги $< a_i, a_j > \in As\ \rho_\Sigma$ $(a_i, a_j \in A)$, которые принадлежат какому-либо противоречивому контуру и имеют наименьший вес. Переходим к п. 1.

Заметим, что по построению нестрогого мажоритарного графа вес дуги из асимметричной части отношения всегда больше нуля. Вес дуги из симметричной части отношения равен нулю.

Теорема 1.5. Не содержащее противоречивых контуров отношение ρ на множестве A, построенное из отношения ρ_Σ по алгоритму 1.2, является единственным.

Доказательство теоремы 1.5 следует из однозначности выполнения действий на каждом шаге алгоритма. ▲

При практической реализации предложенного алгоритма удобно воспользоваться следующим утверждением и его следствием.

Утверждение 1.7. Отношение ρ, заданное на множестве A, непротиворечиво тогда и только тогда, когда $As\ \ \rho \subseteq As(\mathrm{Tr}\,\rho)$.

Доказательство утверждения 1.7. Пусть отношение ρ не содержит противоречивых контуров, но не выполняется включение $As\ \ \rho \subseteq As(\mathrm{Tr}\,\rho)$. Следовательно, существует упорядоченная пара $< a_i, a_j >$ элементов из множества A такая, что $< a_i, a_j > \in As\ \ \rho$ и $< a_i, a_j > \in Sym(\mathrm{Tr}\,\rho)$. Но в этом случае выполняется $< a_j, a_i > \in Sym(\mathrm{Tr}\,\rho)$ и по определению транзитивного замыкания отношения существует цепочка пар, принадлежащих отношению ρ: $< a_i, a_{k_1} >, \dots, < a_{k_t}, a_j >$. Учитывая, что пара $< a_i, a_j > \in As\ \ \rho$, получим противоречивый контур отношения ρ, что противоречит предположению о непротиворечивости ρ.

Пусть теперь для отношения ρ выполняется $As\ \ \rho \subseteq As(\mathrm{Tr}\,\rho)$. Если бы отношение ρ было противоречивым, то в нем существовал бы контур, содержащий дугу из $As\ \ \rho$ и $Sym(\mathrm{Tr}\,\rho)$ одновременно, что противоречит предположению о выполнимости включения $As\ \ \rho \subseteq As(\mathrm{Tr}\,\rho)$.▲

Заметим, что $Sym\ \rho \subseteq Sym(\mathrm{Tr}\,\rho)$ очевидно выполняется для произвольного отношения ρ.

Следствие 1.4. Отношение ρ является непротиворечивым тогда и только тогда, когда $As\ \rho \cap Sym(\mathrm{Tr}\,\rho) = \emptyset$.

Искомое агрегированное отношение предпочтения $\hat{\rho}$ должно быть квазипорядком. Найдем $\hat{\rho}$ по формуле:

$$\hat{\rho} = e \cup \mathrm{Tr}\,\rho, \qquad (1.7)$$

где e – тождественное отношение (диагональ), $\mathrm{Tr}\,\rho$ – транзитивное замыкание отношения ρ. Напомним, что отношение ρ получается из отношения ρ_Σ путем разрушения противоречивых контуров. Полученное по формуле (1.7) отношение очевидно рефлексивно и транзитивно, следовательно, является квазипорядком.

Матрицы смежности и предпочтений искомого квазипорядка обозначим соответственно $\hat{R}$ и $\hat{R}^p$.

Введем на множестве булевых матриц операцию дизъюнкция $\vee$:

$$R^k \vee R^t = \left\| r_{ij}^k \vee r_{ij}^t \right\|.$$

Найдем матрицу смежности $\hat{R}$ отношения $\hat{\rho}$ согласно формуле (1.7)

$$\hat{R} = \mathrm{E} \vee \mathrm{Tr}\,R.$$

Матрицу предпочтений $\hat{R}^p$ получим заменой в матрице смежности $\hat{R}$ элементов, симметричных относительно главной диагонали и равных 1, на элементы, равные $\frac{1}{2}$.

Работа данного алгоритма, как и в предыдущем параграфе, основывается на нахождении отношения ρ_K, содержащего контуры отношения ρ_Σ. Матрицу смежности R_K графа отношения ρ_K, содержащего все контуры отношения ρ_Σ, вычислим по формуле (1.3).

Если в отношении ρ_K существуют одновременно дуги $< a_i, a_j >$ и $< a_j, a_i >$ $(a_i, a_j \in A)$, что соответствует равноценности альтернатив a_i и a_j, и, следовательно, эти дуги принадлежат $Sym\ \rho_\Sigma$, то они из контура не удаляются. Заметим, что эти дуги легко распознать: их вес равен нулю.

Таким образом, из контура удаляются только дуги, вес которых минимальный, но больше нуля, т.е. принадлежащие $As\ \rho_\Sigma$. Наличие этих дуг в отношении ρ_K свидетельствует о существовании противоречивых контуров в отношении ρ_Σ.

При практической реализации алгоритма для построения отношения ρ, не содержащего противоречивых контуров, можно выделить только дуги противоречивых контуров из $As\,\rho_\Sigma$. Следствие 1.3 позволяет найти отношение $As\ \rho_K$ по следующей формуле:

$$As\ \rho_K = Sym(\mathrm{Tr}\ \rho_\Sigma) \cap As\ \rho_\Sigma.$$

В матричном виде $As\ R_K = Sym(\mathrm{Tr}\ R_\Sigma) \cap As\ R_\Sigma$.

Согласно алгоритму, из отношения $As\,\rho_K$ поочередно удаляются все дуги, имеющие минимальный вес, до тех пор, пока противоречивые контуры отношения ρ_Σ не будут разрушены. Заметим, что для произвольного отношения q с матрицей смежности Q матрицы смежности отношений $As\ q$ и $Sym\ q$ находятся, соответственно, по формулам [48]:

$$Sym\ Q = Q\&Q^{\mathrm{T}}, \quad As\ Q = Q - Sym\ Q.$$

Предложенный в данной работе метод согласования экспертных предпочтений состоит из двух частей: построения нагруженного мажоритарного графа и разрушения контуров с целью построения непротиворечивого агрегированного отношения. Как было отмечено ранее, нагруженный мажоритарный граф удовлетворяет всем требованиям к групповому решению, в частности, сохраняет отношение Парето. В случае агрегирования отношений квазипорядка за счет возможной равноценности альтернатив дуга, принадлежащая асимметричной части противоречивого контура и соответствующая отношению Парето, может иметь меньший вес, чем другие дуги из асимметричной части этого контура. В этом случае рекомендуется удалить дугу с наименьшим весом, но не соответствующую отношению Парето. Можно также осуществить выбор наилучших альтернатив на основе мажоритарного графа, не прибегая к разрушению противоречивых контуров [34,36,55]. Например, для упорядочения альтернатив можно воспользоваться процедурой Коупленда. Для мажоритарного графа данная процедура сводится к вычислению для каждой вершины индекса, равного разности входящих в вершину и исходящих из нее дуг (для отношения «менее предпочтительна»). Для нагруженного мажоритарного графа процедуру можно усилить, учитывая веса на дугах: складывать и вычитать веса соответствующих дуг. Затем упорядочить вершины графа в соответствии с вычисленным индексом: лучшая вершина-альтернатива имеет наибольший индекс.

Приведем пример, демонстрирующий возможности предложенного метода.

Пример 1.3. Пусть множество A содержит пять альтернатив $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ и профиль предпочтений трех экспертов – нестрогие ранжирования. Требуется построить агрегированное отношение, являющееся квазипорядком. Нестрогие ранжирования альтернатив представлены в следующей таблице.

ρ_1	ρ_2	ρ_3
a_4	a_5	a_1
a_1	a_3	a_2
a_2–a_3	a_1– a_2	a_3– a_5
a_5	a_4	a_4

В верхней строке таблицы ранжирования расположены наиболее предпочтительные альтернативы. Равноценные альтернативы расположены на одной строке. Представим отношения ρ_1, ρ_2, ρ_3 матрицами предпочтений:

$$R^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$R^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & {}^1/_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & {}^1/_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае матрица суммарных предпочтений $P = R^1 + R^2 + R^3$ имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & {}^1/_2 & 1 & 1 & 1 \\ {}^5/_2 & 3 & {}^3/_2 & 1 & 1 \\ 2 & {}^3/_2 & 3 & 1 & {}^3/_2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & {}^3/_2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрицы смежности, предпочтений и весов мажоритарного графа, соответственно, имеют вид:

$$R_\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; R_\Sigma^P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & {}^1/_2 & 0 & 0 \\ 1 & {}^1/_2 & 1 & 0 & {}^1/_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & {}^1/_2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 0 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 0 & \infty & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Мажоритарный граф, изображенный на рис. 1.6, содержит противоречивые контуры. Разрушим противоречивые контуры, удалив из них согласно алгоритму дуги с весом, равным 1 (в данном примере это одна дуга, которая изображена на рис. 1.6 пунктирной линией). Получим матрицу смежности R и матрицу предпочтений R^p отношения, не содержащего противоречивых контуров. Вычислив транзитивное замыкание отношения ρ, получим искомый квазипорядок $\hat{\rho}$. При этом к отношению ρ добавятся дуги $< a_2, a_5 >$ и $< a_5, a_2 >$. Матрицы смежности и предпочтений искомого агрегированного отношения квазипорядка имеют вид:

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{R}^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

что соответствует ранжированию $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 - a_3 - a_5 \\ a_4 \end{pmatrix}$. Граф агрегированного отношения предпочтения изображен на рис. 1.7.

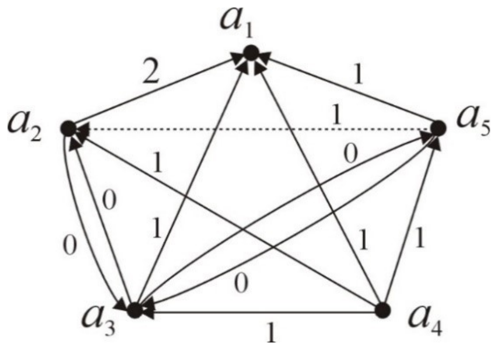

Рис. 1.6.

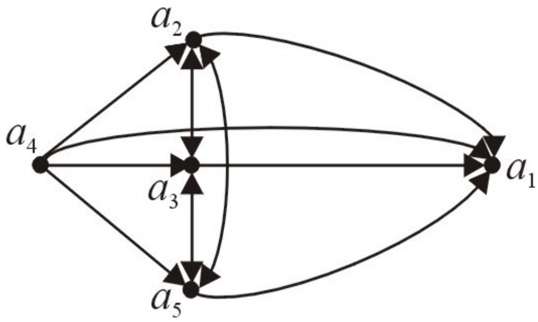

Рис. 1.7.

Заметим, что графы, изображенные на рис. 1.6 и 1.7 не полностью соответствуют своим матрицам смежности: для большей наглядности производимых вычислений в них отсутствуют петли (отношение квазипорядка рефлексивно). Построенное агрегированное отношение позволяет осуществить однозначный выбор наилучшего проекта. Существование дуг $< a_2, a_1 >, < a_3, a_1 >, < a_4, a_1 >$ и $< a_5, a_1 >$ на рис. 1.7 указывает на то, что альтернатива a_1 предпочтительнее всех остальных – победитель по Кондорсе.

Минимальное суммарное расстояние до экспертных предпочтений – 19 (от мажоритарного графа, совпадающего с классическим, по правилу большинства); для агрегированного отношения $\hat{\rho}$ суммарное расстояние до экспертных предпочтений 20. Нестрогое ранжирование, полученное по модифицированной процедуре Коупленда – $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 - a_3 \\ a_5 \\ a_4 \end{pmatrix}$, также дает расстояние 20: $a_1(5)$, $a_2(0)$, $a_3(0)$, $a_4(-4)$, $a_5(-1)$. Используя обычную процедуру Коупленда, получим строгое ранжирование $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_5 \\ a_4 \end{pmatrix}$, суммарное расстояние – 21: $a_1(4)$, $a_2(1)$, $a_3(0)$, $a_4(-4)$, $a_5(-1)$.■

1.5. Агрегирование неоднородной экспертной информации

Обобщим полученные в предыдущих параграфах алгоритмы на случай, когда профиль индивидуальных предпочтений экспертов задан на множестве альтернатив A, произвольными транзитивными отношениями $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$. Построим непротиворечивое агрегированное отношение предпочтения $\hat{\rho}$, наиболее полно согласованное с индивидуальными предпочтениями экспертов.

Заметим, что противоречивые исходные отношения могут привести к нарушению второй аксиомы Эрроу о сохранении в агрегированном отношении предпочтений, совпадающих у всех экспертов [86]. Требование транзитивности исходных отношений исключает их противоречивость.

Каждому отношению ρ_t (t=1, …, n) поставим в соответствие матрицу предпочтений – квадратную матрицу $R^t = \left\| r_{ij}^t \right\|$ порядка n (n – число альтернатив) с элементами

$$r_{ij}^t = \begin{cases} 1, \text{если } a_i \text{ менее предпочтительна } a_j; \\ \dfrac{1}{2}, \text{если } a_i \text{ и } a_j \text{ равноценны;} \\ 0, \text{если } a_j \text{ менее предпочтительна } a_i \text{ или } a_i \text{ и } a_j \text{ не сравнимы.} \end{cases}$$

В зависимости от пожеланий ЛПР отношения, задающие профиль экспертных предпочтения, могут быть агрегированы в отношения строгого порядка или квазипорядка. Соответственно, должен быть построен либо строгий, либо нестрогий мажоритарный граф, и применены алгоритмы, описанные в параграфах 1.3 и 1.4.

Пример 1.4.

Задано множество альтернатив $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, и задан профиль индивидуальных предпочтений трех экспертов: ρ_1 – строгое ранжирование, ρ_2 – нестрогое ранжирование (квазипорядок), ρ_3 – произвольное транзитивное отношение.

Матрицы предпочтений отношений ρ_1, ρ_2, ρ_3 имеют вид:

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Требуется найти агрегированное отношение строгого порядка.

Для решения задачи воспользуемся алгоритмом, предложенным в п.1.3. Вычислим матрицу суммарных предпочтений и матрицу весов мажоритарного графа:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 1 & \frac{5}{2} & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; C = \begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}.$$

Затем найдем матрицу смежности строгого мажоритарного графа, который не содержит контуров (рис. 1.8). Взяв транзитивное замыкание полученного отношения, найдем агрегированный строгий порядок $\hat{R}$:

$$R_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; \hat{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

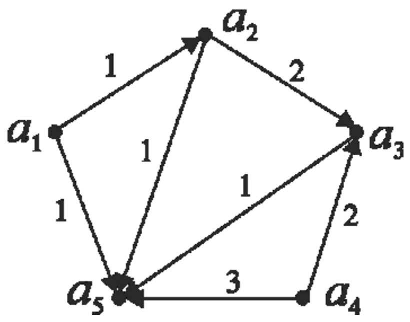

Рис. 1.8.

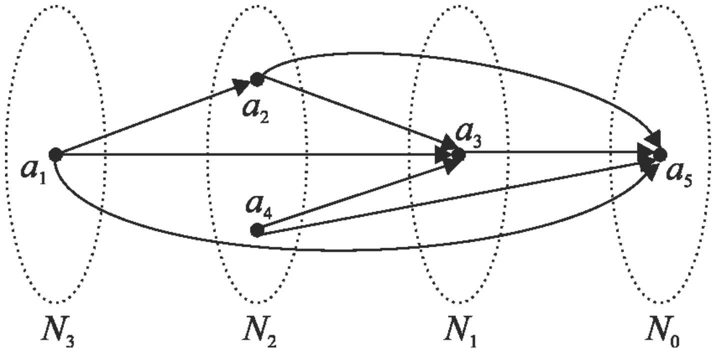

Рис. 1.9.

Используя алгоритм Демукрона [23], разобьём граф отношения $\hat{R}$ на уровни (рис. 1.9). Наилучшая альтернатива – a_5. ■

Пример 1.5. Сравнение методов агрегирования с методами Борда и Кемени.

Профиль предпочтений четырех экспертов задан ранжированием альтернатив.

ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4
a_3	a_2	–	–
a_2	a_3	a_1	a_4
a_4	a_4	$a_3 - a_4$	a_3
a_1	a_1	a_2	$a_1 - a_2$

Построим агрегированное отношение предпочтения.

Матрицы экспертных предпочтений имеют вид:

$$R^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad R^4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу суммарных предпочтений, затем матрицы весов и смежности мажоритарного графа:

$$P = \begin{pmatrix} 4 & \frac{5}{2} & 3 & 3 \\ \frac{3}{2} & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ \infty & 0 & 2 & 0 \\ \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Граф на рис. 1.10 (для наглядности петли отсутствуют) не содержит противоречивых контуров.

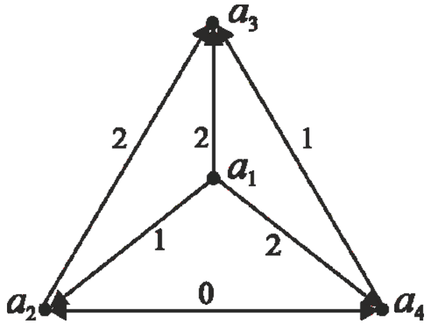

Рис. 1.10

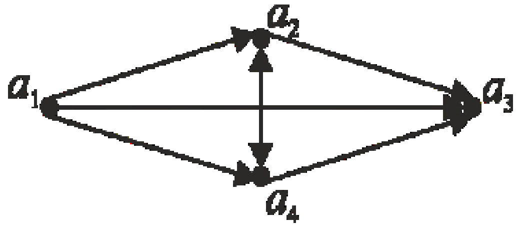

Рис. 1.11

На рис.1.11 альтернативы расположены по уровням предпочтения: a_3 – наилучшая, равноценные a_2 и a_4 и худшая – a_1.

Сравним метод агрегирования с методами Борда и построением медианы Кемени. Построение итогового ранжирования по методу Борда приведено в таблице ниже.

В работе [85, с. 24] была построена медиана Кемени для данного ранжирования альтернатив. Медиана Кемени [99] находится из условия минимальности суммарного расстояния до экспертных предпочтений. Но из теоремы 1.3 следует, что минимальное отношение строится неоднозначно.

	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	Сумма рангов	Место в итоговом ранжировании
a_1	0	0	2	0	2	3
a_2	2	3	0	0	5	2
a_3	3	2	1	1	7	1
a_4	1	1	1	2	5	2

Для экспертных предпочтений, заданных в данном примере, существует пять ранжирований, удовлетворяющих условию минимальности:

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_1 - a_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 - a_4 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_3 - a_4 \\ a_1 - a_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что два отношения являются строгим ранжированием (последнее – медиана Кемени), но по алгоритму Кемени находится только одно из них. Ранжирования (места) по трём методам приведены в таблице.

Из таблицы видно, что результаты различаются. Но наилучшей альтернативой везде является a_3, худшей a_1.

№	Процедура Борда	Медиана Кемени	Метод агрегирования
a_1	3	4	3
a_2	2	2	2
a_3	1	1	1
a_4	2	3	2

Сравним методы, составив матрицы предпочтений полученных ранжирований, и найдя расстояния между соответствующими отношениями.

$$R^{\text{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 - a_4 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad R^{\text{К}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_1 \end{pmatrix},$$

$$R^{\text{А}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 - a_4 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

$d(R^{\text{Б}}, R^{\text{К}})=1$, $d(R^{\text{Б}}, R^{\text{А}})=0$, $d(R^{\text{К}}, R^{\text{А}})=1$.

Результат ранжирования по методу агрегирования совпал с результатом процедуры Борда. Медиана Кемени немного отличается от них. Метод Борда дает результаты, которые интуитивно понятны, так как в его основе лежит идея усреднения оценок. Для получения итогового ранжирования в методе Кемени используется специальная оценка – расстояние между ранжированиями. Алгоритм получения итогового ранжирования у Кемени основан на эвристике – предположении, что построенное таким образом итоговое ранжирование и будет наиболее близким к мнению всех экспертов с точки зрения введенной оценки. Но, как уже было отмечено, таких ранжирований может быть несколько. В данном примере суммарные расстояния совпали для всех методов:

$$D(\rho_{\text{А}}) = D(\rho_{\text{Б}}) = D(\rho_{\text{К}}) = 16. \blacksquare$$

1.6. Агрегирование предпочтений, заданных числовыми оценками альтернатив

Предложенные алгоритмы могут быть применены и в случае, когда профиль индивидуальных предпочтений экспертов содержит численные оценки альтернатив.

Сформируем матрицы экспертных предпочтений в случае, когда индивидуальные предпочтения экспертов на множестве альтернатив $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ заданы векторами $h^1, h^2, \dots, h^m$, где $h^t = < h_1^t, h_2^t, \dots, h_n^t >$ – вектор с компонентами $h_i^t \in \mathbb{R}^+$, равными численным оценкам альтернатив ($i \in \{1, \dots, n\}, t \in \{1, \dots, m\}$). Предполагается, что эксперты могут оценивать альтернативы в разных шкалах, что затрудняет возможность построения суммарной оценки каждой альтернативы.

Матрицы экспертных предпочтений R^1, $R^2, \dots$, R^m построим на основе векторов $h^1, h^2, \dots, h^m$ следующим образом: $R^t = \|r_{ij}^t\|$ – квадратная матрица порядка n (n – число альтернатив, $i, j = 1, \dots, n$, m-число экспертов, t=1,…,m) с элементами

$$r_{ij}^t = \begin{cases} \dfrac{h_j^t}{h_i^t + h_j^t}, \text{если значения оценок } t\text{-го эксперта максимизируются;} \\ \dfrac{h_i^t}{h_i^t + h_j^t}, \text{если значения оценок } t\text{-го эксперта минимизируются;} \end{cases}$$

при $i \neq j$; и $r_{ii}^t = 1$.

Очевидно, что выполняется условие $r_{ij}^t + r_{ji}^t = 1, (i \neq j)$.

В матрицах экспертных предпочтений фактически учитывается информация о том, во сколько раз одна альтернатива предпочтительнее другой, поэтому для их формирования необязательно задавать численные оценки альтернатив. Достаточно задать информацию во сколько раз альтернатива a_i предпочтительнее альтернативы a_j, причем эта информация не должна содержать противоречий. Если альтернатива a_i предпочтительнее a_j в α_{ij} раз, тогда элементы r_{ij}^t и r_{ji}^t матрицы предпочтений R^t при $i \neq j$ вычисляются следующим образом:

$$r_{ij}^t = \frac{1}{1 + \alpha_{ij}}, \qquad r_{ji}^t = \frac{\alpha_{ij}}{1 + \alpha_{ij}}$$

и $r_{ii}^t = 1$.

Если информация о попарном сравнении некоторых альтернатив у какого-либо эксперта отсутствует, то соответствующие элементы матрицы предпочтений равны 0. Следует отметить, что для получения полной и непротиворечивой информации достаточно сравнить между собой $(n-1)$ пару альтернатив, например, a_1 со всеми остальными альтернативами.

Для нахождения агрегированного отношения предпочтения в зависимости от пожеланий ЛПР можно использовать предложенные ранее алгоритмы, основывающиеся на построении строгого или нестрогого мажоритарного графа. Можно также упорядочить альтернативы в соответствии с индексом соответствующих вершин (процедуры Коупленда простая и модифицированная). Индекс вершины вычисляется, как разность числа дуг, входящих и исходящих из нее. В модифицированной процедуре индекс равен разности весов входящих и исходящих дуг нагруженного мажоритарного графа (сумма элементов соответствующего номеру альтернативы столбца матрицы суммарных предпочтений минус сумма элементов строки).

Найдем отношение q, имеющее минимальное суммарное расстояние до экспертных предпочтений $\rho_1,\ \rho_2, \dots, \rho_m$, заданных матрицами предпочтений $R^1, \dots, R^m$, причем для элементов матриц предпочтения выполняется: $r_{ij}^t \in [0;1]$ и $r_{ji}^t = 1 - r_{ij}^t$ $(t = 1, \dots, m)$. Пусть q – бинарное отношение с матрицей предпочтения $Q = \|q_{ij}\| \in M_n([0,1])$ – множество квадратных матриц порядка n с элементами $q_{ij} \in [0;1]$. Суммарное расстояние до экспертных предпочтений вычисляется по формуле:

$$D(q) = \sum_{t=1}^{m} d(q, \rho_t) = \sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left|q_{ij} - r_{ij}^t\right| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{m} \left|q_{ij} - r_{ij}^t\right|.$$

Проведем декомпозицию по числу альтернатив. Тогда задача сводится к нахождению минимума величин $\sum_{t=1}^{m}\left|q_{ij} - r_{ij}^t\right|$ $(i, j = 1, \dots, n)$. Упорядочим элементы матриц экспертных предпочтений: $r_{ij}^{t_1} \le r_{ij}^{t_2} \le \dots \le r_{ij}^{t_m}$.

Рассмотрим случай, когда число экспертов нечетно. Покажем, что, если $m = 2k+1$ минимум достигается при $q_{ij} = r_{ij}^{t_{k+1}}$. Найдем сумму модулей

$$\left|q_{ij} - r_{ij}^{t_1}\right| + \left|q_{ij} - r_{ij}^{t_2}\right| + \cdots + \left|q_{ij} - r_{ij}^{t_{2k}}\right| + \left|q_{ij} - r_{ij}^{t_{2k+1}}\right| = \left(\left|q_{ij} - r_{ij}^{t_1}\right| + \right.$$
$$\left. + \left|q_{ij} - r_{ij}^{t_{2k+1}}\right|\right) + \cdots + \left(\left|q_{ij} - r_{ij}^{t_k}\right| + \left|q_{ij} - r_{ij}^{t_{k+2}}\right|\right) + \left|q_{ij} - r_{ij}^{t_{k+1}}\right| \geq$$
$$\left|r_{ij}^{t_1} - r_{ij}^{t_{2k+1}}\right| + \cdots + \left|r_{ij}^{t_k} - r_{ij}^{t_{k+2}}\right| + \left|q_{ij} - r_{ij}^{t_{k+1}}\right|.$$

Последнее соотношение следует из неравенства треугольников, причем величина q_{ij} – медиана, она находится внутри каждого из полученных интервалов, следовательно, при $q_{ij} = r_{ij}^{t_{k+1}}$ неравенство обращается в равенство, и достигается наименьшее значение искомой суммы. В противном случае получим строгое неравенство.

Так как по определению матриц предпочтения $r_{ji}^t = 1 - r_{ij}^t$, то элементы r_{ji}^t упорядочиваются в обратном порядке, а наименьшее значение достигается при $q_{ij} = 1 - r_{ij}^{t_{k+1}}$. Таким образом, для элементов матрицы Q так же, как и для матриц экспертных предпочтений выполняется $q_{ij} + q_{ji} = 1$.

Аналогично можно доказать, что для четного числа экспертов матрица предпочтений Q строится неоднозначно. Наименьшее значение сумма модулей принимает при любом значении $q_{ij} \in [r_{ij}^{t_k}; r_{ij}^{t_{k+1}}]$. Очевидно, что условие $q_{ij} + q_{ji} = 1$ в этом случае может не выполнятся.

Из приведенных рассуждений следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 1.6. Суммарное расстояние $D(q) = \sum_{t=1}^{m} d(q, \rho_t)$ минимально при нечетном числе экспертов, если все элементы q_{ij} матрицы предпочтений Q равны медиане соответствующих элементов матриц экспертных предпочтений: $r_{ij}^1, \dots, r_{ij}^m$ $(i, j = 1, \dots, n)$.

Отношение ρ_Σ, соответствующее матрице суммарных предпочтений $P = \sum_{k=1}^{m} R^k$, и, следовательно, матрице $\frac{1}{m}P$ не совпадает с минимальным отношением q из теоремы 1.6. Элементы матрицы $\frac{1}{m}P$ равны средним арифметическим значениям элементов матриц экспертных предпочтений, а матрицы Q – медианным. Как известно, значение медианы заданных чисел в общем случае не совпадает с их средним арифметическим.

Расстояние между отношениями предпочтения можно задать по формуле

$$d(\rho_k, \rho_t) = d(R^k, R^t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(r_{ij}^k - r_{ij}^t)^2.$$

Тогда минимальное суммарное расстояние до экспертных предпочтений

$$D(q) = \sum_{t=1}^{m} d(q, \rho_t) = \sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(r_{ij}^k - r_{ij}^t)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}(r_{ij}^k - r_{ij}^t)^2 \qquad (1.8)$$

будет достигаться для матрицы Q со средними арифметическими значениями элементов $r_{ij}^1, \dots, r_{ij}^m$ $(i, j = 1, \dots, n)$.

Действительно, минимум сильно выпуклой функции

$$f(q_{ij}) = (q_{ij} - r_{ij}^1)^2 + \cdots + (q_{ij} - r_{ij}^m)^2$$

достигается при $q_{ij} = \frac{r_{ij}^1 + \cdots + r_{ij}^m}{m}$, т.к. в этом случае выполняется

$$f'(q_{ij}) = 2(q_{ij} - r_{ij}^1) + \cdots + 2(q_{ij} - r_{ij}^m) = 0.$$

Заметим, что для булевых матриц

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(r_{ij}^k - r_{ij}^t)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|r_{ij}^k - r_{ij}^t\right|.$$

Теорема 1.7. Суммарное расстояние $D(q)$, заданное по формуле (1.8), минимально, если все элементы q_{ij} матрицы предпочтений Q равны среднему арифметическому значению соответствующих элементов матриц экспертных предпочтений: $r_{ij}^1, \dots, r_{ij}^m$ $(i, j = 1, \dots, n)$.

Отношение ρ_Σ, соответствующее нестрогому нагруженному мажоритарному графу, совпадает с отношением для средних арифметических значений элементов матриц экспертных предпочтений, которое по теореме 1.3 обеспечивает минимальное суммарное расстояние.

В случае, когда заданы весовые коэффициенты $k_1, k_2, \ldots, k_m$, влияния экспертов, матрицы экспертных предпочтений фактически примут вид: $k_1 R^1, \ldots, k_m R^m$. Тогда элементы q_{ij} матрицы Q, будут в соответствии с введенным расстоянием равны медианному или среднему арифметическому значению элементов $k_1 r_{ij}^1, \ldots, k_m r_{ij}^m$ $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$.

Рассмотрим пример, в котором матрицы предпочтения агрегированного отношение задаются с медианными и средними арифметическими значениями элементов матриц экспертных предпочтений.

