

УДК 536.2

## Неравномерный нагрев поверхности анизотропного шарового слоя<sup>\*</sup>

В.С. Зарубин, В.С. Зарубин мл., В.В. Леонов

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет) (МГТУ им. Н.Э. Баумана), Москва, 105005, Россия  
e-mail: lv-05@mail.ru

Поступила в редакцию 18.01.2019

После доработки 24.01.2019

Принята к публикации 24.01.2019

При неравномерном нагреве поверхности слоя теплозащитного покрытия с невысоким значением коэффициента теплопроводности возможно возникновение на этой поверхности области с повышенной температурой, которая может превысить допустимую для материала покрытия. Один из возможных способов ослабления влияния интенсивного локального нагрева на работоспособность слоя теплозащитного покрытия состоит в применении анизотропного материала, теплопроводность которого, например, в тангенциальном направлении выше, чем в направлении нормали к поверхности.

Численный анализ влияния анизотропии на температурное состояние плоского слоя теплозащитного покрытия показал, что при высокой степени анизотропии, когда коэффициент теплопроводности материала слоев в продольном направлении превышает коэффициент теплопроводности в поперечном направлении более чем на порядок, возникает эффект охлаждения некоторой части обтекаемой поверхности, т.е. смены направления теплового потока на этой части поверхности в силу повышения ее температуры.

Следует ожидать, что проявление аналогичного эффекта возможно и в случае обтекания анизотропного теплозащитного покрытия на осесимметричном теле с затуплением в виде фрагмента сферической поверхности. Для количественной оценки данного эффекта рассмотрена модельная задача стационарной теплопроводности в анизотропном шаровом слое теплозащитного покрытия при различной степени неравномерности нагрева его поверхности.

При анализе температурного состояния шарового слоя теплозащитного покрытия установившееся распределение температуры можно описать функцией  $T(r, \theta)$ , удовлетворяющей дифференциальному уравнению Лапласа. В рассматриваемой модельной задаче на внутренней поверхности слоя задано значение температуры  $T_0$ , а к его внешней поверхности подведен тепловой поток плотностью  $q(\theta)$ . Принятый вариант задания теплового воздействия на анизотропный шаровой слой позволяет на основе решения задачи сопоставить влияние равномерного нагрева слоя по внешней поверхности с локализованным тепловым воздействием, возникающим, например, в передней критической точке за отошедшей ударной волной при гиперзвуковом обтекании сферического затупления. Для решения задачи применен метод разделения переменных (метод Фурье) с использованием полиномов Лежандра.

В результате решения задачи установлено, что увеличение степени анизотропии материала сферического слоя приводит к уменьшению температуры наиболее нагретой точки поверхности. Кроме того, получены количественные оценки степени влияния изменения неоднородности распределения плотности теплового потока и относительной толщины слоя теплозащитного материала на значение температуры наиболее нагретой точки.

<sup>\*</sup> Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-79-10450).

Полученное решение дает возможность подобрать характеристики анизотропного материала теплозащитного покрытия, позволяющие снизить напряженность теплового воздействия на поверхность в зависимости от параметров подводимого теплового потока.

**Ключевые слова:** шаровой слой, теплозащитное покрытие, анизотропия теплопроводности.

## Введение

При неравномерном нагреве поверхности слоя теплозащитного покрытия с невысоким значением коэффициента теплопроводности возможно возникновение на этой поверхности области с повышенной температурой. Максимальная температура в такой области может превысить допустимую для материала покрытия. Один из способов ослабления влияния интенсивного локального нагрева на работоспособность слоя теплозащитного покрытия состоит в применении анизотропного материала, теплопроводность которого в тангенциальном направлении выше, чем в направлении нормали к поверхности.

Анализу влияния анизотропии на температурное состояние плоского слоя теплозащитного покрытия посвящено значительное число работ. Их обзор представлен в [1–3]. Наряду с рассмотрением стационарного [4] и нестационарного [2, 5–7] температурного состояния такого слоя в ряде работ [8–12] получены решения задач оптимизации параметров, определяющих условия работы теплозащитного покрытия.

Неравномерный нагрев поверхности теплозащитного покрытия возникает при высокоскоростном обтекании затупленных тел воздушным или газовым потоком [13–15], когда в окрестности передней критической точки при ламинарном режиме течения в пограничном слое существенно возрастает плотность передаваемого к покрытию теплового потока. При переходе к турбулентному режиму течения область повышенной плотности тепловых потоков смещается вдоль образующей затупления [16]. В зоне максимальной интенсивности теплового воздействия возможно разрушение материала покрытия [17–20]. Применение в этих условиях анизотропного теплозащитного материала может способствовать более равномерному нагреву слоя покрытия и предотвратить процесс разрушения теплозащитного материала или, крайней мере, снизить интенсивность этого процесса [21, 22].

