

## Собственные моды уравнения Орра-Зоммерфельда в развитом турбулентном пограничном слое

Селим Р.С.

*Московский физико-технический институт государственный университет,*

*Институтский пер., 9, Московская обл., Долгопрудный, 141701, Россия*

*e-mail: [selim.rs@phystech.edu](mailto:selim.rs@phystech.edu)*

**Статья поступила 22.10.2019**

### Аннотация

Исследованы эффективные подходы к исследованию задачи на собственные значения в области гидродинамической устойчивости для уравнения Орра-Зоммерфельда. Для получения спектра собственных значений рассматривается метод коллокации (псевдоспектральный), основанный на полиномах Чебышева. Этот метод очень эффективен, так как он создает матрицы, которые имеют небольшую размерность и обычно являются хорошо обусловленными. Использована арифметика с произвольным числом значащих цифр. Определено дисперсионное соотношение волн Толлмина-Шлихтинга на профиле скорости развитого турбулентного пограничного слоя в зависимости от параметров задачи (например, числа Рейнольдса).

**Ключевые слова:** метод коллокации, полиномы Чебышева, несжимаемая вязкая жидкость, турбулентный пограничный слой, уравнение Орра-Зоммерфельда, волны Толлмина-Шлихтинга.

## 1. Введение

Спектральные методы решения задач математической физики интенсивно изучались в последние два десятилетия из-за их хороших аппроксимационных свойств [1,2]. Оценка комплексных собственных значений обыкновенного дифференциального уравнения Орра-Зоммерфельда четвертого порядка, привлекающая в последние десятилетия внимание ряда математиков, обусловлена его актуальностью в задачах гидродинамической устойчивости. Эти методы считаются чрезвычайно эффективными для задач гидродинамической устойчивости, где необходимы высокоточные результаты [3]. Уравнения типа Орра-Зоммерфельда существенны для анализа сдвиговых потоков, которые имеют важное значение во многих областях. Одной из таких областей является моделирование климата, когда делается попытка объяснения происхождения среднеширотного циклона, который в свою очередь отвечает за создание областей высокого и низкого давления, из которых возникают переменные погодные условия [4,5]. В работе [6,7], посвященной проблеме перехода от ламинарного к турбулентному течению, рассматриваются физические механизмы, используемые методы и полученные результаты, а также, по возможности, соотношение теории с экспериментальными и численными результатами.

Хорошо известно, что классическая задача Орра-Зоммерфельда на собственные значения, которая встречается при линейном анализе гидродинамической устойчивости некоторых основных течений газа, впервые была решена с помощью прямого спектрального метода в работе [8]. В работе [9]

проведено численное исследование собственных значений уравнения Орра-Зоммерфельда для пограничного слоя Блазиуса во временной постановке. Классические и спектральные методы, примененные к различным задачам, приводят к обобщенной задаче на собственные значения вида  $Ax = \lambda Bx$ , относительно которой полная теория широко обсуждается в работе [10]. Макфадден и др. [11] обнаружили, что в обобщенной задаче на собственные значения появляются ложные собственные значения. Спектр оператора Орра-Зоммерфельда также исследованы Редди, Шмидом и Хеннингсоном в работе [12]. В двух других важных работах [13] и [14] в общих математических рамках рассматриваются спектральные методы для задач гидродинамической устойчивости. Они анализируют уравнение Орра-Зоммерфельда, поставленное с однородными граничными условиями, которые содержат производную до первого порядка.

Спектральный метод является одной из трех технологий численного решения уравнений в частных производных. Другие три – это методы конечных разностей, методы конечных элементов и метод пристрелки. В работах [15], [16], предложены методы, суть которых заключается в том, что решение представляется конечным рядом полиномов Чебышева с неизвестными коэффициентами. При этом дифференциальное уравнение выполняется в определенных точках (точках коллокации) рассматриваемого диапазона. Положения точек в диапазоне выбираются для уменьшения невязки, которая получается при подстановке приближенного решения в дифференциальное уравнение. В работе [17], на неравномерной сетке решена спектральная задача для уравнения Орра-

Зоммерфельда на турбулентном профиле продольной скорости для определения связи между толщиной потери импульса и мнимой частью собственной частоты наименее затухающей моды волн Толлмина-Шлихтинга как функции от числа Рейнольдса. В работе [18,19], исследовано образование энтропии в уравнениях Навье-Стокса за счет возбуждения стохастических пульсаций в потоке жидкости, теоретически найдены два решения задачи течения жидкости в плоскости Куэтта, и Пуазейля. В работе [20,21] представлена волноводная теория развитого турбулентного пограничного слоя, которая связывает динамику волн Толлмина-Шлихтинга с турбулентными касательными напряжениями.

