

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ

(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи



Васькова Варвара Сергеевна

# ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ ПРИ ДВИЖЕНИИ ВДОЛЬ ЛЕЕРНОЙ СВЯЗИ

Специальность 1.1.7.

Теоретическая механика, динамика машин

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,

доцент А.В. Родников

Москва, 2026 год

## Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Постановка модельной задачи о движении космического аппарата с солнечным парусом вдоль леерной связи</b>	<b>14</b>
1.1. Математическая модель солнечного паруса . . . . .	15
1.2. Базовая калибровочная характеристика . . . . .	21
1.3. Производная калибровочная характеристика . . . . .	23
1.4. Математическая модель леерной связи . . . . .	27
1.5. Связное движение космического аппарата . . . . .	29
1.6. Анализ сил, действующих на космический аппарат . . . . .	30
1.7. Постановка модельной задачи . . . . .	35
1.8. Уравнения движения и теорема об изменении кинетической энергии	35
1.9. Выводы по главе 1 . . . . .	38
<b>2 Задача о движении космического аппарата с постоянно ориентированным солнечным парусом вдоль леерной связи</b>	<b>39</b>
2.1. Маятниковые колебания . . . . .	40
2.2. Необходимое и достаточное условия существования связного движения . . . . .	42
2.3. Пары точек, допускающие связное перемещение . . . . .	46
2.4. Алгоритм исследования динамики полета космического аппарата с постоянно ориентированным солнечным парусом . . . . .	50
2.5. Продолжительность перемещения между наиболее удаленными точками леерной связи . . . . .	53
2.6. Перемещение между произвольными точками леерной связи . . . . .	55
2.7. Оценка динамических характеристик . . . . .	56
2.8. Выводы по главе 2 . . . . .	60
<b>3 Задача о движении космического аппарата с управляемым солнечным парусом вдоль леерной связи</b>	<b>62</b>
3.1. Движение с учетом коррекции положения солнечного паруса . . . . .	63
3.2. Методика вычисления динамических характеристик при изменении ориентации солнечного паруса . . . . .	64
3.3. Алгоритм исследования динамики полета космического аппарата с управляемым солнечным парусом . . . . .	67
3.4. Продолжительность перемещения между наиболее удаленными точками леерной связи . . . . .	71

3.5. Перемещение между произвольными точками леерной связи . . .	73
3.6. Оценка динамических характеристик . . . . .	74
3.7. Выводы по главе 3 . . . . .	78
<b>Заключение</b>	<b>79</b>
<b>Список литературы</b>	<b>81</b>
<b>Приложения</b>	<b>95</b>

## Введение

В рамках диссертационной работы изучается динамика космического аппарата (КА) с солнечным парусом (СП), перемещающегося вдоль троса, концы которого закреплены на двух тяжелых космических станциях, описывающих одну круговую гелиоцентрическую орбиту.

**Актуальность темы исследования.** Задачи динамики орбитального и относительного движения космической системы представляют значительный практический интерес для планирования будущих миссий как в околоземном пространстве, так и дальнем космосе. В настоящее время для реализации перелетов в космической среде используются различные типы ракетных двигателей [1, 2]. Кроме традиционных химических двигателей, требующих больших затрат топливных ресурсов, существуют проекты альтернативных установок: ядерных, электрических [3], плазменных и фотонных. Для обеспечения энергонезависимых перелетов на КА можно установить СП, создающий тягу благодаря отражению фотонов солнечного излучения [4], при этом отсутствие рабочего тела позволит увеличить полезную нагрузку за счет ликвидации топливного отсека.

Впервые идея полета с СП была сформирована в 1920-х годах российским учёным Фридрихом Артуровичем Цандером [5] и получила развитие в многочисленных теоретических разработках, связанных с математическим моделированием [6, 7], управлением [8–12] и стабилизацией [13–15] движений КА, также проводились опыты по разворачиванию СП [16], установленного на борту космического судна. Успешные эксперименты по эксплуатации КА IKAROS [17, 18], NanoSail-D [19], LightSail-2 [20, 21], проектирование Sunjammer [22] и исследования в области совершенствования технологий [23, 24] доказали работоспособность и функциональную значимость СП для космических путешествий [25–27]. Анализ опубликованной научной литературы установил возможность применения СП для реализации межпланетных перелетов [28–32], для коррекции ор-

бит [33–36], для стабилизации характерных движений КА, в частности, для удержания их в окрестности неустойчивых точек либрации [37–39].

Обладая множеством преимуществ по сравнению с другими движителями, СП имеет некоторые недостатки. Например, с его помощью невозможно создавать ускорение, направленное под тупым углом по отношению к солнечным лучам, то есть без дополнительного ограничения СП не может способствовать движению в сторону Солнца. Описанную проблему позволяет решить устройство, аналогичное килю морского парусного судна, организующее перемещение «против солнечного ветра». В качестве такого приспособления достаточно использовать трос, концы которого закреплены на космических объектах. Фактически он реализует ограничение, называемое леерной связью [40–42], которую можно рассматривать как одну из математических моделей космической тросовой системы [43, 44].

Идею создания гибкой связи в космосе впервые предложил Константин Эдуардович Циолковский в 1895-х годах [45]. Возникновению и детальной проработке концепции «космического лифта», состоящей из естественного небесного тела, соединенного при помощи троса с рукотворным КА, человечество обязано советскому инженеру Арцутанову Юрию Николаевичу, опубликовавшему в 1960-х годах журнальную заметку [46] на данную тематику. Постепенно мысль развивалась, появлялись разнообразные конструкции, основанные на применении троса [43, 44, 47–49]. Условно космические тросовые системы на сегодняшний день классифицируются по их основополагающим свойствам: «статические» служат для обеспечения устойчивого вертикального положения на орбите, «динамические» необходимы для регулирования взаимного положения и ориентации аппаратов, «электромагнитные» становятся источником электрической энергии и могут быть использованы для создания силы тяги [50]. Ранее проводились многочисленные теоретические исследования, в которых решались задачи разворачивания тросов [51–55], разработки космического лифта [56–65], устойчивости и стабилизации объектов на орбите [66–77], динамики тросовой системы [41, 42, 78–81], управления движением космических тел [82–91], удале-

ния космического мусора [40, 92], генерации электроэнергии [93–96], а также были подготовлены для испытаний на практике проекты Союз, Трос, Вулкан, TSS, CHARGE, SEDS, OEDIPUS и другие, доказывающие эффективность применения тросовых систем в космическом пространстве. До настоящего момента ни одна из проектируемых долговременных космических тросовых систем достаточно больших размеров так и не была развернута.

Кроме упомянутых тематических направлений научных исследований существуют работы, комбинирующие тросовые системы с солнечными парусами. В некоторых научных статьях изложен синергетический подход, где трос используется для стабилизации или развертывания солнечных парусов, либо для создания крупномасштабных космических структур [97]. На данный момент объединение этих отраслей еще не приобрело широкое распространение, однако первые шаги в сторону организации движения были сделаны российскими и китайскими учеными [11, 12].

**Цель работы** заключается в исследовании динамики КА с СП, осуществляющего движение вдоль леерной связи, а также в установлении возможности перемещения между станциями при достаточно простых законах управления ориентацией СП. Для достижения поставленной цели в диссертационной работе решаются следующие задачи:

- 1) Описание математической модели движения механической системы, состоящей из КА с СП, перемещающегося вдоль троса, соединяющего две тяжелые космические станции.
- 2) Вычисление оптимального угла наклона СП, необходимого для создания максимального ускорения КА в каждой точке траектории.
- 3) Анализ динамики КА с СП в модельной задаче о движении вдоль леерной связи между тяжелыми гелиоцентрическими станциями.
- 4) Вывод и доказательство необходимых и достаточных условий существования движений с натянутым тросом между точками леерной связи.
- 5) Поиск всех пар точек на эллипсе, ограничивающем связное движение, между которыми возможно перемещение с неизменно направленной нормалью

к СП при нулевых начальной и конечной скоростях.

6) Построение алгоритмов исследования динамики полета КА вдоль леерной связи, предусматривающих перемещение с неизменно ориентированным или корректируемым положением СП.

7) Разработка методик и программного комплекса, необходимых для вычисления и анализа основных динамических характеристик при движении между двумя произвольными точками леерной связи.

**Методы исследования.** Для решения поставленных задач использовались аналитические методы классической и небесной механики, а также численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, собственных и несобственных интегралов. При разработке алгоритмов для проведения вычислительных экспериментов применялись современные системы компьютерной математики.

**Объектом исследования** является система управления движением космического аппарата (КА), оснащенного СП, принцип действия которого основан на передаче импульса отдельных фотонов солнечного радиационного излучения, и способного перемещаться вдоль троса, концы которого закреплены на тяжелых космических объектах, например, на больших исследовательских или промышленных космических станциях.

**Предметом исследования** предполагается теоретический и программно-математический аппарат, позволяющий осуществлять аналитические и численные расчеты, определять основные динамические характеристики перелета КА с СП по траектории, ограниченной леерной связью.

**Достоверность результатов** обеспечивается корректным использованием методов классической и небесной механики, подтверждение полученных теоретических результатов происходит путем сравнения численных и аналитических решений.

**Научная новизна диссертационной работы** состоит в следующем:

1) Предложен энергонезависимый способ перемещения КА с СП вдоль троса между космическими объектами, двигающимися по одной гелиоцентри-

ческой круговой орбите.

2) В рамках математической модели леерной связи выписаны уравнения движения и неравенства, описывающие ограничения, возникающие при движении КА с СП.

3) Выведены условия нахождения на связи КА, доказана возможность перемещения с натянутым тросом между двумя точками границы леерной связи и найдено множество пар таких точек.

4) Описаны методы вычисления динамических характеристик перелета с постоянным и корректируемым положением СП относительно солнечных лучей.

5) Разработаны алгоритмы для решения задач динамики относительного движения КА с СП в рамках космической тросовой системы.

**Теоретическая значимость.** Найдены способы управления движением КА с СП, позволяющие совершать перемещение между произвольными точками за приемлимое с практической точки зрения время, равное нескольким часам. Разработаны методики, реализующие такой вид перемещения при сохранении ориентации СП под неизменным углом к солнечным лучам или при повороте СП до оптимального угла наклона, создающего максимальное ускорение в каждой точке траектории.

**Практическая значимость.** Разработаны алгоритмы управления движением КА при постоянно ориентированном и корректируемом положении СП в зависимости от создания максимального ускорения в каждой точке траектории. Создан программный комплекс для решения задач динамики относительного движения КА с неидеально отражающим СП в рамках космической тросовой системы, обеспечивающий вычисление основных характеристик перемещения между двумя произвольными точками леерной связи. Результаты позволяют оценивать и проводить в дальнейшем проектирование транспортных миссий КА с помощью СП и троса без затрат топливных ресурсов.

**Апробация работы и публикации.** Материалы диссертационной работы были представлены на научных семинарах и следующих конференциях:

1) XLVIII международная молодёжная научная конференция «Гагарин-



ские чтения» (Москва, 2022) [98];

2) 21-я международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, 2022) [99];

3) XLVII академические чтения по космонавтике «Королевские чтения» (Москва, 2023) [102];

4) 22-я международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, 2023) [100];

5) 036w международная научная конференция «Регулярная и хаотическая динамика» (Адлер, 2023) [104];

6) XLVIII академические чтения по космонавтике «Королевские чтения» (Москва, 2024) [103];

7) 23-я международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, 2024) [101];

8) X международная научная конференция по механике «Поляховские чтения» (Санкт Петербург, 2024) [105].

Результаты опубликованы в рецензируемых научных журналах из перечня ВАК [106–110], в том числе две статьи [106, 107] проиндексированы международными базами данных Scopus и Web of Science. Разработано и зарегистрировано программно-математическое обеспечение «Программный комплекс для решения задач динамики относительного движения космического аппарата с солнечным парусом в рамках космической тросовой системы», свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2025683410 от 03.09.2025 [111].

#### **Положения, выносимые на защиту:**

1) Математическая модель движения механической системы, состоящей из КА с СП, перемещающегося вдоль троса, соединяющего две тяжелые космические станции.

2) Способ вычисления оптимального угла наклона СП относительно солнечных лучей, необходимый для создания максимального ускорения КА в каждой точке траектории.

3) Анализ динамики КА с СП в модельной задаче о его движении вдоль леерной связи между тяжелыми гелиоцентрическими станциями.

4) Необходимые и достаточные условия существования связного движения между точками леерной связи.

5) Описание множества пар точек эллипса, ограничивающего движение КА в плоскости гелиоцентрической орбиты, между которыми возможно перемещение с натянутым тросом и неизменно ориентированным СП при нулевых начальной и конечной скоростях.

6) Алгоритмы исследования динамики полета КА вдоль леерной связи, предусматривающие наиболее простой способ управления ориентацией СП и коррекцию его положения в каждой точке траектории.

7) Примеры вычислений основных динамических характеристик перемещения между двумя произвольными точками с использованием соответствующих методик и программного комплекса.

**Личный вклад автора.** Автором проведены теоретические исследования, вычислительные эксперименты и анализ полученных результатов, в процессе которых найдены основные динамические характеристики движения КА при различных законах управления СП, в том числе учитывалось ограничивающее воздействие троса, закрепленного на космических станциях. В качестве вычислительных мощностей были использованы системы компьютерной алгебры, включающие две среды программирования Matlab [113] и Maple [112]. Публикации научных статей подготовлены самостоятельно или при непосредственном участии автора, в некоторых случаях для связности изложения описываются также результаты, полученные совместно с А.В. Родниковым. Разработаны методика и программно-математическое обеспечение для решения задач перелета КА между произвольными точками леерной связи при неизменно ориентированном и корректируемом положении СП, позволяющем совершать достаточно быстрое перемещение.

**Соответствие паспорту специальности.** Результаты исследования соответствуют следующим пунктам паспорта специальности 1.1.7 – «Теоретиче-

ская механика, динамика машин»: п. 5 «Управление движением, наблюдаемость и идентификация механических систем», п. 9 «Небесная механика, астродинамика», п. 10 «Динамика летательных аппаратов и космических конструкций», п. 13 «Динамика систем, состоящих из абсолютно твердых и деформируемых тел, в том числе машин, приборов и конструкций», п. 14 «Математическое и компьютерное моделирование кинематики и динамики механических систем, в том числе машин, приборов и их элементов при динамических, статических, тепловых и других видах воздействий».

**Структура и объём диссертации.** Диссертация содержит введение, три главы, заключение, список литературы и приложения. Общий объем работы составляет 96 страниц, включая 29 рисунков и 6 таблиц.

**В первой главе** вводится математическая модель СП, учитывающая как полное отражение, так и частичное поглощение солнечной радиации. Определяются понятия базовой и производной калибровочной характеристик, зависящих от величины и проекции на касательную вектора силы солнечной радиации. Вычисляется оптимальный угол наклона СП, позволяющий создавать максимальное ускорение в каждой точке траектории. Приводится математическая модель космической тросовой системы, называемой леерной связью. В этом случае ограничение, накладываемое на движение КА в пространстве, позволяет осуществлять перелет только внутри и на границе некоторого эллипсоида вращения с фокусами в точках закрепления троса. В частности, рассматривается перемещение в плоскости орбиты космических станций, когда трос принимается идеальной односторонней леерной связью. Математическое описание такого движения КА с СП определяется в виде условия нахождения на связи. Предполагается, что время перелета между станциями достаточно мало, чтобы можно было пренебречь неинерциальностью орбитальной системы отсчета с началом в центре эллипса. Проводится анализ динамики КА и оцениваются силы, действующие на механическую систему. Формулируется модельная задача, предполагающая, что нормаль к СП, постоянно параллельна плоскости орбиты станций, для которой записываются уравнения движения в общем виде, когда

интегральное многообразие  $z = 0$ . Обобщенные уравнения движения и теорема об изменении кинетической энергии модифицируются с учетом особенностей расположения СП, координат начальной и конечной точек перемещения.

**Во второй главе** рассматривается задача о движении КА с постоянно ориентированным СП вдоль троса, соединяющего две тяжелые космические станции, вращающиеся по одной круговой гелиоцентрической орбите. Устанавливается возможность осуществления маятниковых колебаний между точками леерной связи при нулевых начальной и конечной скоростях. Выводятся и доказываются необходимые и достаточные условия существования такого движения. Анализируются диаграммы пар точек при различных эксцентриситетах эллипса, между которыми возможно перемещение. Разрабатывается алгоритм исследования динамики полета КА с постоянно ориентированным СП. Реализуется перемещение между наиболее удаленными и произвольными точками леерной связи при нулевых начальных и конечных скоростях. Оцениваются динамические характеристики. Для реальных КА вычисляются предполагаемая длина нити, продолжительность перелета, максимальные относительная скорость и натяжение троса.

**Во третьей главе** решается задача о движении КА с управляемым СП вдоль леерной связи. Оптимальный угол наклона нормали СП к направлению солнечных лучей, найденный в главе 1, используется для создания максимально возможного ускорения в каждой точке траектории. Как и в предыдущем случае, трос связывает две тяжелые гелиоцентрические космические станции и КА, однако коррекция положения СП позволяет осуществлять более быстрый перелет. Излагается методика вычисления динамических характеристик при изменении ориентации СП в процессе движения при нулевых начальных и конечных скоростях. Для того, чтобы конечная скорость оказалась нулевой, определяется точка переключения ускорения, которая делит путь на участки разгона и торможения. Записывается теорема об изменении кинетической энергии на каждом из этих участков, откуда удастся установить координаты точки переключения и продолжительность перемещения. Разрабатывается алгоритм

исследования динамики полета КА с управляемым СП, предполагающим изменение положения в зависимости от максимально создаваемого ускорения. Рассматривается перемещение между наиболее удаленными точками леерной связи только при нулевой начальной скорости, а также при нулевых начальной и конечной скоростях. Изучается перемещение между произвольными точками леерной связи при нулевых начальной и конечной скоростях. Оцениваются динамические характеристики и сравниваются с предыдущим способом передвижения. Для реальных КА вычисляются те же размерные величины: время перелета, максимальная относительная скорость и натяжение троса.

**В заключении** приведены основные научные результаты, полученные автором работы и перспективы их развития.

## **Глава 1. Постановка модельной задачи о движении космического аппарата с солнечным парусом вдоль леерной связи**

Целью данной главы является построение математических моделей элементов механической системы, состоящей из КА с СП, перемещающегося вдоль троса, закрепленного на космических станциях, вращающихся по одной круговой гелиоцентрической орбите. Для решения поставленной задачи проводится анализ сил, влияющих на относительное движение КА. Записываются основные уравнения, характеризующие динамику системы, а также интеграл энергии при различных начальных условиях.

В разделе 1.1. описана математическая модель СП, предполагающая как полное отражение, так и частичное поглощение солнечной радиации. Для исследования возможностей управления КА вычислен оптимальный угол наклона нормали СП к направлению солнечных лучей, позволяющий создавать максимально возможное относительное касательное ускорение КА в каждой точке траектории. В разделе 1.2. введено понятие базовой калибровочной характеристики, определяющей величину силы солнечной радиации, которую способен создавать поток солнечной энергии при воздействии на СП в зависимости от угла между его нормалью и направлением солнечных лучей. В разделе 1.3. предложено понятие производной калибровочной характеристики, отражающей возможности СП создавать ускорение при движении по заданной траектории. Эта характеристика зависит от угла между касательной к траектории и силой солнечной радиации, а также от базовой калибровочной характеристики. В разделе 1.4. представлена математическая модель космической тросовой системы, включающей леерную связь. В разделе 1.5. выведено условие нахождения на связи. В разделе 1.6. осуществлен анализ сил, определяющих динамику КА. Выявлено, что в основном на движение оказывает воздействие только солнечная радиация, а натяжение троса преимущественно зависит от центростреми-

тельного ускорения. В разделе 1.7. поставлена модельная задача описания движения КА с СП вдоль леерной связи. В разделе 1.8. выведены общие уравнения движения и интеграл энергии при различных начальных условиях. В разделе 1.9. сформулированы выводы по главе 1.

### 1.1. Математическая модель солнечного паруса

Концепция СП предполагает передачу импульса фотонов поверхности, поглощающей или отталкивающей частицы. Подобный принцип действия основан на эффекте Лебедева, преобразующем силу солнечной радиации в движущую силу [113], то есть под воздействием солнечного давления КА с СП может совершать перемещение. Пусть поглощаемый фотон передает импульс как при абсолютно неупругом, а отражаемый – как при абсолютно упругом ударе.

Оптические и динамические характеристики СП определяются некоторым коэффициентом, равным отношению количества отраженных фотонов к количеству всех фотонов. Если коэффициент отражения равен единице, то СП называется идеальным, а его поверхность – идеальным зеркалом. Такому СП соответствуют максимально возможные величины силы солнечного давления и наилучшие показатели управляемости, однако его невозможно изготовить из существующих материалов.

Рассматриваемая модель СП, проиллюстрированная на рис. 1.1, выглядит следующим образом

$$\mathbf{F} = PS \frac{R_0^2}{R^2} \left( k(\mathbf{n}, \mathbf{e}_x)^2 \mathbf{n} + \frac{1-k}{2} (\mathbf{n}, \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_x \right), \quad (1.1)$$

где  $P$  – характерная величина солнечного давления на расстоянии  $R_0$  от Солнца,  $S$  – площадь СП,  $R$  – актуальное расстояние до Солнца,  $k$  – коэффициент отражения СП,  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$  – нормаль СП в единичном базисе  $\mathbf{e} = (e_x, e_y, e_z)^T$  системы координат  $Oxyz$ .  $Ox$  сонаправлена с линией действия солнечных лучей,  $Oy$  соответствует направлению движения космических станций  $F_1$  и  $F_2$  по круговой гелиоцентрической орбите,  $Oz$  перпендикулярна плоскости  $Oxy$  в связанной с КА системе координат  $Oxyz$ , где  $O$  – середина отрезка, соединяющего станции.

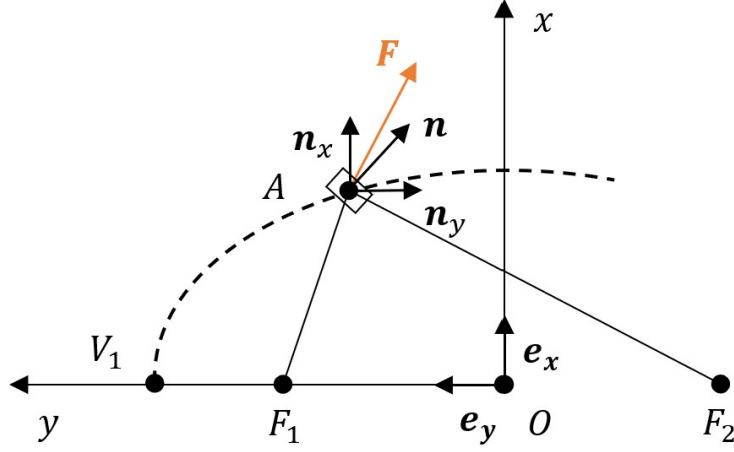


Рисунок 1.1. Математическая модель СП

Принимая максимально возможное значение силы солнечной радиации  $F$ , равным единице, можно переписать математическую модель (1.1) в безразмерных переменных

$$\mathbf{F} = \frac{2}{1+k} \left( kn_x^2 \mathbf{n} + \frac{1-k}{2} n_x \mathbf{e}_x \right), \quad (1.2)$$

где  $0 \leq k \leq 1$ .

Заметим, что идеальный СП, соответствующий коэффициенту отражения  $k = 1$ , является частным случаем неидеальной модели (1.2).

Для упрощения вычислений будем использовать модель СП в безразмерной форме, однако для обратного перехода к традиционным единицам измерения применимо равенство

$$F^* = \frac{1+k}{2} PS \frac{R_0^2}{R^2} F, \quad (1.3)$$

где  $P = 9 \cdot 10^{-6} \text{ Н/м}^2$  – характерная величина солнечного давления на расстоянии  $R_0 = 1 \text{ а.е.}$ ,  $S$  – площадь выбираемого СП (см. в таблице 1.1),  $F^*$  – размерная величина силы солнечной радиации.



