

Тепловые процессы в технике. 2024. Т. 16. № 5. С. 212–221
Thermal processes in engineering, 2024, vol. 16, no. 5, pp. 212–221

Научная статья
УДК 536.2

Напряженность температурного поля на поверхности включений графена в композите с керамической матрицей

И.В. Лавров¹, В.В. Бардушкин^{1✉}, В.Б. Яковлев¹

¹Институт нанотехнологий микроэлектроники РАН, Москва, Россия

✉bardushkin@mail.ru

Аннотация. Рассмотрена задача нахождения напряженности температурного поля на границе включения в матричном композите со стороны матрицы. Получено выражение для оператора концентрации напряженности температурного поля на поверхности анизотропных включений в форме сильно сжатых сфероидов в матричном композите в зависимости от положения точки на поверхности включения, от объемной доли включений в материале, от ориентации включения. Данные операторы связывают поля на поверхности включения со стороны матрицы со средней величиной напряженности температурного поля в образце композита. На основе полученных выражений проведены модельные расчеты для композита с матрицей из Al_2O_3 и включениями из многослойного графена. Вычислялись значения компонент и модуля напряженности температурного поля в точках на ребре включений со стороны матрицы при фиксированной величине напряженности приложенного температурного поля при различных аспектных отношениях сфероидов, моделирующих форму графеновых включений, а также при различных углах между направлением напряженности приложенного поля и плоскостью вращения сфероидов. Показано, что в случае графеновых многослойных включений в точках на их ребрах величина напряженности поля со стороны керамической матрицы может в несколько десятков раз превышать напряженность приложенного поля.

Ключевые слова: композит, матрица, графен, включение, операторы концентрации напряженности температурного поля, обобщенное сингулярное приближение

Для цитирования. Лавров И.В., Бардушкин В.В., Яковлев В.Б. Напряженность температурного поля на поверхности включений графена в композите с керамической матрицей // Тепловые процессы в технике. 2024. Т. 16. № 5. С. 212–221. URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=182009>

Original article

Temperature field strength on the graphene inclusions surface in composite with the ceramic matrix

I.V. Lavrov¹, V.V. Bardushkin¹✉, V.B. Yakovlev¹¹*Institute of Nanotechnology of Microelectronics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*✉*bardushkin@mail.ru*

Abstract. The article considers the problem of finding the temperature field strength at the inclusion boundary in the matrix composite from the matrix side. The authors obtained an expression for operator of the temperature field intensity concentration on the surface of anisotropic inclusions in the form of strongly compressed spheroids in matrix composite depending on a point position on the inclusion surface, inclusions volume fraction in the material, and orientation of the inclusion. These operators associated the fields on the inclusion surface on the matrix side to the average value of the temperature field strength in the composite sample. Based on the obtained expressions, model computations were performed for a composite with the Al₂O₃ matrix and inclusions from multilayer graphene. The values of the components and the temperature field strength modulus at the points on the edge of the inclusions on the matrix side were being computed at a fixed value of the applied temperature field strength at various aspect ratios of spheroids, modeling the shape of graphene inclusions, as well as at various angles between the direction of the applied field strength and the plane of rotation of spheroids. The article demonstrates that in the case of graphene multilayer inclusions at the points on their ribs, the field strength from the side of the ceramic matrix can be several tens fold higher than the applied field strength.

Keywords: composite, matrix, graphene, inclusion, operators of temperature field strength concentration, generalized singular approximation

For citation. Lavrov I.V., Bardushkin V.V., Yakovlev V.B. Temperature field strength on the graphene inclusions surface in composite with the ceramic matrix. *Thermal processes in engineering*, 2024, vol. 16, no. 5, pp. 212–221. (In Russ.). URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=182009>

Введение

Композиты с керамической матрицей и графеновыми включениями последние полтора десятилетия вызывают повышенный интерес у исследователей как перспективный материал для применения в различных областях науки и техники [1–7]. Небольшие добавки графена, обладающего электро-, теплофизическими и механическими свойствами [7–13], в керамику приводят к существенному улучшению ее соответствующих свойств. Например, даже малые добавки графена в матрицу приводят к существенному увеличению ее теплопроводности, что имеет большое значение для улучшения эксплуатационных свойств материала в целом, в частности для устранения неравномерного нагрева слоев материала при интенсивных внешних воз-

действиях различного физического характера, который может приводить к активизации диффузионных и сегрегационных процессов в материале.

В то же время в композиционном материале значительная величина градиента температурного поля может возникать на микро- и наноуровне, у границ раздела компонентов материала, существенно отличающихся по теплопроводящим свойствам. Это может приводить к изменению свойств частиц компонентов композита, ослаблению связи между включениями и матрицей, что в итоге снизит эксплуатационные характеристики композита.

В связи с этим представляется актуальной задача прогнозирования локальных температурных полей на границе между включениями и матрицей в матричном композите.

В работе [14] были получены аналитические выражения для оценки распределения напряженности электрического поля на границе включения в матричном композите. Поскольку в стационарном случае задачи нахождения распределения электростатического потенциала и температурного поля математически эквивалентны [15], данные результаты могут быть использованы для решения задачи о распределении напряженности температурного поля на границе включений в матричном композите. В настоящей работе рассматривается матричный композит с керамической матрицей Al_2O_3 и графеновыми многослойными включениями в виде тонких чешуек, форма которых аппроксимируется сильно сжатыми эллипсоидами вращения. Вычисляются компоненты напряженности температурного поля в точках вдоль острого ребра включения со стороны матрицы в зависимости от угла между радиус-вектором точки и вектором напряженности температурного поля. Исследуется влияние аспектного отношения включений на величину напряженности температурного поля на границе включения.

Постановка задачи.