## Постановка задачи

Количественная оценка влияния анизотропии свойств теплозащитного материала на работоспособность покрытия при его высокоскоростном обтекании приводит к необходимости решения достаточно сложной сопряженной задачи, поскольку возникает взаимное влияние процессов теплообмена на поверхности покрытия и теплопроводности в его объеме [23–25]. В работах [23, 24] представлена постановка и результаты численного решения двумерной сопряженной задачи, в которой интенсивность конвективного теплообмена на внешней поверхности двухслойного анизотропного тела с круговым цилиндрическим затуплением определена по условиям обтекания этого тела гиперзвуковым воздушным потоком. При этом нестационарный процесс теплопроводности в слоях покрытия рассмотрен в декартовой системе координат в предположении, что суммарная толщина этих слоев много меньше радиуса затупления. Приведены результаты расчетов при отношении суммарной толщины слоев к радиусу затупления, равном 0.12. При высокой степени анизотропии, когда коэффициент теплопроводности материала слоев в продольном направлении превышает коэффициент теплопроводности в поперечном направлении более чем на порядок, расчетным путем установлен парадоксальный эффект охлаждения некоторой части обтекаемой поверхности, т.е. смены направления теплового потока на этой части поверхности в силу повышения ее температуры.

Следует ожидать, что проявление аналогичного эффекта возможно и в случае обтекания анизотропного теплозащитного покрытия на осесимметричном теле с затуплением в виде фрагмента сферической поверхности. При фиксированном распределении плотности теплового потока на обтекаемой поверхности увеличение степени анизотропии материала покрытия должно привести к снижению температуры этой поверхности в зоне наибольшей интенсивности нагрева и, наоборот, некоторо-

му повышению температуры на остальной части поверхности. Для количественной оценки предполагаемого эффекта применительно к затуплению на первом этапе целесообразно рассмотреть сравнительно простую модельную задачу стационарной теплопроводности в анизотропном шаровом слое теплозащитного покрытия при различной степени неравномерности нагрева его поверхности. Постановка и решение такой задачи для произвольной толщины шарового слоя является предметом данной работы.

Пусть анизотропный шаровой слой с внешним  $r_1$  и внутренним  $r_0$  радиусами выполнен из анизотропного материала с коэффициентами теплопроводности  $\lambda_r = \text{const}$  в направлении радиальной координаты  $r$  и  $\lambda_\theta = \text{const}$  в любом из тангенциальных направлений. На внутренней поверхности слоя задано значение температуры  $T_0$ , а к его внешней поверхности подводится тепловой поток плотностью  $q(\theta) = q_0 + q_1 f(\theta)$ , где  $f(\theta)$  – заданная функция угловой координаты  $\theta$  (полярного угла), отсчет которой принят от вертикальной оси в общепринятом варианте сферической системы координат. Установившееся распределение температуры в шаровом слое описывает функция  $T(r, \theta)$ , удовлетворяющая дифференциальному уравнению Лапласа в виде [2]:

$$r^2 \lambda_r \frac{\partial^2 T(r, \theta)}{\partial r^2} + 2r \lambda_r \frac{\partial T(r, \theta)}{\partial r} + \frac{\lambda_\theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T(r, \theta)}{\partial \theta} \right) = 0$$

с граничными условиями

$$T(r_0, \theta) = T_0, \quad \left. \frac{\partial T(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=r_1} = q_0 + q_1 f(\theta),$$

$$\left. \frac{\partial T(r, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{\partial T(r, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\pi} = 0.$$

Принятый вариант задания теплового воздействия на анизотропный шаровой слой позволяет на основе решения задачи сопоставить влияние равномерного нагрева слоя по внешней поверхности с локализованным тепловым воздействием, возникающим, например, в передней критической точке за отошедшей ударной волной при гиперзвуковом обтекании сферического затупления [16, 19]. Благодаря линейной

постановке задачи возможно применить редукцию и получить итоговое решение в виде суммы распределений температуры  $T^\circ(r)$  и  $\Delta T(r, \theta)$ , определяемых воздействием порознь тепловыми потоками плотностью соответственно  $q_0$  и  $q_1 f(\theta)$ . Первый из этих потоков вызовет известное распределение температуры  $T^\circ(r) = T_0 + (q_0 r_1^2 / \lambda_r)(1/r_0 - 1/r)$ , которое представим в безразмерном виде

$$\Delta \bar{T}^\circ(\rho) = \frac{T^\circ(r) - T_0}{q_0 r_1 / \lambda_r} = \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}, \quad (1)$$

где  $\rho_0 = r_0 / r_1$  и  $\rho = r / r_1$ .

