

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи



Юн Сон Ук

**ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С
ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ ПРИ НАЛИЧИИ
ВОЗМУЩАЮЩИХ УСКОРЕНИЙ**

Специальность 2.5.16.

Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва–2023

Работа выполнена на кафедре 601 «Космические системы и ракетостроение» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: **Петухов Вячеслав Георгиевич**,

доктор технических наук, член-корреспондент РАН, первый заместитель директора по науке НИИ ПМЭ МАИ, профессор кафедры 601 «Космические системы и ракетостроение» МАИ

Официальные оппоненты: **Боровин Геннадий Константинович**,

доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Заплетин Максим Петрович,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общих проблем управления Механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»

Защита состоится «30» ноября 2023 года в 16:00 на заседании диссертационного совета 24.2.327.03 в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ) по адресу: 125993, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте МАИ по ссылке: https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=175236

Автореферат разослан «__» _____ 2023 г

Отзывы в 2-х экземплярах, заверенные печатью организации, просим направлять по адресу: 125993, Волоколамское шоссе, д. 4, Отдел Ученого и диссертационных советов МАИ.

Ученый секретарь

диссертационного совета 24.2.327.03,
доктор технических наук, доцент

Старков А. В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы диссертационной работы определяется следующими факторами:

- необходимостью проведения оценки влияния возмущающих ускорений на оптимальные траектории и оптимальные программы управления вектором тяги электроракетных двигательных установок (ЭРДУ);
- необходимостью разработки эффективной методики решения задач оптимизации траекторий перелета с малой тягой при использовании высокоточных моделей возмущающих ускорений;
- недостаточной полнотой современного состояния теории оптимальных возмущенных траекторий с малой тягой.

Объектом исследования являются траектории управляемого возмущенного движения центра масс космического аппарата (КА) с ЭРДУ.

Предметом исследования являются математические модели оптимального возмущенного движения КА с ЭРДУ.

Целью настоящей диссертационной работы является повышение эффективности космических транспортных систем при реализации перспективных космических миссий с использованием ЭРДУ.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

- разработан новый метод оптимизации возмущенных траекторий с малой тягой на основе использования комплексных дуальных чисел для автоматического вычисления производных при использовании высокоточных моделей возмущающих ускорений;
- рассмотрен новый подход к оптимизации многовитковых траекторий КА с ЭРДУ с использованием угловой переменной – вспомогательной долготы – в качестве новой независимой переменной вместо времени;
- предложен процесс автоматизации вычисления оптимальной траектории с двигателем с заданной тягой и удельным импульсом, не требующий задания начальных приближений для неизвестных параметров краевой задачи;
- предложен подход к решению задачи сквозной оптимизации траекторий перелета КА с малой тягой между околоземной и окололунной орбитами на базе использования канонического преобразования;
- предложен новый подход к оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой с использованием коллинеарных точек для стыковки планетоцентрических и гелиоцентрических участков траектории;
- проведен качественный и количественный анализ полученных с помощью разработанной методики решений возмущенных задач оптимизации

межорбитального и межпланетного перелетов, а также перелетов к Луне с малой тягой.

Практическая значимость данной диссертационной работе состоит в следующем:

- разработана и теоретически обоснована методика решения задачи оптимизации межорбитальных перелетов с малой тягой с учетом влияния возмущающих ускорений, имеющая важное практическое значение для реализации высокоэкономичных схем выведения КА увеличенной массы на высокие целевые орбиты с помощью ЭРДУ;
- разработана эффективная методика оптимизации траекторий с малой тягой к окололунным орбитам и точкам либрации системы Земля-Луна для реализации эффективных космических транспортных операций между околоземной и окололунной орбитами с помощью космических буксиров с ЭРДУ с целью обеспечения перспективных лунных пилотируемых программ, которые требуют значительных грузопотоков в системе Земля-Луна;
- разработана методика оптимизации возмущенной траектории межпланетного перелета между точками либрации с малой тягой в рамках полной эфемеридной модели движения небесных тел;
- на основе разработанных численных методов разработан комплекс программно-математического обеспечения для оптимизации межпланетных и межорбитальных траекторий, а также траекторий перелета к Луне.

Методология и методы исследования. Для решения задачи оптимизации траектории КА с ЭРДУ используется принцип максимума Понтрягина и метод продолжения. При использовании принципа максимума и метода продолжения необходимо вычислить смешанные производные второго порядка от правых частей дифференциальных уравнений, включающих возмущающие ускорения, по фазовым переменным и неизвестным параметрам краевой задачи. Для вычисления требуемых первых и вторых производных в диссертационной работе применяется метод, основанный на использовании комплексных дуальных чисел. При решении задачи сквозной оптимизации траектории перелета к Луне, для перевода сопряженных переменных из одной системы координат в другую, используется каноническое преобразование. Для моделирования возмущенных траекторий используются методы численного интегрирования уравнений возмущенного движения КА.

Основные научные положения, выносимые на защиту:

- методика для оптимизации возмущенных траекторий КА на основе использования принципа максимума, метода продолжения, автоматического дифференцирования с использованием комплексных дуальных чисел, использования вспомогательной долготы в качестве независимой переменной

и постановки задачи с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета;

- методика для оптимизации траектории перелета к Луне КА с идеально-регулируемым двигателем, с минимальной тягой и с ограниченной тягой со стыковкой в точке либрации EML_1 системы Земля-Луна;
- методика для сквозной оптимизации траектории перелета к Луне КА с идеально-регулируемым двигателем с оптимальной точкой стыковки геоцентрического и селеноцентрического участков траектории;
- методика для оптимизации возмущенных траекторий межпланетного перелета КА с идеально-регулируемым двигателем и с ограниченной тягой с использованием метода продолжения по гравитационному параметру;
- результаты численного анализа полученных оптимальных решений возмущенных задач при рассмотрении различных типов многовитковых межорбитальных перелетов КА с ЭРДУ (между высокими эллиптическими орбитами, геопереходной орбитой и геостационарной орбитой (ГСО), околокруговыми низкими околоземными орбитами), межпланетных перелетов к разным планетам Солнечной системы (между точками либрации L_2 системы Земля-Солнце и L_1 системы планета-Солнце) и перелетов к Луне (между околоземной и окололунной орбитами).

Достоверность полученных результатов обеспечивается: - использованием строгих математических методов и известных фундаментальных подходов, например принципа максимума и метода продолжения, при решении задачи оптимизации траекторий КА; - сравнением решений, полученных с помощью разработанных в этой диссертационной работе методов, с известными результатами других авторов, включающих параметры оптимальных траекторий КА с ЭРДУ с учетом возмущающих ускорений от притяжения удаленных небесных тел и гармоник геопотенциала; - результатам тестирования библиотеки программ для вычислений в комплексной дуальной области и преобразований между различными системами координатами.

Апробация работы. Полученные в диссертационной работе результаты обсуждались на 9 российских и международных конференциях, в том числе: на Академических чтениях по космонавтике 2021, МГТУ, Москва; на Международной конференции по инструментам и методам астродинамики (ISATT) 2021, дистанционный формат, на Международном астронавтическом конгрессе (IAS) 2021, Дубай; на Академических чтениях по космонавтике 2022, МГТУ, Москва; на Международном астронавтическом конгрессе (IAS) 2022, Париж; на Научных чтениях памяти К.Э. Циолковского 2022, Калуга; на симпозиуме «Современные проблемы создания российских малых космических аппаратов и их использования для решения социально-экономических задач» 2022, Калуга; на конференции

«Проблемы и перспективы космических миссий с электрореактивными двигателями» 2022, Махачкала; на Академических чтениях по космонавтике 2023, МГТУ, Москва. Результаты также обсуждались в рамках научных семинаров, в том числе: на семинаре Механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова «Механика космического полета им. В.А. Егорова» 2021, Москва; на семинаре кафедры Космических систем и ракетостроения МАИ 2023, Москва.

Личный вклад и публикации. Все результаты, приведенные в диссертации, получены лично автором. Основные результаты опубликованы в 8 работах [1-8]. Из них 4 работы опубликованы в изданиях, входящих в международные реферативные базы данных (МРБД) [1-3] или рекомендованных ВАК [4]. Статья [3] переведена на английский язык и опубликована в [5], входящем в Web of Science и Scopus. А также, из них 3 работы [6-8] опубликованы в иностранных изданиях, входящих в Web of Science и Scopus.