В настоящей работе рассматривается численная оценка комплексных собственных значений уравнения Орра-Зоммерфельда с использованием метода коллокации с полиномами Чебышева.

## 2. Постановка задачи

Сначала рассмотрим уравнение Орра-Зоммерфельда вязкой несжимаемой жидкости, на заданном профиле скорости  $U(y)$ . Уравнения Навье-Стокса, управляющие динамикой малых возмущений имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right)u' + \frac{dU}{dy}v' = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \nabla^2 u', \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right)v' = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \nabla^2 v', \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right)w' = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \nabla^2 w', \quad (3)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

где  $x$ ,  $y$  и  $z$  являются Декартовыми координатами.

Этот набор уравнений дополняется уравнением неразрывности

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

где  $u', v', w'$  и  $p'$  обозначают возмущенные величины скорости и давления, а  $\nu$  – кинематическая вязкость, комбинируя уравнения (1,2,3) так, чтобы исключить давление, и используя уравнение неразрывности (4), получаем уравнение для вертикального компонента скорости

$$\left( \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 v' - \frac{d^2 U}{dy^2} v' \right) = \nu \nabla^4 v'. \quad (5)$$

Представим возмущения в виде волн:

$$(u', v', w') = (\bar{u}(y), \bar{v}(y), \bar{w}(y)) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}, \quad (6)$$

где  $\bar{u}(y), \bar{v}(y), \bar{w}(y)$  – амплитуды возмущений. Действительное волновое число, связанное с возмущением, обозначается через  $\alpha$ , комплексная фазовая скорость волны через  $c = c_r + ic_i$ ,  $\text{Re}$  – число Рейнольдса, фоновое поле скорости, около которого развиваются возмущения, обозначается через  $U(y)$ . Вводя это представление в (5), мы имеем

$$\left[ (-i\omega + i\alpha U)(D^2 - \alpha^2) - i\alpha \frac{d^2 U}{dy^2} - \nu(D^2 - \alpha^2)^2 \right] \bar{v} = 0 \quad (7)$$

Далее вводятся безразмерные переменные,

$$x^* = \frac{x}{\delta}, y^* = \frac{y}{\delta}, t^* = \frac{t U_0}{\delta}, \bar{v}^* = \frac{\bar{v}}{U_0}, \alpha = k\delta, c^* = \frac{c}{U_0} \quad (8)$$

где  $\delta$  – толщина пограничного слоя. После введения безразмерных величин и отбрасывания звездочки, таким образом, имеем

$$\left[ (U(y)-c)(D^2 - \alpha^2) - \frac{d^2 U}{dy^2} - \frac{1}{i\alpha \text{Re}} (D^2 - \alpha^2)^2 \right] \bar{v} = 0, \quad (9)$$

где  $D = \frac{d}{dy}$ ,  $U(y)$  – средняя продольная скорость,  $c = \frac{\omega}{\alpha}$  фазовая скорость волны

Толлмина-Шлихтинга,  $\text{Re} = \frac{U_0 \delta}{\nu}$  – число Рейнольдса,  $\alpha$  – продольное волновое число

( $\beta = 0$ ), и  $\bar{v}$  вертикальный компонент скорости. Граничные условия вытекают из того, что возмущения исчезают у стенки и вдали от нее. Первое условие сразу же приводит к

$$\bar{v} = D\bar{v} = 0, \quad y = 0 \quad (10)$$

Для внешних граничных условий отметим, что при больших значениях  $y$ ,

Уравнение (9) принимает форму

$$\left[ (1-c)(D^2 - \alpha^2) - \frac{1}{i\alpha \text{Re}} (D^2 - \alpha^2)^2 \right] \bar{v} = 0. \quad (11)$$