Пример 1.6. Пусть множество альтернатив $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Задан профиль предпочтений трех экспертов: численные оценки альтернатив (значения по шкалам оценок максимизируются).

	h^1	h^2	h^3
a_1	3	4	2
a_2	2	3	4
a_3	3	3	2
a_4	2	4	4

Матрицы парных сравнений альтернатив для каждого эксперта соответственно имеют вид:

$$R^1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & 1 & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix}; \; R^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{7} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{4}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & 1 \end{pmatrix}; \; R^3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу суммарных предпочтений P:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & \frac{157}{105} & \frac{10}{7} & \frac{47}{30} \\ \frac{158}{105} & 3 & \frac{43}{30} & \frac{11}{7} \\ \frac{11}{7} & \frac{47}{30} & 3 & \frac{172}{105} \\ \frac{43}{30} & \frac{10}{7} & \frac{143}{105} & 3 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что матрица, содержащая средние арифметические значения элементов матриц экспертных предпочтений, равна $\frac{1}{4}P$. Матрица смежности соответствующего мажоритарного графа имеет вид:

$$R_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Граф отношения ρ_Σ изображен на рис. 1.12.

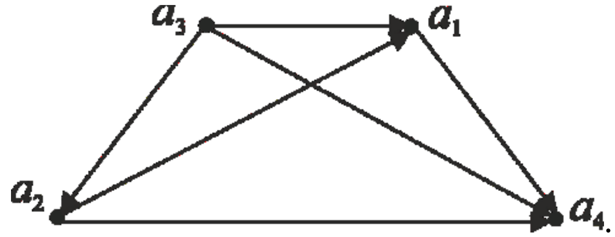

Рис. 1.12.

Граф не содержит контуров – его можно разбить на уровни с помощью алгоритма Демукрона (рис.1.13). Получим ранжирование всех альтернатив, начиная с наилучшей: $a_4 - a_1 - a_2 - a_3$.

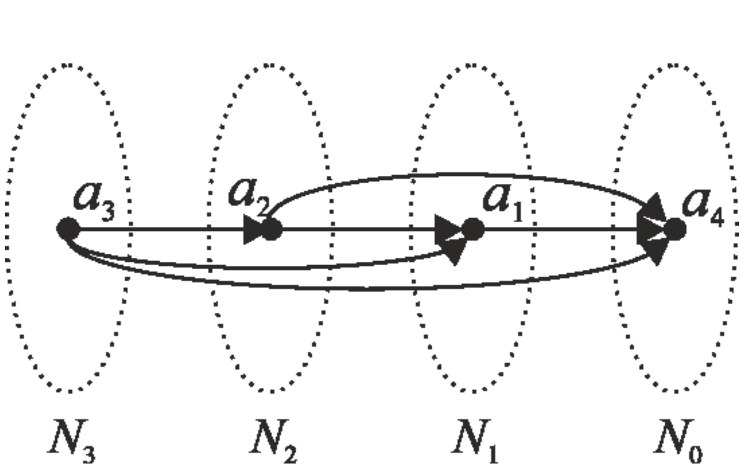

Рис. 1.13

Процедуры Коупленда (простая и модифицированная) дают то же самое упорядочение альтернатив.

Сравним агрегированное отношение, полученное на основе построения нагруженного мажоритарного графа с отношением, обеспечивающим минимальное суммарное расстояние до экспертных предпочтений по формуле (1.1) – сумма модулей, т.е. с медианными значениями соответствующих элементов. Для построения минимального отношения Q найдем медианы элементов матриц экспертных предпочтений. Матрица предпочтений отношения Q имеет вид:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{7} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{7} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{7} & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица смежности минимального отношения $R(Q)$ имеет вид:

$$R(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующий граф изображен на рис. 1.14. Граф содержит контуры. Для выбора наилучших альтернатив можно воспользоваться процедурой Коупленда. Получим $a_1(1),\ a_2(-1),\ a_3(-1), a_4(1)$. Наилучшие альтернативы по разности входящих в вершину и исходящих из нее дуг a_1 и a_4. Модифицированная процедура дает тот же результат.

Агрегированные отношения, построенные для средних арифметических и для медианных значений элементов матриц экспертных предпочтений, не совпадают. Хотя наилучшие альтернативы и в том и другом случае – a_1 и a_4. ■

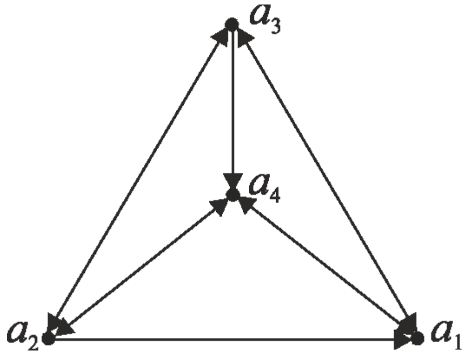

Рис. 1.14

1.7. Выводы по главе 1

1. Разработан алгоритм построения агрегированного отношения строгого порядка, максимально учитывающий индивидуальные предпочтения экспертов. Алгоритм основан на построении строгого нагруженного мажоритарного графа. Доказаны теоремы о непротиворечивости и единственности агрегированного отношения, а также утверждения о выполнении требований, предъявляемых к групповым решениям.

2. Разработан алгоритм агрегирования отношений квазипорядка. Алгоритм основан на построении нестрогого нагруженного мажоритарного графа. Доказаны теоремы о непротиворечивости и единственности агрегированного отношения квазипорядка.

3. Предложена методика агрегирования неоднородной экспертной информации. Разработаны алгоритмы построения агрегированных отношений строгого порядка и квазипорядка в случае, когда профиль индивидуальных предпочтений экспертов содержит численные оценки альтернатив. Доказана теорема о нахождении отношения, минимально удаленного от экспертных предпочтений.

ГЛАВА 2

Методика учета согласованности экспертной информации при агрегировании индивидуальных предпочтений

При решении задач группового выбора используются опыт и знания привлеченных экспертов. Но среди специалистов могут оказаться и такие, компетентность которых не вполне известна. В этом случае возникает необходимость в оценке их компетентности. В работах [34,36] подробно описаны методы оценки качества экспертов. Методика, предложенная в данном разделе, нацелена не только на оценку компетентности экспертов, но и на использование этих оценок при построении суммарного предпочтения. Методика построения агрегированного предпочтения допускает учет весовых коэффициентов, оценивающих компетентность экспертов. Коэффициенты могут быть заданы ЛПР или рассчитаны по специальной методике, предлагаемой в этой главе. В последнем случае ЛПР может задать не все весовые коэффициенты, а только указать их наименьшее и наибольшее значение. Проводится анализ влияния заданных коэффициентов на вид искомого упорядочения.

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим множество альтернатив $A = \{a_1,\ a_2, \dots , a_n\}$. Профиль индивидуальных предпочтений экспертов задан произвольными бинарными отношениями предпочтения $\rho_1,\ \rho_2, \dots , \rho_m$, определенными на множестве A.

Требуется

1) разработать методику оценки компетентности экспертов и алгоритм вычисления весовых коэффициентов участия экспертов в построении агрегированного отношения предпочтения;

2) разработать модифицированный алгоритм построения агрегированного предпочтения с учетом коэффициентов участия экспертов;

3) изучить зависимость вида агрегированного отношения от значений коэффициентов участия экспертов.

2.2. Нахождение коэффициентов участия экспертов в формировании агрегированного предпочтения

Профиль индивидуальных предпочтений экспертов задан произвольными бинарными отношениями предпочтения $\rho_1,\ \rho_2, \dots, \rho_m$ на множестве *A*. Оценим степень согласованности предпочтений экспертов.

Формализуем понятие согласованности отношения предпочтения одного из экспертов ρ_t (t=1, …, m) с отношениями предпочтения остальных экспертов $\{\rho_1,\ \rho_2, \dots, \rho_m\} \setminus \{\rho_t\}$.

Каждому отношению ρ_t (t=1, …, m) поставим в соответствие матрицу предпочтений $R^t = \left\| r_{ij}^t \right\|$ с элементами

$$r_{ij}^t = \begin{cases} 1, \text{если } a_i \text{ менее предпочтительна } a_j; \\ \frac{1}{2}, \text{если } a_i \text{ и } a_j \text{ равноценны;} \\ 0, \text{если } a_j \text{ менее предпочтительна } a_i \text{ или } a_i \text{ и } a_j \text{не сравнимы;} \end{cases}$$

Воспользуемся определением расстояния $d(\rho_t, \rho_k)$ между двумя отношениями ρ_t и ρ_k, предложенным в параграфе 1.3. Напомним, что величина $d(\rho_t, \rho_k)$ вычисляется по формуле (1.1):

$$d(\rho_k, \rho_t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| r_{ij}^k - r_{ij}^t \right|.$$

Значение величины $d(\rho_t, \rho_k)$ позволяет численно оценить степень согласованности между отношениями ρ_t и ρ_k, т.е. между t-м и k-м экспертами.

Для того, чтобы оценить согласованность предпочтений t-го эксперта со всеми остальными экспертами, введем величину $D(\rho_t)$, характеризующую суммарную удаленность отношения ρ_t от остальных из отношений $\rho_1,\ \rho_2, \dots, \rho_m$:

$$D(\rho_t) = \sum_{k=1}^{m} d(\rho_t, \rho_k). \qquad (2.1)$$

(Можно не оговаривать, что $t \neq k$, так как расстояние $d(\rho_t, \rho_t) = 0$.)

Подставляя поочередно в формулу (2.1) вместо ρ_t отношения ρ_1, $\rho_2, \dots, \rho_m$, получим значения величин $D(\rho_1),\ D(\rho_2), \dots, D(\rho_m)$. Эти величины выражают согласованность каждого из экспертов с остальными. Расположим эти величины в порядке убывания: $D(\rho_{i_1}),\ D(\rho_{i_2}), \dots, D(\rho_{i_m})$.

Естественно, эксперта, задавшего отношение ρ_{i_1}, считать наименее компетентным, так как величина $D(\rho_{i_1})$ – наибольшая. Отношение ρ_{i_m} лучше других согласовано с предпочтениями всех экспертов.

Приведем пример, демонстрирующий возможности предложенного метода для оценки компетентности экспертов.

Пример 2.1. Трем экспертам предложено ранжировать четыре альтернативы. Требуется оценить согласованность экспертных мнений ρ_1, ρ_2, ρ_3, т.е. найти величины $D(\rho_1)$, $D(\rho_2)$, $D(\rho_3)$, характеризующие суммарную удаленность каждого из отношений от двух других.

Множество альтернатив $A = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\}$. Профиль предпочтений экспертов – строгое ранжирование $\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3$:

ρ_1	ρ_2	ρ_3
a_2	a_3	a_4
a_3	a_4	a_1
a_1	a_1	a_2
a_4	a_2	a_3

Представим отношения ρ_1, ρ_2, ρ_3 в матричном виде. Напомним, что матрицы смежности и предпочтений для отношения строгого порядка совпадают.

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По формуле (1.1) вычислим величины $d(\rho_1,\ \rho_2) = 8$, $d(\rho_1,\ \rho_3) = 10$, $d(\rho_2,\ \rho_3) = 6$. Затем, воспользовавшись формулой (2.1), получим $D(\rho_1) = 18$, $D(\rho_2) = 14$, $D(\rho_3) = 16$.

Величины $D(\rho_i)$ (i*=1, 2, 3*) характеризуют компетентность экспертов. Наиболее компетентным является второй эксперт, т.к. значение величины $D(\rho_2) = 14$ – наименьшее. Наименее компетентен первый эксперт, т.к. значение величины $D(\rho_1) = 18$ – наибольшее. ■

Предложим два метода нахождения коэффициентов участия экспертов в формировании агрегированного отношения предпочтения.

Первый метод.

Первый метод не требует участия ЛПР и основывается на сохранении соотношения коэффициентов участия экспертов в соответствии с отношением величин $D(\rho_1),\ D(\rho_2), \dots, D(\rho_m)$.

Обозначим $D_1 = D(\rho_1), \dots, D_m = D(\rho_m)$. Вычислим коэффициенты участия экспертов из условия сохранения соотношений

$$\frac{k_i}{k_j} = \frac{D_j}{D_i}, i,j = 1, \dots, m \ \text{ и } \sum_{i=1}^{m} k_i = 1. \qquad (2.2)$$

Заметим, что, если предпочтения всех экспертов совпадают, то $D(\rho_1) = D(\rho_2) = \dots = D(\rho_m) = 0$. В этом случае эксперты имеют равную компетентность, и в качестве агрегированного предпочтения выбирается их общее мнение.

Утверждение 2.1. Коэффициенты участия экспертов, удовлетворяющие условию (2.2) сохранения отношений величин $D_1, \dots, D_m$, вычисляются по формулам

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{1}{D \cdot D_1} \\ k_2 = \dfrac{1}{D \cdot D_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k_{m-1} = \dfrac{1}{D \cdot D_{m-1}} \\ k_m = \dfrac{1}{D \cdot D_m}, \end{cases}$$

где $\frac{1}{D} = \frac{D_1 \times \ldots \times D_m}{D_2 \times \ldots \times D_m + \cdots + D_1 \times \ldots \times D_{m-1}}$.

Доказательство утверждения 2.1.

Для нахождения значений коэффициентов решим систему уравнений, сохраняющую отношение величин $D_1, \ldots, D_m$ ($D_i \neq 0, i = 1, \ldots, m$):

$$\begin{cases} \dfrac{k_1}{k_m} = \dfrac{D_m}{D_1} \\ \dfrac{k_2}{k_m} = \dfrac{D_m}{D_2} \\ \dots \\ \dfrac{k_{m-1}}{k_m} = \dfrac{D_m}{D_{m-1}} \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_m = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \dfrac{D_m}{D_1} k_m \\ k_2 = \dfrac{D_m}{D_2} k_m \\ \dots \\ k_{m-1} = \dfrac{D_m}{D_{m-1}} k_m \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_m = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = \dfrac{D_m}{D_1} k_m \\ k_2 = \dfrac{D_m}{D_2} k_m \\ \dots \\ k_{m-1} = \dfrac{D_m}{D_{m-1}} k_m \\ \dfrac{D_m}{D_1} k_m + \dfrac{D_m}{D_2} k_m + \cdots + k_m = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \dfrac{D_m}{D_1} k_m \\ k_2 = \dfrac{D_m}{D_2} k_m \\ \dots \\ k_{m-1} = \dfrac{D_m}{D_{m-1}} k_m \\ D_m \left(\dfrac{1}{D_1} + \dfrac{1}{D_2} + \cdots + \dfrac{1}{D_m} \right) k_m = 1. \end{cases}$$

Обозначим $\frac{1}{D} = \frac{D_1 \times \ldots \times D_m}{D_2 \times \ldots \times D_m + \cdots + D_1 \times \ldots \times D_{m-1}}$. Тогда $k_m = \frac{1}{D \cdot D_m}$, и окончательно имеем:

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{D \cdot D_1} \\ k_2 = \frac{1}{D \cdot D_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k_{m-1} = \frac{1}{D \cdot D_{m-1}} \\ k_m = \frac{1}{D \cdot D_m}. \end{cases} \quad \blacktriangle$$

В продолжение примера 2.1. вычислим значения коэффициентов участия экспертов для величин $D_1 = D(\rho_1) = 18$, $D_2 = D(\rho_2) = 14$, $D_3 = D(\rho_3) = 16$, полученных в примере 2.1. Имеем

$$D = \frac{1}{18} + \frac{1}{16} + \frac{1}{14} \approx 0{,}189484 \Rightarrow \begin{cases} k_1 \approx 0.2932 \\ k_2 \approx 0.3770 \\ k_3 \approx 0.3298 \end{cases}.$$

Второй метод.

Этот метод использует заданную ЛПР информацию о наименьшем и наибольшем значении коэффициентов участия экспертов в построении агрегированного предпочтения. Пусть найдены величины $D(\rho_1)$, $D(\rho_2), \dots, D(\rho_m)$. Найдем наибольшее значение этих величин $D_{\max}$ и наименьшее – $D_{\min}$. Зададим наибольшее и наименьшее значения весовых коэффициентов – соответственно $a \geq 0$ и $b > 0$. Фактически задается отрезок $[a, b]$, которому должны принадлежать коэффициенты $k_1,\ k_2, \dots, k_m$. Предлагается следующая формула для вычисления коэффициентов участия экспертов в формировании агрегированного упорядочения:

$$k_i = \frac{b-a}{D_{max} - D_{min}} (D_{max} - D_i) + a, \tag{2.3}$$

где $D_i = D(\rho_i)$.

Обозначим $\Delta = b - a$ и $\Delta_D = D_{max} - D_{min}$, формула (2.2) примет вид

$$k_i = \frac{\Delta}{\Delta_D} (D_{max} - D_i) + a. \tag{2.4}$$

Формулы (2.3) и (2.4) позволяют распределить коэффициенты участия экспертов на отрезке $[a, b]$ в соответствии с величинами $D(\rho_{i_1})$,

$D(\rho_{i_2}), \dots, D(\rho_{i_m})$. Подставляя значения этих величин, расположенных в порядке убывания, получим соответствующие коэффициенты участия экспертов k_{i_1}, $k_{i_2}, \dots, k_{i_m}$, расположенные в порядке возрастания. Причем, чем менее компетентен эксперт, тем меньше коэффициент его участия в формировании агрегированного предпочтения. Эксперту, у которого, $D_i = D_{max}$ соответствует минимальный коэффициент $k_{min} = k_{i_1} = a$; эксперту, у которого $D_i = D_{min}$, соответствует максимальный коэффициент $k_{max} = k_{i_m} = b$. Из формулы (2.4) следует, что для всех $D_j \neq D_{max}$ выполняется соотношение

$$\frac{k_i - k_{min}}{k_j - k_{min}} = \frac{D_{max} - D_i}{D_{max} - D_j}.$$

Таким образом, как и в первом методе, сохраняется отношение между весовыми коэффициентами и соответствующими им значениями величин, характеризующих согласованность экспертной информации. Но в данном методе в отношении учитывается расстояние от весовых коэффициентов до их заданного минимального значения $k_{min} = a$, а также расстояние между величинами $D_1, \dots, D_m$ и их наибольшим значением D_{max}. Причем величина D_{max} соответствует коэффициенту k_{min}.

2.3. Построение агрегированного отношения предпочтения при наличии коэффициентов участия экспертов

Модифицируем предложенные в параграфах 1.3 и 1.4 алгоритмы построения агрегированного отношения предпочтения с учетом задания коэффициентов участия экспертов.

Построение непротиворечивого агрегированного отношения предпочтения, согласованного с индивидуальными предпочтениями экспертов, состоит следующих этапов.

Алгоритм 2.1 построения агрегированного отношения предпочтения с учетом компетентности экспертов

1. Вычисление коэффициентов участия экспертов в построении агрегированного отношения $k_1,\ k_2, \dots, k_m$ по формулам

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{1}{D \cdot D_1} \\ k_2 = \dfrac{1}{D \cdot D_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k_{m-1} = \dfrac{1}{D \cdot D_{m-1}} \\ k_m = \dfrac{1}{D \cdot D_m}, \end{cases}$$

где $\frac{1}{D} = \frac{D_1 \times \ldots \times D_m}{D_2 \times \ldots \times D_m + \cdots + D_1 \times \ldots \times D_{m-1}}$.

2. Вычисление элементов матрицы суммарных предпочтений $P = \|p_{ij}\|$ по формуле

$$P = \sum_{t=1}^{m} k_t R^t.$$

3. Построение строгого или нестрогого (по желанию ЛПР) нагруженного мажоритарного графа с матрицами смежности $R_\Sigma = \|r_{ij}^\Sigma\|$ и весов $C = \|c_{ij}\|$ по формуле

$$c_{ij} = \begin{cases} p_{ij} - p_{ji}, & \text{если } \exists \text{ дуга} < a_i, a_j > \in \rho_\Sigma \\ \infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

4. Нахождение контуров мажоритарного графа и асимметричной части контуров по формулам $\rho_K = (\mathrm{Tr}\,\rho_\Sigma) \cap (\mathrm{Tr}\,\rho_\Sigma)^{-1} \cap \rho_\Sigma$ и $As\,\rho_K = Sym(\mathrm{Tr}\,\rho_\Sigma) \cap As\,\rho_\Sigma,\ Sym(\mathrm{Tr}\,\rho_\Sigma) = (\mathrm{Tr}\,\rho_\Sigma) \cap (\mathrm{Tr}\,\rho_\Sigma)^{-1}$.

В матричном виде

$R_K = \hat{R}_\Sigma \& (\hat{R}_\Sigma)^\mathsf{T} \& R_\Sigma, \quad AsR_K = Sym(\mathrm{Tr}\,R_\Sigma) \cap AsR_\Sigma.$

5. Разрушение противоречивых контуров мажоритарного графа путём удаления из отношения $As\,\rho_K$ всех дуг, имеющих минимальный вес

(алгоритмы 1.1 и 1.2). Отношение ρ соответствует графу, не содержащему противоречивых контуров.

6. Построение агрегированного отношения $\hat{\rho}$ строгого порядка или квазипорядка по формуле $\hat{\rho} = \mathrm{Tr}\,\rho$, или (с учетом рефлексивности квазипорядка) $\hat{\rho} = e \cup \mathrm{Tr}\,\rho$. В матричном виде: $\hat{R} = \mathrm{Tr}\,R$ или $\hat{R} = E \vee \mathrm{Tr}\,R$ (E – единичная матрица).

Замечание. Коэффициенты участия экспертов в построении агрегированного отношения $k_1, k_2, \ldots, k_m$ можно по желанию ЛПР вычислить с учетом задания наименьшего и наибольшего значения коэффициентов, т.е. фактически задать для них отрезок $[a; b]$. В этом случае коэффициенты вычисляются по формуле

$$k_i = \frac{b-a}{D_{max} - D_{min}}(D_{max} - D_i) + a,$$

где D_{min} – наименьшее, D_{max} – наибольшее значение величин $D(\rho_1)$, $D(\rho_2), \ldots, D(\rho_m)$.

Пример 2.2. Построим агрегированное отношение, соответствующее строгому мажоритарному графу, для профиля экспертных предпочтений, заданного в примере 2.1 с учетом весовых коэффициентов участия, сохраняющих отношения величин $D_1 = D(\rho_1), \ldots, D_m = D(\rho_m)$ (первый метод).

Для величин $D_1 = D(\rho_1) = 18$, $D_2 = D(\rho_2) = 14$, $D_3 = D(\rho_3) = 16$, полученных в примере 2.1, имеем:

$$D = \frac{1}{18} + \frac{1}{16} + \frac{1}{14} \approx 0{,}189484 \Rightarrow \begin{cases} k_1 \approx 0.2932 \\ k_2 \approx 0.3770 \\ k_3 \approx 0.3298 \end{cases}$$

Вычислим матрицу суммарных предпочтений $P = k_1R^1 + k_2R^2 + k_3R^3$:

$$P = 0.29\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 0.38\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 0.33\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.29 & 0.67 & 0.71 \\ 0.71 & 0 & 0.38 & 0.71 \\ 0.33 & 0.62 & 0 & 0.33 \\ 0.29 & 0.29 & 0.67 & 0 \end{pmatrix}.$$

С ее помощью вычислим матрицу весов:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 0.34 & 0.42 \\ 0.42 & \infty & \infty & 0.42 \\ \infty & 0.24 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0.34 & \infty \end{pmatrix}.$$

Матрица смежности графа отношения ρ_Σ имеет вид:

$$R_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Построим матрицу смежности Q_Σ отношения, соответствующего дугам мажоритарного графа, без учета компетентности экспертов (все коэффициенты участия равны единице). В этом случае матрица суммарных предпочтений и матрицы весов и смежности мажоритарного графа имеют вид:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 1 & 1 \\ 1 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 1 & \infty \end{pmatrix}, Q_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычисленные по первому методу коэффициенты различаются незначительно, и их учет не повлиял на вид агрегированного отношения предпочтения. ■

Проанализируем, какое влияние на вид агрегированного отношения могут оказать коэффициенты участия, вычисленные по второму методу.

2.4. Влияние выбора отрезка для нахождения коэффициентов участия экспертов на вид агрегированного отношения предпочтения

Согласно алгоритму нахождения весовых коэффициентов участия экспертов в формировании агрегированного предпочтения от ЛПР требуется указать наименьшее и наибольшее значения коэффициентов участия экспертов, т. е. выбрать отрезок $[a;b]$, которому принадлежат коэффициенты. Проанализируем влияние границ интервала a и b (наименьшее и наибольшее значения коэффициентов участия) на отношение ρ_Σ, соответствующее мажоритарному графу.

Следующий пример демонстрирует, что выбор различных отрезков для коэффициентов участия экспертов может существенным образом повлиять на отношение ρ_Σ.

Пример 2.3. По заданному в примере 2.1 профилю индивидуальных предпочтений экспертов построим агрегированные отношения, соответствующие строгим мажоритарным графам,

1) без учета компетентности экспертов;

2) с учетом компетентности экспертов, т.е. с вычислением коэффициентов участия экспертов по методу 2 – задание наименьшего и наибольшего весового коэффициента.

Проведем сравнение отношений предпочтения, построенных с различными коэффициентами участия экспертов. Различные коэффициенты будем получать, предлагая разные отрезки для выбора коэффициентов.

1) Из примера 2.2 матрица смежности Q_Σ отношения, соответствующего дугам мажоритарного графа, без учета компетентности экспертов (все коэффициенты участия равны единице) имеет вид:

$$Q_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Воспользуемся вычисленными в примере 2.1 величинами $D(\rho_1) = 18$, $D(\rho_2) = 14$, $D(\rho_3) = 16$. В этом случае $D_{max} = 18$, а $D_{min} = 14$. Зададим наименьшее и наибольшее значение коэффициентов: 1 и 2, т.е. отрезок $[1;2]$. Тогда, $a = 1,\ b = 2,\ \Delta = b - a = 1$. Воспользовавшись формулой (2.4), вычислим: $k_1 = 1,\ k_2 = 2,\ k_3 = 1.5$. Затем найдем матрицу суммарных предпочтений: $P = k_1R^1 + k_2R^2 + k_3R^3$.

$$P = 1\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 1.5\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 3.5 \\ 3.5 & 0 & 2 & 3.5 \\ 1.5 & 2.5 & 0 & 1.5 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

С ее помощью вычислим матрицу весов и матрицу смежности графа отношения $\rho_{\Sigma 1}$:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 1.5 & 2.5 \\ 2.5 & \infty & \infty & 2.5 \\ \infty & 0.5 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 1.5 & \infty \end{pmatrix},\ R_{\Sigma 1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица смежности Q_Σ мажоритарного графа, построенного без учета компетентности экспертов, совпадает с матрицей смежности $R_{\Sigma 1}$ мажоритарного графа, использующего коэффициенты участия экспертов. Таким образом, задание коэффициентов участия не изменило отношение, соответствующее мажоритарному графу. Заметим, что данное отношение противоречиво – мажоритарный граф имеет контуры (рис. 2.1). Следовательно, для выбора наилучших альтернатив необходимо разрушить контуры, используя один из предложенных в первой главе алгоритмов построения непротиворечивого агрегированного отношения предпочтения.

Изменим наибольшее значение коэффициентов с двойки на пятерку, т.е. увеличим длину отрезка $[a; b]$ на три: $[a; b] = [1; 5]$. Тогда, $a = 1,\ b = 5$, $\Delta = 4$. Воспользовавшись формулой (2.4), вычислим: $k_1 = 1,\ k_2 = 5,\ k_3 = 3$. Найдем матрицу суммарных предпочтений: $P = k_1R^1 + k_2R^2 + k_3R^3$.

$$P = 1\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & 8 \\ 8 & 0 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

С ее помощью вычислим матрицу весов и матрицу смежности графа отношения $\rho_{\Sigma 2}$:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 3 & 7 \\ 7 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 3 & \infty \end{pmatrix}, \; R_{\Sigma 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы смежности $R_{\Sigma 1}$ и $R_{\Sigma 2}$ соответствующих мажоритарных графов не совпали, причем отношение, соответствующее матрице $R_{\Sigma 2}$ не содержит контуров (рис.2.2), следовательно, непротиворечиво. Таким образом, при фиксированном значении начала отрезка увеличение его длины привело к изменению мажоритарного графа.

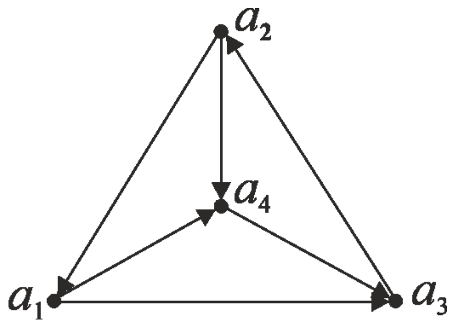

Рис. 2.1

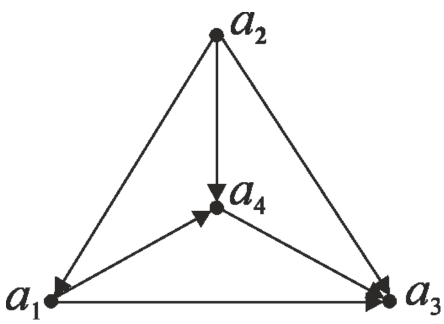

Рис. 2.2

Изменим теперь начало отрезка, т. е. значение величины a: положим $a = 0$, при этом не будем изменять длину отрезка $\Delta = 1$. В этом случае $b = 1$, т.е. задан отрезок [0;1]. Воспользовавшись формулой (2.3), вычислим: $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = 0.5$. Матрица предпочтений имеет вид:

$$P = 0\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 0.5\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1.5 \\ 1.5 & 0 & 1 & 1.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу весов и матрицу смежности графа отношения $\rho_{\Sigma 3}$:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 0.5 & 1.5 \\ 1.5 & \infty & 0.5 & 1.5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0.5 & \infty \end{pmatrix},\ R_{\Sigma 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы предпочтений $R_{\Sigma 1}$ и $R_{\Sigma 3}$ соответствующих отношений не совпали, но $R_{\Sigma 3} = R_{\Sigma 2}$. Следовательно, отношение $\rho_{\Sigma 3}$ не противоречиво так же, как и $\rho_{\Sigma 2}$. ■

Пример 2.3 показывает, что значительное отличие наименьшего и наибольшего значения коэффициентов участия могут существенным образом повлиять на вид агрегированного отношения предпочтения.

