

На правах рукописи

ЛАЙ ТХАНЬ ТУАН

**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ В
УПРУГИХ МОМЕНТНЫХ СРЕДАХ**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор,
Тарлаковский Дмитрий Валентинович

Официальные оппоненты: **Ерофеев Владимир Иванович,**
доктор физико-математических наук, профессор,
Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А.Благонравова РАН, заместитель директора.

Земсков Андрей Владимирович,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), доцент.

Ведущая организация: **Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (НИИ механики)**

Защита состоится «09» ноября 2012 г. в 14⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 в ФГБОУ ВПО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», по адресу: 125993, г.Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, дом 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВПО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Автореферат разослан «08» октября 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Федотенков Г.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. В настоящее время наиболее исследованными являются задачи о распространении нестационарных возмущений в классических упругих средах. При этом практически отсутствуют публикации по проблеме распространения нестационарных волн в упругих средах с учетом внутреннего момента количества движения (моментные среды). Наличие внутреннего момента количества движения связано с тем, что сплошная среда с микроскопической точки зрения состоит из частиц, обладающих согласованным моментом количества движения даже при нулевой макроскопической скорости. К таким средам относятся гранулированные среды, среды с гиромагнитными свойствами, магнитные жидкости, жидкие кристаллы и т.д. Поэтому исследование нестационарных процессов моментных сред представляет собой актуальную проблему.

Целью диссертационной работы является постановка и построение аналитических решений двумерных задач о распространении нестационарных осесимметричных граничных возмущений в «неклассической» упругой среде со сферическими границами, в качестве модели которой выбран один из вариантов несимметричной теории упругости – псевдоконтинуум Коссера.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем.

1. Получены решения новых нестационарных осесимметричных задач о распространении поверхностных возмущений со сферическими границами (пространство со сферической полостью и сплошной шар) и о дифракции волны расширения (плоской или сферической) на сферической полости в псевдоконтинууме Коссера;

2. Разработан и реализован алгоритм обращения преобразований Лапласа для коэффициентов рядов по полиномам Лежандра в полученных решениях.

Практическое значение работы. Полученные результаты обеспечивают возможность исследования поведения различных конструкций из композиционных материалов при действии на них нестационарных нагрузок, что особенно актуально при создании современных объектов авиационной и ракетно-космической техники.

Достоверность и обоснованность научных положений и полученных результатов подтверждается использованием законов и уравнений механики деформируемого твердого тела, применением для решения начально-краевых задач строгих математических методов, а также сравнением результатов с известными решениями для частных случаев.

Апробация работы и публикации. Результаты диссертационной работы докладывались на

- Международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Ярополец, Московская обл., 2011, 2012 г.г.);

- Всероссийской конференции «Механика наноструктурированных материалов и систем» (Москва, Ленинградский проспект, 7, 13 – 15 декабря 2011 года);

- Московской молодежной научно-практической конференции «Инновация в авиации и космонавтике» (Москва, МАИ, 17 – 20 апреля 2012 г.);

- Ломоносовских чтениях. Подсекции: Механика деформируемого твердого тела. (Москва, МГУ, 16 – 20 апреля 2012 г.).

Основные результаты диссертации опубликованы в девяти печатных работах, в том числе в двух статьях в журналах, рекомендованных ВАК РФ.

Объем и структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и содержит 111 страниц. Список используемой литературы включает 110 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность научных исследований, изложенных в диссертации, а также сформулированы цель и задачи, определена научная новизна, практическая и теоретическая ценность диссертационной работы.

В первой главе приведен обзор литературы, определена проблема получения аналитического решения нестационарных задач механики деформируемого твердого тела. Отмечено, что наибольшее развитие общей теории несимметричной упругости получили в конце 50-х – 70-х годов прошлого столетия В. Новицкий, В.Т. Костер, Э.Л. Аэрб и Е.В. Кувшинский, Р.Д. Миндлин и Г.Ф. Тирстен, Р.А. Тупин, И.А. Кунин, В.А.Пальмов, А.И. Лурье и др. Современные исследования задач моментных сред принадлежат следующим авторам: С.М. Белоносову, Г.Л. Бровко, Г.А. Ванину, В.И. Ерофееву, В.В. Корепанову, М.А. Кулешу, В.П. Матвеевко, Б.Е. Победре, А.Г. Угодчикову, Kumar Rajneesh, Liu Jun, Nistor I., Suiker A.S.J. Некоторые нестационарные задачи для моментных сред исследованы в работах А.А. Саркисяна, Birsan Mircea, Gheorghita Vitali, Han S.Y.

Здесь же приведена полная система уравнений несимметричной теории упругости, в которую входят линейные векторные уравнения движения в перемещениях, геометрические и физические соотношения. Сформулированы начальные и основные граничные условия для среды Коссера и псевдоконтинуума Коссера. С использованием представления полей перемещения и угла поворота в виде потенциальной и соленоидальной частей записана система уравнений движения относительно скалярных и векторных потенциалов.

Получены безразмерные уравнения осесимметричного движения относительно скалярного потенциала φ и ненулевой компоненты векторного потенциала ψ для псевдоконтинуума Коссера в сферической системе координат r, θ, ϑ ($r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \vartheta < 2\pi$):

$$\ddot{\phi} = \Delta\phi, \quad \Delta = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]; \quad (1)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1-\kappa}{2} \Delta_1 \psi - \frac{\eta+\xi}{4} \Delta_1 \Delta_1 \psi = 0, \quad \Delta_1 = \Delta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta},$$