Структура и объем работы. Объем работы составляет 195 страниц (основная часть работы - 185 страницы, приложение – 10 страниц). Работа содержит 71 рисунок и 30 таблиц. Список литературы содержит 123 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы настоящей диссертационной работы. Проводится краткое описание фундаментальных проблем оптимизации возмущенных многовитковых траекторий КА с ЭРДУ и существующих подходов к оптимизации таких траекторий. Во введении указываются цель работы, объект и предмет исследования, перечисляются решаемые задачи и методы исследования, приводятся подходы к обеспечению достоверности получаемых результатов, формулируются научная новизна и практическая значимость работы, научные положения, выносимые на защиту, указывается личный вклад и публикации, а также структура и объем работы.

В **первой главе** приведена математическая модель движения КА с ЭРДУ, введено понятие вспомогательной долготы, которая используется в качестве новой независимой переменной вместо времени, приведены уравнения движения КА с вспомогательной долготой в качестве независимой переменной. Показаны преимущества использования этой переменной для оптимизации траектории с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета. Для оптимизации многовитковых траекторий КА с малой тягой используются дифференциальные уравнения возмущенного движения КА в модифицированных равноденственных орбитальных элементах:

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{2p}{q} a_t, \quad \frac{de_x}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\sin L \cdot a_r + \frac{(q+1)\cos L + e_x}{q} a_t - \frac{e_y \xi}{q} a_n \right], \\
\frac{de_y}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\cos L \cdot a_r + \frac{(q+1)\sin L + e_y}{q} a_t + \frac{e_x \xi}{q} a_n \right], \quad \frac{di_x}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{s^2}{2q} \cos L \cdot a_n, \\
\frac{di_y}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{s^2}{2q} \sin L \cdot a_n, \quad \frac{dL}{dt} = \sqrt{\mu p} \left(\frac{q}{p} \right)^2 + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\xi}{q} \cdot a_n, \quad \frac{dm}{dt} = -\delta \frac{T}{c},
\end{aligned} \tag{1}$$

где $e_x = e \cos(\omega + \Omega)$, $e_y = e \sin(\omega + \Omega)$, $i_x = \text{tg} \frac{i}{2} \cos \Omega$, $i_y = \text{tg} \frac{i}{2} \sin \Omega$, $L = \nu + \omega + \Omega$, $s^2 = 1 + i_x^2 + i_y^2$, $q = 1 + e_x \cos L + e_y \sin L$, $\xi = i_x \sin L - i_y \cos L$, p , e , ω , i , Ω – кеплеровские орбитальные элементы, ν – истинная аномалия, μ – гравитационный параметр центрального небесного тела, m – масса КА, T – тяга, c – скорость истечения, δ – релейная функция тяги ($\delta = 1$ при включенной ЭРДУ и $\delta = 0$ при включенной ЭРДУ), a_t , a_r , a_n – трансверсальная, радиальная и бинормальная составляющие вектора ускорения (суммы реактивного и возмущающего ускорений) соответственно, которые определяются следующими соотношениями:

$$a_t = \delta \frac{T}{m} \cos \vartheta \cos \psi + a_{pt}, \quad a_r = \delta \frac{T}{m} \sin \vartheta \cos \psi + a_{pr}, \quad a_n = \delta \frac{T}{m} \sin \psi + a_{pn} \tag{2}$$

где ϑ – угол тангажа, ψ – угол рысканья, a_{pt} , a_{pr} , a_{pn} – компоненты возмущающего ускорения. Вводится вспомогательная долгота K , удовлетворяющая следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{dK}{dt} = \sqrt{\mu p} \left(\frac{q}{p} \right)^2 \tag{3}$$

и отклонение истинной долготы от вспомогательной $L_K = L - K$, которое, в соответствии с (1) и (3), подчиняется дифференциальному уравнению

$$\frac{dL_K}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\xi}{q} a_n \tag{4}$$

Замена шестого уравнения в системе (1) уравнениями (3) и (4) с учетом $L = K + L_K$, после замены t на K с использованием (3), приводит к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dK} &= \frac{2p^3}{\mu q^3} a_t, \quad \frac{de_x}{dK} = \frac{p^2}{\mu q^2} \left[\sin L \cdot a_r + \frac{(q+1)\cos L + e_x}{q} a_t - \frac{e_y \xi}{q} a_n \right], \\
\frac{de_y}{dK} &= \frac{p^2}{\mu q^2} \left[-\cos L \cdot a_r + \frac{(q+1)\sin L + e_y}{q} a_t + \frac{e_x \xi}{q} a_n \right], \quad \frac{di_x}{dK} = \frac{p^2 s^2}{2\mu q^3} \cos L \cdot a_n, \\
\frac{di_y}{dK} &= \frac{p^2 s^2}{2\mu q^3} \sin L \cdot a_n, \quad \frac{dL_K}{dK} = \frac{p^2}{\mu q^3} \xi \cdot a_n, \quad \frac{dm}{dK} = -\frac{\delta}{\sqrt{\mu p}} \left(\frac{p}{q} \right)^2 \frac{T}{c}, \quad \frac{dt}{dK} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left(\frac{p}{q} \right)^2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Далее рассматривается задача перелета между заданными орбитами с фиксированной угловой дальностью по истинной долготе $\Delta L = L_f - L_0$ (где L_0 и L_f –

начальное и конечное значения истинной долготы соответственно) и свободным временем перелета. Введем обозначение $\mathbf{x} = (p, e_x, e_y, i_x, i_y)^T$. В этом случае начальные условия движения задаются для фиксированного значения начальной вспомогательной долготы K_0 в виде

$$L_K(K_0) + K_0 = L_0, \mathbf{x}(K_0) = \mathbf{x}_0(L_0), m(K_0) = m_0, t(K_0) = t_0, \quad (6)$$

где t_0 – начальное время перелета, а конечные – для свободного конечного значения вспомогательной долготы K_f в виде

$$L_K(K_f) + K_f = L_f, \mathbf{x}(K_f) = \mathbf{x}_f(L_f). \quad (7)$$

Начальное значение истинной долготы K_0 без потери общности может быть выбрано равным 0. Для анализа межпланетных траекторий КА с ЭРДУ используются уравнения движения в гелиоцентрической инерциальной декартовой системе координат с учетом возмущений от притяжения удаленных небесных тел.

Во **второй главе** рассмотрена задача оптимизации возмущенных траекторий КА с идеально-регулируемым двигателем ограниченной мощности (ОМ-задача), с минимальной тягой (T_{\min} -задача) и с ограниченной тягой (ОТ-задача). Представлена полная система необходимых условий оптимальности для рассматриваемых задач перелета с фиксированной угловой дальностью и свободным временем. Для решения ОТ-задачи с заданной угловой дальностью и свободным временем перелета требуется найти функции (программы управления) $\delta(K)$, $\vartheta(K)$ и $\psi(K)$, минимизирующие функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \delta \frac{T}{c} dt = \int_{K_0}^{K_f} \delta \frac{T}{q^2 c} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} dK \quad (8)$$

Функция Понтрягина задачи оптимального управления (5)-(8) имеет следующий вид:

$$H = H_T + H_p + H_t, \quad (9)$$

$$\text{где } H_T = \delta T k_1 \cdot \left[\frac{k_2}{m} \cdot (A_r \sin \vartheta \cos \psi + A_l \cos \vartheta \cos \psi + A_n \sin \psi) - \frac{p_m + 1}{c} \right],$$

$H_p = k_1 k_2 \cdot (A_r a_{pr} + A_l a_{pl} + A_n a_{pn})$, $H_t = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left(\frac{p}{q} \right)^2 p_t$ – зависящие от тяги, возмущающих ускорений и сопряженной к времени переменной p_t части функции Понтрягина соответственно,

$$A_l = 2p \cdot p_p + [(q+1) \cos L + e_x] p_{ex} + [(q+1) \sin L + e_y] p_{ey},$$

$$A_r = q \cdot (\sin L \cdot p_{ex} - \cos L \cdot p_{ey}), A_n = \xi \cdot (-e_y p_{ex} + e_x p_{ey} + p_{LK}) + \frac{s^2}{2} (\cos L \cdot p_{ix} + \sin L \cdot p_{iy}),$$

$p_p, p_{ex}, p_{ey}, p_{ix}, p_{iy}, p_{LK}, p_m, p_t$ – переменные, сопряженные к соответствующим фазовым переменным системы $p, e_x, e_y, i_x, i_y, L_K, m, t, k_1 = \frac{1}{q^2} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}}, k_2 = \frac{1}{q} \sqrt{\frac{p}{\mu}}$.