Проанализируем в общем случае влияние коэффициентов участия экспертов на вид отношения предпочтения, соответствующего нестрогому мажоритарному графу. Соотношения, аналогичные полученным ниже, будут выполняться и для строгого мажоритарного графа. По алгоритму построения равные симметричные элементы матриц экспертных предпочтений ($r_{ij}^t = r_{ji}^t$; i,j=1, ..., n; t=1, …, m) не влияют на вид матрицы смежности нестрогого мажоритарного графа при задании весовых коэффициентов.

Обозначим $Q_\Sigma = \left\| q_{ij}^\Sigma \right\|$ матрицу смежности отношения, соответствующего мажоритарному графу, построенному без учета компетентности экспертов, т.е. все коэффициенты участия равны единице; а $R_\Sigma = \left\| r_{ij}^\Sigma \right\|$ – с учетом коэффициентов участия, вычисленных по формуле (2.3). Если в матрице Q_Σ существуют элементы $q_{ij}^\Sigma = q_{ji}^\Sigma = 1$, то из построения суммарного предпочтения следует, что $\sum_{t=1}^m r_{ij}^t = \sum_{t=1}^m r_{ji}^t$. Для определенности расположим экспертов таким образом, что для предпочтений первых s экспертов $r_{ij}^t = 1$, $r_{ji}^t = 0$ (t=1,…,s), а для следующих s экспертов $r_{ji}^t = 1$, $r_{ij}^t = 0$ (t=s+1,…, 2s), для оставшихся экспертов $r_{ij}^t = r_{ji}^t = \frac{1}{2}$ или $r_{ij}^t = r_{ji}^t = 0$. По формуле (2.4) найдем коэффициенты участия экспертов.

Возможны следующие три случая.

1. $\sum_{l=1}^{s} k_l = \sum_{l=s+1}^{2s} k_l$. В этом случае задание коэффициентов участия экспертов не изменит элементы $r_{ij}^{\Sigma} = r_{ji}^{\Sigma} = 1$ матрицы смежности отношения, соответствующего мажоритарному графу с учетом весовых коэффициентов участия экспертов.

2. $\sum_{l=1}^{s} k_l > \sum_{l=s+1}^{2s} k_l$. В этом случае будет выполняться: $r_{ij}^{\Sigma} = 1$, $r_{ji}^{\Sigma} = 0$.

3. $\sum_{l=1}^{s} k_l < \sum_{l=s+1}^{2s} k_l$. В этом случае $r_{ij}^{\Sigma} = 0$, $r_{ji}^{\Sigma} = 1$.

Изучим влияние отрезка $[a;\, b]$ при вычислении коэффициентов участия экспертов по формулам (2.2) и (2.3) на полученные выше соотношения, согласно случаям 1, 2, 3. Представим отрезок $[a;\, b]$ в виде $[a;\ a + \Delta]$, где Δ – длина отрезка. Проделаем следующие преобразования:

$$\sum_{l=1}^{s} k_l - \sum_{l=s+1}^{2s} k_l = \sum_{l=1}^{s} \left(\frac{\Delta}{\Delta_D}(D_{max} - D_l) + a\right) - \sum_{l=s+1}^{2s} \left(\frac{\Delta}{\Delta_D}(D_{max} - D_l) + a\right) =$$

$$= s\frac{\Delta}{\Delta_D} D_{max} - \frac{\Delta}{\Delta_D} \sum_{l=1}^{s} D_l + sa - s\frac{\Delta}{\Delta_D} D_{max} + \frac{\Delta}{\Delta_D} \sum_{l=s+1}^{2s} D_l - sa$$

$$= \frac{\Delta}{\Delta_D} \sum_{l=1}^{s} (D_{s+l} - D_l).$$

Утверждение 2.2. Если в матрице смежности Q_{Σ} мажоритарного графа, построенного без учета различий в компетентности экспертов, существуют элементы $q_{ij}^{\Sigma} = q_{ji}^{\Sigma}$=1 , то значения элементов r_{ij}^{Σ} и r_{ji}^{Σ} матрицы предпочтений R_{Σ} с учетом коэффициентов участия экспертов, не зависят от выбора отрезка $[a;\ b]$ для вычисления этих коэффициентов.

Доказательство утверждения 2.2. Из полученных выше результатов имеем

$$\sum_{l=1}^{s} k_l - \sum_{l=s+1}^{2s} k_l = \frac{\Delta}{\Delta_D}\sum_{l=1}^{s}(D_{s+l} - D_l). \qquad (2.5)$$

Так как длина отрезка $\Delta > 0$, то правая часть равенства (2.5) может быть больше, меньше или равна нулю независимо от выбора отрезка $[a;\ a + \Delta]$. Из соотношений 1, 2, 3 следует, что выбор отрезка не повлияет и на значения элементов r_{ij}^{Σ} и r_{ji}^{Σ} матрицы R_{Σ}. ▲

Рассмотрим случай, когда в матрице Q_{Σ} (без учета различий в компетентности экспертов) существуют элементы $q_{ij}^{\Sigma} = 1,\ q_{ji}^{\Sigma}$=0. Выберем отрезок $[a;\ a + \Delta]$ для нахождения коэффициентов участия экспертов. Справедлива следующая теорема.

Утверждение 2.3. Для любой длины отрезка Δ существует такое значение a начала отрезка, при котором элементы матрицы смежности $q_{ij}^{\Sigma} = 1,\ q_{ji}^{\Sigma} = 0$ мажоритарного графа, построенного без учета различий в компетентности экспертов, не изменятся и при задании коэффициентов участия экспертов ($i, j \epsilon \{1, \ldots, n\}$).

Доказательство утверждения 2.3. Пусть $q_{ij}^{\Sigma} = 1,\ q_{ji}^{\Sigma} = 0$. Причем для определенности расположим экспертов таким образом, что для первых s экспертов $r_{ij}^{l} = 1, r_{ji}^{l} = 0$ (l=1,…,s), а для следующих t экспертов $r_{ji}^{l} = 1, r_{ij}^{l} = 0$ (l=s+1, …, s+t). Так как $q_{ij}^{\Sigma} = 1,\ q_{ji}^{\Sigma} = 0$, то $s > t$.

Возможны следующие три случая.

1. $\sum_{l=1}^{s} k_l = \sum_{l=1}^{t} k_{s+l}$. В этом случае $r_{ij}^{\Sigma} = r_{ji}^{\Sigma} = 1$.

2. $\sum_{l=1}^{s} k_l > \sum_{l=1}^{t} k_{s+l}$. Следовательно, $r_{ij}^{\Sigma} = 1,\ r_{ji}^{\Sigma} = 0$.

3. $\sum_{l=1}^{s} k_l < \sum_{l=1}^{t} k_{s+l}$. Следовательно, $r_{ij}^{\Sigma} = 0,\ r_{ji}^{\Sigma} = 1$.

Проанализируем влияние выбора отрезка $[a;\ a + \Delta]$ на соотношения 1, 2, 3. Рассмотрим разность

$$\Omega = \sum_{l=1}^{s} k_l - \sum_{l=1}^{t} k_{s+l} =$$

$$= \sum_{l=1}^{s} \left(\frac{\Delta}{\Delta_D} (D_{max} - D_l) + a \right) - \sum_{l=1}^{t} \left(\frac{\Delta}{\Delta_D} (D_{max} - D_{s+l}) + a \right) =$$

$$= s \frac{\Delta}{\Delta_D} D_{max} - \frac{\Delta}{\Delta_D} \sum_{l=1}^{s} D_l + sa - t \frac{\Delta}{\Delta_D} D_{max} + \frac{\Delta}{\Delta_D} \sum_{l=1}^{t} D_{s+l} - ta$$

Окончательно получаем:

$$\Omega = (s-t) \frac{\Delta}{\Delta_D} D_{max} - \frac{\Delta}{\Delta_D} \left(\sum_{l=1}^{s} D_l - \sum_{l=1}^{t} D_{s+l} \right) + (s-t)a \qquad (2.6)$$

Для того, чтобы введение коэффициентов участия экспертов не изменило элементы $q_{ij}^{\Sigma} = 1$, q_{ji}^{Σ}=0, очевидно, необходимо выполнение условия $\Omega > 0$. Получим

$$(s-t) \frac{\Delta}{\Delta_D} D_{max} - \frac{\Delta}{\Delta_D} \left(\sum_{l=1}^{s} D_l - \sum_{l=1}^{t} D_{s+l} \right) + (s-t)a > 0 \qquad (2.7)$$

Так как по условию $(s-t) > 0$, то, разделив неравенство (2.7) на $(s-t)$, найдем условие на величину a (наименьшее значение коэффициентов участия экспертов), при выполнении которого элементы $q_{ij}^{\Sigma} = 1$, $q_{ji}^{\Sigma} = 0$ не изменятся. А именно: выберем

$$a > \frac{\Delta}{\Delta_D} \left(\frac{1}{s-t} \left(\sum_{l=1}^{s} D_l - \sum_{l=1}^{t} D_{s+l} \right) - D_{max} \right) \qquad (2.8)$$

По формуле (2.8) найдем условия на величину начала отрезка a для всех элементов матрицы Q_{Σ}. Выбрав наибольшее значение a, получим: утверждение 2.3 справедливо. ▲

Очевидно, что, если $q_{ij}^{\Sigma} = q_{ji}^{\Sigma} = 0$, то всегда и $r_{ij}^{\Sigma} = r_{ji}^{\Sigma} = 0$.

Из доказательства утверждения 2.2 следует: чем больше значение величины a – начала отрезка для выбора коэффициентов участия экспертов, тем больше вероятность того, что агрегированное отношение, построенное без учета компетентности экспертов, не изменится. Следовательно, чтобы максимально изменить отношение, надо задать минимально возможное значение a, т.е. $a = 0$. Учтем, что при $a = 0$ мнение эксперта, имеющего максимальное расхождение с другими экспертами, вообще не будет учтено. Коэффициент участия этого эксперта в построении агрегированного предпочтения согласно формуле (2.2) будет равен нулю.

Рассмотрим подробнее случай, когда $a = 0$. Из формулы (2.2) следует, что значение наименьшего коэффициента участия экспертов (одного или нескольких) равно a. Следовательно, при $a = 0$ индивидуальные предпочтения одного или нескольких наименее компетентных экспертов не будут учтены при построении агрегированного предпочтения.

Подставим $a = 0$ в формулу (2.6), получим

$$\Omega = (s-t)\frac{\Delta}{\Delta_D}D_{max} - \frac{\Delta}{\Delta_D}\left(\sum_{l=1}^{s} D_l - \sum_{l=1}^{t} D_{s+l}\right).$$

Или

$$\Omega = \Delta\left[(s-t)\frac{1}{\Delta_D}D_{max} - \frac{1}{\Delta_D}\left(\sum_{l=1}^{s} D_l - \sum_{l=1}^{t} D_{s+l}\right)\right] \qquad (2.9)$$

Из формулы (2.9) следует справедливость следующей теоремы.

Утверждение 2.4. Длина Δ отрезка $[a;\ b]$ при $a = 0$ не влияет на вид мажоритарного графа.

Доказательство утверждения 2.4. В формуле (2.9) знак Ω не зависит от длины интервала Δ, и следовательно значение величины Δ не влияет на вид мажоритарного графа. ▲

Из *утверждения* 2.4 следует, что длина Δ отрезка $[a;\ b]$ при $a = 0$ не влияет и на вид агрегированного отношения предпочтения.

Пример 2.4 демонстрирует, что выбор отличных по величине отрезков для коэффициентов участия экспертов в случае, когда начало отрезка $a = 0$ не влияет на отношение ρ_Σ.

Пример 2.4. Воспользуемся отношениями ρ_1, ρ_2, ρ_3 из примера 2.1 и соответствующими матрицами предпочтений R^1, R^2, R^3. По формуле (2.1) получены величины $\mathrm{D}(\rho_1) = 18$, $D(\rho_2) = 14$, $D(\rho_3) = 16$. Для нахождения коэффициентов участия экспертов выберем отрезок $[a;\ b]$, у которого $a = 0$. Положим длину отрезка $\Delta = 1$, тогда $b = 1$, т.е. зададим отрезок [0; 1]. Воспользовавшись вычислениями из примера 2.3, получим: $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = 0.5$. Матрица суммарных предпочтений будет иметь вид:

$$P = 0\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 0.5\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1.5 \\ 1.5 & 0 & 1 & 1.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда матрица весов и матрица смежности мажоритарного графа имеют вид:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 0.5 & 1.5 \\ 1.5 & \infty & 0.5 & 1.5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0.5 & \infty \end{pmatrix},\ R_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оставим по-прежнему $a = 0$, но увеличим длину отрезка $[a;\ b]$. Пусть, например, $\Delta = 4$. В этом случае получим $b = 4$. Вычислим по формуле (2.4) коэффициенты участия экспертов: $k_1 = 0$, $k_2 = 4$, $k_3 = 2$. Тогда

$$P = 0\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что матрица предпочтений R_Σ в этом случае не изменится.■

Естественным требованием, часто встречающимся при введении весовых коэффициентов для оценки важности каких-либо объектов, является их нормирование. В этом случае для коэффициентов участия экспертов должно выполняться условие

$$\sum_{t=1}^{m} k_t = 1, \tag{2.10}$$

где m – число экспертов.

Покажем на следующем примере, что нормирование коэффициентов участия экспертов, вычисленных по формуле (2.3) для разных отрезков $[a;\ b]$, приводит к получению разных значений коэффициентов участия.

Пример 2.5. Для индивидуальных предпочтений ρ_1, ρ_2, ρ_3 из примера 2.1 были получены величины $D(\rho_1) = 18$, $D(\rho_2) = 14$, $D(\rho_3) = 16$. Для нахождения весовых коэффициентов участия выберем два различных отрезка, например, [1; 2] и [1; 5]. Воспользовавшись формулой (2.3), для отрезка [1; 2] получим: $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 1{,}5$. Разделив каждый из коэффициентов на их сумму $\sum_{t=1}^{3} k_t$ =4,5, получим соответствующие нормированные коэффициенты $\bar{k}_1 = \frac{2}{9}$, $\bar{k}_2 = \frac{4}{9}$, $\bar{k}_3 = \frac{1}{3}$. Для отрезка [1; 5]: $k_1 = 1$, $k_2 = 5$, $k_3 = 3$. Разделив на сумму $\sum_{t=1}^{3} k_t =$ 9, получим $\bar{k}_1 = \frac{1}{9}$, $\bar{k}_2 = \frac{5}{9}$, $\bar{k}_3 = \frac{1}{3}$. ■

Рассмотрим частный случай, положив границы отрезка $[a; b]$ равными величинам $D_{\min}$ и $D_{\max}$ соответственно, т. е. $a = D_{\min}$, $b = D_{\max}$. Тогда формула (2.2) примет вид

$$k_t = \frac{D_{\max} - D_{\min}}{D_{\max} - D_{\min}} \left(D_{\max} - D_t \right) + D_{\min} .$$

И, следовательно,

$$k_t = \left(D_{\max} - D_t\right) + D_{\min} = D_{\max} + D_{\min} - D_t. \tag{2.11}$$

Нормируем коэффициенты $k_1,...,k_m$, разделив на сумму

$$\sum_{t=1}^{m} k_t = \sum_{t-1}^{m} (D_{\max} + D_{\min} - D_t) = \sum_{t-1}^{m} (D_{\max} + D_{\min}) - \sum_{t=1}^{m} D_t = m(D_{\max} + D_{\min}) - \sum_{t=1}^{m} D_t .$$

Получим

$$\bar{k}_t = \frac{D_{\max} + D_{\min} - D_t}{m(D_{\max} + D_{\min}) - \sum_{i=1}^{m} D_i}, \tag{2.12}$$

(t=1,… , m).

Для коэффициентов $\bar{k}_1,...,\bar{k}_m$ очевидно выполняется соотношение (2.10).

Использование формул (2.11) и (2.12) при построении агрегированного упорядочения основывается на автоматическом выборе отрезка, зависящего от расхождений экспертных мнений: $a = D_{\min}$, $b = D_{\max}$. Но в случае, когда построенное отношение по тем или иным причинам не удовлетворяет лицо, принимающее решения (ЛПР), для вычисления коэффициентов участия экспертов можно воспользоваться формулой (2.4). Варьируя отрезком $[a;b]$, будем получать различные коэффициенты участия экспертов, которые в свою очередь могут изменить вид агрегированного отношения предпочтения. В интерактивном режиме с ЛПР процесс может быть продолжен до тех пор, пока не будет получен желаемый результат. Напомним, что наибольшие изменения агрегированного предпочтения возможны при a =0.

Пример 2.6. Для индивидуальных предпочтений ρ_1, ρ_2, ρ_3, заданных матрицами

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

по формулам (2.1) и (2.2) получены величины $D(\rho_1)=18$, $D(\rho_2)=14$, $D(\rho_3)=16$. Для вычисления нормированных коэффициентов участия экспертов, не зависящих от отрезка $[a;b]$, воспользуемся формулой (2.12). Получим: $\bar{k}_1=\frac{7}{24}$, $\bar{k}_2=\frac{3}{8}$, $\bar{k}_3=\frac{1}{3}$, матрица суммарных предпочтений имеет вид:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{24} & \frac{2}{3} & \frac{17}{24} \\ \frac{17}{24} & 0 & \frac{3}{8} & \frac{17}{24} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{8} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{24} & \frac{7}{24} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}. \text{ Следовательно, } \quad R_\Sigma=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сравним эту матрицу с матрицей смежности Q_Σ отношения, построенного в примере 2.2 без учета коэффициентов участия экспертов. Матрицы Q_Σ и R_Σ совпадают. В примере 2.2 продемонстрировано, что путем подбора отрезка $[a;b]$ для коэффициентов участия, отношение предпочтения, соответствующее мажоритарному графу, можно изменить, в частности сделать непротиворечивым. ■

Ранее было показано, что вид агрегированного упорядочения зависит от выбора отрезка $[a;b]$ для коэффициентов участия экспертов. Докажем, что вид суммарного предпочтения не зависит от того нормированы коэффициенты участия или нет.

Утверждение 2.5. При нормировании коэффициентов участия экспертов мажоритарный граф не изменится по сравнению с мажоритарным графом для ненормированных коэффициентов.

Доказательство утверждения 2.5 следует из того факта, что матрицы суммарных предпочтений, построенные для нормированных и ненормированных коэффициентов, отличаются только множителем $\frac{1}{\sum_{t=1}^{m} k_t}$.

Действительно, матрица суммарных предпочтений $\overline{P}$, построенная для нормированных коэффициентов участия экспертов, через матрицу P, построенную для ненормированных коэффициентов, выражается следующим образом:

$$\overline{P} = \sum_{i=1}^{m} \frac{k_i}{\sum_{t=1}^{m} k_t} R^i = \frac{1}{\sum_{t=1}^{m} k_t} \sum_{i=1}^{m} k_i \, R^i = \frac{1}{\sum_{t=1}^{m} k_t} P.$$

Очевидно, что умножение матрицы суммарных предпочтений на любое число не изменит матрицу смежности мажоритарного графа.▲

Таким образом, агрегированное отношение предпочтения, построенное с учетом компетентности экспертов, зависит от выбора отрезка для коэффициентов участия экспертов. Для ненулевого значения начала отрезка существенное значение оказывает величина длины отрезка, так как это влияет на разброс коэффициентов. С увеличением длины отрезка возрастает вероятность изменения мажоритарного графа, построенного без учета весовых коэффициентов участия экспертов в построении агрегированного предпочтения. Выбор длины отрезка, а тем самым и степени различия компетентности экспертов, полностью возлагается на мнение ЛПР. При этом будем иметь в виду, что получить желаемый результат, обычно это разрушение контуров мажоритарного графа, с помощью варьирования коэффициентов участия экспертов не всегда возможно (см. теоремы 2.1 и 2.2). Построить агрегированное отношение предпочтения, не содержащее противоречивых контуров можно воспользовавшись алгоритмами главы 1. Еще одним способом изменения агрегированного предпочтения может служить замена состава экспертов. При этом рекомендуется заменять не всех экспертов, а только тех, кто имеет низкий уровень компетентности.

2.5. Выводы по главе 2

1. Разработана методика оценки компетентности экспертов. Предложены формулы для вычисления коэффициентов участия экспертов в построении агрегированного отношения предпочтения.

2. С учетом различий в компетентности экспертов разработаны модифицированные алгоритмы построения агрегированных отношений предпочтения, являющихся строгим порядком или квазипорядком.

3. Проведен анализ влияния выбора интервала для вычисления коэффициентов участия экспертов на вид агрегированного отношения предпочтения.

4. Предложена методика агрегирования предпочтений в многокритериальных задачах.

ГЛАВА 3

Применение алгоритмов агрегирования для решения многокритериальных задач

При принятии решений задачи многокритериального выбора являются одним из самых распространенных типов задач. Выбор наилучших альтернатив в этих задачах осуществляется на основе оценок вариантов решений по критериям качества. Рассматриваемые альтернативы могут различаться, например, по стоимости, весу, надежности, удобству эксплуатации и т.п. Среди большого числа существующих в настоящее время методов и алгоритмов решения многокритериальных задач следует особо отметить работы Ларичева О.И. [24,27,30,31,39,49,51], Подиновского В.В. [4,26,28,29,52,81,87], а также работы [1,2,14,61,88,89]. Среди зарубежных авторов выделим классика теории полезности Фишберна П. [82], а также работы [5,13,20,22,40,53,54,83,90,94,104]. Особое место занимает теория Кини Р.Л. и Райфа Х. [22], имеющая как большое теоретическое, так и практическое значение. При разработке алгоритмов принятия решений уделяется внимание вероятностным оценкам сравнимости альтернатив, возможности построения непротиворечивого агрегированного отношения и выбора наилучших альтернатив [12,18,37,45].

Традиционные алгоритмы выбора оптимальных вариантов решений преимущественно основываются на задании численных оценок альтернатив по критериям. В связи с этим возникают трудности в оценке таких характеристик вариантов решений, как удобство, надежность и т.п. Кроме того, для применения алгоритмов принятия решений обычно возникает потребность в приведении всех критериев к единой шкале – процедуре сложной и неоднозначной. В последнее время широкое распространение получили вербальные методы сравнения альтернатив без задания численных оценок по критериям [27,30,55].

В данном разделе используется методика непротиворечивого агрегирования предпочтений, позволяющая осуществить оптимальный выбор альтернатив на основе информации о предпочтениях по критериям с числовыми и нечисловыми шкалами одновременно. Методика работает и для случая, когда часть оценок альтернатив отсутствует, что часто встречается в практических задачах.

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим множество альтернатив $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, множество критериев $K = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$ и множество шкал критериев $X = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$. По каждому из критериев K_i, ($i = \overline{1..m}$) информация об альтернативах может быть задана одним из следующих способов:

1) численными оценками альтернатив по шкале критерия;

2) качественными оценками альтернатив;

3) произвольным бинарным отношением на множестве альтернатив A, характеризующим предпочтения ЛПР по данному критерию.

Требуется построить агрегированное отношение предпочтения, являющееся строгим порядком или квазипорядком.

Значения оценок по числовым шкалам критериев обычно минимизируются или максимизируются. Например, стоимость альтернативы обычно минимизируется, а скорость – максимизируется. Существуют шкалы, у которых наилучшие и худшие оценки зависят от предпочтений ЛПР, например, месторасположение альтернативы, если выбирается предприятие общественного питания. Предпочтения по шкалам могут быть заданы отношениями предпочтения $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ на множестве альтернатив, в частности, попарным сравнением, ранжированием альтернатив или выбором множества наилучших альтернатив. Качественные оценки альтернатив, например, «плохо», «хорошо», «отлично», могут быть переведены в балльные (числовые) или в отношения предпочтения.

На основе информации о предпочтениях альтернатив по критериям качества построим матрицы предпочтений. Построение матриц предпочтения в случае задания отношений $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ на множестве альтернатив подробно описано в первой главе.

Матрица предпочтений R^t в случае, когда заданы оценки альтернатив по критерию K_t ($t \in \{1,\dots,m\}$) вектором $x^t = (x_1^t, x_2^t, \dots, x_n^t)$ с неотрицательными действительными компонентами, формируется следующим образом. $R^t = \left\| r_{ij}^t \right\|$ (t=1,…,m, m – число экспертов) – квадратная матрица порядка n (n – число альтернатив, $i, j = 1, \dots, n$) с элементами

$$r_{ij}^t = \begin{cases} \dfrac{x_j^t}{x_i^t + x_j^t}, \text{если значения оценок по шкале } K_t \text{ максимизируются,} \\ \dfrac{x_i^t}{x_i^t + x_j^t}, \text{если значения оценок по шкале } K_t \text{ минимизируются,} \end{cases}$$

при $i \neq j$; и $r_{ii}^t = 1$. Причем, если $x_i^t = 0$ и $x_j^t = 0$, то $r_{ij}^t = r_{ji}^t = \frac{1}{2}$ $(i \neq j)$.

Заметим, что для элементов матрицы предпочтений R^t, построенной для критерия K_t, выполняется:

1) $$\frac{r_{ij}^t}{r_{ji}^t} = \begin{cases} \dfrac{x_j^t}{x_i^t}, \text{если значения оценок по шкале } K_t \text{ максимизируются,} \\ \dfrac{x_i^t}{x_j^t}, \text{если значения оценок по шкале } K_t \text{ минимизируются,} \end{cases}$$

– сохраняется информация о том, во сколько раз альтернатива a_j предпочтительнее альтернативы a_i;

2) $r_{ij}^t + r_{ji}^t = 1$ $(i, j = 1, \dots, n,\ i \neq j)$, что фактически заменяет процедуру приведения шкал критериев к однородным.

Если оценки по шкале критерия K_t ($t \in \{1,\dots,m\}$) отрицательные, то элементы матрицы $R^t = \left\| r_{ij}^t \right\|$ вычисляются следующим образом:

$$r_{ij}^t = \begin{cases} \dfrac{|x_i^t|}{|x_i^t| + |x_j^t|}, \text{если значения оценок по шкале } K_t \text{ максимизируются,} \\ \dfrac{|x_j^t|}{|x_i^t| + |x_j^t|}, \text{если значения оценок по шкале } K_t \text{ минимизируются.} \end{cases}$$

Для элементов матрицы предпочтений по критериям с отрицательными шкалами также выполняется условие $r_{ij}^t + r_{ji}^t = 1$ (*i,j*=1,…,*n*, $i \neq j$).

В случае, когда оценки по шкале критерия могут быть любым действительным числом, по смыслу задачи один критерий рекомендуется заменить двумя (с отрицательными и неотрицательными шкалами), например, заменить рентабельность на прибыль и убыток. Сдвиг шкалы (например, с целью сделать все оценки неотрицательными) приведет к изменению информации о том, во сколько раз одна альтернатива предпочтительнее другой. Если для некоторой альтернативы по какому-либо критерию не задана оценка, то эта альтернатива не сравнима с другими по данному критерию и в матрице предпочтений все элементы соответствующих строки и столбца равны нулю.

Если по критерию K_t $(t = \overline{1 \dots m})$ задана информация во сколько раз одна альтернатива предпочтительнее другой, то положив оценку одной из альтернатив, равной, например, единице, легко получим вектор оценок $x^t = (x_1^t, x_2^t, \dots, x_n^t)$, сохраняющий соотношение альтернатив.

Из процедуры построения матриц предпочтения следует, что приведение шкал критериев к однородным не требуется, т.к. элементы матриц характеризуют степень предпочтения одной альтернативы над другой. Перечисленные ограничения практически не сужают класс решаемых задач, так как оценки альтернатив по критериям обычно положительные.

3.2. Агрегирование критериальных предпочтений

Для агрегирования предпочтений по критериям используется алгоритм, основывающийся на построении строгого или нестрогого нагруженного мажоритарного графа, описанный в главе 1.

Приведем его основные этапы.

1. Формирование матриц предпочтения $R^1, R^2, \ldots, R^m$ по критериям $K = \{K_1, K_2, \ldots, K_m\}$.

2. Построение матрицы суммарных предпочтений с учетом или без учета весовых коэффициентов важности критериев.

3. Построение нагруженного мажоритарного графа.

4. Разрушение противоречивых контуров мажоритарного графа.

5. Построение транзитивного замыкания отношения без противоречивых контуров.

Аналогично коэффициентам участия экспертов, предложенный алгоритм допускает введение коэффициентов важности $k_1, k_2, \ldots, k_m$ по каждому критерию качества $K_1, K_2, \ldots, K_m$. В этом случае матрица суммарных предпочтений будет вычисляться по формуле:

$$P = \sum_{t=1}^{m} k_t R^t.$$

Коэффициенты важности критериев могут быть заданы ЛПР на основе личных предпочтений или определены по одной из существующих методик, в частности, по методике, предложенной в работе [22]. Методика основывается на определении в диалоговом режиме с ЛПР равноценных альтернатив при изменении оценок по двум критериям.

Приведем пример, демонстрирующий возможности предложенного метода.

Пример 3.1. Выбор оптимального проекта разработки марсохода.

При проведении тендера на разработку марсохода рассматривалось пять проектов (n = 5). Для выбора наилучшего проекта было проведено сравнение марсоходов по трем критериям качества ($m = 3$): стоимость, вес, надежность. В результате сравнения марсоходов получено их ранжирование по каждому из критериев.

Множество проектов марсоходов (множество альтернатив) обозначим $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Оценки проектов по критериям стоимость, вес и нестрогое ранжирование проектов (a_1 – наилучший проект) по критерию надежность представлены в следующей таблице.