а также соответствующие геометрические и физические соотношения:

$$u_r = w = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \psi \operatorname{ctg} \theta \right), \quad u_\theta = v = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \psi \right) - \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad u_\vartheta \equiv 0;$$

$$\omega_\vartheta = \omega = \frac{1}{2r} \left[\frac{\partial(rv)}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right], \quad \omega_\theta = \omega_r \equiv 0; \quad \gamma_{rr} = \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \omega,$$

$$\gamma_{\theta r} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) + \omega, \quad \gamma_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \quad \gamma_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} (w + v \operatorname{ctg} \theta); \quad (2)$$

$$\chi_{r\vartheta} = \frac{\partial \omega}{\partial r}, \quad \chi_{\vartheta r} = -\frac{\omega}{r}, \quad \chi_{\theta\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta}, \quad \chi_{\vartheta\theta} = -\frac{\omega}{r} \operatorname{ctg} \theta,$$

$$\gamma_{r\vartheta} = \gamma_{\vartheta r} = \gamma_{\theta\vartheta} = \gamma_{\vartheta\theta} \equiv 0; \quad \chi_{rr} = \chi_{\vartheta\vartheta} = \chi_{\theta\theta} = \chi_{r\theta} = \chi_{\theta r} \equiv 0;$$

$$\mu_{r\vartheta} = \xi_+ \chi_{r\vartheta} + \xi_- \chi_{\vartheta r}, \quad \mu_{\vartheta r} = \xi_+ \chi_{\vartheta r} + \xi_- \chi_{r\vartheta}, \quad \mu_{\theta\vartheta} = \xi_+ \chi_{\theta\vartheta} + \xi_- \chi_{\vartheta\theta},$$

$$\mu_{\vartheta\theta} = \xi_+ \chi_{\vartheta\theta} + \xi_- \chi_{\theta\vartheta}, \quad \xi_+ = \eta + \xi, \quad \xi_- = \eta - \xi;$$

$$\sigma_{rr} = \gamma_{rr} + \kappa \gamma_{\theta\theta}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \gamma_{\theta\theta} + \kappa \gamma_{rr}, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \kappa (\gamma_{rr} + \gamma_{\theta\theta}), \quad (3)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{(r\theta)} + \sigma_{[r\theta]} = \frac{1-\kappa}{2} (\gamma_{r\theta} + \gamma_{\theta r}) + \sigma_{[r\theta]}, \quad \sigma_{\theta r} = \frac{1-\kappa}{2} (\gamma_{r\theta} + \gamma_{\theta r}) - \sigma_{[r\theta]},$$

$$\sigma_{[r\theta]} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mu_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \mu_{\theta\vartheta}}{\partial \theta} + 2\mu_{r\vartheta} + \mu_{\vartheta r} + (\mu_{\theta\vartheta} + \mu_{\vartheta\theta}) \operatorname{ctg} \theta \right] \right\}.$$

где Δ - оператор Лапласа; κ , η , ξ - безразмерные параметры, связанные с физическими характеристиками среды; u_i и ω_i ($i = r, \theta, \vartheta$) - физические компоненты векторов перемещения \mathbf{u} и поворота $\mathbf{\omega}$; γ_{ij} , χ_{ij} , μ_{ij} и σ_{ij} ($i, j = r, \theta, \vartheta$) - физические компоненты тензоров деформаций $\boldsymbol{\gamma}$, изгиба-кручения $\boldsymbol{\chi}$, моментных напряжений $\boldsymbol{\mu}$ и напряжений $\boldsymbol{\sigma}$.

Рассмотрены два типа волн растяжения-сжатия, распространяющиеся в бесконечном псевдоконтинууме Коссера: плоские и сферические. Показано, что для каждого из них потенциал перемещений есть суперпозиция двух волн: прямой (расходящейся) и обратной (сходящейся), распространяющихся со скоростью, равной единице.

Во второй главе построено решение осесимметричной задачи о распространении нестационарных возмущений от сферической полости в псевдоконтинууме Коссера. На поверхности полости $r = 1$ задано нормальное перемещение, а касательное перемещение и вращение отсутствуют:

$$w|_{r=1} = w_0(\theta, \tau), \quad v|_{r=1} = 0, \quad \omega|_{r=1} = 0. \quad (4)$$

В начальный момент времени среда находится в покое, что соответствует однородным начальным условиям. На бесконечности возмущения отсутствуют.

Для решения задачи используется метод неполного разделения переменных, который заключается в представлении потенциалов и компонент напряженно-деформированного состояния среды, а также правых частей граничных условий в ряды по многочленам Лежандра $P_n(\cos\theta)$ и Гегенбауэра $C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta)$. В результате приходим к начально-краевым задачам

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_n &= \Delta_n \varphi_n \quad (n \geq 0), \quad \ddot{\psi}_n = \frac{1-\kappa}{2} \Delta_n \psi_n - \frac{1}{4}(\eta + \xi) \Delta_n^2 \psi_n \quad (n \geq 1); \\ w_n|_{r=1} &= w_{0n}(\tau), \quad v_n|_{r=1} = 0, \quad \omega_n|_{r=1} = 0; \\ \varphi_n|_{\tau=0} &= \psi_n|_{\tau=0} = \dot{\varphi}_n|_{\tau=0} = \dot{\psi}_n|_{\tau=0} = 0; \quad \Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

и соответствующим геометрическим и физическим соотношениям относительно коэффициентов рядов.

Для решения задач (5) используется преобразование Лапласа по времени (s - параметр, индекс « L » соответствует изображению):

$$\begin{aligned} \Delta_n \varphi_n^L(r, s) - s^2 \varphi_n^L(r, s) &= 0 \quad (n \geq 0); \\ (\eta + \xi) \Delta_n^2 \psi_n^L(r, s) - 2(1-\kappa) \Delta_n \psi_n^L(r, s) + 4s^2 \psi_n^L(r, s) &= 0 \quad (n \geq 1). \end{aligned} \quad (6)$$

Общее решение уравнений (6) с учетом ограничения решений в бесконечности записывается в виде:

$$\varphi_n^L(r, s) = r^{-1/2} C_{n1}^{(1)}(s) K_{n+1/2}(rs), \quad \psi_n^L(r, s) = r^{-1/2} \sum_{m=1}^2 C_{nm}^{(2)}(s) K_{n+1/2}(r\sqrt{\lambda_m}), \quad (7)$$

где $C_{n1}^{(1)}(s)$ и $C_{nm}^{(2)}(s)$ ($m = 1, 2$) - постоянные интегрирования; $K_\nu(z)$ - модифицированные функции Бесселя порядка ν второго рода; $\lambda_{1,2}$ - корни характери-

стического уравнения, которое получается при подстановке $\Delta_n \psi_n^L(r, s) = \lambda \psi_n^L(r, s)$ во второе уравнение в (6).