Необходимое решение последнего уравнения, которое соответствует внешнему граничному условию, очевидно равно

$$\bar{v} = A e^{-\alpha y} + B e^{-\gamma y}, \quad (12)$$

где  $A, B$  – произвольные константы, и  $\gamma^2 = \alpha^2 + i\alpha \text{Re}(1-c)$ . Для значений  $\alpha \text{Re} \gg 1$ ,

$c = O(1)$  видно, что  $|\gamma| \approx |\alpha|$ , так что  $e^{-\gamma y} \approx e^{-\alpha y}$ , для  $y > 0$ . Следовательно,

соответствующее условие может быть выражено в виде  $\bar{v} \propto e^{-\alpha y}$ .

Хорошо известно, что решение уравнение (9) с граничными условиями (10) и (12)

приводят к задаче на собственные значения. Далее рассматривается спектральная

задача в пространственной постановке, поэтому предполагается, что волновое число  $\alpha$  действительно, а  $c$  комплексное собственное число задачи.

### 3. Численный подход

Для дискретизации уравнения (9) сформулирован метод коллокации с помощью полиномов Чебышева. Он основан на аппроксимации решения  $\bar{v}(y)$  конечной линейной комбинацией

$$\bar{v}(y) = \sum_{k=0}^N a_k T_k(y),$$

где  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_N$  – коэффициенты. Многочлены Чебышева – это хорошо известное семейство ортогональных многочленов на интервале  $[-1, 1]$  вещественной прямой [22]. Спектральные методы, основанные на многочленах Чебышева как базисных функциях для численного решения дифференциальных уравнений с гладкими коэффициентами и простой областью определения широко применяются многими авторами ввиду высокой точности этого метода. Точки коллокаций Чебышева-Гаусс-Лобатто определяются как нули многочленов Чебышева. В результате получаем систему однородных линейных уравнений, которые замыкаются с помощью граничных условий вида:

$$\begin{aligned} \bar{v}(-1) &= 0, \\ \bar{v}'(-1) &= 0 \\ \bar{v}'(1) + \alpha v(1) &= 0, \\ \bar{v}''(1) + \alpha \bar{v}'(1) &= 0, \end{aligned} \tag{13}$$

Далее следуем работам ([15], [16]). В этом случае результирующая матрица  $m$  имеет вид:  $m = m_1 + cm_2$ , спектральная задача, для которой определяется соотношением:  $m \cdot x = 0$ ,  $x$  – является собственным вектором задачи, который в дальнейшем определяется для каждой моды в соответствии с различными значениями ее собственного значения.

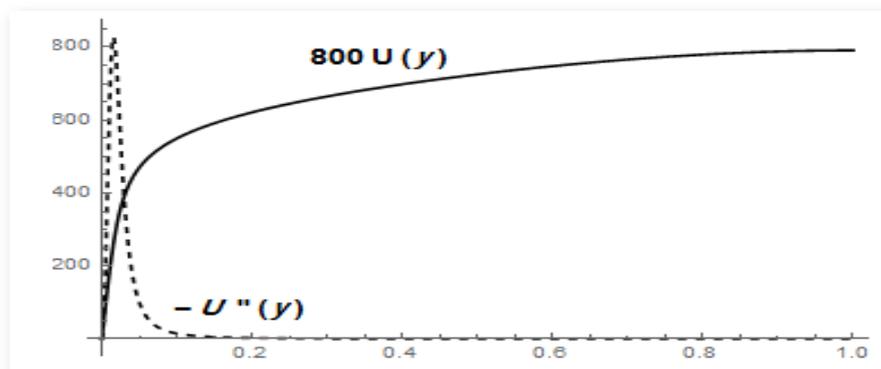


Рис.1. Профиль скорости и её вторая производная при  $Re_\delta = 10000$ .

Уравнение Орра-Зоммерфельда содержит члены, связанные со скоростью  $U_0(y)$  и её второй производной  $U_0''(y)$ . Из рисунка 1 видна особенность профиля средней продольной скорости развитого турбулентного пограничного слоя: он сильно меняется в очень узкой области вблизи границы.

