

*На правах рукописи*



Терещенко Татьяна Сергеевна

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ  
КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ИЗГОТОВЛЕННЫХ МЕТОДОМ  
ПОСЛОЙНОГО ЛАЗЕРНОГО ПЛАВЛЕНИЯ**

Специальность: 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин

Автореферат диссертации  
на соискание ученой степени кандидата технических наук

Москва 2025 г.

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ)

**Научный руководитель:** **Рабинский Лев Наумович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Перспективные материалы и технологии аэрокосмического назначения», профессор кафедры «Соппротивление материалов, динамика и прочность машин» МАИ, г. Москва.

**Официальные оппоненты:** **Митряйкин Виктор Иванович** доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Машиноведения и инженерной графики» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева – КАИ», г. Казань.

**Хомченко Антон Васильевич**, кандидат технических наук, ведущий инженер-конструктор отдела динамической прочности ООО «АУРУС-АЭРО», г. Москва.

**Ведущая организация:** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», г. Саратов.

Защита диссертации состоится 19 сентября 2025 г. в 13 часов 00 минут на заседании диссертационного совета 24.2.327.13, созданном на базе федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4 и на сайте:

[https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT\\_ID=184948](https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=184948)

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2025 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
24.2.327.13, к.т.н.



Орехов Александр Александрович

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность.

Селективное лазерное плавление (Selective Laser Melting, SLM) является одной из наиболее перспективных технологий трёхмерной печати металлических изделий, обеспечивающей создание изделий сложной формы с высокими характеристиками. Особый интерес представляет применение нержавеющей мартенситных сталей, таких как PН1, обладающих сочетанием высокой прочности, коррозионной стойкости и технологичности, что делает их востребованными в авиационной, космической, оборонной и медицинской отраслях.

Процесс SLM сопровождается воздействием высокоинтенсивного подвижного теплового источника, формирующего нестационарные температурные поля и значительные температурные градиенты. Это приводит к возникновению нестационарных термоупругих напряжений, остаточных деформаций и, как следствие, снижению надёжности изделий. Адекватное моделирование этих процессов требует рассмотрения динамических термоупругих эффектов.

Кроме того, в процессе эксплуатации изделия, изготовленные методом SLM, подвергаются воздействию переменных нагрузок. Для обеспечения прогнозируемой надёжности необходим учёт динамических характеристик материалов, включая усталостное поведение.

Таким образом, комплексное исследование, включающее математическое моделирование термонапряжённого состояния и экспериментальное определение динамических характеристик, является актуальной научной задачей.

Объектом исследований настоящей диссертации являются растущие тела – изделия, формируемые методом трёхмерной печати на основе селективного лазерного плавления металлопорошковой композиции из нержавеющей стали PН1.

Предметом и задачей работы является исследование нестационарного термонапряжённого состояния в плоской постановке, возникающего при движении лазерного источника по поверхности растущего тела, а также механическое поведение материала при динамических нагрузках.

### Методы исследования.

В работе применяются аналитические методы теории упругости и теплопроводности, теория дифференциальных уравнений, методы математической физики. Для численного анализа используется метод конечных элементов в программных пакетах COMSOL Multiphysics. Аналитические расчёты реализованы в системах компьютерной алгебры Maple и с применением языка программирования Python. Экспериментальные исследования включают статические и динамические испытания образцов из стали PН1 на растяжение, изгиб, усталость и определение температурных характеристик, выполненные с применением испытательной системы Instron и микроскопических методов анализа.

В диссертационной работе применялись:

- аналитические методы классической и обобщённой теории упругости;
- теория теплопроводности, включая гиперболические модели Грина–Нагди и Максвелла–Каттанео;
- методы решения дифференциальных уравнений математической физики;
- численное моделирование с использованием метода конечных элементов (COMSOL Multiphysics);
- расчёты в системах компьютерной алгебры (Maple), а также на языке программирования Python;
- испытательные системы Instron для экспериментального исследования статических и динамических характеристик образцов, микроскопического анализа поверхностей разрушения и методов высокочастотного нагружения.

**Научная новизна** работы определяется следующими полученными результатами:

- получено новое аналитическое решение задачи нестационарного нагрева полуплоскости подвижным тепловым источником в рамках плоской постановки с учётом динамики процесса;
- разработан и верифицирован численно-аналитический метод определения температурных напряжений и деформаций при воздействии подвижного теплового источника;
- построена и апробирована конечно-элементная модель плоской термоупругой задачи, адекватно отражающая реальные параметры процесса селективного лазерного плавления;
- впервые проведены динамические и усталостные испытания образцов из стали РН1, изготовленных методом селективного лазерного плавления;
- получены новые экспериментальные данные о теплофизических характеристиках металлопорошковой композиции РН1 при различных параметрах печати и в различных средах;
- предложен новый подход к моделированию технологических температурных напряжений в процессе формирования монослоя методом SLM с использованием обобщённых моделей теплопроводности.

**Практическая ценность.**

Разработанные аналитические и численные модели позволяют прогнозировать температурные поля и термонапряжённые состояния изделий, формируемых методом селективного лазерного плавления. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании технологических режимов 3D-печати для оптимизации структуры и повышения надёжности конечных изделий.

Разработанная методика экспериментального определения механических и динамических характеристик материалов, изготовленных методом SLM, может быть применена для оценки качества процессов аддитивного производства.

**Достоверность** научных положений и выводов подтверждена:

- использованием строго обоснованных математических моделей термоупругости;

– верификацией численных моделей на основе аналитических решений и экспериментальных данных;

– проведением экспериментальных исследований с применением сертифицированного оборудования и соблюдением международных стандартов испытаний;

– сопоставлением полученных результатов с данными литературы и публикаций в рецензируемых научных изданиях.

#### **Апробация работы.**

Основные результаты диссертации были доложены и обсуждены на следующих научных мероприятиях:

1. «Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов». Международная научно-практическая конференция, посвященной 70-летию БелИИЖТа - БелГУТа, Гомель, 2023.

2. «Проблемы безопасности на транспорте». XIII международная научно-практическая конференция, посвященная Году качества. Гомель, 2024

3. «От концепции к реализации – создание будущего через науку и практику». Международная научно-практическая конференция. Ижевск, 2025

4. Актуальные и перспективные научные исследования. Международная научно-практическая конференция. Пенза, 2025.

5. «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А.Г. Горшкова Кремёнки, 19–23 мая 2025.

#### **Публикации.**

По теме диссертационной работы опубликовано **9 научных работ**, из них:

- 2 статьи в журналах, индексируемых в международной базе Scopus,
- 2 статьи в изданиях, включённых в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК,
- 5 тезисов докладов на международных конференциях.

#### **Объем и структура диссертации.**

Работа состоит из введения, четырёх глав и заключения, содержит 131 страницу основного текста, 47 рисунков, а также списка литературы, состоящего из 111 источников.

#### **Основное содержание работы**

**Во введении** сформулированы цели и задачи исследования, обоснована научная новизна и актуальность работы, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, обоснована их достоверность, изложены структура и объём диссертации.

**Первая глава** посвящена обзору современных технологий трёхмерной печати металлических изделий, в том числе технологии селективного лазерного плавления (SLM). Приведено описание основных методов аддитивного производства, применяемого оборудования и используемых материалов. Особое внимание уделено механическим особенностям изделий, изготовленных методом SLM, в сравнении с традиционными технологиями.