Используя связь модифицированных функций Бесселя полуцелого индекса с элементарными функциями, получаем изображения коэффициентов рядов для потенциалов перемещений ($A_n^L(s)$, $B_{nm}^L(s)$ - новые произвольные функции):

$$\varphi_n^L(r, s) = \frac{1}{r^{n+1}} A_n^L(s) R_{n0}(rs) e^{-(r-1)s}, \psi_n^L(r, s) = \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=1}^2 B_{nm}^L(s) R_{n0}(r\sqrt{\lambda_m}) e^{-(r-1)\sqrt{\lambda_m}}, \quad (8)$$

где

$$R_{n0}(z) = \sum_{k=0}^n A_{nk} z^{n-k}, \quad A_{nk} = \frac{(n+k)!}{(n-k)! k! 2^k} \quad (0 \leq k \leq n); \quad A_{nk} = 0 \quad (k < 0, \quad k > n).$$

Постановка (8) в преобразованные по Лапласу геометрические соотношения относительно коэффициентов рядов приводит к следующим выражениям для изображений коэффициентов рядов для перемещений и угла поворота:

$$\begin{aligned} w_n^L(r, s) &= -\frac{1}{r^{n+2}} \left[A_n^L(s) R_{n1}(rs) e^{-(r-1)s} + n(n+1) \sum_{m=1}^2 B_{nm}^L(s) R_{n0}(r\sqrt{\lambda_m}) e^{-(r-1)\sqrt{\lambda_m}} \right], \\ v_n^L(r, s) &= \frac{1}{r^{n+2}} \left[A_n^L(s) R_{n0}(rs) e^{-(r-1)s} + \sum_{m=1}^2 B_{nm}^L(s) R_{n3}(r\sqrt{\lambda_m}) e^{-(r-1)\sqrt{\lambda_m}} \right], \\ \omega_n^L(r, s) &= -\frac{1}{2r^{n+3}} \left[\sum_{m=1}^2 B_{nm}^L(s) Q_n(r\sqrt{\lambda_m}) e^{-(r-1)\sqrt{\lambda_m}} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} R_{n1}(z) &= R_{n+1,0}(z) - nR_{n0}(z) = \sum_{k=0}^{n+1} B_{nk} z^{n+1-k}, \quad B_{nk} = A_{n+1,k} - nA_{n,k-1}, \\ R_{n2}(z) &= R_{n+2,0}(z) - (2n+1)R_{n+1,0}(z) + n(n-1)R_{n0}(z), \\ R_{n3}(z) &= R_{n+1,0}(z) - (n+1)R_{n0}(z) = \sum_{k=0}^{n+1} C_{nk} z^{n+1-k}, \quad C_{nk} = A_{n+1,k} - (n+1)A_{n,k-1}, \\ Q_n(z) &= R_{n+2,0}(z) - (2n+3)R_{n+1,0}(z) = \sum_{k=0}^{n+2} D_{nk} z^{n+2-k}, \quad D_{nk} = A_{n+2,k} - (2n+3)A_{n+1,k-1}. \end{aligned}$$

Используя эти соотношения и преобразованные по Лапласу граничные условия (5), получаем следующие представления изображений коэффициентов рядов для перемещений и угла поворота (для краткости приведена формула только для нормального перемещения):

$$w_n^L(r, s) = \frac{w_{n0}^L(s)}{r^{n+2}} \left[W_{n0}^L(r, s) e^{-(r-1)s} + n(n+1) \sum_{j=1}^2 W_{nj}^L(r, s) e^{-(r-1)\sqrt{\lambda_j}} \right]. \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} X_n(s) W_{n0}^L(r, s) &= -R_{n1}(rs) S_{n1}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}), \quad X_n(s) W_{n1}^L(r, s) = R_{n0}(r\sqrt{\lambda_1}) S_{n2}(s, \sqrt{\lambda_2}), \\ X_n(s) &= -R_{n1}(s) S_{n1}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) + n(n+1) R_{n0}(s) \left[S_{n2}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) - S_{n2}(\sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_1}) \right], \\ S_{n1}(x, y) &= R_{n3}(x) Q_n(y) - R_{n3}(y) Q_n(x), \quad S_{n2}(x, y) = R_{n0}(x) Q_n(y). \end{aligned}$$

Формулы для функций $W_{n2}^L(r, s)$ получаются из соответствующего равенства для $W_{n1}^L(r, s)$ с помощью умножения на (-1) и перемены местами λ_1 и λ_2 .

Структура изображений (10) не позволяет найти оригиналы аналитически ввиду наличия в них слагаемых, содержащих радикалы $\sqrt{\lambda_{1,2}}$. Поэтому строится асимптотика решений в окрестности начального момента времени, что соответствует разложениям изображений в ряды Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. В результате приходим к разложениям всех слагаемых изображений коэффициентов рядов для перемещений и угла поворота. Например, для нормального перемещения они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} W_{n0}^L(r, s) e^{-(r-1)s} &= e^{-(r-1)s} \sum_{m=0}^{\infty} w_{n0m}(r) s^{-m/2}, \quad W_{n1}^L(r, s) e^{-(r-1)\sqrt{\lambda_1}} = e^{-(r-1)\beta_0\sqrt{s}} \sum_{m=3}^{\infty} w_{n1m}(r) s^{-m/2}, \\ W_{n2}^L(r, s) e^{-(r-1)\sqrt{\lambda_2}} &= e^{-(r-1)\bar{\beta}_0\sqrt{s}} \sum_{m=3}^{\infty} \bar{w}_{n1m}(r) s^{-m/2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Оригиналы коэффициентов рядов (11) находятся с помощью теорем операционного исчисления и следующих табличных соотношений:

$$\begin{aligned} e^{-ks} s^{-\mu} &\doteq \frac{(\tau - k)_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \quad (\mu > 0); \\ e^{-a\sqrt{s}} s^{-m/2} &\doteq \frac{\tau_+^{m/2-1}}{\sqrt{2^{1-m}} \pi} e^{-\frac{a^2}{8\tau}} D_{1-m} \left(\frac{a}{\sqrt{2\tau}} \right) \quad (m = 0, 1, 2, \dots; \operatorname{Re} a \geq 0), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\Gamma(\mu)$ - гамма-функция; $D_\nu(x)$ - функция параболического цилиндра; $x_+^\alpha = x^\alpha H(x)$; $H(x)$ - функция Хевисайда.

