

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи



Шевченко Виктория Витальевна

**ОПТИМИЗАЦИЯ СЛОЖНЫХ СХЕМ МЕЖПЛАНЕТНОГО ПЕРЕЛЁТА КА
С КОМБИНИРОВАННОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ**

Специальность: 2.5.16. Динамика, баллистика, управление движением
летательных аппаратов

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Москва – 2026

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Московский авиационный институт, МАИ).

Научный руководитель

Константинов Михаил Сергеевич, доктор технических наук, профессор кафедры 601 «Космические системы и ракетостроение» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

Официальные оппоненты

Клюшников Валерий Юрьевич, главный учёный секретарь, доктор технических наук, старший научный сотрудник акционерного общества «Центральный научно-исследовательский институт машиностроения»

Синицын Алексей Андреевич, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник акционерного общества «Государственный научный центр Российской Федерации «Исследовательский центр имени М.В. Келдыша»

Ведущая организация

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт космических исследований Российской академии наук, 117997, г. Москва, Профсоюзная ул., дом 84/32

Защита состоится «24» сентября 2026 г. в 16:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.327.03 в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ) по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте МАИ по ссылке:

https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=188418

Автореферат диссертации разослан «__» _____ 2026 года.

Отзывы, заверенные печатью, просим направлять по адресу:

125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д.4, Отдел подготовки кадров высшей квалификации МАИ.

Учёный секретарь диссертационного совета
24.2.327.03, д.т.н., доцент

А.В. Старков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Современные межпланетные КА являются инструментом для достижения множества целей и решения научных задач, каждая из которых требует применения столь же разнообразных методик для их реализации. Гравитационные манёвры стали неотъемлемой частью проектно–баллистического анализа. Связано это, прежде всего, с тем, что применение гравитационных манёвров позволяет изменять орбиту и гелиоцентрическую скорость КА, задействуя при этом минимальные затраты энергии. Тщательное планирование межпланетных миссий с гравитационными манёврами способствует сокращению времени полёта и увеличению транспортных возможностей КА (в частности, снижению расхода топлива, требуемого для реализации транспортной операции).

В диссертационной работе решается задача проектирования оптимальных межпланетных траекторий КА, оснащённых комбинированной двигательной установкой (химической двигательной установкой (ХДУ) и электроракетной двигательной установкой (ЭРДУ)), для исследования внутренней гелиосферы Солнца из внеэклиптических положений. В качестве прототипа миссии рассматривается отечественный проект «Интергелиозонд». Гелиоцентрические орбиты КА, имеющие достаточно большое наклонение, формируются за счёт применения последовательности резонансных гравитационных манёвров у Венеры. Проектно–баллистический анализ миссии солнечного зонда подразумевает необходимость решения минимум трёх проблем:

1. Разработки общей методики построения траектории с промежуточными резонансными гравитационными манёврами у планет.
2. Расширения транспортных возможностей и сокращения времени выведения КА за счёт включения в последовательность гравитационных манёвров π –резонансных манёвров, осуществляемых в противоположных точках орбиты планеты, когда угловая дальность отдельного гелиоцентрического перелёта составляет $\pi \cdot (2k - 1)$, где $k = 1, 2 \dots K$; $K \in R$.
3. Формулировки и решения задачи сквозной оптимизации траектории выведения КА на целевую гелиоцентрическую орбиту, имеющую достаточно большое наклонение к плоскости экватора Солнца.

Актуальность данной работы обусловлена:

- возрастающим интересом к использованию ЭРДУ для межпланетных перелётов, что связано с тем, что ЭРДУ по нескольким характеристикам, а, прежде всего, по расходу топлива, обладают существенным преимуществом над традиционными ХДУ;
- необходимостью совершенствования математических моделей, для анализа оптимальных межпланетных траекторий КА, оснащённых комбинированной двигательной установкой;
- целесообразностью разработки методов анализа межпланетных перелётов с последовательностью гравитационных манёвров, обеспечивающих резонансные гелиоцентрические перелёты с угловой дальностью, отличающейся от целого числа оборотов на 180° (такие гравитационные манёвры в работе называются π –резонансными);
- целесообразностью исследования полного набора условий оптимальности для анализируемой задачи сквозной оптимизации, обеспечивающего корректность решения многоточечной краевой задачи.

Степень разработанности. Задача оптимизации траекторий межпланетных КА, использующих ХРБ для старта с опорной околоземной орбиты и ЭРДУ в качестве маршевой

двигательной установки, широко освещена в научных трудах ведущих специалистов. В работах Константинова М.С. и Петухова В.Г. проводится анализ траекторий выведения КА с ЭРДУ в близкую окрестность Солнца по прямым траекториям, а также траектории выведения КА с маршевыми ХДУ или ЭРДУ с использованием последовательности гравитационных манёвров. Непосредственный вклад в разработку алгоритма синтеза цепочек резонансных гравитационных манёвров, которые обеспечивают постепенное увеличение наклона гелиоцентрических орбит КА внесли Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Однако на текущий момент выявлен ряд незавершённых задач:

- величина гиперболического избытка скорости КА при первом подлёте к планете, у которой осуществляется последовательность резонансных гравитационных манёвров является известной величиной, подсчитанной таким образом, чтобы за минимальное количество пролётов у планеты получить гелиоцентрическую орбиту КА с большим наклоном к плоскости эклиптики;

- длительность транспортной операции КА, оснащённого маршевой ЭРДУ, по исследованию Солнца из внеэклиптических положений с использованием цепочки резонансных гравитационных манёвров занимает продолжительное время (от 4,5 лет и более).

Актуальность решения вышеперечисленных задач обусловлена их значительным научным и практическим значением для совершенствования прикладных методов расчёта задачи оптимизации сложных межпланетных траекторий КА, оснащённых комбинированной двигательной установкой, с использованием последовательности гравитационных манёвров.

Объектом исследования является межпланетная траектория КА, оснащённого комбинированной двигательной установкой (ХДУ и ЭРДУ), включающая последовательность гравитационных манёвров, резонансные и околорезонансные гелиоцентрические перелёты.

Предметом исследования являются математические модели оптимального движения КА, оснащённого комбинированной двигательной установкой, а также математические модели для анализа последовательности гравитационных манёвров, переводящих КА на резонансные и околорезонансные гелиоцентрические перелёты планета–планета с угловыми дальностями $2\pi \cdot k$ или $\pi \cdot (2k - 1)$, где $k = 1, 2 \dots K$; $K \in R$.

Целью настоящей диссертационной работы является повышение эффективности транспортных космических систем за счёт использования комбинированных двигательных установок и включения в схему перелёта последовательности гравитационных манёвров. Для достижения этой цели, в частности, были поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Задача сквозной оптимизации межпланетной траектории КА, оснащённого комбинированной двигательной установкой, с использованием последовательности пассивных гравитационных манёвров, при оптимизации всех характеристик перелётной траектории, включая величины гиперболических избытков скорости при гравитационных манёврах и параметры этих манёвров, при использовании полного набора условий оптимизации принципа максимума, обеспечивающего сведение оптимизационной проблемы к $(N + 2)$ -точечной краевой задаче, где N – количество гравитационных манёвров.

2. Разработка алгоритма определения параметров пассивного гравитационного манёвра, обеспечивающего резонансные гелиоцентрические перелёты планета–планета с угловыми дальностями перелёта: $2\pi \cdot k$ (целочисленные резонансные перелёты) и $\pi \cdot (2k - 1)$ (π -резонансные перелёты), где $k = 1, 2 \dots K$; $K \in R$.

3. Анализ оптимальных программ управления движением транспортной космической системы на этапах работы используемых типов комбинированной двигательной установки в рамках сквозной оптимизации траектории межпланетного перелёта.

4. Апробация разработанной методики решения задачи сквозной оптимизации на примере выведения КА на гелиоцентрическую орбиту с относительно большим фиксированным наклоном орбиты к плоскости экватора Солнца. Проведение численного анализа нескольких межпланетных траекторий, использующих серию резонансных гравитационных манёвров с целым порядком резонансов с орбитой Венеры и с включением π -резонансного гравитационного манёвра у Венеры.

Научная новизна и теоретическая значимость диссертационной работы заключается:

- в разработке новой постановки задачи сквозной оптимизации траектории межпланетного перелёта КА с комбинированной двигательной установкой с последовательностью гравитационных манёвров с оптимизацией всех характеристик его траектории, включая величины гиперболических избытков скоростей, используемых при гравитационных манёврах;

- в разработке метода решения задачи сквозной оптимизации траектории транспортной космической системы (КА и ХРБ) с использованием полного набора необходимых условий оптимальности принципа максимума;

- во включении в схему межпланетного перелёта с последовательностью гравитационных манёвров π -резонансных с орбитой планеты гелиоцентрических орбит, а также в разработке алгоритма определения параметров пассивного гравитационного манёвра, обеспечивающего π -резонансный гелиоцентрический перелёт планета-планета с угловой дальностью $\pi \cdot (2k - 1)$, где $k = 1, 2 \dots K$; $K \in \mathbb{R}$;

- в разработке математической модели траектории движения КА с использованием возмущённого движения планеты после гравитационных манёвров у неё, а также в применении околорезонансных гравитационных манёвров;

- в выполнении качественного анализа траекторий выведения транспортной космической системы на гелиоцентрическую орбиту с относительно низким перигелием, существенно наклонённую к плоскости солнечного экватора.