Максимизируя (9) по ϑ , ψ и δ , мы получим следующие выражения для оптимального управления:

$$\sin \vartheta = A_r / A_n, \cos \vartheta = A_t / A_n, \sin \psi = A_n / A, \cos \psi = A_r / A, \quad (10)$$

$$\delta = (1 + \text{sign } S) / 2, S \neq 0; \delta \in [0; 1], S = 0, \quad (11)$$

где $A_n = \sqrt{A_r^2 + A_t^2}$, $A = \sqrt{A_r^2 + A_t^2 + A_n^2}$, $S = \frac{k_2 A}{m} - \frac{p_m + 1}{c}$ – функция переключения.

Подставляя (10), (11) в (9), получим выражение для гамильтониана рассматриваемой задачи оптимального управления. Уравнения оптимального движения имеют вид:

$$\frac{d\mathbf{x}_1}{dK} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_{x1}}, \frac{d\mathbf{p}_{x1}}{dK} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_1} \quad (12)$$

где $\mathbf{x}_1^T = (p, e_x, e_y, i_x, i_y, L_K, m, t)$, $\mathbf{p}_{x1}^T = (p_p, p_{ex}, p_{ey}, p_{ix}, p_{iy}, p_{LK}, p_m, p_t)$.

Для решения рассматриваемой задачи оптимизации траектории необходимо определить 8 начальных значений сопряженных переменных \mathbf{p}_{x1} и конечное значение вспомогательной долготы K_f (всего 9 неизвестных переменных). Краевые условия (6), (7) определяют только 6 уравнений для определения этих 9 неизвестных переменных и должны быть дополнены тремя условиями трансверсальности. Окончательно, краевые условия для рассматриваемой задачи можно записать в виде:

$$L_K(0) = L_0, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0(L_0), m(0) = m_0, t(0) = t_0, p_{LK}(0) + H(0) = 0, \quad (13)$$

$$L_K(K_f) + K_f = L_f, \mathbf{x}(K_f) = \mathbf{x}_f(L_f), p_m(K_f) = 0, p_t(K_f) = 0, \quad (14)$$

причем для решения краевой задачи принципа максимума (12), (13), (14) требуется определить 8 компонент вектора $\mathbf{p}_{x1}(0)$ и конечную вспомогательную долготу K_f при которых удовлетворяется последнее уравнение в (13) и 8 уравнений (14).

С целью вычисления начального приближения для решения ОТ-задачи, рассматривается задача оптимизации возмущенной ОМ-траектории. В рамках модели идеально-регулируемого двигателя ограниченной мощности величины тяги T и скорости истечения c могут произвольно изменяться при выполнении единственного ограничения, заключающегося в постоянстве реактивной мощности: $P_b = Tc/2 = \text{const}$. В рассматриваемом случае задача минимизации затрат топлива $m_p = m_0 - m_f$ эквивалентна задаче минимизации функционала:

$$J_{LP} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} a_{LP}^2 dt = \frac{1}{2} \int_{K_0}^{K_f} \frac{a_{LP}^2}{q^2} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} dK.$$

В этой работе демонстрируется возможность оптимизации ОМ-траекторий с использованием нулевого начального приближения для сопряженных переменных. Перед началом оптимизации ОТ-траектории полезно убедиться, что решение этой задачи существует. Вопрос существования решения можно решить, рассматривая задачу минимизации тяги: решение существует, если располагаемая тяга не меньше

минимальной. В T_{\min} -задаче можно использовать несколько эквивалентных представлений функционала. В этой работе рассматривается задача минимизации функционала:

$$J = \frac{1}{2} \int_{L_0}^{L_f} T^2 dL = \frac{1}{2} \int_{K_0}^{K_f} T^2 \cdot \frac{dL}{dK} dK = \\ = \frac{1}{2} \int_{K_0}^{K_f} T^2 \cdot \left(1 + \frac{dL_K}{dK} \right) dK = \frac{1}{2} \int_{K_0}^{K_f} T^2 \cdot \left[1 + k_1 k_2 \xi \cdot \left(\delta \frac{T}{m} \sin \psi + a_{pn} \right) \right] dK.$$

Для анализа гелиоцентрического участка траектории межпланетного перелета КА с ЭРДУ рассматривается задача минимизации затрат топлива на перелете между двумя заданными точками либрации L_1 и L_2 за фиксированное время Δt с использованием уравнений движения в декартовых координатах.

В третьей главе предложен подход к оптимизации возмущенных траекторий КА с ЭРДУ на основе использования принципа максимума, метода продолжения и алгебры комплексных дуальных чисел для высокоточного вычисления требуемых производных. Принцип максимума позволяет свести задачу оптимального управления к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для его применения требуется точное вычисление производных от гамильтониана по фазовым переменным, что является достаточно сложной задачей при использовании высокоточных моделей возмущающих ускорений. Для вычисления этих производных можно использовать высокоточное численное дифференцирование методом комплексного шага или автоматическое дифференцирование с применением дуальных чисел. Метод продолжения по параметру редуцирует краевую задачу принципа максимума к задаче Коши. Однако, для его применения требуется вычисление производных от невязок краевой задачи по начальным значениям сопряженных переменных, а в ряде случаев и по другим неизвестным траекторным параметрам. Метод комплексного шага и автоматическое дифференцирование с использованием дуальных чисел позволяет вычислить с высокой точностью только первые производные дифференцируемых функций вещественных переменных. Однако, при использовании принципа максимума и метода продолжения фактически требуется вычисление вторых производных от функций, определяемых по сложным алгоритмам.

Для точного вычисления вторых производных с умеренными вычислительными затратами предлагается использовать комплексные дуальные числа. Комплексные дуальные числа являются дуальными числами с комплексными коэффициентами: $z = x + \varepsilon x'$, $\varepsilon^2 = 0$, $x, x' \in \mathbb{C}$, $\text{CP}(z) \triangleq x$, $\text{CDP}(z) \triangleq x'$. Для вычисления смешанной второй производной вещественной функции f по x и y мы можем добавить к x единичную дуальную часть ($x = x_0 + \varepsilon$) и добавить к y малую мнимую часть ($y = y_0 + ih$, $h \ll 1$), где x_0 , y_0 , h – вещественные числа. Анализ

разложения этой функции f в ряд Тейлора в окрестности точки (x_0, y_0) позволяет показать, что вычисление комплексного дуального представления функции приводит к простому выражению для смешанной второй производной:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + ih \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_0} - \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y_0^2} +$$

$$\varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial x_0} \left[f(x_0, y_0) + ih \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_0} - \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y_0^2} \right] \right\} + O(h^3) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_0} = \frac{\text{Im}\{\text{CP}[f(x, y)]\}}{h} + O(h^2), \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_0} = \text{Re}\{\text{CDP}[f(x, y)]\} + O(h^2),$$

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x_0 \partial y_0} = \frac{\text{Im}\{\text{CDP}[f(x, y)]\}}{h} + O(h^2).$$

Разработанный метод и программное обеспечение обеспечивают возможность проведения оптимизации траектории без необходимости задания начального приближения для неизвестных параметров краевой задачи принципа максимума, продемонстрировали хорошую вычислительную устойчивость (благодаря использованию метода продолжения и последовательности оптимизации траекторий с идеально-регулируемым двигателем и с двигателем ограниченной тяги) и скорость сходимости. Немаловажным фактором является существенное упрощение подготовки математической модели возмущенного движения КА при применении разработанного метода. В отличие от других известных подходов оптимизации возмущенных траекторий, основанных на непрямых подходах, в нашем случае не требуется крайне трудоемкий вывод выражений или специализированных алгоритмов вычислений производных от возмущающих ускорений по фазовым координатам при рассмотрении нового состава или математической модели возмущающих ускорений. Для обеспечения работы разработанного метода требуется только вычисление самих возмущающих ускорений в комплексной дуальной области, что облегчается разработкой библиотеки программ для вычислений в комплексной дуальной области. С помощью этой библиотеки, использующей технику перегрузки операторов и функций, задача сводится к переопределению типов используемых переменных. Перечисленные особенности разработанного метода позволили преодолеть типичные недостатки непрямых подходов – сложность подготовки математической модели оптимального движения, чувствительность к выбору начального приближения для решения краевой задачи, при сохранении типичных достоинств непрямых подходов – высокой точности и скорости вычислений. Для численного интегрирования используется метод Грегга-Булриша-Штоера с адаптивным шагом и порядком. После каждого успешного шага численного интегрирования дифференциальных уравнений метода продолжения проводилась коррекция

результатов численного интегрирования ограниченным числом итераций метода Ньютона или гибридного алгоритма Powell.

