

К РАСЧЕТУ БИФУРКАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ В ДРОССЕЛИРУЕМЫХ ЖРД

Василий Иванович БИРЮКОВ родился в 1948 г. на хуторе Песковатка Волгоградской области. Докторант МАИ. Кандидат технических наук, доцент. Основные научные интересы — в области теории колебаний и устойчивости движения, распыливания жидкостей, проектирования устройств для сжигания топлив. Автор более 50 научных работ.

Vassily I. BIRIUKOV, Ph.D., was born in 1948, in the Volgograd Region. He is working now towards his D.Sci. thesis at the MAI. His major research interests are in the theory of oscillations and stability of motion, atomization of liquids, designing of devices for burning of fuels. He has published over 50 technical papers.

Неустойчивость динамических систем, имеющих существенно нелинейные характеристики, является одной из наиболее сложных проблем, решение которых необходимо учитывать при проектировании летательных аппаратов и двигательных установок различного назначения. Анализ таких систем выполняется с привлечением метода гармонического баланса или качественной теории дифференциальных уравнений, а также путем построения фазового портрета. В дополнение к фазовому портрету системы 2-го порядка, имеющей сложного вида нелинейность, необходимо определить бифуркации — сложные состояния равновесия.

Сложные состояния равновесия системы 2-го порядка, обладающей первой степенью негрубости, могут быть следующего типа: слияние двух особых точек — узла и седла; вырожденный фокус или центр; двойной предельный цикл, получаемый при слиянии устойчивого и неустойчивого предельных циклов и др.

Рассмотрим уравнения баланса массы и энергии в камере сгорания дросселируемого ЖРД на гидразине с учетом обозначений, принятых в работах [1, 2]:

$$\frac{dX}{dt} = \lambda X_0 - \left(X + \frac{\bar{p}_\Pi}{\bar{p}_0} \right) \left[\lambda(1 - \varphi_k) + k_a e^{\mu(Y^{\mu+1})} \right]; \quad (1)$$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{k_a q_{\text{ТБ}}}{c_p \mu \bar{T}_s} \left(X + \frac{\bar{p}_\Pi}{\bar{p}_0} \right) e^{\mu(Y^{\mu+1})} - Y(\alpha_0 + \lambda) - \beta, \quad (2)$$

где α_0 — приведенный коэффициент, характеризующий скорость теплоотдачи в стенку камеры; Y — отклонение температуры газа в камере T от стационарного значения \bar{T}_s :

$$Y = \frac{E}{R\bar{T}_s} \frac{T - \bar{T}_s}{\bar{T}_s}; \quad (3)$$

μ характеризует химическую активность монооксида:

$$\mu = R\bar{T}_s / E; \quad (4)$$

β — величина, постоянная для фиксированного режима и учитывающая подвод энергии в камеру; λ — величина, обратная времени пребывания газа в камере сгорания:

$$\lambda = 1/\Theta_k; \quad (5)$$

k_a — константа лимитирующей химической реакции; φ_k — коэффициент полноты процессов

преобразования; X — отклонение концентрации пара гидразина ρ от стационарного значения $\bar{\rho}_\Pi$, отнесенное к плотности газообразных продуктов сгорания $\bar{\rho}_0$:

$$X = \frac{\rho - \bar{\rho}_\Pi}{\bar{\rho}_0}. \quad (6)$$

Для упрощения записи в рассматриваемой модели удельное тепловыделение обозначим как

$$K^* = \frac{k_a q_{\text{ТВ}}}{c_p \mu T_s}. \quad (7)$$

Тогда правые части уравнений (1) и (2) можно представить в виде функций:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= P_{(X,Y)} = \\ &= \lambda X_0 - \left(X + \frac{\bar{\rho}_\Pi}{\bar{\rho}_0} \right) \left[\lambda(1 - \varphi_k) + k_a e^{\frac{-1}{\mu(Y\mu+1)}} \right]; \quad (8) \\ \frac{dY}{dt} &= Q_{(X,Y)} = \\ &= K^* \left(X + \frac{\bar{\rho}_\Pi}{\bar{\rho}_0} \right) e^{\frac{-1}{\mu(Y\mu+1)}} - Y(\alpha_0 + \lambda) - \beta. \end{aligned}$$

Определим число состояний равновесия системы, особые точки, их топологический тип и устойчивость. Решения уравнений $P(X, Y) = 0$ и $Q(X, Y) = 0$ определяют координаты особых точек X^* и Y^* , соответствующих равновесным состояниям системы на плоскости X и Y . Кривая $Q(X, Y) = 0$ представляет собой изоклину $\frac{dY}{dX} = 0$ и пересекает ось Y в точке, определяемой зависимостью

$$-Y + \frac{K^*}{\alpha_0 + \lambda} \frac{\bar{\rho}_\Pi}{\bar{\rho}_0} e^{\frac{-1}{\mu(Y\mu+1)}} = \frac{\beta}{\alpha_0 + \lambda}. \quad (9)$$