Проведён анализ существующих исследований в области численного моделирования процессов селективного лазерного плавления. Показано, что для адекватного описания температурных и напряжённых состояний изделий необходимо учитывать нестационарные эффекты теплопереноса и динамическую природу термоупругих процессов.

На основании проведённого обзора обоснована целесообразность применения методов динамической термоупругости для исследования напряжённо-деформированного состояния изделий, полученных методом селективного лазерного плавления.

**Во второй главе** представлена методика проведения и результаты экспериментальных исследований образцов из металлопорошковой композиции РН1, изготовленных по технологии послойного лазерного спекания металла при различной ориентации образцов в процессе печати. В главе представлено описание методики подготовки и изготовления партий экспериментальных образцов, физико-механические характеристики которых исследуются при условии статического и динамического нагружения.

Экспериментальное определение коэффициента линейного температурного расширения (КЛТР) для напечатанных образцов проводилось на универсальной электрической установке Instron 5969 с использованием программного обеспечения Bluehill 3, высокотемпературной печи Instron 3119-406 с диапазоном температур от  $-100$  до  $+350^{\circ}\text{C}$  и видеоэкстензометром Instron 2663-821. Перед началом испытаний на каждый образец наносились специальные маркеры, образец помещался в камеру печи и зажимался в захвате.

Испытания проводились при комнатной температуре при начальной температуре в камере равной  $30^{\circ}\text{C}$  с шагом повышения температуры  $20^{\circ}\text{C}$  до  $200^{\circ}\text{C}$  и выдержкой образца не менее 1000 сек. в установившемся режиме нагрева. Из каждой партии образцов испытывалось по 3 образца. Среднее значение КЛТР для каждой партии образцов представлено в таблице 1.

Таблица 1. Среднее значение КЛТР для каждой партии образцов.

	В плоскости построения	Перпендикулярно плоскости построения
КЛТР	13,1	13,4

Статические механические испытания выполнялись на универсальной испытательной системе Instron 5965, оснащенной специализированным ПО Bluehill для управления процессами тестирования и сбора данных. Скорость нагружения для всех типов испытаний поддерживалась постоянной на уровне 1 мм/мин. При проведении испытаний на растяжение деформация фиксировалась бесконтактным оптическим видеоэкстензометром, обеспечивающим высокоточные измерения без механического воздействия на образец. Для испытаний на изгиб применялся контактный экстензометр, адаптированный к геометрии образца. Измерительная база обоих типов экстензометров

составляла 50 мм. Все эксперименты осуществлялись в нормальных лабораторных условиях (температура  $23\pm 2^\circ\text{C}$ , влажность  $50\pm 5\%$ ) в соответствии с требованиями стандартов механических испытаний.

Диаграммы напряжение-деформация, полученные в результате механических испытаний, представлены на рисунке 1.

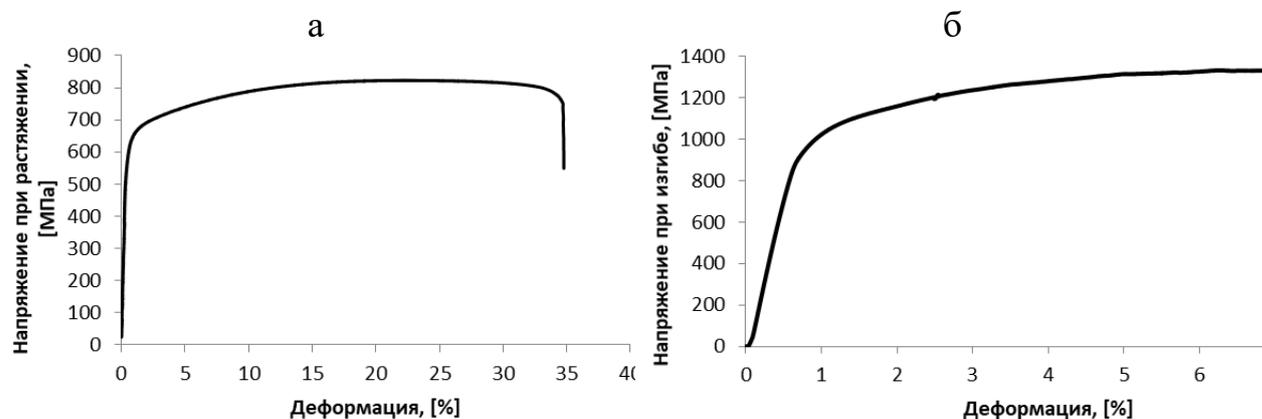


Рис. 1. Результаты испытаний металлических образцов.  
(а – испытания на растяжение, б – испытания на сжатие).

Результаты исследования экспериментальных образцов показали, что синтезированные материалы имеют сниженные показатели жесткости по сравнению с обычной конструкционной сталью. Модуль Юнга составил 176 ГПа, что ниже стандартного значения в 193 ГПа. Модуль упругости при изгибе составил 196 ГПа. Предел текучести при растяжении достиг 530 МПа, предел прочности — 750 МПа, а предельные деформации составили 22%. Предел текучести при изгибе составил 900 МПа. Характеристики, полученные в процессе испытаний представлены в таблице 2.

Таблица 2. Свойства образца.

Характеристика	Единица	Полученное значение
Модуль упругости, $E$	ГПа	176
Модуль упругости при изгибе, $E_{\text{изг}}$	ГПа	196
Предел прочности на растяжение	МПа	750
Предел текучести	МПа	530
Предельные деформации	%	22
Предел текучести при изгибе	МПа	900

В образце на растяжение на дне трещины обнаружены сферические частицы, а в поверхностном слое проявляются как плоские сплюснутые диски. Изображения, полученные с торцевой поверхности, то есть в области разрушения лопатки, представлены на рисунке 2. Место разрушения четко демонстрирует хрупковязкий характер разрушения с явным преобладанием

хрупкого разрушения. При этом хрупкое разрушение происходит по плоскостям чешуек, в то время как вязкое разрушение наблюдается непосредственно в теле материала.

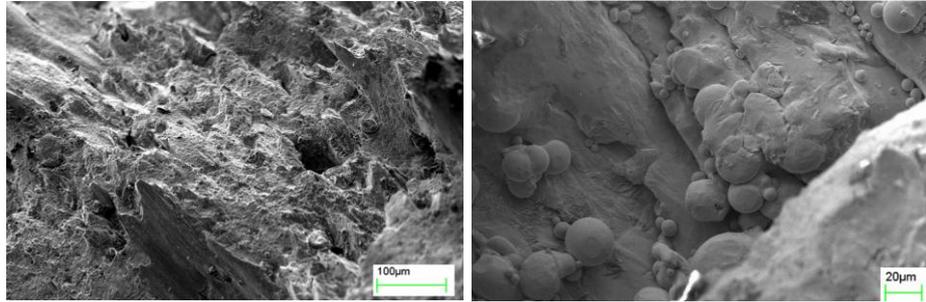


Рис. 2. Структура образца

Испытания на ударный изгиб проводился на маятниковом копре ТЕМЕ ХЖ-50. Скорость маятника в момент удара составляла 3,8 м/с. Расстояние между осью маятника и центром образца 380 мм. Момент маятника 25.777 Нм. По результатам испытаний средний коэффициент ударной вязкости для партии образцов составил 31 Дж/см<sup>2</sup>.