Таблица 1.1. Основные характеристики в реализованных и планировавшихся миссиях КА с СП

Космический аппарат	Площадь паруса $S$ , м <sup>2</sup>	Масса КА с парусом $m$ , кг
IKAROS	200	320
NanoSail	10	4
LightSail-2	32	5
Sunjammer	1200	54
Helios	990	23

Одним из важнейших показателей, влияющим на силу солнечной радиации, является угол наклона  $\alpha$  нормали СП  $\mathbf{n}$  по отношению к направлению солнечных лучей, отсчитываемый против часовой стрелки (рис. 1.2) и способный принимать значения  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ .

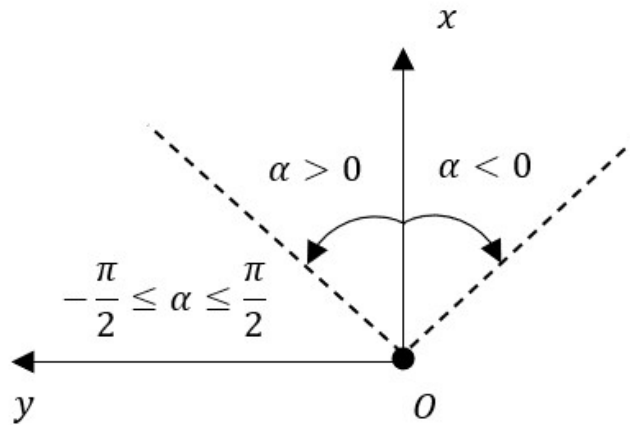


Рисунок 1.2. Угол наклона СП

Если в орбитальной системе отсчета задана траектория КА с СП, то можно в каждой ее точке выбирать угол  $\alpha$  так, чтобы относительное касательное ускорение было максимально возможным. Пусть соответствующий угол  $\alpha$  называется оптимальным углом наклона  $\alpha_{opt}$ .

Прежде, чем выбирать  $\alpha_{opt}$ , необходимо определить, какие значения может принимать  $\alpha$ , чтобы перемещение КА с СП было возможно.

Предположим, например, что КА движется по некоторому эллипсу, большая ось которого перпендикулярна местной вертикали. Если нормаль СП  $\mathbf{n}$  и радиус-вектор КА  $\mathbf{r}$  заданы параметрически через угол нормали СП к направлению солнечных лучей  $\alpha$ , эксцентрическую аномалию  $\psi$  и эксцентриситет эллипса  $e$ , что более подробно будет описано в разделе 1.5, в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= (n_x, n_y)^T = (\cos \alpha, \sin \alpha)^T, \\ \mathbf{r} &= (x, y)^T = \left( \sqrt{1 - e^2} \sin \psi, \cos \psi \right)^T,\end{aligned}\tag{1.4}$$

то координаты и длину вектора скорости КА можно записать как

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (v_x, v_y)^T = \left( \sqrt{1 - e^2} \dot{\psi} \cos \psi, -\dot{\psi} \sin \psi \right)^T \\ v &= |\dot{\psi}| \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi},\end{aligned}$$

тогда единичный вектор касательной к траектории, направленный в сторону возрастания  $\psi$ , определяется следующим образом

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}} \left( \sqrt{1 - e^2} \cos \psi, -\sin \psi \right)^T.$$

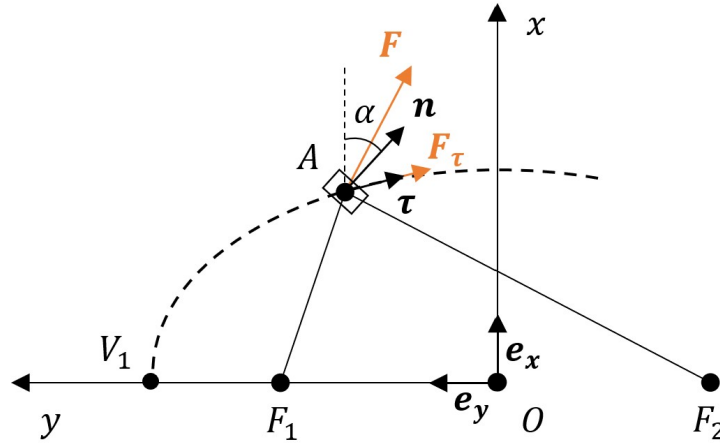


Рисунок 1.3. Проекция силы солнечной радиации на касательную

Проекция силы солнечной радиации на касательную  $F_\tau$  в некоторой точке траектории показана на рис. 1.3. В общем виде для неидеального СП проекция этой силы будет выглядеть как

$$F_\tau = \frac{2}{1 + k} \left( \frac{\left( k \cos^3 \alpha + \frac{1-k}{2} \cos \alpha \right) \sqrt{1 - e^2} \cos \psi - k \cos^2 \alpha \sin \alpha \sin \psi}{1 - e^2 \cos^2 \psi} \right). \tag{1.5}$$

Поскольку оптимальный угол наклона  $\alpha_{opt}$  достигается при максимальном значении проекции силы солнечной радиации на касательную, имеет смысл воспользоваться необходимым условием существования экстремума функции. Если угол наклона СП соответствует локальному экстремуму функции  $F_\tau$ , то частная производная по переменной  $\alpha$  равна нулю, то есть

$$\frac{\partial F_\tau}{\partial \alpha} = 0.$$

В результате некоторых алгебраических преобразований равенство может быть представлено как кубическое уравнение относительно  $\operatorname{tg} \alpha$ , содержащее взаимосвязанные углы  $\alpha$  и  $\psi$ ,

$$\operatorname{tg}^3 \alpha - \frac{4k}{1-k} \cdot \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{5k+1}{1-k} \operatorname{tg} \alpha + \frac{2k}{1-k} \cdot \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sqrt{1-e^2}} = 0, \quad (1.6)$$

коэффициенты которого содержат  $k$  и  $\psi$ .

Отметим, что в точках при  $\psi = 0$  и  $\psi = \frac{\pi}{2}$  уравнение (1.6) решается очень просто, поэтому можно установить соответствующие значение оптимального угла наклона СП

$$\begin{aligned} \text{при } \psi = 0, \quad \alpha_{opt} &= 0, \\ \text{при } \psi = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_{opt} &= \pm \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Если КА движется в сторону возрастания  $\psi$ , то разгон осуществляется только при  $F_\tau > 0$ , что возможно не при всех значениях эксцентрисической аномалии. Если  $F_\tau = 0$ , то проекцию силы солнечной радиации (1.5) можно привести к равенству

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{2k}{1-k} \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{tg} \alpha + \frac{2k}{1-k} + 1 = 0.$$

После умножения этого равенства на  $\operatorname{tg} \alpha$ , являющийся корнем кубического уравнения, и вычитания результата из (1.6), получится соотношение, раскрывающее связь между углами  $\alpha$  и  $\psi$

$$\frac{\operatorname{tg} \psi}{\sqrt{1-e^2}} = -\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (1.7)$$

Используя соотношение (1.7), можно исключить  $\operatorname{tg} \psi$  и превратить кубическое уравнение (1.6), зависящее от угол наклона СП  $\alpha$ , в биквадратное

$$\operatorname{tg}^4 \alpha - \frac{2k}{k-1} \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{k+1}{k-1} = 0. \quad (1.8)$$

При движении в сторону увеличения  $\psi$  КА может разгоняться только, когда  $\alpha \leq 0$ , поэтому

$$\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}.$$

Как следует из соотношения (1.7),

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{\sqrt{1-e^2}\sqrt{1-k^2}}{k}.$$

Чтобы обеспечить максимально возможное касательное ускорение КА, для определения  $\alpha_{opt}$  нужно выбирать корень кубического уравнения (1.6), принадлежащий

$$\begin{aligned} \text{при } 0 \leq \psi \leq \pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-k^2}\sqrt{1-e^2}}{k}, \quad -\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \leq \alpha_{opt} \leq 0, \\ \text{при } \pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-k^2}\sqrt{1-e^2}}{k} \leq \psi \leq \pi, \quad \alpha_{opt} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

При достаточно больших значениях эксцентрической аномалии  $\psi$  угол  $\alpha_{opt}$  является постоянным, поскольку нужно направлять СП таким образом, чтобы ускорение не было отрицательным.

Если СП является идеальным, вычисление оптимального угла наклона  $\alpha_{opt}$ , позволяющего создавать максимальное относительное касательное ускорение, существенно упрощается.

Проекция силы солнечной радиации в этом случае записывается аналогично (1.5)

$$F_{\tau} = \frac{\sqrt{1-e^2} \cos \psi \cos^3 \alpha - \sin \psi \sin \psi \sin \alpha \cos^2 \alpha}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \psi}}. \quad (1.9)$$

При коэффициенте отражения  $k = 1$  кубическое уравнение (1.6) преобразуется в квадратное

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{3\sqrt{1-e^2} \operatorname{ctg} \psi}{2} \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} = 0, \quad (1.10)$$

один из корней которого соответствует углу  $\alpha_{opt}$ , обеспечивающему наиболее оптимальную ориентацию идеального СП, зависящую от эксцентрической

аномалии

при  $\psi = 0$ ,  $\alpha_{opt} = 0$ ,

при  $0 < \psi < \pi$ ,  $\alpha_{opt} = \arctg \frac{3\sqrt{1-e^2} \cos \psi - \sqrt{9(1-e^2) \cos^2 \psi + 8 \sin^2 \psi}}{4 \sin \psi}$ ,

при  $\psi = \pi$ ,  $\alpha_{opt} = -\frac{\pi}{2}$ .

Максимальное значение проекции силы солнечной радиации будет положительным как при движении «от Солнца», когда  $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ , так и при движении «к Солнцу», когда  $\frac{\pi}{2} \leq \psi < \pi$ , то есть трос выполняет ту же функцию, что и киль морского парусного судна.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. При неизменно направленном СП, расположенном перпендикулярно солнечным лучам, угол наклона остается постоянным и принимает значение  $\alpha = 0$ .

## 1.2. Базовая калибровочная характеристика

Для удобства проведения вычислений введем понятие базовой калибровочной характеристики  $F(\gamma)$ , которая определяет зависимость величины силы солнечной радиации  $F$  от угла  $0 \leq \gamma \leq \gamma_{max}$  между вектором этой силы и направлением солнечных лучей (рис. 1.4).

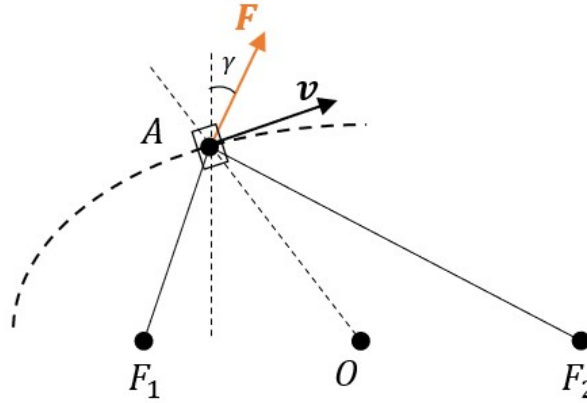


Рисунок 1.4. К понятию базовой калибровочной характеристики

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ 1.1. Базовая калибровочная характеристика показывает, какую силу может создавать поток солнечной радиации при воздействии на СП.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Базовой калибровочной характеристикой называется зависимость величины силы солнечной радиации от угла, который эта сила составляет с направлением солнечных лучей.

Основные свойства базовой калибровочной характеристики  $F = F(\gamma)$ :

1. Угол  $\gamma$  между вектором силы солнечной радиации и направлением солнечных лучей ограничен значениями  $0 \leq \gamma \leq \gamma_{max}$ , где  $\gamma_{max} \leq \frac{\pi}{2}$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Для неидеального СП, определяемого моделью (1.2), максимальное значение угла  $\gamma_{max} = \arcsin k$ , а для идеального СП  $\gamma_{max} = \frac{\pi}{2}$ .

2. Максимальная сила солнечной радиации  $\max_{\gamma} F = F(0)$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. В рассматриваемых моделях соотношение оправдывается тем, что проекция силы солнечной радиации на направление, перпендикулярное солнечным лучам, максимальна, если нормаль к СП параллельна солнечным лучам.

3. В частном случае, когда СП считается идеальным, базовая калибровочная характеристика может быть найдена по формуле  $F(\gamma) = \cos^2 \gamma$ .

4. В безразмерных единицах измерения максимальная сила солнечной радиации, выраженная через базовую калибровочную характеристику  $F(0) = 1$ .

Как было указано выше, для неидеального СП, учитывающего частичное поглощение фотонов, максимальный угол, при котором определена базовая калибровочная характеристика, равен  $\gamma_{max} = \arcsin k$ , где  $k$  – коэффициент отражения материала. Для дальнейших вычислений удобно выразить силу солнечной радиации как через угол наклона СП  $\alpha$ , так и через угол  $\gamma$  между этой силой и линией действия солнечных лучей. Для проекций силы солнечной радиации  $\mathbf{F}$  на оси  $Ox$  и  $Oy$  справедливо равенство

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y)^T = (F \cos \gamma, F \sin \gamma)^T,$$

откуда с учетом соотношений (1.2), (1.4), можно вывести зависимость

$$\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - k}{k \sin 2\alpha},$$

которая перепишется в виде

$$\sin(2\alpha - \gamma) = \frac{\sin \gamma}{k}.$$

После проведения некоторых преобразований из зависимостей можно получить явные выражения для  $\alpha$  и  $\gamma$

$$\gamma = \operatorname{arccctg} \left( \frac{1 - k \cos 2\alpha}{k \sin 2\alpha} \right) \quad (1.11)$$

и

$$\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{\sin \gamma}{k} \right) + \frac{\gamma}{2}, \\ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{\sin \gamma}{k} \right) + \frac{\gamma}{2}. \end{cases} \quad (1.12)$$

Наибольшей величине силы солнечной радиации соответствует первое значение из выражения (1.12), ограниченное отрезком  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , так что для перемещения необходимо выбирать

$$\alpha_{max} = \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{\sin \gamma}{k} \right) + \frac{\gamma}{2}.$$

Используя тригонометрические формулы и считая  $\gamma > 0$ , можно также вывести, что

$$\cos 2\alpha = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \gamma}{k^2}} \cos \gamma - \frac{\sin^2 \gamma}{k^2}.$$

С учетом предположений (1.11) и (1.12) для основной модели СП вычисляется итоговое значение силы солнечной радиации, выраженное через углы  $\alpha$  и  $\gamma$  по формуле

$$F(\gamma) = \sqrt{F_x + F_y} = \frac{1}{(1+k)\sqrt{k}} \sqrt{L \left( L + \frac{1}{2}(1-k)^2 \right)}, \quad (1.13)$$

где

$$L = k + \sqrt{k^2 - \sin^2 \gamma} \cos \gamma - \sin^2 \gamma = 2k \cos^2 \alpha.$$

### 1.3. Производная калибровочная характеристика

Если движение КА с СП ограничено некоторой связью, то для описания действующих на систему сил может быть полезна производная калибровочная характеристика  $F_\tau(\delta)$ , представляющая собой зависимость максимума

проекции силы солнечной радиации, записанной через базовую калибровочную характеристику  $F(\gamma)$ , на касательную к траектории, от угла  $0 \leq \delta \leq \delta_{max}$ , определяющего наклон этой касательной к направлению солнечных лучей (рис. 1.5).

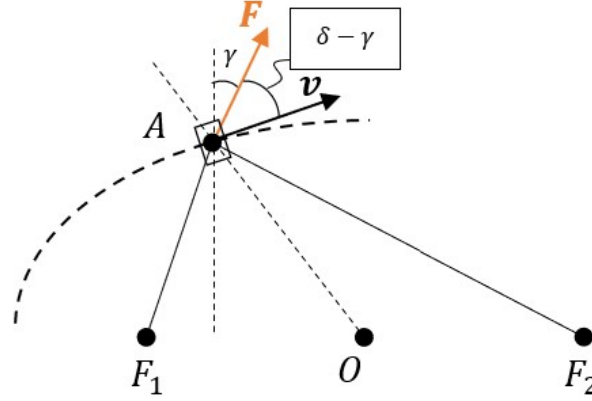


Рисунок 1.5. К понятию производной калибровочной характеристики

**ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ 1.2.** Производная калибровочная характеристика определяет возможности СП для создания ускорения при движении вдоль заданной траектории.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.** Рассматривается ситуация, когда траектория относительного движения КА задана наложенными связями, например леерной связью.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.** Производной калибровочной характеристикой называется зависимость максимума проекции силы солнечной радиации на заданное направление от угла между этим направлением и линией действия солнечных лучей.

Согласно определению производной калибровочной характеристики максимальную проекцию силы солнечной радиации на касательную к траектории можно найти по формуле

$$F_{\tau}(\delta) = \begin{cases} \max_{\gamma} (F(\gamma) \cos(\delta - \gamma)), & 0 \leq \delta \leq \delta_{max}, \\ 0, & \delta_{max} < \delta < \pi, \end{cases} \quad (1.14)$$

где  $0 \leq \gamma \leq \gamma_{max}$  — угол между вектором силы солнечной радиации  $F(\gamma)$  и направлением солнечных лучей,  $\delta_{max} = \frac{\pi}{2} + \gamma_{max}$  — максимальный угол между



касательной к траектории и направлением солнечных лучей, при превышении которого проекция  $F_\tau$  не может быть положительной.

Основные свойства производной калибровочной характеристики  $F_\tau = F_\tau(\delta)$ :

1. Угол между касательной к траектории и направлением солнечных лучей при положительном  $F_\tau$  ограничен значениями  $0 \leq \delta \leq \delta_{max}$ , где  $\delta_{max} < \pi$ , причем  $\delta_{max} = \gamma_{max} + \frac{\pi}{2}$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Для неидеального СП максимальное значение угла выбирается в зависимости от конкретных оптических характеристик как  $\delta_{max} = \pi - \arccos k$ , для идеального СП  $\delta_{max} = \pi$ .

2. Максимальная проекция силы солнечной радиации на касательную к траектории  $\max_{\delta} F_\tau = F_\tau(0)$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. По крайней мере такое соотношение выполняется в рассматриваемых моделях.

3. Для гладкой выпуклой ситуации производная калибровочная характеристика может быть вычислена по формуле

$$F_\tau(\delta) = \frac{F^2(\gamma)}{\sqrt{F'^2(\gamma) + F^2(\gamma)}},$$

причем

$$\delta = \text{arcctg} \frac{F'(\gamma) \text{tg} \gamma + F(\gamma)}{F(\gamma) \text{tg} \gamma - F'(\gamma)}.$$

В частном случае, когда СП принимается идеальным,

$$F_\tau(\delta) = \frac{1}{(1 + \text{tg}^2 \gamma) \sqrt{1 + 4 \text{tg}^2 \gamma}},$$

где

$$\text{tg} \gamma = \frac{-3 \text{ctg} \delta \pm \sqrt{9 \text{ctg}^2 \delta + 8}}{4},$$

при этом выбирается наибольший корень, поскольку  $\text{tg} \gamma \geq 0$ .

Запись производной калибровочной характеристики в явном виде от угла  $\delta$  будет выглядеть следующим образом

$$F_\tau(\delta) = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \frac{\sin^3 \delta}{(4 - \cos^2 \delta - \cos \delta \sqrt{8 + \cos^2 \delta}) \sqrt{2 + \cos^2 \delta - \cos \delta \sqrt{8 + \cos^2 \delta}}}.$$

4. СП может создавать любое ускорение в пределах  $0 \leq \ddot{r}_\tau \leq F_\tau(\delta)$ .

5. В безразмерных единицах измерения максимальная проекция силы солнечной радиации на касательную к траектории, выраженная через производную калибровочную характеристику  $F_\tau(0) = 1$ .

На рис. 1.6 показаны графики зависимостей калибровочных характеристик, отмечены максимальные углы  $\gamma_{max}$  и  $\delta_{max}$  между осью  $Ox$  и соответствующими прямыми. Базовая калибровочная характеристика  $F(\gamma)$  изображена сплошной линией, а производная калибровочная характеристика  $F_\tau(\delta)$  обозначена пунктиром.

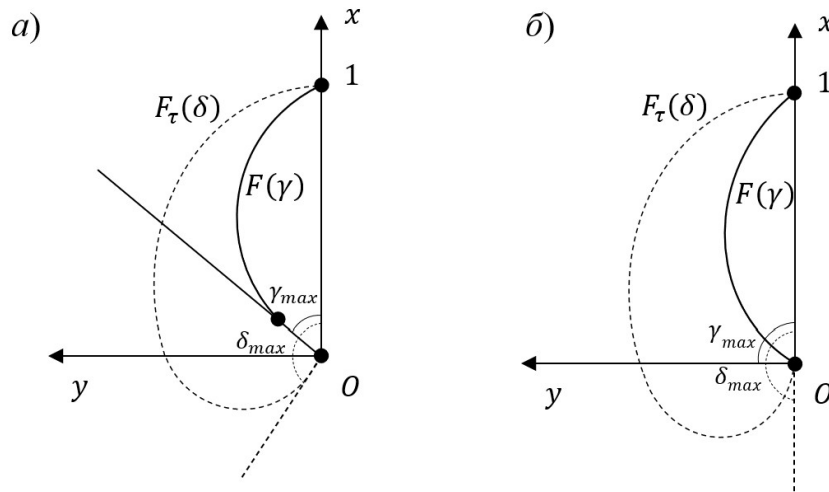


Рисунок 1.6. Базовая и производная калибровочные характеристики для  
а) неидеального и б) идеального СП

ЗАМЕЧАНИЕ 1.7. При неидеальном СП график базовой калибровочной характеристики одним концом лежит на оси  $Ox$ , а другим на луче, определяемом углом  $\gamma_{max}$ . При идеальном СП график базовой калибровочной характеристики одним концом также лежит на оси  $Ox$ , а другим совпадает с началом координат  $Oxy$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.8. Как при неидеальном, так и при идеальном СП график производной калибровочной характеристики одним концом лежит на оси  $Ox$ , а другим совпадает с началом координат  $Oxy$ .

#### 1.4. Математическая модель леерной связи

Существуют различные виды тросовых систем, наиболее распространенными считаются такие, где гибкая связь соединяет твердое тело и материальную точку. При этом встречаются конструкции, когда материальная точка способна передвигаться вдоль троса, концы которого закреплены на твердых телах [57]. Невесомый, нерастяжимый и абсолютно гибкий трос, длина которого превосходит расстояние между космическими объектами, в этом случае реализует ограничение, называемое идеальной односторонней леерной связью.

В качестве примера можно рассматривать механическую систему, состоящую из КА массы  $m$ , оснащенного СП площади  $S$ , способного передвигаться вдоль троса длины  $2a$  с концами, закрепленными в точках  $F_1$  и  $F_2$ , находящихся на расстоянии  $2c$  друг от друга и принадлежащих соответственно двум тяжелым космическим станциям, описывающим одну круговую гелиоцентрическую орбиту. Будем предполагать, что влияние КА на движение станций незначительно, то есть точки  $F_1$  и  $F_2$  неподвижны в орбитальной системе отсчета  $Oxy$ . Постановка данной задачи возможна, если оснастить станции некоторыми компенсирующими устройствами [11]. В этом случае движение КА будет ограничено эллипсоидом вращения с фокусами  $F_1$  и  $F_2$ , большой полуосью  $a$  и эксцентриситетом  $e$ .

Если прямая  $F_1F_2$  всегда перпендикулярна солнечным лучам, то для описания движения КА относительно станций будем использовать правую декартову прямоугольную систему координат  $Oxyz$ , где  $O$  — середина отрезка  $F_1F_2$ .  $Ox$  расположена аналогично распространению солнечных лучей,  $Oy$  направлена по прямой  $F_1F_2$  в сторону движения космических станций, причем точка  $F_1$  имеет положительную координату по этой оси (рис. 1.7).

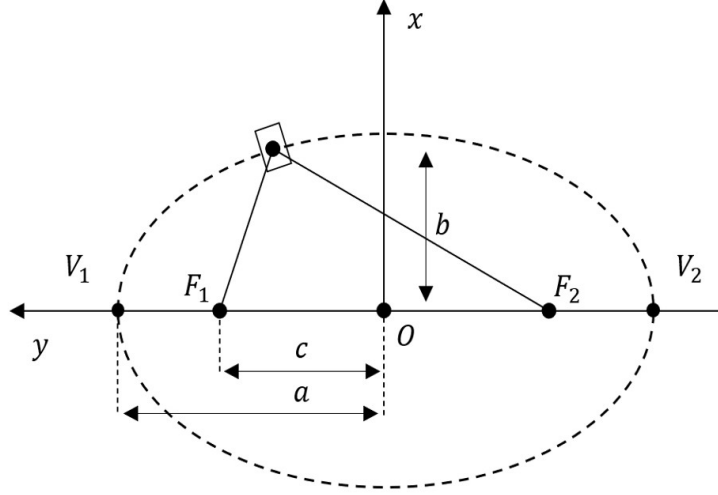


Рисунок 1.7. Математическая модель леерной связи

Координаты КА  $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$  все время движения должны подчиняться характеризующему эллипсоид вращения неравенству

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1, \quad (1.15)$$

где  $a$  – половина длины троса,  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$  – малая полуось, причем  $c = ae$  – половина расстояния между станциями,  $e$  – эксцентриситет.

