

УДК 519.977

Задачи группового быстродействия летательных аппаратов

Бортаковский А.С.^{1*}, Щелчков К.А.^{2}**

¹*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе д.4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

²*Удмуртский государственный университет, УдГУ,
Университетская ул., 1, Ижевск, 426034, Россия*

**e-mail: asbortakov@mail.ru*

***e-mail: incognitobox@mail.ru*

Аннотация

В статье рассматриваются четыре задачи оптимального по быстродействию управления группами подвижных объектов на плоскости: задача одновременного достижения одной цели группой объектов, задача управления группой с выделением ее лидера, задачи достижения нескольких целей при однократном или многократном последовательном отделении активных объектов управления от носителя. Централизованное управление группой строится на основе оптимального децентрализованного позиционного управления отдельным подвижным объектом.

Ключевые слова: оптимальное управление, задача быстродействия, централизованное управление группой, децентрализованное управление группой.

Введение

Различные задачи управления группами летательных аппаратов (ЛА) исследуются в настоящее время с нарастающей интенсивностью (см. обзор в [1]). Актуальность этих исследований определяется необходимостью автоматического управления беспилотными летательными аппаратами разного назначения. Задачи оптимального управления возникают в процессе предполетного планирования действий смешанных групп пилотируемых и беспилотных ЛА. Вопросы быстродействия при боевом применении ударных ЛА имеют решающее значение.

Задачи планирование маршрутов движения ЛА, как правило, решаются на плоскости. При оптимизации распределения целей используются методы математического программирования [2,3], в некоторых случаях [4] – линейное целочисленное программирование. Траектории ЛА обычно представляются ломаными. При отклонении от источников потенциальных угроз (пунктов противовоздушной обороны противника) траектории строятся [5,6] при помощи диаграмм Вороного или триангуляции Делоне. Критерием качества управления в этих работах служит расход топлива (пропорциональный протяженности маршрута) и/или риск уничтожения ЛА зенитно-ракетным комплексом противника. Описание плоских траекторий движения ЛА дифференциальными уравнениями применяется при планировании маршрутов [7], в задачах адаптивного управления [8,9], в частности, при управляемом движении за лидером [10,11]. Математические задачи поражения подвижных целей относятся к области дифференциальных игр. Например, задачи группового преследования [12,13,14], перехвата [15].

Для оптимизация траекторий ЛА, описываемых дифференциальными уравнениями, применяются различные методы: переход к дискретной задачи оптимального управления и ее решение с использованием принципа максимума [1], вариационные принципы [16]. Синтез оптимального позиционного управления связан с применением динамического программирования [17]. Для разных типов переключаемых систем методы синтеза разработаны в [18,19]. Модификации этих методов применимы для синтеза централизованного управления группами ЛА.

В статье рассматриваются четыре задачи группового быстрогодействия. Все задачи академические, уравнения движения объектов управления простые и далеки от прикладных моделей управления ЛА. Цель исследования состоит в разработке методов формирования оптимального по быстроддействию позиционного управления группой объектов. Такие методы, отработанные на простых модельных примерах, могут быть применены к прикладным задачам. Новизна предлагаемых подходов к построению группового управления определяется новизной решаемых задач. Для формирования централизованного управления группой объектов используется оптимальное децентрализованное управление отдельными объектами, входящими в состав группы. Иначе говоря, предполагается, что задача быстрогодействия для одного (изолированного) объекта решена, т.е. известно позиционное управление, оптимальное по быстроддействию.

Задача одновременного достижения цели группой объектов отражает один из способов эффективного нападения. Такая стратегия используется, например, при атаке хорошо защищенной цели, когда эффект одновременного нападения позволяет преодолеть средства защиты. Здесь важно согласовать момент достижения цели, что

возможно только централизованным способом, учитывая позиции всех управляемых объектов.

Другая централизованная стратегия нападения применяется, когда объекты управления не могут использовать оптимальное децентрализованное управление. Например, из-за помех, создаваемых противником, невозможно определить позицию объекта управления. В этом случае для всей группы можно использовать программное управление, оптимальное по быстродействию для одного объекта (лидера), выбранного из группы. Разумеется, при этом попадание в цель каждого объекта, за исключением лидера, обеспечить нельзя. Групповой промах можно характеризовать среднеквадратичным отклонением о цели. Тогда лидера следует выбирать так, чтобы минимизировать это отклонение. Заметим, что при этом лидер может оказаться виртуальным и не совпадать ни с одним объектом управления.