Проводилось определение динамического модуля упругости. Для этого использовалась пьезоэлектрическая установка. Определение собственной частоты было проведено с использованием встроенной функции нагружающей установки поиска, основанной на определении условий нагружения с минимальным потреблением мощности и радикальной сменой фазы. Испытания проводились до полного разрушения образца, количество циклов до разрушения устанавливалось по радикальному снижению собственной частоты колебаний. Первые результаты испытаний образцов показали сравнительно невысокие характеристики усталостного сопротивления при высокочастотном нагружении. Уровень напряжений, при котором наблюдались разрушения, не превосходит величины в 197 МПа. Подобные усталостные характеристики более чем в два раза ниже, чем характерные значения для аналогичных литых сплавов. С целью исследования причин такого радикального снижения усталостной прочности и установления механизмов разрушения материалов, полученных методом SLM, были исследованы поверхности излома с применением сканирующего электронного микроскопа. Анализ поверхности излома показывает, что методы СВМУ испытаний могут быть применены для материалов, полученных методами аддитивного производства, а также они оказываются эффективными для экспресс-анализа качества технологического процесса печати. Испытания позволяют выявить поры, области с нерасплавленным порошком, объемы, в которых наблюдаются проблемы с микроструктурой и текстурой материала вследствие особенностей производства.

**Третья глава** посвящена аналитическому исследованию термонапряжённого состояния материала при воздействии концентрированного подвижного теплового источника в процессе селективного лазерного плавления.

При лазерной обработке в процессе селективного лазерного плавления (SLM) формируются интенсивные нестационарные температурные градиенты, индуцирующие значительные термоупругие напряжения. Классическая модель теплопроводности, основанная на законе Фурье, не позволяет корректно описать такие процессы из-за предположения мгновенного распространения теплового возмущения. Более адекватное описание термоупругих процессов в материале обеспечивают гиперболические модели теплопроводности: Грина–Нагди II и III типов, а также модель Максвелла–Каттанео. Для решения поставленной задачи проводится анализ известных моделей теплопроводности.

*Общий закон теплопроводности*

Исходным является уравнение баланса энтропии:

$$\rho T_0 \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = \rho Q, \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность материала,  $s$  – удельная энтропия,  $\mathbf{q} = q^i \mathbf{e}_i$  – плотность теплового потока,  $T_0$  – начальная температура,  $Q$  – массовые источники тепла,  $\nabla \cdot \mathbf{q} = \text{div } \mathbf{q}$ .

Принимая во внимание физический закон для энтропии:

$$s = \frac{c}{T_0} T, \quad (2)$$

где  $c$  – удельная теплоёмкость при постоянной деформации, а  $T$  – приращение температуры, получаем общее уравнение теплопроводности:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = \rho Q. \quad (3)$$

Обобщённый закон теплопроводности:

$$q^i = f^i(T), \quad (4)$$

где  $f^i(T)$  – некоторые функции, зависящие от изменения температуры.

Различные теории теплопроводности отличаются друг от друга разной интерпретацией закона (4).

*Классическая модель Фурье (Грина–Нагди I типа)*

Классическая модель теплопроводности, основанная на законе Фурье, предполагает мгновенное распространение теплового возмущения по всему объёму материала.

Закон теплопроводности Фурье в коэффициентной форме записи имеет вид:

$$q^i(\mathbf{x}, t) = -\kappa^{ij} \nabla_j T(\mathbf{x}, t), \quad (5)$$

$$\rho c \dot{T} = -\nabla_i q^i + \rho Q. \quad (6)$$

где  $\kappa^{ij}$  – компоненты тензора теплопроводности. Точкой здесь и далее обозначается производная по времени.

Однако в реальных условиях высокоскоростных и высокоинтенсивных тепловых воздействий, таких как селективное лазерное плавление, подобное

предположение физически некорректно. Локализованное воздействие лазерного излучения сопровождается значительными тепловыми потоками и резкими температурными градиентами, в результате чего начало теплового отклика материала запаздывает относительно момента воздействия. Эти эффекты особенно существенно проявляются на малых временных масштабах и расстояниях, характерных для процессов лазерной печати.

Для адекватного описания таких процессов применяются гиперболические модели теплопроводности. Наиболее распространёнными неклассическими теориями теплопроводности являются модели Грина–Нагди II и III типов, а также модель Максвелла–Каттанео. Эти модели описывают теплоперенос в виде тепловых волн и учитывают конечную скорость распространения теплового возмущения. Тем самым они более точно соответствуют физике процесса теплопереноса. В отличие от классической модели, гиперболическая постановка не допускает мгновенного распространения энергии, что согласуется с экспериментальными наблюдениями при интенсивных термических нагрузках и принципиально меняет характер решения.

Модели Грина–Нагди второго и третьего типа отличаются от классической модели тем, что они основаны на дополнительном параметре теплового состояния, названным тепловое смещение  $\alpha(\mathbf{x}, t)$ , которое определяется так:

$$\alpha(\mathbf{x}, t) = \alpha_0(\mathbf{x}) + \int_0^t T(\mathbf{x}, \xi) d\xi, \quad \alpha_0(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}, 0). \quad (7)$$

*Модель Грина–Нагди III типа*

Модель Грина–Нагди III типа характеризуется следующим законом теплопроводности:

$$q^i(\mathbf{x}, t) = -\kappa^{ij} \nabla_j T(\mathbf{x}, t) - \tilde{\kappa}^{ij} \nabla_j \alpha(\mathbf{x}, t), \quad (8)$$

$\tilde{\kappa}^{ij}$  – компоненты тензора скорости распространения тепла.

а уравнение теплопроводности принимает вид:

$$\rho c \dot{T} = -\nabla_i \dot{q}^i + \rho \dot{Q}. \quad (9)$$

Если в модели Грина–Нагди III типа положить  $\kappa^{ij} \equiv 0$ , то получим модель Грина–Нагди II типа.

*Модель Максвелла–Каттанео*

В этом случае закон теплопроводности имеет вид:

$$q^i + \tau_T \dot{q}^i = -\kappa^{ij} \nabla_j \theta. \quad (10)$$

Здесь  $\tau_T$  – время релаксации тепловых потоков.

Уравнение теплопроводности при этом будет иметь вид:

$$\rho c \dot{T} = -\nabla_i q^i + \rho \dot{Q}. \quad (11)$$

Выражение (11) обеспечивает физически корректное запаздывание теплового отклика.

Далее рассматривается задача о нестационарном нагреве упругой полуплоскости подвижным источником лазерного излучения с учётом теплоотдачи на поверхности (рис. 3).

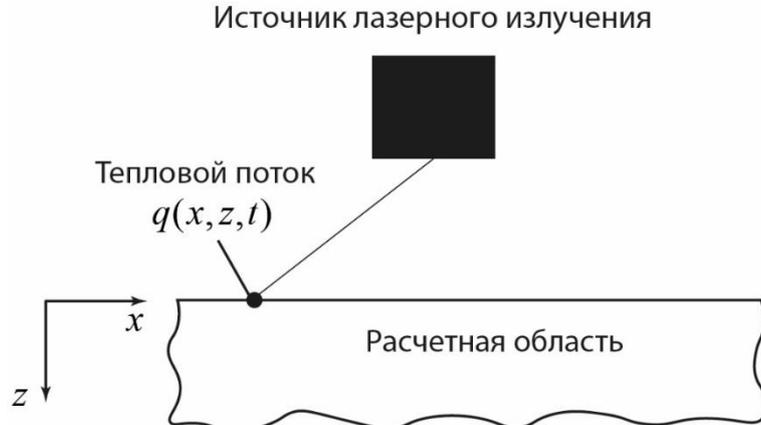


Рис. 3. Постановка задачи о лазерном нагреве полупространства

Задача рассматривается в плоской постановке. В этом случае упругое теплопроводное полупространство будем называть полуплоскостью. Полагается, что в начальный момент времени  $t = 0$  в начале прямоугольной декартовой системы координат  $Oxz$ , связанной с поверхностью полуплоскости  $z \geq 0$  начинает действовать источник тепла  $q(x, z, t)$ , который движется по поверхности полуплоскости  $z = 0$  по известному закону движения.