Если считать, что  $a = 1$ , то можно переписать математическую модель леерной связи (1.15) в безразмерных переменных

Для перехода от безразмерных значений к традиционным единицам измерения применимо соотношение

$$\mathbf{r}^* = a\mathbf{r}, \quad (1.16)$$

где  $\mathbf{r}$  – безразмерный радиус-вектор КА,  $\mathbf{r}^*$  – тот же вектор в размерных единицах.

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{b^2} + y^2 + \frac{z^2}{b^2} \leq 1. \quad (1.17)$$

Будем предполагать, что рукотворные космические объекты находятся на расстоянии порядка 1 а.е. от Солнца, дистанция между ними не превышает нескольких километров.

### 1.5. Связное движение космического аппарата

Использование леерной связи позволяет осуществлять движение только внутри и на поверхности некоторого эллипсоида с фокусами в точках закрепления троса. Если нормаль СП всегда параллельна плоскости орбиты станций  $Oxy$ , когда  $n_z = 0$ , то уравнения движения допускают интегральное многообразие  $z = 0$ , предполагающее движение КА только в этой плоскости. Если трос постоянно натянут, то говорят, что КА находится на связи или совершает связное движение непосредственно на границе эллипса. В этом случае его безразмерные координаты описываются уравнением

$$f(x, y) = \frac{x^2}{1 - e^2} + y^2 = 1. \quad (1.18)$$

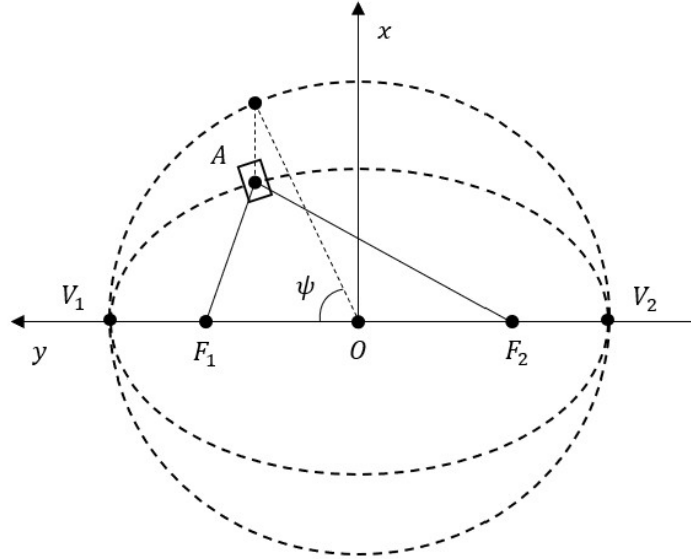


Рисунок 1.8. Положение КА на эллипсе

При связном движении КА в орбитальной системе отсчета  $Oxy$  его положение задается радиус-вектором  $r$ , который может быть представлен в параметрическом виде

$$\mathbf{r} = (x, y)^T = \left( \sqrt{1 - e^2} \sin \psi, \cos \psi \right)^T \quad (1.19)$$

где  $e$  – эксцентриситет эллипса,  $\psi$  – эксцентрическая аномалия актуального положения [115, 116].

На рис. 1.8 показаны геометрические соотношения, в частности зависимость положения КА от эксцентриситета эллипса и его эксцентрической аномалии.

### 1.6. Анализ сил, действующих на космический аппарат

Для обоснования упрощений, принятых в задаче, приведем анализ сил (рис. 1.9), действующих на КА с СП, тем самым подтвердив разумность следующих предположений. Наибольшее влияние на динамику полета оказывают силы солнечной радиации и натяжения троса, в то время как воздействие силы Кориолиса оказывается незначительным, а гравитационное притяжение Солнца практически компенсируется переносной силой инерции.

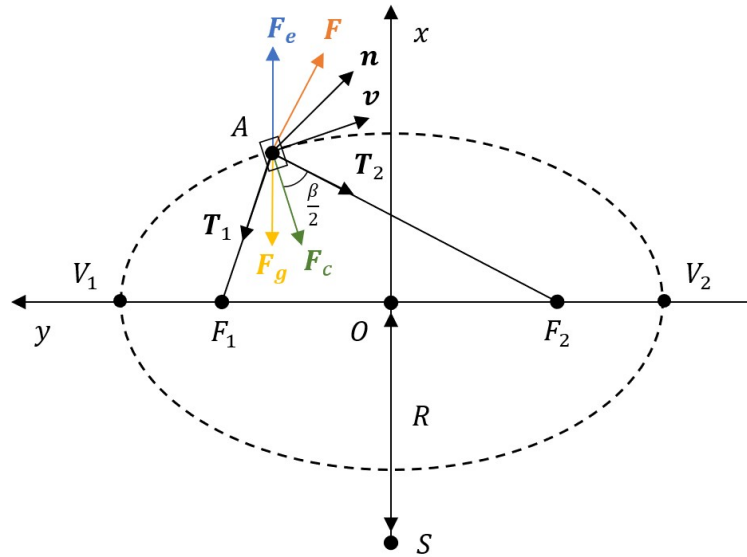


Рисунок 1.9. Анализ сил, действующих на КА с СП

Вычислим упомянутые выше силы для КА массы  $m = 100$  кг с СП площадью  $S = 1000$  м<sup>2</sup>, перемещающегося с относительной скоростью  $v = 1$  м/с по эллиптической траектории с эксцентриситетом  $e = 0,9$  вдоль троса длины  $2a = 2$  км, концы которого закреплены на космических станциях  $F_1$ ,  $F_2$ , вращающихся по круговой орбите с угловой скоростью  $\omega = 2\pi/T_0 \approx 2 \cdot 10^{-7}$  рад/с,

где  $T_0 \approx 365 \cdot 24 \cdot 3600$  с - период вращения по круговой орбите.

**Сила солнечной радиации** находится по формуле (1.2), характеризующей модель СП, то есть

$$F = PS = 9 \cdot 10^{-3} \text{ Н.}$$

**Сила Кориолиса**, рассчитываемая по известному правилу, при относительной скорости КА  $v = 1$  м/с будет иметь значение

$$F_c = 2m\omega v = 4 \cdot 10^{-5} \text{ Н.}$$

Если учесть, что перемещение осуществляется вдоль оси  $Ox$  на расстояние  $\Delta x$  и в начальный момент времени скорость была равна нулю, то можно записать теорему об изменении кинетической энергии

$$\frac{1}{2}mv^2 = F\Delta x,$$

откуда определяется скорость КА в рассматриваемой точке

$$v = \sqrt{\frac{2F\Delta x}{m}}. \quad (1.20)$$

Новое значение скорости  $v$  используется для пересчета силы Кориолиса

$$F_c = 2m\omega \sqrt{\frac{2F\Delta x}{m}} < 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ Н.} \quad (1.21)$$

Изменение координаты  $\Delta x$  должно быть сравнимо с малой полуосью  $b$ , поскольку в соответствующей ей вершине эллипса сила Кориолиса максимальна, а в остальных точках она будет меньше, то есть верно неравенство  $\Delta x \leq b = a\sqrt{(1-e^2)}$ . При заданных в условии величинах большой полуоси  $a$  и эксцентриситета  $e$ , сила оказывается меньше некоторого значения  $1,1 \cdot 10^{-5}$  Н и направлена по внутренней нормали к эллипсу, то есть по биссектрисе угла  $\beta$  между ветвями троса.

Отношение силы Кориолиса к силе солнечной радиации в первом и втором случаях будут выглядеть следующим образом

$$\frac{F_c}{F} = 4,4 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{F_c}{F} \leq 1,2 \cdot 10^{-3}.$$

**Переносная сила инерции.** Инерциальная система отсчета  $Oxy$ , вращающаяся по круговой орбите на расстоянии  $R$  от Солнца с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , совершает переносное движение (рис. 1.9). В связи с тем, что  $\omega = const$ , переносная сила инерции имеет только одну составляющую, возникающую из-за наличия центробежной силы, направленной по прямой  $SA$  от Солнца

$$F_e^n = m\omega^2(x + R) \quad (1.22)$$

где  $x$  — координата КА на оси  $Ox$ .

Заметим, что в треугольнике  $\triangle V_1SO$  катеты равны большой полуоси эллипса  $a$  и радиусу круговой орбиты  $R$ , то есть  $OV_1 = a$  и  $OS = R$ . Угол  $\angle V_1SO$  оказывается достаточно малым, что следует из величины его тангенса  $\operatorname{tg}(\angle V_1SO) = 6,6 \cdot 10^{-9}$ . Кроме того, угол  $\angle ASO$  значительно меньше угла  $\angle V_1SO$ , так что будем полагать вектор переносной силы инерции, коллинеарным оси  $Ox$ .

**Сила гравитационного притяжения Солнца** представлена вектором, который аналогично переносной силе инерции принадлежит прямой, параллельной той же оси. Направление силы гравитационного притяжения оказывается противоположно  $Ox$  согласно правилу ориентации правой тройки векторов, а ее величина определяется как

$$F_g = G \frac{mM}{(x + R)^2},$$

причем масса Солнца  $M$  может быть выражена из условия равновесия космической станции

$$-G \frac{mM}{R^2} + m\omega^2 R = 0.$$

Известно, что в орбитальной системе  $Oxy$  точка  $F_1$  находится в состоянии равновесия, то есть сила притяжения первой космической станции компенсирует влияние переносной силы инерции, тогда квадрат угловой скорости вращения станций

$$\omega^2 = G \frac{M}{R^3}.$$



После подстановки массы  $M$  сила гравитационного притяжения Солнца для КА преобразуется в

$$F_g = \frac{m\omega^2 R^3}{(x+R)^2}. \quad (1.23)$$

Оценим разность переносной силы инерции (1.22) и гравитационного взаимодействия Солнца с КА (1.23)

$$F_e^n - F_g = 3m\omega^2 x.$$

Если эта величина изменяется пропорционально координате КА на оси  $Ox$ , причем  $x \leq b$ , то  $F_e^n - F_g \leq 5,2 \cdot 10^{-9}$  Н, что на несколько порядков меньше даже силы Кориолиса

$$\frac{F_e^n - F_g}{F_c} = 4,7 \cdot 10^{-4}.$$

**Сила натяжения троса** оценивается при максимально возможном значении, возникающем в тот момент, когда КА находится в вершине эллипса, соответствующей малой полуоси (рис. 1.10). Учитывая относительную скорость (1.20), силу солнечной радиации (1.2) и равномерное распределение натяжения по ветвям троса  $T_1 = T_2 = T$ , запишем уравнение относительного движения КА в проекции на внутреннюю нормаль к эллипсу,

$$\frac{mv^2}{\rho} = 2T \cos \frac{\beta}{2} - F, \quad (1.24)$$

где  $\rho$  – радиус кривизны,  $\beta$  – угол между ветвями троса.

Можно заметить, что в этой вершине справедливы алгебраические соотношения

$$\rho = \frac{a^2}{b}, \quad \cos \frac{\beta}{2} = \frac{b}{a},$$

где  $b = a\sqrt{1-e^2}$  – малая полуось эллипса, зависящая от большой полуоси  $a$  и эксцентриситета  $e$ , тогда из уравнения 1.24 сила натяжения троса выражается как

$$T = F \frac{3-2e^2}{2\sqrt{1-e^2}}, \quad (1.25)$$

а ее значение при заданных в условии параметрах будет равно  $T = 1,42 \cdot 10^{-2}$  Н = 1,4528 гс.

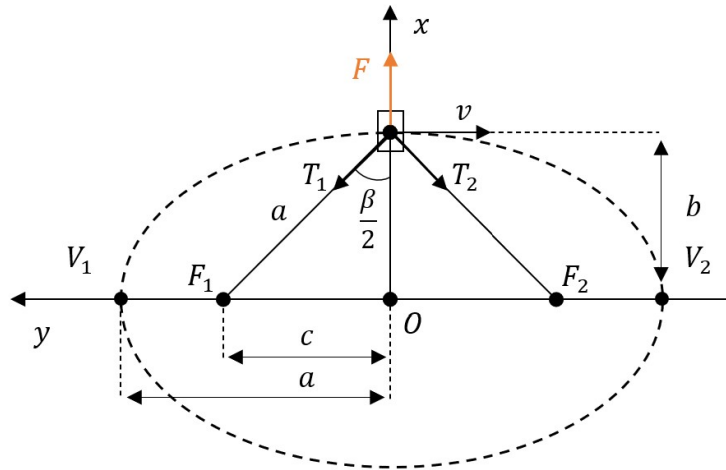


Рисунок 1.10. Сила натяжения троса

К тросу приложено усилие в 1,5 г, так что для перемещения достаточно использовать гибкую связь, допускающую более высокую нагрузку, например подойдет нить, выдерживающая вес в 10 г.

Если станции будут находиться на расстоянии порядка 1 а.е. от Солнца, разнесены между собой на несколько километров при парусности, сопоставимой уже реализованными миссиями, то максимально возможная величина солнечной радиации, превысит на 6-7 порядков абсолютное значение разности гравитационного притяжения Солнца (1.23) и переносной силы инерции (1.22), действующих на КА. В связи с малостью упомянутой разности для оценки влияния системы сил на движение необходимо учитывать только силы солнечной радиации и Кориолиса.

В рассматриваемой ситуации сила Кориолиса лежит в плоскости орбиты станций, откуда не может вывести КА. Она перпендикулярна его относительной скорости, величину которой не способна изменить, так как траектория движения определена геометрическим ограничением, представляющим собой леерную связь (1.18). При малых относительных скоростях кориолисово ускорение может превышать центростремительное, поэтому необходимо компенсировать соответствующую силу и обеспечить ненулевое натяжение троса в начале и в конце движения. Компенсация силы Кориолиса в начальной и конечной точках

перемещения возможна за счет расположения нормали СП относительно внутренней нормали к траектории в течение короткого промежутка времени под углом  $3\pi/4$ .

Заметим также, что при скорости порядка нескольких метров в секунду натяжение троса в основном определяется центростремительным ускорением КА, так как сила Кориолиса оказывается на 2-3 порядка меньше, чем переносная сила инерции.

### 1.7. Постановка модельной задачи

С учетом анализа динамики сил, будем предполагать, что в основном на систему оказывает влияние солнечная радиация, траекторию движения определяет трос, закрепленный на космических станциях  $F_1$  и  $F_2$ , а сила Кориолиса принимает достаточные малые значения. В силу сделанных предположений опишем постановку модельной задачи о движении КА с СП между наиболее удаленными точками леерной связи.

**ЗАДАЧА 1.1.** КА, оснащенный СП, перемещается под действием силы солнечной радиации  $F$  между двумя наиболее удаленными точками леерной связи, соответствующими вершинам эллипса  $V_1$  и  $V_2$ , которые лежат на его большой оси, при этом скорости в этих точках равны нулю  $v_1 = v_2 = 0$  (рис. 1.9).

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.9.** Половина эллипса, по которой движется КА между вершинами  $V_1$  и  $V_2$ , является частным случаем траектории при перелете между произвольными точками леерной связи  $A_1$  и  $A_2$ .

В дальнейшем будут рассмотрены как общая ситуация, так и частный случай перемещения при различных способах управления СП.

### 1.8. Уравнения движения и теорема об изменении кинетической энергии

В орбитальной системе отсчета уравнения движения

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} - 2[\boldsymbol{\omega}, \dot{\mathbf{r}}] + \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}, \quad \lambda \leq 0,$$

записанные в безразмерной форме, характеризуют динамику полета КА с СП вдоль троса в зависимости от внешних сил, приложенных к системе. Диф-

ференцирование по безразмерному времени обозначено как  $(\dot{\phantom{x}})$ , единица которого выбирается равной

$$\sqrt{\frac{ma}{F_{max}}},$$

где  $m$  – масса КА,  $a$  – половина длины троса,  $F_{max}$  – максимальная величина силы солнечной радиации, действующей на СП.

Множитель Лагранжа берется неположительной величиной  $\lambda \leq 0$ , поскольку сила реакции связи противоположна градиенту

$$\text{grad } f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}, \quad (1.26)$$

то есть  $\lambda$  является их коэффициентом пропорциональности.

Градиент функции, определяющей траекторию, направлен по внешней нормали к эллипсу, а сила реакции связи – по внутренней нормали.

Наиболее значимое воздействие на характер перемещения оказывает неидеальность оптических характеристик отражающей поверхности СП, а его идеальная модель является частным случаем, описанным соотношением (1.2) при коэффициенте отражения  $k = 1$ .

Как было доказано в разделе 1.6, переносная сила инерции, силы гравитационного притяжения Солнца практически не влияют на перелет КА. Сила Кориолиса (1.21) ортогональна траектории связанного движения и достаточно мала, так что в общем виде уравнения движения могут быть переписаны как

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{2}{1+k}(kn_x^2\mathbf{n} + \frac{1-k}{2}n_x\mathbf{e}_x) + \lambda\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}, \quad (1.27)$$

где  $\lambda = 0$ , если КА находится внутри эллипсоида вращения,  $\lambda \leq 0$ , если КА расположен на его поверхности.

Заметим, что если СП перпендикулярен солнечным лучам, то нормаль к нему в плоскости  $Oxy$  определяется как

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y)^T = (\cos \alpha, \sin \alpha)^T = (1, 0)^T,$$

откуда  $\alpha = 0$ , тогда уравнения движения (1.27) упрощаются и принимают вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(1 + \lambda\frac{2x}{1-e^2}, 2\lambda y\right)^T. \quad (1.28)$$

Для уравнений (1.27) существует интеграл Якоби, который можно записать для частного случая (1.28) в виде простой суммы кинетической и потенциальной энергий механической системы, сохраняющейся постоянной величиной [117].

Если направление нормали  $\mathbf{n}$  определяется только радиус-вектором  $\mathbf{r} = (x, y)^T$ , то уравнения движения (1.27) допускают интеграл энергии

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \int_s F_x dx + F_y dy = h, \quad (1.29)$$

где  $s$  — дуга эллипса.

С учетом положения КА (1.19) можно вычислить бесконечно малое перемещение  $ds = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\psi$ , тогда криволинейный интеграл (1.29) для неидеального СП перепишется следующим образом

$$\frac{1}{2}(1 - e^2 \cos^2 \psi)\dot{\psi}^2 - \int_{\psi_1}^{\psi} (\mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}) \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\psi = h,$$

где  $\psi_1$  и  $\psi$  — эксцентрические аномалии начальной точки и актуального положения.

Если СП перпендикулярен солнечным лучам при  $\mathbf{n} = (1, 0)^T$ , и начало движения происходит из вершины эллипса  $V_1$ , которой соответствует эксцентрическая аномалия  $\psi_1 = 0$ , то при нулевой начальной скорости  $v_1 = 0$  интеграл энергии (1.29) преобразуется в

$$\frac{1}{2}(1 - e^2 \cos^2 \psi)\dot{\psi}^2 = \sqrt{1 - e^2} \sin \psi + h, \quad h = 0. \quad (1.30)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.10.** В общем виде для движения КА между наиболее удаленными точками леерной связи с учетом управления, предполагающего коррекцию положения СП, вместо интеграла Якоби может быть записана теорема об изменении кинетической энергии.

### 1.9. Выводы по главе 1

1. Описаны математические модели СП и леерной связи, соответственно характеризующие величину силы солнечной радиации и накладывающие ограничение на перемещение КА. В этих моделях введены следующие углы:  $\alpha$  – угол между нормалью СП и направлением солнечных лучей, причем  $\alpha_{opt}$  – тот же угол, обеспечивающий максимально возможное ускорение КА в каждой точке траектории движения,  $\gamma$  – угол между силой солнечной радиации, действующей на СП, и направлением солнечных лучей,  $\delta$  – угол между касательной к траектории КА, направленной в сторону движения, и направлением солнечных лучей,  $\beta$  – угол между ветвями троса.

2. Определены понятия базовой и производной калибровочных характеристик, соответственно показывающие возможности СП создавать силу, возникающую при попадании фотонов на его поверхность, и касательное ускорение при движении вдоль заданной траектории. Вычислен оптимальный угол наклона СП, обеспечивающий максимальную проекцию силы солнечной радиации на касательную к эллипсу.

3. Проведены анализ динамики системы и оценка сил, действующих на КА с СП.

4. Представлена логика построения модельной задачи о движении КА с СП между наиболее удаленными точками леерной связи.

5. Записаны уравнения движения в общем виде, вычислен интеграл энергии для перемещения с неизменно ориентированным СП.

6. Указан принцип перехода от безразмерных величин к значениям в традиционных единицах измерения.

**Основные результаты** главы опубликованы в [98–100, 104, 105]

## **Глава 2. Задача о движении космического аппарата с постоянно ориентированным солнечным парусом вдоль леерной связи**

Целью данной главы является решение задачи о движении КА с постоянно ориентированным СП (1.2) между точками леерной связи (1.15), соединяющей две гелиоцентрические космические станции в плоскости их орбиты.

Доказывается возможность перемещения вдоль троса между парами точек при нулевых начальных и конечных скоростях. Отмечено, что если сохранять неизменным положение СП относительно солнечных лучей, возникают маятниковые колебания. Записываются условия существования связного движения, предполагающие, что сила солнечной радиации должна быть сонаправлена с внешней нормалью к эллипсу в некоторой точке. Выбор точки определяется средним арифметическим эксцентрисических аномалий начального и конечного положения КА на эллипсе. В частном случае, для идеального СП достаточно, чтобы сила солнечной радиации была сонаправлена с его нормалью. Строятся диаграммы точек леерной связи, между которыми возможно перемещение. Вычисляются и оцениваются динамические характеристики полета КА с СП между произвольными точками с учетом результатов из главы 1.

В разделе 2.1. описаны маятниковые колебания КА с СП вдоль троса. В разделе 2.2. доказаны необходимые и достаточные условия существования связного движения между точками эллипса. В разделе 2.3. найдены все пары точек, между которыми возможно перемещение с неослабевающим тросом. В разделе 2.4. разработан алгоритм исследования динамики полета КА с постоянно ориентированным СП. В разделе 2.5. рассмотрено перемещение между наиболее удаленными точками леерной связи. В разделе 2.6. вычислены основные динамические характеристики полета между произвольными точками леерной связи. В разделе 2.7. произведена оценка параметров движения для реальных КА с СП. В разделе 2.8. сформулированы выводы по главе 2.

## 2.1. Маятниковые колебания

**Задача 2.1.** КА, оснащенный неизменно ориентированным СП, перемещается под действием постоянной силы солнечной радиации  $F$  между произвольными точками леерной связи  $A_i$ ,  $i = 1, 2$  с нулевыми начальной и конечной скоростями  $v_i = 0$ .

Пусть СП неизменно ориентирован по отношению к солнечным лучам, тогда вектор  $\mathbf{F} = \text{const}$  в орбитальной системе отсчета  $Oxy$ . В этом случае, что следует из интеграла энергии (1.28) и оценок действующих сил из раздела 1.6, движение КА с СП вдоль леерной связи будут маятниковыми колебаниями между некоторыми точками эллипса, ограничивающего эту связь, причем прямая, соединяющая точки будет ортогональна вектору силы солнечной радиации. Для решения поставленной задачи необходимо расположить постоянно ориентированный СП так, чтобы вектор  $\mathbf{F}$  был ортогонален  $A_1A_2$ , то есть сонаправлен с внешней нормалью к эллипсу в некоторой точке  $A$  (рис. 2.1).