Практическая значимость работы состоит:

- в разработке алгоритма оптимизации межпланетных траекторий, включающих последовательность гравитационных манёвров, КА с комбинированной двигательной установкой, а также в разработке программного обеспечения, реализующего данный алгоритм;

- в получении и анализе оптимальных характеристик траектории транспортной космической системы, обеспечивающей выведение КА на гелиоцентрическую орбиту с большим наклоном к плоскости солнечного экватора;

- в доказательстве того факта, что включение в схему полёта КА π -резонансного гравитационного манёвра может существенно увеличить транспортные возможности транспортной космической системы. В демонстрации возможности существенного уменьшения времени выполнения транспортной задачи за счёт включения в схему межпланетного перелёта π -резонансных гравитационных манёвров.

Методология и методы исследования. В рамках настоящего исследования в качестве основного метода оптимизации законов управления движением КА использовался принцип максимума Понтрягина. Решение многоточечной краевой задачи, а также численное

интегрирование осуществлялись при помощи программных пакетов библиотек Fortran и MathCad.

Достоверность полученных результатов подтверждается следующими факторами:

- строгостью методологического аппарата: задача сквозной оптимизации поставлена корректно и включает полный набор условий оптимальности, что позволило «замкнуть» $(N + 2)$ -точечную краевую задачу, где N – количество гравитационных манёвров;
- применением надёжных методов анализа и оптимизации: в частности, был использован принцип максимума Понтрягина;
- численные результаты были получены и сравнены с использованием различных средств программирования (Fortran и MathCad). Результаты были сопоставлены с опубликованными результатами исследований других авторов.

Личный вклад автора и публикации. Все результаты, приведённые в диссертационной работе получены лично автором. По теме диссертации опубликовано 3 печатные работы, 2 статьи из которых в изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки России по специальности 2.5.16. Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов, и 1 статья – в издании, индексируемом в базе данных Scopus. Автором разработана новая постановка задачи сквозной оптимизации траектории межпланетного перелёта КА с комбинированной двигательной установкой, а также разработан алгоритм определения параметров пассивного π -резонансного гелиоцентрического перелёта планета-планета, проведён качественный анализ двух траекторий выведения КА на гелиоцентрическую орбиту.

Положения, выносимые на защиту:

1. Постановка задачи сквозной оптимизации траектории межпланетного перелёта КА, оснащённого комбинированной двигательной установкой, с использованием последовательности гравитационных манёвров КА. Особенности постановки:

- используется полный набор условий оптимальности принципа максимума, позволяющий преобразовать анализируемую задачу в $(N + 2)$ -точечную краевую задачу;
- используются условия оптимальности, обеспечивающие учёт ограничений по наклонению целевой гелиоцентрической орбиты КА;
- гиперболические избытки скорости (величины и направления) КА при гравитационных манёврах являются оптимизируемыми характеристиками;
- траектория планеты, у которой осуществляется серия резонансных гравитационных манёвров анализируется возмущённой.

2. Алгоритмы определения параметров пассивного гравитационного манёвра, переводящего КА на резонансную гелиоцентрическую траекторию с угловыми дальностями $2\pi \cdot k$ и $\pi \cdot (2k - 1)$, а также параметров околорезонансного гравитационного манёвра.

3. Доказательство того, что при реализации сложных схем межпланетного перелёта использование π -резонансных гравитационных манёвров может существенно сократить время выполнения анализируемой транспортной операции, а также расширить транспортные возможности межпланетных КА.

Апробация результатов. Основные идеи, положения и результаты, полученные в ходе диссертационного исследования, были представлены на 7 российских и международных конференциях:

- 19-ой, 22-ой, 23-ей Международной конференции «Авиация и космонавтика», Москва, 2020 г., 2023 г. и 2024 г.;

- XLV Академических чтений по космонавтике, посвящённых памяти академика С.П. Королёва и другим выдающимся отечественным учёным-пионерам освоения космического пространства, Москва, 2021 г.;

- VIII Международной научной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики», Москва, 2023 г.;

- BRICS 4th, 5th SciTech Forum on Space Flight Mechanics and Space Structures and Materials, Москва, 2023 г., 2024 г.

Результаты исследования докладывались на заседаниях семинара «Механика космического полёта», проводимых кафедрой 601 МАИ.

Структура и объём работы. Структурно диссертационная работа состоит из введения, четырёх основных глав, заключения, а также списка сокращений, условных обозначений и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 153 страницы. Работа содержит 30 рисунков, 20 таблиц и 47 источников используемой литературы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение настоящей диссертационной работы посвящено постановке проблемы и актуальности выбранной темы исследования. В нём формулируются цель работы и задачи, поставленные в рамках диссертационного исследования. Далее следует описание научной новизны, теоретическая и практическая значимости полученных результатов. Также приведены основные положения, выносимые на защиту, сведения об апробации полученных результатов работы и кратко представлены структура и объём диссертационной работы.

Первая глава содержит сведения об уже реализованных проектах исследования Солнца при помощи КА. Представлено описание баллистической схемы выведения КА на гелиоцентрические орбиты российского проекта «Интергелиозонд». Проведён сравнительный анализ ранее рассмотренных и новой поставок задач, а также описана целесообразность применения серии резонансных гравитационных манёвров у Венеры.

Дается формулировка транспортной задачи для проводимого исследования. Целевая гелиоцентрическая орбита, на которую должен быть выведен КА должна иметь наклонение, равное 30° , к плоскости солнечного экватора, то есть должна удовлетворять соотношению:

$$i_{sc}(t_f) - i_{fixed} = 0 \quad (1)$$

где $i_{sc}(t_f)$ – наклонение орбиты КА к плоскости экватора Солнца в конечный момент времени t_f ; $i_{fixed} = 30^\circ$ – граничное условие транспортной задачи.

В первой главе приведена основная информация о рассматриваемой транспортной космической системе: характеристики РН «Союз-2.1б», характеристики ХРБ «Фрегат» и маршевой ЭРДУ КА (с двигателем «СПД-140Д»).

Вторая глава посвящена описанию математических моделей движения КА с комбинированной двигательной установкой на всех этапах выведения аппарата на целевую гелиоцентрическую орбиту и алгоритмов исследования пассивных гравитационных манёвров.

В рамках настоящего исследования критерием оптимизации рассматривается функционал следующего вида:

$$J(\mathbf{a}, \mathbf{u}(t)) = -m(t_f) \quad (2)$$

где $\mathbf{a}$ - вектор выбираемых параметров схемы полёта КА и его выбираемых параметров; $\mathbf{u}(t)$ – вектор выбираемых законов управления движением КА; $m(t_f)$ – масса КА в момент его выведения на целевую орбиту; t_f – дата перехода КА на целевую орбиту (соответствует дате последнего гравитационного манёвра)

Задача оптимизации межпланетной траектории КА состоит в отыскании оптимальных программ управления движением КА с использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина как ключевого методического подхода, позволяющего свести задачу к $(N + 2)$ -точечной краевой задаче. Следует подчеркнуть, что проектно-баллистический анализ проводился в рамках метода грависфер нулевой протяжённости. Это позволило разделить всю траекторию КА на несколько отдельных участков для их поэтапного анализа. Перечислим и кратко охарактеризуем каждый из этих участков.

Математическая модель движения транспортной космической системы на участке геоцентрической траектории при старте с опорной околоземной орбиты. В рамках данного исследования предполагаем, что траектория движения КА с ХРБ на рассматриваемом участке полёта является плоской и состоит из одного активного участка. Для произвольного значения величины гиперболического избытка скорости требуется найти такой закон управления движением КА при старте с опорной орбиты, при котором затраты топлива на выполнения манёвра минимальны. При использовании схемы полёта с одним активным участком минимум затрат топлива соответствует минимуму времени полёта на участке разгона. Для такой постановки задачи оптимизационная проблема рассматривается как задача быстрогодействия:

$$J(\mathbf{a}, \mathbf{u}(t)) = t_{01} \quad (3)$$

где t_{01} – время работы двигателя ХРБ.

Вектор фазовых координат транспортной системы содержит пять компонент:

$$\mathbf{X}(t) = (V_r(t) \ V_n(t) \ r(t) \ \beta(t) \ m(t))^T \quad (4)$$

где V_r , V_n – радиальная и трансверсальная компоненты скорости КА; r – величина радиуса-вектора КА; β – полярный угол; m – масса КА.

Анализ траектории проводится в безразмерных переменных. При этом за единицу расстояния принимается радиус стартовой околоземной орбиты, за единицу скорости – местная круговая скорость на стартовой орбите, за единицу массы – масса КА при старте с околоземной орбиты. Единицы остальных физических величин формируются на основе перечисленных. Дифференциальные уравнения оптимального движения транспортной системы в орбитальной системе координат на этапе разгона можно записать так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_r}{dt} = \frac{P_{cus}}{m} \cdot \frac{\psi_{Vr}}{\psi_V} - \frac{1}{r^2} + \frac{V_n^2}{r} \\ \frac{dV_n}{dt} = \frac{P_{cus}}{m} \cdot \frac{\psi_{Vn}}{\psi_V} - \frac{V_r \cdot V_n}{r} \\ \frac{dr}{dt} = V_r \\ \frac{d\beta}{dt} = \frac{V_n}{r} \\ \frac{dm}{dt} = -\frac{P_{cus}}{w_{cus}} \\ \frac{d\psi_{Vr}}{dt} = \psi_{Vn} \cdot \frac{V_n}{r} - \psi_r \\ \frac{d\psi_{Vn}}{dt} = -2 \cdot \psi_{Vr} \cdot \frac{V_n}{r} + \psi_{Vn} \cdot \frac{V_r}{r} \\ \frac{d\psi_r}{dt} = \psi_{Vr} \cdot \left(\frac{V_n^2}{r^2} - \frac{2}{r^3} \right) - \psi_{Vn} \cdot \frac{V_r \cdot V_n}{r^2} \\ \frac{d\psi_\beta}{dt} = 0 \\ \frac{d\psi_m}{dt} = \frac{P_{cus}}{m^2} \cdot \psi_V \end{array} \right. \quad (5)$$

где P_{cus} – тяга двигателя ХРБ «Фрегат»; w_{cus} – скорость истечения двигательной установки ХРБ «Фрегат»; $\psi_{Vr}, \psi_{Vn}, \psi_r, \psi_\beta$ и ψ_m – непрерывные кусочно–гладкие функции (сопряжённые переменные к радиальной скорости, трансверсальной скорости, величине радиуса-вектора, полярному углу, массе КА соответственно).