Координаты положения центра пятна нагрева в моменты времени  $t > 0$  определяются параметрической зависимостью:

$$x = \varphi(t) \quad (12)$$

В нашем случае используется закон равномерного движения со скоростью  $V$ :

$$\varphi(t) = Vt. \quad (13)$$

Полагаем, что среда является однородной и изотропной, а также что плотность и теплофизические постоянные не зависят от температуры. В этом случае распределение температуры  $T(x, z, t)$  в среде подчиняется уравнению теплопроводности.

Положим также отсутствие объёмных источников тепла в полуплоскости.

Рассмотрим случай А Теория Грина-Нагди I типа (классическое уравнение теплопроводности).

В этом случае распределение температуры  $T(x, z, t)$  в среде подчиняется уравнению теплопроводности, которое в безразмерной форме записи выглядит так:

$$\frac{\partial T(x, z, t)}{\partial t} = \Delta T(x, z, t) \quad (14)$$

В начальный момент времени температура во всех точках полупространства равна нулю:

$$T(x, z, 0) = 0. \quad (15)$$

На поверхности полупространства имеют место граничные условия второго рода:

$$-\kappa \frac{\partial T(x, z, t)}{\partial z} + \beta T(x, z, t) \Big|_{z=0} = q[x - \varphi(t), t]. \quad (16)$$

На бесконечности температура полагается ограниченной:

$$T(x, z, t) = O(1), \quad \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Исходя из принципа суперпозиции решение исходной задачи строится с помощью оператора свёртки функции влияния с правой частью граничного условия по переменной  $x$  и по времени:

$$T(x, z, t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, z, t - \tau) q[\xi - \varphi(\tau), \tau] d\xi. \quad (18)$$

Непосредственное использование формулы (18) представляет определённые трудности, связанные с вычислением несобственного интеграла по пространственной переменной.

Как видно, для получения решения исходной задачи должна быть решена вспомогательная задача по определению функции влияния  $G(x, z, t)$ . Математическая постановка этой состоит из уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial G(x, z, t)}{\partial t} = \Delta G(x, z, t), \quad (19)$$

которое дополняется краевыми условиями:

$$-\kappa \frac{\partial G(x, z, t)}{\partial z} + \eta G(x, z, t) \Big|_{z=0} = \delta(x)\delta(t), \quad (20)$$

и нулевым начальным условием:  $G(x, z, 0) = 0$ . Здесь  $\delta(\cdot)$  – дельта-функция Дирака,  $\eta$  – коэффициент теплообмена на границе  $z = 0$ .

Для решения поставленной задачи используется интегральное преобразование Лапласа по времени и интегральные преобразования Фурье по пространственной переменной  $x$ .

В результате решения задачи о подвижном источнике тепла получено поле температур для классического случая с учетом равномерного движения источника  $\varphi(t) = Vt$  со скоростью  $V$  по поверхности полуплоскости  $z = 0$ :

$$T_1(x, z, t) = \frac{1}{2\kappa\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{(x-V\tau)^2}{4(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} \times$$

$$\times \left[ \frac{e^{-\frac{z^2}{4(t-\tau)}}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} - \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t-\tau}} + \frac{\eta\sqrt{t-\tau}}{\kappa}\right) e^{\frac{\eta}{\kappa}\left[\frac{\eta(t-\tau)}{\kappa^2} + z\right]}}{\kappa} \right] d\tau \quad (21)$$

Аналогичным образом получены поля температур для остальных случаев. Например, в случае теории Грина-Нагди II:

$$T_2(x, z, t) = \int_0^{t-\sqrt{x^2+z^2}} \frac{d\tau}{\kappa\pi\sqrt{(t-\tau)^2 - (x-V\tau)^2 - z^2}} \quad (22)$$

На рис. 4 представлены распределение поля температур по времени для моделей Грина-Нагди I ( $T_1(x, z, t)$ ) и Грина-Нагди II ( $T_2(x, z, t)$ ). Из анализа полученных результатов видно, что при больших временах графики совпадают, однако имеется существенное различие при малых временах.

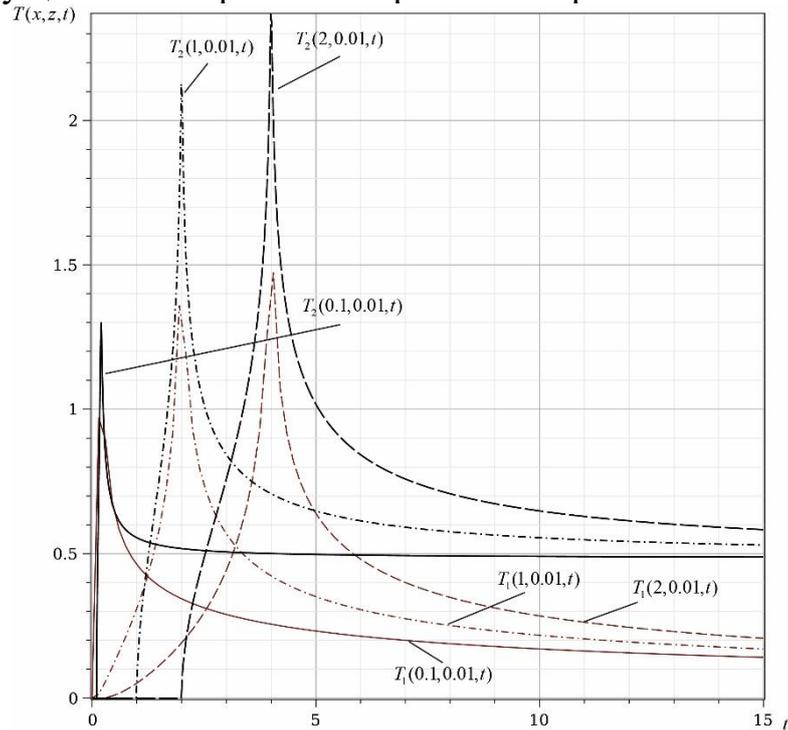


Рис. 4. Распределение полей температур в зависимости от времени  $t$ . Для случая теории Максвелла–Каттанео поле температур имеет вид:

$$T_3(x, z, \tau) = \int_0^\tau G_0(x - Vt, z, \tau - t) dt \quad (23)$$

где  $G_0(x, z, \tau) = \frac{H(\tau - z)}{2\pi k} \int_0^{\infty} J_0 \left( \sqrt{p^2 - \frac{1}{4}} \sqrt{\tau^2 - z^2} \right) \cos(px) dp$ ,  $J_0(\bullet)$  – функция

Бесселя.