Как следует из определения радиус-вектора (1.19), координаты точек  $A_i$ ,  $i = 1, 2$  вычисляются по формулам

$$\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)^T = \left( \sqrt{1 - e^2} \sin \psi_i, \cos \psi_i \right)^T, \quad i = 1, 2,$$

тогда вектор  $A_1A_2$  имеет вид

$$\mathbf{F} \perp A_1A_2 = \left( \sqrt{1 - e^2} (\sin \psi_2 - \sin \psi_1), \cos \psi_2 - \cos \psi_1 \right)^T.$$

Из равенства  $(\mathbf{F}, A_1A_2) = 0$  следует параллельность векторов

$$\mathbf{F} \parallel \left( \cos \psi_1 - \cos \psi_2, \sqrt{1 - e^2} (\sin \psi_2 - \sin \psi_1) \right)^T,$$

причем правую часть можно преобразовать как

$$2\sqrt{1 - e^2} \sin \left( \frac{\psi_2 - \psi_1}{2} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \sin \left( \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \right), \cos \left( \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \right) \right)^T. \quad (2.1)$$

Учитывая, что внешняя нормаль к эллипсу  $\boldsymbol{\nu}$  сонаправлена с  $\text{grad } f(x, y)$ , который находится согласно выражениям (1.18) и (1.26), можно установить параллельность векторов

$$\boldsymbol{\nu} \parallel \left( \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \sin \psi, \cos \psi \right)^T. \quad (2.2)$$



В результате эксцентрическая аномалия точки  $A$  оказывается средним арифметическим аналогичных аномалий начального и конечного положений КА

$$\psi(A) = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}.$$

Сила солнечной радиации  $\mathbf{F}$  должна быть сонаправлена с внешней нормалью к эллипсу в точке  $A$ , то есть

$$\boldsymbol{\nu}(A) = (\cos \gamma, \sin \gamma)^T,$$

где  $\gamma$  – угол между силой солнечной радиации и направлением солнечных лучей согласно разделу 1.2.

Зависимость  $\gamma$  от эксцентрической аномалии  $\psi(A)$  перепишется как

$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{1-e^2} \cos \psi(A)}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \psi(A)}}, \quad \cos \gamma = \frac{\sin \psi(A)}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \psi(A)}}.$$

Кроме того, чтобы выбор положения СП, необходимый для перемещения между двумя точками  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ , был возможным, должно выполняться условие  $|\sin \gamma| \leq k$ , возникающее из-за особенностей базовой калибровочной характеристики для основной модели. В данном случае неравенство примет вид

$$\frac{\sqrt{1-e^2} |\cos \psi(A)|}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \psi(A)}} \leq k.$$

Если не менять направление нормали, то перелет будет начинаться и заканчиваться в точках  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ , причем КА достигнет пункта назначения с нулевой скоростью. При последующем сохранении ориентации СП относительно солнечных лучей между заданными точками продолжатся колебания.

Для описания движения КА необходимо знать условия существования связного движения между точками при нулевых начальных и конечных скоростях с неизменно ориентированной в орбитальной системе отсчета  $Oxy$  нормалью. Отметим, что физический смысл ситуация сохраняет только тогда, когда  $n_x > 0$ . Направление нормали выбирается независимо от того, в какую сторону происходит перелет между точками  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ . Без ограничения общности рассуждений будем считать, что  $y_2 > y_1$ , при этом  $y_1 = y_2$  невозможно, поскольку тогда  $n_x = 0$ .

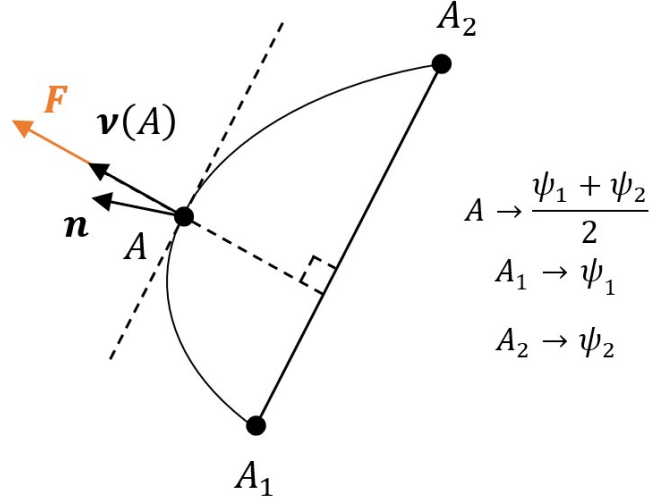


Рисунок 2.1. О выборе точки  $A$

Чтобы записать условия существования движения вдоль леерной связи, обозначим внешнюю нормаль к траектории для произвольной точки через  $\boldsymbol{\nu}$ . В частности, в точках  $A_i$ ,  $i = 1, 2$  величина принимает значения  $\boldsymbol{\nu}_i$ ,  $i = 1, 2$ . Для определения этой нормали в общем виде необходимо нормировать вектор (2.2), то есть

$$\boldsymbol{\nu} = \left( \frac{\sin \psi}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}}, \frac{\sqrt{1 - e^2} \cos \psi}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}} \right)^T. \quad (2.3)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.** С учетом введенных обозначений для идеального отражающего зеркала внешняя нормаль к траектории в точке  $A$ , записанная как  $\boldsymbol{\nu}(A)$ , может быть заменена на нормаль СП  $\mathbf{n}$ .

## 2.2. Необходимое и достаточное условия существования связанного движения

При выборе такого положения СП, когда  $\mathbf{F}$  сонаправлена с  $\boldsymbol{\nu}(A)$ , перемещение КА, начинающееся из точки  $A_1$  с нулевой начальной скоростью, может приводить к ослабеванию троса, и дальнейшему движению внутри эллипса с последующим ударным выходом на связь. Если в уравнениях (1.27) множитель Лагранжа в любой точке траектории будет отрицательным  $\lambda \leq 0$ , то этого не произойдет. С учетом малости силы Кориолиса при скалярном умножении

общих уравнений движения на  $\boldsymbol{\nu}$  получается соотношение

$$(\mathbf{F}, \boldsymbol{\nu}) - (\ddot{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\nu}) = -\lambda \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}, \boldsymbol{\nu} \right).$$

Градиент эллипса  $\text{grad } f(x, y)$  и вектор  $\boldsymbol{\nu}$  сонаправлены, поэтому

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}, \boldsymbol{\nu} \right) > 0,$$

тогда неравенство

$$(\mathbf{F}, \boldsymbol{\nu}) \geq (\ddot{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\nu})$$

можно рассматривать, как условие нахождения на связи.

При движении по эллипсу для нормального ускорения справедливо утверждение  $-w_n = (\ddot{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\nu}) \leq 0$ , поэтому выполнение критерия

$$(\mathbf{F}, \boldsymbol{\nu}) > 0$$

в каждой точке траектории гарантирует ненулевую реакцию троса и невозможность схода со связи.

В частном случае этот критерий превращается в следующее неравенство.

**ТЕОРЕМА 2.1.** *Для того, чтобы движение между  $A_i$ ,  $i = 1, 2$  происходило без схода со связи, достаточно выполнения условий*

$$(\boldsymbol{\nu}(A), \boldsymbol{\nu}_i) > 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.4)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1.** Внешняя нормаль к траектории  $\boldsymbol{\nu}(A)$  в данной точке сонаправлена с силой солнечной радиации  $\mathbf{F}$ , а касательная параллельна прямой  $A_1A_2$  (рис. 2.2).

Рассмотрим функцию  $g = (\boldsymbol{\nu}(A), \boldsymbol{\nu})$ , где  $\boldsymbol{\nu}$  - внешняя нормаль в произвольной точке эллипса. При перемещении вдоль леерной связи по часовой стрелке от точки  $A$  к симметричной относительно центра  $O$  точке, и далее снова к  $A$ , функция сначала монотонно убывает от 1 до  $-1$ , а затем монотонно возрастает от  $-1$  до 1.

Таким образом, функция  $g$  обращается в нуль ровно в двух точках эллипса, симметричных относительно центра  $O$ .

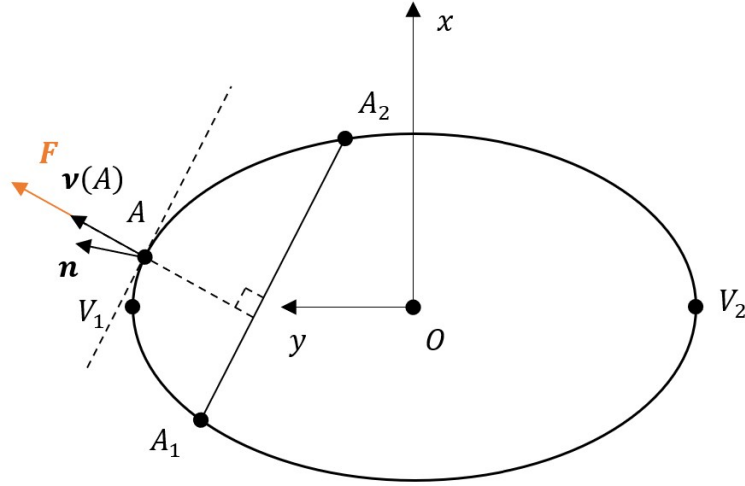


Рисунок 2.2. Маятниковые движения с постоянно ориентированным неидеальным СП

Предположим, что  $g_i = (\nu(A), \nu_i) > 0$ ,  $i = 1, 2$ , тогда на дугах  $AA_i$ , составляющих меньше половины эллипса, функция  $g$  может менять знак не более одного раза. Однако, в точках  $A$  и  $A_i$  она положительна, поэтому знак не меняется ни на одной из дуг, то есть всегда  $g > 0$ .

Доказано достаточное условие существования движения вдоль леерной связи.

□

**СЛЕДСТВИЕ 2.1.** При выполнении неравенства (2.4) во всех точках дуги  $A_1A_2$  угол между внешней нормалью к эллипсу и аналогичным вектором в точке  $A$  будет острым, что гарантирует выполнение условия нахождения на связи.

**СЛЕДСТВИЕ 2.2.** Для идеального СП нормаль к нему совпадает с внешней нормалью к траектории в точке  $A$ , и достаточное условие существования движения вдоль леерной связи можно переписать как

$$(\mathbf{n}, \nu_i) > 0, \quad i = 1, 2.$$

**ТЕОРЕМА 2.2.** Неравенства

$$(\nu(A), \nu_i) \geq 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.5)$$

являются необходимыми условиями связного движения между  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ .

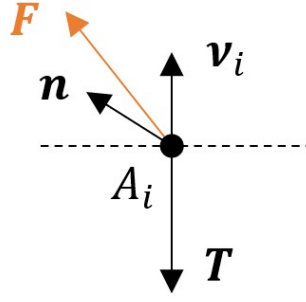


Рисунок 2.3. К доказательству 2.2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Согласно упрощениям, принятым в разделе 1.6, во время движения на КА с СП действуют сила солнечной радиации  $\mathbf{F}$ , сонаправленная с внешней нормалью к эллипсу  $\boldsymbol{\nu}(A)$  в соответствующей точке, сила натяжения троса  $\mathbf{T}$  ориентирована противоположно данному вектору (рис. 2.3). Для идеального СП ситуация аналогична, только нормаль СП  $\mathbf{n}$  совпадает с внешней нормалью к траектории в точке  $A$ . По условию задачи в точках  $A_i$ ,  $i = 1, 2$  скорость КА с СП равна  $v_i = 0$ ,  $i = 1, 2$ , а сумма проекций сил на направление внешней нормали к траектории  $\boldsymbol{\nu}_i$ ,  $i = 1, 2$  будет также равна нулю, то есть

$$(\mathbf{F}, \boldsymbol{\nu}_i) + (\mathbf{T}, \boldsymbol{\nu}_i) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Движение считается связным, поэтому сила натяжения троса  $\mathbf{T}$  должна быть противоположна внешней нормали к эллипсу, в крайнем случае равна нулю

$$(\mathbf{T}, \boldsymbol{\nu}_i) = -|\mathbf{T}| \leq 0, \quad i = 1, 2,$$

что равносильно неравенствам  $(\boldsymbol{\nu}(A), \boldsymbol{\nu}_i) \leq 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Доказано необходимое условие существования движения вдоль леерной связи.

□

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Для идеального СП необходимое условие существования движения вдоль леерной связи примет вид

$$(\mathbf{n}, \boldsymbol{\nu}_i) \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

### 2.3. Пары точек, допускающие связное перемещение

Найдем все пары точек на эллипсе, являющемся пересечением эллипсоида с плоскостью орбиты космических станций, между которыми возможно связное перемещение КА с постоянно ориентированным СП при нулевых начальной и конечной скоростях.

Для определенности будем считать, что  $-\frac{\pi}{2} \leq \psi_i \leq \frac{3\pi}{2}$ . Рассмотрим сначала ситуацию, когда  $\cos \psi_1 > \cos \psi_2$ .

В разделе 2.1. показано, что для неидеального СП внешняя нормаль в точке  $A$ , записанная как  $\boldsymbol{\nu}(A)$ , или нормаль идеального СП  $\mathbf{n}$  оказываются сонаправлены с вектором

$$\left( \cos \psi_2 - \cos \psi_1, \sqrt{1 - e^2} (\sin \psi_1 - \sin \psi_2) \right)^T,$$

при этом в начальной и конечной точках движения  $A_i$ ,  $i = 1, 2$  внешние нормали к эллипсу  $\boldsymbol{\nu}_i$  параллельны соответственно векторам

$$\left( \sin \psi_i, \sqrt{(1 - e^2)} \cos \psi_i \right)^T, \quad i = 1, 2.$$

В силу сделанных предположений условия (2.4) запишутся следующим образом

$$(\cos \psi_2 - \cos \psi_1) \sin \psi_i + (1 - e^2) (\sin \psi_1 - \sin \psi_2) \cos \psi_i > 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.6)$$

Далее приводятся частные случаи условий связного движения при различных эксцентриситетах эллипса  $0 < e < 1$ , проиллюстрированные соответствующими диаграммами.

#### Частные случаи.

Если  $e = 0$ , то эллипс превращается в окружность, и условия (2.6) переписываются как

$$\sin(\psi_1 - \psi_2) > 0.$$

Вертикальная штриховка обозначает область, где одновременно с полученным неравенством выполняется критерий перелета из точки  $A_1$  в точку  $A_2$ .

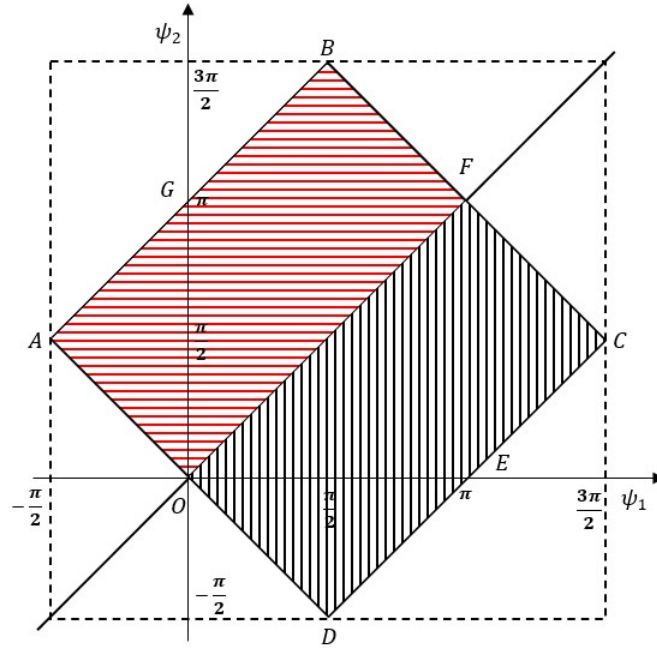


Рисунок 2.4. Множество пар точек при  $e = 0$

Учитывая, что перемещение может происходить и в обратном направлении из  $A_2$  в  $A_1$ , на рис. 2.4 добавлена заполненная горизонтальной штриховкой область, симметричная относительно прямой  $\psi_1 = \psi_2$ . Каждая внутренняя точка квадрата  $ABCD$  соответствует паре точек  $A_i, i = 1, 2$  на эллипсе, между которыми возможно движение при постоянно ориентированном СП с нулевыми начальной и конечной скоростями. Границы квадрата рассматриваются отдельно. Точка  $D(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$  соответствует вершинам, принадлежащим малой оси эллипса, между которыми такое движение невозможно, так как в этом случае нормаль СП должна быть перпендикулярна солнечным лучам. Точка  $E(\pi, 0)$  сопоставима с вершинами, расположенным на большой оси эллипса, между которыми может осуществляться перелет.

Если  $e$  стремится к единице, то с учетом критерия связного движения из точки  $A_1$  в точку  $A_2$ , условия (2.6) примут вид

$$\sin \psi_i > 0, \quad i = 1, 2.$$

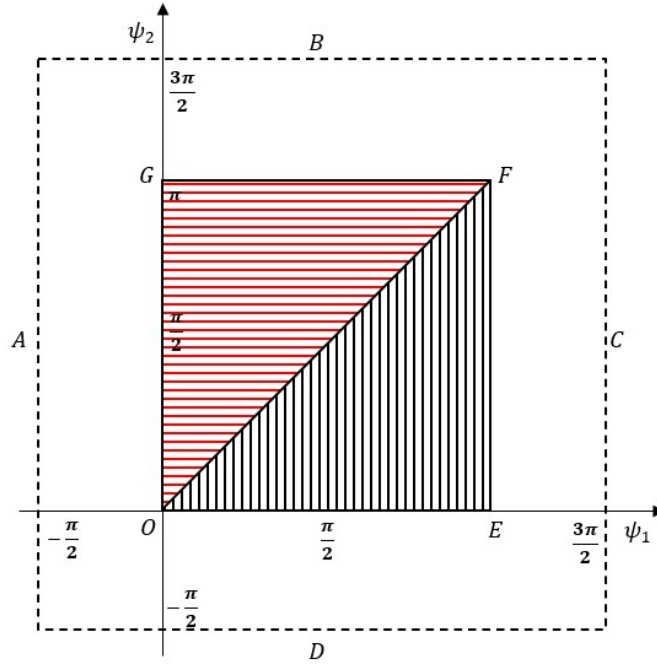


Рисунок 2.5. Множество пар точек при  $e \rightarrow 1$

Вертикальной штриховкой выделяет область  $\triangle OEF$ , где выполняется все перечисленные условия, а с учетом перестановки начальной и конечной точек движение также возможно для внутренней части  $\triangle OGF$  (рис. 2.5).

#### Общий случай.

Для любого  $e$  выражение (2.6) можно переписать следующим образом

$$e^2 \cos \psi_i (\sin \psi_2 - \sin \psi_1) + \sin (\psi_1 - \psi_2) > 0, \quad i = 1, 2.$$

Анализ полученных условий показывает, что рассматриваемые движения возможны во внутренних частях областей, изображенных при эксцентриситетах эллипса  $0 < e < \frac{1}{\sqrt{2}}$  (рис. 2.6, а),  $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (рис. 2.6, б),  $\frac{1}{\sqrt{2}} < e < 1$  (рис. 2.6, в).

Диаграмма на рис. 2.6, б представляет уникальный случай, когда криволинейные участки границы имеют вертикальные и горизонтальные касательные в своих крайних точках.



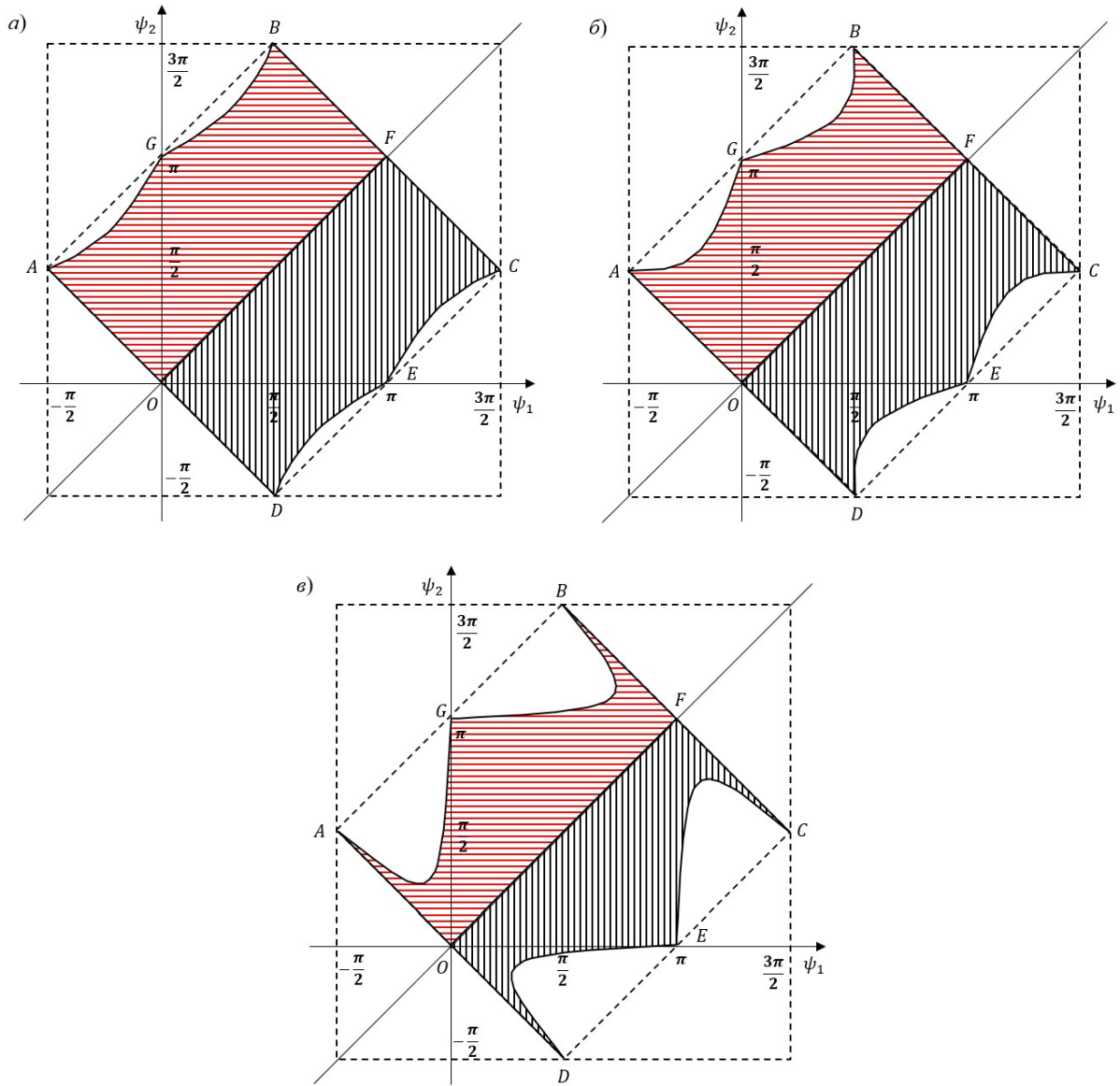


Рисунок 2.6. Множество пар точек при а)  $0 < e < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , б)  $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , в)  $\frac{1}{\sqrt{2}} < e < 1$

Отметим, что на всех рисунках кривые  $AG$ ,  $GB$  и  $EC$ ,  $DE$  симметричны относительно прямой  $GE$ , заданной выражением  $\psi_2 + \psi_1 = \pi$ , в то время как кривые  $AG$ ,  $DE$  и  $GB$ ,  $EC$  симметричны относительно прямой  $OF$ , описанной соотношением  $\psi_1 = \psi_2$ , то есть кривые  $AG$ ,  $GB$ ,  $EC$ ,  $DE$  конгруэнтны. При изменении эксцентриситета эллипса  $0 \leq e < 1$  искомая область эволюционирует из квадрата  $ABCD$  в квадрат  $OGEF$ , причем вершины фигур все время остаются на границе этой области. Следовательно, любой внутренней точке участка,

заштрихованного на рис. 2.6 соответствуют точки эллипса  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ , между которыми возможно перемещение с независимо направленной нормалью к СП и с нулевыми начальной и конечной скоростями.

Руководствуясь необходимостью выполнения условий нахождения на связи, построим алгоритм решения задачи о движении КА с неизменно ориентированным СП. Алгоритм состоит из четырех этапов. На первом этапе проверяется, что значение угла между силой солнечной радиации и направлением солнечных лучей  $\gamma$  соответствует ограничению  $0 \leq \gamma \leq \gamma_{max}$ , где  $\gamma_{max} = \frac{\pi}{2}$  для идеального СП,  $\gamma_{max} = \arcsin k$  для неидеального СП. Вычисляется базовая калибровочная характеристика  $F(\gamma)$ , отражающая величину силы солнечной радиации  $F$ . На втором этапе подтверждается выполнение условия нахождения на связи (2.4). На третьем этапе определяются основные динамические характеристики перемещения согласно теореме об изменении кинетической энергии. На четвертом этапе осуществляется пересчет полученных величин в традиционные единицы измерения.