В задачах наискорейшего достижения многих целей показателем качества является время, необходимое для уничтожения всех целей. Это показатель равен времени достижения самой дальней цели, продолжительность движения до которой наибольшая. Рассматривается движение одного составного объекта управления (носителя), от которого в процессе движения отделяются частичные (ударные) объекты управления, каждый из которых атакует одну из заданных целей. В первой постановке задачи происходит одновременное отделение всех частичных объектов, т.е. носитель разделяется на части. Во второй постановке отделение частей последовательное. Моменты разделения носителя или отделения от него частичных объектов управления не заданы. Они являются ресурсом управления и находятся в процессе оптимизации.

1. Задача наискорейшего одновременного достижения цели

Группа из m объектов управления движется по плоскости. Линейная скорость движения каждого объекта постоянная, а скорость поворота ограниченная. Положение каждого (i -го) объекта характеризуется координатами (x_1^i, x_2^i) , а направление движения определяется углом наклона траектории γ^i , $i = 1, \dots, m$. Управляя угловой скоростью u^i , можно изменять направление движения объекта. Управление u^i ограничено по модулю, поэтому допустимые траектории имеют ограниченную кривизну. Начальное состояние (положение и направление движения) каждого объекта группы задано. Конечное положение всех объектов – это заданная цель (начало координат $O(0,0)$), которую нужно достигнуть одновременно всем объектам, затратив наименьшее время.

Движение группы из m объектов управления описывается уравнениями

$$\dot{x}_1^i(t) = \cos \gamma^i(t), \quad \dot{x}_2^i(t) = \sin \gamma^i(t), \quad \dot{\gamma}^i(t) = u^i(t), \quad |u^i(t)| \leq 1. \quad (1)$$

Начальное состояние и конечное положение каждого объекта группы заданы

$$x^i(0) = x_0^i, \quad \gamma^i(0) = \gamma_0^i, \quad x^i(T) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2)$$

Требуется найти минимальное время T и управление, на котором это минимальное время достигается, т.е. решить задачу быстродействия: $T \rightarrow \min$.

Найдем децентрализованное управление, оптимальное по быстродействию. Для этого используем решение задачи, найденное в [2] при помощи принципа максимума Понтрягина. В поставленной задаче направление движения в конечном по-

ложении может быть любым. Это упрощает решение [2] задачи для одного объекта. Оптимальное управление будет релейным с одним переключением. Сначала объект нужно максимально быстро (при управлении $|u|=1$) повернуть по направлению к цели, затем прямолинейно двигаться до ее достижения. Следовательно, оптимальная траектория представляет собой дугу окружности и отрезок касательной к ней, соединенные гладким образом.

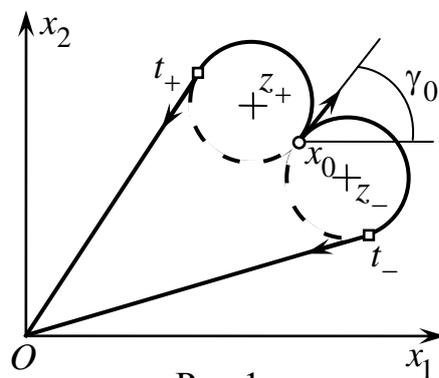


Рис.1

На рис.1 изображены две окружности единичного радиуса, проходящие через начальное положение x_0 и касающиеся вектора начальной скорости (полужирная стрелка), направление которого задается углом γ_0 . Движение по окружности с центром в точке z_+ происходит в положительном направлении ($\mathbf{u}(x, \gamma) = 1$), а по окружности с центром z_- – в отрицательном $\mathbf{u}(x, \gamma) = -1$. В моменты времени t_+ или t_- управление принимает нулевое значение, а траектория движения становится прямолинейной $\mathbf{u}(x, \gamma) = 0$. Из двух представленных траекторий, ведущих из начального положения x_0 в цель O , нужно выбрать кратчайшую, так как длина траектории численно равна времени движения, поскольку линейная скорость объектов (1) еди-

ничная. Следовательно, наименьшее время достижения цели из стартового состояния (x, γ) находится по формуле

$$\theta(x, \gamma) = \min\{\theta_+(x, \gamma), \theta_-(x, \gamma)\}, \quad (3)$$

где $\theta_+(x, \gamma)$ и $\theta_-(x, \gamma)$ – длины указанных траекторий, одна из которых ("положительная") начинается под действием управления $\mathbf{u}(x, \gamma) = 1$, а другая ("отрицательная") – под управлением $\mathbf{u}(x, \gamma) = -1$. Эти величины вычисляются следующим образом

$$\theta_+(x, \gamma) = t_+ + \tau_+ ; \quad \theta_-(x, \gamma) = t_- + \tau_-, \quad (4)$$