Изоклина $\frac{dY}{dX} = \infty$, получаемая из уравнения $P(X, Y) = 0$, пересекает ось X в точке

$$X = \frac{\lambda X_0}{\lambda(1 - \varphi) + k_a e^{\frac{-1}{\mu}}} - \frac{\bar{\rho}_\Pi}{\bar{\rho}_0}. \quad (10)$$

Варьируемые параметры β , λ , X_0 влияют на вид кривых $P(X, Y) = 0$ и $Q(X, Y) = 0$, они могут пересекаться в одной, двух или трех точках [2].

Число состояний равновесия в зависимости от значений параметров режима камеры ЖРД определяется бифуркационной диаграммой, построенной на основе зависимости

$$\begin{aligned} Y_0 &= \frac{\beta}{\alpha_0 + \lambda} = \\ &= Y_* - \frac{q_{\text{ТВ}}}{c_p \mu T_s} \frac{\lambda}{\alpha_0 + \lambda} \frac{X_0}{\frac{\lambda(1 - \varphi_k) e^{\frac{-1}{(Y_*\mu+1)\mu}}}{k_a} + 1}. \quad (11) \end{aligned}$$

Бифуркационная кривая $Y_0 = f(Y^*)$ при различных значениях параметра X_0 и фиксированных параметрах режима λ и β показана на рис. 1. Число состояний равновесия равно числу пересечений

прямой $Y_0 = \frac{\beta}{\alpha_0 + \lambda}$ с кривой, полученной по формуле (11).

Возможные варианты охватывают одно пересечение (случай 1 изображен на рис. 1 сплошной линией); два пересечения (случай 2 изображен прерывистой толстой линией); три пересечения (случай 3 изображен тонкой прерывистой линией).

Расчеты выполнены применительно к модельной камере дросселируемого ЖРД, размеры и режимные параметры которой приведены в [2]. Если

бифуркационный параметр $X_0 = \frac{\dot{m}_{\text{впр}}}{\dot{m}_c} < 1$, осу-

ществляется дросселирование расхода, а при $X_0 > 1$ — форсирование тяги ЖРД. При температуре впрыска гидразина $T_0 = 300$ К и при работе камеры на номинальном режиме $X_0 = 1$ бифуркационная кривая, определяемая по зависимости (11), и прямая

$Y_0 = \frac{\beta}{\alpha_0 + \lambda}$ пересекаются в одной точке. Увеличе-

ние температуры впрыска до 320 К уменьшает зна-

чение $Y_0 = \frac{\beta}{\alpha_0 + \lambda}$ от 4,01 до 3,98, и в этом случае

реализуются два пересечения. При повышении температуры впрыска гидразина выше 350 К бифуркационная кривая и прямая линия, соответствующая

значению $Y_0 = \frac{\beta}{\alpha_0 + \lambda}$, пересекаются в трех точках,

т.е. в этом случае система может иметь три состояния равновесия. При дросселировании расхода через камеру ЖРД повышается значение

$Y_0 = \frac{\beta}{\alpha_0 + \lambda}$ и уменьшаются максимальные значения

бифуркационной кривой. При форсировании режима уменьшается величина $Y_0 = \frac{\beta}{\alpha_0 + \lambda}$ и увеличива-