Разработанный метод вычисления траекторий с минимальной тягой может использоваться в качестве средства для диагностики существования решения в задаче оптимизации траекторий с ограниченной тягой. Для решения этой задачи использовано последовательное решение задач оптимизации траектории КА с идеально-регулируемым двигателем и минимизации тяги. В процессе вычислений проводится проверка существования решения и, в случае его отсутствия возможна выработка рекомендаций для изменения исходных данных (тяги или угловой дальности перелета) до значений, при которых решение существует.

В четвертой главе приведены численные результаты оптимизации траекторий КА с ЭРДУ между различными околоземными орбитами. В этой главе приводятся численные результаты решения краевых задач принципа максимума для невозмущенных и возмущенных траекторий, а также анализируется влияние на параметры оптимальных возмущенных траекторий времени начала перелета, угловой дальности перелета и состава учитываемых возмущающих ускорений. Для иллюстрации возможностей разработанного метода рассматриваются возмущающие ускорения от гармоник геопотенциала до 4-го порядка и 4-й степени включительно и притяжения Луны и Солнца. В качестве математической модели гравитационного поля Земли использовалась модель EGM-96. Матрицы прецессии и нутации фиксировались на начальный момент времени, а матрица собственного движения полюса принималась единичной. Для расчета эфемерид Луны и Солнца использовалось эфемеридное обеспечение DE405.

Для разных межорбитальных перелетов определяющим является различный состав возмущающих ускорений. В связи с этим, в диссертационной работе рассмотрены характерные примеры оптимальных возмущенных многовитковых траекторий: (1) между высокими эллиптическими орбитами; (2) между геопереходной и геостационарной орбитами; (3) между околокруговыми низкими околоземными орбитами. Проведено сравнение полученных оптимальных возмущенных траекторий с результатами оптимизации возмущенных траекторий, полученными другими авторами, и показана близость этих результатов. Показана возможность использования разработанного метода для оптимизации возмущенных траекторий КА с ЭРДУ с угловой дальностью до 500 витков. В качестве примера, в частности, рассмотрен случай перелета КА с ЭРДУ с начальной (геопереходной) орбиты, имеющей большую полуось 24505.9 км, эксцентриситет 0.725, наклонение 7 градусов, нулевые значения аргумента перигея и долготы восходящего узла на конечную круговую экваториальную орбиту радиусом 42165 км (геостационарную орбиту). Начальное значение истинной аномалии принято равным 0, дата начала перелета – 01.01.2000, 12:00:00 UTC,

начальная масса КА – 2000 кг, тяга ЭРДУ – 0.35 Н, удельный импульс ЭРДУ – 2000 с, угловая дальность перелета от 200 до 500 витков.

Рассматриваемая задача соответствует случаю В из ряда работ ¹. При использовании метода, основанного на использовании комплексных дуальных чисел, нами получены следующие результаты: $m_p = 152.46$ кг, $\Delta t = 318.88$ суток для невозмущенной траектории и $m_p = 156.87$ кг, $\Delta t = 321.05$ суток для возмущенной траектории с учетом возмущений от членов разложения геопотенциала до 4-го порядка и 4-й степени включительно, притяжения Луны и Солнца. На рисунке 1 представлены проекции на координатные плоскости экваториальной инерциальной системы координат и пространственный вид невозмущенной и возмущенной оптимальных 500-витковых траекторий (черной сплошной линией обозначены активные участки траектории, а серой – пассивные участки траектории).

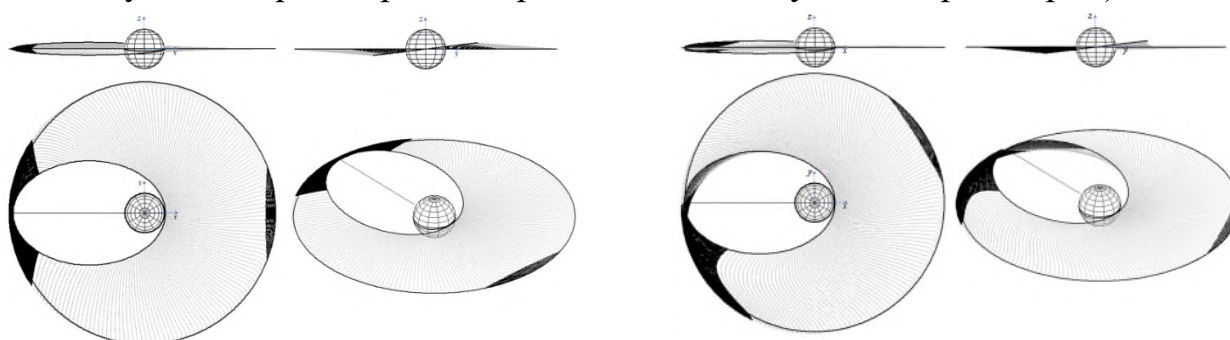


Рисунок 1. Проекция на координатные плоскости системы координат экваториальной инерциальной и пространственный вид невозмущенной (слева) и возмущенной (справа) оптимальных 500-витковых траекторий.

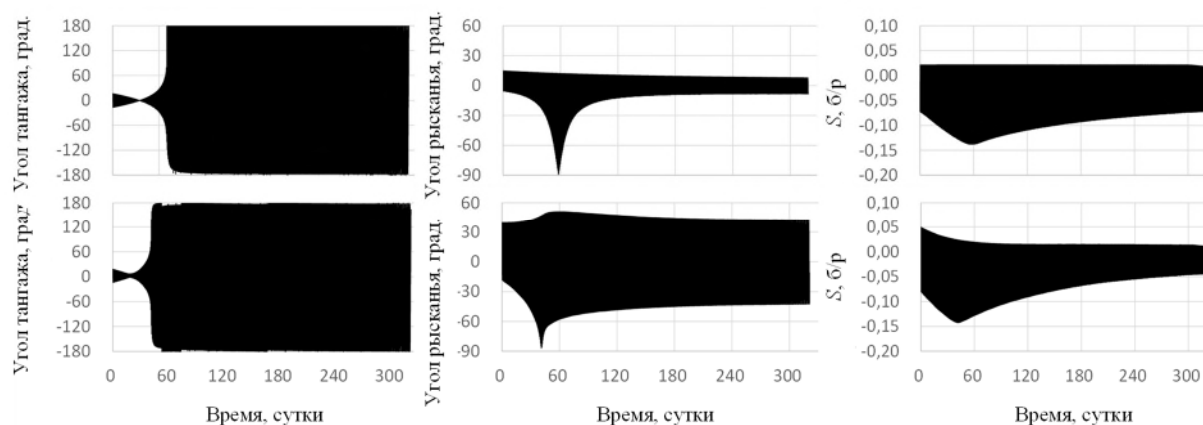


Рисунок 2. Зависимости от времени угла тангажа (слева), угла рысканья (посередине) и функции переключения S (справа) для невозмущенной (верхний ряд) и возмущенной (нижний ряд) 500-витковой траектории.

На рисунке 2 представлены зависимости от времени угла тангажа, угла рысканья и функции переключения S для невозмущенной и возмущенной 500-витковой траектории. Видно существенное различие в оптимальной программе

¹ Aziz D. Low-Thrust Many-Revolution Trajectory Optimization. PhD thesis, University of Colorado, 2018.

угла рысканья и в зависимости функции переключения от времени. На рисунке 3 приведены проекции возмущенной оптимальной траектории с 200...350 витками на экваториальную плоскость с учетом возмущений от гармоник геопотенциала до 4-й степени и 4-го порядка включительно и притяжения Луны и Солнца. Активные участки траектории обозначены маркерами, а пассивные – сплошными серыми линиями. Возмущающие ускорения приводят к значительному развороту линии апсид и линии узлов. Увеличение числа витков приводит к росту разворота линии апсид и линии узлов в процессе перелета, что влияет на оптимальное управление, приводя к сдвигу моментов включения и выключения двигателей и изменению программ тангажа и рысканья. Однако, влияние возмущающих ускорений на продолжительность перелета и требуемые затраты рабочего тела оказалось незначительным.