где t_+ – время движения по окружности с центром z_+ , τ_+ – время прямолинейного движения, t_- , τ_- – имеют тот же смысл, но для окружности с центром z_- . Координаты центров окружностей определяются стартовым состоянием (x, γ) :

$$z_{1+} = x_1 - \sin \gamma, \quad z_{2+} = x_2 + \cos \gamma; \quad z_{1-} = x_1 + \sin \gamma, \quad z_{2-} = x_2 - \cos \gamma, \quad (5)$$

а пары неизвестных (t_+, τ_+) или (t_-, τ_-) в (4) являются соответственно решениями систем уравнений

$$\begin{cases} \tau_+ = -z_{1+} \cos(\gamma + t_+) - z_{2+} \sin(\gamma + t_+), \\ z_{1+} \sin(\gamma + t_+) - z_{2+} \cos(\gamma + t_+) = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} \tau_- = -z_{1-} \cos(\gamma - t_-) - z_{2-} \sin(\gamma - t_-), \\ z_{1-} \sin(\gamma - t_-) - z_{2-} \cos(\gamma - t_-) = 1, \end{cases} \quad (6)$$

причем $0 \leq t_+ < 2\pi$, $\tau_+ \geq 0$, $0 \leq t_- < 2\pi$, $\tau_- \geq 0$. Здесь не исключаются частные случаи, когда управление не имеет переключений. Если вектор начальной скорости направлен к цели, то поворот делать не надо, при этом $t_+ = t_- = 0$. Если цель лежит на одной из окружностей с центрами (5), то либо $\tau_+ = 0$, либо $\tau_- = 0$. Если же цель совпадает со стартовой позицией, то $\theta(x, \gamma) = 0$, так как цель достигнута.

Таким образом, децентрализованное оптимальное по быстродействию позиционное управление $\mathbf{u}(x, \gamma)$ одним объектом построено. Заметим, что это релейное управление с одним переключением является оптимальным, если объект управления находится "далеко" от цели. Точнее, цель не должна лежать внутри "восьмерки", образованной двумя окружностями (см. рис.1).

Найдем теперь централизованное управление группой. Минимальное время группового достижения цели определяется временем движения наиболее удаленного от цели объекта группы

$$\min T = \max\{\theta(x_0^1, \gamma_0^1), \dots, \theta(x_0^m, \gamma_0^m)\}. \quad (7)$$

Предположим, что первый объект самый дальний, т.е. $\min T = \theta(x_0^1, \gamma_0^1)$. Тогда управление им должно быть оптимальным по быстродействию и совпадать с описанным выше децентрализованным управлением $\mathbf{u}(x^1, \gamma^1)$. Построим управление для объекта, который может достигнуть цель быстрее, чем первый. Пусть, например i -й объект имеет запас времени по сравнению с первым, т.е. $\theta(x_0^i, \gamma_0^i) < \theta(x_0^1, \gamma_0^1)$. Тогда для него можно некоторое время использовать неоптимальное управление $\mathbf{u}^H(x^i, \gamma^i)$, но, затем, когда запас времени будет исчерпан, т.е. при $\theta(x^i, \gamma^i) \geq \theta(x^1, \gamma^1)$, нужно применять оптимальное управление $\mathbf{u}(x^i, \gamma^i)$. Выбор неоптимального управления неоднозначный. Например, можно выбрать управление, "противоположное" оптимальному:

$$\mathbf{u}^H(x^i, \gamma^i) = -\mathbf{u}(x^i, \gamma^i) \text{ при } \mathbf{u}(x^i, \gamma^i) \neq 0; \quad \mathbf{u}^H(x^i, \gamma^i) = 1 \text{ при } \mathbf{u}(x^i, \gamma^i) = 0; \quad (8)$$

либо нейтральное $\mathbf{u}^H(x^i, \gamma^i) = 0$ при $\mathbf{u}(x^i, \gamma^i) \neq 0$. Такая стратегия управления группой обеспечивает одновременное достижение цели за наименьшее время.

На рис.2 представлено решение задачи для группы из четырех объектов управления с начальными состояниями:

$$(x_0^1, \gamma_0^1) = (5, 4, 3\pi/4), (x_0^2, \gamma_0^2) = (3, 4, \pi), (x_0^3, \gamma_0^3) = (3, 2, -3\pi/4), (x_0^4, \gamma_0^4) = (5, 2, -3\pi/4). \quad (9)$$