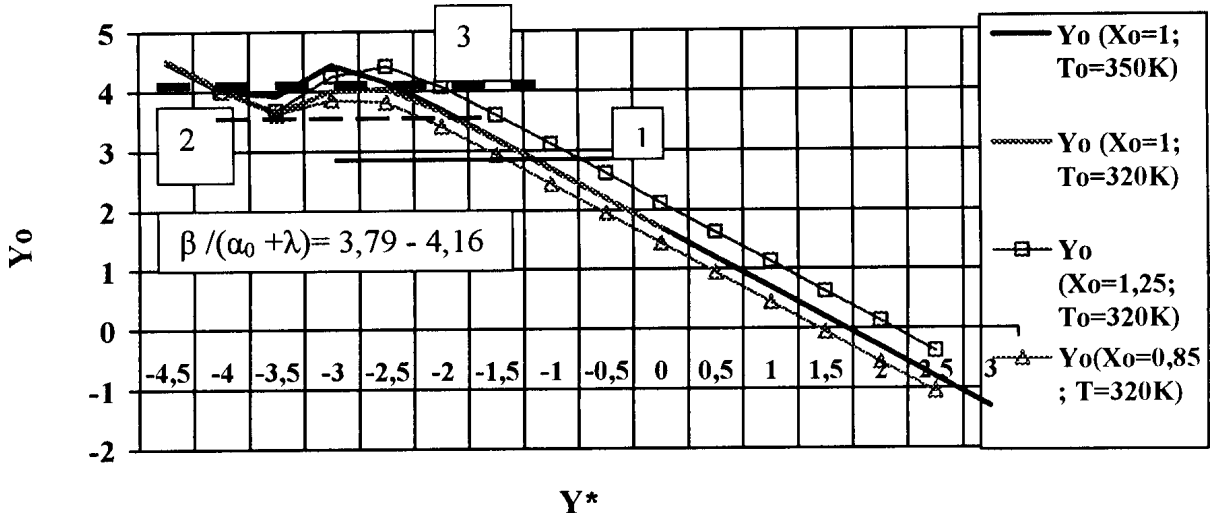


Рис. 1. Фрагмент бифуркационной диаграммы, построенной в диапазоне отклонений температуры $1,5 > Y > -4$ от стационарного значения, равного $T_s = 1150$ K: Y_0 — бифуркационный параметр; Y^* — отклонения температуры газа в камере ЖРД от стационарного значения

ется максимум кривой в виде волны. Когда волна растягивается, точка первого пересечения смещается в сторону уменьшения значений Y_* от 2,5 до 2. Бифуркационное соотношение между параметрами Y_0 и X_0 находится из условия соприкосновения $Y_0 = \text{const}$ с одним из экстремумов функции (11). Можно определить экстремумы бифуркационной зависимости, вычисляя производную по параметру Y_* и приравнявая ее нулю: $dY_0/dY_* = 0$. В результате получим систему уравнений

$$Y_0 = -Y_* + (Y_*\mu + 1)^2 \left[1 + \frac{k_a}{\lambda(1 - \varphi_k) e^{\frac{1}{(Y_*\mu + 1)\mu}}} \right];$$

$$X_0 = \frac{c_p \mu \bar{T}_s (Y_*\mu + 1)^2}{q_{\text{ТВ}} e^{\frac{1}{(Y_*\mu + 1)\mu}}} \times$$

$$\times \frac{k_a (\alpha_0 + \lambda)}{\lambda^2 (1 - \varphi_k)} \left[\frac{\lambda(1 - \varphi_k) e^{\frac{1}{(Y_*\mu + 1)\mu}}}{k_a} + 1 \right]^2.$$

Система параметрических уравнений (12) позволяет в плоскости параметров X_0, Y_0 разбить пространство на области с различным состоянием равновесия. Вид кривой близок к форме клина, в вершине которого находится точка возврата первого рода (рис. 2). Топологический тип и устойчивость особой точки на фазовой плоскости с координатами X_* и Y_* , соответствующей состоянию равновесия системы, определяется знаком частных производных функций $P(X, Y)$ и $Q(X, Y)$ [2]. Граница седла определяется из соотношения

$$\frac{\partial P_{(x^*, y^*)}}{\partial x} \frac{\partial Q_{(x^*, y^*)}}{\partial y} - \frac{\partial P_{(x^*, y^*)}}{\partial y} \frac{\partial Q_{(x^*, y^*)}}{\partial x} = 0, \quad (13)$$

а граница устойчивости особых точек неседлового типа (узлов и фокусов) — из соотношения

$$-\left(\frac{\partial P_{(x^*, y^*)}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{(x^*, y^*)}}{\partial y} \right) = 0. \quad (14)$$

Отсюда получаем выражения для границы узлов и фокусов:

$$Y_0 = -Y_* + (Y_*\mu + 1)^2 \left[\lambda(1 - \varphi_k) + \frac{k_a e^{\frac{-1}{(Y_*\mu + 1)\mu}}}{\alpha_0 + \lambda} \right];$$

$$X_0 = (Y_*\mu + 1)^2 \frac{\lambda(1 - \varphi_k) + k_a e^{\frac{-1}{(Y_*\mu + 1)\mu}}}{\lambda K^* e^{\frac{-1}{(Y_*\mu + 1)\mu}}} \times$$

$$\times \left[\lambda(1 - \varphi_k) + (\alpha_0 + \lambda) + k_a e^{\frac{-1}{(Y_*\mu + 1)\mu}} \right]. \quad (15)$$

Граница седел определяется уравнением

$$Y_0 = -Y_* + (Y_*\mu + 1)^2 \left[1 + \frac{k_a e^{\frac{-1}{(Y_*\mu + 1)\mu}}}{\lambda(1 - \varphi_k)} \right]. \quad (16)$$

Зависимости для границы седел совпадают с системой параметрических уравнений (12), разбивающих пространство в параметрах X_0, Y_0 на области с тремя состояниями равновесия. Иначе говоря, граничная кривая области параметров, при которых в системе реализуется три состояния равно-

