

**На правах рукописи**

**Роффе Александр Ильич**



**Математическое моделирование процессов нелинейного  
деформирования составных конструкций каркасного  
типа при комбинированных воздействиях**

**Специальность 01.02.04 - Механика деформируемого твердого тела**

**Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук**

**Москва - 2016 г.**

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования "Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)"

Научный руководитель - доктор технических наук, профессор

**Дмитриев Владимир Георгиевич**

Официальные оппоненты:

**Москвитин Геннадий Викторович**, доктор технических наук, профессор, зав. лабораторией "Надежность и долговечность при термомеханических циклических воздействиях" Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт Машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук (ИМАШ РАН)

**Джинчвелашвили Гурам Автандилович**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры "Соппротивление материалов" Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Московский государственный строительный университет"

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт Прикладной механики Российской академии наук (ИПРИМ РАН)

Защита состоится "07" декабря 2016 г. в "16<sup>00</sup>" часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 ФГБОУ ВО "Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)" по адресу: 125993 Москва, Волоколамское шоссе, д. 4;

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО МАИ (НИУ) и на сайте [http://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT\\_ID=72889](http://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=72889)

Автореферат разослан " \_\_\_\_ " ноября 2016 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Г.В. Федотенков

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** В различных отраслях современного строительства и машиностроения широко используются составные конструкции каркасного типа: промышленные и гражданские здания и сооружения, элементы стартовых комплексов авиационных и космических систем и т.д. (рис. 1).



Рис. 1

В процессе использования конструкции каркасного типа испытывают воздействие целого ряда статических и динамических нагрузок различного характера и природы: гравитационные нагрузки; атмосферные нагрузки; динамические воздействия в момент старта авиакосмических систем, нагрузки, обусловленные смещением земной поверхности, в первую очередь - сейсмические; и др. При этом сейсмические нагрузки представляют собой один из наиболее опасных видов динамических воздействий, приводящий к непоправимым последствиям. При исследовании переходных процессов, возникающих в несущих строительных конструкциях при динамических воздействиях, в силу значительных массовых характеристик необходимо учитывать исходное статическое НДС, и в первую очередь, действие гравитационных сил. Следовательно, начально-краевые задачи для составных конструкций каркасного и панельного типа представляют собой задачи о комбинированном нагружении вида (статика + динамика), или, в частном случае, статические задачи.

Несущие элементы составных конструкций каркасного и панельного типа выполняются как из традиционных материалов (железобетон, металл), так и многослойных композиционных материалов. Современные требования к параметрам прочностной надежности конструкций, оценки их живучести и остаточного ресурса вызывают необходимость разработки адекватных расчетных моделей, учитывающих, как физико-механические и конструктивные особенности, так и “усложняющие” факторы: нелинейности геометрического и физического типа. Проведение натурного физического эксперимента связано со значительными трудностями практической реализации, в том числе - высокой стоимостью таких экспериментов, поэтому для исследования особенностей деформирования несущих элементов в настоящее время используются методы вычислительного эксперимента, включающие в себя разработку и развитие адекватных математических моделей, построение их дискретных аналогов, а также адаптация экономичных численных методов и алгоритмов, допускающих их практическую реализацию на ЭВМ. Разработка адекватных математических моделей и численных методов для исследования прочностной надежности неоднородных тел и систем в нелинейной постановке относится к интенсивно развивающимся разделам *механики деформируемого твердого тела*.

В связи с этим разработка и развитие адекватных математических моделей, учитывающих особенности деформирования составных конструкций каркасного типа при различных видах комбинированного нагружения с учетом нелинейных эффектов, построение дискретных аналогов исходных континуальных задач, а также разработка экономичных численных методов решения соответствующих нелинейных сеточных уравнений представляет собой *актуальную* проблему, имеющую *прикладной и теоретический интерес*.

**Целью работы является:**

- разработка адекватных математических моделей для исследования процессов геометрически и физически нелинейного деформирования составных конструкций каркасного типа при комбинированных видах нагружения;

- разработка и развитие эффективных и экономичных численных методов решения нелинейных сеточных уравнений, описывающих статическое и динамическое поведение конструкций;

- решение ряда новых, актуальных прикладных задач деформирования составных конструкций каркасного типа при статическом и динамическом нагружении различного вида с учетом нелинейных эффектов, а также конструктивных и физико-механических особенностей каркасных конструкций.