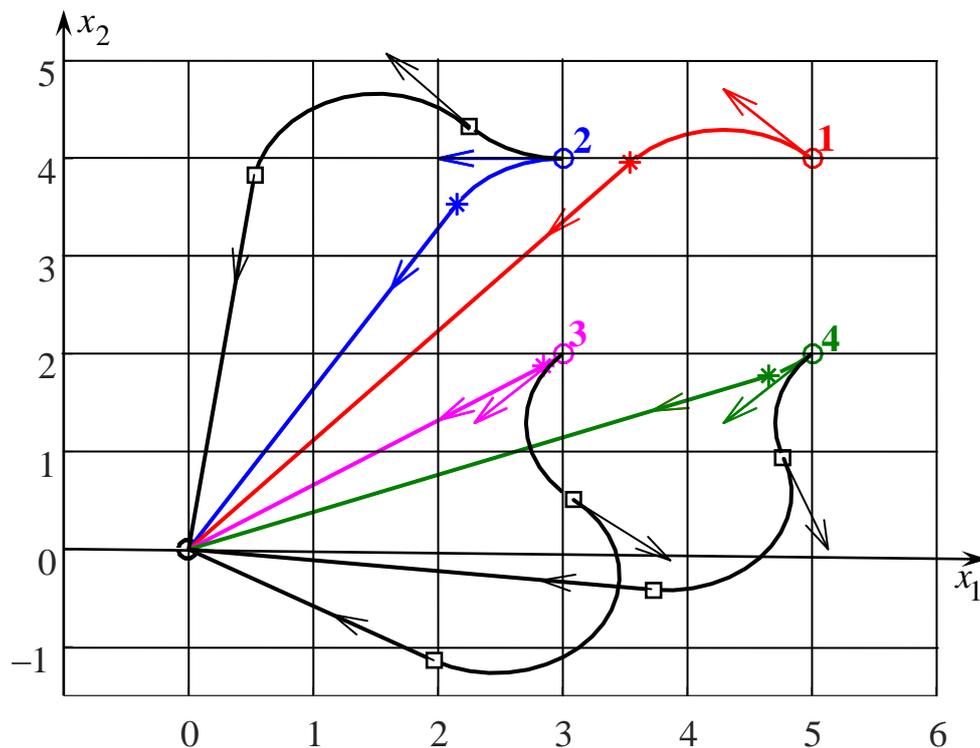


Рис.2

Оптимальные траектории окрашены красным, синим, фиолетовым и зеленым цветами, неоптимальные – черным. Точки переключения управления отмечены квадратиками. Наиболее удаленным оказался первый объект (красная траектория), а минимальное время одновременного достижения цели этой группой $\min T \approx 6.9428$.

2. Задача субоптимального быстрогодействия в условиях неопределенности

Рассмотрим теперь задачу управления группой в условиях неопределенности. Предполагаем, что каждый объект управления не имеет информации о положении цели, поэтому нельзя использовать оптимальное децентрализованное управление $\mathbf{u}(x, \gamma)$ и оптимальное централизованное управление (8). Центр управления группой может выбрать в этой группе лидера и задать ему программное управление $\hat{u}(t) = \mathbf{u}(t, \hat{x}(t))$, $0 \leq t \leq T$, оптимальное по быстродействию. Остальные объекты управления должны при выборе своего управления ориентироваться на поведение лидера. Например, выполнять то же программное управление $\hat{u}(\cdot)$, что и лидер, либо минимизировать отклонение по направлению движения. В этом случае управление выбирается следующим образом:

$$\mathbf{u}(t, \gamma, \hat{\gamma}) = \begin{cases} \text{sign}(\hat{\gamma} - \gamma), & \gamma \neq \hat{\gamma}, \\ 0, & \gamma = \hat{\gamma}. \end{cases}$$

Поскольку в таких условиях одновременное попадание в цель всех объектов невозможно, то речь пойдет об уменьшении промаха. Будем характеризовать качество управления группой в целом либо средним значением I_c промахов (индивидуальных отклонений от цели), либо наибольшим I_Γ из этих отклонений

$$I_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |x^i(T)|, \quad I_\Gamma = \max_{i=1, \dots, n} |x^i(T)|. \quad (10)$$

Здесь $|x|$ – евклидова длина радиус-вектора x . Показатель I_Γ гарантирующий – промах каждого объекта из группы не превышает величины I_Γ .

Выбор лидера группы сводится к простому перебору m вариантов. При другой более сложной постановке задачи допускается так называемый виртуальный лидер, который не совпадает ни с одним с объектом группы. Начальное состояние такого лидера определяется в результате минимизации одного из показателей (10).