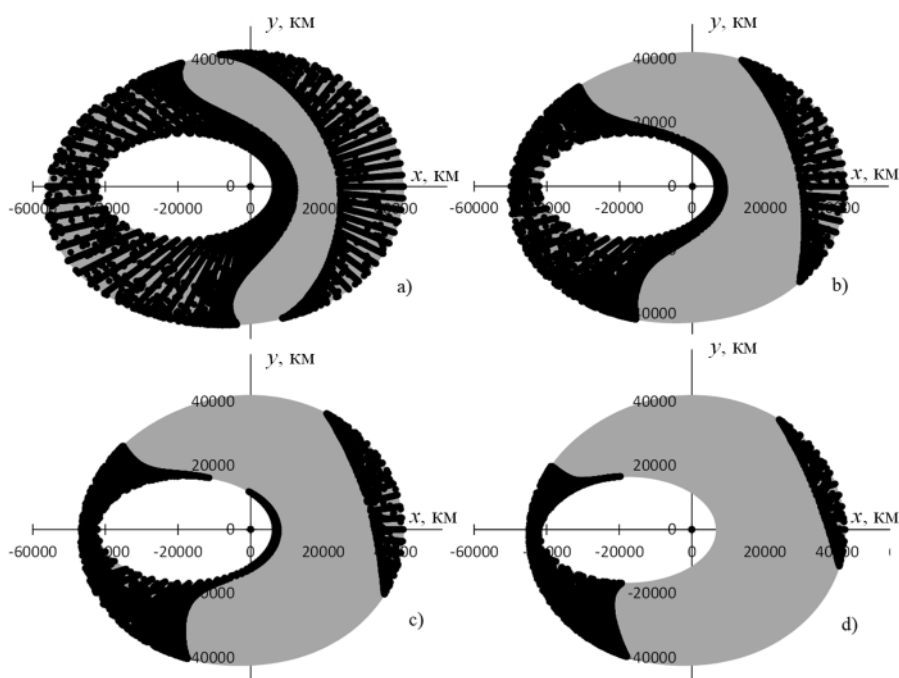


Рисунок 3. Проекция возмущенной оптимальной траектории (а) с 200 витками, (б) с 250 витками, (с) с 300 витками, (д) с 350 витками на экваториальную плоскость с учетом возмущений от геопотенциала до 4 степени и 4 порядка и притяжения Луны и Солнца.

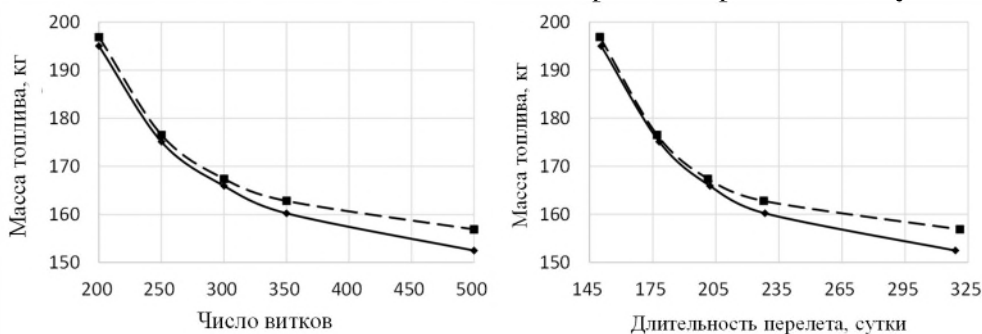


Рисунок 4. Зависимости величины затрат топлива m_p от числа витков (слева) и от длительности перелета Δt (справа) для невозмущенных (сплошная линия) и возмущенных (пунктирная линия) оптимальных траекторий.

На рисунке 4 представлены зависимости величины затрат топлива m_p от длительности перелета Δt и от числа витков для невозмущенных (сплошная линия) и возмущенных (пунктирная) оптимальных траекторий, полученных в этой работе. В рассматриваемом случае возмущающие ускорения приводят к увеличению затрат рабочего топлива на 1.417...4.404 кг. Разумеется, в других случаях действие возмущающих ускорений может приводить и к уменьшению требуемых затрат рабочего тела.

В пятой главе рассмотрена задача оптимизации перелета КА с ЭРДУ к Луне с использованием методов из глав 1, 2 и 3 данной работы. Для вычисления возмущающих ускорений использована эфемеридная модель движения небесных тел. На всех участках траектории учитывается притяжение Земли, Луны и Солнца.

Предложен подход к решению задачи минимизации тяги для многовитковых траекторий перелета между околоземной и окололунной орбитами со стыковкой геоцентрического и селеноцентрического участков в точке либрации EML_1 системы Земля-Луна. Время пролета точки либрации EML_1 фиксируется, в этой точке векторы положения и скорости КА равны векторам положения и скорости EML_1 , а времена отлета с начальной околоземной орбиты и прибытия на конечную окололунную орбиту должны удовлетворять необходимым условиям оптимальности. На обоих (гео- и селеноцентрическом) участках траектории решается задача оптимизации траектории с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета. Решения задачи минимизации тяги могут быть получены отдельно на геоцентрическом и селеноцентрическом участках перелета, после чего необходимо удовлетворить равенство значений минимальной тяги $T_{\min gc}$ на геоцентрическом и $T_{\min sc}$ на селеноцентрическом участках заданному значению тяги T^* с помощью подбора угловых дальностей этих участков: $T_{\min gc}(\Delta L_{gc}) = T^*, T_{\min sc}(\Delta L_{sc}) = T^*$, где ΔL_{gc} и ΔL_{sc} – угловая дальность перелета на геоцентрическом и селеноцентрическом участках перелета соответственно.

В диссертационной работе представлены численные результаты оптимизации перелетов с эллиптической околоземной орбиты на круговую и эллиптическую окололунную орбиты, а также с круговой околоземной орбиты на гало-орбиты вокруг точек либрации EML_1 и EML_2 . Рассмотрена начальная орбита с высотой перигея 4500 км, высотой апогея 50000 км, наклоном 28°, аргументом перигея 101.409° и долготой восходящего узла 10°. Дата пролета точки EML_1 – 18 сентября 2021 года, 12:00:00 UTC. Начальная масса КА 1000 кг, удельный импульс $I_{sp} = 3500$ с. Конечная орбита – круговая окололунная орбита с высотой 5000 км, наклоном 35° и долготой восходящего узла 10°. Параметры окололунной орбиты приведены в селеноцентрической геоэквиаториальной системе координат. Требуемое минимальное значение тяги T^* выбрано равным 0.2 Н.

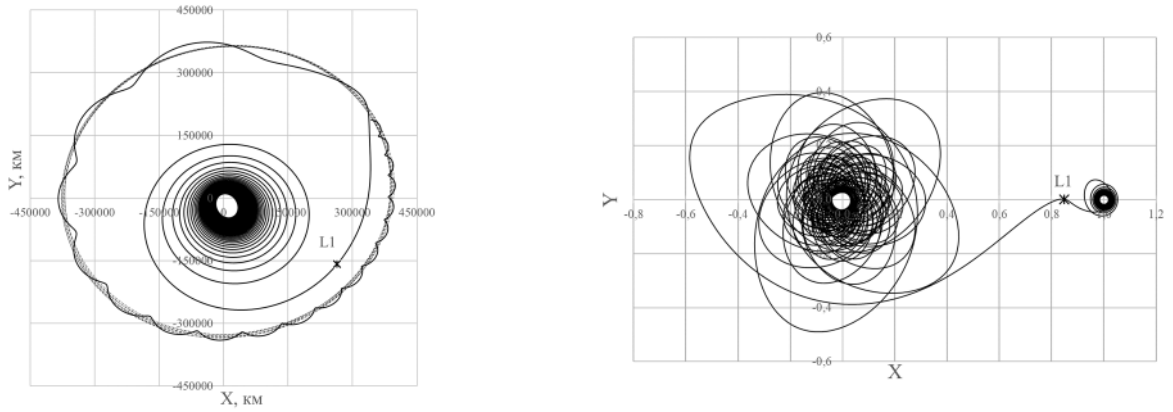


Рисунок 5. Проекция оптимальной траектории на плоскость XU в геоцентрической экваториальной инерциальной системе координат (слева) и на мгновенную плоскость орбиты Луны в синодической системе координат (справа), $T^* = 0.2$ Н.