### **Научная новизна результатов работы:**

- на основе теории балок и панелей Тимошенко в рамках геометрически нелинейных соотношений теории среднего изгиба и деформационной теории пластичности разработаны и развиты адекватные математические модели и экономичные вычислительные алгоритмы, позволяющие на основе однотипных разностных схем исследовать особенности геометрически и физически нелинейного деформирования составных неоднородных конструкций каркасного типа при воздействии статических и динамических нагрузок;

- построена новая математическая модель для исследования процессов деформирования амортизированных каркасных конструкций при нестационарном воздействии, моделирующем горизонтальную компоненту сейсмической волны, и разработаны практические критерии для определения оптимальных значений параметров вязко-упругих амортизаторов;

- для общего случая аппроксимации инструментальной сейсмограммы разработана методика, основанная на использовании кубической сплайн-интерполяции;

- на основе квазидинамической формы метода установления в сочетании с явной разностной схемой второго порядка аппроксимации построен однотипный вычислительный алгоритм для решения стационарных и нестационарных задач, что позволяет получать оценку остаточной несущей способности конструкций при решении геометрически и физически нелинейных задач;

- исследовано влияние параметров вязко-упругих амортизаторов на процессы деформирования составной железобетонной конструкции при сов-

местном действии горизонтальной компоненты сейсмической волны и статической нагрузки и установлено, что использование вязкоупругих амортизаторов позволяет более чем в 10 раз снизить пиковые значения ускорений на элементах каркасной конструкции.

**Достоверность результатов** и адекватность разработанных математических моделей, консервативных разностных схем и численных методов решения нелинейных сеточных уравнений основывается на использовании фундаментальных законов механики деформируемого твердого тела, вариационно-разностного метода построения дискретной задачи и подтверждается практической сходимостью численных решений при их сопоставлении с известными аналитическими решениями тестовых задач.

**Практическая ценность и внедрение результатов.** Разработанные математические модели и численные методы решения нелинейных начально-краевых задач практически реализованы в виде прикладных программ для персональных ЭВМ серии Pentium, позволяющих методами вычислительного эксперимента исследовать особенности деформирования составных конструкций каркасного типа при различных видах комбинированного нагружения.

**На защиту выносятся следующие основные результаты работы:**

- разработанные математические модели и их конечно-разностные аналоги, позволяющие исследовать процессы деформирования составных конструкций каркасного типа с учетом геометрической и физической нелинейности при статических и динамических воздействиях различного вида;
- разработанные численные методы решения нелинейных начально-краевых задач для составных конструкций каркасного типа;
- результаты решения ряда новых, актуальных прикладных задач механики неоднородных, составных каркасных конструкций при статических и динамических воздействиях с учетом наличия амортизирующих элементов.

**Апробация работы.** Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах. 1. XVIII Межд. семинар «Технологические проблемы проч-

ности». Подольск, 2011 г. **2.** XVIII Межд. симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Ярополец, 2012. **3.** XIX Межд. семинар «Технологические проблемы прочности». Подольск, 2012 г. **4.** XIX Межд. симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Ярополец, 2013. **5.** XX Межд. семинар «Технологические проблемы прочности». Подольск, 2013 г. **6.** XX Межд. симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Ярополец, 2014. **7.** XXI Межд. семинар «Технологические проблемы прочности». Подольск, 2014 г. **8.** II Межд. научно-техн. конференция «Инновационные технологии в развитии строительства, машин и механизмов для строительства и коммунального хозяйства, текущего содержания и ремонта железнодорожного пути». Смоленск, 2014 г. **9.** XXII Межд. семинар «Технологические проблемы прочности». Подольск, 2015 г.

**Публикации.** По теме диссертации опубликована **12** работ, включая **3** статьи в журналах, входящем в перечень издательств, рекомендованных ВАК РФ.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, выводов (заключения) и списка литературы из 110 наименований. Общий объем диссертации 117 страниц, включая 49 рисунков и 7 таблиц.

## **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** обосновывается важность и актуальность темы диссертации. Дается краткое изложение диссертации по главам и приводятся основные результаты, вынесенные на защиту.