ρ_1 стоимость (млрд. руб)	ρ_2 вес (тонн)	ρ_3 надежность
a_4 –5	$a_5 - 4$	a_1
$a_1 - 10$	$a_3 - 8$	a_2
$a_2 - a_3 - 15$	$a_1 - a_2 - 12$	$a_3 - a_5$
a_5 –20	$a_4 - 16$	a_4

Представим отношения ρ_1, ρ_2, ρ_3 в матричном виде:

$$R^1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{5} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{7} & \frac{4}{7} & \frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix}, \qquad R^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & \frac{3}{7} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{5} & \frac{3}{7} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{7} & \frac{4}{7} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix},$$

$$R^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Построим агрегированное отношение предпочтения R_Σ. Матрица суммарных предпочтений имеет вид:

$$P=\begin{pmatrix} 3 & \frac{9}{10} & 1 & \frac{23}{21} & \frac{13}{12} \\ \frac{21}{10} & 3 & \frac{11}{10} & \frac{33}{28} & \frac{33}{28} \\ 2 & \frac{19}{10} & 3 & \frac{13}{12} & \frac{67}{42} \\ \frac{41}{21} & \frac{51}{28} & \frac{23}{12} & 3 & 2 \\ \frac{23}{12} & \frac{51}{28} & \frac{59}{42} & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

По матрице суммарных предпочтений найдем матрицу смежности и матрицу весов строгого мажоритарного графа

$$R_\Sigma=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C=\begin{pmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \frac{6}{5} & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \frac{4}{5} & \infty & \infty & \frac{4}{21} \\ \frac{6}{7} & \frac{9}{14} & \frac{5}{6} & \infty & 1 \\ \frac{5}{6} & \frac{9}{14} & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}.$$

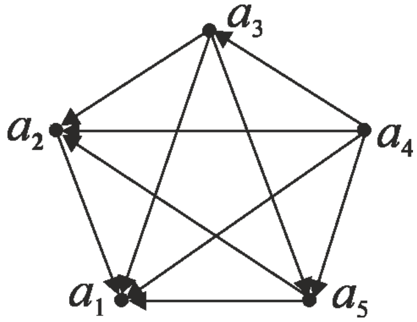

Рис. 3.1

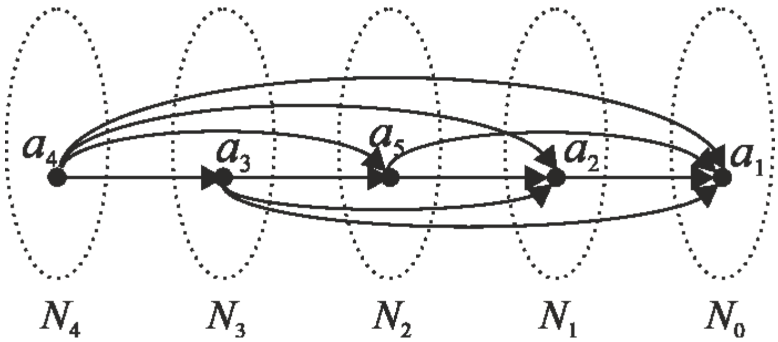

Рис. 3.2

Мажоритарный граф, изображенный на рис.3.1, не содержит противоречивых контуров. Построенное агрегированное отношение позволяет осуществить однозначный выбор оптимального проекта марсохода: целесообразно рекомендовать ЛПР выбрать проект a_1, так как он предпочтительнее всех остальных. Можно ранжировать проекты от наилучшего к худшему (рис.3.2): $a_1 - a_2 - a_5 - a_3 - a_4$. ■

Сравним этот пример с примером 1.3. Легко видеть, что все предпочтения по первым двум критериям в данном примере и примере 1.3 совпадают, но здесь они конкретизированы численными оценками: заданы значения стоимости проектов и весов марсоходов. Более подробная информация позволила получить мажоритарный граф без контуров. Коррекция агрегированного отношения с помощью разрушения противоречивых контуров не потребовалась.

Приведенный пример демонстрирует возможность использования неоднородных шкал критериев, причем значения оценок по разным шкалам могут максимизироваться или минимизироваться. Возможно использование даже качественных шкал, т.е. шкал, задающие предпочтения на множестве альтернатив без численных значений оценок альтернатив по критериям.

3.3. Особенности построения агрегированного предпочтения для двух критериев

Рассмотрим случай, когда оценка альтернатив осуществляется по двум критериям качества. Особенности построения агрегированного отношения и целесообразность применения предложенного метода продемонстрируем на следующем примере.

Пусть автомобили a_1 и a_2 отличаются оценками по двум критериям качества: K_1 – дизайн и K_2 – комфортабельность, причем данные критерии имеют одинаковую важность для ЛПР. Критерии обладают однородными шкалами: балльная шкала от 1 до 10. Первый автомобиль a_1 имеет оценки <10; 2>, второй a_2 – <6; 6>. Построим матрицы предпочтений по критериям K_1 и K_2 соответственно:

$$R^1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} & 1 \end{pmatrix} \text{ и } R^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу суммарных предпочтений и матрицу смежности строгого мажоритарного графа

$$P = \begin{pmatrix} 2 & \frac{9}{8} \\ \frac{7}{8} & 2 \end{pmatrix};\ R_{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Откуда получаем, что второй автомобиль предпочтительнее первого (a_1 менее предпочтителен, чем a_2). Применяя алгоритм агрегирования, получаем: векторная оценка <6;6> предпочтительнее, чем <10;2>. Сравним альтернативы одним из самых используемых методов – аддитивной сверткой, получим: автомобили равноценны, т.к. имеют одинаковую суммарную оценку 12. Результат, полученный методом агрегирования, для многих может показаться более естественным: гармоничная альтернатива с оценками выше среднего по обоим критериям «побеждает» альтернативу с неровными оценками, одна из которых близка к минимальной. Автомобиль с хорошими оценками по обоим критериям, лучше автомобиля с отличной оценкой по одному критерию и очень плохой по другому (учитываем предположение о равной важности критериев).

Обобщим полученный результат. Пусть альтернативы оцениваются по двум критериям, имеющим равную важность.

Утверждение 3.1. Для альтернатив, оцениваемых по двум критериям качества, оценки по которым являются положительными и максимизируются, предпочтительнее альтернатива с большим произведением компонент векторной оценки.

Доказательство утверждения 3.1. Пусть оценки по шкалам критериев K_1 и K_2 максимизируются. Альтернатива a_1 имеет вектор оценок по критериям $< x_1, y_1 >$, а альтернатива a_2 – $< x_2, y_2 >$ $(x_1, y_1, x_2, y_2 > 0)$. Тогда матрицы предпочтений по критериям K_1 и K_2 имеют вид:

$$R^1 = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{x_2}{x_1 + x_2} \\ \dfrac{x_1}{x_1 + x_2} & 1 \end{pmatrix}, \quad R^2 = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{y_2}{y_1 + y_2} \\ \dfrac{y_1}{y_1 + y_2} & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу суммарных предпочтений:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & \dfrac{x_2}{x_1 + x_2} + \dfrac{y_2}{y_1 + y_2} \\ \dfrac{x_1}{x_1 + x_2} + \dfrac{y_1}{y_1 + y_2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Сравним числа:

$$\frac{x_2}{x_1 + x_2} + \frac{y_2}{y_1 + y_2} \gtreqless \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{y_1}{y_1 + y_2} \Leftrightarrow$$

(так как все оценки положительные)

$$x_2 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_2 \gtreqless x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_1 \Leftrightarrow$$

$$x_2 y_2 \gtreqless x_1 y_1 .$$

Получаем, для двух критериев лучшей будет векторная оценка с большим значением произведения ее компонент. ▲

Таким образом, при одинаковой сумме компонент по методу агрегирования оценки со средними значениями компонент предпочтительнее, чем оценки близкие к минимальным и максимальным значениям (при одинаковой сумме $x + y$ произведение $x \cdot y$ наибольшее, когда $x = y$). Предположение о положительности значений компонент векторной оценки в реальных задачах принятия решений практически не ограничивает общность рассуждений. Большинство шкал критериев, например, масса, стоимость, надежность и т.п., имеют только положительные значения. При большем числе критериев явной зависимости предпочтений альтернатив от произведения оценок уже не будет, но при равной сумме оценок по критериям предпочтение также получит векторная оценка со средними значениями компонент. В случае, когда заданы одинаковые по важности критерии с однородными шкалами, и применение метода аддитивной свертки дает равноценные альтернативы, при использовании алгоритма агрегирования предпочтительнее оказывается альтернатива с меньшим разбросом оценок.

Из утверждения 3.1 следует также транзитивность мажоритарного графа, построенного для двух критериев. Транзитивный граф не содержит противоречивых контуров и, следовательно, соответствует искомому агрегированному отношению.

Аналогично можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 3.2. Для альтернатив, оцениваемых по двум критериям качества, оценки по которым являются положительными и минимизируются, предпочтительнее альтернатива с меньшим произведением компонент векторной оценки.

Утверждение 3.3. Пусть для альтернатив, оцениваемых по двум критериям качества с положительными шкалами, оценки по критерию K_1 максимизируются, а по K_2, минимизируются. Тогда предпочтительнее альтернатива с большим отношением оценки по критерию K_1 к оценке по критерию K_2.

Доказательство утверждения 3.3. Пусть альтернатива a_1 имеет вектор оценок по критериям $< x_1, y_1 >$, а альтернатива a_2 – $< x_2, y_2 >$ ($x_1, y_1, x_2, y_2 > 0$). Найдем матрицы предпочтений по критериям K_1 и K_2.

По шкале критерия K_1 оценки максимизируются, следовательно,

$$R^1 = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{x_2}{x_1 + x_2} \\ \dfrac{x_1}{x_1 + x_2} & 1 \end{pmatrix}.$$

По шкале критерия K_2 оценки минимизируются, следовательно,

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{y_1}{y_1 + y_2} \\ \dfrac{y_2}{y_1 + y_2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица суммарных предпочтений имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & \dfrac{x_2}{x_1 + x_2} + \dfrac{y_1}{y_1 + y_2} \\ \dfrac{x_1}{x_1 + x_2} + \dfrac{y_2}{y_1 + y_2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Сравним ее элементы:

$$\frac{x_2}{x_1 + x_2} + \frac{y_1}{y_1 + y_2} \gtreqless \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{y_2}{y_1 + y_2} \Leftrightarrow$$

(так как все оценки положительные)

$$x_2 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_1 \gtreqless x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_2 \Leftrightarrow$$

$$x_2 y_1 \gtreqless x_1 y_2 \Leftrightarrow \frac{x_2}{y_2} \gtreqless \frac{x_1}{y_1}.$$

Получаем: предпочтительнее альтернатива, у векторной оценки которой большее значение отношения первой компоненты ко второй. Что и требовалось доказать. ▲

Из доказательства утверждений 3.1, 3.2 и 3.3 следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.1. Нагруженный мажоритарный граф, построенный по двум критериям качества с положительными шкалами, транзитивен.

Требование такого естественного для ЛПР условия, как транзитивность агрегированного отношения предпочтения, является одним из важнейших в теории принятия решений. Выполнение этого условия фактически обеспечивает непротиворечивость полученных результатов.

3.4. Сравнительный анализ методов агрегирования и аддитивной свертки для двух критериев

Одним из самых используемых методов многокритериального выбора является аддитивная свертка оценок по критериям [22,26,82]. Несмотря на кажущуюся простоту, этот метод имеет ряд недостатков. Основной недостаток состоит в том, что применение метода возможно только в случае задания однородных шкал критериев. Но обычно альтернативы оцениваются по критериям с неоднородными шкалами: стоимости, весу, надежности, рентабельности и т.п. Кроме того, некоторые критерии, такие как удобство, надежность, вообще не имеют числовых шкал. В этом случае можно задать лишь упорядочение (ранжирование) альтернатив по критериям. Процесс приведения всех критериев к единой шкале является не только сложным, трудоемким, но и может спровоцировать получение противоречивых результатов. Даже выбор неоднородной шкалы существенно влияет на упорядочение альтернатив. Возьмем в качестве однородной стобалльную шкалу. И пусть в сравнении участвует тысяча альтернатив, имеющих разные цены. В этом случае альтернативам с разной, но близкой ценой придется сопоставить одинаковый балл по однородной шкале. Таким образом, по критерию стоимость в шкале цен альтернативы отличались, а в однородной шкале стали неразличимы. Еще большие трудности и противоречия возникают при сопоставлении качественной шкале балльной. Для качественной шкалы “плохо”, “хорошо”, “отлично” вообще непонятно, сколько баллов из ста давать каждой оценке? Должно ли быть одинаковое число баллов между оценками или необходимо сохранить одинаковое отношение между “плохо” и “хорошо”, “хорошо” и “отлично”? Все это естественно сказывается на конечном результате упорядочения альтернатив. Выбор разных однородных шкал, а также неоднозначность сопоставления оценок может приводить к различным результатам упорядочения альтернатив.

В отличие от аддитивной свертки использование метода агрегирования не требует приведения критериев к однородной шкале. По каждому критерию строятся матрицы предпочтения, содержащие не сами оценки альтернатив, а лишь информацию о том, во сколько раз одна альтернатива предпочтительнее другой. Матрицы предпочтений могут использовать информацию о предпочтениях по критериям, как содержащую, так и не содержащую численные оценки альтернатив по критериям качества.

Сравним методы агрегирования и аддитивной свертки для случая, когда альтернативы оцениваются по двум критериям качества.

Рассмотрим оценки $< x_1, y_1 >$ и $< x_2, y_2 >$, как точки плоскости. Из теоремы 3.1 следует, что, если эти оценки равноценны по методу агрегирования, то выполняется $x_1 y_1 = x_2 y_2$. Зафиксируем одну из точек, а координаты второй будем менять. Тогда координаты точек, равноценных фиксированной точке $< x_2, y_2 >$, принадлежат положительной ветви гиперболы $y = \frac{c}{x}$, где $c = x_2 y_2$.

Пример 3.2. Возьмем, в качестве однородной шкалы интервал (0;10] и зафиксируем точку <5; 5>. Равноценные ей точки принадлежат гиперболе $y = \frac{25}{x}$. Если значения по шкалам критериев K_1 и K_2 максимизируются, то векторные оценки, менее предпочтительные оценки <5; 5>, лежат под ветвью гиперболы, включая и отношение Парето (рис. 3.3). В эту область входят и точки плоскости менее предпочтительные по Парето (Парето⁻). Векторные оценки, более предпочтительные оценки <5; 5>, лежат над ветвью гиперболы. В случае аддитивной свертки векторные оценки, равноценные <5; 5>, принадлежат прямой $y = 10 - x$. Векторные оценки, предпочтительнее оценки <5; 5>, лежат над прямой.

На рис. 3.4 сравниваются результаты, полученные методами агрегирования и аддитивной сверткой. Заметим, что при построении аддитивной свертки критерии приводятся к однородной шкале с неотрицательными оценками, значения по которой максимизируются. Область, выделенная между прямой и гиперболой, иллюстрирует несовпадение результатов метода агрегирования и аддитивной свертки, полученных при сравнении векторной оценки <5; 5> с другими оценками <*x*; *y*> ($x, y \in (0; 10]$).

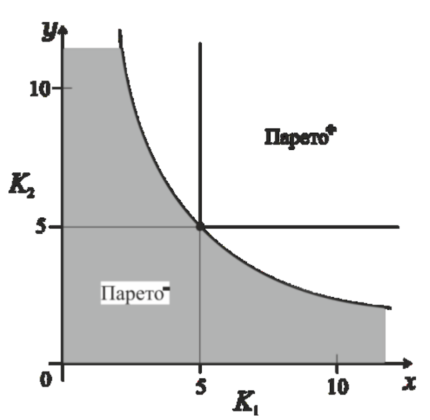

Рис. 3.3

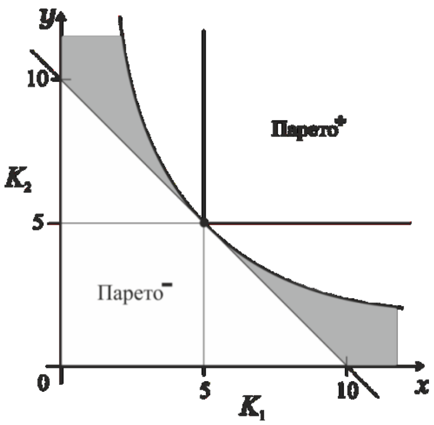

Рис. 3.4

Проведем теперь сравнение методов агрегирования и аддитивной свертки с учетом задания весовых коэффициентов важности критериев. Для метода агрегирования найдем матрицу суммарных предпочтений с весовыми коэффициентами важности критериев. По матрицам предпочтений (в предположении, что оценки по шкалам критериев максимизируются)

$$R^1 = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{x_2}{x_1 + x_2} \\ \dfrac{x_1}{x_1 + x_2} & 1 \end{pmatrix}, \quad R^2 = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{y_2}{y_1 + y_2} \\ \dfrac{y_1}{y_1 + y_2} & 1 \end{pmatrix}$$

найдем матрицу суммарных предпочтений с учетом весовых коэффициентов важности критериев: $k_1 R^1 + k_2 R^2$:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & k_1 \dfrac{x_2}{x_1 + x_2} + k_2 \dfrac{y_2}{y_1 + y_2} \\ k_1 \dfrac{x_1}{x_1 + x_2} + k_2 \dfrac{y_1}{y_1 + y_2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Используя элементы этой матрицы, сравним по предпочтительности векторные оценки альтернативы с векторными оценками $< x_1, y_1 >$ и $< x_2, y_2 >$.

$$\frac{k_1 x_2}{x_1 + x_2} + \frac{k_2 y_2}{y_1 + y_2} \gtreqless \frac{k_1 x_1}{x_1 + x_2} + \frac{k_2 y_1}{y_1 + y_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{k_1}{k_2} \gtreqless \dfrac{x_1 + x_2}{x_2 - x_1} * \dfrac{y_1 - y_2}{y_1 + y_2}, \text{при } \ x_2 > x_1 \\ \dfrac{k_1}{k_2} \lesseqgtr \dfrac{x_1 + x_2}{x_2 - x_1} * \dfrac{y_1 - y_2}{y_1 + y_2}, \text{при } \ x_1 > x_2. \end{cases}$$

Заметим, что соотношение коэффициентов для равноценности альтернатив с оценками $< x_1, y_1 >$ и $<x_2, y_2>$

$$\frac{k_1}{k_2} = \left| \frac{x_1 + x_2}{x_2 - x_1} * \frac{y_1 - y_2}{y_1 + y_2} \right|.$$

Построим график функции

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{x_1 y_1 - x_2 y_2 + x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 y_2 - x_1 y_1 + x_2 y_1 - x_1 y_2}$$

для некоторой фиксированной точки.

Пример 3.3. Зафиксируем, как и ранее, точку $< x_2, y_2 >$, положив $x_2 = 5$, $y_2 = 5$, и переобозначим: $x_1 = x$, $y_1 = y$, $\frac{k_1}{k_2} = z$. Получим

$$z = \frac{xy - 25 + 5(y - x)}{25 - xy + 5(y - x)}. \quad (3.1)$$

График этой функции для $x \in [1; 5)$, $y \in [5; \frac{25}{x}]$ представлен на рис. 3.5. Изображенная поверхность показывает, при каком соотношении коэффициентов $\frac{k_1}{k_2}$ по методу агрегирования точки $< x, y >$, присутствующие на графике, равноценны точке <5; 5>.

Сравним оценки $< x_1, y_1 >$ и $< x_2, y_2 >$ с помощью метода аддитивной свертки:

$$k_1 x_1 + k_2 y_1 \gtreqless k_1 x_2 + k_2 y_2.$$

Построим график функции $\frac{k_1}{k_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$ для точки <5; 5>. Положим $x_2 = 5$, $y_2 = 5$, $x_1 = x$, $y_1 = y$, $\frac{k_1}{k_2} = \mathrm{z}$. Тогда

$$z = -\frac{y - 5}{x - 5}. \quad (3.2)$$

График этой функции для $x \in [1; 5)$, $y \in [5; \frac{25}{x}]$ представлен на рис. 3.6. Изображенная поверхность показывает, при каком соотношении коэффициентов $\frac{k_1}{k_2}$ по методу «свертки» точки $< x, y >$, присутствующие на графике, равноценны точке <5; 5>.

Приравняв *z* в (3.1) и (3.2), найдем y.

$$\frac{xy - 25 + 5(y - x)}{25 - xy + 5(y - x)} = -\frac{y - 5}{x - 5} \Longrightarrow \frac{(y - 5)(x - y)}{(y + 5)(5 - x)} = 0.$$

Получим $y = 5$ и $y = x$. Но на наших графиках $y \neq x$, следовательно, только при $y = 5$ потребуется одинаковое соотношение коэффициентов для нахождения векторных оценок, равноценных <5; 5> и в методе агрегирования и в аддитивной свертке. Для $y > 5$ график функции (3.2) расположен выше графика функции (3.1). Следовательно, для нахождения векторных оценок, равноценных <5; 5> в методе аддитивной свертки соотношение коэффициентов будет больше.

Рассмотрим векторную оценку <2; 7>, которая менее предпочтительна, чем оценка <5; 5> и для метода агрегирования ($2\cdot 7<5\cdot 5$), и для свертки ($2+7<5+5$). Вычислим значения отношения коэффициентов $\frac{k_1}{k_2}$ согласно графикам, представленным на рис. 3.5 и 3.6.

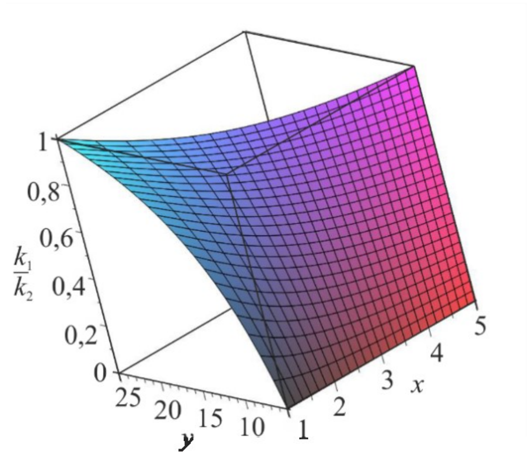

Рис. 3.5.

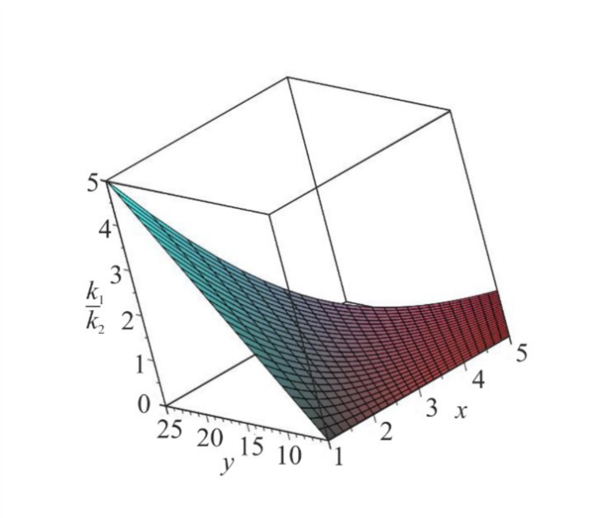

Рис. 3.6

Для метода агрегирования $\frac{k_1}{k_2} = \frac{7}{18}$, для аддитивной свертки $\frac{k_1}{k_2} = \frac{2}{3}$. Это означает, если выбрать весовые коэффициенты важности критериев k_1 и k_2 так, чтобы выполнялось $\frac{k_1}{k_2} < \frac{7}{18}$ и, соответственно, $\frac{k_1}{k_2} < \frac{2}{3}$, то векторная оценка <2; 7> будет предпочтительнее оценки <5; 5>.

Например, коэффициенты $k_1 = 1$ и $k_2 = 2$ поменяют предпочтительность оценок по методу аддитивной свертки ($1\cdot 2+2\cdot 7>1\cdot 5+2\cdot 5$ $\Longrightarrow$<2;7> предпочтительнее <5; 5>), но по методу агрегирования предпочтительность оценок останется прежней. Таким образом, для того, чтобы поменять предпочтения в методе агрегирования требуется большее значение отношения (расхождение) весовых коэффициентов.

Для векторной оценки <3; 7> по методу агрегирования $\frac{k_1}{k_2} = \frac{2}{3}$, по методу аддитивной свертки, очевидно, $\frac{k_1}{k_2} = 1$ (оценки <3;7> и <5;5>

равноценны с равными коэффициентами по «свертке»). По методу агрегирования для того, чтобы эти оценки стали равноценными второй критерий должен быть важнее в 1.5 раза. ■

Таким образом, графики, представленные на рис. 3.5 и 3.6 позволяют оценить влияние весовых коэффициентов критериев на предпочтение произвольной векторной оценки $< x, y >$ и оценки <5; 5> по методам агрегирования и аддитивной свертки.

3.5. Сравнительный анализ методов агрегирования и аддитивной свертки для m критериев

Сравним результаты работы метода агрегирования и свертки при оценке альтернатив по критериям K_1, K_2,…, K_m. Пусть заданы векторные оценки $< x_1, x_2, \dots, x_m >$ и $< y_1, y_2, \dots, y_m >$ альтернатив a_1 и a_2 соответственно. По шкалам критериев оценки положительные и максимизируются. Все критерии имеют равную важность. Матрицы критериальных предпочтений имеют вид:

$$R^1 = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{y_1}{x_1 + y_1} \\ \dfrac{x_1}{x_1 + y_1} & 1 \end{pmatrix},\ R^2 = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{y_2}{x_2 + y_2} \\ \dfrac{x_2}{x_2 + y_2} & 1 \end{pmatrix}, \dots ,$$

$$R^m = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{y_m}{x_m + y_m} \\ \dfrac{x_m}{x_m + y_m} & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица суммарных предпочтений

$$P = \begin{pmatrix} m & \dfrac{y_1}{x_1 + y_1} + \dfrac{y_2}{x_2 + y_2} + \dots + \dfrac{y_m}{x_m + y_m} \\ \dfrac{x_1}{x_1 + y_1} + \dfrac{x_2}{x_2 + y_2} + \dots + \dfrac{x_m}{x_m + y_m} & m \end{pmatrix}.$$

Так как $r_{ij}^t + r_{ji}^t = 1$ $(i, j = 1, \dots, n)$, имеем:

$$p_{ij} + p_{ji} = \sum_{t=1}^{m} (r_{ij}^t + r_{ji}^t) = m.$$

Откуда

$$P = \begin{pmatrix} m & \dfrac{y_1}{x_1 + y_1} + \cdots + \dfrac{y_m}{x_m + y_m} \\ m - \left(\dfrac{y_1}{x_1 + y_1} + \cdots + \dfrac{y_m}{x_m + y_m}\right) & m \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.2. Пусть альтернативы оцениваются по m критериям качества ($m \geq 2, m \in \mathbb{N}$), оценки по которым являются положительными и максимизируются. Среди всех альтернатив с векторными оценками $< y_1, y_2, \dots, y_m >$, для которых выполняется $y_1 + \cdots + y_m = c$ ($c \in \mathbb{R}^+$), наиболее предпочтительной по методу агрегирования является альтернатива с оценкой $< \frac{c}{m}, \dots, \frac{c}{m} >$.

Доказательство теоремы 3.2.

Сравним альтернативы a_1 и a_2 с векторными оценками $< x_1, x_2, \dots, x_m >$ и $< y_1, y_2, \dots, y_m >$ соответственно. Для этого необходимо сравнить элементы матрицы суммарных предпочтений:

$$\frac{y_1}{x_1 + y_1} + \cdots + \frac{y_m}{x_m + y_m} \gtreqless m - \left(\frac{y_1}{x_1 + y_1} + \cdots + \frac{y_m}{x_m + y_m}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{y_1}{x_1 + y_1} + \cdots + \frac{y_m}{x_m + y_m}\right) \gtreqless m.$$

Покажем, что из двух не равных векторных оценок $< x_1, x_2, \dots, x_m >$ и $< y_1, y_2, \dots, y_m >$, таких, что $\begin{cases} x_1 + \cdots + x_m = c \\ y_1 + \cdots + y_m = c \end{cases}$, предпочтительнее оценка с равными компонентами по критериям.

Для определенности положим, что векторная оценка $< x_1, x_2, \dots, x_m >$ имеет равные компоненты: $x_1 = \cdots = x_m = \frac{c}{m}$. Тогда

$$2\left(\frac{y_1}{\frac{c}{m}+y_1}+\cdots+\frac{y_m}{\frac{c}{m}+y_m}\right)\gtreqless m. \tag{3.3}$$

Найдем точку экстремума для левой части неравенства при условии

$y_1+\cdots+y_m \ =c.$

Составим функцию Лагранжа

$$L=\frac{y_1}{\frac{c}{m}+y_1}+\cdots+\frac{y_m}{\frac{c}{m}+y_m}+\lambda(y_1+\cdots+y_m-c).$$

$$\begin{cases} L'_{y_1}=\dfrac{\frac{c}{m}}{\left(\frac{c}{m}+\mathrm{y}_1\right)^2}+\lambda=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L'_{y_m}=\dfrac{\frac{c}{m}}{\left(\frac{c}{m}+\mathrm{y}_m\right)^2}+\lambda=0 \\ y_1+\cdots+y_m=c \end{cases} \Rightarrow\ y_1=\cdots=y_m=\frac{c}{m}.$$

С учетом положительных шкал критериев получим одну стационарную точку $y_1=\cdots=y_m=\frac{c}{m}$.

Определим характер условного экстремума. Найдем второй дифференциал функции Лагранжа. Для этого вычислим вторые производные функции Лагранжа для стационарной точки:

$$L''_{y_iy_i}=\frac{\partial^2 L}{\partial y_i\partial\, y_i}=-2\frac{\frac{c}{m}}{\left(\frac{c}{m}+\mathrm{y_i}\right)^3}=-2\frac{\frac{c}{m}}{\left(\frac{c}{m}+\frac{c}{m}\right)^3}=-\frac{1}{4\left(\frac{c}{m}\right)^2}$$

для всех $i=1,\dots,m.$

Все смешанные производные функции Лагранжа равны нулю.

Обозначим

$$a = \frac{1}{4\left(\frac{c}{m}\right)^2} > 0.$$

Тогда

$$d^2L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L}{\partial y_i \partial\, y_j}dy_i dy_j = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a\,(dy_i)^2 < 0.$$

Второй дифференциал функции Лагранжа является отрицательно определенной квадратичной формой, т.е. $d^2L < 0$ для любых значений $dy_i \neq 0 \quad (i = 1, \dots, m)$. Отметим, что при определении знака второго дифференциала не пришлось даже использовать условие $dy_1 + \dots + dy_m = 0$ $(y_1 + \dots + y_m = c)$ для учета связи между dy_i $(i = 1, \dots, m)$. Следовательно, стационарная точка $y_1 = \dots = y_m = \frac{c}{m}$ является точкой максимума.