На рис. 5 приведено распределение функций влияния по пространственной координате  $z$  для классической модели (пунктир) и модели Максвелла–Каттанео (сплошная линия) в различные моменты времени. Из этих рисунков (5б) видно, что при больших временах графики фактически совпадают, а при малых временах (5а) функция влияния для модели Максвелла–Каттанео носит явно волновой характер.

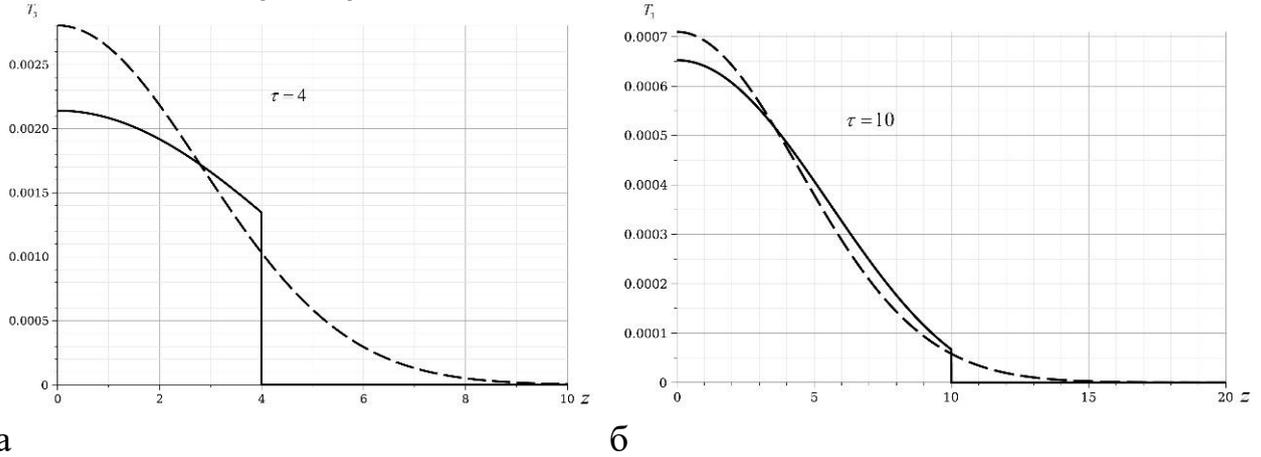


Рис. 5. Распределение функций влияний для классической модели и модели Максвелла–Каттанео.

При получении изделий методом SLM принципиальное значение имеют начальные моменты времени, поэтому для исследования напряженно-деформированного состояния полуплоскости используем температурные поля, полученные по модели Максвелла–Каттанео.

Также проводилось исследование напряженно-деформированного состояния полуплоскости, индуцированного подвижным источником лазерного излучения.

Напряженно-деформированное состояние металлопорошковой композиции в процессе селективного лазерного плавления определялось на основе решения системы дифференциальных уравнений термоупругости в предположении, что поверхностные нагрузки и массовые силы, а также внутренние источники тепла отсутствуют. Эта система уравнений состоит из уравнения теплопроводности и уравнений движения теории упругости с учётом температурных эффектов. Задача решается в несвязанной постановке.

Таким образом, получаем несопряженную систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 T(x, z, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau_T a} \frac{\partial T(x, z, t)}{\partial t} = \Delta T(x, z, t) \quad (24)$$

$$\Delta \mathbf{u}(x, z, t) + \eta^2 \text{grad div} \mathbf{u}(x, z, t) - \gamma \text{grad} T(x, z, t) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{u}(x, z, t)}{\partial t^2}, \quad (25)$$

Скалярные уравнения Ламе для плоского случая будут иметь вид ( $\lambda, \mu, \gamma$  – термомеханические параметры материала):

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \gamma \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (26)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \gamma \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (27)$$

Напряжения  $\sigma_{ij}$  связаны с деформациями  $\varepsilon_{ij}$ ,  $i, j = x, z$  законом Дюамеля-Неймана:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda\theta - \gamma\mu T + 2\mu\varepsilon_{xx}, \\ \sigma_{zz} &= \lambda\theta - \gamma\mu T + 2\mu\varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{xz} &= 2\mu\varepsilon_{xz}, \end{aligned} \quad (28)$$

Деформации и перемещения подчиняются соотношениям Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \theta &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}. \end{aligned} \quad (29)$$

Решение системы уравнений (26) – (27) строится с использованием упругих потенциалов  $\varphi$  и  $\psi$ . В декартовой системе координат с учётом осевой симметрии остаётся ненулевой только одна компонента векторного потенциала:  $\psi = (0, \psi, 0)$ . При этом связи компонент вектора перемещений с упругими потенциалами имеют вид:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (30)$$

Из скалярных уравнений Ламе с учетом (30) следуют выражения для перемещений  $u, w$  и напряжений  $\sigma_x, \sigma_z, \sigma_{xz}$  записанные через потенциалы  $\varphi$  и  $\psi$ .

Введём следующую систему безразмерных величин (символом «\*» обозначены размерные параметры):

$$\begin{aligned} z &= \frac{z^*}{h}, \quad x = \frac{x^*}{h}, \quad t = \frac{c_1 t^*}{h}, \quad \varphi = \frac{\varphi^*}{h^2}, \quad \psi = \frac{\psi^*}{h^2}, \quad u = \frac{u^*}{h}, \quad w = \frac{w^*}{h}, \quad T = \frac{T^*}{T_0}, \\ \sigma_x &= \frac{\sigma_x^*}{\lambda + 2\mu}, \quad \sigma_z = \frac{\sigma_z^*}{\lambda + 2\mu}, \quad \sigma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}^*}{\lambda + 2\mu}, \quad \beta^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2}, \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь параметр  $\beta$  равен отношению скорости волн сдвига к скорости волн растяжения-сжатия в материале.

С учетом этого перемещения будут определяться соотношениями (30), а напряжения примут вид:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (1 - 2\beta^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - 2\beta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \gamma \beta^2 T \quad (32)$$

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + (1 - 2\beta^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\beta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \gamma \beta^2 T \quad (33)$$

$$\sigma_{xz} = \beta^2 \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \quad (34)$$

Для определения напряженно-деформированного состояния имеем начально-краевую задачу в виде ( $\alpha$  – безразмерный параметр):

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, z, t)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi(x, z, t)}{\partial t^2} - \alpha T(x, z, t) = 0 \quad (35)$$

$$\beta^2 \left[ \frac{\partial^2 \psi(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, z, t)}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial^2 \psi(x, z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (36)$$

Краевые условия будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_z(x, z, t)|_{z=0} &= 0, & \sigma_{xz}(x, z, t)|_{z=0} &= 0 \\ \varphi(x, z, t)|_{z \rightarrow \infty} &= O(1), & \psi(x, z, t)|_{z \rightarrow \infty} &= O(1) \end{aligned} \quad (37)$$

Начальные условия предполагаются однородными.

Для решения поставленной задачи применим к (35) – (36) интегральное преобразование Лапласа по времени с параметром  $s$  и интегральные преобразования Фурье по пространственной переменной  $x$  с соответствующим параметром  $p$  (индекс « $FL$ » у функции обозначает её изображение по Фурье и Лапласу).

Тогда перемещения  $w$  в полуплоскости определяются по формуле:

$$\begin{aligned} w(x, z, \tau) &= \frac{2\alpha}{\kappa} \left[ G_0^w(x, z, \tau) - G_1^w(x, z, \tau) ** \right. \\ &\quad \left. ** \Phi_{1as}^w(t, x) + 2G_2^w(x, z, \tau) ** \Phi_{2as}^w(t, x) \right] \end{aligned} \quad (38)$$

Символ «\*\*» означает операцию свёртки по пространственной переменной  $x$  и времени  $\tau$ .