Приращение температуры  $\Delta T(r, \theta)$  также отнесем к величине  $q_0 r_1 / \lambda_r$ , введя обозначение  $\Psi(\rho, \theta) = \Delta T(r, \theta) / (q_0 r_1 / \lambda_r)$ . Тогда в силу редукции постановки задачи функция  $\Psi(\rho, \theta)$  будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Psi(\rho, \theta)}{\partial \rho^2} + 2\rho \frac{\partial \Psi(\rho, \theta)}{\partial \rho} + \frac{\bar{\lambda}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi(\rho, \theta)}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (2)$$

с граничными условиями

$$\Psi(\rho_0, \theta) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi(\rho, \theta)}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = \bar{q} f(\theta), \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi(\rho, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{\partial \Psi(\rho, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\pi} = 0.$$

Здесь  $\bar{\lambda} = \lambda_\theta / \lambda_r$  и  $\bar{q} = q_1 / q_0$ .

### Решение задачи

Для решения задачи (2), (3) применим метод разделения переменных (метод Фурье) [2, 26], представив искомую функцию формулой

$$\Psi(\rho, \theta) = R(\rho)\Theta(\theta). \quad (4)$$

Подстановка этой формулы в уравнение (2) приводит к равенству

$$\frac{\rho^2}{R(\rho)} \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2\rho}{R(\rho)} \frac{dR(\rho)}{d\rho} = -\frac{\bar{\lambda}}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) = \mu,$$

где  $\mu$  – подлежащий определению параметр разделения. Отсюда следуют два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка

$$\rho^2 \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + 2\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} - \mu R(\rho) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + \frac{\mu}{\lambda} \Theta(\theta) = 0. \quad (6)$$

Равенство (5) является однородным дифференциальным уравнением Эйлера второго порядка [27]. Структура решения этого уравнения зависит от соотношения между значением параметра  $\mu$  и коэффициентом 2 в слагаемом, содержащем первую производную искомой функции  $R(\rho)$  [28]. Это соотношение можно установить, если предварительно выяснить структуру решения дифференциального уравнения (6), которое при использовании подстановки  $x = \cos \theta$  принимает вид

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dP(x)}{dx} \right) + \frac{\mu}{\lambda} P(x) = 0, \quad (7)$$

где  $P(x)$  – функция, соответствующая искомой функции  $\Theta(\theta)$  при замене в ней аргумента в соответствии с равенством  $\theta = \arccos x$ . Известно, что нетривиальными решениями этого уравнения являются многочлены Лежандра  $P_n(x)$ , определяемые формулой Родрига [2, 26]

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $n$  – степень многочлена Лежандра, удовлетворяющая в данном случае равенству  $\mu_n / \lambda = n(n+1)$ .

Таким образом, параметр разделения  $\mu$  в уравнениях (5)–(7) может принимать бесконечное множество положительных значений, каждому из которых соответствует решение уравнения (5) в виде [28]

$$R'_n(\rho) = C'_n \rho^{v_n - 1/2} + C''_n \rho^{-v_n - 1/2},$$

где  $v_n = (\lambda n(n+1) + 1/4)^{1/2}$ . Из первого равенства (3) следует  $R'_n(\rho_0) = 0$ , что приводит к равенству  $C''_n = -C'_n \rho_0^{2v_n}$  и в итоге к формуле  $R'_n(\rho) = C'_n R_n(\rho)$ , где

$$R_n(\rho) = \rho^{v_n - 1/2} - \rho_0^{2v_n} \rho^{-v_n - 1/2}. \quad (8)$$

Для каждого фиксированного значения  $n$  уравнению (2) удовлетворяет функция  $\Psi_n(\rho, \theta) = R_n(\rho) P_n(\cos \theta)$ . Поэтому решением этого уравнения будет ряд

$$\Psi(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C'_n R_n(\rho) P_n(\cos \theta). \quad (9)$$

Коэффициенты  $C'_n$  этого ряда найдем путем удовлетворения граничного условия на внешней поверхности шарового слоя, определяемого вторым равенством (3), используя свойство полноты многочленов Лежандра  $P_n(x)$  на отрезке  $[-1; 1]$ , что позволяет любую функцию, непрерывную на указанном отрезке, представить разложением в ряд по этим многочленам. Подставим ряд (9) в левую часть указанного равенства и после умножения обеих частей этого равенства на многочлен Лежандра  $P_m(x)$  степени  $m$  и подстановки  $\theta = \arccos x$  проинтегрируем полученные произведения по  $x$  при  $-1 \leq x \leq 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} C'_n \frac{dR_n(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho=1} \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \\ = \bar{q} \int_{-1}^1 P_m(x) f(\arccos x) dx. \end{aligned}$$