Решение системы дифференциальных уравнений (5) должно удовлетворять левым граничным условиям:

$$\begin{pmatrix} V_r(0) \\ V_n(0) - 1 \\ r(0) - 1 \\ \beta(0) \\ m(0) - 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (6)$$

и правым граничным условиям:

$$\begin{pmatrix} (V_r(t_{01}))^2 + (V_n(t_{01}))^2 - \frac{2}{r(t_{01})} - (V_\infty(t_{01}))^2 \\ \psi_{Vr}(t_{01}) - \psi_r(t_{01}) \cdot V_r(t_{01}) \cdot (r(t_{01}))^2 \\ \psi_{Vn}(t_{01}) - \psi_r(t_{01}) \cdot V_n(t_{01}) \cdot (r(t_{01}))^2 \\ \psi_m(t_{01}) - 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (7)$$

где $V_\infty(t_{01})$ – величина гиперболического избытка скорости КА на отлётной от Земли траектории (после окончания работы двигателя ХРБ); $V_r(t_{01}), V_n(t_{01}), r(t_{01})$ – радиальная и трансверсальная компоненты скорости, величина радиуса-вектора транспортной космической системы в момент выключения двигателя ХРБ; $\psi_{Vr}(t_{01}), \psi_{Vn}(t_{01}), \psi_r(t_{01}), \psi_m(t_{01})$ – сопряжённые переменные к фазовым характеристикам в конечной точке траектории.

Математическая модель движения КА на гелиоцентрическом участке. Гелиоцентрическое движение КА на участках маршрута планета-планета описывается в гелиоцентрической прямоугольной эклиптической системе координат (ГЭСК). Состояние КА в любой момент своего движения определяется совокупностью фазовых координат:

$$\mathbf{X}(t) = (\mathbf{r}(t) \quad \mathbf{V}(t) \quad m_{SC}(t))^T \quad (8)$$

где $\mathbf{r}(t) = [r_x; r_y; r_z]^T$ – гелиоцентрический радиус-вектор КА; $\mathbf{V}(t) = [V_x; V_y; V_z]^T$ – вектор гелиоцентрической скорости КА; $m_{SC}(t)$ – масса КА.

В качестве выбираемых управлений используются следующие функции: функция тяги двигателя $\delta(t)$ и орт вектора тяги $\mathbf{f}^0$, определяющий направление вектора тяги КА на активных участках полёта.

Систему дифференциальных уравнений, описывающую оптимальное движение КА с нерегулируемым двигателем на гелиоцентрических участках планета-планета, можно записать в следующем безразмерном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V} \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{r^3} \cdot \mathbf{r} + \delta^{opt} \cdot \frac{P}{m_{SC}} \cdot \frac{\boldsymbol{\Psi}_V}{\psi_V} \\ \frac{dm_{SC}}{dt} = -\delta^{opt} \cdot \frac{P}{w} \\ \frac{d\boldsymbol{\Psi}_r}{dt} = \frac{\boldsymbol{\Psi}_V}{r^3} - \frac{3 \cdot (\boldsymbol{\Psi}_V^T; \mathbf{r})}{r^5} \cdot \mathbf{r} \\ \frac{d\boldsymbol{\Psi}_V}{dt} = -\boldsymbol{\Psi}_r \\ \frac{d\psi_m}{dt} = \psi_V \cdot \delta^{opt} \cdot \frac{P}{m_{SC}^2} \end{array} \right. \quad (9)$$

где $\mathbf{r}$ – гелиоцентрический радиус-вектор КА; r – величина гелиоцентрического радиуса-вектора КА; $\mathbf{V}$ – вектор гелиоцентрической скорости КА; δ^{opt} – оптимальная величина функции тяги; P – величина тяги ЭРДУ КА; m_{SC} – масса КА; $\boldsymbol{\Psi}_r, \boldsymbol{\Psi}_V, \psi_m$ – сопряжённые переменные к фазовым характеристикам; ψ_V – величина базис-вектора Лоудена; w – скорость истечения рабочего тела ЭРДУ.

Функция δ представляет собой функцию тяги маршевой ЭРДУ КА. Оптимальной закон включения/выключения двигателя КА можно записать в виде:

$$\delta^{opt}(t) = \begin{cases} 1, & \psi(t) > 0 \\ 0, & \psi(t) \leq 0 \end{cases} \quad (10)$$

где ψ – функция переключения ЭРДУ КА.

Выражение для функции переключения может быть записано таким образом:

$$\psi(t) = \frac{\psi_V(t)}{m_{SC}(t)} - \frac{\psi_m(t)}{w} \quad (11)$$

Математическая модель движения КА на пассивных участках гелиоцентрической траектории. Поскольку на пассивных участках траектории гелиоцентрического перелёта записанная система дифференциальных уравнений (9) аналитически интегрируется, а пассивные участки на рассматриваемых в работе схемах перелёта имеют большую продолжительность и протяжённость (например, резонансные гелиоцентрические перелёты являются полностью пассивными), то было использовано аналитическое решение. Для его получения вводится в рассмотрение новый фазовый вектор, и используются канонические преобразования. Новый фазовый вектор рассматривается состоящим из классических элементов орбиты:

$$\mathbf{Y} = (p \quad e \quad i \quad \Omega \quad \omega \quad n \cdot t_\pi)^T \quad (12)$$

где p, e, i, Ω, ω – элементы орбиты КА (фокальный параметр, эксцентриситет, наклонение, долгота восходящего узла, аргумент перицентра соответственно); n – среднее движение КА; t_π – время прохождения перигелия на гелиоцентрической орбите.

Анализируется следующая постановка задачи: на некоторой дуге эллиптической траектории КА, рассматриваемой в рамках задачи двух тел, есть две точки (для определённости начальная и конечная точки). В начальной точке этой дуги известны время t_0 , вектор фазовых переменных $\mathbf{X}(t_0)$ и сопряжённый ему вектор $\Psi_{\mathbf{X}}(t_0) = (\psi_{r_x} \ \psi_{r_y} \ \psi_{r_z} \ \psi_{V_x} \ \psi_{V_y} \ \psi_{V_z})^T$, а в конечной точке дуги – время t_f и вектор фазовых переменных $\mathbf{X}(t_f)$. Требуется найти вектор сопряжённых переменных в конечной точке рассматриваемой дуги траектории $\Psi_{\mathbf{X}}(t_f)$.

Алгоритм определения сопряжённых переменных $\Psi_{\mathbf{X}}(t_f)$ использовался таким:

1. По известным параметрам движения КА ($\mathbf{r}_{\text{SC}}(t_0)$ и $\mathbf{V}_{\text{SC}}(t_0)$) вычисляются все элементы орбиты КА (компоненты фазового вектора $\mathbf{Y}(t_0)$).
2. Рассматривается матрица производных элементов орбиты (компонент вектора $\mathbf{Y}$) по компонентам фазового вектора $\mathbf{X}$. Эти производные рассматриваются как элементы матрицы:

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \frac{dp}{dV_x} & \frac{de}{dV_x} & \frac{di}{dV_x} & \frac{d\Omega}{dV_x} & \frac{d\omega}{dV_x} & \frac{d(n \cdot t_\pi)}{dV_x} \\ \frac{dp}{dV_y} & \frac{de}{dV_y} & \frac{di}{dV_y} & \frac{d\Omega}{dV_y} & \frac{d\omega}{dV_y} & \frac{d(n \cdot t_\pi)}{dV_y} \\ \frac{dp}{dV_z} & \frac{de}{dV_z} & \frac{di}{dV_z} & \frac{d\Omega}{dV_z} & \frac{d\omega}{dV_z} & \frac{d(n \cdot t_\pi)}{dV_z} \\ \frac{dr_x}{dp} & \frac{dr_x}{de} & \frac{dr_x}{di} & \frac{dr_x}{d\Omega} & \frac{dr_x}{d\omega} & \frac{dr_x}{d(n \cdot t_\pi)} \\ \frac{dr_y}{dp} & \frac{dr_y}{de} & \frac{dr_y}{di} & \frac{dr_y}{d\Omega} & \frac{dr_y}{d\omega} & \frac{dr_y}{d(n \cdot t_\pi)} \\ \frac{dr_z}{dp} & \frac{dr_z}{de} & \frac{dr_z}{di} & \frac{dr_z}{d\Omega} & \frac{dr_z}{d\omega} & \frac{dr_z}{d(n \cdot t_\pi)} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Вычисляются производные элементов орбиты по компонентам фазового вектора $\mathbf{X}(t_0)$ в начальной точке дуги траектории, то есть только что введённая матрица для начальной точки дуги траектории $\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}}(t_0)$.