В этом выражении

$$\begin{aligned} G_0^w(x, z, \tau) &= \delta(t - z) \delta(x) - \frac{H(t - z)z}{\pi \sqrt{t^2 - z^2}} \times \\ &\quad \times \int_0^\infty \sqrt{p^2 - \frac{1}{4}} J_1 \left( \sqrt{t^2 - z^2} \sqrt{p^2 - \frac{1}{4}} \right) \cos(px) dp \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} G_1^w(x, z, \tau) &= \frac{H(\tau - z)}{2\pi} \int_0^\infty J_0 \left( |p| \sqrt{\tau^2 - z^2} \right) \cos(px) dp = \\ &= \frac{H(\tau - z)}{2\pi} \frac{H(\tau - z - x)}{\sqrt{\tau^2 - z^2 - x^2}} \end{aligned} \quad (40)$$

$$G_2^w(x, z, \tau) = \beta \frac{H\left(\tau - \frac{z}{\beta}\right) H\left(\tau - \frac{z}{\beta} - x\right)}{2\pi \sqrt{\tau^2 - \frac{z^2}{\beta^2} - x^2}} \quad (41)$$

Аналогичные представления имеют место для перемещений  $u$ , а также для компонент тензора напряжений.

На представленных ниже графиках приведены перемещения, как решения поставленной термоупругой задачи.

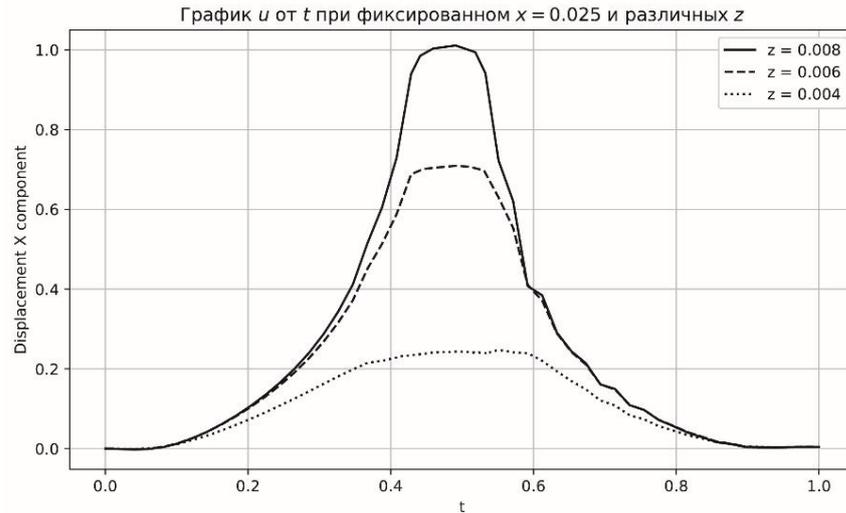


Рисунок 6. Зависимость перемещений  $u$  от времени  $t$  при различном значении глубины  $z$  в точке  $x = 0.025$ .

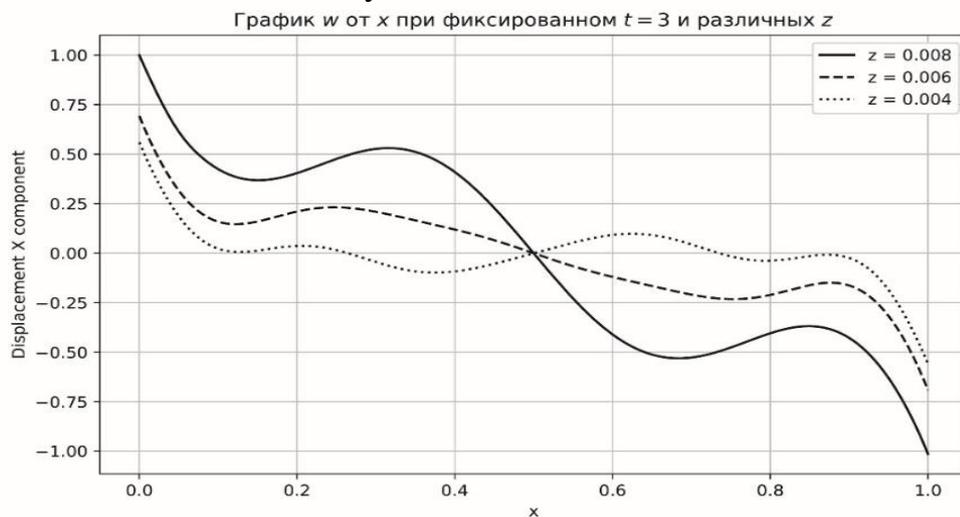


Рисунок 7. Зависимость перемещений  $u$  от координаты  $x$  при различном значении глубины  $z$  в момент времени  $t = 3$ .

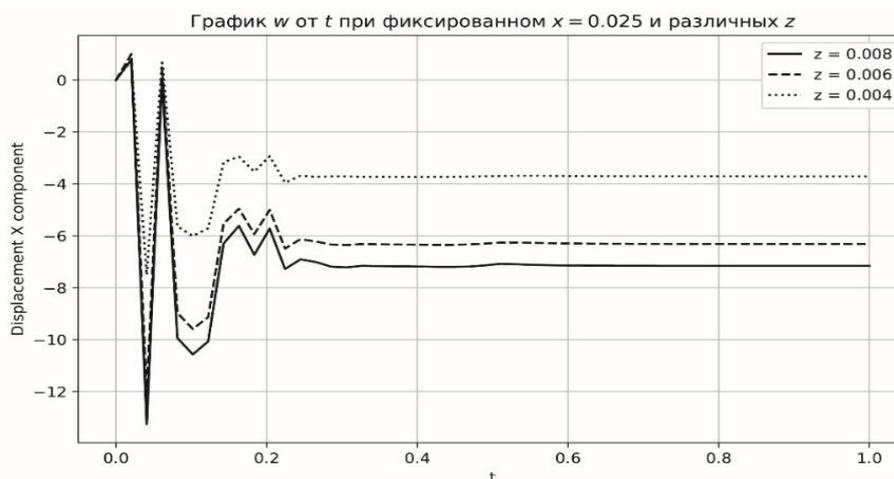


Рисунок 8. Зависимость перемещений  $w$  от времени  $t$  при различном значении глубины  $z$  в точке  $x = 0.025$ .

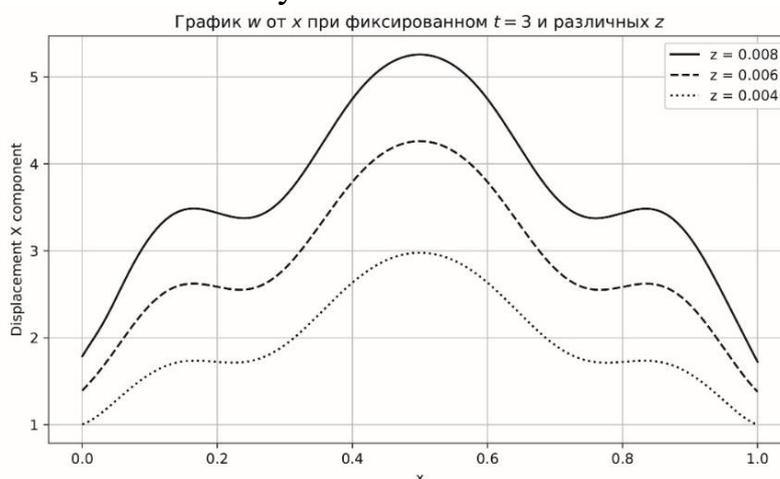


Рисунок 9. Зависимость перемещений  $w$  от координаты  $x$  при различном значении глубины  $z$  в момент времени  $t = 3$ .