**В первой главе** приводится обзор работ и анализ прикладных методов математического моделирования процессов нелинейного деформирования несущих элементов машиностроительных и строительных конструкций при статических и динамических воздействиях различного вида и природы. Большой

вклад в развитие этой области механики деформируемого твердого тела внесли исследования и монографии таких ученых, как: Н.П. Абовский, Н.А. Алфутов, С.А. Амбарцумян, В.Г. Баженов, В.Л. Бидерман, В.В. Болотин, Н.В. Валишвили, В.В. Васильев, В.З. Власов, А.С. Вольмир, К.З. Галимов, А.Л. Гольденвейзер, А.Г. Горшков, Э.И. Григолюк, А.В. Кармишин, А.И. Лурье, Х.М. Муштари, Ю.Н. Новичков, В.В. Новожилов, И.Ф. Образцов, П.Ф. Папкович, И.Н. Преображенский, Ю.Н. Работнов, Г.Н. Савин, А.И. Станкевич, С.И. Трушин, В.И. Феодосьев, В.И. Шалашилин, Н.Н. Шапошников, В. Almrof, R. Gallagher, W. Koiter, K. Meissner, O. Zienkiewicz и др.

Разрабатываются и развиваются математические модели, позволяющие исследовать особенности процессов деформирования составных неоднородных конструкций каркасного типа при комбинированных видах нагружения с учетом геометрической и физической нелинейности. Задачи рассматриваются в плоской постановке на основе соотношений для балок, пластин и панелей, основанных на гипотезах Тимошенко. Для учета геометрической нелинейности используются соотношения квадратичной теории, а для описания упруго-пластической работы армирующих элементов в железобетонных конструкциях используются соотношения деформационной теории пластичности.

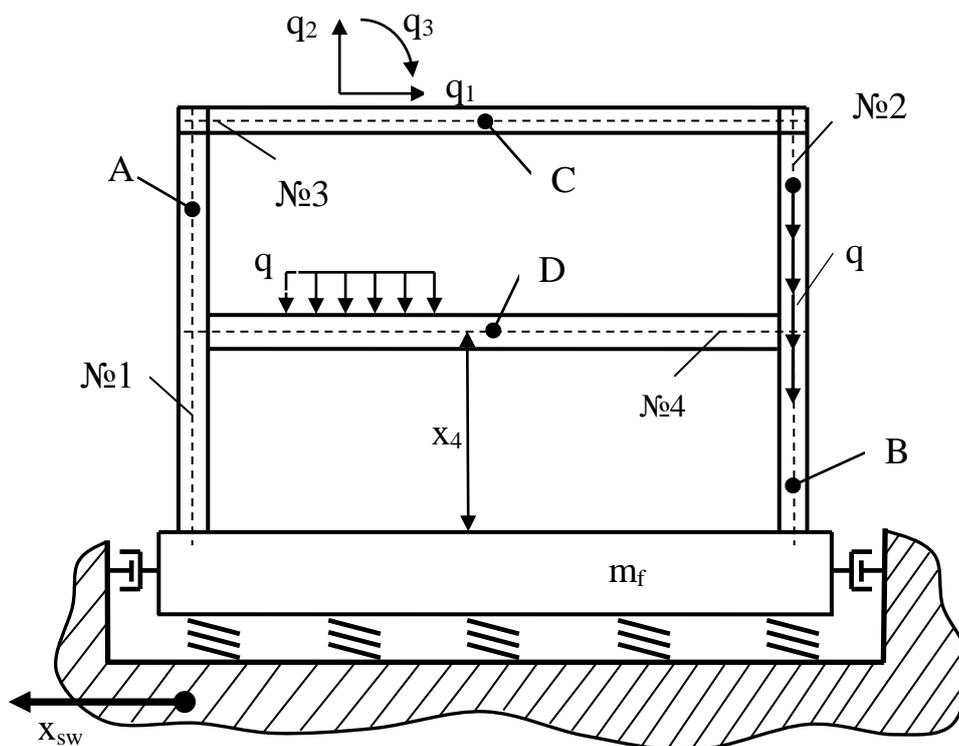


Рис. 2

Рассматриваются типовые элементы составных конструкций - прямолинейные и криволинейные балки арочного типа, а также панельные и оболочечные несущие элементы, работающие в условиях плоской деформации (рис. 2). При математическом моделировании армирующие элементы железобетонных конструкций рассматриваются в виде ортотропного слоя, эквивалентного по жесткости и работающего на растяжение-сжатие и поперечный сдвиг в направлении армирования. Приведенные толщины слоев  $\Delta h_1$  и  $\Delta h_2$  для общего случая двустороннего армирования определяются через значения коэффициентов армирования как:  $\Delta h_1 = \mu_1 \cdot h$ ;  $\Delta h_2 = \mu_2 \cdot h$ , где  $\mu_1, \mu_2$  - коэффициенты армирования в слоях  $z < 0$  и  $z > 0$  соответственно (рис. 3б).