Приведен пример расчетов. В качестве материала, заполняющего пространство выбран зернистый композит из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице

($\lambda = 7.59$ ГПа, $\mu = 1.89$ ГПа, $\gamma + \varepsilon = 2.64$ кН), что соответствует безразмерным параметрам $\kappa = 0.67$, $\eta + \xi = 0.00232$. На поверхности полости заданы перемещения следующего вида:

$$w_0(\theta, \tau) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)H(\tau). \quad (13)$$

На рисунках 1 – 2 изображены графики нормального перемещения $w(r, \theta, \tau)$ в зависимости от времени на расстояниях $r = 1.01$, $r = 1.03$, $r = 1.05$ и $r = 1.08$ от центра полости при значениях угла $\theta = 0$, $\theta = \pi/4$. Все графики построены для четырех членов степенных рядов. При учете еще одного члена результаты практически совпадают.

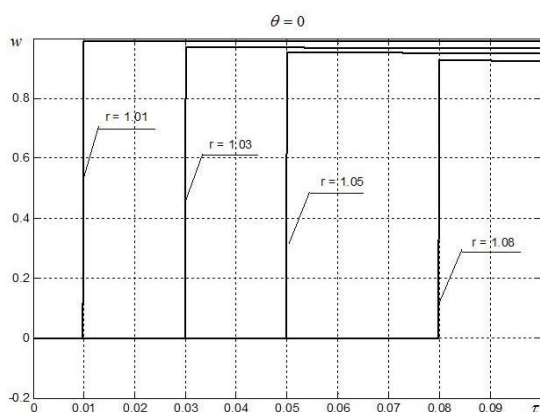


Рис. 1

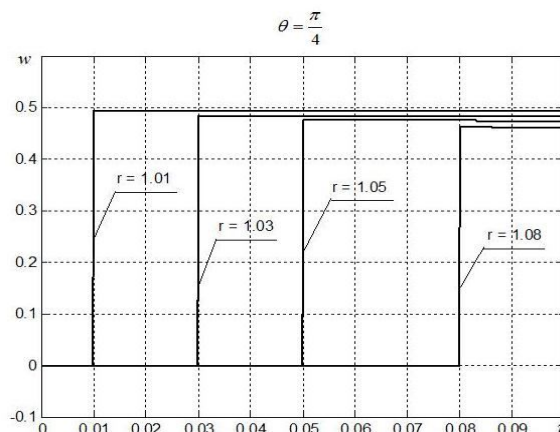


Рис. 2

Во третьей главе решается задача о дифракции нестационарных волн на сферической полости в псевдоконтинууме Коссера. На сферическую полость набегают волна расширения-сжатия одного из двух типов: плоская или сферическая (рис. 3).

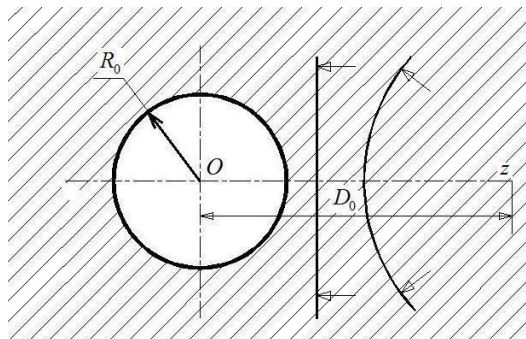


Рис. 3

Соответствующие потенциалы набегающей волны в безразмерном виде записываются так (индекс «0» соответствует набегающей волне):

$$\begin{aligned}\varphi_0(r, \theta, \tau) &= f(\tau + r \cos \theta - 1)H(\tau + r \cos \theta - 1), \\ \varphi_0(r, \theta, \tau) &= \frac{d_0 - 1}{l} f(\tau + d_0 - 1 - l)H(\tau + d_0 - 1 - l),\end{aligned}\tag{14}$$

где $l = \sqrt{r^2 + d_0^2 - 2rd_0 \cos \theta}$; $d_0 = D_0/R_0$; $f(\tau)$ - произвольная функция, задающая закон изменения потенциала во времени.

Предполагается, что начальные условия однородные, на бесконечности возмущения отсутствуют, а поверхность полости $r = 1$ свободна от напряжений при наличии стесненности поворотов, что соответствует следующим граничным условиям:

$$\sigma_{rr}|_{r=1} + \sigma_{r\theta}|_{r=1} = 0, \quad \sigma_{r\theta}|_{r=1} + \sigma_{r\theta\theta}|_{r=1} = 0, \quad \omega|_{r=1} = 0.\tag{15}$$

Используя метод неполного разделения переменных, преобразование Лапласа по времени для коэффициентов рядов по полиномам Лежандра и Гегенбауэра, а также физические соотношения относительно коэффициентов рядов для компонентов возмущенного состояния. В частности, для напряжений они записываются так:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^L(r, s) &= \frac{1}{r^{n+3}} \left[P_{n1}(rs) A_n^L(s) e^{-(r-1)s} + n(n+1) \sum_{i=1}^2 P_{n2}(r\sqrt{\lambda_i}) B_{ni}^L(s) e^{-(r-1)\sqrt{\lambda_i}} \right], \\ \sigma_{r\theta}^L(r, s) &= -\frac{1}{r^{n+3}} \left[P_{n2}(rs) A_n^L(s) e^{-(r-1)s} + \sum_{i=1}^2 P_{n3}(r\sqrt{\lambda_i}) B_{ni}^L(s) e^{-(r-1)\sqrt{\lambda_i}} \right],\end{aligned}\tag{16}$$