На основании проведенных расчетов можно сделать следующие выводы:

- при больших временах температурные распределения, рассчитанные по гиперболическим и классической моделям, сходятся, что отражает переход к установившемуся режиму теплопереноса;

- при малых временах гиперболические модели, в отличие от классической модели Фурье, предсказывают волновой характер распространения температуры, проявляющийся в наличии фронта тепловой волны.

В центре внимания находится модель Максвелла–Каттанео, служащая базовым вариантом гиперболического описания теплопереноса. В отличие от моделей Грина–Нагди, вводящих дополнительные термодинамические переменные, она прямо модифицирует закон Фурье, задавая конечное время релаксации теплового потока  $\tau_T$ . Такое уточнение сохраняет строгое соответствие второму закону термодинамики и позволяет корректно описывать запаздывающий тепловой отклик при кратковременных интенсивных нагрузках без модификации физических принципов.

Анализ показал, что применение модели Максвелла–Каттанео обеспечивает более точное математическое описание начальной стадии теплового процесса при лазерной обработке:

- корректно учитывается запаздывание теплового отклика;
- появляется волновой характер распространения температуры;
- прогнозируются реальные масштабы зон термического влияния.

На основе рассчитанных температурных полей проведено исследование термонапряжённого состояния материала. Сформулированы уравнения движения и законы термоупругости в предположении плоской постановки и отсутствии объёмных сил. Решение системы уравнений позволило получить распределение перемещений и напряжений в полуплоскости как функции времени и пространственных координат.

Установлено, что использование гиперболических моделей приводит к более реалистичному прогнозу распределения напряжений на начальных этапах воздействия. Эти начальные термомеханические процессы во многом определяют последующую эволюцию остаточных напряжений, развитие трещин и дефектов, что критически важно для повышения надёжности изделий, полученных методом селективного лазерного плавления.

Таким образом, для корректного математического описания процессов интенсивного лазерного воздействия на вещество применение гиперболических моделей теплопроводности является не только предпочтительным, но и необходимым условием. Модель Максвелла–Каттанео, благодаря своим физическим и математическим преимуществам, может быть положена в основу моделирования динамики тепловых процессов при аддитивном производстве металлических изделий.

Полученные результаты могут быть использованы для оптимизации параметров лазерной обработки и прогнозирования поведения материалов с неклассическими теплофизическими свойствами.

**В четвертой главе** рассматривается конечно-элементное моделирование термонапряжённого состояния упругой полуплоскости с целью определения температурных напряжений и деформаций, возникающих в процессе селективного лазерного плавления. В ходе работы была реализована двумерная конечно-элементная модель, включающая учет временной и пространственной динамики нагрева и охлаждения материала в процессе аддитивного производства. Конечно-элементное моделирование проводилось с использованием программного комплекса COMSOL Multiphysics, математическая постановка задачи соответствует описанной в главе 3. Геометрия и конечно-элементная модели представлены на рис 10.

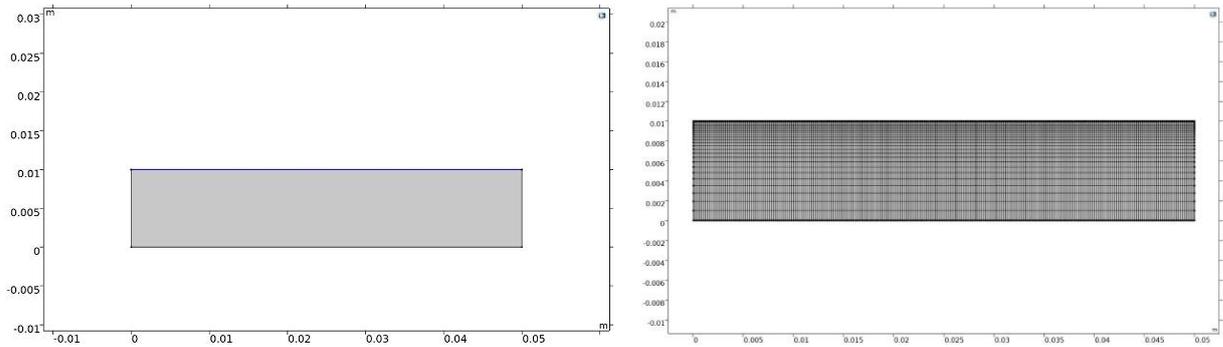


Рис. 10 Геометрия расчетной области и граница действия подвижного источника и конечно-элементная модель расчетной области.

Результаты конечно-элементного моделирования представлены на рисунках 11 – 13.

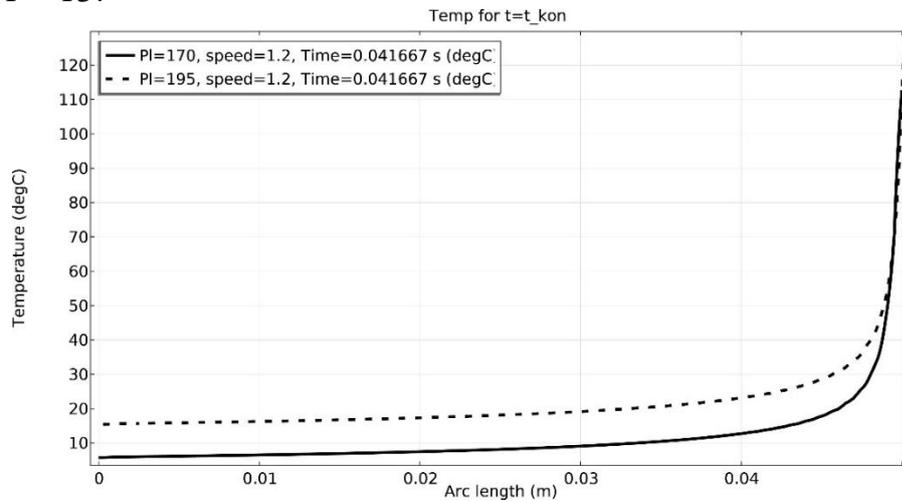
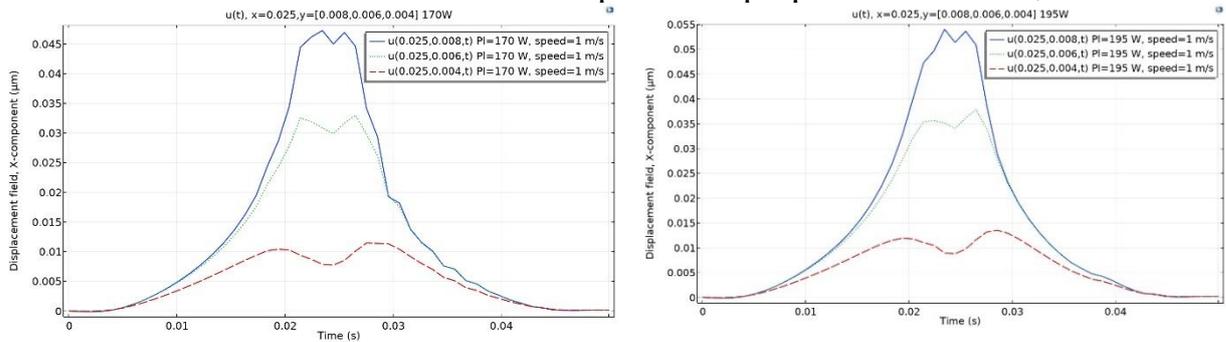


Рисунок 11. Распределение температуры вдоль верхней границы расчетной области в конечный момент времени при различной мощности.