На рис.3 для группы объектов (9) сплошными и штриховыми линиями показаны оптимальные траектории ведущих объектов и субоптимальные траектории ведомых соответственно. Ведомые объекты ликвидируют отклонение от направления движения лидера, т.е. используют управление $\mathbf{u}(t, \gamma, \hat{\gamma})$. При минимизации среднего

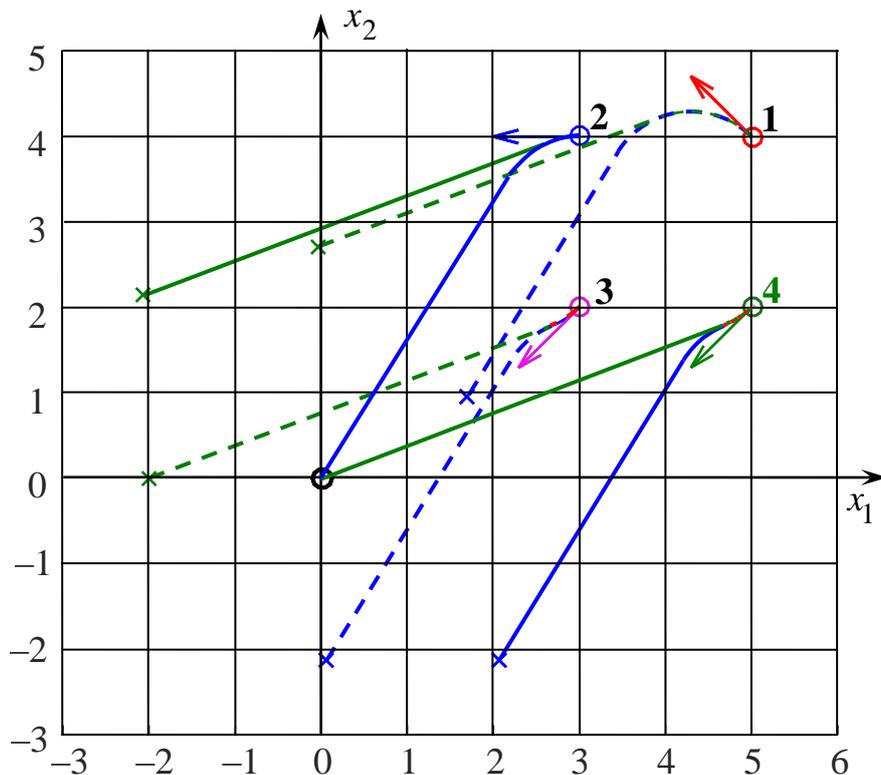


Рис.3

отклонения лучшим лидером оказался второй объект. Траектории группы в этом случае изображены синими линиями, а минимальное значение показателя качества $\min I_c \approx 5.7929$. При минимизации наибольшего отклонения лучшим ведущим ока-

зался четвертый объект. Траектории группы в этом случае изображены зелеными линиями, а минимальное значение показателя качества $\min I_{\Gamma} \approx 2.9697$.

3. Задача наискорейшего достижения целей при одновременном отделении ударных объектов управления

Рассмотрим движение одного объекта (носителя), который движется по плоскости с постоянной скоростью:

$$\dot{x}_1(t) = V \cos \gamma(t), \quad \dot{x}_2(t) = V \sin \gamma(t). \quad (11)$$

Направление движения определяется величиной угла $\gamma(t)$, которая считается управлением и может выбираться произвольным образом: $\gamma(t) \in \mathbf{P}$. Начальное состояние носителя задано $x(0) = x_0$, $\gamma(0) = \gamma_0$. В процессе движения в некоторый момент времени (в момент разделения) от носителя отделяются m ударных объектов x^1, \dots, x^m , которые направляются к заданным m целям соответственно. Линейная скорость движения v каждого из ударных объектов меньше, чем скорость носителя. Для определенности полагаем, что $V = 2v = 1$. Обозначим через τ момент разделения, а через T^i – время достижения цели i -м объектом:

$$x^i(\tau) = x(\tau), \quad x^i(T^i) = z^i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (12)$$

Равенства (12) выражают начальные и терминальные условия для отделяемых объектов. Требуется найти минимальное время $T = \max\{T^1, \dots, T^m\}$, за которое будут достигнуты все цели, и управление, на котором это минимальное время достигается, т.е. решить задачу быстродействия: $T \rightarrow \min$.

Рассмотрим сначала решение задачи для двух целей z^1 и z^2 . На рис.4 траектория носителя представлена двойной красной стрелкой, а траектории отделившихся объектов сплошными синими стрелками. Начальное положение носителя и расположение целей отмечены окружностями, а точка разделения $\tilde{x} = x(\tau)$ – квадратиком. Из геометрической оптики следует, что линией разделения будет служить серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему цели. Точка разделения определяется на этом серединном перпендикуляре однозначно, причем так, что синус угла падения будет в два раза больше синуса угла преломления ($\sin \alpha : \sin \beta = V : v = 2$).