#### **2.4. Алгоритм исследования динамики полета космического аппарата с постоянно ориентированным солнечным парусом**

В разделе описывается алгоритм 2.1, позволяющий вычислить основные динамические характеристики движения между двумя точками при СП, неизменно ориентированном относительно солнечных лучей.

##### **Алгоритм 2.1.**

###### **Этап 1.**

1.1. Проверить неравенство  $0 \leq \gamma \leq \gamma_{max}$  при  $\gamma_{max} = \frac{\pi}{2}$  для идеального СП и  $\gamma_{max} = \arcsin k$  для неидеального СП. Если оно выполнено, то перейти к следующему шагу, иначе завершить алгоритм и показать, что введенный угол  $\gamma$  слишком большой.

1.2. Найти значение базовой калибровочной характеристики  $F(\gamma)$  и определить величину силы солнечной радиации  $F$ . Перейти к этапу 2.

###### **Этап 2.**

2.1. Удостовериться, что выполняется условие нахождения на связи (2.4). Если неравенство выполнено, перейти к следующему шагу, иначе завер-

шить алгоритм и вывести предупреждение о невозможности связного перемещения между выбранными точками. Перейти к следующему шагу 2.2.

2.2. Вычислить массив ускорений  $w_\tau[j]$ . Перейти к этапу 3.

Этап 3.

3.1. Записать теорему об изменении кинетической энергии (2.7). Перейти к шагу 3.2.

3.2. Определить массивы скоростей  $v[j]$  и сил натяжения троса  $T[j]$ . Перейти к шагу 3.3.

3.3. Рассчитать продолжительность перемещения  $t$ . Построить графики. Перейти к этапу 4.

Этап 4.

4.1. Выразить из безразмерных значений величины динамических характеристик в традиционных единицах измерения, в частности для реальных КА. Завершить алгоритм.

Алгоритм 2.1 предполагает последовательное решение задачи о движении КА с постоянно ориентированным СП при перелете между двумя точками с нулевыми начальной и конечной скоростями.

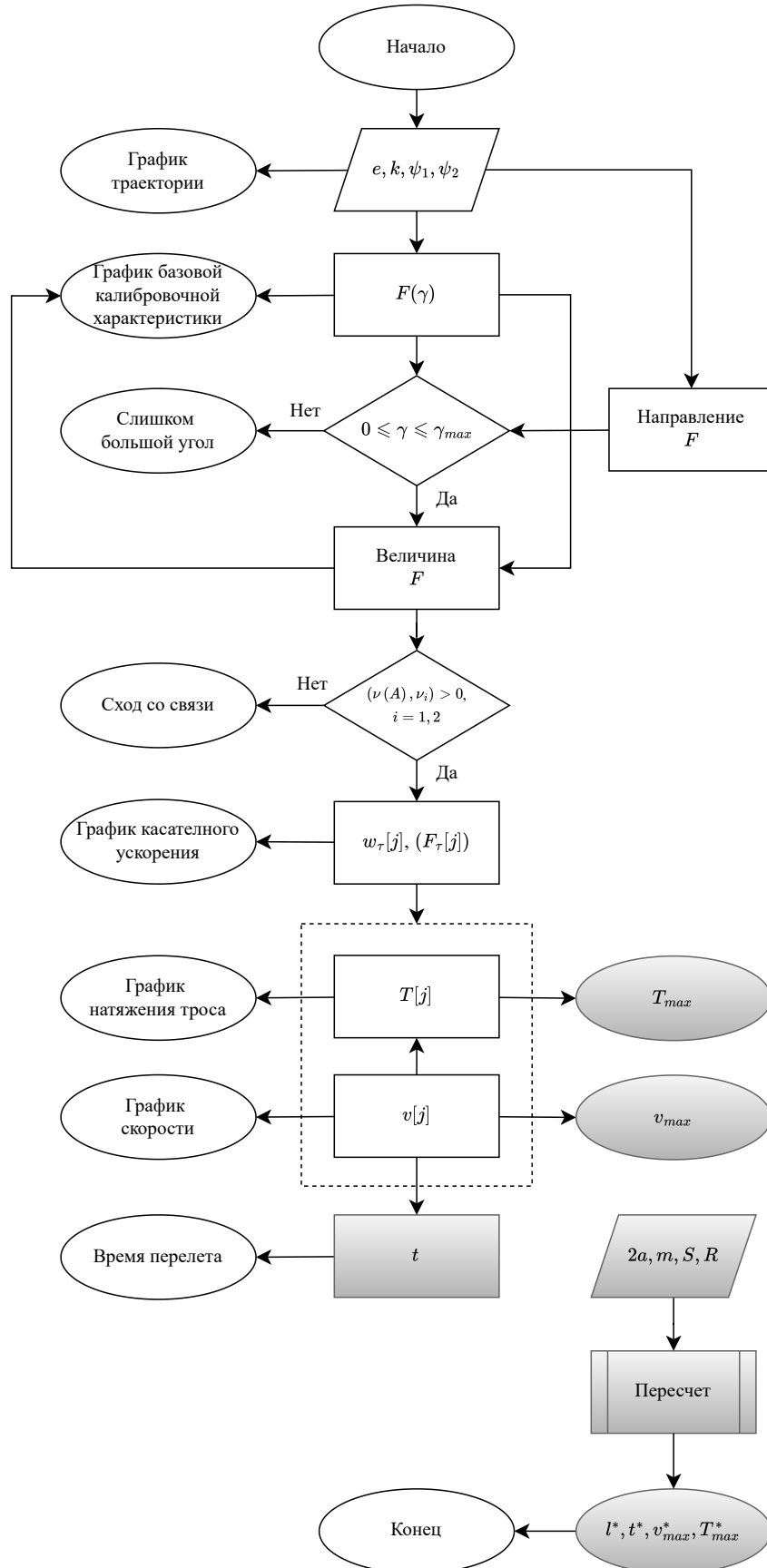
Процедура вычислений согласно алгоритму 2.1 показана в форме блок-схемы (2.7).

В качестве входных данных поступают коэффициент отражения  $k$ , влияющий на отражательную способность материала СП, эксцентриситет эллипса  $e$ , определяющий траекторию, и координаты точек перемещения  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ , заданные через эксцентрические аномалии  $\psi_i$ ,  $i = 1, 2$ .

С учетом введенных параметров определяется значение базовой калибровочной характеристики  $F(\gamma)$  по формуле (1.13) и проверяется, что  $0 \leq \gamma \leq \arcsin k$ . Если  $\gamma$  удовлетворяет данному неравенству, то находится величина силы солнечной радиации, если не удовлетворяет, то угол оказывается слишком большим, и дальнейшие вычисления произвести невозможно.

В следующем шаге проверяется условие нахождения на связи КА с СП (2.7). Если условие выполняется, то вычисляются касательное ускорение  $w_\tau$ , которое в безразмерных переменных совпадает с проекцией силы солнечной радиации  $F_\tau$  на касательную к траектории. Если условие не выполняется, то КА сходит со связи.

Рисунок 2.7. Алгоритм исследования динамики полета космического аппарата с постоянно ориентированным солнечным парусом



Используя формулы (1.5) и (1.20) из  $F_\tau$  получают скорость  $\mathbf{v}$  и силу натяжения троса  $\mathbf{T}$ , которые определяют их максимальные значения  $v_{max}$  и  $T_{max}$ . Кроме того, определяется продолжительность перемещения  $t$ .

Таким образом, можно получить графики траектории и базовой калибровочной характеристики  $F(\gamma)$  в системе координат  $Oxy$ , а также графики касательного ускорения, относительной скорости и силы натяжения троса, зависящие от эксцентрической аномалии  $\psi$ .

Для перехода к динамическим характеристикам реальных КА необходимо преобразовать полученные безразмерные величины  $t$ ,  $v_{max}$ ,  $T_{max}$  с учетом площади СП  $S$ , массы КА  $m$ , расстояний между станциями  $2c$  и от Солнца до центра эллипса  $R$ . В качестве выходных данных получают длину троса  $2a^*$ , время перелета  $t^*$ , максимальные значения скорости  $v_{max}^*$  и натяжения троса  $T_{max}^*$ , выраженные в традиционных единицах измерения.

Для подсчета несобственных интегралов, возникающих в процессе решения задачи, используются численные методы интегрирования.

В приложении А показан пример применения алгоритма для исследования динамики полета КА с постоянно ориентированным СП.

## 2.5. Продолжительность перемещения между наиболее удаленными точками леерной связи

Если начальная скорость равна нулю  $v_1 = 0$ , то в выражении (1.30)  $h = 0$ , и его можно переписать как

$$\frac{1}{2}(1 - e^2 \cos^2 \psi) \dot{\psi}^2 = \sqrt{1 - e^2} \sin \psi. \quad (2.7)$$

Для неидеального СП в случае, когда начальная и конечная скорости равны нулю  $v_i = 0$ ,  $i = 1, 2$ , время перелета между наиболее удаленными точками леерной связи  $V_1$  и  $V_2$ , которым соответствуют эксцентрические аномалии  $\psi_1 = 0$  и  $\psi_2 = \pi$ , будет отличаться от этого показателя для идеально отражающей поверхности на некоторый множитель больше единицы, зависящий от коэффициента отражения  $k$

$$t(k) = t \sqrt{\frac{2}{1 + k}}.$$

Для идеального СП продолжительность перемещения между теми же точками можно найти по формуле

$$t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{1-e^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-e^2 \cos^2 \psi}{\sin \psi}} d\psi.$$

Отметим, что если эксцентриситет эллипса стремится к нулю  $e \rightarrow 0$ , то функция времени  $t \rightarrow 2K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 3.708$ , где  $K$  – полный эллиптический интеграл первого рода. Если эксцентриситет стремится к единице  $e \rightarrow 1$ , то продолжительность перемещения стремится к бесконечности  $t \rightarrow \infty$ . Дифференцируя зависимость  $t$  по  $e$ , можно установить, что время перелета между вершинами эллипса при нулевых начальной и конечной скоростях  $v_i = 0$ ,  $i = 1, 2$  будет принимать минимальное значение  $t_{min} = 3.5575$  при  $e_{min} = 0.7906$ , когда  $b/a = 0.3066$  (рис. 2.8).

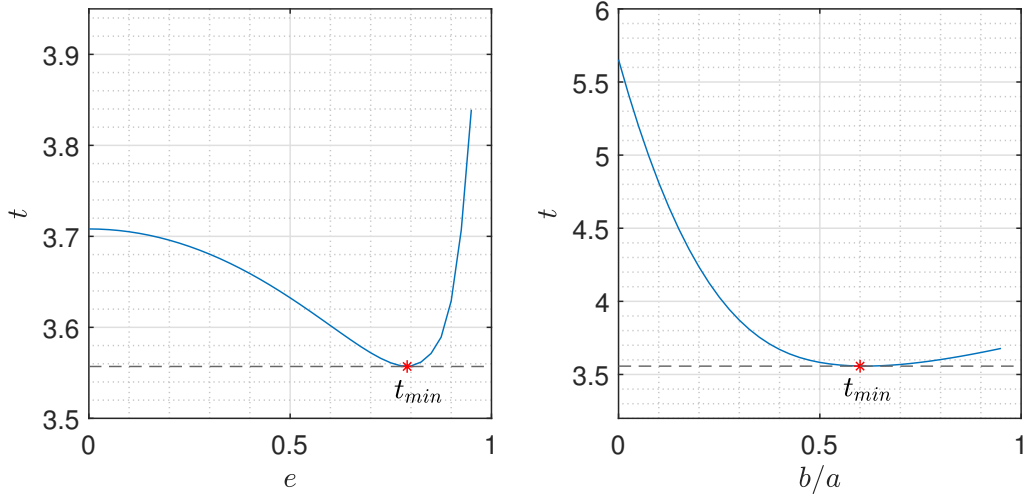


Рисунок 2.8. Зависимость времени перемещения  $t$  от эксцентриситета  $e$  и отношения полуосей  $b/a$  при нулевой начальной и конечной скоростях в безразмерных единицах измерения

## 2.6. Перемещение между произвольными точками леерной связи

В рамках сделанных предположений на КА действует только одна активная сила, а относительные скорости в начальной и конечной точках равны нулю  $v_i = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Из теоремы об изменении кинетической энергии можно вычислить расстояние  $\Delta x$  между прямой  $A_1A_2$  и актуальным положением КА.

Если уравнение прямой  $A_1A_2$  в плоскости  $Oxy$  переписать как

$$\sqrt{1-e^2} \cos\left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right) (y - \cos\psi_1) + \sin\left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right) (x - \sqrt{1-e^2} \sin\psi_1) = 0,$$

и воспользоваться стандартными формулами аналитической геометрии, позволяющими найти расстояние от точки до прямой, то можно вывести равенство

$$\Delta x = \frac{2\sqrt{1-e^2} \left| \sin\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) \right|}{\sqrt{1-e^2 \cos^2\left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right)}}.$$

Расстояние  $\Delta x$  принимает максимальное значение в точке  $A$ , где эксцентрическая аномалия  $\psi(A)$  выбирается согласно указаниям из раздела 2.1, которое может быть найдено

$$\Delta x_{max} = \frac{2\sqrt{1-e^2} \sin^2\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{4}\right)}{\sqrt{1-e^2 \cos^2\psi(A)}}.$$

**Относительная скорость КА.** Известно, что относительная скорость КА в произвольной точке эллипса определяется в безразмерном виде по формуле (1.20) следующим образом

$$v = \sqrt{2F\Delta x},$$

тогда при  $\Delta x = \Delta x_{max}$ , характеризующем расстояние между прямой  $A_1A_2$  и положением КА, она достигает максимального значения

$$v_{max} = 2\sqrt{F} \frac{\sqrt[4]{1-e^2} \left| \sin\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{4}\right) \right|}{\sqrt[4]{1-e^2 \cos^2\psi(A)}}.$$

**Сила натяжения троса.** Для вычисления силы натяжения троса можно воспользоваться уравнениями движения в проекции на внутреннюю нормаль

к эллипсу (1.24), которые с учетом формул для вычисления скорости, силы солнечной радиации (1.2), нормали к эллипсу (2.3) можно выразить в виде

$$T = \frac{F}{2 \cos \frac{\beta}{2}} \left( \frac{2\Delta x}{\rho} + (\nu(A), \nu) \right),$$

где

$$\rho = \frac{(1 - e^2 \cos^2 \psi)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1 - e^2}}, \quad \cos \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}}. \quad (2.8)$$

**Продолжительность перемещения.** Чтобы найти продолжительность перемещения КА с неизменно ориентированным СП между произвольными точками, необходимо подставить в уравнения движения (1.24) относительную скорость  $v$ , силу солнечной радиации  $F$ , расстояние  $\Delta x$  от прямой до актуальной точки. В результате время перелета можно выразить квадратурой

$$t = \frac{\sqrt[4]{1 - e^2 \cos^2 \left( \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \right)}}{2\sqrt{F}\sqrt[4]{1 - e^2}} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \sqrt{\frac{1 - e^2 \cos^2 \psi}{\sin \left( \frac{\psi - \psi_1}{2} \right) \sin \left( \frac{\psi_2 - \psi_1}{2} \right)}} d\psi, \quad (2.9)$$

причем несобственный интеграл находится численно [118].

## 2.7. Оценка динамических характеристик

Переход от безразмерных единиц измерения к традиционной продолжительности перемещения осуществляется по формуле

$$t^* = t \sqrt{\frac{ma}{F_{max}}},$$

где  $t^*$  – время перелета в размерной форме,  $m$  – масса КА,  $a$  – половина длины троса,  $F_{max}$  – максимально возможная сила солнечной радиации, действующая на СП в рамках основной модели, определяемой равенством

$$F_{max} = \frac{1 + k}{2} PS \frac{R_0^2}{R^2}, \quad R_0 \approx 1 \text{ а.е.}$$

в соответствие с обозначениями:  $P$  – характерная величина солнечного давления на орбите Земли,  $S$  – площадь СП,  $R_0$  – расстояние от Земли до Солнца,  $R$  – актуальное расстояние от Солнца до КА.

Характеристики реальных КА, использованные в расчетах, указаны в таблице 1.1. Перемещение происходит между некоторыми точками при условии, что длина троса  $a = 2$  км.



Если КА с постоянно ориентированным СП осуществляет движение между вершинами эллипса  $V_1$  и  $V_2$ , которым соответствуют точки с эксцентрическими аномалиями  $\psi_1 = 0$  и  $\psi_2 = \pi$ , то для оценки времени перелета  $t(k)$  при фиксированном эксцентриситете  $e = 0.8$  на расстоянии от Солнца  $R = 0.5$  а.е. может быть составлена таблица 2.1.

Таблица 2.1. Зависимость времени перелета  $t$  от коэффициента отражения  $k$  для КА с постоянно ориентированным СП между точками  $V_1$  и  $V_2$

Космический аппарат	Продолжительность перелета $t$ , ч при $k = \dots$										
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
IKAROS	10.06	9.92	9.50	9.13	8.80	8.50	8.23	7.98	7.75	7.55	7.35
NanoSail	5.20	4.95	4.75	4.57	4.40	4.25	4.12	3.98	3.87	3.77	3.67
LightSail-2	3.25	3.10	2.97	2.85	2.75	2.65	2.57	2.48	2.42	2.35	2.30
Sunjammer	1.73	1.65	1.58	1.52	1.47	1.42	1.37	1.33	1.30	1.27	1.23
Helios	1.25	1.18	1.13	1.10	1.05	1.02	0.98	0.95	0.93	0.90	0.88

Заметим, что время перелета оказывается тем дольше, чем меньше коэффициент отражения СП, но практически всегда оно остается приемлемым, то есть порядка нескольких часов при перемещении на пару километров. Если увеличить расстояние до нескольких сотен километров, то на транспортировку грузов между точками будет затрачиваться не менее суток. Эффективным оказывается даже СП, который полностью поглощает солнечную радиацию, так как в процессе движения все равно будет возникать некоторое ускорение.

Sunjammer и Helios оказываются наиболее быстрыми при перелете на заданные расстояния благодаря своим техническим параметрам, а именно высокой парусности, то есть отношению площади СП к массе КА.

На рис. 2.9 и в таблице 2.2 показаны основные динамические характеристики движения КА с постоянно ориентированным СП при перемещении с нулевыми начальными и конечными скоростями  $v_i = 0$ ,  $i = 1, 2$  между вершиной  $V_1$  и точкой на эллипсе, расположенной над космической станцией  $F_2$ , которым соответствуют эксцентрические аномалии  $\psi_1 = 0$  и  $\psi_2 = \pi - \arccos(e)$ , причем эксцентриситет эллипса  $e = 0.9$ , коэффициент отражения  $k = 0.5$ , расстояние от Солнца  $R = 0.5$  а.е.

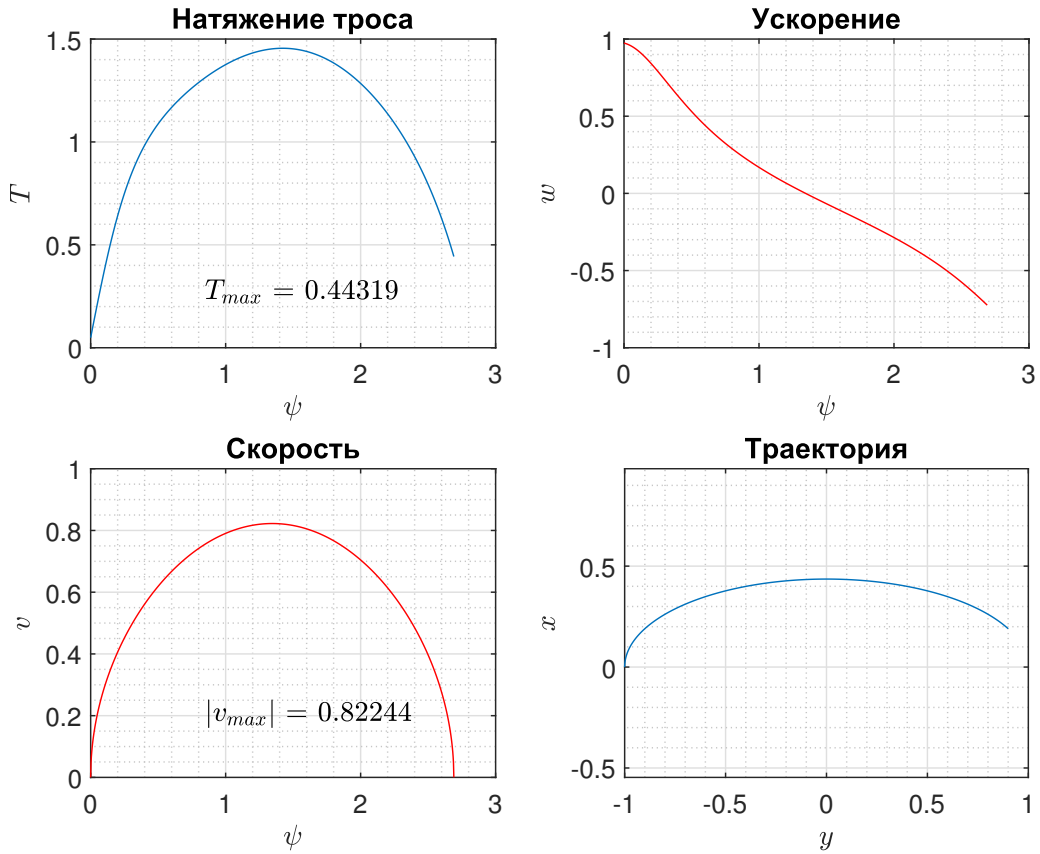


Рисунок 2.9. Динамические характеристики перемещения КА с постоянно ориентированным СП между точками  $\psi_1 = 0$  и  $\psi_2 = \pi - \arccos(e)$  в безразмерных единицах измерения

Таблица 2.2. Динамические характеристики перемещения КА с постоянно ориентированным СП между точками  $\psi_1 = 0$  и  $\psi_2 = \pi - \arccos(e)$

Космический аппарат	Продолжительность перелета $t$ , ч	Максимальное натяжение $T_{max}$ , Гс	Максимальная скорость $v_{max}$ , м/с
IKAROS	8.55	0.830	0.110
NanoSail	4.27	0.041	0.220
LightSail-2	2.67	0.133	0.352
Sunjammer	1.43	4.978	0.657
Helios	1.02	4.107	0.914

Helios развивает наибольшую максимальную скорость и совершает самый быстрый перелет, однако максимальное натяжение троса для него оказывается выше, чем при использовании большинства других КА. Для эксплуатации подобного рода КА требуется оснащать систему более прочным тросом.

Для тех же параметров точек перемещения на рис. 2.10 представлены зависимости времени перелета КА с постоянно ориентированным СП от коэффициента отражения при фиксированном  $e = 0.9$  и от эксцентриситета при постоянном  $k = 0.5$  в безразмерных единицах измерения.

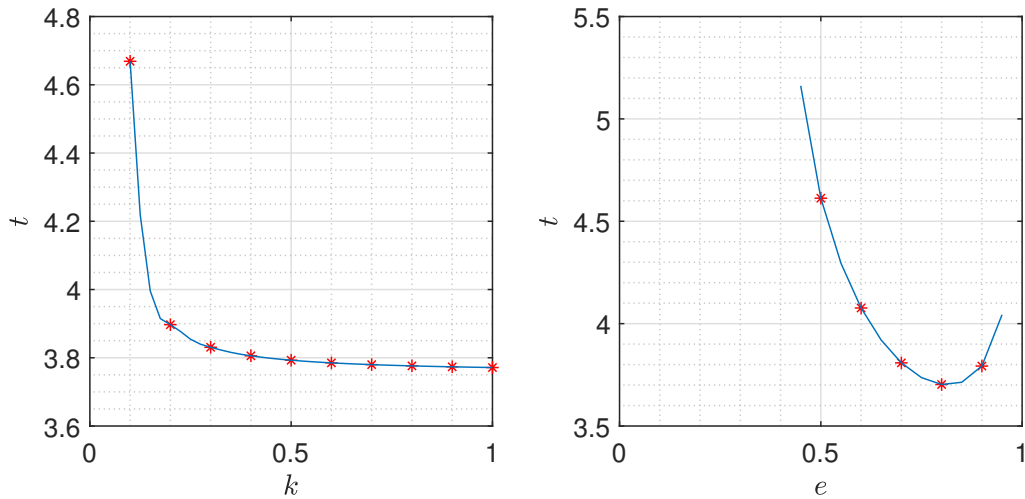


Рисунок 2.10. Зависимость времени перелета  $t$  от коэффициента отражения  $k$  и эксцентриситета  $e$  при перемещении КА с постоянно ориентированным СП между точками  $\psi_1 = 0$  и  $\psi_2 = \pi - \arccos(e)$

Перемещения между точками  $V_1$  и расположенной над космической станцией  $F_2$  на эллипсе возможны не при всех сочетаниях коэффициента отражения и эксцентриситета. Если  $k = 0$ , то при постоянном  $e = 0.9$  движение невозможно, поскольку для создания ускорения требуется технически недопустимо большой угол поворота СП. В случае, когда постоянным является  $k = 0.5$ , перелет возможен только, если траектория движения соответствует эллипсам с определенными эксцентриситетами.