а

б

Рисунок 12. Графики  $u(t)$  при фиксированном  $x$  и различных  $y$ .

а. –  $P_l = 170$  [Вт]; б. –  $P_l = 195$  [Вт].

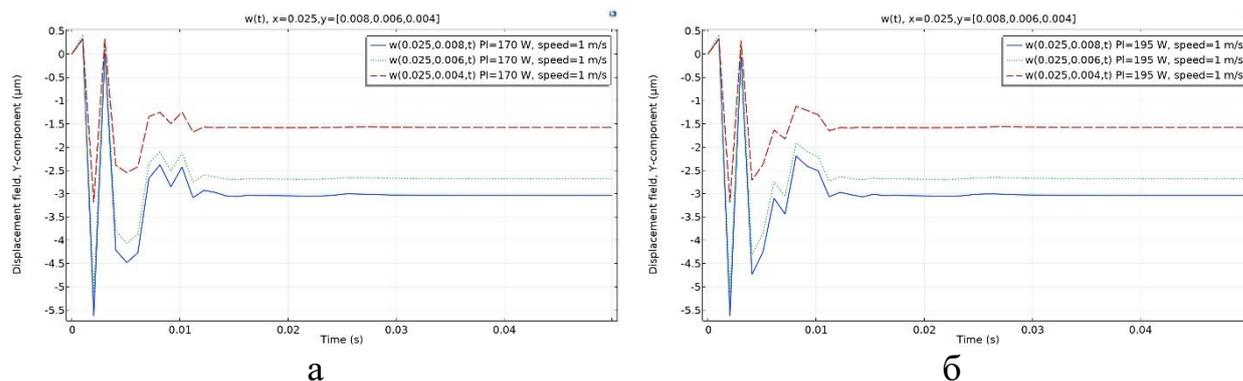


Рисунок 13. Графики  $w(t)$  при фиксированном  $x$  и различных  $y$ .

а. –  $P_l = 170$  [Вт]; б. –  $P_l = 195$  [Вт].

Анализ полученных графиков подтверждает, что изменение параметров лазерного источника существенно влияет на термомеханическое состояние материала. Оптимизация мощности лазера и скорости сканирования позволяет контролировать температурные градиенты и минимизировать остаточные напряжения, что играет ключевую роль в повышении качества изделий, полученных методом селективного лазерного плавления.

Результаты, полученные в ходе конечно-элементного моделирования, демонстрируют хорошую сходимость с аналитическими решениями, что свидетельствует о корректности используемой конечно-элементной модели при решении задач данного типа.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Проведено комплексное экспериментальное исследование механических свойств металлопорошковых образцов из стали РН1, изготовленных методом селективного лазерного плавления. Определены статические, динамические и ударные характеристики материала. Установлено снижение прочностных и усталостных характеристик по сравнению с литым аналогом, выявлены ключевые микроструктурные дефекты (поры, нерасплавленные включения), влияющие на прочность и разрушение материала.

2. Разработана аналитическая модель теплового воздействия подвижного лазерного источника на изотропную полуплоскость. Построены точные решения задачи нестационарного нагрева в рамках различных теорий теплопроводности (классическая, Грина–Нагди II типа, Максвелла–Каттанео). Установлено, что модель Максвелла–Каттанео наиболее адекватно описывает процесс теплопереноса при малых временах и может быть эффективно использована для моделирования SLM-процесса.

3. Решена задача термоупругости для определения напряженно-деформированного состояния полуплоскости, нагреваемой подвижным источником тепла. Построена математическая модель с использованием интегральных преобразований Лапласа и Фурье, получены аналитические выражения для распределений температур и напряжений. Разработан численно-

аналитический метод оценки технологических термонапряжений на основе принципа суперпозиции.

4. Разработан и реализован метод конечного-элементного моделирования процесса селективного лазерного плавления, учитывающий реальные физико-механические свойства материала и аналитически заданную модель подвижного теплового воздействия. Выполнена верификация результатов моделирования на основе экспериментальных данных.

## СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. **Orekhov A.A., Rabinskiy L.N., Tereshchenko T.S.** AlSi10Mg Alloy Samples Produced by Selective Laser Melting. *Russian Engineering Research*. 2024. Vol. 44, No. 3. P. 383–388. DOI: 10.3103/S1068798X24700023. EDN: KVRSES.

2. **Rabinskiy L.N., Orekhov A.A., Tereshchenko T.S.** Stress–Strain State of a Half-Space Induced by a Mobile Laser Source. *Russian Engineering Research*. 2024. Vol. 44, No. 5. P. 717–720. DOI: 10.3103/S1068798X2470093X. EDN: XWSDBU.

3. **Терещенко Т.С.** Динамический нагрев полуплоскости подвижным источником лазерного излучения с учётом теплоотдачи на поверхности. *Труды МАИ*. 2024. № 139. EDN: BXRWVH.

4. **Терещенко Т.С., Орехов А.А., Рабинский Л.Н.** Исследование статических и динамических физико-механических характеристик стали, изготовленной методом послойного лазерного спекания. *Труды МАИ*. 2025. № 140. EDN: SHCSDM.

5. **Орехов А.А., Терещенко Т.С.** Анализ распределения температуры в полупространстве при воздействии объемного источника тепла. *Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов: Материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 70-летию БелИИЖТа – БелГУТа*. Гомель: Белорусский государственный университет транспорта, 2023. С. 131. EDN SYETAN.

6. **Орехов А.А., Рабинский Л.Н., Терещенко Т.С.** Определение поля температур в полуплоскости при нестационарном воздействии теплового потока. В кн.: *Проблемы безопасности на транспорте: материалы XIII Международной научно-практической конференции*. Гомель: Белорусский государственный университет транспорта, 2024. С. 187. EDN: ISZVDA.

7. **Терещенко Т.С., Шумская С.А., Рабинский Л.Н.** Методы определения коэффициента теплового расширения в селективном лазерном плавлении. В кн.: *«Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А.Г. Горшкова: материалы XXXI международного симпозиума*. Кремёнки, 2025. С. 181. EDN: CNHZDY.

8. **Терещенко Т.С.** Экспериментальные исследования образцов, полученных по технологии послойного лазерного спекания (SLM). В кн.: *«От концепции к реализации - создание будущего через науку и практику»: сборник*

*статей по итогам Международной научно-практической конференции. Стерлитамак, 2025. С. 109–114. EDN: EZNZPM.*

9. **Терещенко Т.С.** Динамические испытания образцов, полученных по технологии послойного лазерного спекания (SLM). В кн.: *«Актуальные и перспективные научные исследования»: сборник статей VII Международной научно-практической конференции.* Пенза, 2025. С. 34–40.