3. Вектор сопряжённых переменных $\Psi_{\mathbf{Y}}$ к вектору $\mathbf{Y}$ находим по условиям движения в начальной точке, используя следующее равенство:

$$\Psi_{\mathbf{Y}} = (\psi_p \ \psi_e \ \psi_{inc} \ \psi_\Omega \ \psi_\omega \ \psi_{n \cdot t_\pi})^T = \left(\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}}(t_0) \right)^{-1} \cdot \Psi_{\mathbf{X}}(t_0) \quad (14)$$

где $\psi_p, \psi_e, \psi_{inc}, \psi_\Omega, \psi_\omega, \psi_{n \cdot t_\pi}$ – сопряжённые переменные к компонентам фазового вектора $\mathbf{Y}$.

4. Вычисляются производные элементов орбиты по компонентам фазового вектора $\mathbf{X}(t_f)$ в конечной точке дуги траектории (матрица (13) для конечной точки дуги траектории $\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}}(t_f)$).

5. Вектор сопряжённых переменных к фазовым координатам $\mathbf{X}$ в конечной точке дуги траектории определяется так:

$$\Psi_{\mathbf{X}}(t_f) = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}}(t_f) \cdot \Psi_{\mathbf{Y}} \quad (15)$$

Алгоритм определения параметров пассивного гравитационного манёвра, обеспечивающего гелиоцентрический перелёт планета–планета с угловой дальностью $2\pi \cdot k$.

Гравитационные манёвры рассматриваются пассивными. Минимально возможная высота, на которой КА осуществляет пролёт у планеты при гравитационном манёвре у неё, принимается равной $h_{min} = 400$ км.

Из анализа предыдущего участка (гелиоцентрического участка планета–планета) известен вектор гелиоцентрической скорости КА при подлёте к планете. Вектор скорости КА после гравитационного манёвра зависит от двух параметров гравитационного манёвра (рисунок 1): угла β (угла между векторами гиперболического избытка скорости подлёта и отлёта от планеты) и угла γ (угла между ортами $\mathbf{Cl}$ и $\mathbf{Cm}$). На угол γ , фиксирующий положение плоскости гиперболы гравитационного манёвра, не накладывается никаких ограничений: $\gamma \in [0; 2\pi)$. $\mathbf{Cl}$ – орт линии узлов плоскости эклиптики ХСУ и картинной плоскости. $\mathbf{Cm}$ – орт линии узлов картинной плоскости и плоскости гравитационного манёвра.

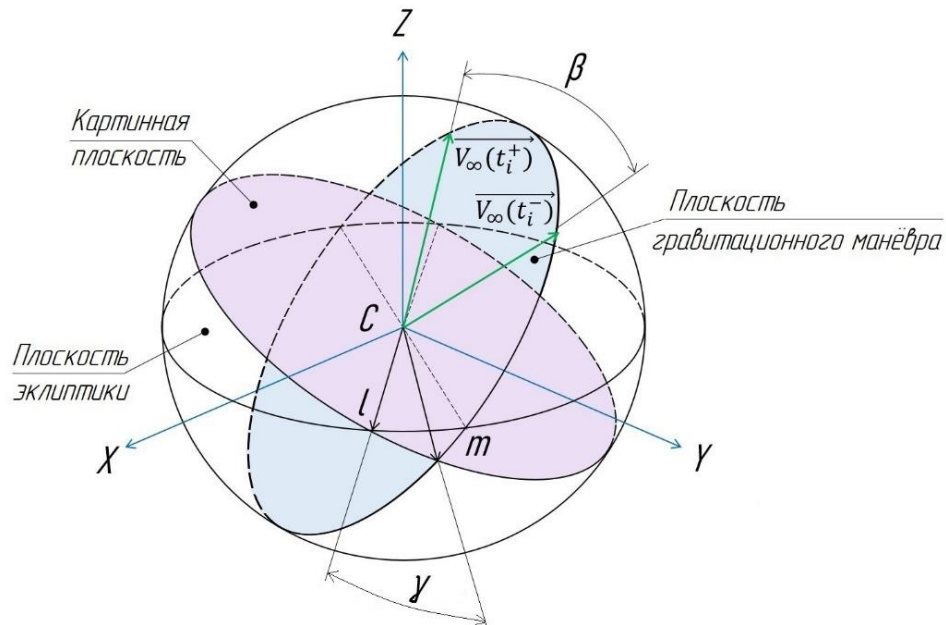


Рисунок 1 – Схема пассивного гравитационного манёвра

При анализе пассивного гравитационного манёвра необходимо учитывать, что на гиперболу пролёта накладываются несколько ограничений:

1. Величина вектора гиперболического избытка скорости до и после гравитационного манёвра остаётся неизменной:

$$V_{\infty}(t_i^-) - V_{\infty}(t_i^+) = 0 \quad (16)$$

где $V_{\infty}(t_i^-)$, $V_{\infty}(t_i^+)$ – величины гиперболических избытков скорости при подлёте к планете и отлёте от неё.

2. Угол поворота асимптоты гиперболы при каждом гравитационном манёвре не может превышать максимально допустимого значения:

$$\beta_i - \beta_{i_{max}}(V_{\infty}(t_i^-)) \leq 0 \quad (17)$$

где β_{max} – максимальный угол поворота вектора гиперболического избытка скорости. Он вычисляется по формуле:

$$\beta_{i_{max}} = 2 \cdot \arcsin \left(1 + \frac{r_{\pi min}^{planet} \cdot V_{\infty}(t_i^-)^2}{\mu_{planet}} \right)^{-1} \quad (18)$$

где $r_{\pi min}^{planet}$ - минимально допустимый радиус перицентра планетоцентрической орбиты КА; μ_{planet} - гравитационный параметр планеты.

Компоненты отлётного вектора гиперболического избытка скорости $V_{\infty}(t_i^+)$ можно найти, воспользовавшись соотношением:

$$V_{\infty}(t_i^+) = \begin{pmatrix} V_{\infty x}(t_i^-) & -\frac{V_{\infty y}(t_i^-) \cdot V_{\infty}(t_i^-)}{V_{\infty xy}(t_i^-)} & -\frac{V_{\infty x}(t_i^-) \cdot V_{\infty z}(t_i^-)}{V_{\infty xy}(t_i^-)} \\ V_{\infty y}(t_i^-) & \frac{V_{\infty x}(t_i^-) \cdot V_{\infty}(t_i^-)}{V_{\infty xy}(t_i^-)} & -\frac{V_{\infty y}(t_i^-) \cdot V_{\infty z}(t_i^-)}{V_{\infty xy}(t_i^-)} \\ V_{\infty z}(t_i^-) & 0 & V_{\infty xy}(t_i^-) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta_i) \\ \sin(\beta_i) \cdot \cos(\gamma_i) \\ \sin(\beta_i) \cdot \sin(\gamma_i) \end{pmatrix} \quad (19)$$

где $V_{\infty x}(t_i^-), V_{\infty y}(t_i^-), V_{\infty z}(t_i^-)$ – компоненты вектора гиперболического избытка скорости при подлёте к планете; $V_{\infty xy}(t_i^-) = \sqrt{(V_{\infty x}(t_i^-))^2 + (V_{\infty y}(t_i^-))^2}$ – проекция вектора гиперболического избытка скорости при подлёте к планете на плоскость xOy.

Вектор гелиоцентрической скорости КА после гравитационного маневра определяется как сумма векторов гелиоцентрической скорости планеты в момент гравитационного маневра и гиперболического избытка скорости $V_{\infty}(t_i^+)$.

Исследование элементов орбиты КА после гравитационного манёвра осуществляется путём построения изолиний этих элементов на плоскости двух выбираемых параметров гравитационного манёвра β и γ . Для того, чтобы после гравитационного манёвра КА перешёл на резонансную гелиоцентрическую траекторию с угловой дальностью $2\pi \cdot k$, требуется построить резонансную изолинию, соответствующую периоду орбиты КА, равному периоду орбиты планеты, умноженному на $m:n$, где m, n – количество витков планеты и КА вокруг Солнца соответственно.

В качестве примера рассмотрим характеристики гравитационного манёвра у Венеры для даты 30 мая 2028 года. КА подлетает к Венере с гелиоцентрической скоростью $V_{sc}(t_i^-) = [34,373 \quad 1,61 \quad 0,06]^T$ км/с. Величина гиперболического избытка скорости равна 15,449 км/с, максимальный угол поворота вектора гиперболического избытка скорости $20,066^\circ$.

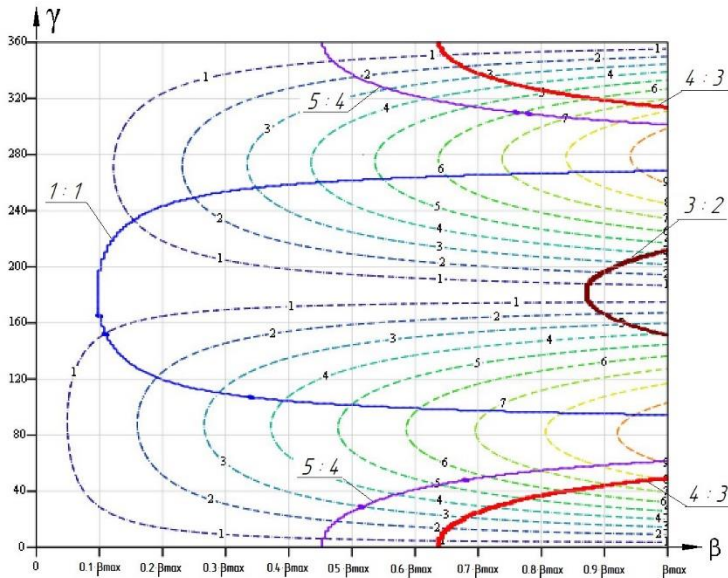


Рисунок 2 - Изолинии наклонения орбиты КА после гравитационного манёвра у планеты

На рисунке 2 показаны изолинии наклонения (в градусах) гелиоцентрической орбиты КА (цветные штриховые линии) после гравитационного манёвра, как функции выбираемых параметров β и γ . Резонансные линии, вдоль которых КА переходит на гелиоцентрическую орбиту, находящуюся в целочисленном орбитальном резонансе, изображены цветными сплошными линиями. На выносной линии подписаны используемые порядки резонансов $n:m$.