#### 4. Определение собственного значения для профилей Блазиуса и Musker

В этом разделе мы сообщаем о численных результатах решения уравнения Орра-Зоммерфельда на поле скорости, определяемого уравнением Блазиуса методом коллокации. Дифференциальное уравнение Блазиуса имеет вид

$$f'''(x) + \frac{1}{2} f(x) f''(x) = 0 \quad (14)$$

со следующими граничными условиями  $f(0) = f'(0) = 0, f'(10) = 1$ .

В настоящей работе уравнение Блазиуса решается численно с помощью пакета Mathematica [23] на интервале  $[0,10]$ .

Для использования метода коллокаций с полиномами Чебышева удобно перейти от интервала  $[0,10]$  к интервалу  $[-1,1]$  с помощью линейного преобразования

$$y = \frac{x}{5} - 1.$$

Табл.1- Сравнение шести собственных значений между работой Мака [9] и методом коллокации для профиля Блазиуса

Блазиуса, $\alpha = 0.179, Re = 580$		
№ моды	Макс [2]	Метод коллокации, $N = 71$ .
n = 1	0.3641 + 0.008 I	0.364123 + 0.00795966 I
n = 2	0.2897 - 0.2769 I	0.289714 - 0.276867 I
n = 3	0.4839 - 0.1921 I	0.48393 - 0.192067 I
n = 4	0.5572 - 0.3653 I	0.557195 - 0.365342 I
n = 5	0.6862 - 0.3307 I	0.686244 - 0.330786 I
n = 6	0.7936 - 0.4341 I	0.794554 - 0.436966 I

Здесь мы сосредоточимся на тестовом примере, приведенном в [9] с  $Re = 580, \alpha = 0.179$ . Первые шесть членов спектра собственных значений сведены в таблицу и сопоставлены с данными [9] в Таблице 1. Ясно, что набор собственных значений, полученных методом коллокации, отлично согласуется с данными работы [9]. Увеличение порядка полиномов Чебышева дает заметное улучшение точности набора собственных значений, как показано в таблице 2.

Результаты Рис. 2 получены методом коллокации и находятся в хорошем соответствии с работой [9]. В реальных задачах, конечно, точное решение не известно, но точность приближенного решения можно проверить, повторив расчет с

более высоким  $N$  как показано на рис. 3(а,б). На этом рисунке установлено, что число полиномов Чебышева оказывает существенное влияние на точность приближенного значения как для действительного, так и для мнимого собственного значения первой моды.

Табл.2-Увеличение числа полиномов Чебышева оказывает существенное влияние на поведение собственных значений для профиля Блазиуса

Блазиуса, $\alpha = 0.179$ , $Re = 580$			
№ моды	$N = 41.$	$N = 61.$	$N = 81.$
$n = 1$	$0.364124 + 0.00794985 I$	$0.364124 + 0.00795966 I$	$0.364122 + 0.00796001 I$
$n = 2$	$0.287263 - 0.321473 I$	$0.289715 - 0.276864 I$	$0.289714 - 0.276866 I$
$n = 3$	$0.333624 - 0.28673 I$	$0.48393 - 0.192068 I$	$0.483929 - 0.192068 I$
$n = 4$	$0.484196 - 0.182253 I$	$0.556801 - 0.365373 I$	$0.557198 - 0.365342 I$
$n = 5$	$0.567717 - 0.25333 I$	$0.685974 - 0.33101 I$	$0.686253 - 0.330775 I$
$n = 6$	$0.0515394 - 0.682205 I$	$0.767809 - 0.461767 I$	$0.793316 - 0.434724 I$