## 2.8. Выводы по главе 2

1. Найден способ управления полетом КА с СП при движении вдоль леерной связи, предполагающей сохранение ориентации нормали СП относительно направления солнечных лучей. Описаны маятниковые колебания, возникающие в процессе такого перемещения вдоль троса между двумя произвольными точками.

2. Сформулированы и доказаны условия существования движения с натянутым тросом между произвольными точками леерной связи при неизменно направленной нормали СП.

3. Построены диаграммы, характеризующие множества пар точек, между которыми возможно связанное перемещение с постоянно ориентированным СП. Рассмотрены частные случаи при различных эксцентриситетах эллипса, вдоль которого происходит движение.

4. Разработан алгоритм исследования динамики полета космического аппарата с постоянно ориентированным солнечным парусом.

5. Определены относительная скорость, сила натяжения троса и продолжительность перемещения КА с СП, неизменно ориентированным относительно солнечных лучей.

6. Проведен анализ основных динамических характеристик движения. Составлены графики и таблицы зависимостей скорости, ускорения, силы натяжения троса от положения КА на эллипсе, рассчитано время перелета при различных коэффициентах отражения и эксцентриситетах.

**Основные результаты главы опубликованы в [102–104, 106, 107, 110, 111]**

### **Глава 3.   Задача о движении космического аппарата с управляемым солнечным парусом вдоль леерной связи**

Целью данной главы является решение задачи о движении КА с управляемым СП между произвольными точками леерной связи, закрепленной на двух гелиоцентрических космических станциях. Ориентация СП корректируется в зависимости от положения КА на эллипсе.

Разрабатываются методика и алгоритм вычислений, учитывающие возможность управления углом наклона нормали СП относительно направления солнечных лучей. Ориентация СП, реализующая максимальное касательное ускорение в каждой точке траектории, называется оптимальной, так как позволяет осуществлять более быстрый перелет, чем в случае, изложенном в главе 2. Вычисляются и оцениваются динамические характеристики полета КА между произвольными точками леерной связи с учетом изменения положения СП.

В разделе 3.1. описаны движения КА с управляемым СП вдоль троса. В разделе 3.2. предложена методика возможного способа перемещения между заданными точками леерной связи, предполагающая вычисление динамических характеристик при коррекции положения СП, в том числе угла  $\delta$  между направлением вектора скорости КА и направлением солнечных лучей с учетом нулевых начальных и конечных скоростей. В разделе 3.3. разработан алгоритм исследования динамики полета КА с управляемым СП. В разделе 3.4. рассмотрено перемещение между наиболее удаленными точками леерной связи. Вычислена продолжительность перемещения при различных вариантах начальных условий. В разделе 3.5. определены основные динамические характеристики полета при нулевых начальных и конечных скоростях. В разделе 3.6. произведена оценка параметров движения для реальных КА с СП. В разделе 3.7. сформулированы выводы по главе 3.

### 3.1. Движение с учетом коррекции положения солнечного паруса

**ЗАДАЧА 3.1.** КА, оснащенный СП, изменяющим положение в процессе движения, перемещается под действием силы солнечной радиации  $F$  между произвольными точками леерной связи  $A_i$ ,  $i = 1, 2$  с нулевыми начальной и конечной скоростями  $v_i = 0$ .

Для того, чтобы обеспечить более быстрое, чем описанное в предыдущей главе, движение КА, необходимо корректировать положение СП таким образом, чтобы создавать максимально возможное касательное ускорение в каждой точке траектории.

В силу сделанных предположений в главе 1 будем рассматривать перемещение с нулевыми начальной и конечной скоростями  $v_i = 0$ ,  $i = 1, 2$ . В некоторой точке  $B$ , которую можно назвать точкой переключения, касательное ускорение должно менять направление на противоположное. Таким образом, точка  $B$  делит дугу  $A_1A_2$  на участки  $A_1B$ , где осуществляется разгон, и  $BA_2$ , где происходит торможение (рис. 3.1).

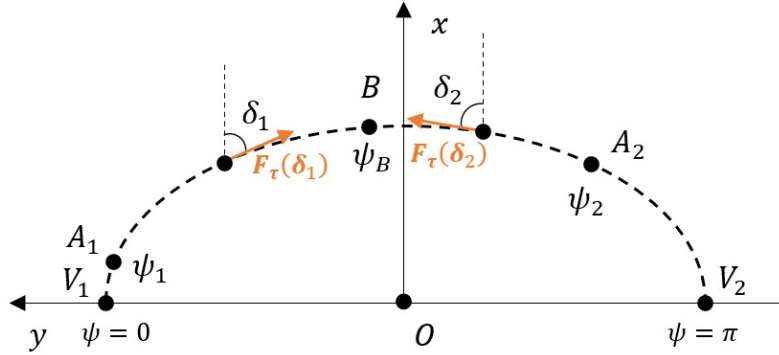


Рисунок 3.1. Движение между произвольными точками леерной связи с управляемым СП при нулевых начальной и конечной скоростях

### 3.2. Методика вычисления динамических характеристик при изменении ориентации солнечного паруса

Для определения положения точки переключения и продолжительности перемещения необходимо знать не только эксцентрические аномалии начальной и конечной точек, но и иметь возможность вычислять максимум величины проекции силы солнечной радиации на касательную к траектории. При расчетах можно использовать производную калибровочную характеристику  $F_\tau(\delta)$ , поиск которой осуществляется по формуле (1.14).

Для решения поставленной задачи используется следующая последовательность действий:

1. Определение базовой калибровочной характеристики  $F(\gamma)$ . Будет использоваться базовая калибровочная характеристика модели (1.2).
2. Поиск производной калибровочной характеристики  $F_\tau(\delta)$ , рассчитываемой через  $F(\gamma)$ , и построение с ее помощью полей максимально возможного касательного ускорения при разгоне и торможении.
3. Формирование по теореме об изменении кинетической энергии полей скоростей для разгона с нулевой начальной скоростью и для торможения с нулевой конечной скоростью.
4. Фиксация точки переключения, в которой совпадают поля скоростей для разгона и для торможения.
5. Вычисление времени перелета как суммы продолжительностей перемещения на участках разгона и торможения, определяемых соответствующими полями скоростей.

Прежде, чем перейти к описанию алгоритма исследования динамики полета космического аппарата с управляемым солнечным парусом, написанного на основе методики, покажем, как выбирается угол  $\delta$  для участков разгона и торможения.



Во все время перелета касательное ускорение должно быть максимально по модулю, причем на дуге  $A_1B$  направлено в сторону движения, а на дуге  $BA_2$  противоположно. Угол  $\delta$  между касательной к эллипсу и направлением солнечных лучей будем обозначать  $\delta_1$  на участке ускорения, а  $\delta_2$  на участке замедления (рис. 3.2).

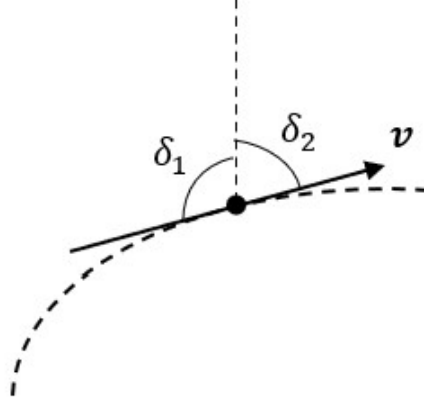


Рисунок 3.2. Определение угла между вектором скорости и направлением солнечных лучей на участках разгона и торможения

Относительная скорость определяется равенством

$$v = \left( \sqrt{1 - e^2} \dot{\psi} \cos \psi, -\dot{\psi} \sin \psi \right)^T,$$

поэтому

$$\cos \delta_1 = \frac{\sqrt{1 - e^2} \cos \psi}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}},$$

откуда

$$\delta_1 = \arccos \frac{\sqrt{1 - e^2} \cos \psi}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}}, \quad \delta_2 = \pi - \arccos \frac{\sqrt{1 - e^2} \cos \psi}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}}. \quad (3.1)$$

Пусть масса КА равна единице, тогда безразмерные уравнения относительного движения в проекциях на касательную к траектории можно записать в виде

$$\dot{v} = \pm F_\tau(\delta_i), \quad i = 1, 2, \quad (3.2)$$

где для разгона выбирается положительный знак при  $i = 1$ , а для участка торможения - отрицательный знак при  $i = 2$ .

Правая часть уравнения (3.2) зависит только от положения КА на эллипсе, и уравнение допускает первый интеграл

$$\frac{v^2}{2} = \int_{s_1}^s \tilde{F}_\tau(\delta_i) ds, \quad i = 1, 2,$$

где  $s$  – натуральный параметр эллипса,

$$\tilde{F}_\tau(\delta_i) = \begin{cases} F_\tau(\delta_1), & s_1 \leq s \leq s(B), \\ -F_\tau(\delta_2), & s(B) \leq s \leq s_2, \end{cases}$$

причем  $s_i$  и  $s(B)$  соответствуют точкам  $A_i$ ,  $i = 1, 2$  и  $B$ .

Этот интеграл по существу является теоремой об изменении кинетической энергии в орбитальной системе отсчета.

При вычислении криволинейного интеграла учитывается производная калибровочная характеристика, вычисленная с использованием (3.1), а также выражение для дифференциала  $ds = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\psi$ , то есть теорема об изменении кинетической энергии принимает вид

$$\frac{v^2}{2} = \int_{\psi_1}^{\psi} \tilde{F}_\tau(\delta_i) \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\psi, \quad i = 1, 2, \quad (3.3)$$

где  $\psi$  – эксцентрическая аномалия актуальной точки,  $\psi_i$  – эксцентрические аномалии начальной и конечной точек  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ .

В точке  $A_2$  скорость равна нулю, а точка  $B$  разделяет участки разгона и торможения, для определения ее эксцентрической аномалии  $\psi(B)$  можно использовать равенство

$$\int_{\psi_1}^{\psi(B)} F_\tau(\delta_1) \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\psi = \int_{\psi(B)}^{\psi_2} F_\tau(\delta_2) \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\psi, \quad (3.4)$$

получающееся из (3.3) подстановкой  $\psi_2$  вместо  $\psi$ .

Построим алгоритм решения поставленной задачи о движении КА с ориентируемым СП при использовании базовой и производной калибровочных характеристик. Алгоритм состоит из четырех этапов. На первом этапе вычисляется базовая калибровочная характеристика  $F(\gamma)$ , отражающая величину силы солнечной радиации. На втором этапе с учетом ограничения  $0 \leq \delta \leq \delta_{max}$ , где

$\delta_{max} = \frac{\pi}{2} + \gamma_{max}$ , накладываемого на угол между силой солнечной радиации и касательной к траектории  $\delta$ , вычисляется производная калибровочная характеристика  $F_{\tau}(\delta)$ . На третьем этапе с помощью теоремы об изменении кинетической энергии для участков разгона и торможения находится точка переключения ускорения. Если известны значения  $F_{\tau}(\delta_i)$ ,  $i = 1, 2$  на каждом из участков, то определяются основные динамические характеристики. На четвертом этапе осуществляется пересчет полученных величин в традиционные единицы измерения.

### 3.3. Алгоритм исследования динамики полета космического аппарата с управляемым солнечным парусом

В данном разделе подробно рассматривается алгоритм, позволяющий определить точку переключения ускорения и вычислить основные динамические характеристики движения между двумя произвольными точками при коррекции положения СП.

#### АЛГОРИТМ 3.1.

##### Этап 1.

1.1. Найти значение базовой калибровочной характеристики  $F(\gamma)$ . Перейти к этапу 2.

##### Этап 2.

2.1. Определить значение производной калибровочной характеристики  $F_{\tau}(\delta_i)$ ,  $i = 1, 2$  при разгоне и торможении согласно (1.14). Перейти к этапу 3.

##### Этап 3.

3.1. Записать теорему об изменении кинетической энергии при разгоне и торможении (3.3) и перейти к шагу 3.2.

3.2. Вычислить поля скоростей при разгоне и торможении. Перейти к шагу 3.3.

3.3. Сравнить поля скоростей по формуле (3.4) при разгоне и торможении, перейти к шагу 3.4.

3.4. Вычислить точку переключения ускорения  $\psi(B)$ , найти участки разгона и торможения. Перейти к шагу 3.5.

3.5. Удостовериться, что точка переключения ускорения находится между начальной и конечной точками перемещения, то есть  $\psi_1 < \psi(B) < \psi_2$ . Если неравенство выполнено, перейти к следующему шагу, иначе завершить алгоритм и вывести, что движение недопустимо.

3.6. Вычислить массив ускорений  $w_\tau[j]$ . Перейти к шагу 3.7.

3.7. Определить массивы скоростей  $v_\tau[j]$  и сил натяжения троса  $T[j]$ .

3.8. Рассчитать суммарное время перелета  $t$ . Построить графики. Перейти к этапу 4.

Этап 4.

4.1. Выразить из безразмерных значений величины динамических характеристик в традиционных единицах измерения, в частности для реальных КА. Завершить алгоритм.

Алгоритм 3.1 позволяет анализировать динамику полета КА с управляемым СП между любыми двумя точками границы леерной связи, расположенными на дуге эллипса при  $0 \leq \psi \leq \pi$  с нулевыми начальной и конечной скоростями.

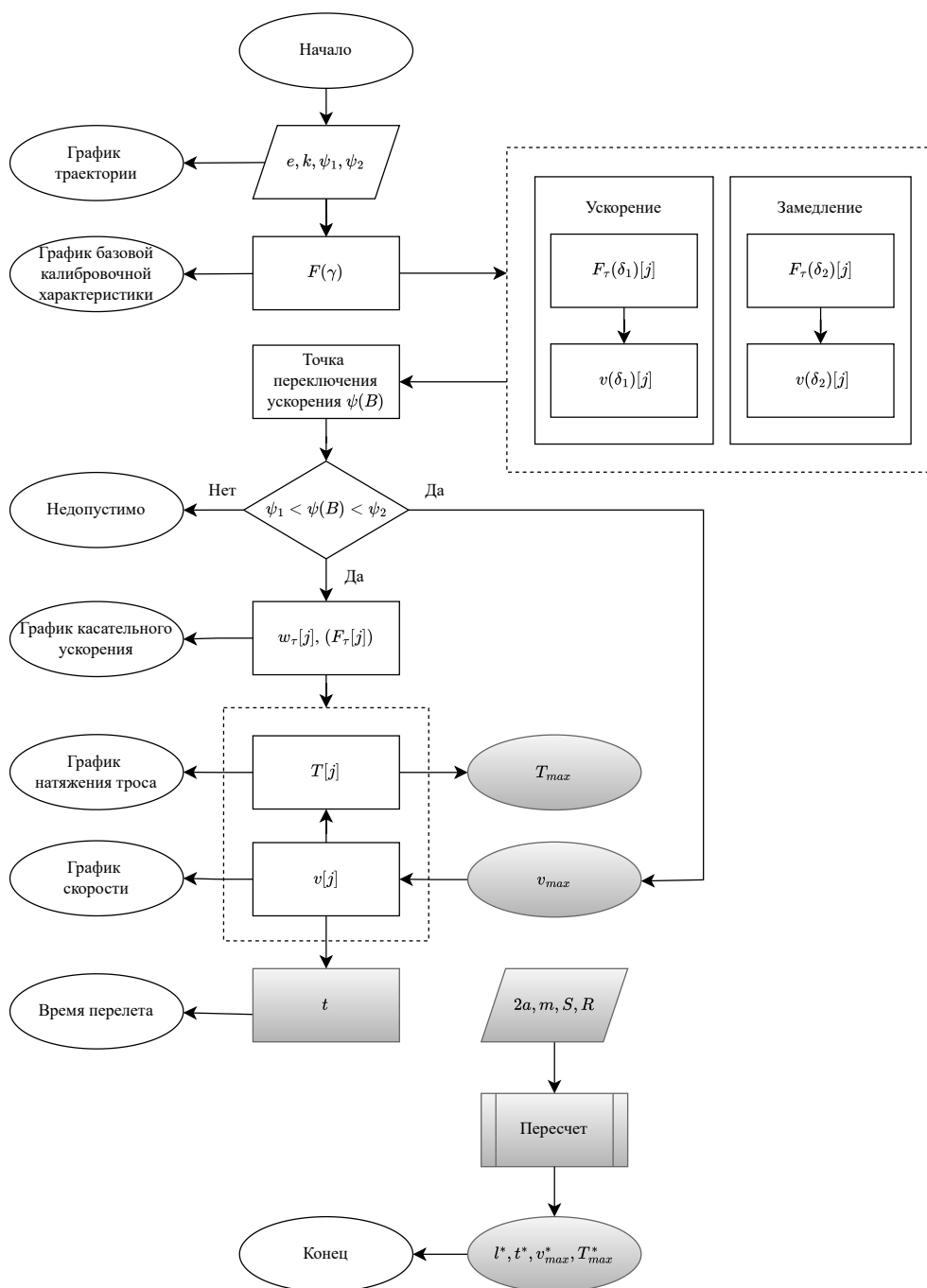
Процедура вычисления согласно алгоритму 3.1 показана в форме блок-схемы 3.3.

Входными данными являются те же параметры, что и в случае с постоянно ориентированным парусом, то есть коэффициент отражения СП  $k$ , эксцентриситет эллипса  $e$ , определяющий его форму, а также координаты начальной и конечной точек  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ , выраженные через эксцентрические аномалии  $\psi_i$ .

Построенный алгоритм предназначен только для перемещений по наиболее удаленной от Солнца дуге эллипса, ограниченной вершинами  $V_i$ ,  $i = 1, 2$ , принадлежащими его большой оси, то есть для перелетов при  $0 \leq \psi_1 < \psi_2 \leq \pi$ . В этом случае трос будет все время гарантированно натянут, поэтому в отличие от аналогичной схемы 2.7 для постоянно ориентированного СП в блок-схеме 3.3 отсутствует проверка связности движения.

Введенное значение коэффициента отражения  $k$  позволяет определить базовую калибровочную характеристику  $F(\gamma)$ . Используя формулу (1.14), строятся производные калибровочные характеристики  $F_\tau(\delta_i)$ ,  $i = 1, 2$ , причем  $F_\tau(\delta_1)$  соответствует ускорению, а  $F_\tau(\delta_2)$  торможению. Для каждой из полученных характеристик вычисляются касательное ускорение  $w_\tau$ , скорость  $\mathbf{v}$ , нормальная проекция силы солнечной радиации на касательную к траектории  $F_\tau$ , сила натяжения троса  $\mathbf{T}$ .

Рисунок 3.3. Алгоритм исследования динамики полета космического аппарата с управляемым солнечным парусом



Находится точка переключения ускорения  $B$  с эксцентрической аномалией  $\psi(B)$  и проверяется, чтобы ее положение не совпадает с начальной или конечной точками. Если это утверждение верно, то определяются максимальные скорость  $v_{max}$  и сила натяжения троса  $T_{max}$ , иначе при  $\psi(B) = \psi_1$  или  $\psi(B) = \psi_2$  невозможно выделить участки либо разгона, либо торможения, то есть предлагаемый алгоритм не может быть реализован.

Оставшаяся часть алгоритма 3.1 использует численные методы интегрирования. Равенство (3.4) относительно неизвестной  $\psi(B)$  решается в шаге 3.3 с заданной точностью при помощи метода деления отрезка пополам, при этом интегралы вычисляются по формуле Симпсона [118]. Чтобы найти продолжительность перемещения, дуги  $A_1B$  и  $BA_2$  разбиваются на достаточно большое количество интервалов  $[\psi_{j-1}, \psi_j]$ , на концах каждого из которых рассчитывается скорость (1.20). Принимая движение КА в пределах каждого из интегралов равноускоренным, время прохождения отрезка пути можно определить как

$$t_j = \frac{2\Delta s_j}{v(\psi_{j-1}) + v(\psi_j)}, \quad (3.5)$$

где  $\Delta s_j$  – длина дуги эллипса между точками, соответствующими эксцентрическим аномалиям  $\psi_{j-1}$  и  $\psi_j$ .

Суммарное время перелета на всех интервалах будет равно продолжительности перемещения между точками  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ , то есть

$$t = \sum_j t_j.$$

Далее вводятся размерные параметры: площадь СП  $S$ , масса КА  $m$ , расстояния между станциями  $2c$  и от Солнца до центра эллипса  $R$ . В результате пересчета динамических характеристик находятся длина троса  $2a^*$  в метрах, время перелета  $t^*$  в часах, максимальная скорость  $v_{max}^*$  в м/с, равная скорости в точке переключения, максимальное натяжение троса  $T_{max}^*$  в граммах-силы.

Пример расчета динамических характеристик движения с использованием алгоритма проиллюстрирован графически в приложении А.

### 3.4. Продолжительность перемещения между наиболее удаленными точками леерной связи

Вычислим минимально возможное время перелета между наиболее удаленными точками леерной связи  $V_1$  и  $V_2$ , которым соответствуют эксцентрические аномалии  $\psi_1 = 0$  и  $\psi_2 = \pi$  в случаях, когда только начальная скорость равна нулю  $v_1 = 0$  и когда нулевыми являются и начальная, и конечная скорости  $v_i = 0$ ,  $i = 1, 2$ . В рассматриваемой ситуации интеграл энергии (1.29) зависит от оптимального угла наклона нормали идеального СП относительно направления солнечных лучей  $\alpha_{opt}$ , являющегося корнем квадратного уравнения (1.10) при  $0 < \psi < \pi$ , и для него справедливо выражение

$$\frac{1}{2} (1 - e^2 \cos^2 \psi) \dot{\psi}^2 = \int_0^\psi \frac{\sqrt{1 - e^2} \cos \psi - \operatorname{tg} \alpha_{opt} \sin \psi}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_{opt})^{\frac{3}{2}}} d\psi,$$

Если правую часть выражения принять за  $\Phi(\alpha)$ , тогда при подстановке значения в интеграл энергии (1.30) время перелета с учетом только нулевой начальной скорости определяется равенством

$$t = \int_0^\pi \sqrt{\frac{1 - e^2 \cos^2 \psi}{2\Phi(\alpha_{opt})}} d\psi,$$

при этом полученный интеграл является сходящимся несобственным.

Графики зависимостей продолжительности перемещения  $t$  от эксцентриситета  $e$  и от отношения полуосей  $b/a = \sqrt{1 - e^2}$  только при нулевой начальной скорости  $v_1 = 0$  приведены на рис. 3.4. Дифференцируя зависимость  $t$  по  $e$ , можно установить, что время перелета между вершинами эллипса будет принимать минимальное значение  $t_{min} = 2.5691$ , которое достигается при  $e = 0.9085$ , когда  $b/a = 0.4189$ .