где

$$\begin{aligned}P_{n1}(z) &= \sum_{k=0}^{n+2} E_{nk} z^{n+2-k}, \quad P_{n2}(z) = \sum_{k=0}^{n+1} F_{nk} z^{n+1-k}, \quad P_{n3}(z) = \sum_{k=0}^{n+4} G_{nk} z^{n+4-k}; \\ E_{nk} &= A_{n+2,k} - (2n + 2\kappa + 1) A_{n+1,k-1} + n(n+1)(1-\kappa) A_{n,k-2}, \\ F_{nk} &= (1-\kappa) [A_{n+1,k} - (n-1) A_{n,k-1}], \quad G_{nk} = -\frac{(\eta + \xi)}{4r^2} A_{n+4,k} + (2n+5) \frac{(\eta + \xi)}{2r^2} A_{n+3,k-1} + \\ &+ \left[\frac{1-\kappa}{2} - (2n+5)(2n+3) \frac{\eta + \xi}{4r^2} \right] A_{n+2,k-2} + (2n+1) \frac{\kappa-1}{2} A_{n+1,k-3} + (n^2-1)(1-\kappa) A_{n,k-4}.\end{aligned}$$

При этом функции $\sigma_{rr0n}^L(r, s)$ и $\sigma_{r\theta0n}^L(r, s)$ находятся с помощью выражений (14), геометрических и физических соотношений.

Удовлетворение граничным условиям приводит к следующим окончательным выражениям для изображений коэффициентов рядов для перемещений, угла поворота и напряжений (здесь указаны только нормальные напряжения):

$$\sigma_{rrn}^L(r, s) = \frac{1}{r^{n+3}} \left[H_{n0}^L(r, s) e^{-(r-1)s} + n(n+1) \sum_{m=1}^2 H_{nm}^L(r, s) e^{-(r-1)\sqrt{\lambda_m}} \right], \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} H_{n0}^L(r, s) &= P_{n1}(rs) A_n^L(s), \quad H_{nm}^L(r, s) = P_{n2}(r\sqrt{\lambda_m}) B_{nm}^L(s); \\ A_n^L(s) Z_n(s) &= \Pi_{rr0n}^L(s) Y_{n1}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) + n(n+1) \Pi_{r\theta0n}^L(s) Y_{n2}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}), \\ B_{n1}^L(s) Z_n(s) &= \Pi_{rr0n}^L(s) Y_{n3}(s, \sqrt{\lambda_2}) + \Pi_{r\theta0n}^L(s) Y_{n4}(s, \sqrt{\lambda_2}), \\ B_{n2}^L(s) Z_n(s) &= - \left[\Pi_{rr0n}^L(s) Y_{n3}(s, \sqrt{\lambda_1}) + \Pi_{r\theta0n}^L(s) Y_{n4}(s, \sqrt{\lambda_1}) \right]; \\ Y_{n1}(x, y) &= Q_n(x) P_{n3}(y) - Q_n(y) P_{n3}(x), \quad Y_{n3}(x, y) = P_{n2}(x) Q_n(y), \\ Y_{n2}(x, y) &= Q_n(x) P_{n2}(y) - Q_n(y) P_{n2}(x), \quad Y_{n4}(x, y) = P_{n1}(x) Q_n(y), \\ Z_n(s) &= P_{n1}(s) Y_{n1}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) - n(n+1) P_{n2}(s) Y_{n2}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}); \\ \Pi_{rr0n}^L &= \Pi_{rr0n}^L(s) = -f^L(s) \Gamma_\xi \left[P_{n1}(-s) - e^{-2s} P_{n1}(s) \right], \\ \Pi_{r\theta0n}^L &= \Pi_{r\theta0n}^L(s) = f^L(s) \Gamma_\xi \left[P_{n2}(-s) - e^{-2s} P_{n2}(s) \right]; \\ \Gamma_1 &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{(-1)^n}{s^{n+1}}, \quad \Gamma_2 = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{(-1)^n (d_0 - 1) R_{n0}(d_0 s)}{s^{2n+1} d_0^n}. \end{aligned}$$

Структура изображений (17) не позволяет найти оригиналы аналитически. Поэтому аналогично главе 2 строится асимптотика решений в окрестности начального момента времени. Окончательно получаем выражения для всех слагаемых изображений коэффициентов рядов для напряжений и угла поворота (здесь приведено только нормальное напряжение):

$$\begin{aligned} H_{n0}^L(r, s) e^{-(r-1)s} &= e^{-(r-1)s} \left[\Pi_{rr0n}^L(s) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sigma_{n0m}^{rr1}(r)}{s^{m/2}} + n(n+1) \Pi_{r\theta0n}^L(s) \sum_{m=3}^{\infty} \frac{\sigma_{n0m}^{rr2}(r)}{s^{m/2}} \right], \\ H_{n1}^L(r, s) e^{-(r-1)\sqrt{\lambda_1}} &= e^{-(r-1)\beta_0\sqrt{s}} \left[\Pi_{rr0n}^L(s) \sum_{m=5}^{\infty} \frac{\sigma_{n1m}^{rr1}(r)}{s^{m/2}} + \Pi_{r\theta0n}^L(s) \sum_{m=3}^{\infty} \frac{\sigma_{n1m}^{rr2}(r)}{s^{m/2}} \right], \\ H_{n2}^L(r, s) e^{-(r-1)\sqrt{\lambda_2}} &= -e^{-(r-1)\bar{\beta}_0\sqrt{s}} \left[\Pi_{rr0n}^L(s) \sum_{m=5}^{\infty} \frac{\bar{\sigma}_{n1m}^{rr1}(r)}{s^{m/2}} + \Pi_{r\theta0n}^L(s) \sum_{m=3}^{\infty} \frac{\bar{\sigma}_{n1m}^{rr2}(r)}{s^{m/2}} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Оригиналы коэффициентов рядов в (18) находятся с помощью теорем операционного исчисления и формул (12).

Приведены примеры расчетов для указанного выше материала в случае плоской волны. Функция, задающая закон изменения потенциала во времени принимается в виде $f(\tau) = \tau_+^2/2$, что соответствует равенству единице нормальных напряжений на фронте волны в момент $\tau = 0$ ее касания поверхности полости:

На рис. 4 – 5 изображены графики радиального напряжения $\sigma_{rr}(r, \theta, \tau)$ в зависимости от времени на расстояниях $r = 1.01, r = 1.03, r = 1.05, r = 1.08$ от центра полости при значениях $\theta = 0, \theta = \pi/2$. Все графики соответствуют девяти членам степенных рядов и $n = 4$.