Выбор конкретной точки на конкретной резонансной линии определяет параметры гравитационного манёвра и элементы гелиоцентрической

орбиты после гравитационного манёвра. Если, например, стоит задача получить максимально возможное наклонение на резонансной орбите с порядком резонанса 4:3, то следует найти такую точку на изолинии, описывающей этот резонанс (две красные дуги на рисунке 2), в которой наклонение наибольшее. Анализ рисунка показывает, что следует воспользоваться максимальным углом поворота асимптоты гиперболы ($\beta = \beta_{max}$), а угол γ выбрать равным около 50° . Алгоритм более точного определения угла γ может быть таким. Полагая $\beta = \beta_{max}$, наклонение становится функцией единственного аргумента γ . Поиск максимума этой функции на интервале $0 \leq \gamma < 360^\circ$ определит оптимальные параметры гравитационного манёвра.

Алгоритм определения параметров пассивного гравитационного манёвра, обеспечивающего гелиоцентрический перелёт планета–планета с угловой дальностью $\pi \cdot (2k-1)$. При анализе серии резонансных гравитационных манёвров, переводящих КА на гелиоцентрические орбиты с угловой дальностью $2\pi \cdot k$, у планеты, движение которой рассматривается невозмущённым, существует принципиальное ограничение по величине и направлению гелиоцентрической скорости КА. Действительно, направление вектора гелиоцентрической скорости КА не может отличаться от направления вектора скорости планеты $\mathbf{V}_{planet}(t_i)$ на угол больший, чем:

$$\alpha_{max} = \arcsin\left(\frac{V_\infty(t_i^-)}{V_{planet}(t_i)}\right) \quad (20)$$

Для того, чтобы устранить это ограничение, предлагается воспользоваться π -резонансным гравитационным манёвром в противоположной точке орбиты планеты (в узловой точке плоскости орбиты КА и орбиты планеты), где гелиоцентрическая скорость планеты несколько отличается. В общем случае можно утверждать, что использование π -резонансных гравитационных манёвров может улучшать характеристики перелётной траектории с последовательностью гравитационных манёвров, в частности, можно сократить время выполнения рассматриваемой транспортной операции.

Анализ π -резонансного гравитационного манёвра предлагается проводить таким образом. Полагаем известными дату гравитационного манёвра (по ней находится радиус-вектор

планеты в момент гравитационного манёвра $\mathbf{r}_0$, вектор её гелиоцентрической скорости $\mathbf{V}_{\text{planet}}$, оскулирующие элементы орбиты планеты, истинная аномалия планеты u_0 , r_f - длина радиуса-вектора планеты в точке орбиты с истинной аномалией $(u_0 + \pi)$ и вектор гиперболического избытка скорости при подлёте к планете для гравитационного манёвра $\mathbf{V}_\infty(t_i^-)$. Далее:

1. Выбирается набор порядков резонансов. Обычно, ограничивая время перелёта КА, следует ограничить сверху число m , определяющее число витков планеты за время перелёта КА планета–планета. В рассматриваемой работе принималось, что m не более 3,5. Число n в порядке резонанса анализировалось в диапазоне от 0,5 до 3,5. Следует учитывать, что π -резонансной орбиты после гравитационного манёвра у Венеры и Земли не существует, если число оборотов планеты больше числа оборотов КА (то есть, если $m > n$). При этом для случая $m \leq 3,5; n \leq 3,5; m \leq n$ число рассматриваемых порядков резонансов N_r равно 10.

2. Для каждого анализируемого порядка резонанса, решается задача Ламберта. Находятся фокальный параметр, эксцентриситет и истинная аномалия начальной точки резонансной орбиты для всех существующих решений уравнения Ламберта (учитывается, что при $n > 1$ может существовать два решения уравнения Ламберта). При $N_r = 10$ число анализируемых резонансных траекторий равно $N_{\text{traj}} = 13$.

3. Используя равенство (18), по величине гиперболического избытка скорости при подлёте к планете находится максимальный угол поворота асимптоты пролётной гиперболы при гравитационном манёвре β_{max} .

4. Перебирая параметры гравитационного манёвра β и γ в их допустимых диапазонах ($0 \leq \beta \leq \beta_{\text{max}}; 0 \leq \gamma \leq 2\pi$), используя соотношение (19), определяются возможные векторы гиперболического избытка скорости после гравитационного манёвра. Сложенные с вектором скорости планеты эти вектора дают возможность определить векторы гелиоцентрической скорости КА после гравитационного манёвра. После этого определяются возможные диапазоны значений фокального параметра и эксцентриситета гелиоцентрической орбиты КА после гравитационного манёвра.

5. Анализируя полученные в п. 2 резонансные траектории N_{traj} , находим для каких из них фокальный параметр и эксцентриситет попадают в область допустимых диапазонов этих характеристик, полученных в п. 4. Если ни для одной из резонансных траекторий N_{traj} фокальный параметр и эксцентриситет не находятся в диапазоне этих характеристик орбит, то π -резонансный гравитационный манёвр невозможно реализовать. В противном случае далее исследуются только те резонансные орбиты, фокальный параметр и эксцентриситет которых находятся в возможных диапазонах этих характеристик орбит.

6. Фокальный параметр и эксцентриситет орбиты после гравитационного манёвра рассматриваются функциями параметров гравитационного манёвра $p(\beta, \gamma)$, $e(\beta, \gamma)$. Анализируется следующая система двух уравнений относительно двух неизвестных (параметров гравитационного манёвра β и γ):

$$\begin{cases} p(\beta, \gamma) - p_{\text{fixed}} = 0 \\ e(\beta, \gamma) - e_{\text{fixed}} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

где $p(\beta, \gamma)$, $e(\beta, \gamma)$ – фокальный параметр и эксцентриситет перелётной орбиты КА, как функции двух выбираемых параметров; p_{fixed} , e_{fixed} – фокальный параметр и эксцентриситет орбиты КА, полученные из решения задачи Ламберта для резонансной орбиты в п. 2.

Вопрос существования решений системы уравнений (21) для каждой возможной резонансной орбиты может быть исследован посредством анализа изолиний на плоскости β и γ . Необходимо выяснить, пересекаются ли изолинии, характеризующие фокальный параметр и эксцентриситет, для каждого резонансной траектории, выбранной в п. 5. Если эти изолинии пересекаются, то численно решается система уравнений (21), используя как начальное приближение оценку координат каждой точки пересечения изолиний.

7. Если после выполнения предыдущего пункта, удалось найти параметры гравитационного манёвра, удовлетворяющие системе (21), необходимо проверить выполнение ещё одного условия (последнего условия):

$$\begin{aligned} \cos(v_0) &> 0, \text{ если } r_o < r_f \\ \cos(v_0) &< 0, \text{ если } r_o > r_f \end{aligned} \quad (22)$$

где v_0 – истинная аномалия начальной точки резонансной орбиты КА; r_o, r_f – длины радиусов векторов в начальной конечной точках π -резонансной орбиты.

Алгоритм определения параметров пассивного околорезонансного гравитационного манёвра. В рамках данного исследования выполняется проектно-баллистический анализ сложной межпланетной траектории КА, используются точные эфемериды планет, учитывающие их возмущённое движение. При этом, последовательные гравитационные манёвры осуществляются не в одной и той же точке пространства; при нескольких сближениях КА с планетой величина гиперболического избытка скорости при подлёте к планете не является постоянной.

В работе предполагается возможность использовать орбиты, близкие к резонансным, угловые дальности которых между последовательными гравитационными манёврами почти равны $2\pi \cdot k$ или $\pi \cdot (2k - 1)$; т.е. угловая дальность перелёта почти кратна π . Такие орбиты будем называть околорезонансными гелиоцентрическими орбитами КА, а гравитационный манёвр, который переводит КА на эту орбиту – околорезонансным. При гравитационном манёвре должны выполняться пять ограничений: четыре скалярных ограничения типа равенства и одно ограничение типа неравенства (17):

$$\left\{ \begin{aligned} g_1 &= r_x(t_i) - r_{planet_x}(t_i) = 0 \\ g_2 &= r_y(t_i) - r_{planet_y}(t_i) = 0 \\ g_3 &= r_z(t_i) - r_{planet_z}(t_i) = 0 \\ g_4 &= |\mathbf{V}_{SC}(t_i^-) - \mathbf{V}_{planet}(t_i)|^2 - |\mathbf{V}_{SC}(t_i^+) - \mathbf{V}_{planet}(t_i)|^2 = 0 \\ g_5 &= \beta(t_i) - \beta_{max}(t_i) \leq 0 \end{aligned} \right. \quad (23)$$

где $\mathbf{r}_{SC}(t_i^-) = [r_x(t_i) \ r_y(t_i) \ r_z(t_i)]^T$ – компоненты гелиоцентрического радиуса-вектора КА; $\mathbf{r}_{planet}(t_i) = [r_{planet_x}(t_i) \ r_{planet_y}(t_i) \ r_{planet_z}(t_i)]^T$ – компоненты радиуса-вектора планеты, у которой совершается гравитационный манёвр.