Определим значение левой части неравенства (3.3) при $y_1 = \dots = y_m = \frac{c}{m}$:

$$2\left(\frac{\frac{c}{m}}{\frac{c}{m} + \frac{c}{m}} + \dots + \frac{\frac{c}{m}}{\frac{c}{m} + \frac{c}{m}}\right) = m.$$

Таким образом, для любой векторной оценки $< y_1, y_2, \dots, y_m >$, отличной от $< \frac{c}{m}, \dots, \frac{c}{m} >$ будет выполняться

$$2\left(\frac{y_1}{x_1 + y_1} + \dots + \frac{y_m}{x_m + y_m}\right) < m,$$

и в матрице суммарных предпочтений

$$\frac{y_1}{x_1 + y_1} + \dots + \frac{y_m}{x_m + y_m} < \frac{x_1}{x_1 + y_1} + \dots + \frac{x_m}{x_m + y_m}.$$

Следовательно, альтернатива a_2 с векторной оценкой $< y_1, y_2, \dots, y_m >$, отличной от $< \frac{c}{m}, \dots, \frac{c}{m} >$, менее предпочтительна, чем альтернатива a_1 с векторной оценкой $< \frac{c}{m}, \dots, \frac{c}{m} >$ при условии $y_1 + \dots + y_m = c$. ▲

Заметим, что при построении аддитивной функции полезности все критерии приводятся к единой шкале с положительными оценками, значения оценок по шкале обычно максимизируются.

Из теоремы 3.2 следует, что из всех равноценных по методу свертки альтернатив по методу агрегирования наиболее предпочтительной будет альтернатива с равными по всем критериям компонентами векторной оценки. Таким образом, выбор метода решения задачи должен зависеть от предпочтений ЛПР. Если векторные оценки альтернатив с одинаковой суммой компонент, например, $< 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5 >$ и $< 10,\ 10,\ 2,\ 2,\ 1 >$, равноценны для ЛПР, то рекомендуется выбрать метод аддитивной свертки. Если же векторная оценка $< 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5 >$ предпочтительнее оценки $< 10,\ 10,\ 2,\ 2,\ 1 >$ – метод агрегирования.

Таким образом, для выбора метода решения задачи необходимо предварительно выявить предпочтения ЛПР. С этой целью в диалоговом режиме находятся векторные оценки, равноценные для ЛПР, а затем проводится их аппроксимация кривыми. Для метода свертки наименее удаленной от равноценных по двум критериям альтернатив должна оказаться прямая, для метода непротиворечивого агрегирования – гипербола.

3.6. Вероятностные оценки существования контуров в мажоритарном графе

Ответим на вопрос: насколько часто мажоритарный граф содержит контуры. Для этого приведем вероятностную оценку того, что мажоритарный граф не содержит контуров.

Утверждение 3.4. Если граф не имеет контуров, то он содержит хотя бы одну вершину a_i такую, что $\Gamma a_i = \emptyset$ (нет исходящих дуг) и хотя бы одну вершину a_j такую, что $\Gamma^{-1} a_j = \emptyset$ (нет входящих дуг).

Доказательство утверждения 3.4 следует из того, что граф без контуров можно разбить на уровни [23]. А по определению уровней графа существуют вершины a_i и a_j: $\Gamma a_i = \emptyset$ и $\Gamma^{-1} a_j = \emptyset$. ▲

Оценим вероятность отсутствия контуров в случае, если мажоритарный граф является турниром, т.е. любые две вершины графа соединены ровно одной дугой. Этот случай возможен, например, для строгого мажоритарного графа, построенного на основе индивидуальных предпочтений экспертов – строгое ранжирование и нечетном числе экспертов.

Для графа-турнира вероятность того, что существует вершина a_i такая, что $\Gamma a_i = \emptyset$ равна $p_\Gamma = \frac{n}{2^{n-1}}$ (n – количество вершин). Среди оставшихся вершин вероятность существования a_j такой, что $\Gamma^{-1} a_j = \emptyset$, равна, соответственно, $p_{\Gamma^{-1}} = \frac{n-1}{2^{n-2}}$. По комбинаторному правилу умножения получаем:

$$p = \frac{n}{2^{n-1}} \cdot \frac{n-1}{2^{n-2}}, n \geq 3. \tag{3.4}$$

Обозначим $p_{\overline{K}}$ – вероятность того, что мажоритарный граф, являющийся турниром, не содержит контуров. Тогда

$$p_{\overline{K}} \leq p, \tag{3.5}$$

так как наличие вершин a_i и a_j: $\Gamma a_i = \emptyset$ и $\Gamma^{-1} a_j = \emptyset$ есть необходимое, но не достаточное условие отсутствия контуров (см. рис. 3.7).

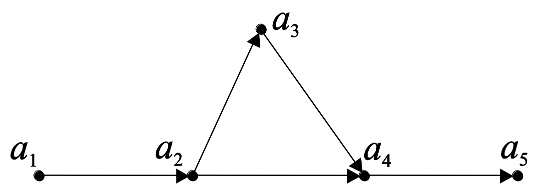

рис. 3.7

Оценка (3.5.), с учетом формулы (3.4) показывает, что вероятность существования графа без контуров мала.

На рис. 3.8 предложен построенный по формуле (3.4) график зависимости вероятности того, что мажоритарный граф не содержит контуров, от числа альтернатив. Из графика видно, что вероятность существования мажоритарного графа без контуров ничтожно мала, начиная уже с 7 альтернатив.

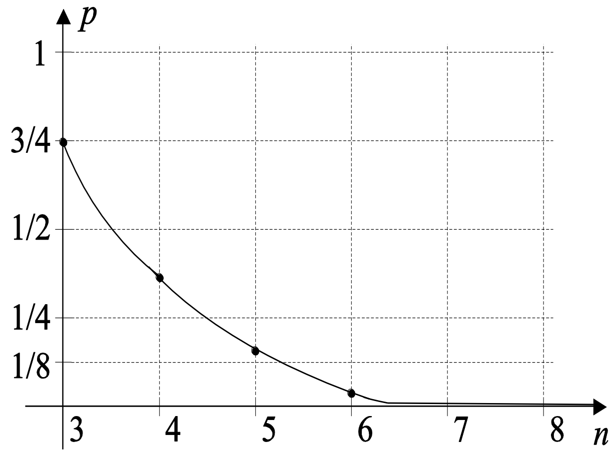

рис. 3.8

Конкретно, при $n = 7$ $p \approx 0{,}02$, а при $n = 8$ уже $p \approx 0{,}007$. Этот факт усиливает преимущества предложенного в работе алгоритма, основанного на разрушении контуров нагруженного мажоритарного графа с целью получения однозначного непустого выбора наилучших альтернатив.

3.7. Выводы по главе 3

1. Предложена методика агрегирования предпочтений в многокритериальных задачах с учетом и без учета важности критериев.

2. Доказаны теоремы об особенностях построения агрегированного отношения предпочтения при сравнении альтернатив по двум критериям качества.

3. Проведен сравнительный анализ алгоритма агрегирования и алгоритма построения аддитивной свертки в многокритериальных задачах принятия решений для двух и для m критериев. Доказаны теоремы о равноценности альтернатив при сравнении методом свертки и агрегирования.

4. Получены вероятностные оценки существования контура в мажоритарном графе.

ГЛАВА 4

Система поддержки принятия решений: методология и реализация

Необходимость при решении практических задач переложить процесс оптимального выбора альтернатив на систему поддержки принятия решений (СППР) вызвана сложностью алгоритмов и большим объемом исходной информации. Интеллектуальные системы, основанные на различных методах и алгоритмах принятия решений и рассчитанные на всевозможные виды входной информации, подробно описаны в работах российских [28,47,52,81] и зарубежных авторов [92,97,101,103,107,110]. Алгоритмы и программные системы, описанные в работе [22], были использованы для решения многих практических задач, в частности, выбора стратегии развития аэропорта Мехико-Сити.

В этой главе описана структура СППР, основанная на разработанной методике непротиворечивого агрегирования экспертных и многокритериальных предпочтений. СППР содержит две подсистемы: группового и многокритериального выбора, которые могут быть использованы самостоятельно. При совместном использовании подсистем предусмотрена возможность агрегирования результатов их работы. Наиболее важным и в то же время сложным является процесс выявления исходной информации у ЛПР и экспертов. Проведение диалога с ЛПР при многокритериальном выборе нацелено на выявление вербальной непротиворечивой информации о предпочтениях альтернатив по критериям.

Метод агрегирования такой информации существенно отличается от методов, предложенных в работах [12,16,45].

На каждом этапе работы системы предусмотрена возможность перехода на предыдущие этапы с коррекцией входной информации. Все алгоритмы имеют полиномиальную сложность, что позволяет обрабатывать большие объемы исходной информации.

Рассмотрим подробно каждую из подсистем, работа которых основывается на математических моделях задач группового и многокритериального выбора.

4.1. Математическая модель задачи группового выбора

Система поддержки группового выбора основывается на следующей математической модели задачи группового выбора

$$< t,\ A,\ E,\ P,\ M, k, r>,$$

где t – постановка задачи группового выбора; $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – множество рассматриваемых альтернатив; $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ – множество экспертов; P – профиль индивидуальных предпочтений экспертов; $M = \{R^1, R^2, \dots, R^m\}$ – множество матриц предпочтений; $k = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ – множество коэффициентов участия экспертов в построении агрегированного предпочтения; r – решающее правило.

В зависимости от содержательной постановки задачи t может быть построено агрегированное отношение предпочтения на множестве альтернатив, произведено ранжирование альтернатив или осуществлен выбор наилучших из них. Множество альтернатив A обычно задается ЛПР, но при необходимости может быть расширено экспертами. Экспертное сообщество E может состоять, как из квалифицированных специалистов в той или иной области народного хозяйства, так и из обычных людей, например, при решении задач изучения потребительского спроса. Профиль индивидуальных предпочтений экспертов P задается на множестве альтернатив A бинарными отношениями предпочтения $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ (в частности ранжированием альтернатив), множеством наилучших альтернатив, численными оценками альтернатив. Экспертная информация хранится в виде матриц предпочтений альтернатив $M = \{R^1, R^2, \dots, R^m\}$. Коэффициенты участия экспертов в построении агрегированного предпочтения $k = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ могут быть заданы ЛПР или автоматически вычислены программой. Если эксперты, по мнению ЛПР, обладают одинаковой компетентностью, все коэффициенты равны единице. При формировании решающего правила r учитывается тип входной информации и требования ЛПР к выходной информации. Обычно требуется найти одно или несколько наиболее предпочтительных вариантов решений или ранжировать альтернативы по предпочтительности.

Часто информация, которой обладает каждый из экспертов, бывает неполной и разрозненной. Для построения коллективной структуры предпочтений необходимо представить полученную от экспертов информацию в структурированном и формализованном виде. В случае получения противоречивой, несогласованной информации использовать алгоритмы, позволяющие устранять противоречия.

Алгоритмическое обеспечение системы использует оригинальную методику построения непротиворечивого агрегированного отношения предпочтения на множестве альтернатив по заданному профилю индивидуальных предпочтений экспертов.

4.2. Логическая схема процесса группового выбора

Основные этапы коллективного принятия решений, а также их взаимосвязь, отражены на схеме, представленной на рис. 4.1. Опишем этапы этого процесса.


ВХОД
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ
• Выбор оптимальных решений
• Упорядочение альтернатив
• Оценка компетентности экспертов
ФОРМИРОВАНИЕ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ
• Формирование множества альтернатив
• Формирование группы экспертов
ПОЛУЧЕНИЕ ЭКСПЕРТНОЙ ИНФОРМАЦИИ
• Проведение опроса экспертов
• Построение матриц индивидуальных предпочтений экспертов
ПОСТРОЕНИЕ АГРЕГИРОВАННОГО ОТНОШЕНИЯ ПРЕДПОЧТЕНИЯ
• Построение агрегированного предпочтения без учета компетентности экспертов
• Нахождение коэффициентов участия экспертов
• Построение агрегированного предпочтения с учетом компетентности экспертов
ПОЛУЧЕНИЕ ВЫХОДНЫХ ДАННЫХ
• Выбор оптимальных вариантов решений
• Ранжирование вариантов решений
• Попарное сравнение альтернатив
Анализ результатов ЛПР
ВЫХОД

Рис. 4.1.

Ввод исходных данных и их обработка системой:

Формирование множества альтернатив.

Перечень альтернатив вводится в программу с присвоением соответствующего имени. Система предоставляет возможность добавлять новые альтернативы: их количество ограничивается только оперативной памятью. Возможно интерактивное редактирование перечня альтернатив в процессе работы программы.

Формирование множества экспертов.

Список экспертов заполняется последовательным добавлением в систему с указанием идентификационной информации о каждом. Данные отображаются в панели экспертов: идентификационная информация, коэффициент участия эксперта, тип метода оценивания и статус голосования. ЛПР может установить для каждого эксперта соответствующий ему коэффициент участия (не обязательно целое число), по умолчанию для всех он равен единице.

Проведение опроса экспертов.

Информация об индивидуальных предпочтениях экспертов может быть задана в одном из следующих видов: попарное сравнение альтернатив, строгое или нестрогое ранжирование альтернатив, численные оценки альтернатив. По результатам опроса строятся матрицы индивидуальных предпочтений экспертов. Ввиду модульности системы количество способов задания предпочтений экспертов может быть расширено. Кроме того, существует возможность загрузки базы альтернатив, экспертов и их индивидуальных предпочтений из специально созданных при помощи данной системы файлов. Эти файлы могут использоваться и для долговременного хранения информации.

Существуют три способа обработки исходных данных системой. Первый способ – построение агрегированного отношения предпочтения с учетом полученных от ЛПР коэффициентов участия экспертов. Второй способ – без учета (предполагается, что эксперты имеют одинаковую компетентность), и третий способ предусматривает работу алгоритма с автоматическим вычислением коэффициентов участия экспертов в построении суммарного предпочтения.

На основе экспертных предпочтений строится нагруженный мажоритарный граф, из которого в дальнейшем, согласно описанному ранее алгоритму, удаляются все дуги, принадлежащие каким-либо противоречивым контурам и имеющие наименьший, но не нулевой, вес. Процесс продолжается до тех пор, пока не разрушатся все противоречивые контуры. К полученному отношению применяется процедура взятия транзитивного замыкания. При построении строгого мажоритарного графа агрегированное отношение не содержит никаких контуров, и по желанию ЛПР, используя алгоритм Демукрона, альтернативы можно расположить по уровням предпочтения соответствующего графа и/или выделить одну или несколько наилучших альтернатив. Для транзитивного и асимметричного отношения ядро, а, следовательно, и наилучшие альтернативы принадлежат одному, нулевому уровню. В системе предусмотрена возможность численного оценивания компетентности экспертов. Так как матрицы смежности и предпочтений содержат много нулей, используются алгоритмы, позволяющие рационально работать с разреженными матрицами.

Система интерактивная – работает в постоянном диалоге с ЛПР. В случае получения неудовлетворительного результата предусмотрена возможность возвращения на любой предыдущий этап работы.

4.3. Проведение экспертного опроса

Для решения задачи группового выбора требуется сформировать множество экспертов, множество альтернатив, а затем от каждого эксперта получить информацию о его предпочтениях на множестве альтернатив. Обычно множество экспертов и множество альтернатив формируются ЛПР, но при необходимости эксперты могут дополнить перечень альтернатив, да и экспертное сообщество может быть расширено по рекомендации специалистов в данной предметной области. Возможности интернета позволяют увеличить объем исходной информации, подключая к решению задачи экспертов, проживающих в различных городах и даже странах, и, следовательно, осуществить более качественный выбор наилучших альтернатив.

Проведение экспертного опроса является одним из самых сложных этапов процесса группового выбора. В случае если ЛПР не удовлетворяют полученные в ходе работы системы результаты, необходимо предусмотреть возможность полностью или частично изменить экспертную информацию, т.е. предусмотреть неоднократное возвращение к этапу опроса экспертов.

Опрос экспертов обычно проводится с целью получения однородной непротиворечивой информации с заранее заданными свойствами. Такую информацию можно непосредственно использовать для построения агрегированного упорядочения. Если опрос экспертов не позволяет выявить однородную информацию: каждый эксперт предоставляет информацию в произвольном, разрозненном виде, то необходимо дополнительно использовать процедуры согласования полученной информации.

Предполагается, что экспертная информация может быть получена от каждого из экспертов в одном из следующих видах.

1. Попарное сравнение альтернатив.
2. Ранжирование альтернатив.
3. Выбор наилучших альтернатив.
4. Задание численных оценок альтернатив.

Наиболее распространенным и в то же время трудоемким является процесс попарного сравнения альтернатив. При сравнении двух альтернатив a_i и a_j эксперту предлагается выбрать ответ из предложенных.

1. Альтернатива a_i предпочтительнее альтернативы a_j.
2. Альтернатива a_j предпочтительнее альтернативы a_i.

3. Альтернативы a_i и a_j равноценны.

4. Альтернативы a_i и a_j несравнимы.

В ходе проведения опроса может возникнуть ситуация, в которой полученная от эксперта информация окажется противоречивой, т.е. в формируемом отношении предпочтения будет существовать противоречивый контур. Для того чтобы этого не случилось, необходимо к полученным в результате опроса отношениям предъявить такое естественное требование как транзитивность. Обеспечение транзитивности формируемого в ходе опроса отношения позволит, также, сократить количество задаваемых эксперту вопросов (количество сравниваемых пар альтернатив). Например, получив информацию о том, что альтернатива a_1 предпочтительнее альтернативы a_2, а альтернатива a_2 предпочтительнее альтернативы a_3, по транзитивности получим: a_1 предпочтительнее a_3. Если же предложить эксперту сравнить альтернативы a_1 и a_3, эксперт может ответить, что a_3 менее предпочтительна, чем a_1, или эти альтернативы равноценны. И в том и в другом случае получим противоречивый контур в отношении предпочтения данного эксперта.

Обеспечение транзитивности экспертного предпочтения сводится к необходимости в ходе проведения опроса к формируемой матрице смежности $\tilde{R}^t$ $(t=1,...,m)$ неоднократно применять процедуру взятия транзитивного замыкания – транзитивное отношение всегда непротиворечиво. Кроме того, в результате процедуры взятия транзитивного замыкания отношения для n альтернатив число вопросов с $\frac{n^2-n}{2}$ может быть уменьшено до n–1 (при n=100 число вопросов с $\frac{n^2-n}{2}=4950$ может сократиться вплоть до n–1=99). Это может произойти, если, например, при сравнении альтернативы a_{i+1} с a_i ($n-1$ вопрос, $i=1,\dots,n-1$) получим, что каждая альтернатива a_{i+1} не менее предпочтительна, чем a_i. В этом случае по транзитивности, очевидно, получим, что все n альтернатив попарно сравнимы, причем альтернатива a_{i+1} $(i = 1, \dots, n-1)$ не менее предпочтительна, чем $a_1, \dots, a_i$.

Обязательно ли применять операцию взятия транзитивного замыкания к матрице смежности формируемого отношения после каждого сравнения двух альтернатив? На этот вопрос отвечают следующие утверждения.

Утверждение 4.1. Можно выбрать первые n–1 вопросов в попарном сравнении n альтернатив таким образом, что при применении процедуры взятия транзитивного замыкания n–2 раза (после каждого вопроса, начиная со второго) или один раз после последнего, (n–1)-го, вопроса получим одну и ту же матрицу смежности формируемого отношения предпочтения.

Доказательство утверждения 4.1. Для доказательства просто приведем пример таких n–1 вопросов: альтернатива a_1 последовательно сравнивается с остальными альтернативами $a_2, a_3, \dots, a_n$. Другой вариант сравнивать a_i с a_{i+1} для всех $i = 1, \dots, n-1$. И в том и в другом случае каждый раз в сравнении участвует новая альтернатива, которая ранее ни с какой другой альтернативой не сравнивалась. Поэтому промежуточные взятия транзитивного замыкания не требуются. Таким образом, достаточно одного взятия транзитивного замыкания вместо n–2. ▲

Следующее утверждение обобщает утверждение 4.1 для случая задания произвольных по счету вопросов.

Пусть каждая альтернатива из подмножества $\tilde{A} = \{a_{i_1},\ a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$ $(\tilde{A} \subseteq A)$ не сравнима ни с одной альтернативой из множества $A \backslash \tilde{A}$.

Утверждение 4.2. При применении процедуры взятия транзитивного замыкания k–2 раза после каждого сравнения произвольной альтернативы $a_i \in A$ с альтернативами $a_{i_1},\ a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ из $\tilde{A}$ или один раз после последнего, k–1, вопроса получим одну и ту же матрицу смежности формируемого отношения предпочтения.

Доказательство утверждения 4.2. В этом утверждении, как и в предыдущем, каждый раз в сравнении участвует новая альтернатива, которая ранее ни с какой альтернативой не была сравнима. Поэтому промежуточные взятия транзитивного замыкания не требуются. Таким образом, достаточно одного взятия транзитивного замыкания вместо k–2. ▲

Замечание. Процедуру взятия транзитивного замыкания, очевидно, не стоит применять и в случае, когда отношение транзитивно. Проверка транзитивности отношения ρ сводится к проверке выполнения условия $\rho^2 \subseteq \rho$ и имеет небольшую вычислительную сложность $O(n^2)$.

Утверждение 4.3. Добавление к транзитивному отношению информации 1-4 о сравнении двух ранее не сравниваемых альтернатив (с. 106) не приводит к получению противоречивого контура.

Доказательство утверждения 4.3. (От противного). Пусть ρ – транзитивное отношение на множестве $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, которое не содержит упорядоченных пар $< a_i,\ a_j >$ и $< a_j,\ a_i >$. Предположим, что после добавления к ρ пары, например, $< a_i,\ a_j >$, был получен противоречивый контур: $< a_i,\ a_j >$, $< a_j,\ a_{j_1} >$,…, $< a_{j_k}, a_i >$. Но из цепочки $< a_j,\ a_{j_1} >$,…, $< a_{j_k}, a_i >$ этого контура по транзитивности ρ получаем $< a_j, a_i > \in \rho$, а это противоречит тому, что альтернативы a_i и a_j не сравнимы по отношению ρ.▲

Таким образом, процедуру взятия транзитивного замыкания первоначально достаточно применить после сравнения $(n-1)$-й пары элементов, например, после сравнения одного из элементов со всеми остальными. Количество применений процедуры взятия транзитивного замыкания на следующих этапах зависит от числа оставшихся несравнимых альтернатив (утверждение 4.2).

Для определения того, что альтернатива из подмножества $\tilde{A} = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$ ($\tilde{A} \subseteq A$), т.е. не сравнима ни с какой альтернативой из множества A, будем использовать следующее утверждение.

Пусть $\tilde{R} = \|\tilde{r}_{ij}\|$ – матрица смежности порядка n (число альтернатив) произвольного отношения ρ на множестве A. Вектор $S =< s_1,\ s_2, \dots, s_n >$ – n-мерный вектор с компонентами, вычисляемыми по следующей формуле:

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} (\tilde{r}_{ij} + \tilde{r}_{ji}).$$

Утверждение 4.4. Если *i-ый* элемент вектора S равен нулю ($s_i = 0$), то альтернатива $a_i \in \tilde{A}$.

Доказательство утверждения 4.4. Действительно, если *i-ая* строка и *i-ый* столбец матрицы R содержат только нулевые элементы, то это означает, что альтернатива a_i не сравнима ни с одним из элементов множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. ▲

Следующий тип экспертной информации – ранжирование. Ранжирование альтернатив осуществляется просто: каждой альтернативе ставится в соответствие ее порядковый номер. Равноценные альтернативы получают один и тот же номер.

Если эксперт не может осуществить сравнение всех альтернатив, но может указать множество наилучших альтернатив, то элементы матрицы предпочтений, равные единице, будут указывать на предпочтения наилучших элементов над всеми остальными. Наилучшие элементы будут равноценны (соответствующие элементы матрицы предпочтений равны ½).

И, наконец, эксперт может указать, во сколько раз одна альтернатива предпочтительнее другой, или поставить каждой альтернативе в соответствие числовую оценку – неотрицательное действительное число.

Пусть индивидуальные предпочтения m экспертов на множестве альтернатив $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ заданы векторами $h^1, h^2 \dots, h^m$ размерности n, где $h^j = (h_1^j, h_2^j, \dots, h_n^j)$ – вектор с компонентами $h_i^j \in R^+$, равными численным оценкам альтернатив ($i \in \{1,\dots,n\}$, $j \in \{1,\dots,m\}$)). Тогда $R^t = \|r_{ij}^t\|$ (t=1,…,m) – квадратная матрица порядка n (n – число альтернатив) с элементами $r_{ij}^t = \dfrac{h_j^t}{h_i^t + h_j^t}$, если значения оценок по шкале t-го эксперта максимизируются, и $r_{ij}^t = \dfrac{h_i^t}{h_i^t + h_j^t}$, если значения оценок по шкале t-го эксперта минимизируются; ($i \neq j,\ r_{ii} = 1$).

Для того чтобы получить информацию во сколько раз одна альтернатива предпочтительнее другой для всех пар альтернатив достаточно задать вместо $n^2 - n$ вопросов всего $n - 1$. Для этого можно сравнить, например, альтернативу a_1 с a_2, a_2 с a_3,…, a_{n-1} с a_n. Тогда, если альтернатива a_1 предпочтительнее альтернативы a_2 в β_{12} раза, а альтернатива a_2 предпочтительнее a_3 в β_{23} раз, то альтернатива a_1 предпочтительнее альтернативы a_3 в $\beta_{23} = \beta_{12}\beta_{23}$ и т. д. Формирование элементов матриц предпочтения аналогично предыдущему случаю. Предварительно оценку одной из альтернатив надо положить равной конкретному числу, например, единице. Выбор числа неважен, так как матрица предпочтений содержит только информацию во сколько раз одна альтернатива лучше другой.

4.4. Математическая модель и логическая схема процесса многокритериального выбора

Подсистема поддержки многокритериального выбора основывается на следующей математической модели:

$$< t,\ A,\ K,\ X,\ F, k\ , r >,$$

где t – постановка задачи многокритериального выбора; $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – множество рассматриваемых альтернатив; $K = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$ – множество критериев; $X = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ – множество шкал критериев; $F = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ – предпочтения по шкалам критериев; $k = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ – множество коэффициентов важности критериев; r – решающее правило.

Как и в задаче группового выбора, в зависимости от содержательной постановки задачи и пожеланий ЛПР может быть построено агрегированное отношение предпочтения на множестве альтернатив, произведено ранжирование альтернатив или осуществлен выбор наилучших вариантов альтернатив. $K = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$ – множество критериев; $X = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ – множество шкал критериев. Шкалы критериев могут быть числовыми или качественными, т.е. указывать предпочтения по данной шкале на множестве альтернатив. Значения оценок по числовым шкалам критериев обычно минимизируются или максимизируются. Существуют шкалы, у которых наилучшие и худшие оценки зависят от предпочтений ЛПР, например, месторасположение альтернативы. Предпочтения по шкалам критериев $F = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ могут быть заданы числовыми оценками альтернатив по данному критерию, попарным сравнением (в частности ранжированием альтернатив), выбором множества наилучших альтернатив, отношениями предпочтения на множестве альтернатив. Коэффициенты важности критериев $k = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ могут быть непосредственно заданы ЛПР или найдены в диалоговом режиме одним из существующих способов, согласованно с решающим правилом. Под решающим правилом r в данной системе понимаются алгоритмы непротиворечивого агрегирования предпочтений, основанные на построении нагруженного мажоритарного графа, алгоритмы построения коэффициентов важности критериев, а также алгоритмы выбора наиболее предпочтительных вариантов решений или ранжирования их по предпочтительности.

Основные этапы процесса многокритериального выбора отражены на схеме, представленной на рис. 4.2.

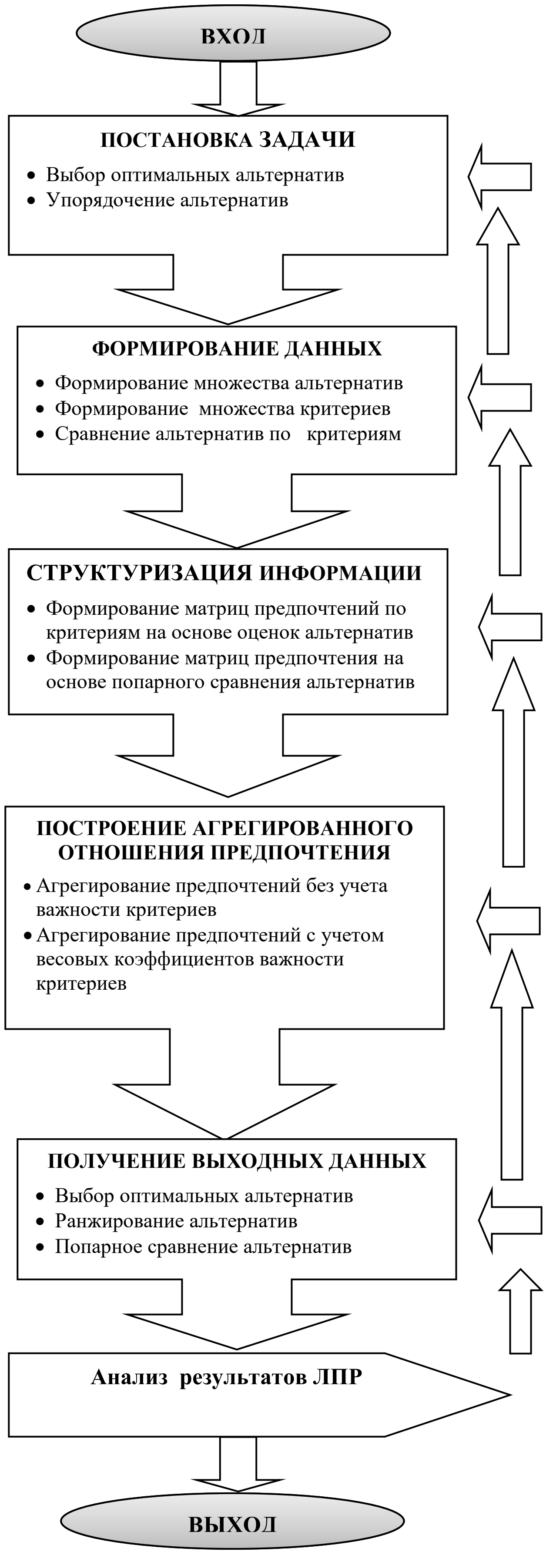
ВХОД
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ
• Выбор оптимальных альтернатив
• Упорядочение альтернатив
ФОРМИРОВАНИЕ ДАННЫХ
• Формирование множества альтернатив
• Формирование множества критериев
• Сравнение альтернатив по критериям
СТРУКТУРИЗАЦИЯ ИНФОРМАЦИИ
• Формирование матриц предпочтений по критериям на основе оценок альтернатив
• Формирование матриц предпочтения на основе попарного сравнения альтернатив
ПОСТРОЕНИЕ АГРЕГИРОВАННОГО ОТНОШЕНИЯ ПРЕДПОЧТЕНИЯ
• Агрегирование предпочтений без учета важности критериев
• Агрегирование предпочтений с учетом весовых коэффициентов важности критериев
ПОЛУЧЕНИЕ ВЫХОДНЫХ ДАННЫХ
• Выбор оптимальных альтернатив
• Ранжирование альтернатив
• Попарное сравнение альтернатив
Анализ результатов ЛПР
ВЫХОД

Рис. 4.2.