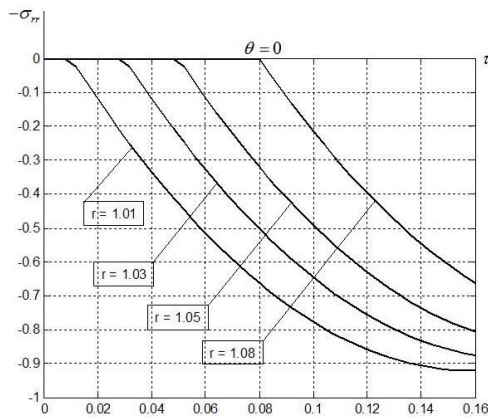


Рис. 4

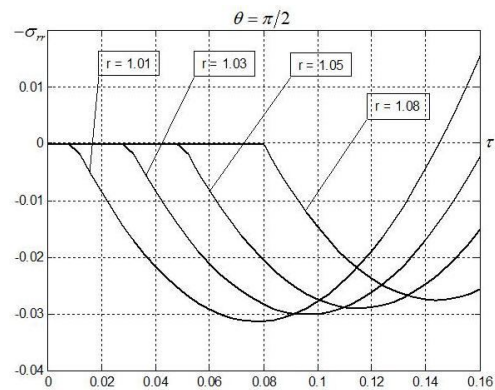


Рис. 5

В четвертой главе дано решение задачи о распространении нестационарных возмущений от границы сплошного шара. На поверхности шара заданы граничные условия (4). Начальные условия являются нулевыми. Предполагается, что все компоненты напряженно-деформированного состояния ограничены.

Общее решение системы уравнений (6) с учетом ограничения решения в центре шара имеет следующий вид:

$$\varphi_n^L(r, s) = r^{-1/2} C_{n2}^{(1)}(s) I_{n+1/2}(rs), \quad \psi_n^L(r, s) = r^{-1/2} \sum_{j=1}^2 C_{n,j+2}^{(2)} I_{n+1/2}(r\sqrt{\lambda_j}), \quad (19)$$

где $I_\nu(z)$ - модифицированные функции Бесселя порядка ν первого рода, а $\lambda_{1,2}$ - корни указанного в главе 2 характеристического уравнения.

Используя связь $I_{n+1/2}(z)$ с элементарными функциями, получаем изображения коэффициентов рядов для потенциалов перемещений:

$$\begin{aligned}\varphi_n^L(r, s) &= \frac{1}{r^{n+1}} A_n^L(s) \left[R_{n0}(-rs) e^{rs} - R_{n0}(rs) e^{-rs} \right], \\ \psi_n^L(r, s) &= \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{j=1}^2 B_{nj}^L(s) \left[R_{n0}(-r\sqrt{\lambda_j}) e^{r\sqrt{\lambda_j}} - R_{n0}(r\sqrt{\lambda_j}) e^{-r\sqrt{\lambda_j}} \right].\end{aligned}\quad (20)$$

Аналогичные главе 2 преобразования приводят следующим окончательным выражениям для изображений коэффициентов рядов для компонентов напряженно-деформированного состояния (указано только нормальное перемещение):

$$w_n^L(r, s) = \frac{w_{0n}^L(s)}{r^{n+2}} \left[W_{n0}^L(r, s) + n(n+1) \sum_{j=1}^2 W_{nj}^L(r, s) \right]. \quad (21)$$

Здесь

$$\begin{aligned}W_{n0}^L(r, s) &= -\xi_0^{\frac{1-r}{2}} \frac{G_{n1}(rs) U_{n1}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2})}{Z_n(s)}, \quad W_{n1}^L(r, s) = \xi_1^{\frac{1-r}{2}} \frac{G_{n0}(r\sqrt{\lambda_1}) U_{n2}(s, \sqrt{\lambda_2})}{Z_n(s)}, \\ W_{n2}^L(r, s) &= -\xi_2^{\frac{1-r}{2}} \frac{G_{n0}(r\sqrt{\lambda_2}) U_{n2}(s, \sqrt{\lambda_1})}{Z_n(s)}; \quad \xi_0 = e^{-2s}, \quad \xi_1 = e^{-2\sqrt{\lambda_1}}, \quad \xi_2 = e^{-2\sqrt{\lambda_2}};\end{aligned}\quad (22)$$

$$\begin{aligned}U_{n1}(x, y) &= G_{n2}(x) G_{n3}(y) - G_{n2}(y) G_{n3}(x), \quad U_{n2}(x, y) = G_{n0}(x) G_{n3}(y), \\ Z_n(s) &= -G_{n1}(s) U_{n1}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) + n(n+1) G_{n0}(s) \left[U_{n2}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) - U_{n2}(\sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_1}) \right]; \\ G_{n0}(z) &= R_{n0}(-z) - R_{n0}(z) e^{-2z}, \quad G_{n1}(z) = R_{n1}(-z) - R_{n1}(z) e^{-2z}, \\ G_{n2}(z) &= R_{n3}(-z) - R_{n3}(z) e^{-2z}, \quad G_{n3}(z) = Q_n(-z) - Q_n(z) e^{-2z}.\end{aligned}$$

Для построения оригиналов решения аналогично главам 2, 3 представляем изображения в виде рядов по степеням $s^{-1/2}$ в окрестности бесконечно удаленной точки.