Оператор концентрации напряженности температурного поля на поверхности включения в матричном композите

Пусть имеется образец объемом V статистически однородного матричного композита с эллипсоидальными включениями одного типа. Матрица считается изотропной с теплопроводностью k^m , включения – анизотропными с тензором теплопроводности \mathbf{k}^p , объемная доля включений считается известной и равной f . Форму всех включений будем считать одинаковой, главные оси тензоров теплопроводности – совпадающими с осями соответствующих эллипсоидов, все включения – случайным образом распределенными по объему образца, а их ориентации – распределенными по некоторому вероятностному закону. Предполагается также отсутствие внутренних источников тепла в материале.

Температурное поле в образце в зависимости от радиус-вектора точки и времени обозначим $T(\mathbf{r}, t)$, как в классических монографиях по теории теплопроводности, например в [16, 17]. Что касается напряженности температурного поля,

то в ряде работ это понятие, обозначающее векторную величину, противоположную градиенту температурного поля, не вводится, то есть в математических формулировках используется непосредственно градиент температурного поля, в частности в [16–19]. В то же время во многих работах, посвященных теплофизическим свойствам неоднородных сред, для удобства вводится специальное обозначение для вектора напряженности температурного поля: $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = -\nabla T(\mathbf{r}, t)$, например в [20–22]. В некоторых работах используется специальное обозначение для модуля градиента температурного поля, то есть фактически для модуля напряженности температурного поля [23, 24].

Пусть к границе S данного образца приложено постоянное во времени однородное температурное поле $T_0(\mathbf{r})$ с напряженностью \mathbf{H}_0 . Тогда в образце установится некоторое не зависящее от времени температурное поле $T(\mathbf{r})$ с напряженностью $\mathbf{H}(\mathbf{r})$. Ставится задача найти распределение напряженности температурного поля на границе S_p произвольного включения со стороны матрицы в данном образце композиционного материала.

В работе [14] была рассмотрена аналогичная задача для нахождения напряженности электрического поля на границе включения в композите. В силу полной математической аналогии задач нахождения электростатического и температурного полей в стационарном случае выражение для напряженности температурного поля в точке \mathbf{r} поверхности S_p эллипсоидального включения со стороны матрицы можно записать с использованием полного оператора концентрации напряженности температурного поля на поверхности включения $\mathbf{K}^H(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{H}^m(\mathbf{r}) = \mathbf{K}^H(\mathbf{r}) \langle \mathbf{H} \rangle, \quad \mathbf{r} \in S_p, \quad (1)$$

где $\langle \mathbf{H} \rangle$ – средняя напряженность температурного поля в образце, которая при данных граничных условиях задачи равна напряженности приложенного поля [25]: $\langle \mathbf{H} \rangle = \mathbf{H}_0$.

В свою очередь $\mathbf{K}^H(\mathbf{r})$ можно представить в виде произведения [14]:

$$\mathbf{K}^H(\mathbf{r}) = \mathbf{K}^{sH}(\mathbf{r}) \mathbf{K}^{vH}, \quad \mathbf{r} \in S_p, \quad (2)$$

где $\mathbf{K}^{SH}(\mathbf{r})$ – оператор поверхностной концентрации поля, связывающий напряженность температурного поля в данной точке поверхности включения со стороны матрицы и среднюю напряженность температурного поля в матрице, \mathbf{K}^{vH} – оператор объемной концентрации поля, связывающий среднюю напряженность поля в матрице и среднюю напряженность поля в образце. Данные операторы в обобщенном сингулярном приближении [26, 27] при выборе матрицы в качестве среды сравнения имеют вид [14]:

$$\mathbf{K}^{SH}(\mathbf{r}) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{r})(\mathbf{k}^p - k^m \mathbf{I})) \times \left[\mathbf{I} - \mathbf{g}(\mathbf{k}^p - k^m \mathbf{I}) \right]^{-1}, \quad \mathbf{r} \in S_p, \quad (3)$$

$$\mathbf{K}^{vH} = [(1-f)\mathbf{I} + f \langle (\mathbf{I} - \mathbf{g}(\mathbf{k}^p - k^m \mathbf{I}))^{-1} \rangle]^{-1}, \quad (4)$$

где \mathbf{I} – единичный тензор 2-го ранга; $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ – тензор 2-го ранга, определяющийся с учетом скалярной теплопроводности матрицы выражением:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{k^m} (\mathbf{n}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r} \in S_p, \quad (5)$$

$\mathbf{n}(\mathbf{r})$ – внешняя единичная нормаль к поверхности S_p в точке \mathbf{r} .

Усреднение в (4) производится по всем включениям, погруженным в матрицу. В выражениях (3), (4) используется тензор 2-го ранга \mathbf{g} , связанный с включением; его компоненты в системе координат, связанной с осями эллипсоидального включения, вычисляются по формуле [26]:

$$g_{ij} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{n_i n_j}{n_\alpha k_{\alpha\beta}^m n_\beta} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (6)$$

где компоненты нормали n_i ($i = 1, 2, 3$) к поверхности включения выражаются через сферические углы ϑ, φ . В формуле (6) учтено, что в качестве среды сравнения выбрана матрица. В случае когда она изотропная ($k_{\alpha\beta}^m = k^m \delta_{\alpha\beta}$, $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера), выражение (6) можно переписать в более простой форме:

$$g_{ij} = -\frac{1}{4\pi k^m} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} n_i n_j \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (7)$$

В случае изотропной среды сравнения тензор \mathbf{g} получается диагональным, а его главные компоненты связаны с главными компонентами тензора геометрических факторов эллипсоида по формуле [28]:

$$g_{jj} = -\frac{L_j}{k^m}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (8)$$

L_j – главные компоненты тензора геометрических факторов эллипсоида в вакууме [23]:

$$L_j = \frac{a_1 a_2 a_3}{2} \int_0^{\infty} \frac{dq}{(a_j^2 + q)R(q)}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$R(q) = [(a_1^2 + q)(a_2^2 + q)(a_3^2 + q)]^{1/2},$$

где $a_j, j = 1, 2, 3$ – полуоси эллипсоида.