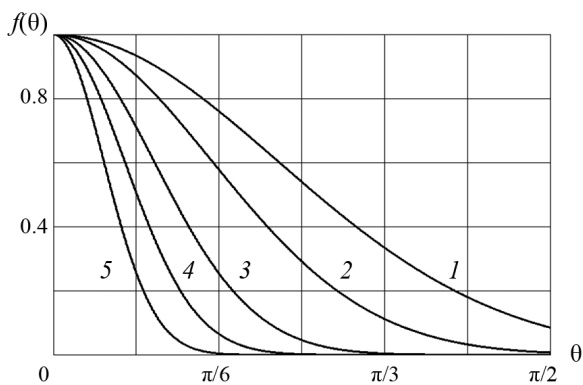
В силу ортогональности многочленов Лежандра в области интегрирования интеграл в левой части этого равенства будет отличен от нуля лишь при  $m = n$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} C'_n = \frac{(n+1/2)\bar{q}}{v_n - 1/2 + (v_n + 1/2)\rho_0^{2v_n}} \times \\ \times \int_0^{\pi} P_n(x) f(\arccos x) dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь учтено, что квадрат нормы многочлена  $P_n(x)$  на рассматриваемом отрезке равен  $1/(n+1/2)$  [2, 26].

### Результаты количественного анализа

Пусть функция  $f(\theta)$  описывает осесимметричное распределение плотности теплового потока, подводимого к поверхности полусферического затупления в виде шарового слоя анизотропного теплозащитного покрытия. При  $\theta \in [0; \pi/2]$  выберем эту функцию в виде  $f(\theta) = \exp(-a\theta^2)$ , где параметр  $a > 0$  характеризует степень локализации теплового воздействия на поверхности покрытия, а при  $\theta \in (\pi/2; \pi]$  примем  $f(\theta) \equiv 0$ . Для сравнения на



Зависимости функции  $f(\theta)$  от угловой координаты  $\theta$  при различных значениях параметра  $a$ : 1 – 1; 2 – 2; 3 – 5; 4 – 10; 5 – 20

рисунке представлены графики этой функции при  $\theta \in [0; \pi/2]$  и различных значениях параметра  $a$ .

В табл. 1 приведены результаты вычисления с использованием формул (9) и (10) значений  $\Psi(1,0)$  безразмерной температуры поверхности покрытия в наиболее нагретой точке, соответствующей наибольшему значению плотности подводимого теплового потока, при  $\bar{q} = 10$ ,  $\rho_0 = 0.8$  и нескольких значениях параметров  $\bar{\lambda}$  и  $a$ .

С целью сравнения отметим, что при  $\rho_0 = 0.8$  из формулы (1) следует  $\Delta \bar{T}^{\circ}(\rho_1) = 0.25$ . В случае равенства плотности теплового потока при его однородном распределении по поверх-

ности затупления и наибольшей плотности при локальном нагреве, соответствующей значению  $\bar{q} = 10$ , с учетом формулы (1) получим значение безразмерной температуры, равное 2.5. При сравнительно пологом распределении плотности теплового потока по поверхности затупления ( $a = 1$ ) значение безразмерной температуры в наиболее нагретой точке в случае изотропного материала покрытия ( $\bar{\lambda} = 1$ ) еще мало отличается от 2.5, тогда как в случае высокой степени анизотропии этого материала ( $\bar{\lambda} = 100$ ) уменьшение этого значения составляет примерно 60%. По мере возрастания неоднородности распределения плотности теплового потока происходит монотонное уменьшение значения  $\Psi(1,0)$  для изотропного материала. При этом относительное снижение этого значения при увеличении степени анизотропии материала оказывается более существенным (при  $a = 20$  снижение в случае  $\bar{\lambda} = 100$  равно примерно 86%).

В табл. 2 представлены результаты аналогичных вычислений, но при  $\rho_0 = 0.9$ , что соответствует значению  $\Delta \bar{T}^{\circ}(\rho_1) \approx 0.11111$ . Следовательно, при  $\bar{q} = 10$  табличные данные целесообразно сопоставлять со значением 1.1111 безразмерной температуры на поверхности затупления при однородном распределении на ней плотности теплового потока.

**Таблица 1. Значения безразмерной температуры при  $\bar{q} = 10$ ,  $\rho_0 = 0.8$ ,  $\theta = 0$**

$\bar{\lambda}$	1	2	5	10	20	50	100
$a = 1$	2.3443	2.2333	1.9731	1.7243	1.4555	1.1349	0.9505
$a = 2$	2.2195	2.0369	1.7096	1.4280	1.1549	0.8542	0.6877
$a = 5$	1.9583	1.6981	1.3150	1.0379	0.7999	0.5581	0.4294
$a = 10$	1.6551	1.3749	1.0113	0.7852	0.5889	0.3985	0.2988
$a = 20$	1.4009	1.1115	0.7793	0.5806	0.4270	0.2829	0.2086

**Таблица 2. Значения безразмерной температуры при  $\bar{q} = 10$ ,  $\rho_0 = 0.9$ ,  $\theta = 0$**

$\bar{\lambda}$	1	2	5	10	20	50	100
$a = 1$	1.0966	1.0805	1.0390	0.9836	0.9022	0.7594	0.6407
$a = 2$	1.0790	1.0507	0.9818	0.8991	0.7912	0.6280	0.5080
$a = 5$	1.0373	0.9810	0.8643	0.7478	0.6195	0.4566	0.3520
$a = 10$	0.9808	0.8966	0.7462	0.6168	0.4902	0.3456	0.2595
$a = 20$	0.8963	0.7853	0.6155	0.4882	0.3750	0.2558	0.1885