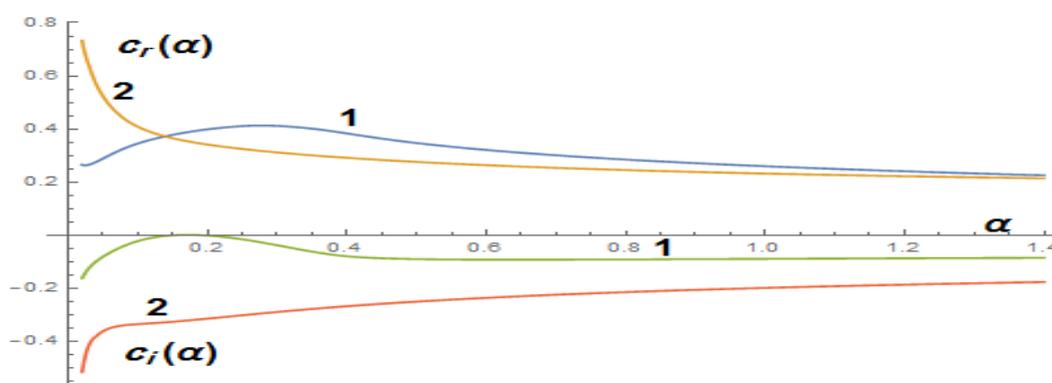


Рис.2. Действительная и мнимая части собственных значений для первых 2 Мод уравнения Орра- Зоммерфельда для Блазиуса пограничный слой (число Рейнольдса  $Re = 500$ ).

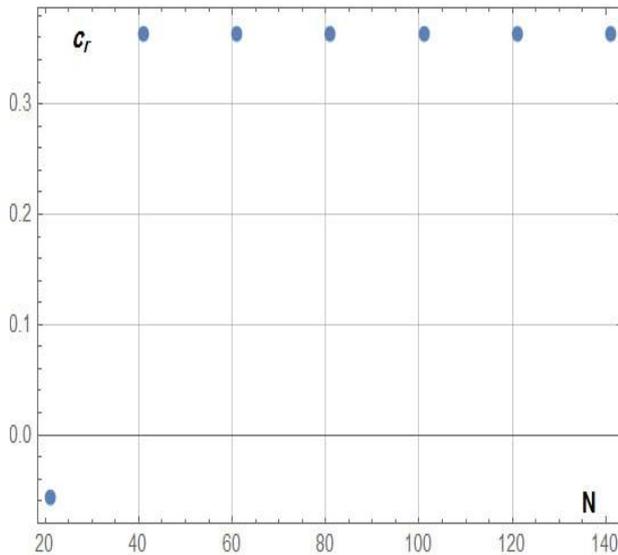


Рис.3(а) Влияние степеней полинома Чебышева на Действительную части собственных значений первой моды для профиля Блазиуса (число Рейнольдса  $Re = 500$ ).

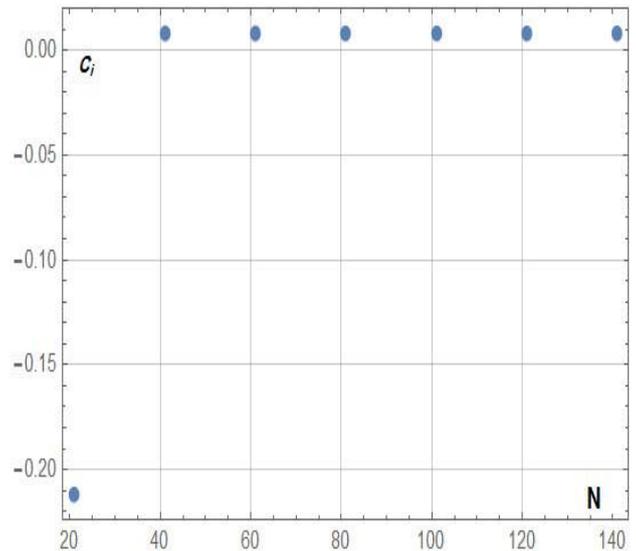


Рис.3(б). Влияние степеней полинома Чебышева на мнимую части собственных значений первой моды для профиля Блазиуса (число Рейнольдса  $Re = 500$ ).