Случай анизотропных включений в форме сильно сжатых сфероидов

Пусть включения в матричном композите – анизотропные в форме сильно сжатых эллипсоидов вращения (сфероидов) с полуосями $a_1 = a_2 = a$, $a_3 = c$, $a \gg c$. Рассмотрим конкретное включение, занимающее область V_p с поверхностью S_p . Пусть плоскость вращения данного включения-сфероида образует угол ϕ с направлением вектора напряженности приложенного поля \mathbf{H}_0 . Введем систему координат $\xi\eta\zeta$, связанную с данным включением, следующим образом. Начало координат O возьмем в центре сфероида; если $\phi > 0$, направим ось ξ вдоль проекции вектора \mathbf{H}_0 на плоскость вращения сфероида, ось ζ – вдоль проекции \mathbf{H}_0 на ось вращения диска, ось η – перпендикулярно осям ξ и ζ так, чтобы система координат $\xi\eta\zeta$ была правой. Если $\phi = 0$, то есть вектор \mathbf{H}_0 лежит в плоскости вращения сфероида, направим ось ξ вдоль \mathbf{H}_0 , ось η направим в плоскости диска перпендикулярно оси ξ , а ось ζ направим перпендикулярно плоскости диска, чтобы система $\xi\eta\zeta$ была правой. Таким образом, плоскость вращения сфероида – это плоскость $\xi\eta$.

Возьмем следующую параметризацию поверхности S_p сфероида:

$$\begin{aligned} \xi &= a \sin \theta \cos \alpha, & \eta &= a \sin \theta \sin \alpha, \\ \zeta &= c \cos \theta, & \theta &\in [0; \pi], \quad \alpha \in [0; 2\pi), \end{aligned} \quad (9)$$

где α имеет смысл угла между осью ξ и радиус-вектором проекции точки $M(\xi, \eta, \zeta)$ поверхно-

сти S_p на плоскость $\xi\eta$; значение параметра θ вообще не совпадает с величиной полярного угла сферической системы координат. Вектор внешней неединичной нормали \mathbf{n} к S_p в точке M имеет компоненты:

$$\begin{aligned} n_\xi &= a^{-1} \sin \theta \cos \alpha, \quad n_\eta = a^{-1} \sin \theta \sin \alpha, \\ n_\zeta &= c^{-1} \cos \theta. \end{aligned} \quad (10)$$

Его модуль $n = \sqrt{a^{-2} \sin^2 \theta + c^{-2} \cos^2 \theta}$; вектор внешней единичной нормали к S_p : $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}/n$.

С точки зрения вычисления напряженности температурного поля особое внимание следует обратить на точки «острого ребра» на «экваторе» сильно сжатого сфероида. Они образуют окружность радиуса a в плоскости $\xi\eta$. Положение точки M на этой окружности задается углом α , при этом параметр θ принимает значение $\pi/2$, то есть для этих точек из (9) имеем: $M(\alpha) = (a \cos \alpha, a \sin \alpha, 0)$, $\alpha \in [0; 2\pi)$. Для единичной нормали в этих точках, очевидно, будем иметь: $\mathbf{n}_0(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$.

Для тензора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ в точках $M(\alpha)$ в системе $\xi\eta\zeta$ получим по формуле (5):

$$\mathbf{A}(M(\alpha)) = \frac{1}{k^m} \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & 0 \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

В случае сжатого сфероида ($a = b > c$) главные компоненты тензора геометрических факторов эллипсоида вычисляются по формулам [29]:

$$\begin{aligned} L_1 = L_2 &= \frac{h(e)}{2e^2} (\pi/2 - \arctg[h(e)]) - \frac{h^2(e)}{2}, \\ L_3 &= 1 - 2L_1, \end{aligned} \quad (12)$$

где $e = \sqrt{1 - c^2/a^2}$, $h(e) = \sqrt{1/e^2 - 1}$. Для сильно сжатых сфероидов ($a \gg c$) из (12) несложно получить оценку:

$$L_1 = L_2 \approx \frac{\pi c}{4 a}, \quad L_3 \approx 1 - \frac{\pi c}{2 a}, \quad a \gg c, \quad (13)$$

поэтому для главных компонент тензора \mathbf{g} включения в системе $\xi\eta\zeta$ с учетом (8), (13) имеем выражения:

$$g_{11} = g_{22} \approx -\frac{1}{k^m} \frac{\pi c}{4 a}, \quad g_{33} \approx -\frac{1}{k^m} \left(1 - \frac{\pi c}{2 a}\right). \quad (14)$$

Для включения из многослойного графена тензор теплопроводности в системе $\xi\eta\zeta$ имеет вид:

$$\mathbf{k}^p = \begin{pmatrix} k_\perp & 0 & 0 \\ 0 & k_\perp & 0 \\ 0 & 0 & k_\parallel \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где k_\perp и k_\parallel – главные компоненты теплопроводности вдоль и поперек слоев графена соответственно, причем $k_\perp \gg k_\parallel$.

Для удобства введем тензор 2-го ранга λ , связанный с конкретным включением, по формуле:

$$\lambda = [\mathbf{I} - \mathbf{g}(\mathbf{k}^p - k^m \mathbf{I})]^{-1}. \quad (16)$$

В системе $\xi\eta\zeta$ включения тензор λ – диагональный, его главные компоненты:

$$\begin{aligned} \lambda'_{11} = \lambda'_{22} &= [1 - g_{11}(k_\perp - k^m)]^{-1}, \\ \lambda'_{33} &= [1 - g_{33}(k_\parallel - k^m)]^{-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

С учетом формул (2)–(4), (16) выражение для полного оператора концентрации напряженности температурного поля на поверхности включения примет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^H(\mathbf{r}) &= (\mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{r})(\mathbf{k}^p - k^m \mathbf{I})) \times \\ &\times \lambda [(1 - f)\mathbf{I} + f \langle \lambda \rangle]^{-1}, \quad \mathbf{r} \in S_p, \end{aligned} \quad (18)$$

где вид тензора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ зависит от точки на поверхности включения: для точек $M(\alpha)$ на ребре включения он имеет вид (11). Усреднение в (18) производится по всем включениям, погруженным в матрицу. Поскольку все включения предполагаются одинаковыми, то данное усреднение производится по всем ориентациям включений в системе координат xyz , связанной с текстурой образца композита.