Таблица 3. Значения безразмерной температуры при  $\bar{q} = 10$ ,  $\theta = \pi / 4$ 

$\bar{\lambda}$	1	2	5	10	20	50	100
$\rho_0 = 0.8$	2.3632	2.2610	2.0632	1.8735	1.6644	1.4032	1.2484
$\rho_0 = 0.9$	1.09759	1.0842	1.0477	1.0012	0.9365	0.8274	0.7347

Из сравнения данных в табл. 1 и 2 следует, что влияние изменения значений параметров  $a$  и  $\bar{\lambda}$  аналогично предыдущему случаю, но относительное уменьшение толщины шарового слоя приводит к уменьшению влияния возрастания этих параметров на убывание безразмерной температуры  $\Psi(1,0)$ .

При турбулентном режиме течения в пограничном слое наибольшая интенсивность теплового воздействия при обтекании полусферического затупления с нулевым углом атаки локализована в окрестности окружности, лежащей на поверхности теплозащитного покрытия и имеющей угловую координату  $\theta$ , близкую к значению  $\pi/4$  [16, 19]. В этом случае в первом приближении аппроксимируем зависимость безразмерной величины плотности теплового потока на поверхности полусферического затупления квадратичной функцией  $8\bar{q}(1-2\theta/\pi)\theta/\pi$  при  $\theta \in [0; \pi/2]$ . Эта функция принимает максимальное значение  $\bar{q}$  при  $\theta = \pi/4$  и нулевые значения при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$ . В табл. 3 приведены значения  $\Psi(1, \pi/4)$  безразмерной температуры на нагреваемой поверхности шарового слоя анизотропного теплозащитного покрытия при  $\bar{q} = 10$  и прежних значениях  $\rho_0$  и  $\bar{\lambda}$ .

Из представленных в табл. 3 результатов следует, что в данном случае увеличение степени анизотропии теплозащитного покрытия оказывает несколько меньшее влияние на снижение наибольшей температуры на нагреваемой поверхности по сравнению с предшествующим случаем, когда модуль градиента температуры в шаровом слое в любом из меридиональных направлений является одинаковым. Основная причина снижения этого влияния состоит в уменьшении модуля градиента температуры при переходе от меридионального направления образующей поверхности полусферического затупления к широтному направлению, в котором градиент температуры в данном случае вообще отсутствует в силу осевой симметрии.

## Заключение

Постановка и решение модельной задачи стационарной теплопроводности при нагреве внешней поверхности анизотропного шарового слоя теплозащитного покрытия, вызванном неравномерным распределением плотности теплового потока на внешней поверхности этого слоя, позволили установить количественную связь между степенью анизотропии материала слоя и снижением температуры в зоне наибольшей интенсивности нагрева.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Formalev V.F.** Heat and mass transfer in anisotropic bodies // High Temperature. 2001. V. 39. Iss. 5. P. 753–774.
2. **Формалёв В.Ф.** Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. 312 с.
3. **Формалёв В.Ф.** Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. 280 с.
4. **Котович А., Зарубин В., Кувыркин Г.** Локальное тепловое воздействие на теплозащитное покрытие. Saarbrücken, Deutschland: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. 81 с.
5. **Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С.** Иерархия математических моделей процесса формирования температурного поля в системе «изотропная пластина – термоактивная прокладка – анизотропное покрытие» // Тепловые процессы в технике. 2013. Т. 5. № 5. С. 224–228.
6. **Аттетков А.В., Волков И.К.** Температурное поле анизотропной охлаждаемой пластины, находящейся под воздействием импульсно-периодического теплового потока с интенсивностью гауссовского типа // Изв. РАН. Энергетика. 2012. № 5. С. 71–79.
7. **Аттетков А.В., Волков И.К.** Температурное поле анизотропной охлаждаемой пластины, находящейся под воздействием внешнего теплового потока // Изв. РАН. Энергетика. 2012. № 6. С. 108–117.
8. **Зарубин В.С., Котович А.В., Кувыркин Г.Н.** Оптимальная толщина анизотропного покрытия на охлаждаемой стенке при локальном внешнем нагреве // Известия РАН. Энергетика. 2014. № 5. С. 45–50.
9. **Аттетков А.В., Волков И.К.** Оптимальная толщина анизотропной стенки, разделяющей две различные среды, при ее локальном нагреве // Тепловые процессы в технике. 2017. Т. 9. № 9. С. 417–421.
10. **Аттетков А.В., Волков И.К.** Влияние анизотропии свойств на оптимальную толщину покрытия охлаждаемой пластины при локальном тепловом воздействии // Изв. РАН. Энергетика. 2018. № 1. С. 78–86.