Далее применяется метод коллокации на профиле скорости в развитом турбулентном пограничном слое, который задан аналитически [24].

$$\begin{aligned}
 U(y, Re_\delta) = & 0.99\sqrt{C_f(Re_\delta)/2} \left( 5.424 \arctg \left( \frac{2y(\delta/\delta_v) - 8.15}{16.7} \right) + \right. \\
 & \left. + \lg \left( \frac{(y(\delta/\delta_v) + 10.6)^{9.6}}{\left( (y(\delta/\delta_v))^2 - 8.15y(\delta/\delta_v) + 86 \right)^2} \right) - 3.511 + 2.44y^2(0.14(6-4y) + (1-y)), \right. \\
 & \left. \right) \tag{15}
 \end{aligned}$$

$$C_f(Re_\delta) = \frac{2\kappa^2}{ProductLog(e^{\sigma\kappa+2\sigma_1}\kappa Re_\delta)}, \quad \sigma = 5., \sigma_1 = 0.14, \kappa = 0.41,$$

$$\delta/\delta_v = Re_\delta \sqrt{C_f(Re_\delta)/2}, U(\delta, Re_\delta) = 0.99U_\infty,$$

Функция  $w = Product\ Log(z)$  есть решение уравнения  $z = we^w$  [23]. Отметим, что этот профиль является двухмасштабным: масштабы по  $y$  равны  $\delta$  и  $\delta_v$ .

Табл.3. Увеличение числа полиномов Чебышева оказывает существенное влияние на поведение собственных значений для профиля Musker

Musker [24], $\alpha = 10, Re_\delta = 10000$			
№ моды	$N = 91$	$N = 101$	$N = 111$
$n = 1$	0.319209 - 0.142915 I	0.319213 - 0.142915 I	0.319212 - 0.142914 I
$n = 2$	0.558509 - 0.223436 I	0.558551 - 0.223538 I	0.558548 - 0.223537 I
$n = 3$	0.58808 - 0.339234 I	0.68526 - 0.106219 I	0.68526 - 0.106219 I
$n = 4$	0.504129 - 0.462211 I	0.704718 - 0.140009 I	0.704718 - 0.140011 I
$n = 5$	0.68526 - 0.106219 I	0.59985 - 0.422507 I	0.746627 - 0.0986374I
$n = 6$	0.656087 - 0.256379 I	0.658813 - 0.336752 I	0.761482 - 0.119664 I

Набор собственных значений спектра приведен в таблице 3, эти значения рассчитываются по  $Re_\delta = 10000, \alpha = 10$ .

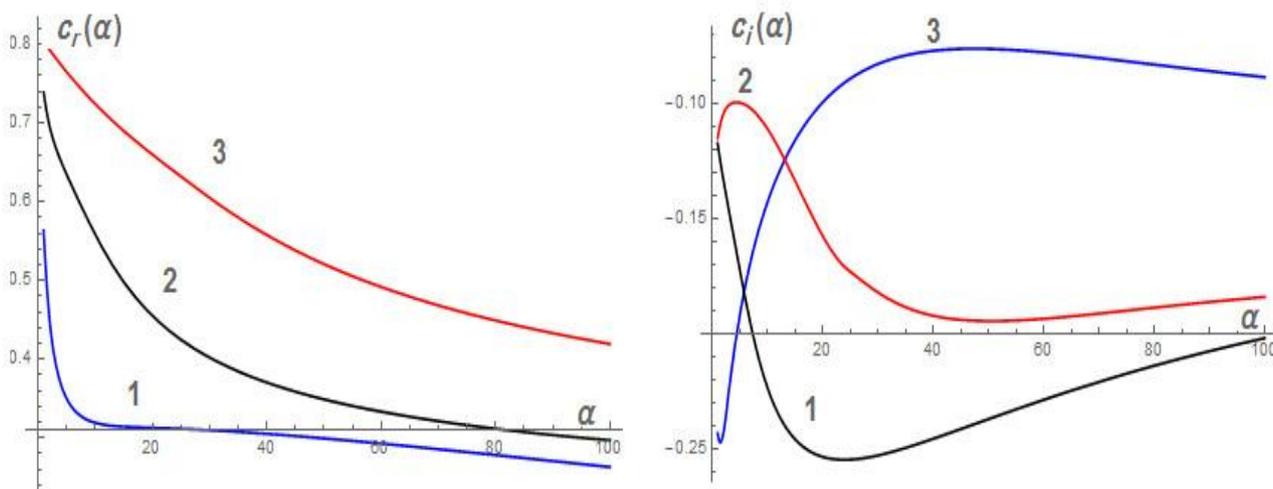


Рис.4. Действительная и мнимая части собственных значений для первых 3 мод уравнения Орра-Зоммерфельда для профиля развитого турбулентного пограничного слоя [24] (число Рейнольдса  $Re_\delta = 10000$ ).