Пусть ориентации включений в композите имеют равномерное распределение. В этом случае [30]:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{3} (\lambda'_{11} + \lambda'_{22} + \lambda'_{33}) \mathbf{I}, \quad (19)$$

где λ'_{11} , λ'_{22} , λ'_{33} определяются формулами (17). Поскольку $\langle \lambda \rangle$ получился кратным единичному, то он не изменяется при преобразованиях координат, и для полного оператора концентра-

ции напряженности температурного поля на поверхности включения в системе координат $\xi\eta\zeta$ из (18), (19) получим:

$$\mathbf{K}^H(\mathbf{r}) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{r})(\mathbf{k}^p - k^m \mathbf{I})) \lambda \times \left[(1-f) + \frac{f}{3}(\lambda'_{11} + \lambda'_{22} + \lambda'_{33}) \right]^{-1}, \quad \mathbf{r} \in S_p, \quad (20)$$

причем $\mathbf{K}^H(\mathbf{r})$ имеет диагональный вид.

Результаты численного моделирования

На основе полученного выражения (20) для полного оператора концентрации напряженности температурного поля, а также формул (11), (14)–(17) были проведены модельные расчеты для композита с матрицей Al_2O_3 и многослойными графеновыми включениями в форме сильно сжатых сфероидов. Теплопроводность графеновых многослойных включений считалась приблизительно равной теплопроводности графита высокого качества, то есть в данном случае имеем следующие значения компонент теплопроводности ($\text{Вт}/(\text{м}\times\text{К})$): $k_{\perp} = 2000$, $k_{\parallel} = 5,7$, для матрицы Al_2O_3 $k^m = 30$ [31]. Вычислялись отношения компонент и модуля напряженности температурного поля в точках M на ребре включения к модулю напряженности приложенного поля в зависимости от угла α между радиус-вектором данной точки и осью ξ при различных объемных долях включений, при различных аспектных отношениях включений, при различных величинах угла ϕ между напряженностью приложенного поля и плоскостью включения. Аспектные отношения сжатых сфероидов варьировались от 50:1 до 10^4 :1. Расстояние между слоями в многослойном графене равно 0,335 нм, тогда толщина 6-слойного графена приблизительно равна 1,68 нм. При аспектном отношении 50:1 диаметр включения получается равным 84 нм, а при аспектном отношении 10^4 :1 – 17 мкм. Некоторые результаты представлены на рис. 1–3.

Представленные на рис. 1(a) зависимости показывают, что при фиксированной величине напряженности приложенного поля значения компонент H_1 и H_2 в точках M на ребре включения со стороны матрицы существенно зависят от угла α между радиус-вектором данной точки и вектором напряженности приложенного поля, причем в большинстве таких точек величина со-

ответствующей компоненты напряженности существенно превышает величину приложенного поля. В то же время компонента H_3 имеет несущественную, близкую к нулю величину (не показана на рисунке). Абсолютная величина напряженности поля в этих точках в диапазоне $\alpha \in [0^\circ; 68^\circ]$, как видно из рис. 1(б), более чем на порядок превышает напряженность приложенного поля, при этом максимальная величина достигается в точке на оси ξ , которая приблизительно в 26–32 раз больше напряженности приложенного поля (в зависимости от объемной доли включений). При увеличении объемной доли включений в композите при равномерном распределении их ориентаций абсолютные величины компонент и модуль напряженности поля в точках M на ребре включения немного уменьшаются.

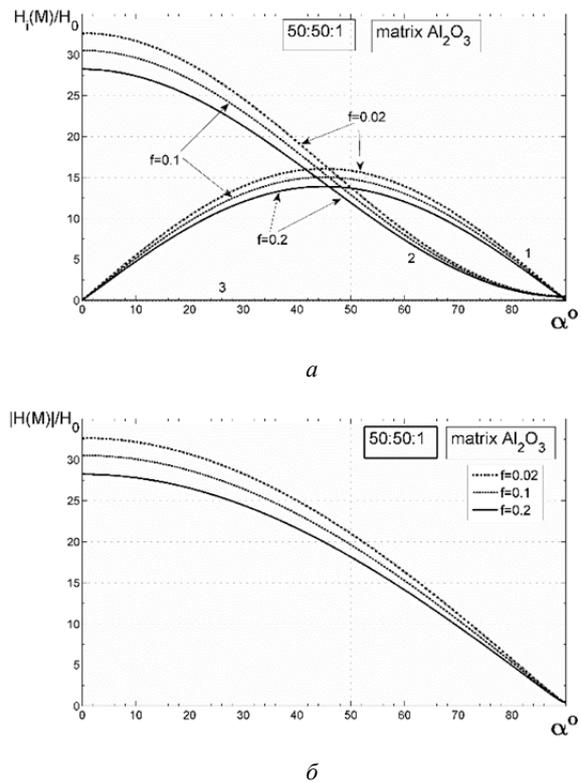


Рис. 1. Зависимости отношения компонент (а) и модуля (б) напряженности температурного поля в точках M на ребре в плоскости $\xi\eta$ графеновых включений к напряженности приложенного поля от угла α между радиус-вектором точки M и вектором напряженности \mathbf{H}_0 приложенного поля при различных объемных долях включений. Аспектное отношение включений 50:50:1. Распределение ориентаций включений равномерное. Номера компонент указаны вблизи соответствующих кривых. Вектор \mathbf{H}_0 лежит в плоскости включения. Матрица Al_2O_3

Как следует из представленных на рис. 2 зависимостей, увеличение аспектного отношения включений (уплощение сфероидов) приводит к возрастанию напряженности температурного поля в точках ребра включения. Следует отметить, что при величине аспектного отношения, приблизительно равной 10^4 , происходит насыщение, то есть дальнейшее возрастание напряженности поля практически незаметно. При этом максимальная величина напряженности температурного поля приблизительно в 65 раз превышает напряженность приложенного поля.