11. **Аттетков А.В., Волков И.К.** Оптимальная толщина анизотропного покрытия разделительной стенки двух различных сред при локальном тепловом воздействии // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2018. № 4. С. 4–15.
12. **Attetkov A.V., Vlasov P.A., Volkov I.K.** The conditions for the existence of the optimal thickness of a cooled anisotropic wall subjected to local heat exposure // High Temperature. 2018. V. 56. Iss. 3. P. 389–392.
13. **Авдуевский В.С., Глебов Г.А.** Теплообмен в передней критической точке неразрушаемого тела, омываемого потоком частично ионизированного воздуха // ИФЖ. 1970. Т. 18. № 2. С. 9–18.
14. **Никитин П.В.** Тепловая защита спускаемых космических аппаратов. М.: Изд-во МАИ, 1992. 75 с.
15. **Алифанов О.М., Вабищевич П.Н., Михайлов В.В., Ненарокомов А.В., Полежаев Ю.В., Резник С.В.** Основы идентификации и проектирования тепловых процессов и систем. М.: Логос, 2001. 400 с.
16. **Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике** / Под ред. В.С. Авдуевского, В.К. Кошкина. М.: Машиностроение, 1992. 624 с.
17. **Полежаев Ю.В., Юревич Ф.Б.** Тепловая защита. М.: Энергия, 1976. 392 с.
18. **Панкратов Б.М., Полежаев Ю.В., Рудько А.К.** Взаимодействие материалов с газовыми потоками. М.: Машиностроение, 1976. 224 с.
19. **Никитин П.В.** Тепловая защита. М.: Изд-во МАИ, 2006. 512 с.
20. **Горский В.В., Носатенко П.Я.** Математическое моделирование процессов тепло- и массообмена при аэротермическом разрушении композиционных теплозащитных материалов на кремнеземной основе. М.: Научный мир, 2008. 256 с.
21. **Формалёв В.Ф., Кузнецова Е.Л.** Тепломассоперенос в анизотропных телах при аэрогазодинамическом нагреве. М.: Изд-во МАИ-Принт, 2010. 308 с.
22. **Кузнецова Е.Л.** Математическое моделирование тепломассопереноса в композиционных материалах при высокотемпературном нагреве в элементах ракетно-космической техники. М.: Изд-во МАИ-Принт, 2010. 160 с.
23. **Formalev V.F., Kolesnik S.A.** Conjugate heat transfer between wall gasdynamic flows and anisotropic bodies // High Temperature. 2007. V. 45. Iss. 1. P. 76–84.
24. **Formalev V.F., Kolesnik S.A., Kuznetsova E.L.** The effect of longitudinal nonisothermality on conjugate heat transfer between wall gasdynamic flows and blunt anisotropic bodies // High Temperature. 2009. V. 47. Iss. 2. P. 228–234.
25. **Формалев В.Ф., Колесник С.А., Селин И.А.** О сопряженном теплообмене при аэродинамическом нагреве анизотропных тел с высокой степенью анизотропии // Тепловые процессы в технике. 2016. Т. 8. № 9. С. 388–394.
26. **Карташов Э.М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 552 с.
27. **Камкэ Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
28. **Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.** Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Изд-во Факториал, 1997. 304 с.

## Uneven surface heating of anisotropic spherical layer

**V.S. Zarubin, V.S. Zarubin Jr., V.V. Leonov**

*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia  
e-mail: lv-05@mail.ru*

When the surface of the layer of thermal protection coating with a low value of thermal conductivity factor is unevenly heated, an area with elevated temperature, which may exceed the allowable value for the coating material, may occur on this surface. One of the possible ways to reduce the effect of intense local heating on the performance of the thermal protection coating layer is to use an anisotropic material, which thermal conductivity, for example, is higher in the tangential direction than in the direction normal to the surface

Numerical analysis of anisotropy impact on the temperature state of a flat layer of thermal protection coating showed that with a high degree of anisotropy, when the thermal conductivity of the material of layers in the longitudinal direction exceeds the thermal conductivity in the transverse direction by more than an order of magnitude, a cooling effect occurs on some part of the streamlined surface, i.e. a change in the direction of the heat flow occurs on this part of the surface due to the increase in its temperature.

It should be expected that manifestation of a similar effect is possible in case of a flow around anisotropic thermal protection coating on an axisymmetric body with a dulling in the form of a spherical surface fragment. In order to quantify this effect, a model problem of stationary thermal conductivity in anisotropic spherical layer of a thermal protection coating is considered with varying degrees of non-uniformity of its surface heating.