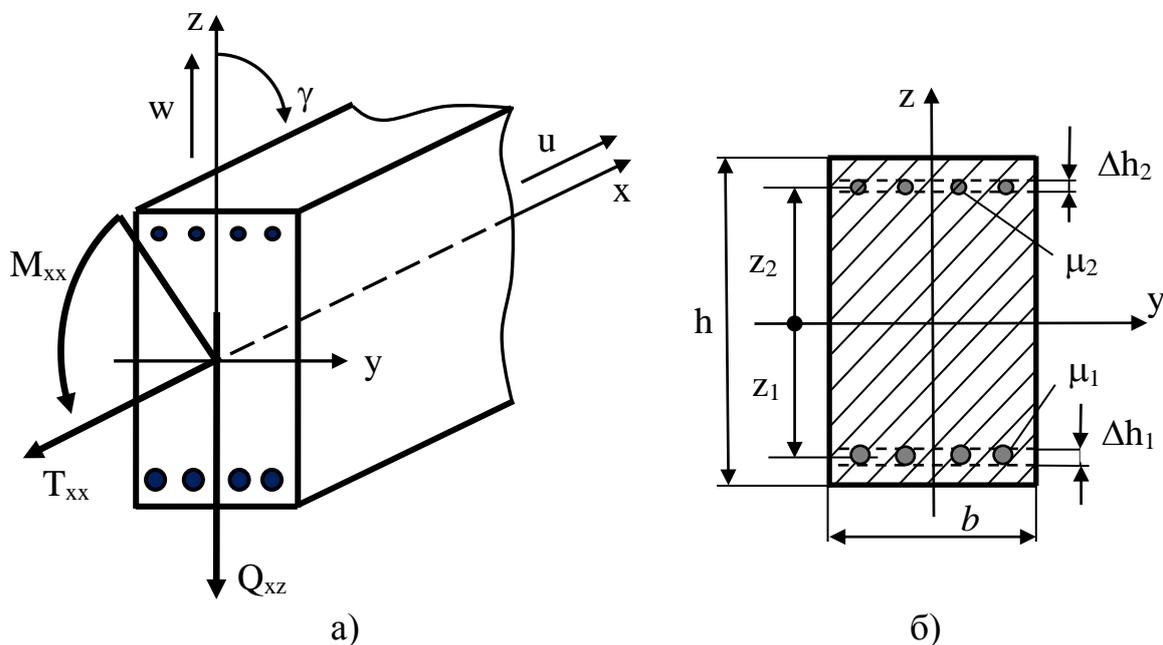


Рис. 3

*Упругие задачи.* Приведенные к координатной линии силовые факторы – растягивающая (сжимающая) сила  $T_{xx}$ , перерезывающая сила  $Q_{xz}$  и изгибающий момент  $M_{xx}$  выражаются через компоненты тангенциальной  $E_{xx}$  и трансверсальной  $E_{xz}$  и изгибной  $K_{xx}$  деформации как (рис. 3)

$$\begin{aligned} T_{xx} &= (B_b + B_a)E_{xx} + A_a K_{xx}; & M_{xx} &= (D_b + D_a)K_{xx} + A_a E_{xx}; \\ Q_{xz} &= (C_b + C_a)E_{xz}, \end{aligned} \quad (1)$$

где для прямолинейной балки

$$E_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\theta_x^2; \quad E_{xz} = \gamma - \theta_x; \quad K_{xx} = \frac{\partial \gamma}{\partial x}; \quad \theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}. \quad (2)$$