На рисунке 5 показаны проекции оптимальной траектории на плоскость XU в геоцентрической экваториальной инерциальной системе координат и на мгновенную плоскость орбиты Луны в синодической системе координат. В результате оптимизации траектории были получены оптимальная длительность перелета $\Delta t = 164.587$ суток, конечная масса КА $m_f = 917.113$ кг (масса топлива $m_p = 82.887$ кг) и угловые дальности геоцентрического (74.09908 витков) и селеноцентрического (20.02767 витков) участков траектории с минимальной тягой. Зависимости углов тангажа и рыскания от времени для рассматриваемой траектории представлены на рисунке 6. Оптимальный угол тангажа колеблется около 0 или 180 градусов, а оптимальный угол рыскания близок к нулю везде, кроме в окрестности точки либрации EML_1 .

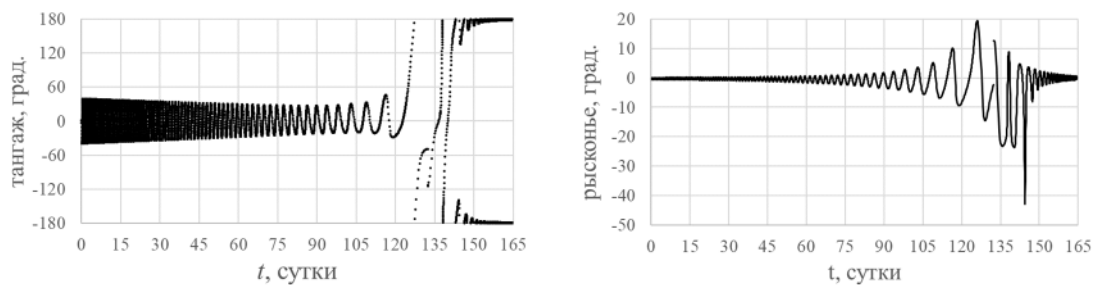


Рисунок 6. Зависимости от времени углов тангажа (слева) и рыскания (справа) для перелета на круговую окололунную орбиту.

Предложен подход к решению задачи минимизации топлива для многовитковых траекторий перелета между околоземной и окололунной орбитами со стыковкой в точке либрации EML_1 . На рисунке 7 представлена блок-схема процесса решения задачи оптимизации траектории перелета к Луне с ограниченной тягой (ОТ-траектория с минимальными затратами топлива).

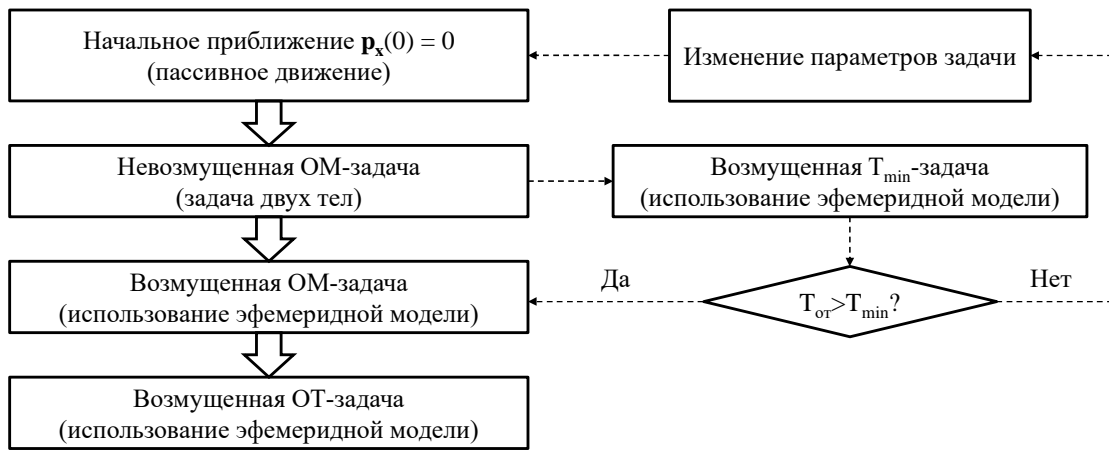


Рисунок 7. Блок-схема процесса решения задачи оптимизации ОТ-траектории перелета к Луне с минимальными затратами топлива.

Задача минимизации тяги используется для коррекции угловой дальности геоцентрического и селеноцентрического участков траектории с целью обеспечения существования решения с заданной величиной тяги. В качестве примера рассмотрен перелет КА с ЭРДУ с высокоэллиптической околоземной орбиты, имеющей высоту перигея 4500 км, высоту апогея 50000 км, наклонение 25° , аргумент перигея 248° и долготу восходящего узла 4° , на круговую окололунную орбиту высотой 5000 км с нулевым наклоном относительно лунного экватора. Следует отметить, что все граничные условия на геоцентрическом участке траектории определяются в геоэквиаториальной инерциальной системе координат EME2000, а конечные условия на селеноцентрическом участке определяются в селеноэквиаториальной инерциальной системе координат LME2000. Дата пролета точки EML_1 принята равной 25 декабря 2023 года, 00:00:00 UTC. При решении T_{\min} - и ОТ-задач, начальная масса КА принималась равной 1000 кг.

Решение T_{\min} -задачи позволяет утверждать, что при заданном удельном импульсе $I_{sp} = 4500$ с траектории перелета заданной угловой дальности геоцентрического ($\Delta L_{gc} = 50.0147$ витков) и селеноцентрического ($\Delta L_{sc} = 13.6385$ витков) участков с заданными краевыми условиями существуют, если значение тяги больше 0.3 Н. Для анализа зависимости основных параметров оптимальных ОТ-траекторий с этими угловыми дальностями от величины тяги, значение тяги T варьировалось от минимального значения 0.3 Н до 0.33 Н. В таблице 1 представлены результаты оптимизации ОТ-траекторий с удельным импульсом 4500 с и различной тягой (здесь Δt_{opt} – оптимальная длительность траектории перелета с околоземной орбиты на окололунную орбиту).

Видно, что при увеличении тяги одновременно увеличивается и конечная масса КА, и оптимальная длительность перелета. Конечная масса КА растет из-за уменьшения потерь характеристической скорости при сокращении длины активных участков, а оптимальная длительность перелета растет из-за увеличения

длительности пассивных участков. На рисунке 8 представлены проекции ОТ-траектории с тягой 0.33 Н. Активные участки траектории на этом рисунке обозначены черными сплошными линиями, а пассивные участки траектории – пунктирными линиями. Положение точки либрации EML_1 обозначено на графиках маркером “+”. Оптимальное управление на этой траектории представлено на рисунке 9.

Таблица 1. Результаты оптимизации траекторий с ограниченной тягой между околоземной и околоселеной орбитами.

T , Н	0.3	0.315	0.320	0.325	0.330
Δt_{opt} , сутки	117.311	126.50623	127.44776	128.27680	128.82569
m_f , кг	931.0965	939.20494	940.08771	940.94554	941.48147

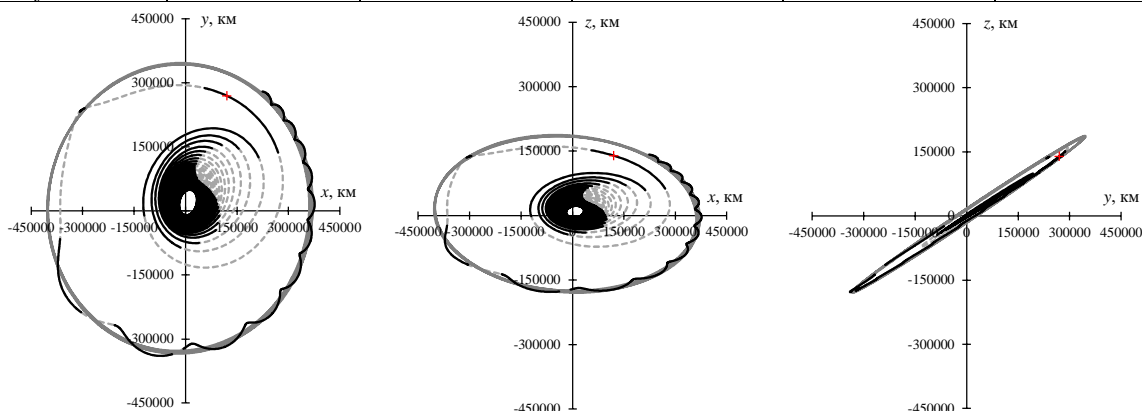


Рисунок 8. Проекция ОТ-траекторий с тягой 0.33 Н на координатные плоскости в EME2000.