When analyzing the temperature state of a spherical layer of a thermal protection coating, the steady-state temperature distribution can be described by the function  $T(r, \theta)$ , which satisfies Laplace's differential equation. In the model problem under consideration, the  $T_0$  temperature is

set for the inner surface of the layer, and the heat flux of  $q(\theta)$  density is supplied to its outer surface. The adopted variant of setting the thermal effect on the anisotropic spherical layer allows, based on the problem solution, to compare the effect of uniform heating of the layer on the outer surface with the localized thermal effect occurring, for example, at the front critical point behind the detached shock wave in case of hypersonic flow around a spherical dull. In order to solve the problem, the method of separation of variables (Fourier method) with the use of Legendre polynomials is applied.

With a result of the problem solving, it has been established that an increase in the degree of anisotropy of the spherical layer material leads to a decrease in the temperature of the most heated surface point. Besides, quantitative estimates have been obtained for the degree of influence of changes in the heterogeneity of the heat flux density distribution and the relative thickness of the layer of thermal protection material on the temperature of the most heated point.

The obtained solution allows select characteristics of anisotropic material for a thermal protection coating to reduce the intensity of thermal effect on the surface depending on the parameters of the supplied heat flux.

**Keywords:** spherical layer, thermal protection coating, thermal conductivity anisotropy.

### REFERENCES

1. **Formalev V.F.** Heat and mass transfer in anisotropic bodies. *High Temperature*, 2001, vol. 39, no. 5, pp. 753–774.
2. **Formalev V.F.** *Teploprovodnost' anizotropnykh tel. Analiticheskie metody resheniya zadach* [Thermal conductivity of anisotropic bodies. Analytical methods for solving problems]. Moscow: Fizmatlit, 2014. 312 p. In Russ.
3. **Formalev V.F.** *Teploperenos v anizotropnykh tvorydykh telah. Chislennyye metody, teplovye volny, obratnye zadachi* [Heat transfer in anisotropic solids. Numerical methods, heat waves, inverse problems]. Moscow: Fizmatlit, 2015. 280 p. In Russ.
4. **Kotovich A., Zarubin V., Kuvyrkin G.** *Lokal'noe teplovoe vozdeystvie na teplozashchitnoe pokrytie* [Local thermal effect on the thermal barrier coating]. Deutschland, Saarbrücken, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. 81 p. In Russ.
5. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Tverskaya E.S.** Ierarhiya matematicheskikh modelej processa formirovaniya temperaturnogo polya v sisteme "izotropnaya plastina – termoaktivnaya prokladka – anizotropnoe pokrytie" [The hierarchy of mathematical models of the process of temperature field formation in the system "plane isotropic wall – thermal active layer – anisotropic coating"]. *Teplovyye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2013, no. 5, pp. 224–228. In Russ.
6. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Temperaturnoe pole anizotropnoj ohlazhdaemoj plastiny, nahodyashcheysya pod vozdeystviem impul'sno-periodicheskogo teplovogo potoka s intensivnost'yu gaussovskogo tipa [The temperature field of an anisotropic cooled plate under the influence of a repetitively pulsed heat flow with a Gaussian-type intensity]. *Izv. RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2012, no. 5, pp. 71–79. In Russ.
7. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Temperaturnoe pole anizotropnoj okhlazhdaemoj plastiny, nakhodyashcheysya pod vozdeystviem vneshnego teplovogo potoka [Temperature field of anisotropic cooled plate under the influence of external heat flow]. *Izv. RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2012, no. 6, pp. 108–117. In Russ.
8. **Zarubin V.S., Kotovich A.V., Kuvyrkin G.N.** Optimal'naya tolshchina anizotropnogo pokrytiya na ohlazhdaemoj stenke pri lokal'nom vneshnem nagrev [Optimal thickness of the anisotropic surface on the cooling plate with applied local external heating]. *Izv. RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2014, no. 5, pp. 45–50. In Russ.
9. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Optimal'naya tolshchina anizotropnoj stenki, razdelyayushchej dve razlichnye sredy, pri ee lokal'nom nagreve [The optimum thickness of an anisotropic wall, which separates two different environments, at its local heating]. *Teplovyye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2017, vol. 9, no. 9, pp. 417–421. In Russ.
10. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Vliyanie anizotropii svojstv na optimal'nyu tolshchinu pokrytiya ohlazhdaemoj plastiny pri lokal'nom teplovom vozdeystvii [Influence of anisotropy of properties on the optimum thickness of the coating of a cooled plate under local thermal exposure]. *Izv. RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2018, no. 1, pp. 78–86. In Russ.
11. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Optimal'naya tolshchina anizotropnogo pokrytiya razdelitel'noj stenki dvuh razlichnykh sred pri lokal'nom teplovom vozdeystvii [Optimum anisotropic coating thickness for a wall separating two different media and subjected to local heating] // *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Seriya Mashinostroyeniye – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*, 2018, no. 4, pp. 4–15. In Russ. DOI 10.18698/0236-3941-2018-4
12. **Attetkov A.V., Vlasov P.A., Volkov I.K.** The conditions for the existence of the optimal thickness of a cooled anisotropic wall subjected to local heat exposure. *High Temperature*, 2018, vol. 56, no. 3, pp. 389–392.
13. **Avduevsky V.S., Glebov G.A.** Teploobmen v perednej kriticheskoj tochke nerazrushaemogo tela, omyvaemogo potokom chastichno ionizirovannogo vozduha [Heat transfer at a front stagnation point of nondestructable body in a flow of partially ionized air]. *[Inzhenerno-fizicheskii zhurnal – Journal of engineering physics and thermophysics]*, 1970, vol. 18, no. 2, pp. 9–18. In Russ.
14. **Nikitin P.V.** *Teplovaya zashchita spuskaemykh kosmicheskikh apparatov* [Thermal protection of the space reentry vehicle].