Для этого используется следующее разложение функции $[Z_n(s)]^{-1}$:

$$-\frac{1}{Z_n(s)} = \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_0+k_1+\dots \\ \dots+k_6=K}} (K; k_0, k_1, \dots, k_6) \frac{d_0^{k_0} d_1^{k_1} \dots d_6^{k_6}}{d^{K+1}} \xi_0^{k_0+k_3+k_4+k_6} \xi_1^{k_1+k_3+k_5+k_6} \xi_2^{k_2+k_4+k_5+k_6}. \quad (23)$$

Здесь величины d и d_i ($i = \overline{0,6}$) есть определители третьего порядка:

$$\begin{aligned}
d &= \Delta(-s, -\sqrt{\lambda_1}, -\sqrt{\lambda_2}), & d_0 &= \Delta(s, -\sqrt{\lambda_1}, -\sqrt{\lambda_2}), & d_1 &= \Delta(-s, \sqrt{\lambda_1}, -\sqrt{\lambda_2}), \\
d_2 &= \Delta(-s, -\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}), & d_3 &= -\Delta(s, \sqrt{\lambda_1}, -\sqrt{\lambda_2}), & d_4 &= -\Delta(s, -\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}), \\
d_5 &= -\Delta(-s, \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}), & d_6 &= \Delta(s, \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}),
\end{aligned}$$

$$\Delta(x, y, z) = \begin{vmatrix} R_{n1}(x) & n(n+1)R_{n0}(y) & n(n+1)R_{n0}(z) \\ R_{n0}(x) & R_{n3}(y) & R_{n3}(z) \\ 0 & Q_n(y) & Q_n(z) \end{vmatrix},$$

$a(K; k_0, k_1, \dots, k_6) = K! / (k_1! k_2! \dots k_6!)$ - мультииндекс.

Учитывая правила действий со степенными рядами, для степеней величины d и d_i ($i = \overline{0,6}$) получаем:

$$d_i^{k_i} = s^{k_i(2n+3)} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{im} s^{-m/2}, \quad d^{K+1} = s^{(K+1)(2n+3)} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{nm} s^{-m/2}. \quad (24)$$

Отсюда находим изображения всех слагаемых для изображений коэффициентов рядов для перемещений и угла поворота (приведено только первое слагаемое для нормального перемещения в (21)):

$$\begin{aligned}
W_{n0}^L(r, s) &= \frac{U_{n1}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) G_{n1}(rs)}{s^{2n+3}} \times \\
&\times \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_0+\dots \\ +k_6=K}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_n(k_0 \dots k_6)}{s^{m/2}} \xi_0^{H_{0(k_0 \dots k_6)}} \xi_1^{T_{01(k_0 \dots k_6)}} \xi_2^{T_{02(k_0 \dots k_6)}}. \quad (25)
\end{aligned}$$

Здесь

$$U_{n1}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) G_{n1}(rs) = s^{(4n+5)/2} \sum_{i=0}^7 \left[e^{-N_{0i}^{(w)} s} e^{-M_{0i}^{(w)} \sqrt{s}} \sum_{m=0}^{\infty} f_{inm}^{(0)}(r) s^{-m/2} \right],$$

$$\begin{aligned}
N_{00}^{(w)} &= N_{02}^{(w)} = N_{04}^{(w)} = N_{06}^{(w)} = 0, & N_{01}^{(w)} &= N_{03}^{(w)} = N_{05}^{(w)} = N_{07}^{(w)} = 2r, & M_{00}^{(w)} &= M_{01}^{(w)} = 0 \\
M_{02}^{(w)} &= M_{03}^{(w)} = 2\beta_0, & M_{04}^{(w)} &= M_{05}^{(w)} = 2\overline{\beta_0}, & M_{06}^{(w)} &= M_{07}^{(w)} = 2(\beta_0 + \overline{\beta_0});
\end{aligned}$$

$$H_{0(k_0 \dots k_6)} = k_0 + k_3 + k_4 + k_6 + (1-r)/2,$$

$$T_{01(k_0 \dots k_6)} = T_{21(k_0 \dots k_6)} = k_1 + k_3 + k_5 + k_6, \quad T_{02(k_0 \dots k_6)} = T_{12(k_0 \dots k_6)} = k_2 + k_4 + k_5 + k_6,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_n(k_0 \dots k_6) m}{s^{m/2}} = (K; k_0, \dots, k_6) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_{0nm}}{s^{m/2}} \times \dots \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_{6nm}}{s^{m/2}} \Big/ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_{nm}}{s^{m/2}}.$$

При этом экспонентная часть в (25) записывается в таком виде ($\alpha = \overline{0,2}$):

$$\xi_0^{H_{\alpha}(k_0 \dots k_6)} \xi_1^{T_{\alpha 1}(k_0 \dots k_6)} \xi_2^{T_{\alpha 2}(k_0 \dots k_6)} = e^{-2H_{\alpha}(k_0 \dots k_6)s} e^{-2L_{\alpha}(k_0 \dots k_6)\sqrt{s}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_{\alpha}(k_0 \dots k_6)m}{s^{m/2}},$$

$$L_{\alpha}(k_0 \dots k_6) = T_{\alpha 1}(k_0 \dots k_6)\beta_0 + T_{\alpha 2}(k_0 \dots k_6)\bar{\beta}_0,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_{\alpha}(k_0 \dots k_6)m}{s^{m/2}} = \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m \left[-2T_{\alpha 1}(k_0 \dots k_6) \right]}{s^{m/2}} \right\} \times \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{A}_m \left[-2T_{\alpha 2}(k_0 \dots k_6) \right]}{s^{m/2}} \right\}.$$

Окончательно получаем выражения для всех слагаемых в изображениях коэффициентов рядов для перемещений и угла поворота. Например, первое слагаемое для нормального перемещения имеет вид:

$$W_{n0}^L(r, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{i=0}^7 \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_0 + \dots \\ + k_6 = K}} e^{-\lambda_{0i}^{(w)}(k_0 \dots k_6)s} e^{-\kappa_{0i}^{(w)}(k_0 \dots k_6)\sqrt{s}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w_{n0i}(k_0 \dots k_6)m(r)}{s^{m/2}}, \quad (26)$$

где

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{w_{n0i}(k_0 \dots k_6)m(r)}{s^{m/2}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_n(k_0 \dots k_6)m}{s^{m/2}} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_0(k_0 \dots k_6)m}{s^{m/2}} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f_{inm}^{(0)}}{s^{m/2}},$$

$$\lambda_{0i}^{(w)}(k_0 \dots k_6) = N_{0i}^{(w)} + 2H_{0i}(k_0 \dots k_6), \quad \kappa_{0i}^{(w)}(k_0 \dots k_6) = M_{0i}^{(w)} + 2L_{0i}(k_0 \dots k_6).$$

Оригиналы коэффициентов рядов для перемещений и угла поворота находятся с помощью теорем операционного исчисления и формул (12).