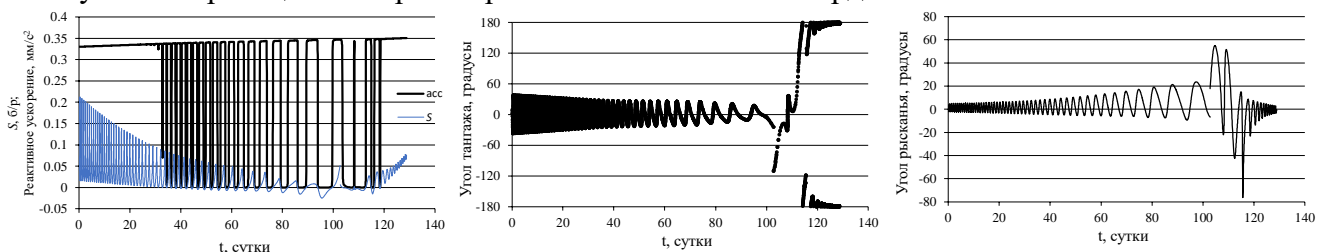


Рисунок 9. Оптимальное управление на ОТ-траектории перелета к Луне.

Приведена формулировка задачи сквозной оптимизации траектории перелета к Луне КА с идеально-регулируемым двигателем и описание метода ее решения. Условия непрерывности траектории в точке стыковки геоцентрического и селеноцентрического участков в заданный момент времени t_1 можно переписать с использованием декартовых переменных:

$$\mathbf{r}^- = \mathbf{r}^+ + \mathbf{r}_M, \mathbf{v}^- = \mathbf{v}^+ + \mathbf{v}_M, t^- = t^+ = t_1, \quad (15)$$

где \mathbf{r}^- и \mathbf{v}^- - векторы положения и скорости КА в геоцентрической системе координат в конечный момент t^- геоцентрического участка, \mathbf{r}^+ и \mathbf{v}^+ - векторы положения и скорости КА в селеноцентрической системе координат в начальный момент t^+ селеноцентрического участка, \mathbf{r}_M и \mathbf{v}_M - векторы положения и скорости Луны в геоцентрической системе координат в фиксированный момент стыковки t_1 , $t(K_1^-) = t^-$ и $t(K_1^+) = t^+$. Выбранное условие стыковки на сфере Хилла Луны имеет вид:

$$r^+ = r_1^* \Leftrightarrow (\mathbf{r}^- - \mathbf{r}_M)^T (\mathbf{r}^- - \mathbf{r}_M) = (r_1^*)^2, \quad (16)$$

где $r^+ = |\mathbf{r}^+|$. Для вывода необходимых условий оптимальности в точке стыковки используется конечная функция Лагранжа в виде

$$l = (\mathbf{r}^+ + \mathbf{r}_M - \mathbf{r}^-) \cdot \boldsymbol{\lambda}_r + (\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}_M - \mathbf{v}^-) \cdot \boldsymbol{\lambda}_v + (r^+ - r_1^*) \cdot \lambda_1 + (t^+ - t^-) \cdot \lambda_t + (t^- - t_1) \cdot \lambda_{t1},$$

где $\boldsymbol{\lambda}_r, \boldsymbol{\lambda}_v, \lambda_1, \lambda_t, \lambda_{t1}$ – неопределенные множители Лагранжа. Для такой функции Лагранжа условия трансверсальности примут вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_r^- &= -\frac{\partial l}{\partial \mathbf{r}^-} = \boldsymbol{\lambda}_r, \mathbf{p}_r^+ = \frac{\partial l}{\partial \mathbf{r}^+} = \boldsymbol{\lambda}_r + \lambda_1 \frac{\partial r^+}{\partial \mathbf{r}^+} = \boldsymbol{\lambda}_r + \lambda_1 \frac{\mathbf{r}^+}{r^+}, \\ \mathbf{p}_v^- &= -\frac{\partial l}{\partial \mathbf{v}^-} = \boldsymbol{\lambda}_v, \mathbf{p}_v^+ = \frac{\partial l}{\partial \mathbf{v}^+} = \boldsymbol{\lambda}_v, p_t^- = -\frac{\partial l}{\partial t^-} = \lambda_t - \lambda_{t1}, p_t^+ = \frac{\partial l}{\partial t^+} = \lambda_t. \end{aligned} \quad (17)$$

Из этих условий следуют соотношения $p_t^- = p_t^+ - \lambda_{t1}$, $\mathbf{p}_r^- = \mathbf{p}_r^+ - \lambda_1 \frac{\mathbf{r}^+}{r^+}$ и $\mathbf{p}_v^- = \mathbf{p}_v^+$.

Для вычисления краевых условий (15) и (16) требуется преобразование из системы равноденственных элементов в декартовый фазовый вектор, а для вычисления необходимых условий оптимальности (17) – соответствующее каноническое преобразование сопряженного вектора. Каноническое преобразование используется для перевода сопряженных переменных между геоцентрическими и селеноцентрическими системами координат. Для начального приближения в качестве точки стыковки используется точка либрации EML_1 системы Земля-Луна, а переход к оптимальной стыковке этих участков проводится с использованием метода продолжения.

На рисунке 10 представлены зависимости расстояния $d_{стык.}$ между оптимальной точкой стыковки и точкой либрации EML_1 от суммарного числа витков траекторий. На графике показана аппроксимационная зависимость $d_{стык.}$ от суммарного значения приращения угловой переменной K с экстраполяцией в область больших значений угловой дальности (пунктирная линия).

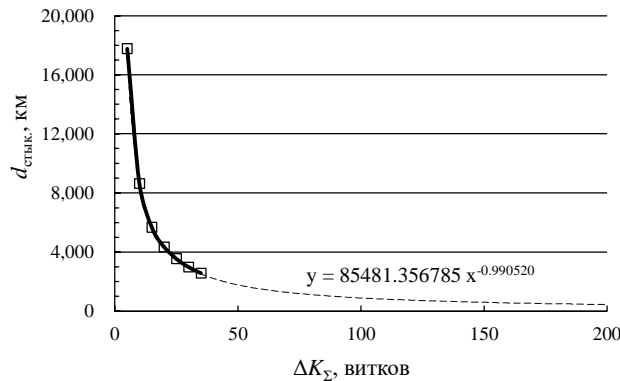


Рисунок 10. Зависимость расстояния между оптимальной точкой стыковки и точкой либрации EML_1 от суммарного значения углового переменного K .

С ростом суммарного числа витков траекторий перелета к Луне в рассмотренном диапазоне от 5 до 35 витков, расстояние между оптимальной точкой стыковки и точкой либрации быстро уменьшается от 17760.037 км до

2560.7455 км (тонкие сплошные линии), затем асимптотически приближаясь к нулевому значению, т.е. к точке EML_1 . По прогнозу, при 100 витках это расстояние уменьшится до 893 км, а при 200 витках – до 449 км. По результатам расчетов, как и ожидалось, увеличение числа витков приводит к уменьшению реактивного ускорения и к уменьшению расстояния от оптимальной точки стыковки до EML_1 . Это связано с тем, что чем меньше значение реактивного ускорения КА, тем меньше ширина допустимой горловины в окрестности точки либрации EML_1 при входе в сферу Хилла Луны, при прохождении через которую возможен захват КА на окололунную орбиту с использованием располагаемой ограниченной тяги.

В шестой главе рассмотрена задача оптимизации гелиоцентрического участка траектории межпланетного перелета при использовании схемы полета со стыковкой планетоцентрических и гелиоцентрического участков траектории в точках либрации L_2 системы Земля-Солнце и L_1 системы планета назначения-Солнце с учетом притяжения Солнца, Земли и планеты назначения. Показана возможность сокращения требуемых затрат характеристической скорости по сравнению с оценками, полученными с применением метода точечных сфер действия (ТСД). На рисунке 11 представлена схема перелета с малой тягой между точкой либрации L_2 системы Солнце-Земля (ESL_2) и точкой либрации L_1 системы Солнце-Юпитер (JSL_1).