- Moscow: Publishing house of the Moscow Aviation Institute, 1992. 75 p. In Russ.
15. **Alifanov O.M., Vabishchevich P.N., Mikhailov V.V., Nena-rokomov A.V., Polezhaev Yu.V., Resnick S.V.** *Osnovy indentifikacii i proektirovaniya teplovyh processov i sistem* [Fundamentals of identification and design of thermal processes and systems] Moscow: Logos, 2001. 400 p. In Russ.
  16. **Osnovy teploperedachi v aviacionnoj i raketno-kosmicheskoy tekhnike.** Pod red. V.S. Avduevskogo, V.K. Koshkina [Fundamentals of heat transfer in aviation and rocket-space technologies. Ed. V.S. Avduevsky, V.K. Koshkin]. Moscow: Mashinostroyeniye, 1992. 624 p. In Russ.
  17. **Polezhaev Yu.V., Yurevich F.B.** *Teplovaya zashchita* [Thermal protection]. Moscow: Energiya, 1976. 392 p. In Russ.
  18. **Pankratov B.M., Polezhaev Yu.V., Rudko A.K.** *Vzaimodejstvie materialov s gazovymi potokami* [Material-gas flow interaction]. Moscow: Mashinostroyeniye, 1976. 224 p. In Russ.
  19. **Nikitin P.V.** *Teplovaya zashchita* [Thermal protection]. Moscow: Publishing house of the Moscow Aviation Institute, 2006. 512 p. In Russ.
  20. **Gorsky V.V., Nosatenko P.Ya.** *Matematicheskoe modelirovanie processov teplo- i massoobmena pri aerotermicheskom razrushenii kompozitsionnyh teplozashchitnyh materialov na kremnezemnoj osnove* [Mathematical modeling the heat and mass transfer processes in the aerothermochemical destruction of composite thermal shield materials based on silica]. Moscow: Nauchnyy mir, 2008. 256 p. In Russ.
  21. **Formalev V.F., Kuznetsova E.L.** *Teplomassoperenos v anizotropnyh telah pri aerogazodinamicheskom nagreve* [Heat and mass transfer in anisotropic bodies during aerogasdynamic heating]. Moscow: Publishing House MAI-Print, 2010. 308 p. In Russ.
  22. **Kuznetsova E.L.** *Matematicheskoe modelirovanie teplomassoperenosy v kompozitsionnyh materialah pri vysokotemperaturnom nagreve v elementah raketno-kosmicheskoy tekhniki* [Mathematical modeling of heat and mass transfer in composite materials with high-temperature heating in the elements of rocket and space technology]. Moscow: Publishing House MAI-Print, 2010. 160 p. In Russ.
  23. **Formalev V.F., Kolesnik S.A.** Conjugate heat transfer between wall gasdynamic flows and anisotropic bodies. *High Temperature*, 2007, vol. 45, no. 1, pp. 76–84.
  24. **Formalev V.F., Kolesnik S.A., Kuznetsova E.L.** The effect of longitudinal nonisothermality on conjugate heat transfer between wall gasdynamic flows and blunt anisotropic bodies. *High Temperature*, 2009, vol. 47, no. 2, pp. 228–234.
  25. **Formalev V.F., Kolesnik S.A., Selin I.A.** O sopryazhennom teploobmene pri aerodinamicheskom nagreve anizotropnyh tel s vysokoj stepen'yu anizotropii [About coupled heat exchange in a case of aerodynamic heat of bodies with high degree of anisotropy]. *Teplovyye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2016, vol. 8, no. 9, pp. 388–394. In Russ.
  26. **Kartashov E.M.** *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tvordyh tel* [Analytical methods in the theory of the thermal conductivity of solids]. Moscow: Vysshaya shkola, 2001. 552 p. In Russ.
  27. **Kamke E.** *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* [Handbook on ordinary differential equations]. Moscow: Nauka, 1976. 576 p. In Russ.
  28. **Zaitsev V.F., Polyanin A.D.** *Spravochnik po linejnym obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* [Handbook of linear ordinary differential equations]. Moscow: Izdatel'stvo Faktorial, 1997. 304 p. In Russ.