На первом этапе ЛПР формулирует постановку задачи. На этапе ввода исходных данных и их обработки системой совместно с ЛПР формируются множество альтернатив и множество критериев. Их количество ограничивается только оперативной памятью. Списки альтернатив и критериев заполняются последовательным добавлением в систему. Затем система запрашивает информацию о предпочтениях на множестве альтернатив по каждому из критериев: попарное сравнение альтернатив, ранжирование альтернатив, численные оценки альтернатив. В случае необходимости ЛПР может ввести весовые коэффициенты важности критериев.

Следующий этап работы системы – формирование на основе полученной информации матриц критериальных предпочтений. Затем система переходит к основному этапу своей работы – построению агрегированного отношения квазипорядка. Алгоритм модифицируется в зависимости от вида входной информации, в частности, при задании коэффициентов важности критериев.

На основе построенного агрегированного предпочтения система производит ранжирование альтернатив или выбор наилучших из них. Если полученный результат удовлетворяет ЛПР, система заканчивает работу. В противном случае работа будет продолжена.

4.5. Обобщение результатов работы подсистем многокритериального и экспертного выбора

Рассмотрим задачу покупки легкого автомобиля для семьи из пяти человек. Ответственность за покупку автомобиля возложили на главу семьи (ЛПР). Сформулировав свои ограничения и предпочтения по цене, фирме-производителю, объему двигателя, надежности в эксплуатации, комфортабельности, ЛПР воспользовался подсистемой многокритериального выбора. В результате работы подсистемы было получено ранжирование марок автомобилей по предпочтительности. Окончательное решение ЛПР решил принять с учетом мнений членов семьи. Узнав предпочтения всех родных, ЛПР воспользовался подсистемой группового выбора и произвел ранжирование автомобилей.

Затем блок системы поддержки принятия решений, отвечающий за обобщение работы подсистем многокритериального и группового выбора, произвел окончательное ранжирование автомобилей по предпочтительности. Использование системы позволило семье купить оптимальный с точки зрения выбранных критериев оценки автомобиль, максимально учитывающий запросы каждого из членов семьи.

Рассмотренный пример наглядно иллюстрирует, что при принятии решений могут быть одновременно задействованы алгоритмы индивидуального и группового выбора. Система принятия решений предоставляет возможность ЛПР как использовать самостоятельно подсистемы группового и многокритериального выбора, так и обобщать их работу. Для обобщения работы подсистем также используется алгоритм непротиворечивого агрегирования отношений предпочтения: проводится агрегирование экспертных и критериальных предпочтений. На рис. 4.3 представлен блок СППР, обобщающий работу двух ее подсистем.

Система принятия решений разрабатывалась на языке программирования Java, в результате чего она имеет ряд интересных технических особенностей. Программы транслируются в байт-код и в дальнейшем выполняются виртуальной Java-машиной. Это позволяет выполнять приложения на любом устройстве, поддерживающем виртуальную машину (планшет или смартфон).

Важной особенностью такой реализации является полный контроль виртуальной машины над выполнением приложения, вследствие чего даже при возникновении каких-либо ошибок она не может повредить систему, и данные приложения не могут быть классифицированы как вирусы. Также, вследствие модульности данной системы, она имеет широкий потенциал для масштабирования, в нее очень просто могут быть добавлены новые модули считывания и обработки данных, модули для анализа результатов в соответствии с заданными критериями.

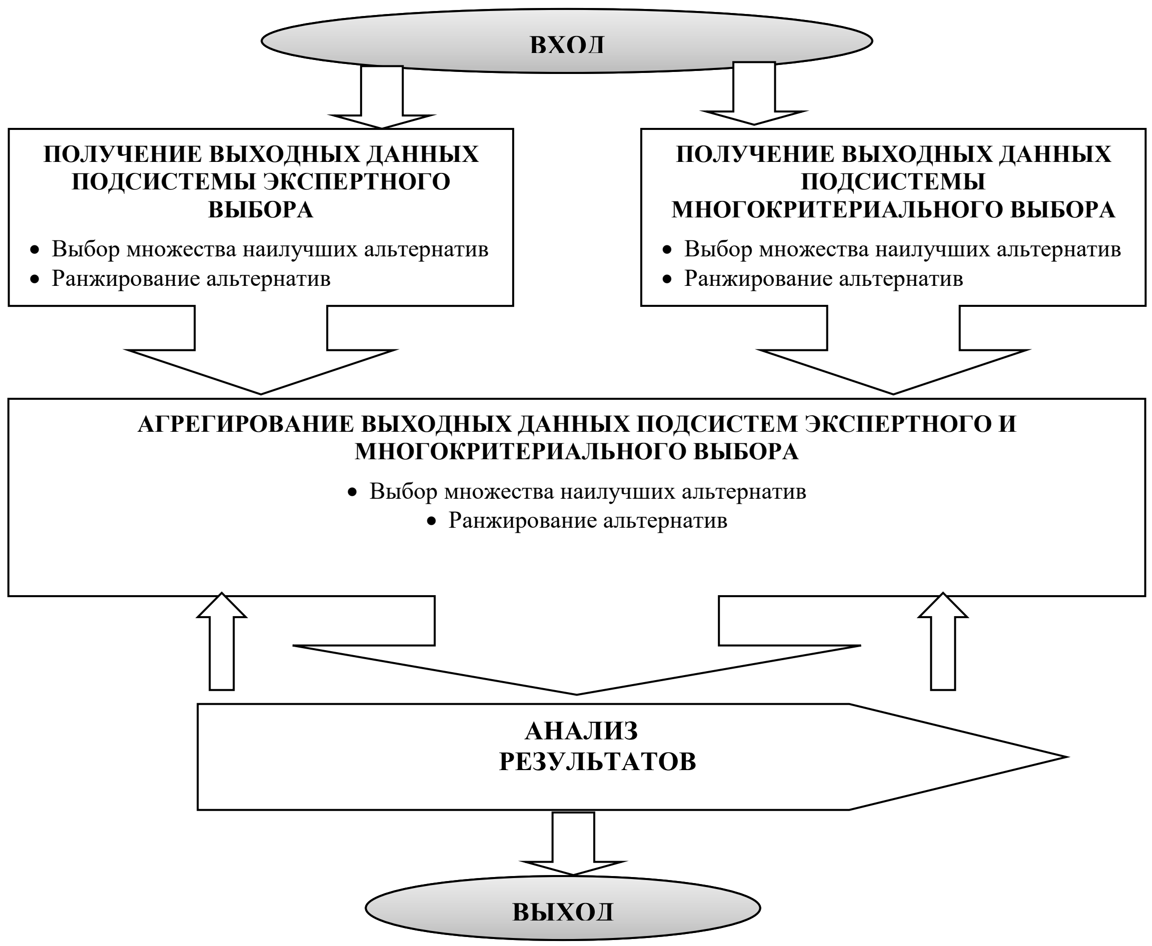

Рис. 4.3.

4.6. Выводы по главе 4

1. Описана математическая модель и разработана логическая схема подсистемы группового выбора.

2. Разработана методика проведения экспертного опроса, позволяющая формировать для каждого из экспертов непротиворечивое отношение предпочтения.

3. Описана математическая модель и разработана логическая схема подсистемы многокритериального выбора.

4. На основе оригинальной методики агрегирования предпочтений разработана логическая схема системы процесса поддержки принятия решений.

ГЛАВА 5

Применение процедур агрегирования для решения прикладных задач

5.1. Выбор моделей пассажирских самолетов с разными по важности критериями качества

Рассматривается задача выбора моделей самолетов средней дальности для закупки авиационно-транспортной компанией. При решении задачи учитывается, что критерии, по которым оцениваются самолеты, имеют разную важность для ЛПР. В этом примере для построения коэффициентов важности критериев используется методика, основывающаяся на нахождении точек безразличия альтернатив, и их аппроксимации кривыми. Подобная процедура приведена в работе [22] при построении кривых безразличия для пар критериев. Кривой безразличия принадлежат точки с координатами-оценками равноценных альтернатив. Не изменяя терминов, введенных Кини и Райфа, заметим, что фактически точки безразличия являются точками равноценности. Равноценные альтернативы находим в диалоге с ЛПР: изменяем значения оценки альтернативы по одному из критериев, а затем устанавливаем компенсацию по шкале другого критерия.

5.1.1. Выбор моделей пассажирских самолетов с постоянными коэффициентами важности

Приведем алгоритм нахождения постоянных коэффициентов важности. В этом случае точки равноценности-безразличия аппроксимируются прямой.

Алгоритм нахождения постоянных коэффициентов важности критериев

1. В диалоге с ЛПР находим точки безразличия альтернатив по двум критериям.

2. Аппроксимируем точки безразличия прямой.

3. Тангенс угла наклона этой прямой по модулю равен отношению значений весовых коэффициентов важности критериев.

4. Повторяем пункты 1, 2, 3 для сравнения коэффициентов важности (m–1) пары критериев (m – число критериев), причем в каждой паре должен присутствовать один критерий, которого еще не было в других парах.

5. По информации об отношении коэффициентов важности критериев находим величины коэффициентов.

Заметим, что для построения прямой безразличия необходимо перевести оценки по критериям в однородные шкалы. Для этого достаточно выбрать на осях координат одинаковые отрезки, в которых наилучшему и наихудшему значениям по шкалам критериев будут соответствовать начало и конец отрезка.

Опишем подробнее шаги алгоритма на примере сравнения пассажирских самолетов средней дальности, оцениваемых ЛПР по трем критериям качества: K_1 – цена, K_2 – послепродажное обслуживание, K_3 – летно-технические характеристики [32].

Для нахождения коэффициентов важности всех критериев достаточно сравнить между собой m–1 пару критериев. В нашем примере возьмем следующие две пары критериев: цена и обслуживание, цена и летно-технические характеристики.

Сравним важность критериев цена и обслуживание. Пусть допустимая цена на самолет для ЛПР не более 2 млрд. руб. Оценка послепродажного обслуживания самолетов проведена экспертами по бальной шкале от 1 до 10 (наилучшая оценка – 10 баллов). Пусть самолету стоимостью 2 млрд. руб.

поставлена оценка 10 баллов за обслуживание. На координатную плоскость наносим точку <2млрд., 10>. Зададим ЛПР вопрос.

– На сколько баллов максимально можно изменить оценку, характеризующую затраты на обслуживание, если цену самолета уменьшить на 400 млн. руб.?

Ответ ЛПР

– На два балла.

На координатную плоскость наносим точку <1,6 млрд., 8>. Зададим ЛПР вопрос.

– На сколько баллов максимально можно изменить оценку, характеризующую затраты на обслуживание, если цену самолета уменьшить еще на 400 млн. руб.?

– Еще на один балл.

На координатную плоскость наносим точку <1,2 млрд., 7>. Зададим ЛПР следующий вопрос.

– На сколько баллов максимально можно изменить оценку, характеризующую затраты на обслуживание, если цену самолета уменьшить на 1 млрд. руб.?

– На четыре балла.

На координатную плоскость наносим точку <1млрд., 6>. Последний вопрос.

– На сколько баллов максимально можно изменить оценку, характеризующую затраты на обслуживание, если цену самолета уменьшить на 1,2 млрд. руб.?

– На пять баллов.

На координатную плоскость наносим точку <0,8 млрд., 5>.

При построении аппроксимирующих прямых необходимо учитывать, что оценки альтернатив по критериям предварительно приводятся к однородным шкалам. Для этого достаточно выбрать на осях координат одинаковые отрезки, в которых будут заключены все оценки по критериям: от максимальной до минимальной.

В результате такого диалога выявляется информация об отношении весовых коэффициентов важности критериев: отношение коэффициентов равно модулю тангенса угла наклона прямой (коэффициент t в уравнении прямой).

Для аппроксимации полученных точек прямой воспользуемся методом наименьших квадратов. Напомним суть этого метода.

Задача заключается в нахождении коэффициентов линейной комбинации, при которых функция двух переменных k и b $F(k,b)=\sum_{i=1}^{l}\left(y_i-(kx_i+b)\right)^2$ принимает наименьшее значение. То есть, при данных k и b сумма квадратов отклонений экспериментальных данных от найденной прямой будет наименьшей. В этом вся суть метода наименьших квадратов.

Таким образом, задача сводится к нахождению экстремума функции двух переменных.

Находим частные производные функции $F(k,b)=\sum_{i=1}^{l}\left(y_i-(kx_i+b)\right)^2$ по переменным k и b, приравнивая затем их к нулю:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F(k,b)}{\partial k}=0\\ \dfrac{\partial F(k,b)}{\partial b}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2\sum_{i=1}^{l}\left(y_i-(kx_i+b)\right)x_i=0\\ -2\sum_{i=1}^{l}\left(y_i-(kx_i+b)\right)=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}k\sum_{i=1}^{l}x_i^2+b\sum_{i=1}^{l}x_i=\sum_{i=1}^{l}x_iy_i\\ k\sum_{i=1}^{l}x_i+\sum_{i=1}^{l}b=\sum_{i=1}^{l}y_i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k\sum_{i=1}^{l}x_i^2+b\sum_{i=1}^{l}x_i=\sum_{i=1}^{l}x_iy_i\\ k\sum_{i=1}^{l}x_i+lb=\sum_{i=1}^{l}y_i\end{cases}.$$

Решаем полученную систему любым методом и получаем формулы для нахождения коэффициентов:

$$\begin{cases} k = \dfrac{l\sum\limits_{i=1}^{l} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{l} x_i \sum\limits_{i=1}^{l} y_i}{l\sum\limits_{i=1}^{l} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{l} x_i\right)^2} \\ b = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{l} y_i - k\sum\limits_{i=1}^{l} x_i}{l} \end{cases}.$$

При данных k и b функция $F(k,b) = \sum\limits_{i=1}^{l}\left(y_i - (kx_i + b)\right)^2$ принимает наименьшее значение.

В нашем примере число точек $l = 5$. Положим максимальное значение по шкале стоимость $x_{max} = 2$ млрд. руб., минимальное – $x_{min} = 0.2$ млрд. руб. Переведем значения стоимости в однородную шкалу [a;b] =[1;10] с учетом минимизации оценок по шкале стоимость по следующей формуле:

$$x_{\text{одн.}} = \frac{b-a}{x_{max} - x_{min}}\left(x_{max} - x_{\text{неодн.}}\right) + a$$

$$x_{\text{одн.}} = \frac{9}{1.8}\left(2 - x_{\text{неодн.}}\right) + 1 = 5\left(2 - x_{\text{неодн.}}\right) + 1$$

Получим:

2 млрд. $\Leftrightarrow$ 1; 1,6 млрд. $\Leftrightarrow$ 3;

1,2 млрд. $\Leftrightarrow$ 5; 1 млрд. $\Leftrightarrow$ 6;

0,8 млрд. $\Leftrightarrow$ 7.

Для удобства вычисления заполним следующую таблицу.

Таблица 5.1

	i =1	i =2	i =3	i =4	i =5	$\sum\limits_{i=1}^{5}$
x_i	1	3	5	6	7	22
y_i	10	8	7	6	5	36
$x_i y_i$	10	24	35	36	35	140
x_i^2	1	9	25	36	49	120

Вычислим значения коэффициентов прямой:

$$k = \frac{5 \cdot 140 - 22 \cdot 36}{5 \cdot 120 - 22^2} = -\frac{23}{29} \approx -0.793;$$

$$b = \frac{36 - k \cdot 22}{5} = \frac{36 + \frac{23}{29} \cdot 22}{5} \approx 10.69.$$

Прямая имеет вид $y = -0.793x + 10.69$ (рис. 5.1), $tg\alpha = -\frac{23}{29}$. Таким образом, отношение весовых коэффициентов важности $\frac{k_2}{k_1} = \frac{23}{29}$.

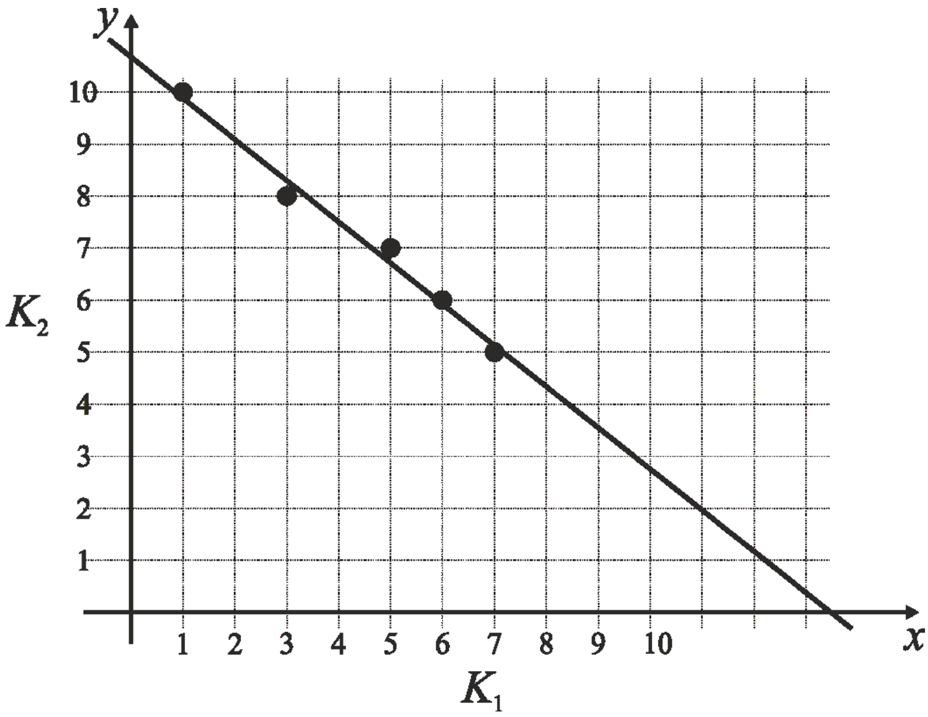

Рис. 5.1

Аналогично найдем в диалоге с ЛПР равноценные точки по критериям цена и летно-технические характеристики: <2млрд.; 10>, <1,6млрд.; 9>, <1,2 млрд.; 8>, <1 млрд.; 7>, <0,8 млрд.; 6>.

Заполним следующую таблицу.

Таблица 5.2

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$\sum_{i=1}^{5}$
x_i	1	3	5	6	7	22
y_i	10	9	8	7	6	40
$x_i y_i$	10	27	40	42	42	161
x_i^2	1	9	25	36	49	120

Вычислим значения коэффициентов для второй прямой.

$$k = \frac{5 \cdot 161 - 22 \cdot 40}{5 \cdot 120 - 22^2} = -\frac{75}{116} \approx -0.647\,;$$

$$b = \frac{40 - k \cdot 22}{5} = \frac{40 + \frac{75}{116} \cdot 22}{5} \approx 10.85\,.$$

Прямая имеет вид $y = -0.647x + 10.85$ (рис. А2), $tg\alpha = -\frac{75}{116}$. Таким образом, отношение весовых коэффициентов важности $\frac{k_3}{k_1} = \frac{75}{116}$.

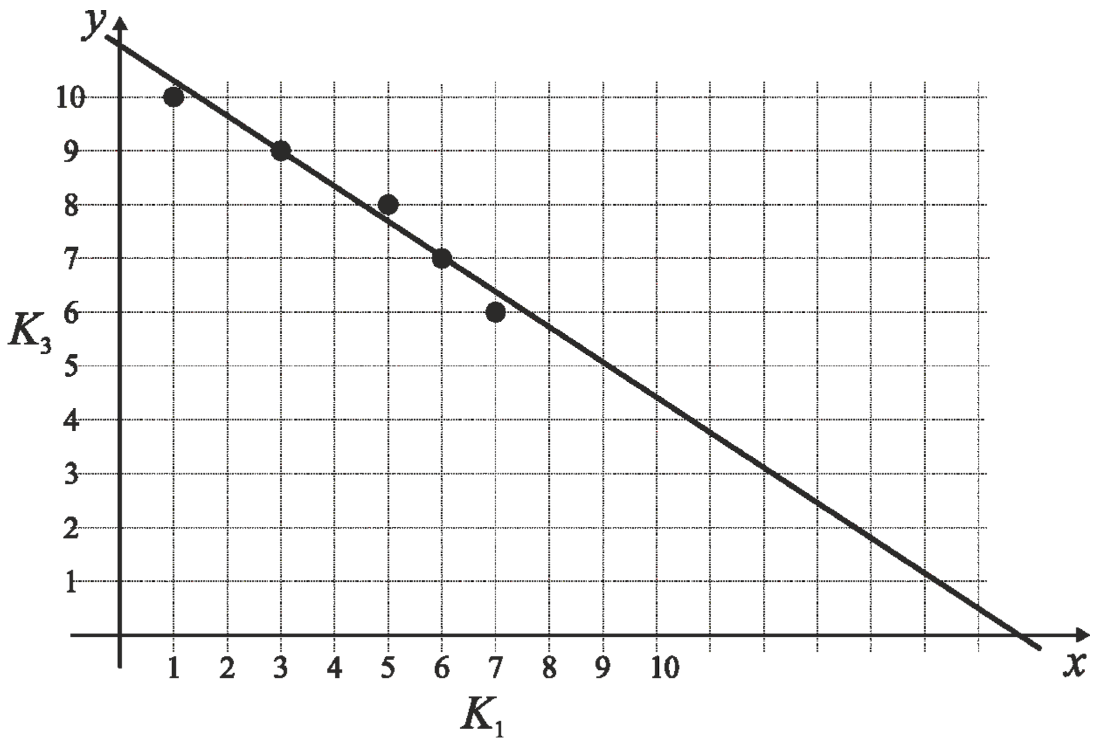

Рис. 5.2

Для нахождения значений коэффициентов важности критериев составим систему уравнений.

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 1 \\ \dfrac{k_2}{k_1} = \dfrac{23}{29} \\ \dfrac{k_3}{k_1} = \dfrac{75}{116} \end{cases}$$

Решив систему, получим:

$$k_1 = \frac{116}{283} \approx 0.41\,;\ k_2 = \frac{92}{283} \approx 0.325\,;\ k_3 = \frac{75}{283} \approx 0.265\,.$$

Можно было положить значение какого-нибудь коэффициента равным произвольному числу (например, единице), а затем легко найти значение всех остальных коэффициентов важности критериев. Полученные коэффициенты по желанию ЛПР можно нормировать: результат сравнения альтернатив не зависит от нормирования коэффициентов.

Приведем пример, иллюстрирующий работу алгоритма агрегирования предпочтений с учетом задания весовых коэффициентов важности критериев.

Авиационно-транспортная компания решила приобрести дополнительно два пассажирских самолета средней дальности. Выбор решено было сделать из четырех самолетов a_1, a_2, a_3, a_4 на основе сравнения их по трем критериям качества: K_1 – цена, K_2 – послепродажное обслуживание, K_3 – летно-технические характеристики. Проведем сравнение самолетов с учетом и без учета важности критериев, т.е. с равными и с различными весовыми коэффициентами важности критериев. Оценки самолетов a_1, a_2, a_3, a_4 приведены в таблице 5.3.

Таблица 5.3

Критерий/ Самолет	Цена млрд. руб.	Обслуживание 1-10 баллов	ЛТХ 1-10 баллов
a_1	2	10	8
a_2	1,5	8	6
a_3	1	6	6
a_4	0,5	4	4

Оценки самолетов a_1, a_2, a_3, a_4 в однородных шкалах приведены в таблице 5.4.

Таблица 5.4

Критерий/ Самолет	Цена млрд. руб.	Обслуживание 1-10 баллов	ЛТХ 1-10 баллов
a_1	1	10	8
a_2	3,5	8	6
a_3	6	6	6
a_4	8,5	4	4

Найдем значения аддитивной функции полезности для каждой альтернативы по формуле:

$$f(a_j) = \sum_{i=1}^{m} k_i \, x_i^j,$$

где x_i^j – оценка альтернативы a_j по критерию K_i, $\quad i = 1,2,3.$

Положив коэффициенты важности критериев равными единице, получим

$$f(a_1) = 1 + 10 + 8 = 19$$

$$f(a_2) = 3.5 + 8 + 6 = 17.5$$

$$f(a_3) = 6 + 6 + 6 = 18$$

$$f(a_4) = 8.5 + 4 + 4 = 16.5$$

С учетом $k_1 \approx 0.41$; $k_2 \approx 0.325$; $k_3 \approx 0.265$, получим

$$f(a_1) = 0.41 \cdot 1 + 0.325 \cdot 10 + 0.265 \cdot 8 = 5.78$$

$$f(a_2) = 0.41 \cdot 3.5 + 0.325 \cdot 8 + 0.265 \cdot 6 = 5.625$$

$$f(a_3) = 0.41 \cdot 6 + 0.325 \cdot 6 + 0.265 \cdot 6 = 6$$

$$f(a_4) = 0.41 \cdot 8.5 + 0.325 \cdot 4 + 0.265 \cdot 4 = 5.845$$

Наиболее предпочтительная альтернатива по методу аддитивной свертки с равными по важности критериями оказывается a_1; с учетом коэффициентов важности критериев – a_3. Самый большой весовой коэффициент имеет критерий «стоимость», поэтому и выбрана более дешевая модель самолета a_3.

Построим агрегированное отношение предпочтения по методу агрегирования. На основе значений оценок альтернатив по каждому критерию качества найдем соответственно матрицы предпочтений:

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{7} & \frac{2}{3} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{7} & 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}; \quad R^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{9} & \frac{3}{8} & \frac{2}{7} \\ \frac{5}{9} & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{8} & \frac{4}{7} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{5}{7} & \frac{2}{3} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}; \quad R^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{7} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Построим агрегированное отношение предпочтения для равных по важности критериев. В этом случае матрица суммарных предпочтений P_1 и матрица смежности $R_{\Sigma 1}$ соответствующего мажоритарного графа имеют вид:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{13}{9} & \frac{247}{168} & \frac{149}{105} \\ \frac{14}{9} & 0 & \frac{107}{70} & \frac{89}{60} \\ \frac{257}{168} & \frac{103}{70} & 0 & \frac{22}{15} \\ \frac{166}{105} & \frac{91}{60} & \frac{23}{15} & 0 \end{pmatrix} \text{ и } R_{\Sigma 1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мажоритарный граф представлен на рис. 5.3.

Найдем теперь агрегированное отношение предпочтения с учетом полученных выше коэффициентов важности критериев: $k_1 \approx 0.41$;

$k_2 \approx 0.325$; $k_3 \approx 0.265$. Матрица суммарных предпочтений P_2 и матрица смежности $R_{\Sigma 2}$ соответствующего мажоритарного графа имеют вид:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.492 & 0.509 & 0.509 \\ 0.508 & 0 & 0.518 & 0.522 \\ 0.491 & 0.492 & 0 & 0.509 \\ 0.491 & 0.478 & 0.491 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } R_{\Sigma 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мажоритарный граф представлен на рис. 5.4.

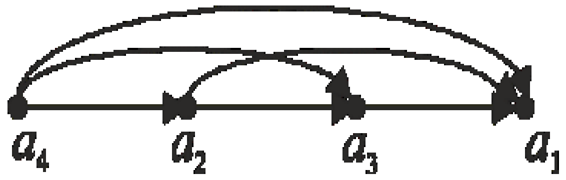

Рис. 5.3

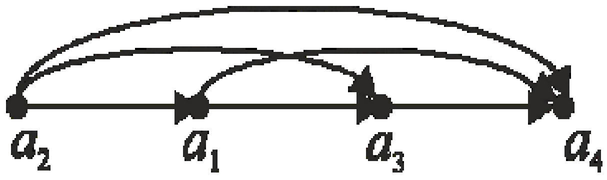

Рис. 5.4

Графы, изображенные на рис. 5.3 и 5.4, транзитивны и не содержат контуров. Следовательно, можно ранжировать альтернативы по предпочтительности: a_1–a_3–a_2–a_4 (a_1 – лучший самолет, рис. 5.3) и a_4–a_3–a_1–a_2 (a_4 – лучший самолет, рис. 5.4). Если считать, что все критерии имеют одинаковую важность, то следует закупить самолеты a_1 и a_3. С учетом полученных весовых коэффициентов важности критериев – недорогие самолеты a_3 и a_4.

Результаты, полученные методами аддитивной свертки и агрегирования с равными и различными по важности критериями приведен в таблице 5.5. Приведенный пример иллюстрирует влияние предпочтений ЛПР по критериям на конечный результат ранжирования альтернатив: задание коэффициентов важности критериев кардинально изменило ранжирование самолетов.

Таблица 5.5

Аддитивная свертка с равной важностью	Аддитивная свертка с коэффициентами	Агрегирование с равной важностью	Агрегирование с коэффициентами
a_1	a_3	a_1	a_4
a_3	a_4	a_3	a_3
a_2	a_1	a_2	a_1
a_4	a_2	a_4	a_2

Результаты двух методов с равными по важности критериями совпали, с коэффициентами важности немного отличаются (a_3 и a_4 поменялись местами). Но в обоих методах с учетом наибольшей важности критерия стоимость победили экономные модели a_3 и a_4. Таким образом, конечный результат ранжирования альтернатив зависит и от исходной информации, и от выбора метода расчета. Выбор метода зависит от предпочтений ЛПР. Сравнительный анализ методов агрегирования и аддитивной свертки был подробно проведен в главе 3.

Также заметим, что в дальнейшем планируется разработать методику вычисления коэффициентов важности критериев на основе построения кривых безразличия, аппроксимируемых гиперболой.

5.1.2. Выбор моделей пассажирских самолетов с переменными коэффициентами важности критериев

Для определения весовых коэффициентов важности критериев, наиболее полно учитывающих предпочтения ЛПР, необходимо аппроксимировать точки равноценности-безразличия альтернатив кривой, имеющей наименьшее суммарное отклонение от этих точек. Для нахождения коэффициентов важности с помощью кривых безразличий необходимо, чтобы кривая, аппроксимирующая точки, была:

- непрерывной;

- монотонно убывающей;

- со знакопостоянной второй производной.