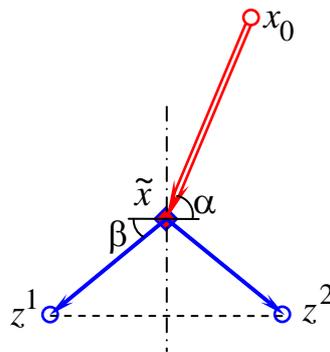


Рис.4

Для большего количества целей нужно построить все "подозрительные" точки разделения, а именно: для каждой пары точек находим "двойную" точку разделения (как на рис.4); для каждой тройки целей, не лежащих на одной прямой, определяем "тройную" точку разделения – центр окружности, проходящей через эти три цели. Среди всех "подозрительных" точек разделения (их будет не более $C_m^2 + C_m^3$) выбрать наилучшую. Функция цены для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\min T = \varphi(x_0) = \min_{\tilde{x} \in \mathbf{P}^2} (|x_0 - \tilde{x}| + 2 \max\{| \tilde{x} - z^1 |, \dots, | \tilde{x} - z^m | \}).$$

Поиск лучшей точки разделения \tilde{x} можно проводить не на всей плоскости \mathbf{P}^2 , а только на серединных перпендикулярах ко всем отрезкам, соединяющим пары це-

лей. Если же все цели лежат на одной прямой, то точку разделения надо искать на серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему крайние цели.

На рис.5 показано решение задачи для пяти целей

$$x_0 = (2,5), \quad z^1 = (-1,0), \quad z^2 = (1,-1), \quad z^3 = (3,1), \quad z^4 = (3,3), \quad z^5 = (-1,2).$$

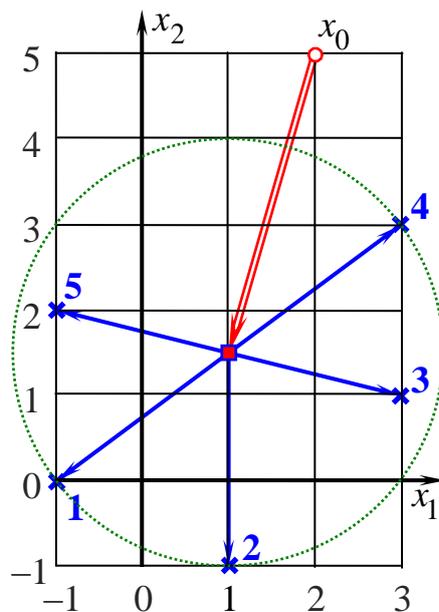


Рис.5

Начальное состояние обозначено окружностью, цели – крестиками, точка разделения $\tilde{x} = (1, 1.5)$ – квадратиком. Траектория носителя представлена красной двойной стрелкой, а траектории отделившихся объектов сплошными синими стрелками. Минимаксное значение показателя качества $\min T = \min \max \{T^1, \dots, T^5\} \approx 8.6401$. Это значение совпадает со временем достижения первой, второй и четвертой целей. Иначе говоря, точка разделения $\tilde{x} = (1, 1.5)$ является центром окружности, проходящей через эти цели. Она представлена на рис.5 пунктирной линией.

4. Задача наискорейшего достижения целей при последовательном отделении объектов управления

В отличие от задачи быстродействия, поставленной в разд.3, исследуем случай последовательного отделения объектов от носителя. Пусть в моменты времени t^1, \dots, t^{m-1} , образующие неубывающую последовательность $t^1 \leq t^2 \leq \dots \leq t^{m-1}$, от носителя отделяются объекты управления, каждый из которых направляется к своей цели. Обозначим через x^1, \dots, x^{m-1} положения последовательно отделяемых объектов, а через T^i – время достижения цели i -м объектом, $i=1, \dots, m-1$, причем T^m – время достижения носителем цели z^m . Тогда начальные и терминальные условия для управляемых объектов имеют вид

$$x(0) = x_0, \quad x(T^m) = z^m, \quad x^i(t^i) = x(t^i), \quad x^i(T^i) = z^i, \quad i=1, \dots, m-1. \quad (13)$$

Требуется найти минимальное время $T = \max\{T^1, \dots, T^m\}$, за которое будут достигнуты все цели, и управление, на котором это минимальное время достигается, т.е. решить задачу быстродействия: $T \rightarrow \min$.

Рассмотрим сначала решение задачи для двух целей z^1 и z^2 . На рис.6 представлены два решения задачи для двух вариантов (a и b) начального состояния носителя соответственно. Траектория носителя изображена двойной красной стрелкой, а траектория отделившегося объекта – обычной, синей стрелкой. В случае a траектории – сплошные линии, а в случае b – штриховые. Начальное положение носителя и расположение целей отмечены окружностями, а точки отделения $\tilde{x} = x(t^1)$ – квадратами. Из геометрической оптики следует, что линией разделения будет служить

Лучшую точку отделения \tilde{x} можно искать на окружности Аполлония, а не на всей плоскости \mathbf{P}^2 .