Приведен пример расчетов для того же материала, что и в примерах глав 2 и 3. На поверхности шара заданы перемещения вида (13). На рис. 6 – 7 продемонстрировано нормальное перемещение $w(r, \theta, \tau)$ в зависимости от времени на расстояниях $r = 0.99; 0.95; 0.92; 0.88$ от центра шара при $\theta = 0, \theta = \pi/4$ и $K = 1$. Они соответствуют четырем членам степенных рядов. При разных значениях $K > 1$ или учете еще одного члена степенных рядов графики практически совпадают.

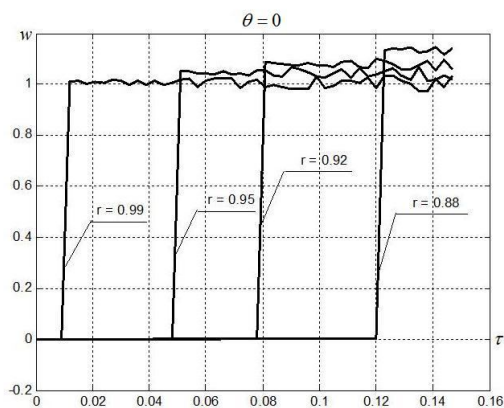


Рис. 6

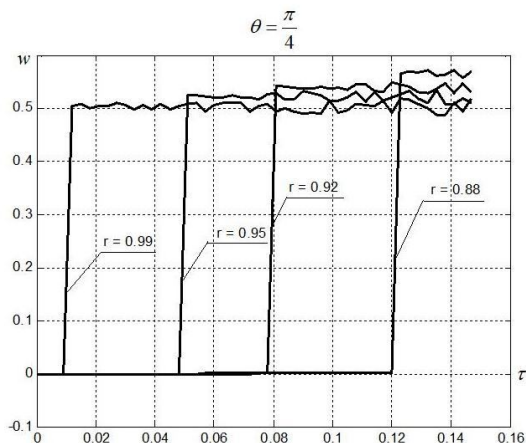


Рис. 7

В главах 2, 3, 4 проведен предельный переход к симметричной теории упругости. Для этого в полученных соотношениях (10), (17), (21) полагается, что $\eta \rightarrow 0$ и $\xi \rightarrow 0$. При этом для $\lambda_{1,2}$ имеют место следующие соотношения:

$$\lambda_1 \rightarrow \infty, \quad \lambda_2 \rightarrow 2s^2/(1-\kappa).$$

Полученные результаты показывают совпадают с точностью до обозначений с известными решениями соответствующих задач.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. С помощью представления искомых функций в виде рядов по полиномам Лежандра и преобразования Лапласа получены решения новых нестационарных осесимметричных задач о распространении поверхностных возмущений в псевдоконтинууме Коссера со сферическими границами (пространство со сферической полостью и сплошной шар).

2. Проведено исследование влияния на напряженно-деформированное состояние среды различного типа поверхностных возмущений (кинематических и силовых).

3. С использованием результатов для задачи о распространении поверхностных возмущений построено решение новой задачи о дифракции волны расширения (плоской или сферической) на сферической полости в псевдоконтинууме Коссера.

4. Для изображений преобразования Лапласа, содержащих множители в виде экспонент с радикалами, разработан алгоритм обращения для коэффициентов рядов по полиномам Лежандра, основанный на разложении изображений в ряды Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, что соответствует степенным рядам в окрестности начального момента времени. Построена и реализована методика определения коэффициентов этих рядов.

5. Проведено численное исследование сходимости в полученных решениях рядов по полиномам Лежандра и степенных рядов по времени.

6. Выполнен предельный переход в полученных решениях к классической теории упругости. Показано совпадение с известными результатами.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых научных изданиях и журналах:

1. Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных кинематических возмущений от сферической полости в псевдоконтинууме Коссера // *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2011. Т. 17, № 2. – С. 184 – 195.

2. Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от поверхности шара, заполненного псевдоупругой средой Коссера // *Электронный журнал «Труды МАИ»*, 2012, № 53, www.mai.ru/science/trudy/.

В других научных изданиях и журналах:

1. Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от сферической полости в упругом моментном пространстве // *Материалы XVI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2.* – Чебоксары: ГУП «ИПК «Чувашия», 2010. – С. 66.

2. Лай Тхань Туан, Дмитрий Тарлаковский. Осесимметричные нестационарные волны в упругой моментной среде со сферической полостью // *Матема-*

тичні проблеми механіки неоднорідних структур / Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. – С. 442 – 443.

3. Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В. Дифракция нестационарных волн на сферической полости в сфере псевдокоссера // Механика и наноструктурированных материалов и систем / Труды Всероссийской конференции. Т. I. Москва, 13-15 декабря 2011 г. – М.: Альянстрансатом, 2011. - С. 65-74.

4. Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В. Нестационарные волны в заполненном упругой средой псевдокоссера шаре // «Механика наноструктурированных материалов и систем». Материалы Всероссийской конференции. Москва, 13 ноября – 15 декабря 2011 г. – М.: ИПРИМ РАН, 2011. – С. 97.

5. Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В. Нестационарные осесимметричные граничные возмущения от сферической полости в псевдоконтинууме Коссера // Материалы XVII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. – М.: ООО «ТР-принт», 2011. – С. 28 – 29.

6. Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В. Нестационарные осесимметричные возмущения от границы сплошного шара, заполненного упругой моментной средой // Материалы XVIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. – М.: ООО «ТР-принт», 2012. – С. 41 – 43.

7. Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В. Дифракция плоских (сферических) волн на сферической полости в псевдоконтинууме Коссера // Московская молодежная научно-практическая конференция «Инновации в авиации и космонавтике - 2012» 17-20 апреля 2012 года. Москва. Сборник тезисов докладов конференции. - М.: ООО «Принт-салон», 2012. - С. 272-273.