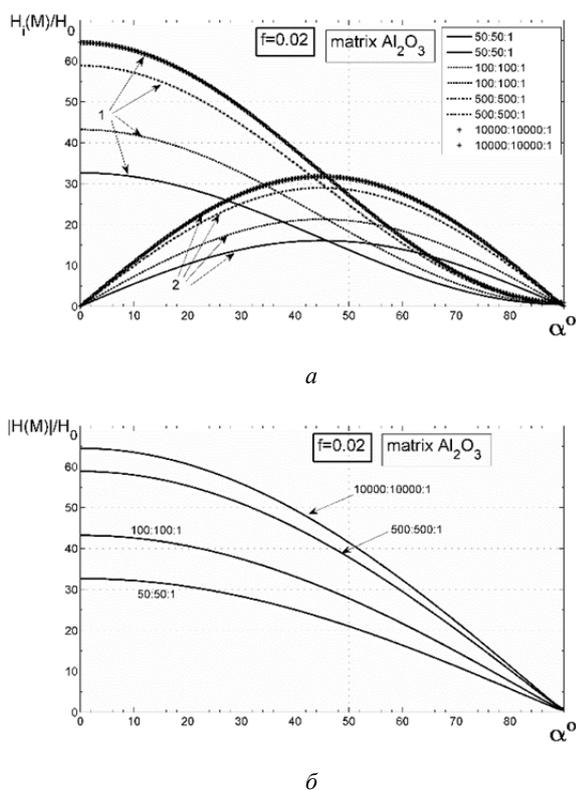


Рис. 2. Зависимости отношения компонент (а) и модуля (б) напряженности температурного поля в точках M на ребре в плоскости $\xi\eta$ графеновых включений к напряженности приложенного поля от угла α между радиус-вектором точки M и вектором напряженности \mathbf{H}_0 приложенного поля при различных аспектных отношениях включений. Объемная доля включений 0,02. Распределение ориентаций включений равномерное. Номера компоненты указаны вблизи соответствующих кривых. Вектор \mathbf{H}_0 лежит в плоскости включения. Матрица Al_2O_3

В общем случае плоскости $\xi\eta$ включений ориентированы различным образом по отношению к направлению вектора \mathbf{H}_0 напряженности приложенного поля. Приведенные на рис. 3 зависимости показывают, что увеличение угла между плоскостью $\xi\eta$ включения и \mathbf{H}_0 приводит

к уменьшению величины напряженности поля в большинстве точек на ребре включения, при этом все зависимости от угла α пересекаются в одной точке.

При аспектном отношении включений, равном 50 (рис. 3), данные зависимости пересекаются при $\alpha \approx 82^\circ$. При других аспектных отношениях пересечение зависимостей происходит при отличных от этого значениях α , при повышении аспектного отношения данная величина α немного увеличивается (зависимости не приведены в данной работе). Данный факт, по-видимому, отражает особенность модельного приближения графеновых включений сжатыми сфероидами и, скорее всего, не имеет большого прикладного значения.

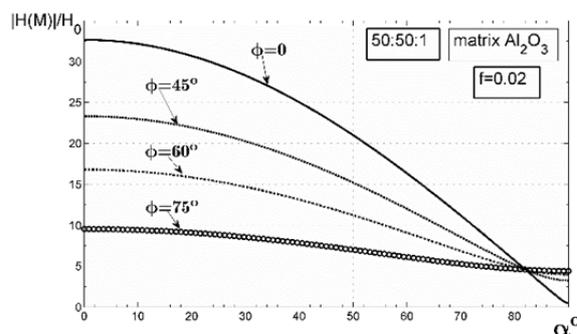


Рис. 3. Зависимости отношения модуля напряженности температурного поля в точках M на ребре в плоскости $\xi\eta$ графеновых включений к напряженности приложенного поля от угла α между радиус-вектором к точке M и проекцией вектора напряженности \mathbf{H}_0 приложенного поля при различных углах ϕ между плоскостью включений и вектором \mathbf{H}_0 . Аспектное отношение включений 50:50:1. Распределение ориентаций включений равномерное. Матрица Al_2O_3

Из полученных результатов можно сделать вывод, что напряженность температурного поля в областях вблизи ребер графеновых включений со стороны керамической матрицы может достигать значительных величин, которые в несколько десятков раз превышают напряженность приложенного температурного поля. Вследствие этого в данных областях может иметь место интенсификация протекающих в них диффузионных и сегрегационных процессов, что в результате может приводить к изменениям физических характеристик материала. При малых объемных долях графеновых включений эти изменения не существенно влияют на макроскопические свойства композиционного материала. Однако при

увеличении объемной доли включений доля областей матрицы, в которых происходят указанные изменения, также увеличивается, что в итоге может приводить к ухудшению эксплуатационных характеристик материала, что согласуется, в частности, с результатами, полученными в работе [4].

Заключение

Основным результатом настоящей работы являются выражение (20) для оператора концентрации напряженности температурного поля на поверхности анизотропных включений в форме сильно сжатого сфероида в матричном композите, а также выражения (14), (16), (17), которые позволяют прогнозировать значения данных величин в любой точке поверхности данных включений в зависимости от внешнего приложенного поля, объемных долей и материальных характеристик компонентов композита, ориентации включения по отношению к направлению напряженности приложенного поля. Проведены модельные расчеты для случая графеновых многослойных включений. Показано, что в точках поверхности на ребрах графеновых включений в матрице Al_2O_3 напряженность температурного поля может в несколько десятков раз превышать напряженность приложенного поля.