На рис.7 показано решение задачи для трех целей

$$x_0 = (4,7), \quad z^1 = (6,2), \quad z^2 = (3,0), \quad z^3 = (0,0).$$

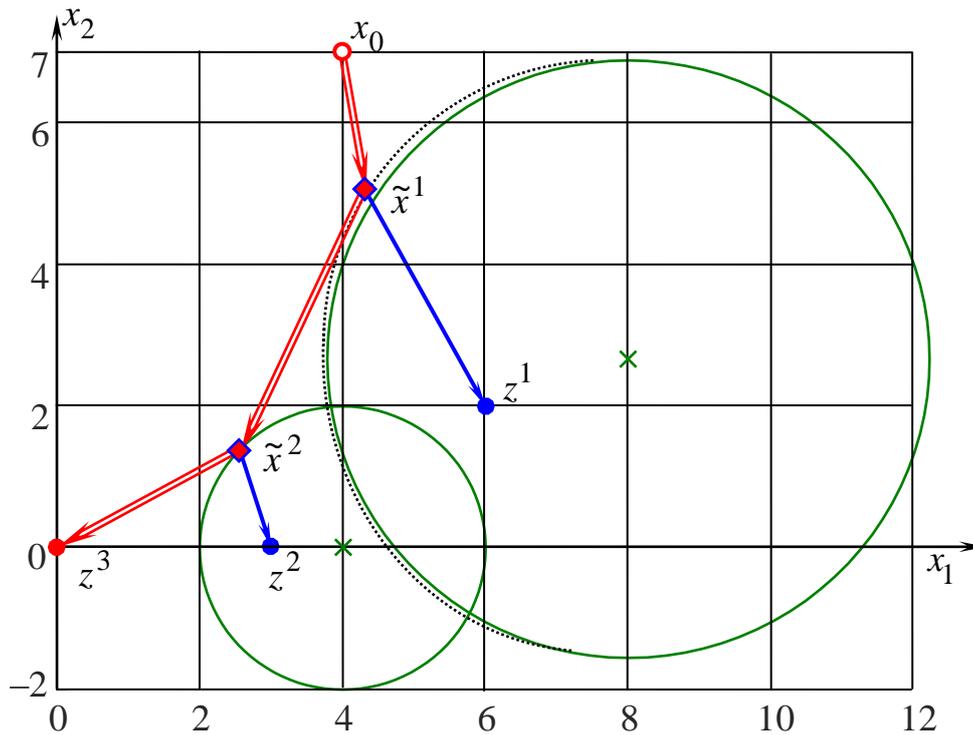


Рис.7

Начальное состояние обозначено красной окружностью, а цели – кругами: z^1 и z^2 синими, а z^3 – красным. Траектория носителя представлена красными двойными стрелками, а траектории отделившихся объектов – обычными, синими стрелками. Точки отделения $\tilde{x}^1 \approx (4.3136, 5.053)$, $\tilde{x}^2 \approx (2.5578, 1.3856)$ отмечены квадратиками. Отметим, что точка \tilde{x}^2 отделения второго объекта лежит на окружности Аполлония, построенной для двух точек z^2 и z^3 . Точка \tilde{x}^1 отделения первого объекта лежит на некоторой линии отделения (кривая четвертого порядка), которая отличается

от окружности Аполлония, построенной для двух точек z^1 и z^3 . Окружности Аполлония на рис.7 окрашены зеленым цветом, а линия отделения – черная пунктирная кривая. Дело в том, что после отделения первого объекта оптимальная траектория носителя – это ломаная $\tilde{x}^1 \tilde{x}^2 z^3$, а не отрезок $\tilde{x}^1 z^3$. Минимальное движения по оптимальной траектории $\min T = 8.9477$.

В рассматриваемом случае оптимальная траектория является ломаной с тремя звеньями. Отметим, что при другом взаимном расположении начального состояния носителя и двух целей, оптимальные траектории могут быть ломаными из двух звеньев или, вообще, отрезком. В общем случае для m целей траектория представляет собой ломаную с не более чем $m + 1$ звеньями. Функция цены удовлетворяет рекуррентному уравнению

$$\varphi(x_0 | z^1, \dots, z^m) = \min_{\tilde{x} \in \mathbf{P}^2} (|x_0 - \tilde{x}| + \max\{2|\tilde{x} - z^1|, \varphi(\tilde{x} | z^2, \dots, z^m)\}) \quad (14)$$

с начальным условием: $\varphi(x | z) = |x - z|$. При этом решение зависит от выбранного порядка целей. Поэтому уравнение (14) нужно решать при разных перестановках целей и выбрать затем наименьшую.