Краевые условия (23) можно записать в другом виде, дополняя их условиями трансверсальности. Для случая, когда высота перицентра гиперболы пролёта КА больше h_{min} , справедливы соотношения:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{SC}(t_i^-) - \mathbf{r}_{planet}(t_i) = 0 \\ V_{\infty}(t_i^-) - V_{\infty}(t_i^+) = 0 \\ v_5 = 0 \\ \Psi_V(t_i^-) + 2 \cdot v_4 \cdot \mathbf{V}_{\infty}(t_i^-) = 0 \end{cases} \quad (24)$$

где v_4, v_5 - множители Лагранжа; $\Psi_V(t_i^-)$ - базис-вектор при подлёте к планете.

Для случая, когда гравитационный манёвр обеспечивает максимальный угол поворота вектора гиперболического избытка скорости β_{max} , справедливы соотношения:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{SC}(t_i^-) - \mathbf{r}_{planet}(t_i) = 0 \\ V_{\infty}(t_i^-) - V_{\infty}(t_i^+) = 0 \\ \beta(t_i) - \beta_{max}(t_i) = 0 \\ \Psi_V(t_i^-) + 2 \cdot v_4 \cdot \mathbf{V}_{\infty}(t_i^-) + v_5 \cdot \left[\mathbf{V}_{\infty}(t_i^+) - 2 \cdot \mathbf{V}_{\infty}(t_i^-) \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot (1 - B)}{(1 + B)^3} \right) \right] = 0 \end{cases} \quad (25)$$

где $B = \frac{r_{\pi min}^{planet} \cdot [V_{\infty}(t_i^-)]^2}{\mu_{planet}}$.

Математическая модель пассивного гравитационного манёвра, переводящего КА на целевую гелиоцентрическую орбиту с фиксированным наклонением. Параметры последнего гравитационного манёвра у планеты выбираются таким образом, чтобы удовлетворялось заданное ограничение (1). Остальные характеристики этой орбиты не заданы и требуется рассмотрение условий их оптимальности. Эти условия могут быть записаны так:

$$\begin{cases} \psi_p(t_f^+) = 0 \\ \psi_e(t_f^+) = 0 \\ \psi_{\Omega}(t_f^+) = 0 \\ \psi_{\omega}(t_f^+) = 0 \\ \psi_{v0}(t_f^+) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

В приведённых равенствах используются сопряжённые переменные к характеристикам гелиоцентрической орбиты КА после последнего гравитационного манёвра: фокальному параметру, эксцентриситету, долготе восходящего узла, аргументу перигелия и истинной аномалии в начальной точке целевой орбиты v_0 . Важно подчеркнуть, что характеристики орбиты рассматриваются по отношению к системе координат, основная плоскость которой является плоскостью солнечного экватора. Анализ данного участка траектории выведения КА можно выполнять, используя канонические преобразования. Удаётся показать, что вектор сопряжённых переменных после последнего гравитационного манёвра $\Psi_X(t_i^+)$ связан с вектором производных от наклонения конечной гелиоцентрической по компонентам вектора скорости КА и компонентам его радиуса-вектора в гелиоцентрической гелиоэкваториальной системе координат следующим равенством:

$$\begin{pmatrix} \psi_{r_x}(t_i^+) \\ \psi_{r_y}(t_i^+) \\ \psi_{r_z}(t_i^+) \\ \psi_{v_x}(t_i^+) \\ \psi_{v_y}(t_i^+) \\ \psi_{v_z}(t_i^+) \end{pmatrix} = \left[\frac{di}{dV_x(t_i^+)}; \frac{di}{dV_y(t_i^+)}; \frac{di}{dV_z(t_i^+)}; \frac{di}{dr_x(t_i^+)}; \frac{di}{dr_y(t_i^+)}; \frac{di}{dr_z(t_i^+)} \right]^T \cdot \psi_{inc}(t_i^+) \quad (27)$$

где $\psi_{inc}(t_i^+)$ – сопряжённая переменная к наклонению орбиты КА после гравитационного манёвра.

Компоненты вектора Лоудена после гравитационного манёвра, переводящего КА на орбиту с фиксированным наклонением, можно вычислить по формуле:

$$\Psi_V^{opt}(t_f^+) = \frac{-1}{\sin(i) \cdot \sqrt{\sigma^2}^3} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \cdot (V_y \cdot r_z - V_z \cdot r_y) \\ c_1 \cdot (V_z \cdot r_x - V_x \cdot r_z) \\ c_1 \cdot (V_x \cdot r_y - V_y \cdot r_x) \end{pmatrix} \cdot \psi_{inc}(t_f^+) \quad (28)$$

где $c_1 = r_x \cdot (V_z \cdot r_x - V_x \cdot r_z) - r_y \cdot (V_y \cdot r_z - V_z \cdot r_y)$;

$\sigma^2 = (V_x \cdot r_y - V_y \cdot r_x)^2 + (V_y \cdot r_z - V_z \cdot r_y)^2 + (V_z \cdot r_x - V_x \cdot r_z)^2$.

Условия оптимальности для последнего гравитационного манёвра у планеты, переводящего КА на гелиоцентрическую орбиту с фиксированным наклонением, используются в виде:

$$\Psi_{VSunEqv}(t_f^+) - \Psi_V^{opt}(t_f^+) = 0 \quad (29)$$

В приведённом равенстве $\Psi_{VSunEqv}(t_f^+)$ – вектор сопряжённых переменных к вектору скорости КА после последнего гравитационного манёвра. Он находится таким образом: используя формулы (24) или (25), находится базис-вектор после гравитационного манёвра в эклиптической системе координат $\Psi_V(t_f^+)$. Затем, воспользовавшись матрицей перехода Λ от ГЭСК к гелиоэкваториальной системе, определяется $\Psi_{VSunEqv}(t_f^+) = \Lambda \cdot \Psi_V(t_f^+)$. Для определения компонент радиуса-вектора КА и его вектора скорости, входящих в равенство (28), используется та же матрица перехода Λ , которая является функцией трёх углов: прямого восхождения, склонения северного полюса Солнца и угла между плоскостью экватора и эклиптики для эпохи J2000.0.

Третья глава посвящена математической постановке задачи сквозной оптимизации выведения КА с комбинированной двигательной установкой на целевую орбиту. Здесь приведены этапы анализируемой схемы выведения КА, позволившие разбить всю траекторию на 4 типа участков: 1 – геоцентрический участок разгона КА с околоземной орбиты с выходом на гиперболу отлёта от Земли; 2 – первый гелиоцентрический участок Земля–планета с подлётом к планете для первого гравитационного манёвра; 3 – $(N - 2)$ промежуточных гелиоцентрических участков планета–планета; 4 – последний гелиоцентрический перелёт планета–планета, заканчивающийся последним гравитационным манёвром, с выходом на целевую гелиоцентрическую орбиту.

Перечислим независимые параметры для всех рассматриваемых типов участков с указанием в квадратных скобках суммарного количества анализируемых скалярных параметров каждого перечисляемого пункта:

1. **Геоцентрический участок старта КА с околоземной орбиты:** $\psi_m(0)$ – величина сопряжённой к массе переменной в начальной точке траектории; ϑ_0 – угол тангажа в начальной точке траектории; $\psi_r(0)$ – величина сопряжённой к радиусу-вектору КА в начальной точке траектории; t_{01} : [4 скалярных параметра].

2. **Первый гелиоцентрический перелёт (Земля–планета):** дата старта t_0 ; $V_\infty(t_{01})$ – величина вектора гиперболического избытка скорости при старте КА от Земли; углы, характеризующие направление вектора $V_\infty(t_{01})$ (α_{oV_∞} – прямое восхождение и δ_{oV_∞} – склонение); $\Psi_r(t_0)$ – вектор сопряжённых переменных к радиусу-вектору КА в начальной точке гелиоцентрического перелёта; $\psi_m(t_0)$ – величина переменной, сопряжённой к массе КА в

начальной точке гелиоцентрического перелёта Земля–планета; дата первого гравитационного манёвра t_1 : [9 скалярных параметров].

3. **($N - 2$) промежуточные гелиоцентрические перелёты планета–планета:** даты окончания участков t_i ; $\mathbf{V}_\infty(t_i^+)$ - векторы гиперболических избытков скорости в начальной точке участка; $\Psi_r(t_i^+)$ - векторы сопряжённых переменных к гелиоцентрическому радиусу-вектору КА в начальной точке участка; множители Лагранжа ν_{4_i}, ν_{5_i} , где $i = 1, \dots, N - 2$: [9·(N-2) скалярных параметров].

4. **Последний гелиоцентрический перелёт планета–планета:** дата последнего гравитационного манёвра t_N ; $\mathbf{V}_\infty(t_{N-1}^+)$ - вектор гиперболического избытка скорости в начальной точке участка; $\Psi_r(t_{N-1}^+)$ - векторы сопряжённых переменных к гелиоцентрическому радиусу-вектору КА в начальной точке участка; множители Лагранжа ν_{4_i}, ν_{5_i} , ($i = N - 1, N$) из соотношений (24) и (25); вектор гиперболического избытка скорости после последнего гравитационного манёвра $\mathbf{V}_\infty(t_N^+)$; ψ_{inc} - сопряжённая переменная к наклонению целевой гелиоцентрической орбиты: [15 скалярных параметров].