Список источников

1. Nieto A., Bisht A., Lahiri D., Zhang C., Agarwal A. Graphene reinforced metal and ceramic matrix composites: a review // *International Materials Reviews*. 27 Oct. 2016. P. 241–302. DOI: 10.1080/09506608.2016.1219481
2. Porwal H., Grasso S., Reece M.J. Review of graphene–ceramic matrix composites // *Advances in Applied Ceramics*. 2013. Vol. 112. No. 8. P. 443–454. DOI: 10.1179/174367613X13764308970581
3. Borrell A., Torrecillas R., Rocha V.G., Fernandez A. Effect of CNFs content on the tribological behaviour of spark plasma sintering ceramic–CNFs composites // *Wear*. 2012. Vol. 274–275, P. 94–99. DOI: 10.1016/j.wear.2011.08.013
4. Шейнерман А.Г., Красницкий С.А. Моделирование влияния агломерации графена на механические свойства керамических композитов с графеном // *Письма в Журнал технической физики*. 2021. Т. 47. Вып. 17. С. 37–40. DOI: 10.21883/PJTF.2021.17.51385.18844
5. Kim H., Lee S.-M., Oh Y.-S., Yang Y.-H., Lim Y.S., Yoon D.H., Lee Ch., Kim J.Y., Ruoff R.S. Unoxidized Graphene/Alumina Nanocomposite: Fracture- and Wear-Resistance Effects of Graphene on Alumina Matrix // *Scientific Reports*. 5 June 2014. Vol. 4, 5176. P. 1–10. DOI: 10.1038/srep05176
6. Савенков Г.Г., Константинов А.Ю., Кузнецов А.В., Пахомов М.А., Столяров В.В. Влияние добавок графена на динамическую прочность и разрушение оксида алюминия при ударном нагружении // *Журнал технической физики*. 2022. Т. 92. Вып. 6. С. 838–844. DOI: 10.21883/JTF.2022.06.52513.47-22
7. Stankovich S., Dikin D.A., Dommett G.H., Kohlhaas K.M., Zimney E.J., Stach E.A., Piner R.D., Nguyen S.T., Ruoff R.S. Graphene-based composite materials // *Nature*. 2006. Vol. 442. Iss. 20. P. 282–286. DOI: 10.1038/nature04969
8. Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V., Jiang D., Zhang Y., Dubonos S.V., Grigorieva I.V., Firsov A.A. Electric field effect in atomically thin carbon films // *Science*. 2004. Vol. 306. Iss. 5696. P. 666–669. DOI: 10.1126/science.1102896
9. Новоселов К.С. Графен: материалы Флатландии // *Успехи физических наук*. 2011. Т. 181. № 12. С. 1299–1311. DOI: 10.3367/UFNr.0181.201112f.1299
10. Bunch J.S., Van der Zande A.M., Verbridge S.S., Frank I.W., Tanenbaum D.M., Parpia J.M., Craighead H.G., McEuen P.L. Electromechanical resonators from graphene sheets // *Science*. 2007. Vol. 315. Iss. 5811. P. 490–493. DOI: 10.1126/science.1136836
11. Yan Zh., Nika D.L., Balandin A.A. Thermal properties of graphene and few-layer graphene: applications in electronics // *IET Circuits, Devices & Systems*. 2015. vol. 9, iss. 1, pp. 4–12. DOI: 10.1049/iet-cds.2014.0093
12. Ткачев С.В., Буслаева Е.Ю., Губин С.П. Графен – новый углеродный наноматериал // *Неорганические материалы*. 2011. Т. 47. № 1. С. 5–14.
13. Елецкий А.В., Искандарова И.М., Книжник А.А., Красников Д.Н. Графен: методы получения и теплофизические свойства // *Успехи физических наук*. 2011. Т. 181. № 3. С. 233–268. DOI: 10.3367/UFNr.0181.201103a.0233
14. Колесников В.И., Яковлев В.Б., Лавров И.В., Сычев А.П., Бардушкин А.В. Распределение электрических полей на поверхности включений в матричном композите // *Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки*. 2023. Т. 513. С. 34–40. DOI: 10.31857/S2686740023060093
15. Milton G. *The Theory of Composites*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 719 p.
16. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений. Москва: ЛЕНАНД, 2018. 1072 с.
17. Лыков А.В. *Теория теплопроводности*. Москва: Высшая школа, 1967. 600 с.
18. Карташов Э.М. Новые соотношения для аналитических решений локально-неравновесного теплообмена // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки»*. 2023. № 6 (111). С. 4–24. DOI: 10.18698/1812-3368-2023-6-4-24