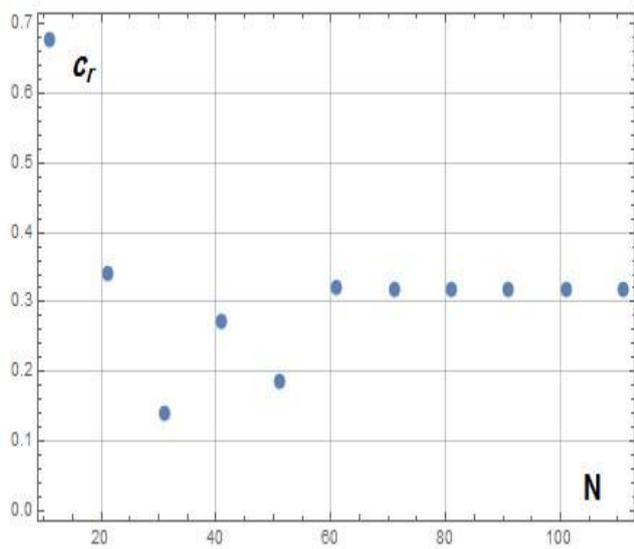


Рис.5(а). Влияние степеней полинома Чебышева на Действительную части собственных значений первой моды для профиля Musker [24], (число Рейнольдса  $Re_s = 10000$ ).

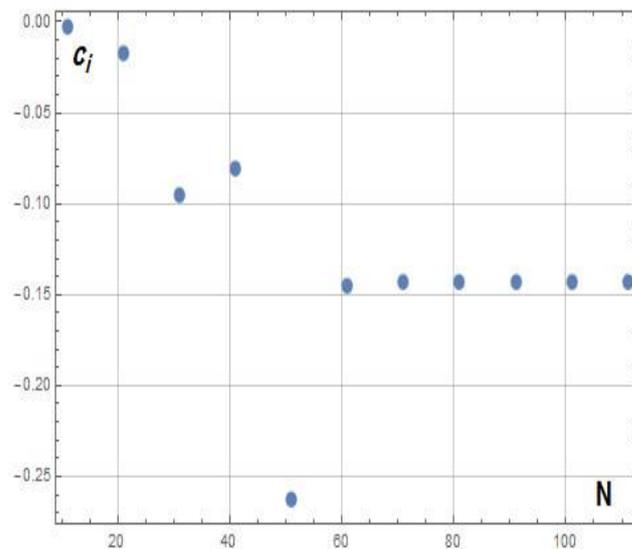


Рис.5(б). Влияние степеней полинома Чебышева на мнимую части собственных значений первой моды для профиля Musker [24], (число Рейнольдса  $Re_s = 10000$ ).

На рис. 4 представлены результаты определения дисперсионных характеристик волн Толлмина-Шлихтинга развитого турбулентного пограничного слоя. При этом использована арифметика с произвольным числом цифр [23]. Количество полиномов Чебышева, использованных при этом, равнялось 111, что было обусловлено необходимостью достаточного количества точек коллокаций в области изменения второй производной профиля продольной скорости фонового течения [24]. На Рис. 5(а,б) приведены результаты, демонстрирующие влияние степеней полинома Чебышева на действительную и мнимую части собственных значений первой моды для турбулентных пограничных слоев.

### Заключение

Для получения спектра собственных значений уравнения Орра-Зоммерфельда для фонового поля развитого турбулентного пограничного слоя, использован метод коллокации (псевдоспектральный), основанный на полиномах Чебышева. Методика отлажена на профиле Блазиуса и сравнена с результатами работы [9]. Очевидно, что увеличение числа полиномов Чебышева оказывает существенное влияние на точность определения собственных значений для профилей Блазиуса и Musker, как показано в таблице 2,3.