Заключение

Поставлены и исследованы четыре новые задачи группового быстрогодействия. Для теоретических исследований в области оптимального управления группами подвижных объектов решенные задачи можно использовать как тестовые примеры. Несмотря на академический характер, разработанные подходы к нахождению функции цены и позиционного оптимального управления, могут быть применены в более

сложных прикладных задачах. Как показывают примеры, построение позиционного управления группами объектов отличаются от классических методов синтеза оптимальных систем управления отдельными объектами. В частности, оптимальное управление группой может складываться из неоптимального или даже противоположного оптимальному управлению для некоторых объектов группы. Этим объясняется необходимость разработки новых методов синтеза централизованного управления группами ЛА.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты

18-08-00128-а, 17-38-50118-мол_нр.

Библиографический список

1. Евдокименков В.Н., Красильщиков М.Н., Оркин С.Д. Управление смешанными группами пилотируемых и беспилотных летательных аппаратов в условиях единого информационно-управляющего поля. – М.: Изд-во МАИ, 2015. – 272 с.
2. Richards A., How J.P. Aircraft trajectory planning with collision avoidance using mixed integer linear programming // Proceedings of the American Control Conference (ACC' 2002), IEEE Publ., 2002, vol. 3, pp. 1936 - 1941.
3. Jia Zeng, Xiaoke Yang, Lingyu Yang, and Gongzhang Shen. Modeling for UAV resource scheduling under mission synchronization // Journal of Systems Engineering and Electronics, October 2010, vol. 21, no. 5, pp. 821 - 826.

4. Schouwenaars T., Valenti M., Feron E., How J. Linear Programming and Language Processing for Human/Unmanned-Aerial-Vehicle Team Missions // Journal of Guidance, Control, and Dynamics, March–April 2006, vol. 29, no. 2, pp. 303 - 313.
5. Winstrand M. Mission Planning and Control of Multiple UAV's. Scientific Report № FOI-R-1382-SE Swedesh Defence Research Agency, 2004, pp. 52.
6. Rong Zhu, Dong Sun, Zhaoying Zhou. Cooperation Strategy of Unmanned Air Vehicles for Multitarget Interception // Journal Guidance, 2005, vol. 28, no. 5, pp. 1068 - 1072.
7. Kamal W.A. and Samar R.A Mission Planning Approach for UAV Applications // Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico, Dec. 9-11, 2008, pp. 3101 - 3106.
8. Schumacher C.J. and Kumar R. Adaptive control of UAVs in close-coupled formation flight // Proceedings of the American Control Conference, 2000, vol. 2, pp. 849 - 853.
9. Dušan M. Stipanovic, Gökhan Inalhan, Rodney Teo, Claire J. Tomlin. Decentralized overlapping control of a formation of unmanned aerial vehicles // Automatica, 2004, vol. 40, pp. 1285 - 1296.
10. Jongki Moon. Mission-Based Guidance System Design for Autonomous UAVs // A Thesis Presented to The Academic Faculty. Georgia Institute of Technology, December 2009, pp. 145.
11. Ha J., Sattigeri R. Vision-based obstacle avoidance based on monocular slam and image segmentation for UAVs, Infotech@Aerospace, 2012, pp. 1-9.
12. Petrov N.N., Shchelchikov K.A. On the interrelationship of two problems on evasion with many evaders // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2016, vol. 80, no. 4, pp. 333 – 338.

13. Petrov N.N., Shchelchkov K.A. On the Interrelation of Two Linear NonStationary Problems with Multiple Evaders // International Game Theory Review, 2015, vol. 17, no. 4, pp. 1550013-9 – 1550013-11.
14. Ermin Wei, Eric W. Justh and P.S. Krishnaprasad. Pursuit and an evolutionary game // Proceedings of the Royal Society, 2009, vol. 465, pp. 1539 - 1559.
15. Tewari A. Optimal nonlinear spacecraft attitude control through Hamilton – Jacobi formulation // Journal Astronautical Science, 2002, vol. 50, pp. 99 - 112.
16. Дивеев А.И., Конырбаев Н.Б. Управление группой квадрокоптеров методом вариационного аналитического программирования // Труды МАИ. 2017. № 96. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=85774>
17. Беллман Р. Динамическое программирование. – М.: ИЛ, 1960. – 400 с.
18. Бортакoвский А.С. Оптимальное и субоптимальное управления пучками траекторий детерминированных систем автоматного типа // Известия РАН. Теория и системы управления. 2016. № 1. С. 5 - 26.
19. Бортакoвский А.С. Достаточные условия оптимальности управления переключаемыми системами // Известия РАН. Теория и системы управления. 2017. № 4. С. 86 - 103.
20. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 392 с.