19. **Kartashov E.M.** New energy effect in non-cylindrical domains with a thermally insulated moving boundary // *Russian Technological Journal*. 2023. Vol. 11. No. 5. P. 106–117. DOI: 10.32362/2500-316X-2023-11-5-106-117
20. **Benveniste Y.** On the effective thermal conductivity of multiphase composites. // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*. 1986. Vol. 37. P. 696–713. DOI: 10.1007/BF00947917
21. **Benveniste Y., Miloh T.** The effective conductivity of composites with imperfect thermal contact at constituent interfaces // *International Journal of Engineering Science*. 1986. Vol. 24. No. 9. P. 1537–1552.
22. **Лавров И.В., Бардушкин В.В., Яковлев В.Б.** Прогнозирование эффективной теплопроводности композитов с графеновыми включениями // *Тепловые процессы в технике*. 2023. Т. 15. № 7. С. 299–308. DOI: 10.34759/tpt-2023-15-7-299-308
23. **Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю.** Математическая модель теплопереноса в сферопластике // *Математика и математическое моделирование*. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электронный журнал. 2016. № 4. С. 42–58. DOI: 10.7463/mathm.0416.0846276
24. **Zarubin V.S., Zimin V.N., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y., Novozhilova O.V.** Two-sided estimate of effective thermal conductivity coefficients of a textured composite with anisotropic ellipsoidal inclusions // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*. 2023. Vol. 74. Iss. 4 (139). DOI: 10.1007/s00033-023-02039-0
25. **Stroud D.** Generalized effective-medium approach to the conductivity of an inhomogeneous material // *Physical Review B*. 1975. Vol. 12. No. 8. P. 3368–3373. DOI: 10.1103/PhysRevB.12.3368
26. **Колесников В.И., Яковлев В.Б., Бардушкин В.В., Лавров И.В., Сычѳв А.П., Яковлева Е.Н.** О методе анализа распределений локальных электрических полей в композиционном материале // *Доклады Академии наук*. 2016. Т. 467. № 3. С. 275–279. DOI: 10.7868/S0869565216090097
27. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред. Москва: Наука, 1977. 399 с.
28. **Лавров И.В., Бардушкин В.В., Сычѳв А.П., Яковлев В.Б., Кочетыгов А.А.** О вычислении эффективной теплопроводности текстурированных матричных композитов с высокой объемной долей включений // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 2018. Т. 15. № 3. С. 92–101. DOI: 10.31429/vestnik-15-3-92-101.
29. **Борен К., Хафмен Д.** Поглощение и рассеяние света малыми частицами. Москва: Мир, 1986. 660 с.
30. **Лавров И.В.** Диэлектрическая проницаемость композиционных материалов с текстурой: эллипсоидальные анизотропные кристаллиты // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 2009. № 1. С. 52–58.
31. **Физические величины: справочник / под редакцией И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова.** Москва: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.

References

1. **Nieto A., Bisht A., Lahiri D., Zhang C., Agarwal A.** Graphene reinforced metal and ceramic matrix composites: a review. *International Materials Reviews*, 27 Oct. 2016, pp. 241–302. DOI: 10.1080/09506608.2016.1219481
2. **Porwal H., Grasso S., Reece M.J.** Review of graphene–ceramic matrix composites. *Advances in Applied Ceramics*, 2013, vol. 112, no. 8, pp. 443–454. DOI: 10.1179/174367613X13764308970581
3. **Borrell A., Torrecillas R., Rocha V.G., Fernandez A.** Effect of CNFs content on the tribological behaviour of spark plasma sintering ceramic–CNFs composites. *Wear*, 2012, vol. 274–275, pp. 94–99. DOI: 10.1016/j.wear.2011.08.013
4. **Sheinerman A.G., Krasnitskii S.A.** Modelirovaniye vliyaniya aglomeratsii grafena na mehanicheskiye svoystva keramicheskikh kompozitov s grafenom [Modeling of the Influence of Graphene Agglomeration on the Mechanical Properties of Ceramic Composites with Graphene]. *Pisma v Zhurnal tehnicheckoy fiziki*. 2021, vol. 47, iss. 17. pp. 3740. DOI: 10.21883/PJTF.2021.17.51385.18844
5. **Kim H., Lee S.-M., Oh Y.-S., Yang Y.-H., Lim Y.S., Yoon D.H., Lee Ch., Kim J.Y., Ruoff R.S.** Unoxidized Graphene/Alumina Nanocomposite: Fracture- and Wear-Resistance Effects of Graphene on Alumina Matrix. *Scientific Reports*. 5 June 2014, vol. 4, 5176, pp. 1–10. DOI: 10.1038/srep05176
6. **Savenkov G.G., Konstantinov A.Yu., Kuznetsov A.V., Pakhomov M.A., Stolyarov V.V.** Vliyaniye dobavok grafena na dinamicheskuyu prochnost i razrusheniye oksida alyuminiya pri udarnom nagruzhении [Influence of graphene additives on dynamic strength and failure of alumina under shock loading]. *Zhurnal tehnicheckoy fiziki*, 2022, vol. 92, iss. 6, pp. 838844. (In Russ.). DOI: 10.21883/JTF.2022.06.52513.47-22
7. **Stankovich S., Dikin D.A., Dommett G.H., Kohlhass K.M., Zimney E.J., Stach E.A., Piner R.D., Nguyen S.T., Ruoff R.S.** Graphene-based composite materials. *Nature*, 2006, vol. 442, iss. 20, pp. 282–286. DOI: 10.1038/nature04969
8. **Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V., Jiang D., Zhang Y., Dubonos S.V., Grigorieva I.V., Firsov A.A.** Electric field effect in atomically thin carbon films // *Science*. 2004. Vol. 306. Iss. 5696. P. 666–669. DOI: 10.1126/science.1102896
9. **Novoselov K.S.** Graphen: materialy Flatlandii [Graphene: Materials in the Flatland] // *Uspekhi fizicheskikh nauk*. 2011. Vol. 181. No. 12. P. 12991311. (In Russ.). DOI: 10.3367/UFNr.0181.201112f.1299
10. **Bunch J.S., Van der Zande A.M., Verbridge S.S., Frank I.W., Tanenbaum D.M., Parpia J.M., Craighead H.G., McEuen P.L.** Electromechanical resonators from graphene sheets. *Science*, 2007, vol. 315, iss. 5811, pp. 490–493. DOI: 10.1126/science.1136836
11. **Yan Zh., Nika D.L., Balandin A.A.** Thermal properties of graphene and few-layer graphene: applications