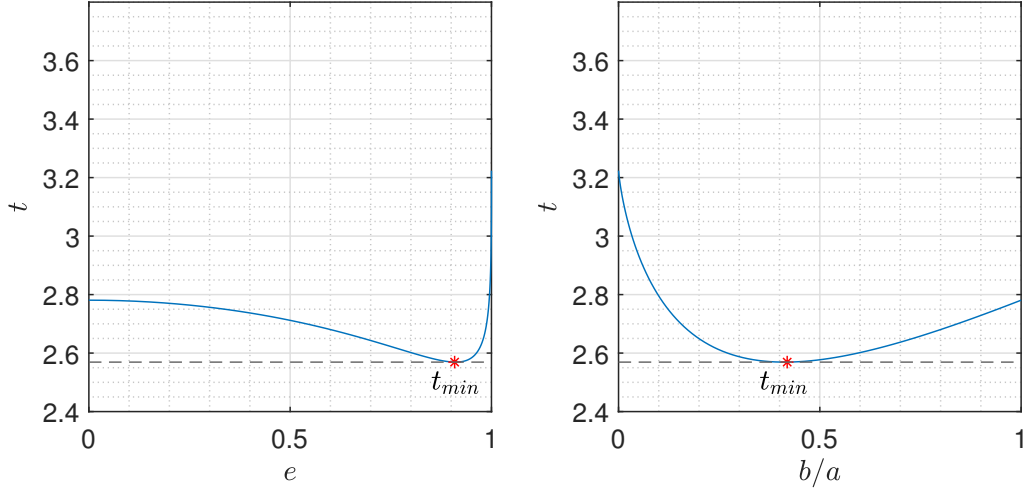


Рисунок 3.4. Зависимость времени перемещения  $t$  от эксцентриситета  $e$  и отношения полуосей  $b/a$  только при нулевой начальной скорости в безразмерных единицах измерения

Определим теперь минимально возможное время перемещения между теми же вершинами эллипса  $V_1$  и  $V_2$ , но с нулевыми начальной и конечной скоростями  $v_i = 0, i = 1, 2$ . Как и в предыдущем случае, в каждой точке траектории касательное ускорение должно быть максимально возможным при заданных начальных условиях. КА будет разогнаться, и после прохождения точки переключения ускорения  $B$ , принадлежащей малой полуоси эллипса и соответствующей эксцентрической аномалии  $\psi(B) = \frac{\pi}{2}$ , начнет замедляться до тех пор, пока не достигнет вершины  $V_2$  с нулевой конечной скоростью. Время перелета в данной ситуации будет вычисляться как

$$t = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - e^2 \cos^2 \psi}{2\Phi(\alpha_{opt})}} d\psi.$$

Графики зависимостей продолжительности перемещения  $t$  от эксцентриситета  $e$  и от отношения полуосей  $b/a = \sqrt{1 - e^2}$  при нулевых начальной и конечной скоростях  $v_i = 0, i = 1, 2$  приведены на рис. 3.5. Минимальное значение времени  $t_{min} = 3.3597$  достигается при  $e = 0.9117$ , когда  $b/a = 0.4324$ .



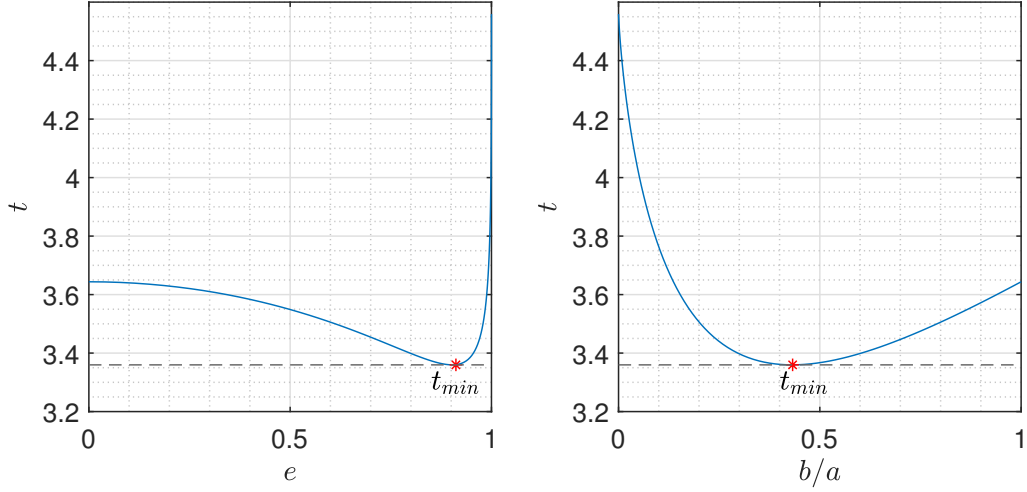


Рисунок 3.5. Зависимость времени перемещения  $t$  от эксцентриситета  $e$  и отношения полуосей  $b/a$  при нулевой начальной и конечной скоростях в безразмерных единицах измерения

### 3.5. Перемещение между произвольными точками леерной связи

**Относительная скорость КА.** Безразмерное значение скорости  $v$  может быть найдено на участках разгона и торможения с помощью соотношения (3.3).

**Сила натяжения троса.** Уравнения движения в проекции на внутреннюю нормаль к эллипсу (1.24) можно переписать как

$$\frac{v^2}{\rho} = 2T \cos \frac{\beta}{2} - F(\gamma) \sin(\delta_i - \gamma), \quad i = 1, 2,$$

где  $\rho$  и  $\beta$  определяются равенствами (2.8).

Для участков ускорения и замедления сила натяжения троса в этом случае будет вычисляться по формуле

$$T = \frac{v^2}{2(1 - e^2 \cos^2 \psi)} + \frac{F(\gamma) \sin(\delta_i - \gamma)}{2\sqrt{1 - e^2}} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}, \quad i = 1, 2.$$

**Продолжительность перемещения.** Время перелета до и после точки  $B$ , в которой происходит переключение ускорения, обозначим соответственно за  $t_1$  и  $t_2$ . Данные промежутки времени могут быть определены интегрированием

уравнения (3.3) следующим образом

$$\begin{aligned} t_1 &= \int_{\psi_1}^{\psi(B)} \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\psi}{\sqrt{2 \int_{\psi_1}^{\psi} F_{\tau}(\delta_1) \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\psi}} \\ t_2 &= \int_{\psi(B)}^{\psi_2} \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\psi}{\sqrt{v^2(B) - 2 \int_{\psi(B)}^{\psi} F_{\tau}(\delta_2) \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\psi}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Общая продолжительность перемещения определяется в виде суммы времени, затраченного на участках разгона и торможения.

$$t = t_1 + t_2.$$

### 3.6. Оценка динамических характеристик

На примере реальных КА из таблицы 1.1 продемонстрирована эффективность и проведена оценка разработанных способов перемещения. Предварительно определяются безразмерные величины, которые переводятся в традиционные единицы измерения.

Для IKAROS, NanoSail, LightSail, Sunjamer и Helios вычисляется минимально возможное время перелета между вершинами  $V_1$  и  $V_2$ , принадлежащими большой оси эллипса. Рассмотрены случаи, когда СП ортогонален солнечным лучам при нулевых начальной и конечной скоростях; когда положение СП корректируется в процессе движения при нулевых начальной и конечной скоростях; когда ориентация СП меняется так, чтобы создать максимальное ускорение при условии, что нулевой будет только начальная скорость.

Для перечисленных случаев определяется продолжительность перемещения на расстояние 2 км и 20 км, которая показана в таблицах 3.1 и 3.2.

В качестве эталона, описывающего безразмерную ситуацию, выбраны следующие параметры: масса КА  $m = 1$ , площадь СП  $S = 1$ , половина длины троса  $a = 1$ . Характерная величина солнечного давления на расстоянии 1 а.е. от Солнца принималась равной  $P = 9 \cdot 10^{-6}$  Н/м<sup>2</sup>.

Таблица 3.1. Продолжительность перемещения между точками  $V_1$  и  $V_2$  на расстояние 2 км при различных способах управления

Космический аппарат	$t_{min}$ , ч с парусом, ортогональным солнечным лучам, при $v_i = 0$ , $i = 1, 2$	$t_{min}$ , ч с парусом, корректируемым в процессе движения, при $v_i = 0$ , $i = 1, 2$	$t_{min}$ , ч с парусом, корректируемым в процессе движения, при $v_1 = 0$
Эталон	3.5573	3.3597	2.5691
IKAROS	18.6325	17.5975	13.4565
NanoSail	9.3163	8.7988	6.7283
LightSail-2	5.8227	5.4992	4.2052
Sunjammer	3.1248	2.9512	2.2567
Helios	2.2452	2.1205	1.6215

Таблица 3.2. Продолжительность перемещения между точками  $V_1$  и  $V_2$  на расстояние 20 км при различных способах управления

Космический аппарат	$t_{min}$ , ч с парусом, ортогональным солнечным лучам, при $v_i = 0$ , $i = 1, 2$	$t_{min}$ , ч с парусом, корректируемым в процессе движения, при $v_i = 0$ , $i = 1, 2$	$t_{min}$ , ч с парусом, корректируемым в процессе движения, при $v_1 = 0$
IKAROS	58.9212	55.6483	42.5532
NanoSail	29.4606	27.8241	21.2766
LightSail-2	18.4129	17.3901	13.2979
Sunjammer	9.8814	9.3325	7.1364
Helios	7.1000	6.7056	5.1277

Если космические станции расположены достаточно близко, время перелета составляет несколько часов. Если они расположены на большем расстоянии друг от друга, то перемещение может занимать несколько суток, что показано в таблице 3.2. Насколько допустимо столь длительное движение, зависит от характера выполняемой миссии. Найденные значения могут быть признаны приемлемым благодаря отсутствию топливных затрат. Отметим, что средняя скорость перелета возрастает с увеличением расстоянием между станциями.

Из приведенных способов управления СП наиболее быстрое перемещение обеспечивает тот, что не требует остановки КА в конечной точке. При нулевых начальной и конечной скоростях перелет будет происходить быстрее, если корректировать положения СП в каждой точке траектории.

На рис. 3.6 и в таблице 3.3 представлены основные динамические характеристики движения КА с управляемым СП при перемещении с нулевыми начальными и конечными скоростями  $v_i = 0$ ,  $i = 1, 2$  между точкой на эллипсе, расположенной над космической станцией  $F_1$ , и вершиной  $V_2$ , которым соответствуют эксцентрические аномалии  $\psi_1 = \arccos e$  и  $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$ , причем эксцентриситет эллипса  $e = 0.8$ , коэффициент отражения  $k = 0.1$ , расстояние от Солнца  $R = 0.5$  а.е.

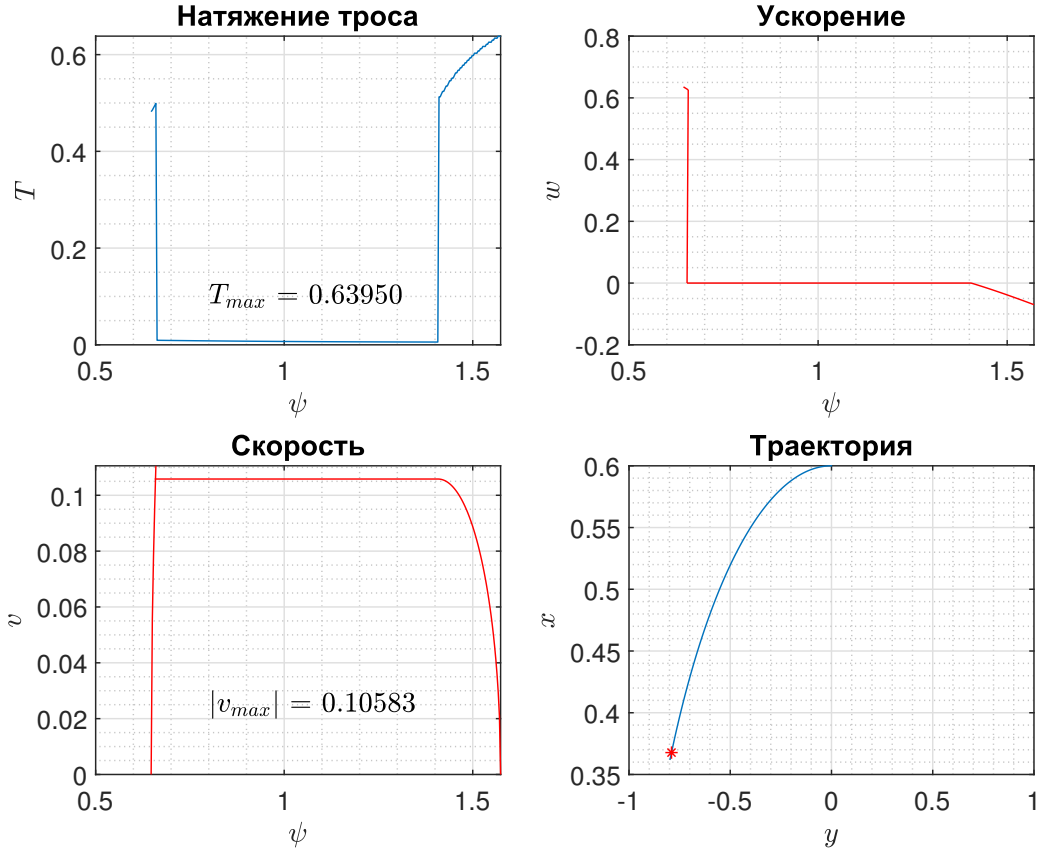


Рисунок 3.6. Динамические характеристики перемещения КА с управляемым СП между точками  $\psi_1 = \arccos e$  и  $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$  в безразмерных переменных

Таблица 3.3. Динамические характеристики перемещения КА с управляемым СП между точками  $\psi_1 = \arccos e$  и  $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$

Космический аппарат	Продолжительность перелета $t$ , ч	Максимальное натяжение $T_{max}$ , Гс	Максимальная скорость $v_{max}$ , м/с
IKAROS	25.08	0.2582	0.0131
NanoSail	12.53	0.0129	0.0263
LightSail-2	7.83	0.0413	0.0421
Sunjammer	4.2	1.549	0.0784
Helios	3.02	1.278	0.1092

Helios развивает наибольшую максимальную скорость, как и в случае с постоянно ориентированным СП, также оказывается выше максимальное натяжение троса, чем при использовании большинства других КА.

Для тех же параметров начальных и конечных точек перемещения на рис. 3.7 представлены зависимости времени перелета КА с управляемым СП от коэффициента отражения при фиксированном  $e = 0.8$  и от эксцентриситета при постоянном  $k = 0.1$  в безразмерных единицах измерения.

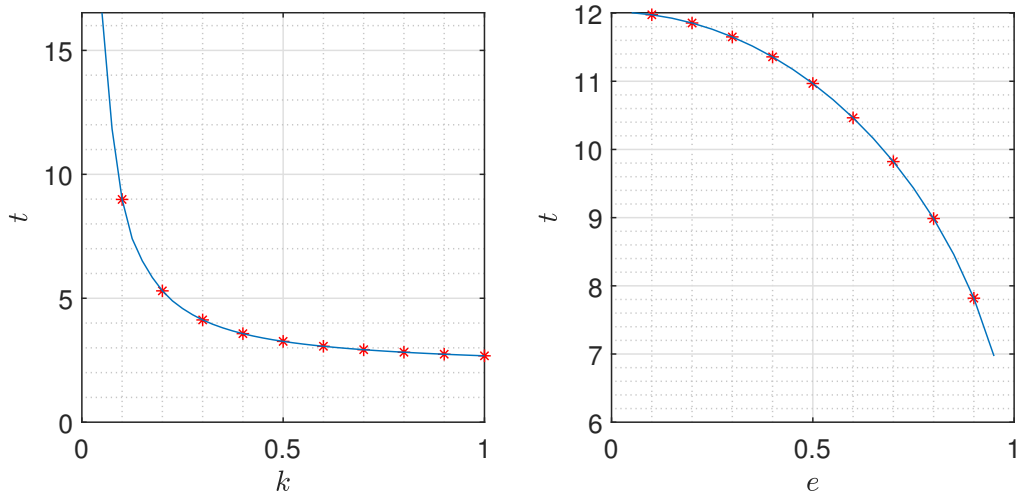


Рисунок 3.7. Зависимость времени перелета  $t$  от коэффициента отражения  $k$  и эксцентриситета  $e$  при перемещении КА с управляемым СП между точками  $\psi_1 = \arccos e$  и  $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$

Перемещения между точками расположенной над космической станцией  $F_1$  на эллипсе и  $V_2$  не всегда оказываются возможными при определенных коэффициентах отражения и эксцентриситетах. Если  $k = 0$ , то при постоянном  $e = 0.8$  КА не может разогнаться, а в некоторых других ситуациях нельзя выделить участок торможения.

В случае, когда постоянным является  $k = 0.1$ , перелет возможен только, если траектория движения соответствует эллипсам с определенными эксцентриситетами.

### **3.7. Выводы по главе 3**

1. Предложен способ перемещения КА с корректируемым положением СП между точками леерной связи, предусматривающий участки максимально быстрого разгона и торможения.

2. Описана методика вычисления точки переключения ускорения и способ коррекции положения СП.

3. Разработан алгоритм исследования динамики полета космического аппарата с управляемым солнечным парусом.

4. Вычислены относительная скорость и силы натяжения троса в зависимости от положения КА на траектории движения, определена продолжительность перемещения как сумма времени перелета на участках разгона и торможения.

5. Проведен анализ основных динамических характеристик движения КА с управляемым СП. Составлены графики и таблицы зависимостей скорости, ускорения, силы натяжения троса от положения КА на эллипсе, рассчитано время перелета при различных значениях коэффициентах отражения и эксцентриситетах.

**Основные результаты главы опубликованы в [101, 105, 108, 109, 111]**

## Заключение

В диссертационной работе предложены методы решения задачи динамики КА с СП при движении между произвольными точками леерной связи. Если СП не меняет положение относительно солнечных лучей, то его нормаль остается постоянно направленной, и КА совершает маятниковые колебания по дуге эллипса. Если в каждой точке траектории положение СП корректируется таким образом, чтобы создавалось максимально возможное ускорение, то его нормаль необходимо поворачивать на некоторый оптимальный угол, и тогда КА будет перемещаться по наиболее удаленной от Солнца дуге эллипса быстрее, чем в первом случае. Для каждого из двух видов перелета получены следующие результаты:

1. Построена математическая модель СП и записана формула для вычисления соответствующей силы солнечной радиации. Введены понятия базовой и производной калибровочных характеристик, определяющих эту силу. Найден оптимальный угол наклона СП, предполагающий создание максимального ускорения в каждой точке траектории при движении вдоль леерной связи.

2. Проведен анализ динамики КА с СП и оценка сил. Сила Кориолиса оказывается на 3-4 порядка меньше величины солнечной радиации, на 4-5 порядков больше разности гравитационного притяжения Солнца и переносной силы инерции, не может привести к сходу со связи при значительных скоростях, но требует коррекции положения СП в начале движения, а также практически не влияет на натяжение троса. Таким образом, сила солнечной радиации и центростремительное ускорение фактически определяют величину натяжения троса.

3. Сформулированы необходимые и достаточные условия существования связного движения КА с СП между произвольными точками леерной связи. Описано множество пар точек, между которыми возможен такой перелет.

4. Выведены уравнения движения и записана теорема об изменении ки-

нетической энергии при неизменно ориентированном и управляемом для создания максимального ускорения СП с учетом неидеальности отражающей поверхности.

5. Разработана методика решения задач о движении КА с постоянно ориентированным и корректируемым положением СП. Для вычисления динамических характеристик применены методы численного интегрирования.

6. В качестве частного случая рассмотрено перемещение КА между наиболее удаленными точками леерной связи с учетом нулевых начальных и конечных скоростей при постоянно ориентированном и изменяющемся положении СП.

7. Разработаны алгоритмы и программный комплекс, реализующие решение задачи динамики относительного движения КА с СП в рамках космической тросовой системы.

В дальнейшем тема, изучаемая в диссертационной работе, может быть дополнена исследованием динамики КА с учетом коррекции положения СП при движении вдоль леерной связи на той дуге эллипса, что наиболее близко расположена к Солнцу. Результаты позволят более комплексно судить о поставленной задаче, в связи с чем появится необходимость внести изменения в код программного комплекса, вычисляющего динамические характеристики перелета. Кроме того, имеет смысл сравнить представленное решение задачи управления КА с результатом, получаемым методами теории оптимального управления.



## Список литературы

1. *Алемасов В.Е., Дрегаллин А.Ф., Тишин А.П.* Теория ракетных двигателей: учебное пособие, 4-е изд. М.: Машиностроение, 1989.
2. *Stephen D.H., William E.A., Timothée L.P., Cassady R.J.* Rocket Propulsion. Cambridge University Press, 2019.
3. *Du C., Zhu Z.H., Wang C., Li A., Li T.* Evaluation of E-sail parameters on central spacecraft attitude stability using a high-fidelity rigid-flexible coupling model // *Astrodynamics*. 2024. V. 8. P. 271–284.
4. *Поляхова Е.Н.* Космический полёт с солнечным парусом, 2-е изд. М.: URSS, 2010.
5. *Цандер Ф.А.* Проблема полета при помощи реактивных аппаратов: Межпланетные полеты, 2-е изд. М.: Оборонгиз, 1961.
6. *Чумаченко Е.Н., Малашкин А.В., Федоренко А.Н.* Моделирование использования солнечного ветра для орбитальных маневров космических аппаратов // *Вестник Воронежского государственного технического университета*. 2011. Т. 7. № 2. С. 71-75.
7. *Мозжорина Т.Ю., Рахманкулов Д.А.* Моделирование и оптимизация управлением спутника малой массы при перелете с орбиты Земли на орбиту Марса под солнечным парусом // *Математическое моделирование и численные методы*. 2021. Т. 31. № 3. С. 74-87.
8. *Чумаченко Е.Н., Назиров Р.Р., Данхэм Д.У., Федоренко А.Н.* Управление космическими аппаратами с помощью солнечного излучения // *Космические исследования*. 2014. Т. 52. № 3. С. 257-263.

9. *Богер А.А., Тимаков С.Н., Сумароков А.В., Зыков А.В., Субботин А.В.* Управление параметрами солнечно-синхронных орбит спутников-осветителей // Космическая техника и технологии. 2020. Т. 29. № 2. С. 100-107.
10. *Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Решение задачи оптимального вывода на орбиту космического аппарата с использованием реактивного ускорения и солнечного паруса в переменных Кустаанхеймо-Штифеля // Космические исследования. 2021. Т. 59. № 4. С. 327-338.
11. *Rodnikov A.V.* On Keeping the Distance between Space Stations Tethered by a Handrail // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2025. V. 21. № 4. P. 539–549.
12. *Gao Y., Wu J.* Asteroid Rotation Control via a Tethered Solar Sail // Advances in Space Research. 2016. V. 58. № 11. P. 2304–2312.
13. *Зараменских И.Е., Овчинников М.Ю.* Использование давления солнечной радиации для компенсации влияния полярного сжатия Земли на относительное движение формации спутников // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2009. № 5. С. 1-23.
14. *Вавренюк В. В.* Нечеткий регулятор в задаче стабилизации солнечного паруса // Процессы управления и устойчивость. 2025. Т. 12. № 1. С. 85-94.
15. *Степаньянц Г.А.* Прямой метод Ляпунова в задаче обеспечения устойчивости компактного минимального множества динамической системы и формирование гало-орбиты в окрестностях точки Лагранжа L2 // Известия РАН. Теория и системы управления. 2023. № 4. С. 3–16.
16. *Папченко Б.П., Хегай Д.К., Сысоев В.К., Юдин А.Д., Прядко А.И., Пульнев С.А.* Трансформируемая мачта солнечного паруса на основе приводов из материалов с эффектом памяти формы // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2021. Т. 64. № 1. С. 71-76.

17. *Mori O., Sawada H., Funase R., Morimoto M., Endo T., Yamamoto T., Tsuda Y., Kawakatsu Y., Kawaguchi J., Miyazaki Y., Shirasawa Y. Demonstration Team and Solar Sail Working Group.* First Solar Power Sail Demonstration by IKAROS // Transactions Of The Japan Society For Aeronautical And Space Sciences. Aerospace Technology Japan. 2010. V. 8. № 27. P. 25–31.
18. *Tsuda Y., Mori O., Funase R., et al* Achievement of IKAROS—Japanese deep space solar sail demonstration mission // Acta Astronautica. 2013. V. 82. № 2. P. 183–188.
19. *Johnson L., Whorton M., Heaton A., Pinson R., Laue G., Adams C.* NanoSail-D: A solar sail demonstration mission // Acta Astronautica. 2011. V. 68. № 5–6. P. 571–575.
20. *Spencer D.A., Betts B., Bellardo J.M., Diaz A., Plante B., Mansell J.R.* The LightSail 2 solar sailing technology demonstration // Advances in Space Research. 2021. V. 67. № 9. P. 2878–2889.
21. *Mansell J.R., Bellardo J.M., Betts B., Plante B., Spencer D.A.* LightSail 2 Solar Sail Control and Orbit Evolution // Aerospace. 2023. V. 10. № 7. P. 579–600.
22. *Barnes N.C., Derbes W.C., Player C.J., Diedrich B.L.* Sunjammer: A Solar Sail Demonstration // Advances in Solar Sailing. 2014. P. 115–126.
23. *McInnes C.R.* Solar sailing: technology, dynamics and mission applications. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004.
24. *Fu B., Sperber E., Eke F.* Solar sail technology—A state of the art review // Progress in Aerospace Sciences. 2016. V. 86. P. 1–19.
25. *Macdonald M.* Advances in Solar Sailing. Springer, 2014.
26. *Wright J.L.* Space sailing. Gordon and Breach Science Publishers, 1992.
27. *Vulpetti G.* Fast Solar Sailing. Berlin: Springer, 2013.