Требования монотонности и знакопостоянства второй производной (кривая либо выпукла вверх, либо выпукла вниз) позволяют «сгладить» непроизвольные неточности в ответах, которые могут возникнуть при общении с ЛПР. На ответы ЛПР могут влиять такие субъективные факторы как настроение, усталость, внешние отвлекающие факторы и т.п. Так как график аппроксимирующей функции строится для однородных шкал критериев и, следовательно, для всех шкал оценки максимизируются либо минимизируются, то получим убывающую функцию.

Для того, чтобы удовлетворить всем требованиям к кривой можно аппроксимировать точки безразличия на рассматриваемом интервале квадратичной функцией (рис. 5.5).

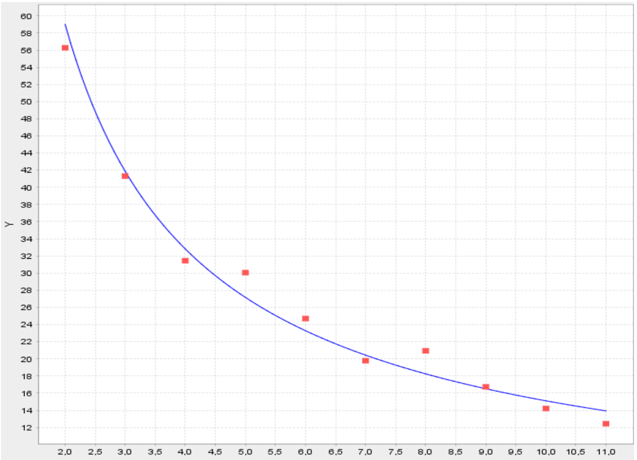

Рис. 5.5. Пример аппроксимирующей функции

Перечислим основные этапы нахождения весовых коэффициентов важности критериев на основе аппроксимации кривой точек, соответствующих векторным оценкам равноценных альтернатив. Перед применением алгоритма необходимо выделить в диалоге с ЛПР главный критерий или определить его произвольно. Затем для всех пар критериев, один из которых основной, находим отношение коэффициентов важности по следующему алгоритму.

Алгоритм нахождения переменных коэффициентов важности критериев

1. Выявление точек безразличия (равноценности) альтернатив в диалоге с ЛПР.
2. Нахождение значений точек безразличия в однородных шкалах.
3. Аппроксимация точек безразличия кривой.
4. Разбиение кривой на отрезки ломаной согласно делению шкалы главного критерия.
5. Расчет отношения коэффициентов важности для различных интервалов шкалы главного критерия.

Обобщая результаты, полученные для пар критериев, находим значения весовых коэффициентов всех критериев из решения системы линейных уравнений.

Аппроксимирующую функцию удобно находить методом наименьших квадратов (МНК). Приведем основные этапы построения аппроксимирующей квадратичной функции $F = a_0 + a_1x + a_2x^2$ методом наименьших квадратов.

Находим коэффициенты линейной комбинации, при которых функция

$$\Phi = \sum_{j=0}^{N}\left[(a_0 + a_1x + a_2x^2) - y_j\right]^2$$

с неизвестными коэффициентами a_i принимает наименьшее значение.

Необходимые условия минимума функции Φ имеют вид:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a_k} = 2\sum_{i=0}^{N}\left[\sum_{j=0}^{2} a_j x_i^j - y_i\right]\cdot x_i^k = 0, \quad k = \overline{0,2}$$

Для удобства преобразуем эту систему к виду:

$$\sum_{j=0}^{2} a_j \sum_{i=0}^{n} x_i^{k+j} = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^k, \quad k = \overline{0,2}$$

Для МНК 2-ого порядка система имеет вид:

$$\begin{cases} \{a_0(n+1) + a_1\sum\limits_{i=0}^{n} x_i + a_2\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i \\ a_0\sum\limits_{i=0}^{n} x_i + a_1\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 + a_2\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^3 = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i x_i \\ a_0\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 + a_1\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^3 + a_2\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^4 = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i x_i^2 \end{cases}$$

Это система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_i, которые можно найти с помощью метода Гаусса.

При упорядочении всех альтернатив возникают трудности в нахождении матрицы суммарных предпочтений: одновременно необходимо использовать весовые коэффициенты важности критериев, полученные для разных интервалов шкалы главного критерия. В матрице суммарных предпочтений, если оценки альтернатив a_i и a_j попадают в один интервал по шкале главного критерия, то элементы матриц предпочтений r_{ij} и r_{ji} умножаются на один и тот же весовой коэффициент. Если же альтернативы a_i и a_j попадают в разные интервалы, то порядок умножения на весовые коэффициенты зависит от того минимизируются или максимизируются оценки по шкале критерия. Пусть для определенности a_i попадает в первый интервал, a_j – во второй. Если оценки по шкале критерия максимизируются, то элемент матрицы предпочтений r_{ij} умножается на коэффициент из первого ценового интервала, а r_{ji} умножаются на весовой коэффициент из второго интервала. Если оценки по шкале критерия минимизируются, то наоборот. И так для матриц предпочтений по всем критериям. Матрица суммарных предпочтений находится обычно: суммируются матрицы критериальных предпочтений с элементами, умноженными на соответствующие весовые коэффициенты.

<u>Пример закупки пассажирских самолетов</u>

Рассмотрим задачу сравнения пассажирских самолетов средней дальности из параграфа 5.1.1: четыре модели самолетов оцениваются по трем критериям качества. При этом предполагается, что весовые коэффициенты важности критериев не постоянны и зависят от стоимости самолета, т.е. предпочтения ЛПР по важности критериев меняются с изменением стоимости самолета.

Напомним рассматриваемые интервалы шкал критериев:

Название критерия	Шкала	Единица измерения
Цена	[0.5, 2]	млрд. руб.
Послепродажное обслуживание	[0, 10]	баллы
Летно-технические характеристики	[0, 10]	баллы

Алгоритм нахождения весовых коэффициентов важности критериев состоит из следующих этапов.

1. Выявление точек безразличия (равноценности) альтернатив.

Пусть ЛПР выбрал в качестве главного критерия – K_1 (цена).

В ходе диалога с ЛПР находим точки безразличия альтернатив по парам критериев: цена и послепродажное обслуживание (таблица 5.6), цена и летно-технические характеристики (таблица 5.7).

Таблица 5.6

Цена	2	1.6	1.2	1	0.8	0.5	млрд.руб.
Послепродажное обслуживание	10	8	7	6	5	3	балл

Таблица 5.7

Цена	2	1.6	1.2	1	0.8	0.5	млрд.руб.
Л-Т характеристики	10	9	8	7	6	5	балл

2. Нахождение точек безразличия в однородных шкалах.

Выберем в качестве однородной шкалы отрезок [a; b], и пусть значение оценок по данной шкале максимизируются. Неоднородная шкала – отрезок

[c; d]. Если значения оценок по неоднородной шкале максимизируются, то формула перевода имеет вид:

$$x_i^{одн.} = \frac{b-a}{d-c}(x_i^{неодн.} - c) + a.$$

Если значения оценок по неоднородной шкале минимизируются, тогда

$$x_i^{одн.} = \frac{b-a}{d-c}(d - x_i^{неодн.}) + a.$$

Пусть [a; b]= [0; 1]. Тогда для шкал, по которым оценки соответственно максимизируются и минимизируются, формулы примут вид:

$$x_i^{одн.} = \frac{1}{d-c}(x_i^{неодн.} - c) \text{ и } x_i^{одн.} = \frac{1}{d-c}(d - x_i^{неодн.}).$$

По критерию цена отрезок [c; d]= [0.5; 2], оценки минимизируются, следовательно,

$$x_i^{одн.} = \frac{1}{1.5}(2 - x_i^{неодн.}).$$

По критериям послепродажное обслуживание и летно-технические характеристики отрезок [c; d]= [0; 10], оценки максимизируются, следовательно,

$$x_i^{одн.} = \frac{1}{10}x_i^{неодн.}.$$

В таблицах 5.8 и 5.9 представлены оценки по соответствующим критериям в однородных шкалах.

Таблица 5.8

Цена	0	0.267	0.533	0.667	0.8	1	млрд.руб.
Послепродажное обслуживание	1	0.8	0.7	0.6	0.5	0.3	балл

Таблица 5.9

Цена	0	0.267	0.533	0.667	0.6	1	млрд.руб.
Л-Т характеристики	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	балл

3. Аппроксимация точек безразличия кривой.

Для аппроксимации полученных точек (x_i, y_i), $i = \overline{1,n}$ кривой безразличия воспользуемся методом наименьших квадратов 2-го порядка, т.е. найдем аппроксимирующую функцию вида:

$$F = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Для критериев цена и послепродажное обслуживание аппроксимирующая функция принимает вид: $F = 1.256 - 0.607x - 0.672x^2$ (рис. 5.8).

Для критериев цена и летно-технические характеристики аппроксимирующая функция принимает вид: $F = 1.162 + 0.398x - 1.548x^2$ (рис. 5.9).

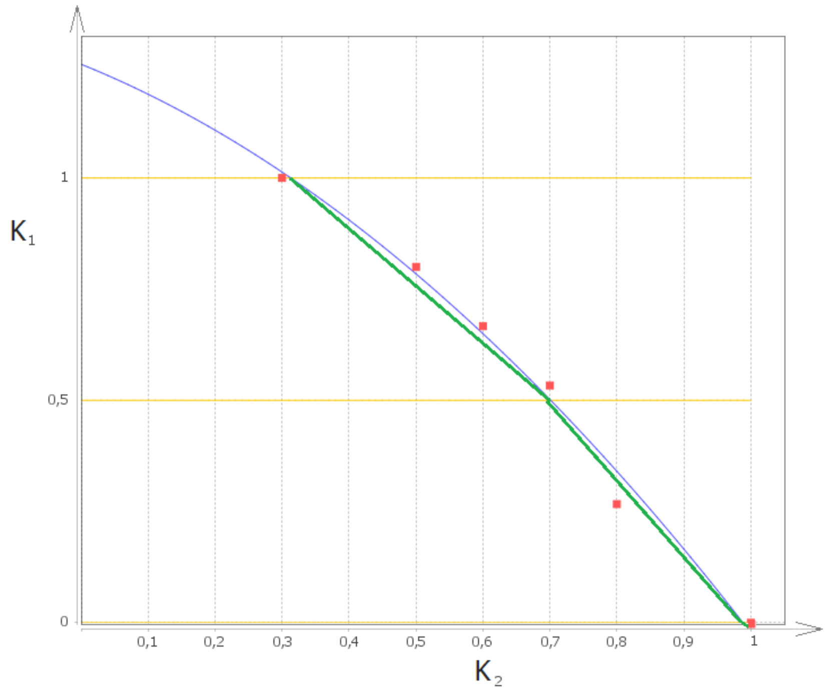

Рис. 5.8. Построение кривой безразличия по критериям цена и послепродажное обслуживание.

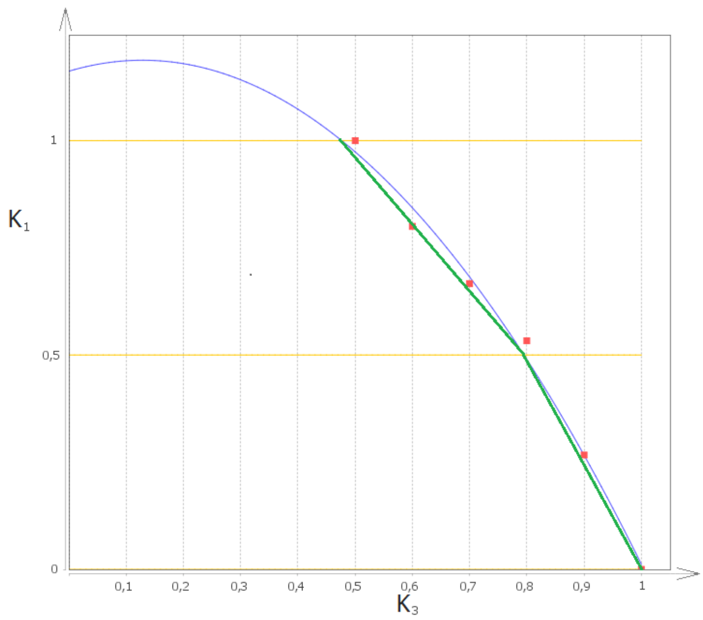

Рис. 5.9. Построение кривой безразличия по критериям цена и летно-технические характеристики.

4. Разбиение кривой на отрезки ломаной.

Шкала главного критерия заключена в промежутке от 0.5 до 2 млрд. руб. Разобьем шкалу на N=2 отрезка и проведем прямые F_1=0, F_2=0.5, F_3=1 (в однородных шкалах). Найдем координаты точек пересечения этих прямых с графиками аппроксимирующих функций по формуле:

$$x_i = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_2(F_i - a_0)}}{2a_2}; \quad y_i = F_i.$$

Для пары критериев цена и послепродажное обслуживание получим точки пересечения: (1; 0), (0.701; 0.5), (0.31; 1). Для пары критериев цена и летно-технические характеристики получим точки пересечения (1; 0), (0.794; 0.5), (0.47; 1).

5. Расчет коэффициентов важности для разных отрезков ломаной.

Отношение коэффициентов важности двух критериев считается как модуль тангенса угла наклона ломаной. Значения коэффициентов важности всех критериев найдем из решения системы линейных уравнений.

На отрезке [0, 0.5] по критерию цена система принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{k_2^1}{k_1^2} = \left|\dfrac{F_3 - F_2}{x_3^1 - x_2^1}\right| = 1.31, \\ \dfrac{k_3^1}{k_1^1} = \left|\dfrac{F_3 - F_2}{x_3^1 - x_2^1}\right| = 1.8, \\ k_1^1 + k_2^1 + k_3^1 = 1. \end{cases}$$

Решая систему, получим: $k_1^1 = 0{,}348$, $k_2^1 = 0{,}358$, $k_3^1 = 0{,}29$.

На отрезке [0.5, 1] система принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{k_2^2}{k_1^2} = \left|\dfrac{F_3 - F_2}{x_3^2 - x_2^2}\right| = 0.96, \\ \dfrac{k_3^2}{k_1^2} = \left|\dfrac{F_3 - F_2}{x_3^2 - x_2^2}\right| = 1.17, \\ k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1. \end{cases}$$

Получим: $k_1^2 = 0{,}43$, $k_2^2 = 0{,}33$, $k_3^2 = 0{,}24$.

Агрегирование критериальных предпочтений проведем с учетом и без учета важности критериев. Для учета важности критериев вычислим постоянные и переменные весовые коэффициенты.

Проведем ранжирование моделей пассажирских самолетов a_1, a_2, a_3, a_4 с учетом важности критериев. Оценки самолетов a_1, a_2, a_3, a_4 по шкалам трех критериев качества приведены в таблице 5.10.

Таблица 5.10

Критерий/ Самолет	Цена млрд. руб.	Обслуживание 1-10 баллов	ЛТХ 1-10 баллов
a_1	2	10	8
a_2	1,5	8	6
a_3	1	6	6
a_4	0,5	4	4

На основе значений оценок альтернатив по каждому критерию качества найдем соответственно матрицы предпочтений:

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{7} & \frac{2}{3} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{7} & 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad R^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{9} & \frac{3}{8} & \frac{2}{7} \\ \frac{5}{9} & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{8} & \frac{4}{7} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{5}{7} & \frac{2}{3} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}, \quad R^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{7} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножим матрицы предпочтений по каждому из критериев на переменные весовые коэффициенты следующим образом:

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{7}\cdot k_1^2 & \frac{2}{3}\cdot k_1^2 & \frac{4}{5}\cdot k_1^2 \\ \frac{3}{7}\cdot k_1^2 & 0 & \frac{3}{5}\cdot k_1^2 & \frac{3}{4}\cdot k_1^2 \\ \frac{1}{3}\cdot k_1^1 & \frac{2}{5}\cdot k_1^1 & 0 & \frac{2}{3}\cdot k_1^1 \\ \frac{1}{5}\cdot k_1^1 & \frac{1}{4}\cdot k_1^1 & \frac{1}{3}\cdot k_1^1 & 0 \end{pmatrix}, R^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{9}\cdot k_2^2 & \frac{3}{8}\cdot k_2^1 & \frac{2}{7}\cdot k_2^1 \\ \frac{5}{9}\cdot k_2^2 & 0 & \frac{3}{7}\cdot k_2^1 & \frac{1}{3}\cdot k_2^1 \\ \frac{5}{8}\cdot k_2^2 & \frac{4}{7}\cdot k_2^2 & 0 & \frac{2}{5}\cdot k_2^1 \\ \frac{5}{7}\cdot k_2^2 & \frac{2}{3}\cdot k_2^2 & \frac{3}{5}\cdot k_2^1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{7}\cdot k_3^2 & \frac{3}{7}\cdot k_3^1 & \frac{1}{3}\cdot k_3^1 \\ \frac{4}{7}\cdot k_3^2 & 0 & \frac{1}{2}\cdot k_3^1 & \frac{2}{5}\cdot k_3^1 \\ \frac{4}{7}\cdot k_3^2 & \frac{1}{2}\cdot k_3^2 & 0 & \frac{2}{5}\cdot k_3^1 \\ \frac{2}{3}\cdot k_3^2 & \frac{3}{5}\cdot k_3^2 & \frac{3}{5}\cdot k_3^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Построим агрегированное отношение предпочтения. Просуммировав эти матрицы, найдем матрицу суммарных предпочтений P_Σ, на основе которой получим матрицу смежности R_Σ мажоритарного графа:

$$P_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0.459 & 0.547 & 0.544 \\ 0.504 & 0 & 0.52 & 0.56 \\ 0.486 & 0.447 & 0 & 0.492 \\ 0.464 & 0.45 & 0.507 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мажоритарный граф представлен на рис. 5.10. Он не содержит контуров, следовательно, можно ранжировать альтернативы по предпочтительности: $a_3 - a_4 - a_1 - a_2$. Лучший самолёт – a_3, худший – a_2.

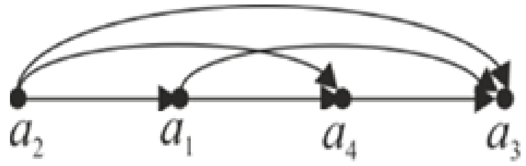

Рис. 5.10.

В работе [22] проведено ранжирование пассажирских самолетов с постоянными весовыми коэффициентами важности критериев, полученными на основе аппроксимации точек безразличия прямой $a_1 - a_4 - a_3 - a_2$ (рис. 5.11).

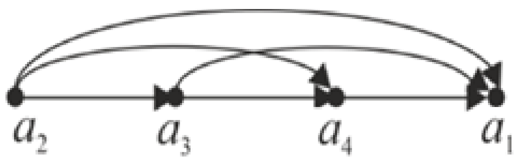

Рис. 5.11.

Результаты ранжирования пассажирских самолетов без учета важности критериев и с учетом постоянных и переменных весовых коэффициентов важности критериев представлены в таблице 5.11.

Таблица 5.11

Агрегирование без учета весовых коэффициентов	С учетом постоянных коэффициентов	С учетом переменных весовых коэффициентов
a_1	a_1	a_3
a_3	a_4	a_4
a_2	a_3	a_1
a_4	a_2	a_2

Сравнительный анализ ранжирования самолетов показывает, что результат существенным образом зависит от учета важности критериев. Также различаются результаты ранжирования, полученные с постоянными и переменными коэффициентами важности критериев.

5.2. Выбор перспективных инновационных проектов-стартапов

В настоящее время развитие авиации и космонавтики стало невозможно без коммерческого сегмента. В связи с этим немало надежд связано с развитием стартап-компаний [43]. Востребованы стартап-компании, представляющие разные направления авиации и космонавтики. Первыми из стартапов на рынок вышли компании, разрабатывающие небольшие продукты – различные бортовые и наземные приборы, средства управления и визуализации, датчики и системы для малых космических аппаратов. Уже существуют фирмы, специализирующиеся на «малом» спутникостроении, компании, занимающиеся новыми производственными технологиями, навигационными услугами, разработкой беспилотной авиации, а также новыми космическими услугами, экологией, в частности, борьбой с космическим мусором. Помощь российским стартап-компаниям в области авиации и космонавтики оказывают венчурные фонды. Решению об инвестировании обычно предшествует анализ деятельности и перспективы развития стартап-компании.

5.2.1. Ранжирование проектов-стартапов на основе многокритериальной информации

Руководители венчурного фонда отобрали 20 наиболее перспективных инновационных проектов-стартапов в области авиации и космонавтики. Имеющиеся в фонде ограничения не позволили вложить средства во все рассматриваемые проекты. Возникла необходимость в ранжировании проектов по предпочтительности, с последующим выбором наилучших из них. Решение этой задачи было возложено на систему поддержки принятия решений (СППР).

Выбор наилучших проектов был осуществлен на основе оценок проектов по семи критериям качества.

K_1 – рентабельность (текущая). Измеряется в процентах.

K_2 – прибыль (в процентах).

K_3 – вложения руководства проекта (процент от суммы инвестиций).

K_4 – оценка команды (учет предыдущей деятельности руководителей проекта). Рассчитывается по специальной методике в баллах от 0 до 50.

K_5 – окупаемость проекта (в месяцах).

K_6 – рентабельность (ожидаемая). Измеряется в процентах.

K_7 – индекс доверия к бизнесу (оценка проекта, предоставленная консалтинговой компанией). Индекс рассчитывается по специальной методике в баллах от 0 до 100.

Оценки проектов по критериям, имеющим неоднородные шкалы, представленные в таблице 5.12.

Поля оценок частично не заполнены: по некоторым проектам были получены не все оценки. В нижней строке таблицы 5.12 указано максимизируются или минимизируются значения по шкале данного критерия. Перед началом работы оценки проектов по критериям были заложены в базу данных СППР.

Система начинает свою работу и предлагает ЛПР, заполнить таблицу 5.13.

– Выберите критерии для оценки проектов.

ЛПР выбирает первые два критерия: текущая рентабельность и прибыль, проставляя знак «+» в последнем столбце таблицы 5.13.

Таблица 5.12

Критерии/ Проекты	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
Проект 01	80	30		41	65	75	75
Проект 02	60	40	15	39	55	60	70
Проект 03	9	4		40	30	135	50
Проект 04	95	40	20	30	80	44	54
Проект 05	52	15		20	50	23	45
Проект 06	23	90		25	80	23	59
Проект 07	31	23		34	69	57	63
Проект 08	42	45		41	85	84	55
Проект 09	35	34	5	12	33	49	42
Проект 10	180	56	10	23	20	131	49
Проект 11	165	63		5	15	91	37
Проект 12	142	74		29	56	67	63
Проект 13	124	27		41	85	105	77
Проект 14	111	78	8	36	88	48	56
Проект 15	74	27		27	94	36	49
Проект 16	61	32		22	53	70	52
Проект 17	87	12	50	40	62	108	64
Проект 18	116	26	15	15	76	145	47
Проект 19	22	78		38	89	41	38
Проект 20	134	86		11	10	149	42
	Макс.	Макс.	Макс.	Макс.	Миним.	Макс.	Макс.

Таблица 5.13

№	*Наименование критерия*	*Коэффициент важности*	*Макс./ Миним.*	*Выбор критериев*
1	Рентабельность (текущая)	1	Макс.	+
2	Прибыль	1	Макс.	+
3	Вложения руководства проекта	1	Макс.	–
4	Оценка команды	1	Макс.	–
5	Окупаемость	1	Миним.	–
6	рентабельность(ожидаемая)	1	Макс.	–
7	Индекс доверия	1	Макс.	–

Затем ЛПР инициирует пуск программы и получает ранжирование альтернатив по уровням предпочтительности. Результат ранжирования по двум критериям представлен в первом столбце таблицы 5.15 (π_i– *i-ый* проект). Наилучшие проекты расположены на нулевом уровне.

Затем система задает ЛПР следующие вопросы:

– *Хотите ли поменять набор критериев?*

– *Да (Нет).*

– *Хотите ли поменять коэффициенты важности критериев?*

– *Нет (Да).*

В случае ответа “Да” на первый вопрос ЛПР предлагается выбрать набор критериев из представленных в таблице. При повторном выборе ЛПР предпочел отметить в таблице три критерия: текущая рентабельность, прибыль и вложения руководства проекта (таблица 5.14).

Таблица 5.14

№	*Наименование критерия*	*Коэффициент важности*	*Макс./ Миним.*	*Выбор критериев*
1	Рентабельность (текущая)	1	Макс.	+
2	Прибыль	1	Макс.	+
3	Вложения руководства проекта	1	Макс.	+
4	Оценка команды	1	Макс.	–
5	Окупаемость	1	Миним.	–
6	рентабельность(ожидаемая)	1	Макс.	–
7	Индекс доверия	1	Макс.	–

Результат ранжирования по трем критериям представлен во втором столбце таблицы 5.15.

В ходе опроса ЛПР сформировал шесть различных групп критериев. Четыре группы критериев включили чисто экономические характеристики проектов, а две последние были дополнены характеристикой команды и индексом доверия к бизнесу.

Результат ранжирования проектов по уровням предпочтительности для всех групп критериев представлен в таблице 5.15. Наилучшие проекты расположены на нулевом уровне, худшие – на последнем уровне.

Таблица 5.15

Критерии / №уровня	K_1 K_2	K_1 K_2 K_3	K_1 K_2 K_3 K_5	K_1 K_2 K_3 K_5 K_6	K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6	K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6 K_7
0	π_6 π_{11} π_{10} π_{12} π_{20}	π_{10}	π_{10} π_{20}	π_{20}	π_{10} π_{20}	π_{10}
1	π_{13} π_{14}	π_{11} π_{12} π_{20}	π_{11}	π_{10}	π_{11} π_{17}	π_{13} π_{20}
2	π_4 π_{18} π_{19}	π_4 π_{14} π_{18}	π_{12}	π_{11}	π_1 π_2 π_{12} π_{13}	π_{17}
3	π_1 π_2 π_{17}	π_2 π_{13} π_{17}	π_4 π_{17}	π_{12}	π_{18}	π_{11}
4	π_9 π_{15} π_{16}	π_9	π_2	π_{18}	π_3 π_{14}	π_1
5	π_5 π_7	π_1 π_6 π_{16} π_{19}	π_{18}	π_{17}	π_4	π_2
6	π_8	π_{15}	π_{14}	π_2 π_4	π_9 π_{16}	π_{12} π_{14}
7	π_3	π_5 π_7	π_9	π_9 π_{13} π_{14}	π_7 π_8	π_4 π_{18}
8		π_8	π_{16}	π_1 π_3 π_6	π_{19}	π_8 π_9 π_{16}
9		π_3	π_1	π_7 π_{15}	π_{15}	π_3 π_7
10			π_5 π_6 π_7 π_{13} π_{19}	π_5 π_{19}	π_5, π_6	π_6 π_{19}
11			π_8 π_{15}	π_{16} π_8		π_{15}
12			π_3			π_5

Проанализировав полученную информацию, руководство венчурного фонда выделило в качестве кандидатов на получение инвестиций проекты, расположенные по результатам всех вариантов ранжирования на нулевом и первом уровнях:

$$\pi_6,\ \pi_{10},\ \pi_{11}, \pi_{12},\ \pi_{13},\ \pi_{14},\ \pi_{17},\ \pi_{20}.$$

При заполнении таблиц 5.13 и 5.14 ЛПР имел возможность поменять весовые коэффициенты важности критериев, но он решил, что все критерии имеют одинаковую важность.

Начальный набор критериев может быть дополнен СППР и/или ЛПР. Например, к уже имеющимся семи критериям качества проектов можно добавить критерии:

K_8 – адрес (месторасположение);

K_9 – сфера деятельности или отрасль хозяйства (с/х, промышленность, ресторанный бизнес, юридическая контора и т.д.).

Данные критерии также являются весьма важными для оценки эффективности проектов. В частности, в случае покупки проектов, являющихся предприятиями сферы услуг, их месторасположение может оказаться ключевым моментом для получения максимальной прибыли.

В этом случае в таблицы 5.12 и 5.13 добавляются критерии K_8 и K_9. Предварительно ЛПР задается вопрос:

– Хотите ли Вы ввести дополнительные критерии оценки проектов?

Дополнительные критерии и критерии K_8, K_9 ЛПР может использовать как для сужения множества проектов, так и для ранжирования проектов. Если критерий используется для ранжирования, то необходимо либо проставить оценки проектов по шкалам этих критерием и указать максимизируются они или минимизируются, либо упорядочить оценки для каждого дополнительного критерия. Для ранжирования проектов по критериям месторасположение и сфера деятельности ЛПР соответственно задаются вопросы:

– Расставьте по предпочтительности города (регионы, улицы и т.п.) местонахождения бизнес-проектов.

– Расставьте по предпочтительности сферы деятельности бизнес-проектов.

Затем повторяется процесс заполнения таблицы с добавленными новыми критериями (таблица 5.16). ЛПР предлагается:

– Выберите критерии для оценки проектов.

Таблица 5.16

Наименование критерия	Коэффициент важности	Макс./ Миним.	Выбор критериев
Рентабельность (текущая)	1	Макс.	+
Прибыль	1	Макс.	+
Вложения руководства проекта	1	Макс.	+
Оценка команды	1	Макс.	–
Окупаемость	1	Миним.	+
Рентабельность (ожидаемая)	1	Макс.	–
Индекс доверия	1	Макс.	–
Месторасположение	1		+
Сфера деятельности	1		+

По шкалам критериев K_8 и K_9 проекты-альтернативы упорядочиваются ЛПР, поэтому графа “максимизируются или минимизируются оценки по шкале критерия” остается незаполненной.

Затем ЛПР инициирует пуск программы и получает ранжирование альтернатив по уровням предпочтительности.

5.2.2. Ранжирование проектов-стартапов на основе экспертной информации

Для получения дополнительной информации о проектах руководство венчурного фонда привлекло девять экспертов – специалистов в области развития бизнеса, которые ранжировали проекты по предпочтительности.

Система предъявляет эксперту множество проектов и задается вопрос о типе голосование (таблица 5.17).

– Выберите тип голосования.

1. Выбор наилучших альтернатив.

2. Ранжирование альтернатив (строгое или нестрогое).