- in electronics. *IET Circuits, Devices & Systems*, 2015, vol. 9, iss. 1, pp. 4–12. DOI: 10.1049/iet-cds.2014.0093
12. **Tkachev S.V., Buslaeva E.Y., Gubin S.P.** Graphen novyy uglerodnyy nanomaterial [Graphene a new carbon nanomaterial]. *Neorganicheskiye materialy*, 2011, vol. 47, no. 1, pp. 514. (In Russ.)
 13. **Eletskii A.V., Iskandarova I.M., Knizhnik A.A., Krasikov D.N.** Graphen: metody polucheniya i teplofizicheskiye svoystva [Graphene: fabrication methods and thermophysical propertie]. *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 2011, vol. 181, no. 3, pp. 233268. (In Russ.). DOI: 10.3367/UFNr.0181.201103a.0233
 14. **Kolesnikov V.I., Yakovlev V.B., Lavrov I.V., Sychev A.P., Bardushkin A.V.** Raspredelenie ehlektricheskikh polei na poverkhnosti vklyucheni v matrichnom kompozite [Distribution of Electric Fields on the Surface of Inclusions in a Matrix Composite]. *Doklady Rossiiskoi akademii nauk. Fizika, tekhnicheskie nauki*, 2023, vol. 513, pp. 34–40. DOI: 10.31857/S268674002306009315.
 15. **Milton G.** The Theory of Composites. Cambridge: Cambridge University Press, 2004, 719 p.
 16. **Kartashov E.M., Kudinov V.A.** Analiticheskie metody teorii teploprovodnosti i ee prilozhenii [Analytical methods of the theory of thermal conductance and its applications]. Moscow: Lenand, 2018, 1072 p. (In Russ.)
 17. **Lykov A.V.** Teoriya teploprovodnosti [Theory of thermal conductivity]. Moscow: Vysshaya shkola, 1967. 600 p. (in Russ.)
 18. **Kartashov E.M.** Novyye sootnosheniya dlya analiticheskikh resheniy lokalno-neravnovesnogo teploobmena [New relations for analytical solution of the local non-equilibrium heat transfer]. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2023, no. 6 (111), pp. 4–24. (In Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2023-6-4-24
 19. **Kartashov E.M.** New energy effect in non-cylindrical domains with a thermally insulated moving boundary. *Russian Technological Journal*, 2023, vol. 11, no. 5, pp. 106–117. (In Russ.). DOI: 10.32362/2500-316X-2023-11-5-106-117
 20. **Benveniste Y.** On the effective thermal conductivity of multiphase composites. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 1986, vol. 37, pp. 696–713. DOI: 10.1007/BF00947917
 21. **Benveniste Y., Miloh T.** The effective conductivity of composites with imperfect thermal contact at constituent interfaces. *International Journal of Engineering Science*, 1986, vol. 24, no. 9, pp. 1537–1552.
 22. **Lavrov I.V., Bardushkin V.V., Yakovlev V.B.** Prediction of the effective thermal conductivity of composites with graphene inclusions. *Thermal processes in engineering*, 2023, vol. 15, no. 7, pp. 299–308. DOI: 10.34759/tpt-2023-15-7-299-308 (In Russ.)
 23. **Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y.** Matematicheskaya model' teploperenosa v sferoplastike [A Mathematical Model of Heat Transfer in Spheroplastic]. *Matematika i matematicheskoye modelirovaniye. Bauman MSTU. Elektronnyi jurnal*, 2016, no. 4, pp. 42–58. (In Russ.). DOI: 10.7463/mathm.0416.0846276 (In Russ.)
 24. **Zarubin V.S., Zimin V.N., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y., Novozhilova O.V.** Two-sided estimate of effective thermal conductivity coefficients of a textured composite with anisotropic ellipsoidal inclusions. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 2023, vol. 74, iss. 4 (139). DOI: 10.1007/s00033-023-02039-0
 25. **Stroud D.** Generalized effective-medium approach to the conductivity of an inhomogeneous material. *Physical Review B*, 1975, vol. 12, no. 8, pp. 3368–3373. DOI: 10.1103/PhysRevB.12.3368
 26. **Kolesnikov V.I., Yakovlev V.B., Bardushkin V.V., Lavrov I.V., Sychev A.P., Yakovleva E.N.** O metode analiza raspredeleniy lokalnykh elektricheskikh poley v kompozitsionnom materiale [A Method of Analysis of Distributions of Local Electric Fields in Composites]. *Doklady Akademii nauk*. 2016. Vol. 467, no. 3, pp. 275–279. (In Russ.). DOI: 10.7868/S0869565216090097
 27. **Shermergor T.D.** Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred [Micromechanics of inhomogeneous medium]. Moscow: Nauka, 1977, 399 p. (In Russ.)
 28. **Lavrov I.V., Bardushkin V.V., Sychev A.P., Yakovlev V.B., Kochetygov A.A.** O vychislenii effektivnoy teploprovodnosti teksturirovannykh matrichnykh kompozitov s vysokoy ob'yomnoy doley vklyucheni [On calculation of the effective thermal conductivity of textured matrix composites with high volume fraction of inclusions]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh centrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva*, 2018, vol. 15, no. 3, pp. 92–101. (In Russ.). DOI: 10.31429/vestnik-15-3-92-101. (In Russ.)
 29. **Bohren C.F., Huffman D.R.** Pogloshchenie i rasseyanie sveta malymi chastitsami [Absorption and Scattering of Light by Small Particles]. Moscow: Mir, 1986, 660 p.
 30. **Lavrov I.V.** Dielektricheskaya pronitsayemost' kompozitsionnykh materialov s teksturoy: ellipsoidal'nyye anizotropnyye kristallity [Permittivity of composite materials with texture: ellipsoidal anisotropic crystallites]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tse ntrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva*, 2009, no. 1, pp. 52–58. (In Russ.)
 31. **Fizicheskie velichiny: spravochnik** [Physical Quantities: A Handbook]. Ed. by I.S. Grigor'ev, E.Z. Meilikhov. Moscow: Energoatomizdat, 1991, 1232 p. (In Russ.)