Влияние степеней полинома Чебышева на точность определения действительной и мнимой части собственных значений первой моды для ламинарных и турбулентных пограничных слоев показано на рисунках (3, 5(а,б)).

Получены действительная и мнимая части собственных значений в зависимости от волнового числа для первых 3 мод уравнения Орра-Зоммерфельда для профиля развитого турбулентного пограничного слоя [24], что важно для исследования динамики (в том числе и нелинейном) волн Толлмина-Шлихтинга.

### Библиографический список

1. Trefethen L.N. Spectral Methods in MATLAB, SIAM, 2000, 186 p.
2. Peyret R. Spectral methods for incompressible viscous flow. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 2002, 434 p.
3. Gheorghiu C.I. Spectral Methods for Non-Standard Eigenvalue Problems: Fluid and Structural Mechanics and Beyond, Springer, 2014, 120 p.

4. Schmid P.J., Henningson D.S. *Stability and transition in shear flows*, Springer, 2001, 572 p.
5. Boiko A.V., Dovgal A.V., Grek G.R. and Kozlov V.V. *Physics of Transitional Shear*, New York, Springer, 2012. DOI: 10.1007/978-94-007-2498-3.
6. Drazin P.G. and Reid W.H. *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press, 2004, 619 p.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1974. - 712 с.
8. Orszag S.A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation // *Journal of Fluid Mechanics*, 1971, vol. 50, issue 4, pp. 689 - 703.
9. Mack L.M. A numerical study of the temporal eigenvalues spectrum of the Blasius boundary layer // *Journal of Fluid Mechanics*, 1976, vol. 73, pp. 497 - 520.
10. Stewart G.W. and Sun J.G. *Matrix Perturbation Theory*, Academic Press, Boston, 1990, 188 p.
11. McFadden G.B., Murray B.T., Boisvert R.F. Elimination of spurious eigenvalues in the Chebyshev tau spectral method // *Journal Computational Physics*, 1990, vol. 91, pp. 228 - 239.
12. Reddy S.C., Schmid P.J., Henningson D. Pseudospectra of Orr-Sommerfeld operator // *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1993, vol. 53, issue 1, pp. 15 - 47.
13. Dongarra J.J., Straughan B., Walker D.W. Chebyshev tau-QZ algorithm methods for calculating spectra of hydrodynamic stability problems // *Applied Numerical Mathematics*, 1996, vol. 22, pp. 399 - 434.

14. Melenk J.M., Kirchner N.P., Schwab C. Spectral Galerkin discretization for hydrodynamic stability problems // Computing, 2000, vol. 65, issue 2, pp. 97 - 118.
15. Boyd J.P. Chebyshev and Fourier Spectral Methods, Dover, Mineola, New York, 2001, 690 p.
16. She J, Tang. T. Spectral and High-Order Methods with Applications, Science Press, Beijing, 2006, 326 p.
17. Ха Л.В. Закон подобия в развитом турбулентном пограничном слое // Труды МАИ. 2016. № 87. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=69519>
18. Хатунцева О.Н. Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Пуазейля // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=105673>
19. Хатунцева О.Н. Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Куэтта // Труды МАИ. 2019. № 104. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=102068>
20. Жаров В.А. Модельное представление когерентной структуры в развитом турбулентном пограничном слое // Ученые записки ЦАГИ. 2014. Т. XLV. № 5. С. 33 - 46.
21. Жаров В.А., Ха Л.В. Построение профиля продольной скорости по заданному камательному напряжению в развитом турбулентном пограничном слое на пластине // Ученые записки ЦАГИ. 2016. Т. XLV. № 8. С. 50 - 61.
22. Mason J.C., Handscomb D.C. Chebyshev Polynomials, Chapman and Hall, CRC, New York, 2003, 360 p.

23. Mathematica 5.0, User's Guide, Wolfram Research, 2003, 1301 p.

24. Musker A.J. Explicit expression for the smooth wall velocity distribution in turbulent boundary layer // AIAA Journal, 1979, vol. 17(6), pp. 655 - 657.