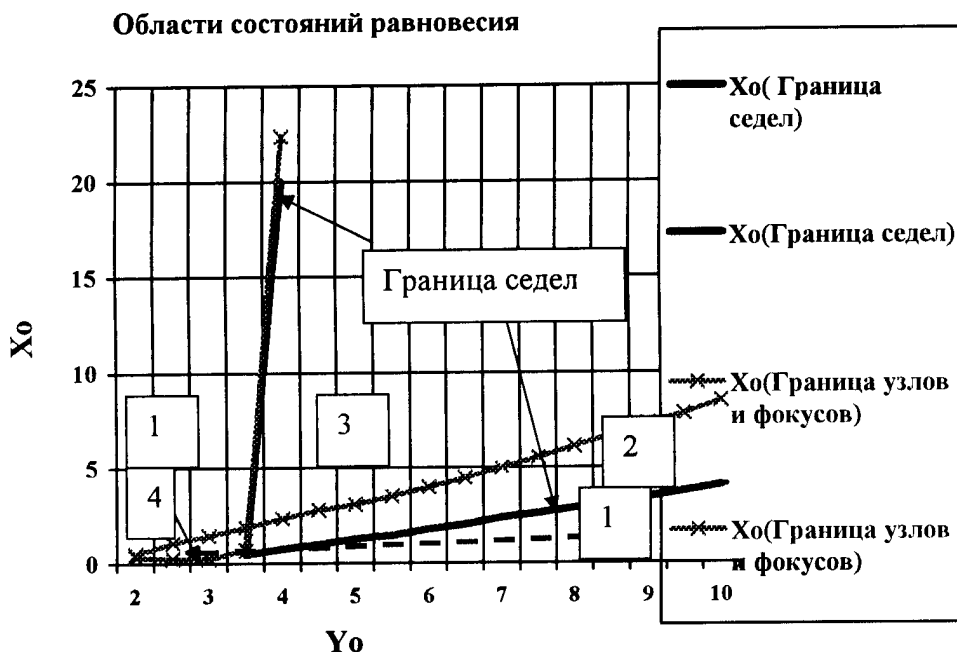


Рис. 2. Области устойчивых и неустойчивых состояний рабочего процесса в дросселируемой камере на гидразине:
 X_0 — отклонение относительной концентрации пара от стационарного режима;
 Y_0 — бифуркационный параметр

веса, совпадает с кривой рождения (или вырождения) особой точки типа седла (рис. 2). Граница узлов и фокусов изображена линией, образующей петлю, захватывающей область 4 и совпадающей вертикальной ветвью с границей седел. Пологая ветвь границы узлов разбивает пространство на области 2 и 3, отделяя от границы седел область 2 с возможным наличием предельных циклов. Заметим, что число различных областей и взаимное расположение граничных кривых на плоскости X_0, Y_0 зависят от значений параметров λ и β . При значениях бифуркационных параметров $X_0 < 2$ и $2 < Y_0 < 3,5$ осуществляется режим форсирования ЖРД, рабочая точка которого на рис. 2 лежит в области 4 внутри петли, но вне клина. При этом система обладает одним состоянием равновесия. В этом случае возможны варианты: предельные циклы отсутствуют; имеется четное число циклов, например два предельных цикла, охватывающих особую точку. Внешний цикл устойчивый, а внутренний неустойчивый.

Выводы

1. Изменение режима работы дросселируемого ЖРД осуществляется как плавно, так и ступенчато, это эквивалентно импульсному внешнему воздействию на двухзвенную систему, включающую линейное звено и звено с нелинейной характеристикой. В результате система может характеризоваться одним из рассмотренных состояний, находить-

ся в устойчивом или неустойчивом состоянии — в автоколебательном режиме или аperiodической неустойчивости.

2. Анализ бифуркаций позволяет дополнить физическую картину, получаемую на основе построения фазового портрета динамической системы.

Summary

Instability of dynamic systems with essentially nonlinear characteristics is very complicated problem to solve it. This problem is solved in the design process of various aerospace vehicles and power systems. A choking liquid jet engine is an example of the systems. The analysis of such systems is carried out by means of harmonic balance technique or using qualitative theory of differential equations. Yet another approach is phase portrait formation for the system. Bifurcations must be analyzed in addition to the phase portrait for the system with complicated nonlinearities.

Библиографический список

1. Бирюков В.И. К расчету амплитуды и частоты термокинетических автоколебаний в камере многорежимного ЖРД на гидразине // Вестник машиностроения. 2007. №10. С.21-24.
2. Бирюков В.И., Козлов А.А. Внутрикамерная неустойчивость рабочего процесса в дросселируемых ЖРД. — М.: Изд-во МАИ, 2007.

Московский авиационный институт
 Статья поступила в редакцию 10.04.2008