Таким образом, перечислено $(9N + 10)$ независимых выбираемых параметров схемы перелёта. Приведём краевые условия рассматриваемой $(N + 2)$ -точечной краевой задачи с указанием в квадратных скобках количества условий.

Для геоцентрического участка старта КА с околоземной орбиты краевые условия имеют вид (7): [4 скалярных условия]. Условие оптимальности даты старта КА t_0 (даты начала первого гелиоцентрического перелёта Земля–планета) [1 скалярное условие] имеет вид:

$$\Psi_r(t_0)^T \cdot \mathbf{V}_\infty(t_{01}) - P \cdot \psi(t_0) \cdot \delta(t_0) = 0 \quad (30)$$

где $\psi(t_0), \delta(t_0)$ - функция переключения двигателя ЭРДУ и функция тяги в начальной точке первого гелиоцентрического перелёта.

Условие оптимальности дат гравитационных манёвров [N скалярных условий] записывается в виде соотношения:

$$\Psi_r(t_i^+)^T \cdot \mathbf{V}_\infty(t_i^+) - \Psi_r(t_i^-)^T \cdot \mathbf{V}_\infty(t_i^-) + [\Psi_v(t_i^+) - \Psi_v(t_i^-)]^T \cdot \left(\frac{-\mathbf{r}}{r^3} - \frac{d\mathbf{V}_{\text{planet}}(t_i)}{dt_i} \right) = 0 \quad (31)$$

где $\psi(t_0), \delta(t_0)$ - функция переключения двигателя ЭРДУ и функция тяги в начальной точке первого гелиоцентрического перелёта; $\Psi_r(t_i^-)$ - вектор сопряжённых переменных к гелиоцентрическому радиусу-вектору КА при подлёте к планете.

Вектор граничных условий и условий оптимальности в конечных точках всех гелиоцентрических перелётов планета-планета имеет вид (24), если высота перицентра гиперболы пролёта КА больше $h_{min} = 400$ км, или (25), если КА осуществляет пролёт у планеты на минимально допустимой высоте h_{min} . Получается, что для каждого из рассматриваемых гравитационных манёвров должно быть исследовано 8 скалярных краевых условий: [8N скалярных условий для всех N гравитационных манёвров].

После последнего гравитационного манёвра наклонение гелиоцентрической орбиты КА должно удовлетворять условию транспортной задачи (1): [1 скалярное условие]. Оптимизация нефиксированных элементов целевой гелиоцентрической орбиты реализуется путём удовлетворения векторного условия (29): [3 скалярных условия].

Последнее условие, обеспечивающее выведение максимальной массы КА на целевую гелиоцентрическую орбиту, записывается в виде: $\psi_m(t_N) - 1 = 0$: [1 скалярное условие].

Итого представлено $(9N + 10)$ скалярных условий. Число условий соответствует числу перечисленных независимых выбираемых параметров схемы перелёта. Краевая многоточечная $(N + 2)$ -точечная задача порядка $9N + 10$ сформулирована.

В **четвёртой главе** приводятся результаты расчёта двух схем межпланетного перелёта для рассматриваемой постановки задачи сквозной оптимизации. Проектно-баллистический анализ был проведён для следующих траекторий КА:

Траектория № 1

Земля $\Rightarrow$ Земля $\Rightarrow$ Венера $\overset{1:1^1}{\Rightarrow}$ Венера $\overset{4:3}{\Rightarrow}$ Венера $\overset{3:2}{\Rightarrow}$ Венера $\Rightarrow$ целевая орбита

Траектория № 2

Земля $\Rightarrow$ Земля $\Rightarrow$ Венера $\overset{1:1}{\Rightarrow}$ Венера $\overset{1,5:1,5}{\Rightarrow}$ Венера $\overset{1:1}{\Rightarrow}$ Венера $\Rightarrow$ целевая орбита

Обе траектории выведения КА включают в себя пять гравитационных манёвров у планет, т.е. рассматриваемые траектории проанализированы в рамках 7-точечной краевой задачи. Порядок краевой задачи равен 55.

Общая схема решения подобных задач может быть описана следующим образом:

- на первом этапе находится решение некоторой вспомогательной (упрощённой) задачи, при этом действие возмущений на Венеру, у которой осуществляется последовательность околорезонансных гравитационных манёвров, не учитывается;

- на втором этапе ранее полученное решение используется в качестве начального приближения для решения задачи сквозной оптимизации (в рамках принятых математических моделей движения КА на отдельных участках), но уже с учётом возмущённости орбиты Венеры и с использованием полного набора условий оптимальности.

Для **траектории № 1** были получены следующие оптимальные характеристики:

1. При старте КА с опорной околоземной орбиты 27 января 2027 г. ХРБ использует 5226,10 кг топлива. Он обеспечивает гиперболический избыток скорости при старте от Земли равный $V_{\infty}(t_{01}) = 1387,795 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Продолжительность участка разгона 14,642 минуты. Масса КА после отделения ХРБ 1904,357 кг.

2. На гелиоцентрическом участке Земля-Земля маршевая ЭРДУ КА включается 3 раза. Траектория состоит из 3-х активных и 3-х пассивных участков. Длительность перелета Земля-Земля 429,586 суток. Потребовалось истратить 298,27 кг ксенона.

3. Гиперболический избыток скорости КА при гравитационном манёвре у Земли 7,4595 км/с. Масса КА у Земли 1606,09 кг.

4. Длительность перелёта Земля-Венера составляет 59,148 суток. Перелёт пассивный. Гиперболический избыток скорости КА у Венеры 15,4298 км/с.

5. При последующих подлётах КА к Венере гиперболические избытки скорости находятся в диапазоне 15,4265...15,4303 км/с. Диапазоны углов β_i^{max} от 20,106° до 20,115°. Все гравитационные манёвры у Земли и Венеры осуществляются на минимальной высоте.

6. Конечная оптимизируемая масса КА оказалась равной 1605,864 кг. Длительность выведения КА на целевую орбиту 1836,939 суток (5,029 лет).

На Рисунок 3 показаны проекции на плоскости xOy и xOz полученной оптимальной траектории перелёта № 1. Орбиты Земли и Венеры показаны синей и оранжевой линиями соответственно. Пассивные участки полёта КА изображены тонкой чёрной линией, активные

¹ Над стрелками указаны применяемые порядки резонансов $n:m$

участки – жирной красной линией. Коричневый квадрат соответствует точке старта КА, синий кружок – точке гравитационного манёвра у Земли, зелёный кружок - точкам околорезонансных гравитационных манёвров у Венеры (3 шт.).

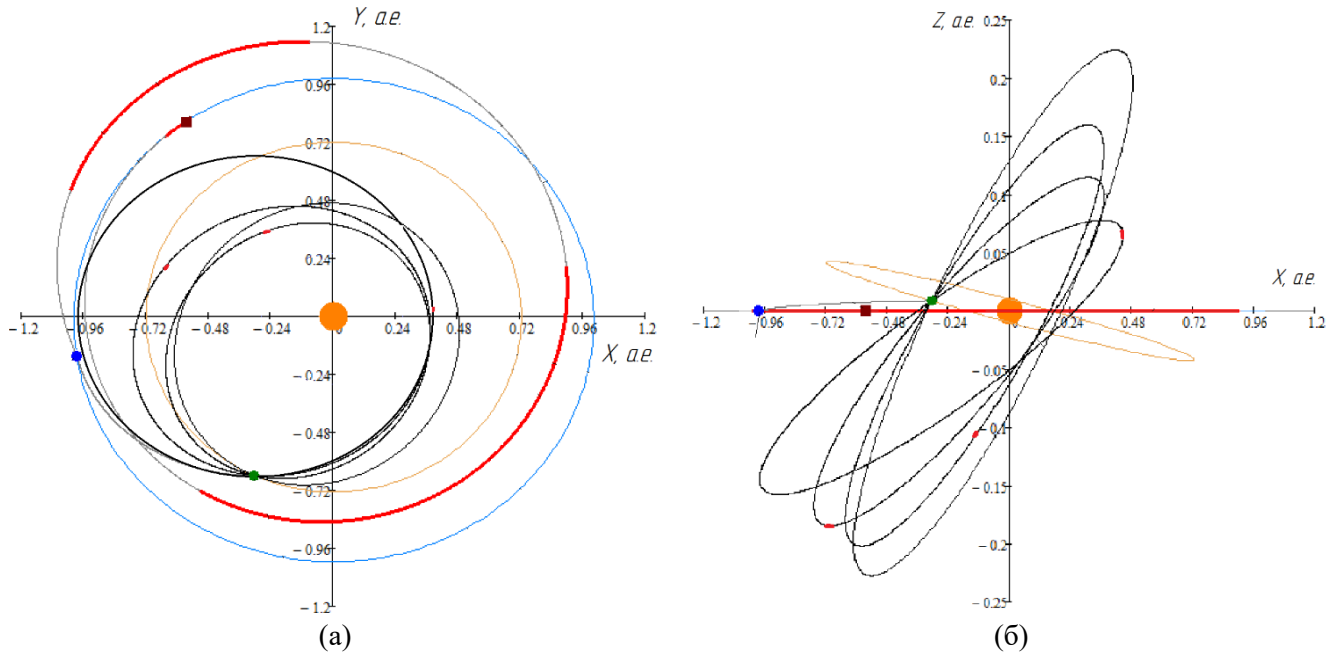


Рисунок 3 - Проекция гелиоцентрической траектории выведения КА № 1 на плоскость эклиптики (а) и плоскость xOz (б)

Для **траектории № 2** были получены следующие результаты:

1. При старте КА с опорной околоземной орбиты 27 января 2027 г. ХРБ обеспечил гиперболический избыток скорости, равный 1398,595 м/с, и затратил 5309,382 кг топлива за 14,645 минут. Стартовая масса КА оказалась равной 1903,09 кг.
2. На гелиоцентрическом перелёте Земля-Земля траектория состоит из 3-х активных и 3-х пассивных участков. Длительность перелёта Земля-Земля 430,23 суток. КА использовал 301,134 кг топлива.
3. Гиперболический избыток скорости КА у Земли равен 7,521 км/с. Масса КА у Земли 1601,956 кг.
4. Перелёт Земля-Венера оказался полностью пассивным. Гиперболический избыток скорости КА при подлёте к Венере 15,5137 км/с. Длительность перелёта 58,402 суток.
5. На последующих участках подлёта КА к Венере гиперболические избытки скорости находятся в диапазоне 15,5137...15,568 км/с, при этом углы β_i^{max} варьируются от 19,81° до 19,926°. КА все пролёты у Венеры осуществляет на минимальной высоте 400 км.
6. Конечная оптимизируемая масса КА оказалась равной 1601,86 кг. Длительность выведения КА на целевую орбиту оказалась равной 1275,952 суток (3,493 лет).