3. *Попарное сравнение альтернатив.*

Таблица 5.17

Имя эксперта	Тип голосования	Коэффициент участия	Выбор экспертов
Эксперт 1	2	1	+
Эксперт 2	2	1	+
Эксперт 3	2	1	+
Эксперт 4	2	1	+
Эксперт 5	2	1	+
Эксперт 6	2	1	+
Эксперт 7	2	1	+
Эксперт 8	2	1	+
Эксперт 9	2	1	+

При голосовании 1 типа эксперт отмечает знаком «+» те проекты, которые ему понравились

При голосовании 2 типа эксперт расставляет проекты по местам (первое место получает наилучший проект). У равноценных проектов – одинаковые места. Если проект эксперту не знаком, то место не проставляется.

При голосовании 3 типа эксперт попарно сравнивает проекты. Вопросов, в результате ответа на которые может быть получена противоречивая информация, не задается. Программа отслеживает транзитивность строящегося отношения.

При сравнении двух проектов π_i и π_j эксперт должен осуществить выбор одного из предложенных вариантов ответа.

1. *Альтернатива π_i предпочтительнее альтернативы π_j.*
2. *Альтернатива π_j предпочтительнее альтернативы π_i.*
3. *Альтернативы π_i и π_j равноценны.*

4. Альтернативы π_i и π_j несравнимы.

Если эксперт выбирает первый ответ, то в матрице предпочтений *t-го* эксперта $R^t = \left\| r_{ij}^t \right\|$ $(t = 1,...,m)$ элемент при выборе ответа 1: $r_{ij}^t = 0$; $r_{ij}^t = 1$; при выборе ответа 2: $r_{ij}^t = 1$; $r_{ij}^t = 0$; при выборе ответа 3: $r_{ij}^t = r_{ij}^t = \frac{1}{2}$; при выборе ответа 4: $r_{ij}^t = r_{ij}^t = 0$.

После того, как все эксперты проголосовали, ЛПР предоставляется возможность инициировать запуск программы, причем с учетом компетентности экспертов и без учета. ЛПР может самостоятельно изменить коэффициенты участия экспертов, а также сформировать группу экспертов (кого-то не взять). В системе также заложена возможность автоматического вычисления коэффициентов участия экспертов на основе заданного профиля экспертных предпочтений.

ЛПР предлагается:

– Выберите тип агрегирования

«*Пуск* 1» *– без учета компетентности экспертов.*

«*Пуск* 2» *– с учетом заданных коэффициентов участия экспертов.*

«*Пуск* 3» *– с учетом вычисленных коэффициентов участия экспертов.*

В результате работы программы ЛПР получает ранжирование альтернатив по уровням предпочтительности (наилучшие проекты расположены на нулевом уровне).

Далее ЛПР задаются следующие вопросы

– Удовлетворяет ли Вас полученный результат?

– Да (Нет).

Если ответ: «Нет», задаются вопросы

– Хотите ли изменить тип агрегирования?

– Да (Нет).

– Хотите ли изменить коэффициенты участия экспертов?

– Да (Нет).

– Хотите ли изменить поменять состав экспертов? – Да (Нет).

В зависимости от ответа ЛПР может инициировать повторение работы программы с учетом изменений исходной информации.

По желанию ЛПР система в самом начале своей работы может осуществить проверку компетентности экспертов, что поможет вовремя внести изменения в отбор группы экспертов.

Таблица 5.18

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9
π_{10}	π_{20}	$\pi_1\ \pi_{13}$	π_4	$\pi_{11}\ \pi_6$	π_{12}	π_2	π_{13}	π_6
$\pi_2\ \pi_6$	$\pi_4\ \pi_{16}$	π_{20}	π_{11}	$\pi_{10}\ \pi_{16}$	π_{13}	π_{10}	π_{20}	π_{17}
π_{20}	π_{11}	$\pi_4\ \pi_{18}$	$\pi_{17}\ \pi_{13}$	π_{13}	π_{17}	$\pi_{12}\ \pi_{17}$	π_{10}	π_{20}
π_{11}	π_{12}	π_{10}	$\pi_1\ \pi_2$	π_{12}	π_{11}	π_{20}	$\pi_4\ \pi_{17}$	π_{10}
π_{12}	π_{10}	$\pi_9\ \pi_{16}$	π_{12}	$\pi_{17}\ \pi_{20}$	π_1	$\pi_{13}\ \pi_4$	π_{11}	$\pi_1\ \pi_3$
$\pi_4\ \pi_{17}$	$\pi_{13}\ \pi_{17}$	$\pi_2\ \pi_{12}$	π_{10}	π_1	π_4	π_9	π_{12}	$\pi_{11}\ \pi_{18}$
$\pi_9\ \pi_{18}$	$\pi_7\ \pi_{18}$	π_{17}	$\pi_{16}\ \pi_{20}$	π_9	$\pi_2\ \pi_{16}$	$\pi_{11}\ \pi_{16}$	π_1	$\pi_2\ \pi_{13}$
π_{13}	π_9	π_3	π_6	π_{18}	π_9	π_{15}	π_{18}	π_4
π_{16}	$\pi_1\ \pi_3$	π_{11}	π_9	π_4	$\pi_{10}\ \pi_{18}$	π_{14}	π_{16}	$\pi_{12}\ \pi_{19}$
π_{14}	π_2	π_{14}	π_7	$\pi_8\ \pi_{15}$	π_{20}	$\pi_8\ \pi_{18}$	$\pi_7\ \pi_{19}$	π_{16}
π_5	π_{14}	$\pi_5\ \pi_7$	$\pi_{18}\ \pi_{15}$	π_{19}	$\pi_5\ \pi_6$	$\pi_1\ \pi_6$	$\pi_2\ \pi_{15}$	π_5
$\pi_1\ \pi_{15}$	π_{19}	$\pi_6\ \pi_8$	π_{14}	$\pi_5\ \pi_{14}$	$\pi_7\ \pi_{15}$	π_5	$\pi_6\ \pi_8$	π_9
π_7	$\pi_6\ \pi_{15}$	π_{19}	$\pi_5\ \pi_{19}$	$\pi_2\ \pi_3$	$\pi_{14}\ \pi_8$	π_{19}	$\pi_3\ \pi_{14}$	$\pi_8\ \pi_{15}$
π_{19}	$\pi_5\ \pi_8$	π_{15}	π_3	π_7	π_{19}	π_3	π_5	π_{14}
π_3			π_8		π_3	π_7	π_9	π_7
π_8								

В рассматриваемом примере оценки двадцати альтернативных проектов-стартапов все эксперты проголосовали по второму типу, т.е. ранжировали проекты по предпочтительности. Результаты ранжирования проектов экспертами представлены в таблице 5.18. В верхней строке таблицы расположены наилучшие проекты. Равноценные проекты эксперты разместили на одном уровне.

В результате работы программы были построены два агрегированных отношения строгого порядка: первое – без учета компетентности экспертов, второе – с учетом компетентности экспертов. Квалификацию экспертов характеризуют вычисленные в программе коэффициенты участия экспертов в формировании агрегированного отношения:

$k_1 = 0{,}665$ $\quad k_4 = 1$ $\quad k_7 = 0{,}567$

$k_2 = 0{,}594$ $\quad k_5 = 0{,}398$ $\quad k_8 = 0{,}732$

$k_3 = 0{,}28$ $\quad k_6 = 0{,}787$ $\quad k_9 = 0$

Наименее компетентным оказался девятый эксперт: его коэффициент участия $k_9 = 0$. Таким образом, мнение девятого эксперта не было учтено при построении агрегированного предпочтения с вычисленными в программе коэффициентами, характеризующими компетентность экспертов. Результаты ранжирования проектов по уровням предпочтительности на основе заданного профиля индивидуальных предпочтений экспертов с учетом и без учета компетентности экспертов представлены в таблице 5.19.

Наилучшие проекты расположены на нулевом уровне. Проанализировав полученную информацию, руководство фонда выделило проекты, расположенные на нулевом, первом, втором и третьем уровнях:

$$\pi_4,\ \pi_{10},\ \pi_{11},\ \pi_{12},\ \pi_{13},\ \pi_{17},\ \pi_{20}.$$

Сравнив результаты ранжирования, представленные в таблицах 5.15 и 5.18, руководство фонда решило инвестировать проекты:

$$\pi_{10},\ \pi_{11},\ \pi_{12},\ \pi_{13},\ \pi_{17},\ \pi_{20}.$$

Сравнив результаты ранжирования, представленные в таблицах 5.15 и 5.19, руководство фонда решило инвестировать проекты:

$$\pi_{10},\ \pi_{11},\ \pi_{12},\ \pi_{13},\ \pi_{17},\ \pi_{20}.$$

Таблица 5.19

№ уровня	$k_i = 1,\ i = 1,\ldots,9$	Коэффициенты из программы
0	π_{10}	π_{13}
1	π_{13}, π_{20}	π_{10}
2	π_4, π_{11}	π_{17}, π_{20}
3	π_{12}	π_4
4	π_{17}	π_{11}
5	π_1	π_{12}
6	π_{16}	π_1
7	π_{18}	π_2
8	π_2	π_{16}
9	π_6	π_9
10	π_9	π_{18}
11	π_{15}	π_6
12	π_{14}	π_7
13	π_5	π_{15}
14	π_7	π_{14}
15	π_{19}	π_5
16	π_3	π_{19}
17	π_8	π_3
18		π_8

5.3. Выводы по главе 5

1. Используя СППР, был осуществлен выбор наилучших моделей пассажирских самолетов средней дальности с разными по важности критериями

2. Проведено ранжирование перспективных инновационных стартап-компаний на основе с целью инвестирования лучших из них венчурным фондом. При этом использовалась как многокритериальная, так и экспертная информация.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе предложена и обоснована методика непротиворечивого агрегирования предпочтений при принятии решений, что выразилось в следующих основных результатах:

1. Разработана математическая модель непротиворечивого агрегирования экспертных и критериальных предпочтений [66, 77].
2. Разработана процедура непротиворечивого агрегирования для различных типов экспертной информации. Доказаны теоремы о непротиворечивости и единственности построенных отношений, а также найдены условия минимальности суммарного расстояния до экспертных предпочтений [42, 74, 75].
3. Разработана процедура агрегирования предпочтений, заданных по критериям. Доказана транзитивность агрегированного отношения для двух критериев. Для m критериев доказана теорема о наилучшей по методу непротиворечивого агрегирования векторной оценке среди всех оценок с равной суммой компонент [62, 76, 79, 113].
4. Разработана методика оценки согласованности экспертной информации. Предложены формулы для вычисления коэффициентов участия экспертов в построении агрегированного отношения предпочтения. Проведен анализ влияния выбора интервала для вычисления коэффициентов участия экспертов на вид агрегированного отношения предпочтения [75].
5. Разработан и реализован комплекс программ поддержки принятия решений [66,67,70,73,78,80].
6. Решены практические задачи выбора оптимальных моделей пассажирских самолетов и перспективных инновационных в области авиации и космонавтики проектов-стартапов с применением

разработанных методов. Для выбора метода решения и нахождения весовых коэффициентов важности критериев использовались численные методы аппроксимации [62,71,79].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т. Выбор вариантов (основы теории), М.: Наука, 1990.

2. Алескеров Ф. Т., Ортешук П. Выборы. Голосование. Партии. М.: Академия, 1995.

3. Алескеров Ф. Т., Хабина Э. Л., Шварц Д. А. Бинарные отношения, графы и коллективные решения. Издание второе, переработанное и дополненное. М.: Физматлит, 2012.

4. Алескеров Ф. Т., Юзбашев Д. А., Якуба В. И. Пороговое агрегирование трехградационных ранжировок // Автоматика и телемеханика. 2007, № 1. С. 147–152.

5. Барышников Ю.М. О математическом ожидании числа недоминируемых по бинарному отношению вариантов // Автоматика и телемеханика. 1985, №6. С. 111-116.

6. Березовский Б.А., Борзенко В.И., Кемпнер Л.М. Бинарные отношения в многокритериальной оптимизации. М.: Наука, 1981. 152 с.

7. Берж К. Теория графов и ее применение. М.: Иностранная литература, 1969.

8. Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В. Исследование операций. Учебное пособие. М.: Издательский центр «Академия». 2008. 464 с.

9. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Советское радио, 1972. 552 с.

10. Вольский В.И., Лезина З.М. Голосование в малых группах: процедуры и методы сравнительного анализа. М.: Наука, 1991. 192с.

11. Вольский В.И., Лезина З.М., Сравнительный анализ процедур голосования (обзор проблемы и новые задачи) // Автоматика и телемеханика. 1992, №2. С. 3–29.

12. Гафт М.Г. Принятие решений при многих критериях. М.: Знание, 1979.

13. Гафт М.Г., Осипова В.А., Подиновский В.В., Яшина Н.П. О реализации фрагментарного подхода к построению отношений предпочтения в задачах принятия решений // Модели и методы формирования и

многокритериального выбора предпочтительных вариантов систем. М.: ВНИИСИ, 1981. Вып. 1. С. 97-104.
14. Гафт М.Г., Подиновский В.В. О построении решающих правил в задачах принятия решений // Автоматика и телемеханика. 1981, №6. С. 128-138.
15. Глотов В.А., Павельев В.В. Экспертные методы определения весовых коэффициентов // Автоматика и телемеханика. 1976, №12. С. 95-107.
16. Гнеденко Л.С., Ларичев О.И., Мошкович Е.М., Фуремс Е.М. Процедура построения квазипорядка на множестве многокритериальных альтернатив на основе достоверной информации о предпочтениях лица, принимающего решения // Автоматика и телемеханика. 1986, №9. С. 104-113.
17. ГОСУДАРСТВЕННАЯ ПРОГРАММА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ «РАЗВИТИЕ АВИАЦИОННОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ» на 2013–2025 годы. http://www.minpromtorg.gov.ru/reposit/minprom/ministry/fcp/10/GP_RAP_V72. pdf. 8 января 2014 г.
18. Емельянов С.В. и др. Модели и методы векторной оптимизации // Техническая кибернетика. Итоги науки и техники. М.: ВНИИСИ, 1973. Т.5. С. 386-448.
19. Жуков М. С., Орлов А.И. Задача исследования и итогового ранжирования мнений группы экспертов с помощью медианы Кемени // Научный журнал КубГАУ, №122(08), 2016.
20. Иванин В.М. Асимптотическая оценка математического ожидания числа элементов множества Парето // Кибернетика. 1975, №1.
21. Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику. М.: Иностранная литература, 1963. 487 с.
22. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981. 560 с.
23. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику. М.: Наука, 1975.
24. Ларичев О.И. Методы многокритериальной оценки альтернатив // Многокритериальный выбор при решении слабоструктуризованных проблем. М.: ВНИИСИ, 1978. С. 5-30.

25. Ларичев О.И. Наука и искусство принятия решений. М.: Наука, 1979.
26. Ларичев О. И. Теория и методы принятия решений. М.: Логос, 2002. 392с.
27. Ларичев О.И. Вербальный анализ решений / Под ред. А.Б. Петровского. М.: Наука, 2006. 181 с.
28. Ларичев О. И., Петровский А. В. Системы поддержки принятия решений. Современное состояние и перспективы их развития // Итоги науки и техники. Серия «Техническая кибернетика». Т.21. М.: ВИНИТИ, 1987. С. 131—164.
29. Ларичев О.И., Бойченко В.С., Мошкович Е.М., Шепталова Л.П. Проблемы выявления предпочтений лиц, принимающих решения при бинарной оценке альтернатив и двоичных оценках на шкалах критериев // Многокритериальный выбор при решении слабоструктуризованных проблем. М.: ВНИИСИ, 1978. С. 61-77.
30. Ларичев О.И., Мошкович Е.М. Качественные методы принятия решений. Вербальный анализ. М.: Наука-физматлит. 1996.
31. Ларичев О.И., Мошкович Е.М. О возможности получения от человека непротиворечивых оценок многомерных альтернатив // Дескриптивный подход к изучению процессов принятия решений при многих критериях. М.: ВНИИСИ, 1980. С. 58-67.
32. Латыпов Т. Интервью с президентом ОАО «Туполев» А. Бобрышевым // Газета «БИЗНЕС online» – 22.03.2012. http://www.business-gazeta.ru/article/56361
33. Левченков В.С., Левченкова Л.Г. Оценка уровня компромисса в реальных моделях выбора // Сборник работ “Прикладная математика и информатика”. М.: МАКС Пресс, 2001г., №8, с.71-96.
34. Литвак Б.Г. Экспертные оценки и принятие решений. М.: Патент. 1996.
35. Лотов А.В., Поспелова И.И. Многокритериальные задачи принятия решений. М.: Макс Пресс, 2008.
36. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974.

37. Мошкович Е.М. Линейные и нелинейные дескриптивные модели // Многокритериальный выбор при решении слабоструктуризованных проблем. М.: ВНИИСИ, 1978. С. 52-61.
38. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. М.: Мир, 1991, 464 с.
39. Нелюбин А.П., Подиновский В.В. Аналитические решающие правила, использующие упорядоченность по важности критериев со шкалой первой порядковой метрики // Автоматика и телемеханика. 2012, №5. С. 84-96.
40. Нелюбин А.П., Подиновский В.В. Аналитические решающие правила для упорядоченных по важности критериев со шкалой первой порядковой метрики общего вида // Автоматика и телемеханика. 2014, №9. С. 97-107.
41. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. М.: Издательство МАИ, 1992.
42. Нефедов В.Н., Осипова В.А., Смерчинская С.О., Яшина Н.П. Непротиворечивое агрегирование отношений строгого порядка // Известия высших учебных заведений. Математика. 2018. №5, с. 71-85. (SCOPUS, Web of Science).
43. Новый космический этап. «Сколково» увеличивает количество стартапов в космонавтике и авиастроении. Известия. http://izvestia.ru/news/555940
44. Ногин Б.Д. Принятие решений в многокритериальной среде. Количественный подход. М.: Наука-физматлит. 2002.
45. Озерной В.М. Принципы построения и использования многокритериальных моделей задач принятия решений // Проблемы принятия решений. М.: Институт проблем управления, 1974. Вып. 5. С. 3-15.
46. Озерной В.М., Гафт М.Г. Методология решения дискретных многокритериальных задач // Многокритериальные задачи принятия решений. М.: Машиностроение, 1978. С. 14-47.
47. Олейниченко Л.Г., Осипова В.А., Яшина Н.П. Структура пакета прикладных программ для принятия решений при векторном критерии //

Киев: Наукова думка. Управляющие системы и машины. 1981, №1. С. 131-133.

48. Осипова В. А., Подиновский В. В., Яшина Н. П. О непротиворечивом расширении отношений предпочтения в задачах принятия решений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1984, №6. С. 831-839.

49. Осипова В.А. Диалоговые процедуры для определения важности критериев // Тезисы докладов Всесоюзной конференции «Нечисловая статистика, экспертные оценки и смежные вопросы», Таллин, 1984.

50. Осипова В.А. Курс дискретной математики. М.: Форум, 2013.

51. Осипова В.А., Подиновский В.В. Диалоговое восстановление многокритериальной структуры предпочтений // Модели и методы оптимизации экономических систем. Новосибирск: Наука, 1987. С. 57-69.

52. Осипова В.А., Подиновский В.В., Яшина Н.П. Пакет прикладных программ многокритериальной дискретной оптимизации // Тезисы докладов IV Всесоюзного совещания по системному анализу и исследованию операций. М.: ВШПД, 1983.

53. Осипова В.А., Подиновский В.В., Яшина Н.П. Непротиворечивое расширение отношений предпочтения // Анализ и моделирование экономических процессов. Горький, 1984. С. 23-30.

54. Осипова В.А., Яшина Н.П. Оценка мощности сравнения в задачах принятия решений при наличии информации о важности критериев. М.: 1986. 12 с. Деп. в ВИНИТИ. 86. № 8929-В86.

55. Петровский А.Б. Теория принятия решений. М.: Академия. 2009.

56. Подиновский В.В. Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности критериями // Автоматика и телемеханика. 1976,№11. С.118-127.

57. Подиновский В.В. Коэффициенты важности критериев в задачах принятия решений // Автоматика и телемеханика. 1978, №10. С. 130-141.

58. Подиновский В.В. Об относительной важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // Многокритериальные задачи принятия решений. М.: Машиностроение, 1978. С. 48-82.
59. Подиновский В.В. Аксиоматическое решение проблемы оценки важности критериев в многокритериальных задачах // Современное состояние теории исследования операций. М.: Наука, 1979. С. 117-149.
60. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. М.: Физматлит, 2007.
61. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 256 с.
62. Редько А.О., Смерчинская С.О., Яшина Н.П. Агрегирование предпочтений при переменной важности критериев // Труды МАИ. 2016. №85.
63. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М.: Мир, 1980. 476 с.
64. Руа Б. Классификация и выбор при наличии нескольких критериев (метод ЭЛЕКТРА) // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. М.: Мир, 1976.
65. Саати Т. Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: аналитические сети. М.: Издательство ЛКИ, 2007. 360 с.
66. Смерчинская С.О. Интеллектуальная система поддержки группового выбора // Научное обозрение. 2013, №2, с. 149-154.
67. Смерчинская С.О. Интеллектуальная система поддержки группового выбора // Труды международной научно-методической конференции «Информатизация инженерного образования». М.: Издательский дом МЭИ, 2012. С.113-114.
68. Смерчинская С.О. Проблемы группового выбора при решении экономических задач // Научный альманах ИНЖЭКИН. Выпуск №16, 2012. С.208-214.

69. Смерчинская С.О. Проведение экспертного опроса в задачах группового выбора // Научный альманах ИНЖЭКИН. Выпуск №17, 2013. С.221-226.
70. Смерчинская С.О. Интеллектуальная система многокритериального выбора // Научный альманах ИНЖЭКИН. Выпуск №19, 2014. С.220-226.
71. Смерчинская С.О. Ранжирование проектов-стартапов на основе экспертной информации // Научный альманах ИНЖЭКИН. Выпуск №20, 2015. С.210-214.
72. Смерчинская С.О. Агрегирование предпочтений по критериям с неоднородными шкалами // Научный альманах ИНЖЭКИН. Выпуск №21, 2016. С.216-220.
73. Смерчинская С.О., Шпаков А.С., Яшина Н.П. Интеллектуальная система поддержки процесса группового выбора // Труды 15-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2016». М.: Издательский дом МАИ, с. 599-601.
74. Смерчинская С.О., Яшина Н.П. Построение агрегированного отношения предпочтения на основе нагруженного мажоритарного графа // Электронный журнал «Труды МАИ». 2010. № 39.
75. Смерчинская С.О., Яшина Н. П. Анализ компетентности экспертов в задачах группового выбора // Информационные и телекоммуникационные технологии. 2012, №15. С. 103-115.
76. Смерчинская С.О., Яшина Н.П. Агрегирование предпочтений в многокритериальных задачах // Вестник Московского авиационного института. 2013. № 2, том 20, с. 219-225.
77. Смерчинская С.О., Яшина Н.П. Агрегирование предпочтений при принятии решений // Московская молодежная научно-практическая конференция «Инновации в авиации и космонавтике – 2013». Москва. Сборник тезисов докладов. М.: ООО «Принт-салон», 2013. С.300-301.
78. Смерчинская С.О., Яшина Н.П. Интеллектуальная система многокритериального выбора // Труды международной научно-

методической конференции «Информатизация инженерного образования». М.: Издательский дом МЭИ, 2014. С.279-282.
79. Смерчинская С.О., Яшина Н.П. Агрегирование предпочтений с учетом важности критериев // Труды МАИ. 2015. № 84.
80. Смерчинская С.О., Яшина Н.П. Интеллектуальная система поддержки принятия решений // Труды международной научно-методической конференции «Информатизация инженерного образования». М.: Издательский дом МЭИ, 2016. С. 214-217.
81. Терелянский, П. В. Системы поддержки принятия решений. Опыт проектирования: монография // ВолгГТУ. Волгоград, 2009. 127 с.
82. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. М.: Наука. 1978. 352 с.
83. Шмерлинг Д.С., Дубровский С.А., Аржанова Т.Д., Френкель А.А. Экспертные оценки. Методы и применения (Обзор) // Уч. Зап. по Статистике, т.29. Статистические методы анализа экспертных оценок. – М.: Наука, 1977.
84. Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок. М.: Наука, 1971.
85. Электронный учебник по теории принятия решений http://helpiks.org/3-61482.html.
86. Эрроу К. Дж. Коллективный выбор и индивидуальные ценности / Пер. с англ. (под ред.: Ф. Т. Алескеров). М.: Издательский дом ГУ-ВШЭ, 2004.
87. Яшина Н.П. Упорядочение множества векторных оценок при наличии информации о сравнительной важности групп критериев. М.: 1986. 18с. Деп. в ВИНИТИ. 86. – №2903-В86.
88. Aizerman M., Aleskerov F. Theory of Choice. Elsevier, North-Holland, 1995.
89. Aleskerov F., Monjardet B. Utility Maximization. Choice and Preference, Springer, Berlin, 2002.
90. Boehnke D., Ciampa P. D., Gollnick V., Lehner S., Meng P., Stumpf E, Sun X. Multi-criteria decision analysis techniques in aircraft conceptual design process // 28-th international congress of the aeronautical sciences. ICAS -2012.

91. Decision Analysis: An Overview Ralph L. Keeney Operations Research, Vol. 30, No. 5. (Sep. - Oct., 1982), pp. 803-838.http://links.jstor.org/sici?sici=0030-364X%28198209%2F10%2930%3A5%3C803%3ADAAO%3E2.0.CO%3B2-Y
92. Druzdzel M. J., Flynn R. R. Decision Support Systems. Encyclopedia of Library and Information Science. A. Kent, Marcel Dekker, Inc., 1999.
93. Dwork C., Kumar R., Naor M, Sivakumar D. “Rank aggregation methods for the web,” in Proceedings of the 10th World Wide Web Conference. 2011. Pp. 613-622.
94. Dyer J.S., Sarin R.K. Measurable multiattribute value functions. Operations Research. 1979. 27(4): 811-822.
95. Elkind E., Faliszewski P., Slinko A. “On the role of distances in defining voting rules,” in Proceedings of the Ninth International Joint Conference on Autonomous Agents and Multi-Agent Systems (AAMAS). 2010. Pp. 375-382, Toronto, Canada.
96. Farfel J., Conitzer V. “Aggregating value ranges: preference elicitation and truthfulness,” Autonomous Agents and Multi-Agent Systems. 2011. Pp. 127-150.
97. Finlay P. N. Introducing decision support systems. Oxford, UK Cambridge, Mass., NCC Blackwell: Blackwell Publishers, 1994.
98. Grandi U., Endriss U. “Binary Aggregation with Integrity Constraints,” in Proceedings of the Twenty-Second International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI). 2011.
99. Hemaspaandra E., Spakowski H., Vogel J. “The complexity of Kemeny elections,” Theoretical Computer Science. 2005. 349, 382-391.
100. Hodge J. K. “Permutations of separable preference orders,” Discrete Applied Mathematics. 2006. 154, 1478–1499.
101. Holsapple C.W., Whinston A.B. Decision Support Systems: A Knowledge-based Approach. Minneapolis: West Publishing Co., 1996.
102. Kadane J. B. “On division of the question,” Public Choice. 1972. 13, 47–54.
103. Keen P.G.W. Decision Support Systems: The next decades // Decision Support Systems, 1987. v. 3. pp. 253-265.

104. Kleiner B.H., Omar T.A. "Effective decision making in the defence industry" // Aircraft Engineering and Aerospace Technology. 1997. Vol. 69, Iss. 2, pp. 151-159.
105. Lang J. “Vote and Aggregation in Combinatorial Domains with Structured Preferences,” in Proceedings of the Twentieth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI). 2007. Pp. 1366–1371, Hyderabad, India.
106. Li M., Vo Q. B., Kowalczyk R. “Majority-rule-based preference aggregation on multi-attribute domains with structured preferences,” in Proceedings of the Tenth International Joint Conference on Autonomous Agents and Multi-Agent Systems (AAMAS). 2011.
107. Marakas G. M. Decision support systems in the twenty-first century. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1999.
108. McGarvey D. C. “A Theorem on the Construction of Voting Paradoxes,” Econometrica. 1953. 21, 608–610.
109. Pennock D. M., Horvitz E., Giles C. L. “Social Choice Theory and Recommender Systems: Analysis of the Axiomatic Foundations of Collaborative Filtering,” in Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence (AAAI). 2000. Pp. 729–734, Austin, TX, USA.
110. Power D.J. A Brief History of Decision Support Systems. DSSResources.COM,WorldWideWeb, http://DSSResources.COM/history/dsshistory.html, version 2.8, May 31, 2003.
111. Purrington K., Durfee E. H. “Making social choices from individuals’ CP-nets,” in Proceedings of the Sixth International Joint Conference on Autonomous Agents and Multi-Agent Systems (AAMAS). 2007. Pp. 1122–1124.
112. Schulze M. A new monotonic, clone-independent, reversal symmetric, and Condorcet-consistent single-winner election method. Social Choice and Welfare, 36:267–303, 2011.
113. Smerchinskaya S.O., Yashina N.P. On an algorithm for pairwise comparison of alternatives in multi-criteria problems // International Journal of Modeling,

Simulation, and Scientific Computing. 2018. Vol. 9, Issue 1. DOI: 10.1142/S179396231850006X. (SCOPUS).

114. Williamson D.P. The Rank Aggregation Problem. Universidade Federal de Minas Gerais December 10, 2012.

115. Xia L. Computational Voting Theory: Game-Theoretic and Combinatorial Aspects // Dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in the Department of Computer Science in the Graduate School of Duke University. 2011.

116. Xia L., Lang J., Monnot, J. "Possible Winners When New Alternatives Join: New Results Coming Up!" in Proceedings of the Tenth International Joint Conference on Autonomous Agents and Multi-Agent Systems (AAMAS). 2011. Taipei, Taiwan.

117. Young H. P. "Condorcet's Theory of Voting," American Political Science Review. 1988. 82, 1231–1244.

118. Young H. P. "Optimal Voting Rules," Journal of Economic Perspectives. 1995. 9, 51–64.

119. Zuckerman M., Lev O., Rosenschein J. S. An Algorithm for the Coalitional Manipulation Problem under Maximin // Proceedings of the Tenth International Joint Conference on Autonomous Agents and Multi-Agent Systems (AAMAS). 2011. Taipei, Taiwan.

Свидетельство о государственной регистрации программ

1. Смерчинская С.О. Система агрегирования предпочтений при принятии решений / Смерчинская С.О. // Св-во о гос. регистрации программы для ЭВМ №2017662012. Федеральная служба по интеллект собственности.– 25.10.2017.