Рисунок 11. Схема межпланетного перелета КА с ЭРДУ между точками либрации ESL_2 и JSL_1 .

На этом рисунке, в частности, показаны оскулирующие гелиоцентрические орбиты этих точек либрации на моменты отправления и прибытия. Видно, что радиус афелия оскулирующей орбиты ESL_2 больше радиуса орбиты Земли, а радиус перигелия оскулирующей орбиты JSL_1 существенно меньше радиуса орбиты Юпитера. Это позволяет надеяться, что требуемые затраты характеристической скорости для перелета между этими точками либрации окажутся заметно меньше, чем затраты характеристической скорости на гелиоцентрический участок перелета Земля-Юпитер в рамках метода ТСД. В диссертации представлен метод оптимизации гелиоцентрических траекторий между коллинеарными точками либрации различных планет и приведены численные примеры оптимальных траекторий между точками либрации L_2 системы

Земля-Солнце и точками либрации L_1 систем Марс-Солнце, Юпитер-Солнце, Сатурн-Солнце. В таблице 2 представлены основные исходные данные решаемых задач. В таблице 3 приведены результаты оптимизации возмущенных ОТ-траекторий перелета между точками либрации и невозмущенных траекторий перелета к целевой планете, рассчитанных с использованием метода ТСД, для даты отлета, соответствующей минимальному значению характеристической скорости при расчете с помощью метода ТСД. В таблице 3 используются следующие обозначения: n_b – количество включений ЭРДУ, T_b – моторное время, m_p – затраты топлива, V_{ch} – характеристическая скорость перелета. В рассмотренных случаях оказалось, что затраты характеристической скорости на перелет между точками либрации существенно (на 8-22%) меньше оценки характеристической скорости перелета, которую можно получить с использованием метода ТСД, причем чем ближе орбита планеты к орбите Земли, тем больше относительная разница в затратах характеристической скорости.

Таблица 2. Исходные данные для решения задачи оптимизации гелиоцентрических траекторий.

Параметры	Земля-Марс	Земля-Юпитер	Земля-Сатурн
Диапазон дат отлета	1 января 2025 г. – 1 марта 2027 г.	1 января 2022 г. – 1 марта 2023 г.	1 марта 2038 г. – 31 марта 2039 г.
Время перелета, сутки	350	2200	3500
Число целых витков	0	1-2	2
Начальная масса КА, кг	1000	2000	20000
Тяга, мН	350	220	2000
Удельный импульс, с	2000	3000	5000

Таблица 3. Результаты оптимизации ОТ-траекторий перелета к Юпитеру, Марсу и Сатурну.

Тип перелета	Дата отлета	Дата прибытия	Параметры	Перелет между точками либрации	Перелет, рассчитанный с использованием метода ТСД
Земля-Юпитер	3 марта 2022 г.	11 марта 2028 г.	n_b	4	2
			T_b , сутки	1190.4014	1330.7285
			m_p , кг	769.109	859.7733
			V_{ch} , М/с	14280.706	16531.661
Земля-Марс	22 сентября 2026 г.	7 сентября 2027 г.	n_b	2	2
			T_b , сутки	163.5282	186.2947
			m_p , кг	252.1295	287.2312
			V_{ch} , М/с	5698.164	6641.029
Земля-Сатурн	19 февраля 2039 г.	25 сентября 2048 г.	n_b	3	2
			T_b , сутки	1863.8517	2007.495
			m_p , кг	6568.473	7074.691
			V_{ch} , М/с	19521.489	21405.217

В Приложении представлены особенности реализации библиотеки программ для вычислений в комплексной дуальной области и результаты тестирования разработанной библиотеки программ, также, используемые преобразования между системами координат и результаты тестирования правильности преобразований фазовых и сопряженных переменных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе рассмотрена проблема оптимизации траекторий межорбитальных и межпланетных перелетов и перелетов к Луне с малой тягой при использовании реалистичной математической модели возмущающих ускорений. Основные результаты работы состоят в следующем:

- предложен метод, основанный на решении ОМ-задачи с последующим продолжением оптимальной ОМ-траектории в оптимальную ОТ-траекторию. Для решения ОМ-задачи также используется метод продолжения, причем в качестве начального приближения используются нулевые начальные значения сопряженных переменных;
- предложен метод диагностики существования ОТ-траектории с заданным значением тяги с помощью решения T_{\min} -задачи. T_{\min} -траектория и минимальная тяга также вычисляется продолжением из оптимальной ОМ-траектории. Таким образом, предложенный метод позволяет автоматизировать процесс вычисления оптимальной ОТ-траектории;
- рассмотрена задача оптимизации перелета с фиксированной угловой дальностью и свободным временем. Основное преимущество рассматриваемой формулировки задачи оптимизации траектории с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета заключается в том, что для однопериодных семейств траекторий известно единственное решение, удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности;
- представлен метод оптимизации возмущенных траекторий КА с ЭРДУ с использованием комплексных дуальных чисел. Предлагаемый метод позволяет автоматизировать подготовку математической модели, необходимой для оптимизации возмущенной траектории при использовании принципа максимума и метода продолжения, с помощью автоматизации вычисления производных от возмущающих ускорений по фазовому вектору с использованием комплексных дуальных чисел с последующим вычислением требуемых производных от вектора невязок краевой задачи методом комплексного шага;
- предложен подход к решению задачи сквозной оптимизации траектории перелета к Луне с малой тягой на основе использования канонического преобразования в точке стыковки геоцентрического и селеноцентрического участков траектории. Получены необходимые условия оптимальности точки стыковки двух участков

траектории и на их основе разработан метод сквозной оптимизации траекторий перелета к Луне;

- представлен метод оптимизации гелиоцентрического участка траектории межпланетного перелета между точками либрации с малой тягой в рамках эфемеридной модели движения небесных тел для вычисления возмущающих ускорений. Проведено сравнение полученных результатов с помощью рассматриваемой схемы перелета с оптимальными решениями, полученными с использованием метода точечных сфер действия.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в журналах, входящих в перечень ВАК Российской Федерации и МРБД

1. **Yoon S.W.** Optimization of perturbed spacecraft trajectories using complex dual numbers. Part 1: Theory and method / Petukhov V.G., Yoon S.W. // *Cosmic Research*, 2021, Vol. 59, Is. 5, p. 401–413.

2. **Yoon S.W.** Optimization of perturbed spacecraft trajectories using complex dual numbers. Part 2: Numerical Results / Petukhov V.G., Yoon S.W. // *Cosmic Research*, 2021, Vol. 59, Is. 6, p. 517–528.

3. **Юн Сон Ук** Траектории перелета к Луне с минимальной тягой / Иванюхин А.В., Петухов В.Г., Юн Сон Ук // *Космические исследования*, 2022, т. 60, № 6, с. 517–527.

4. **Юн Сон Ук** Метод управления движением малых космических аппаратов с использованием надувных тормозных устройств для торможения при орбитальном полете до входа в атмосферу / Кульков В.М., Юн Сон Ук, Фирсюк С.О. // *Вестник Московского авиационного института*, 2020, т. 27, №3, с. 23–36.

5. **Yoon S.W.** Minimum-thrust transfers to the Moon / Ivanyukhin A.V., Petukhov V.G., Yoon S.W. // *Cosmic Research*, 2022, Vol. 60, Is. 6, p. 481–490.

Публикации в иностранных изданиях, входящих в Web of Science и Scopus

6. **Yoon S.W.** Optimization of finite-thrust trajectories with fixed angular distance / Petukhov V.G., Ivanyukhin A.V., Popov G.A., Testoyedov N.A., Yoon S.W. // *Acta Astronautica*, 2022, Vol. 197, p. 354–367.

7. **Yoon S.W.** End-to-end optimization of power-limited Earth–Moon trajectories / Petukhov V.G., Yoon S.W. // *Aerospace*, 2023, Vol. 10, No. 3, p. 1–22.

8. **Yoon S.W.** Minimum-fuel low-thrust trajectories to the Moon / Yoon S.W., Petukhov V.G. // *Acta Astronautica*, 2023, Vol. 210, p. 102–116.