28. *Королев В.С., Поляхова Е.Н., Потоцкая И.Ю.* Комплексный подход к проблеме движения космического аппарата с солнечным парусом // *Universum: технические науки*. 2016. Т. 10 № 31. С. 1–7.
29. *Старинова О.Л.* Расчет межпланетных перелетов космических аппаратов с малой тягой. Самара: Издательство Самарского научного центра РАН, 2007.
30. *Хабидуллин, Р.М., Старинова О.Л.* Моделирование некомпланарного межпланетного перелета космического аппарата с солнечным парусом с учетом особенностей движения относительно центра масс // *Космические аппараты и технологии*. 2020. Т. 4, № 3(33). С. 141-150.
31. *Hughes G.W., Macdonald M., McInnes C.R., Atzei A., Falkner P.* Sample Return from Mercury and Other Terrestrial Planets Using Solar Sail Propulsion // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2006. V. 43. № 4. P. 828–835.
32. *Vulpetti G., Johnson L., Matloff G.L.* Solar sails: A novel approach to interplanetary travel. New York: Springer, 2015.
33. *Рожков М.А., Старинова О.Л.* Оптимизация управления солнечным парусом при движении аппарата по циклическим гелиоцентрическим траекториям // *Космические исследования*. 2023. Т. 61. № 6. С. 510-519.
34. *McInnes C.R.* Solar sail mission applications for non-Keplerian orbits // *Acta Astronautica*. 1999. V. 45. № 4–9. P. 567–575.
35. *Трофимов С.П.* Увод малых космических аппаратов с низких околоземных орбит: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. С. 125.
36. *Полужетов Р.М., Скорб М.В.* Гравитационное буксирование астероидов космическими аппаратами с солнечным парусом в качестве движительной установки // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2020. Т. 99. № 3. С. 1-13.

37. *Шиманчук Д. В., Шмыров А. С., Шмыров В. А.* Управляемое движение солнечного паруса в окрестности коллинеарной точки либрации // *Астрономический журнал*. 2020. Т. 4. № 3. С. 193-200.
38. *Шиманчук Д. В., Шмыров А. С., Шмыров В. А.* Управление орбитальным движением космического аппарата вблизи точки либрации с помощью изменения отражательной способности солнечного паруса // *Вестник СПб-ГУ. Прикладная математика. Информатика*. 2024. Т. 20. № 2. С. 298-306.
39. *Farres A., Heiligers J., Miguel N.B.* Road Map to L4/l5 with a Solar Sail // *Aerospace Science and Technology*. 2019. V. 95. P. 1-16.
40. *Rodnikov A.V.* The Algorithms for Capture of the Space Garbage Using “Leier Constraint” // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2006. V. 11. № 4. P. 483-489.
41. *Rodnikov A.V.* Rotations of a dumbbell equipped with “the leier constraint” // *Journal of Vibroengineering*. 2008. V. 10. № 4. P. 557-561.
42. *Родников А.В., Красильников П.С.* О пространственных движениях орбитальной леерной связки // *Нелинейная динамика*. 2017. Т. 13. № 4. С. 505–518.
43. *Алпатов А.П., Белецкий В.В., Драновский В.И., Закржевский А.Е., Пироженко А.В., Трогер Г., Хорошилов В.С.* Динамика космических систем с тросовыми и шарнирными соединениями. М.: URSS, 2007.
44. *Белецкий В.В.* Очерки о движении космических тел, 4-е изд. М.: URSS, 2013.
45. *Циолковский К.Э.* Грезы о Земле и небе, 2-е изд. М.: ГОНТИ, 1938.
46. *Арцутанов Ю.Н.* В космос — на электровозе // *Комсомольская правда*. Воскресное приложение, 31.07.1960.
47. *Белецкий В.В., Левин Е.М.* Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990.

48. *Иванов В.А., Ситарский Ю.С.* Динамика полета системы гибко связанных космических объектов. М.: Машиностроение, 1986.
49. *Cosmo M.L., Lorenzini E.C.* Tethers in Space Handbook, 3rd ed. NASA Publication, 1997.
50. *Осинов В.Г., Шошуннов Н.Л.* Космические тросовые системы: история и перспективы // Земля и Вселенная. 1998. № 4. С. 19-29.
51. *Сазонов В.В.* Математическое моделирование разворачивания тросовой системы с учетом массы троса // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2006. № 58. С. 1-36.
52. *Заболотнова О.Ю.* Решение задач управления и оценивания при программном разворачивании космической тросовой системы // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 8. С. 61-66.
53. *Ледкова Т.А., Заболотнов Ю.М.* Анализ процесса разворачивания окололунной тросовой системы с учетом притяжения Земли // Космические аппараты и технологии. 2021. Т. 5. № 3 (37). С. 153-159.
54. *Акалу Й.А., Еленев Д.В., Гермама А.Й.* Применение и эксперименты по реализации тросовых систем // Наука и бизнес: пути развития. 2023. Т. 4. № 142. С. 12-16.
55. *Ledkov A.S., Pikalov R.S.* Nonlinear Control of Tether Retrieval in an Elliptical Orbit // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2023. Т. 19. № 2. С. 201-218.
56. *Белецкий В.В., Иванов М.Б., Отставнов Е.И.* Модельная задача о космическом лифте // Космические исследования. 2005. Т. 43. № 2. С. 157-160.
57. *Буров А.А., Косенко И.И.* О периодических движениях орбитального лифта // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН. 2009. С. 72-85.

58. *Нуралиева А.Б.* О динамике троса космического лифта: диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. ИПМ им. им. М.В. Келдыша. Москва. 2012. С. 103.
59. *Садов Ю.А., Нуралиева А.Б.* О концепции нагруженного секционированного космического лифта // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2011. № 39. С. 1-26.
60. *Садов Ю.А., Нуралиева А.Б.* Нелинейные поперечные колебания троса космического лифта // Математическое моделирование. 2011. Т. 23. № 12. С. 3-19.
61. *Садов Ю.А., Нуралиева А.Б.* Нагруженный секционированный космический лифт // Космические исследования. 2015. Т. 53. № 3. С. 246–252.
62. *Aslanov V.S.* A Double Pendulum Fixed at the L1 Libration Point: A Precursor to a Mars–Phobos Space Elevator // Nonlinear Dynamics. 2024. Т. 112. № 2. С. 775-791.
63. *Aslanov V.S., Ledkov A.S., Misra A.K., Guerman A.D.* Dynamics of Space Elevator after Tether Rupture // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2013. Т. 36. № 4. С. 986-992.
64. *Weinstein L.M.* Space Colonization Using Space-Elevators from Phobos // AIP Conf. Proc. 2003. V. 654. № 1. P. 1227–1235.
65. *Bate J., Yousuf N., Rothwell J., George L.* Analyzing the Potential of Space Elevator Technology for Sustainable Asteroid Mining // Conference: AIAA Student Paper Conference. 2024. P. 1-11.
66. *Белецкий В.В., Касаткин, Г.В.* Связка двух тел на орбите. Устойчивость однозвенных периодических траекторий // Известия Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 1996. Т. 2. № 2. С. 17-22.

67. *Белецкий В.В., Панкова Д.В.* Связка двух тел на орбите как динамический бильярд // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 1995. № 7. С. 1-32.
68. *Буров А.А., Трогер Х.* Об относительных равновесиях орбитального маятника // Прикладная математика и механика. 2000. Т. 64. №. 5. С. 755-760.
69. *Косенко И.И., Степанов С.Я.* Устойчивость положений относительно равновесия орбитальной связки с учетом ударных взаимодействий. Неограниченная задача // Известия РАН. Механика твердого тела. 2006. № 4. С. 86-96.
70. *Муницына М.А.* Относительные равновесия системы “гантель-груз” с односторонними связями на круговой кеплеровской орбите // Автоматика и телемеханика. 2007. № 9. С. 9-15.
71. *Родников А.В.* О положениях равновесия груза на тросе, закрепленном на гантелевидной космической станции, движущейся по круговой геоцентрической орбите // Космические исследования. 2006. Т. 44. № 1. С. 62-72.
72. *Родников А.В.* О влиянии леерной связи на движение гантелевидного тела в центральном ньютоновском силовом поле // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 4. С. 519-533.
73. *Родников А.В.* О компланарных равновесиях космической станции на тросе, закрепленном на прецессирующем астероиде // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 2. С. 309-322.
74. *Садов Ю.А., Чернов А.В.* Исследование равновесных форм гибкого нерастяжимого троса с учетом гравитационных и аэродинамических факторов // Модели и методы обработки информации. 2009. С. 4-12.
75. *Burov A.A.* The Existence and Stability of the Equilibria of Mechanical Systems with Constraints Produced by Large Potential Forces. // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2003. V. 67. № 2. P. 193-200.



76. *Burov A.A., Guerman A.D., Sulikashvili R.S.* Relative Equilibria of a tetrahedral structure with rigid and tethered elements // *Astrodynamics. Advances in the Astronautical Sciences*. 2007. V. 129. P. 1665-1674.
77. *Заболотнов Ю.М.* Резонансные эффекты при движении малого космического аппарата вокруг центра масс в составе развертываемой тросовой системы // *Космические исследования*. 2021. Т. 59. № 4. С. 339-352.
78. *Burov A.A., Kosenko I.I., Guerman A.D.* Dynamics of a Moon-anchored Tether with Variable Length // *Advances in the Astronautical Sciences*. 2012. V. 142. P. 3495-3507.
79. *Li-Shengwang, Shyn-Feng Cheng* Dynamics of Two Spring-Connected Masses in Orbit // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 1996. V. 63. P. 289-312.
80. *Aslanov V.S.* Dynamics of a Phobos-Anchored Tether near the L1 Libration Point // *Nonlinear Dynamics*. 2023. Т. 111. № 2. С. 1269-1283.
81. *Jung W., Mazzoleni A. P., Chung J.* Dynamics analysis of a tethered satellite system with a moving mass // *Nonlinear Dynamics*. 2014. V. 75. № 1. P. 267-281.
82. *Белецкий В.В., Новикова Е.Т.* Об относительном движении связки двух тел на орбите // *Космические исследования*. 1969. Т. 7. № 3. С. 377-384.
83. *Муницына М.А.* Движение системы с односторонними связями в центральном гравитационном поле // *Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения*. М.: ВЦ РАН им. А.А. Дородницына. 2006. С. 75-84.
84. *Родников А.В.* О движении груза по тросу, закрепленному на гантелевидном космическом аппарате // *Космические исследования*. 2004. Т. 42. № 4. С. 444-448.

85. *Родников А.В.* О существовании безударных движений по леерной связи, закрепленной на протяженном космическом аппарате // Космические исследования. 2006. Т. 44. № 6. С. 553-560.
86. *Родников А.В.* О движении материальной точки вдоль леера, закрепленного на прецессирующем твердом теле // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 2. С. 295–311.
87. *Lanoix E.L.-M., Misra A.K.* Near-Earth Asteroid Missions Using Tether Sling Shot Assist // Journal of Spacecraft and Rockets. 2000. V. 37. № 4. P. 475-480.
88. *Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С.* Управляемое движение связанных космических объектов и перспективные схемы их функционирования. М.:МАИ, 2018.
89. *Заболотнов Ю.М., Чанцин В., Чжэн М.* Метод сближения тросовой системы с неуправляемым космическим объектом // Известия РАН. Теория и системы управления. 2025. № 1. С. 3-16.
90. *Kojima H., Sugimoto Y., Furukawa Y.* Experimental study on dynamics and control of tethered satellite systems with climber // Acta Astronautica. 2011. Vol. 69. № 1. P. 96–108.
91. *Асланов В.С., Пикалов Р.С., Гунчин Е.Р.* Управление сближением двух космических аппаратов с помощью тросовой системы // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2020. № 1. С. 156-160.
92. *Aslanov V.S., Ledkov A.S.* Survey of Tether System Technology for Space Debris Removal Missions // Journal of Spacecraft and Rockets. 2023. Т. 60. № 5. С. 1355-1371.
93. *Colombo G., Gaposchkin E.M., Grossi M.D., Weiffenbach G.C.* The «Skyhook»: a Shuttle-borne tool for low-orbital-altitude research // Meccanica. 1975. V. 10. № 1. P. 3-20.

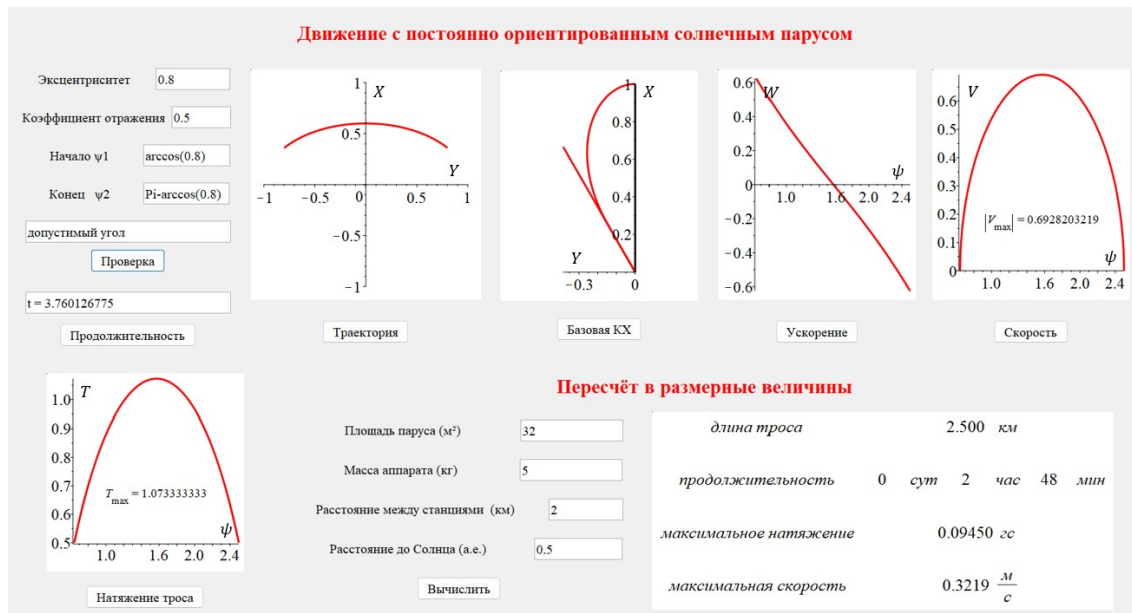
94. *Tortora P., Somenzi L., Iess L., Licata R.* Small Mission Design for Testing In-Orbit an Electrodynamic Tether Deorbiting System // Journal of Spacecraft and Rockets. 2006. V. 43. № 4. P. 883—892.
95. *Ледков А.С., Ковалев А.О.* Определение параметров электродинамической космической тросовой системы в задаче уборки космического мусора // Известия Самарского научного центра РАН. 2015. Т. 17. № 2. С. 164-166.
96. *Кульков В.М., Егоров Ю.Г., Тузиков С.А.* Исследование конфигурации и формирование проектного облика развернутой электродинамической тросовой системы в составе орбитальных космических аппаратов // Известия РАН. Энергетика. 2018. № 3. С. 119-130.
97. *Бушуев А.Ю.* Проектирование тросовой системы раскрытия многозвенной конструкции солнечной батареи в условиях неопределенности // Инженерный журнал: наука и инновации. 2017. № 1. С. 1-11.
98. *Васькова В.С.* Об управлении движением космического аппарата с солнечным парусом на леерной связи // Сборник тезисов работ международной молодежной научной конференции XLVIII «Гагаринские чтения», 12-15 апреля 2022 г., Москва. – М.: Перо, 2022. С. 458.
99. *Васькова В.С., Родников А.В.* О движении космического аппарата с солнечным парусом вдоль троса, закрепленного на двух гелиоцентрических космических станциях // Сборник тезисов докладов 21-й международной конференции «Авиация и космонавтика», 21–25 ноября 2022 г., Москва. – М.: Перо, 2022. С. 379-380.
100. *Васькова В.С., Родников А.В.* О перемещении вдоль леерной связи космического аппарата с неидеальным солнечным парусом // Сборник тезисов докладов 22-й международной конференции «Авиация и космонавтика», 20–24 ноября 2023 г., Москва. – М.: Перо, 2023. С. 251-252.

101. *Васькова В.С., Родников А.В.* О наискорейшем перемещении космического аппарата с солнечным парусом между произвольными точками леерной связи // Сборник тезисов докладов 23-й международной конференции «Авиация и космонавтика», 18–22 ноября 2024 г., Москва. – М.: Перо, 2024. С. 234.
102. *Васькова В.С., Родников А.В.* Модельная задача о движении по леерной связи под солнечным парусом // Сборник тезисов докладов XLVII академических чтений по космонавтике, посвященный памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства, 24–27 января 2023 г., Москва. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2023. С. 286-287.
103. *Васькова В.С., Родников А.В.* О движении вдоль троса космического аппарата с неидеальным солнечным парусом // Сборник тезисов докладов XLVIII академических чтений по космонавтике, посвященный памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства, 23–26 января 2024 г., Москва. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2024. С. 312-313.
104. *Vaskova V.S.* Studying Dynamics of a Spacecraft Coasting along a Tether and Equipped with a Perfect or Non-Perfect Solar Sail // Book of Abstracts ANS Conference Series: Regular and Chaotic Dynamics, 04–08 December 2023 г., Sirius. – Izhevsk: Institute of Computer Science, 2023. P. 101-102.
105. *Васькова В.С.* О наискорейшем перемещении вдоль троса космического аппарата с неидеальным солнечным парусом // Материалы X международной научной конференции по механике «Поляховские чтения», 23–27 сентября 2024 г., Санкт-Петербург. – СПб.: ВВМ, 2024. С. 201-204.
106. *Vaskova V. S., Rodnikov A. V.* On a Sailed Spacecraft Motion along a Handrail Fixed to Two Heliocentric Space Stations. Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2023. V. 19. № 3. P. 359-370.

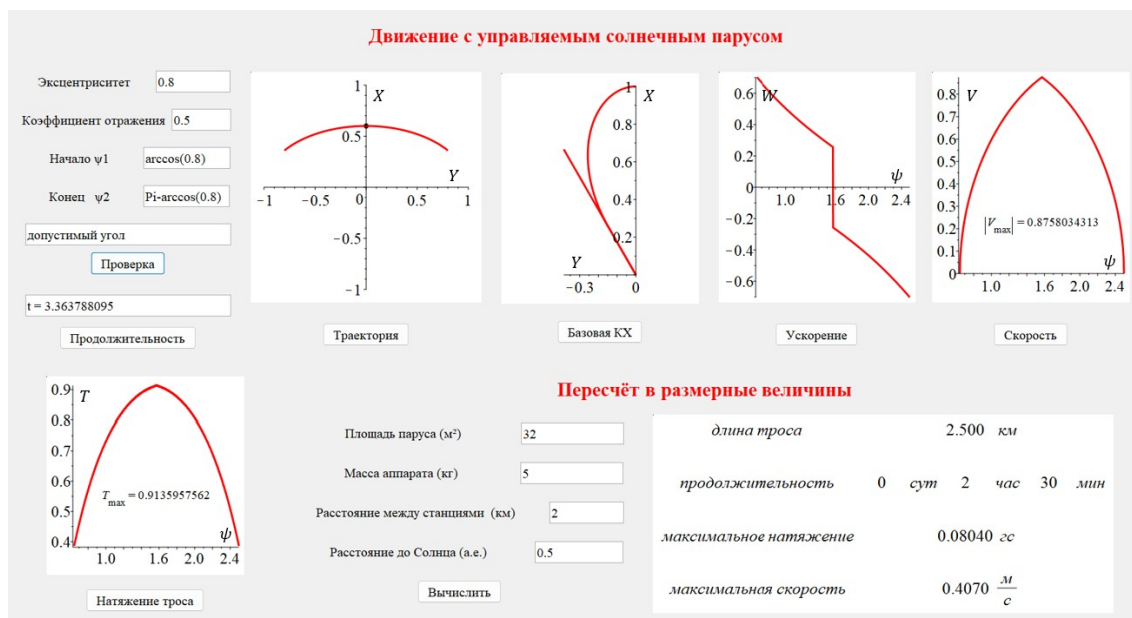
107. *Васькова В.С., Родников А.В.* Модельная задача о движении по леерной связи под солнечным парусом // Космические исследования. 2024. Т. 62. № 3. С. 302-310.
108. *Васькова В.С.* О перемещении вдоль троса космического аппарата с неидеальным солнечным парусом // Труды МАИ. 2024. № 139. С. 1-23.
109. *Васькова В.С., Родников А.В.* Задача перемещения космического аппарата с солнечным парусом между произвольными точками леерной связи // Труды МАИ. 2025. № 143. С. 1-25.
110. *Васькова В.С., Родников А.В.* О движении космического аппарата с постоянно ориентированным солнечным парусом // Инженерный журнал: наука и инновации. 2025. Т. 165. №9. С. 1-17.
111. *Васькова В.С., Родников А.В.* Программный комплекс для решения задач динамики относительного движения космического аппарата с солнечным парусом в рамках космической тросовой системы // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025683410 от 03.09.2025.
112. *Abell M.L., Braselton J.P.* Differential Equations with Maple V. Academic Press, 1994.
113. *Shampine L.F., Reichelt M.W., Kierzenka J.* Solving Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations in MATLAB with bvp4c. MATLAB File Exchange, 2004.
114. *Зимин В.Н., Неровный Н.А.* К расчету главного вектора и главного момента сил светового давления на солнечный парус // Вестник МГТУ им. Баумана. 2016. Т. 1. № 106. С. 17–28.
115. *Овчинников М.Ю.* Введение в динамику космического полета: учеб. пособие. М.: МФТИ, 2016.
116. *Wiesel W.E.* Spaceflight Dynamics, 3rd ed. CreateSpace, 2010.

117. *Голубев Ю. Ф., Грушевский А. В., Корянов В. В., Тучин А. Г., Тучин Д. А.* Основное свойство интеграла Якоби для гравитационных маневров в Солнечной системе // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2019. № 34. С. 1-24.
118. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы: учеб. пособие, 9-е изд. М.: Лаборатория знаний, 2020.

## Приложение А. Примеры использования алгоритмов



Графическая интерпретация реализации алгоритма 2.1



Графическая интерпретация реализации алгоритма 3.1

## **Приложение Б. Краткое описание программного комплекса, созданного на основе результатов диссертационной работы**

В диссертационной работе описаны два случая, позволяющие организовать перемещение, когда СП постоянно ориентирован по отношению к солнечным лучам (глава 2) и когда его положение корректируется в процессе перелета (глава 3). Разработанные алгоритмы предназначены для решения задач динамики относительного движения КА с СП в рамках космической тросовой системы [111]. В результате их применения возникают несобственные интегралы, для вычисления которых используются методы численного интегрирования [118]. Для реализации алгоритмов 2.1 и 3.1 был создан программный комплекс в системе компьютерной алгебры Maple с применением библиотеки для создания графических приложений Maplets. Выбор языка программирования обусловлен возможностью получать аналитические и численные решения, а также создавать интуитивно простые графические приложения.

Изначально данный комплекс является готовым продуктом, предназначенным для определения основных динамических характеристик движения КА. При наличии программного пакета также можно без затруднений менять исходный код и модифицировать его под необходимые требования.

После запуска приложения появляется диалоговое окно «солнечный парус в рамках тросовой системы», где предлагается выбрать тип траектории из вариантов «по окружности», «по эллипсу», а также способ перемещения «с постоянно ориентированным», «с управляемым» солнечным парусом. Как только уточняется рассматриваемый вариант движения, возникает рабочее поле, куда необходимо записать входные данные. Кроме того, в процессе работы программного комплекса можно вводить размерные значения параметров системы и получать динамические характеристики в традиционных единицах измерения.