На Рисунок 4 показаны две проекции (на плоскости xOy и xOz) оптимальной траектории выведения КА № 2, включающей один π -резонансный гравитационный манёвр, который обозначен фиолетовым ромбом. Остальные обозначения соответствуют Рисунок 3.

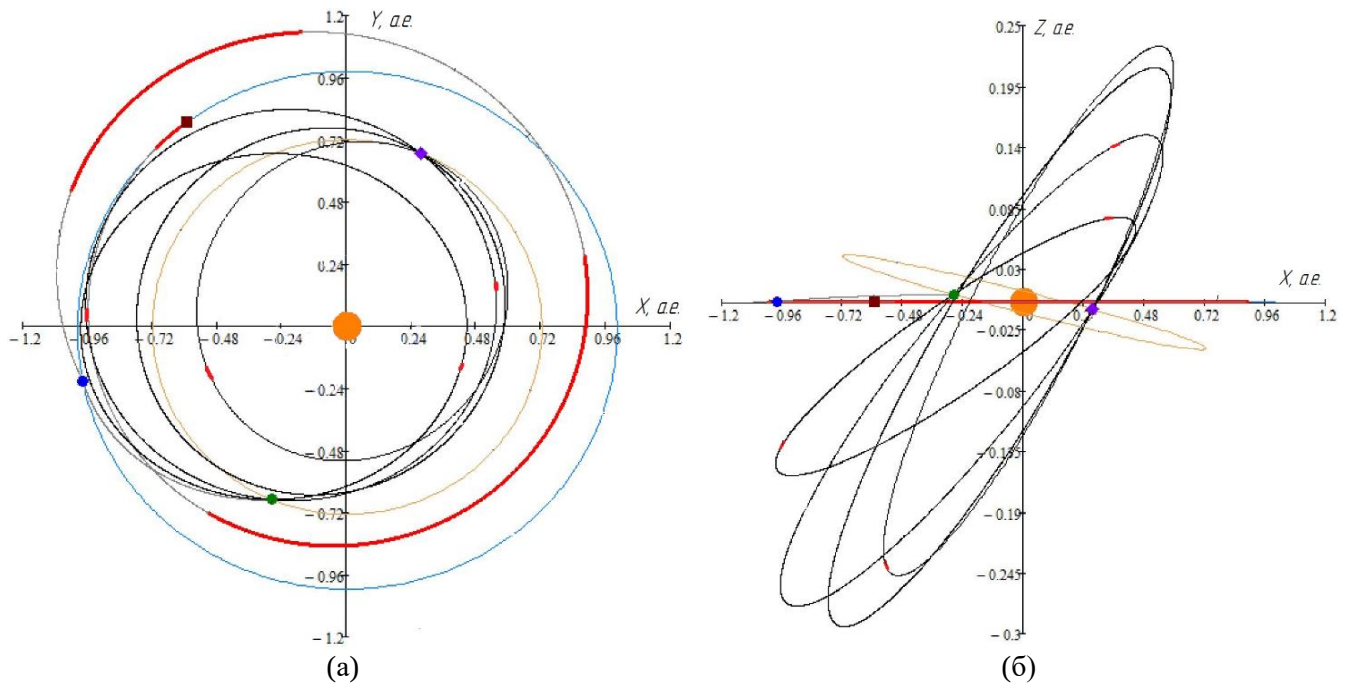


Рисунок 4 - Проекция гелиоцентрической траектории выведения КА № 2 на плоскость эклиптики (а) и плоскость xOz (б)

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОODY ПО РАБОТЕ

В рамках диссертационной работы была сформулирована задача сквозной оптимизации межпланетной траектории КА, оснащённого комбинированной двигательной установкой, с использованием некоторой последовательности гравитационных манёвров у планет земной группы. Предлагаемая в исследовании постановка позволяет:

- расширить комбинационные последовательности резонансных гелиоцентрических орбит за счёт включения π -резонансных гравитационных манёвров;
- оптимизировать величину и направление гиперболического избытка скорости КА при подлёте к планете для гравитационного манёвра у неё;
- использовать условия оптимальности, обеспечивающие учёт ограничений по наклонению целевой гелиоцентрической орбиты КА;
- увеличить точность математической модели, учитывая возмущенное движение планет, у которых осуществляются гравитационные манёвры.

На основании проведённого численного анализа траекторий выведения КА с комбинированной двигательной установкой в рамках анализируемой задачи сквозной оптимизации, использующей последовательность гравитационных манёвров у Венеры:

- с целыми порядками резонансов ($1:1 \rightarrow 4:3 \rightarrow 3:2$);
- с включением одного π -резонанса ($1:1 \rightarrow 1,5:1,5 \rightarrow 1:1$),

можно сделать следующие выводы:

1. При практически одинаковой оптимальной дате старта с околоземной орбиты 27.01.2027 года маршрут, включающий в себя π -резонансную гелиоцентрическую траекторию перелёта Венера–Венера, позволил существенно сократить время выведения КА. Это время уменьшилось с 5,029 лет до 3,494 лет (на 560,987 суток).

2. Диапазон оптимальных величин гиперболических избытков скорости при подлёте к Венере для реализации гравитационных манёвров у неё был такой: 15,4265...15,4303 км/с для траектории № 1 и 15,5137...15,568 км/с для траектории № 2.

3. Конечная оптимизируемая масса КА для первой траектории составила 1605,86 кг, а для второй – 1601,86 кг. При использовании гелиоцентрической траектории, находящейся в орбитальном резонансе 1,5:1,5 с орбитой Венеры конечная масса КА уменьшилась на 4 кг.

Анализ полученных решений показал возможную целесообразность использования π -резонансных гравитационных манёвров при реализации сложных схем межпланетного полёта.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в рецензируемых журналах Перечня ВАК РФ по специальности 2.5.16.

1. М.С. Константинов, В.В. Шевченко. Проектно-баллистический анализ выведения космического аппарата на гелиоцентрическую орбиту с наклоном 30° к плоскости солнечного экватора / М.С. Константинов, В.В. Шевченко // Вестник Московского авиационного института. – 2024. – Т. 31, № 2. – С. 144-154. – EDN JSVXMK.

2. Шевченко В.В. Оптимизация межпланетной траектории космического аппарата с использованием последовательности гравитационных манёвров у Земли и Венеры // Вестник Московского авиационного института. 2026. Т. 33. № 1. С. 130-140. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=187584>.

Статьи в рецензируемых журналах Web of Science и Scopus

3. Konstantinov M.S., Shevchenko V.V. Ballistic design of a solar probe into a heliocentric orbit with a large inclination to the solar equator // AIP Conf. Proc. 2549, 120004 (2023) // URL: <https://doi.org/10.1063/5.0107997>.

Материалы международных и всероссийских конференций

4. Шевченко В.В. Проектно-баллистический анализ выведения солнечного зонда на низкую гелиоцентрическую орбиту / В.В. Шевченко, М.С. Константинов // 19-я Международная конференция «Авиация и космонавтика»: Тезисы 19-ой Международной конференции, Москва, 23–27 ноября 2020 года. – Москва: Издательство "Перо", 2020. – С. 413-414. – EDN VQOOLF.

5. Шевченко В.В. Проектно-баллистический анализ выведения солнечного зонда на гелиоцентрическую орбиту с большим наклоном к солнечному экватору / В.В. Шевченко // XLV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых - пионеров освоения космического пространства: сборник тезисов: в 4 т., Москва, 30 марта – 02 2021 года. Том 3. – Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021. – С. 47-50. – EDN LCWSNY.

6. Шевченко В.В. Проектно-баллистический анализ выведения космического аппарата на гелиоцентрическую орбиту с наклоном 30 градусов к плоскости солнечного экватора / В.В. Шевченко // Авиация и космонавтика: Тезисы 22-ой Международной конференции, Москва, 20–24 ноября 2023 года. – Москва: Издательство "Перо", 2023. – С. 235. – EDN YZHFDE.

7. Шевченко В.В. Оптимизация траектории космического аппарата для исследования Солнца с использованием гравитационных манёвров у Земли и Венеры / В.В. Шевченко // Авиация и космонавтика: Тезисы 23-ей Международной конференции, Москва, 18–22 ноября 2024 года. – Москва: ООО "Издательство "Перо", 2024. – С. 225-226. – EDN AVNYPS.