Жесткостные коэффициенты определяются через физико-механические характеристики бетона и арматуры

$$\begin{aligned}
 B_b &= E_b \cdot (bh); & C_b &= k^2 G_b \cdot (bh); & D_b &= E_b \cdot \left( \frac{bh^3}{12} \right); \\
 A_a &= b \cdot \sum_{i=1}^n E_a (z_i \cdot \Delta h_i); & B_a &= b \cdot \sum_{i=1}^n E_a \cdot \Delta h_i; & & (3) \\
 C_a &= b \cdot \sum_{i=1}^n k^2 G_a \cdot \Delta h_i; & D_a &= b \cdot \sum_{i=1}^n E_a \left[ (z_i^2 \cdot \Delta h_i) + \frac{\Delta h_i^3}{12} \right],
 \end{aligned}$$

где  $b$  - ширина балки,  $E_a, G_a$  - модули Юнга и сдвига арматуры,  $E_b, G_b$  - модули Юнга и сдвига бетона,  $z_1$  и  $z_2$  - координаты середины слоев  $\Delta h_1$  и  $\Delta h_2$ ,  $k^2 = 5/6$ . В формулах (3)  $n=2$  - для случая двустороннего армирования и  $n=1$  - при одностороннем армировании.

*Упруго-пластические задачи.* В упругой стадии нормальные  $\sigma_a$  и касательные  $\tau_a$  напряжения в арматуре связаны с деформациями законом Гука. С учетом реализуемых в процессе эксплуатации условий нагружения для армирующих элементов принимаются условия одноосного напряженного состояния при соответствующих упрощениях в соотношениях деформационной теории пластичности. Разгрузка полагается упругой. Для арматуры зависимость  $\sigma_i(\epsilon_i)$  аппроксимируется диаграммой с линейным упрочнением.

Нормальные  $\sigma_b^z$  и касательные  $\tau_b^z$  напряжения в слое бетона с координатой  $z$  определяются в предположении его упругой работы. Полагается, что трещина в слое бетона с координатой  $z$  возникает при значениях растягивающих напряжений  $\sigma_b^z \geq R_{bt}$  ( $R_{bt}$  - предел прочности бетона на растяжение). Если в процессе деформирования происходит закрытие трещины, то данный слой полностью включается в работу поперечного сечения балки. Повторное раскрытие трещины происходит при смене знака деформации  $\epsilon_{xx} < 0$  на  $\epsilon_{xx} \geq 0$  и т.д. Силовые факторы определяются в результате интегрирования напряжений в бетоне и арматуре по толщине элемента конструкции  $h$ . Для многослойных конструкций из композиционных материалов усилия и моменты выражаются по формулам

$$T_{xx} = B_{11} \cdot E_{xx} + A_{11} \cdot K_{xx}; \quad M_{xx} = D_{11} \cdot K_{xx} + A_{11} \cdot E_{xx}; \quad Q_{xz} = C_{11} \cdot E_{xz}. \quad (4)$$

Жесткостные коэффициенты  $A_{11}, B_{11}, C_{11}, D_{11}$  определяются через упругие характеристики слоев и их толщины.

Для получения уравнений равновесия используется вариационный принцип Лагранжа, а для вывода уравнений движения - вариационное уравнение Гамильтона-Остроградского. Полученные в результате соответствующих преобразований уравнения равновесия и движения в операторной форме могут быть представлены как

$$[L_x(U)]_k + q_k = 0, \quad (5)$$

$$[L_x(U)]_k + q_k = m_k \ddot{u}_k, \quad (6)$$

где  $[L_x(U)]_k$  - соответствующие дифференциальные операторы для вектора обобщенных перемещений  $U=U(u_1, u_2, u_3)$ ,  $u_1=u$ ,  $u_2=w$ ,  $u_3=\gamma$  - обобщенные перемещения  $u_k$  ( $k=1,2,3$ ),  $q_k$  - компоненты нагрузки, включая весовые  $q_{gk}$ . Для динамических задач вид воздействия задается соответствующей функцией нагрузки  $q=q(x,t)$ . Параметры массовых характеристик для железобетонных конструкций определяются как

$$m_k = b \cdot \left[ \rho_b h + \sum_{i=1}^n \rho_a h_i \right]; \quad m_3 = b \cdot \left[ \frac{\rho_b h^3}{12} + \sum_{i=1}^n \rho_a \cdot \left( \frac{h_i^3}{12} + z_i^2 \cdot h_i \right) \right], \quad (7)$$

где  $k=1,2$ ,  $\rho_a$  - плотность арматуры,  $\rho_b$  - плотность бетона.

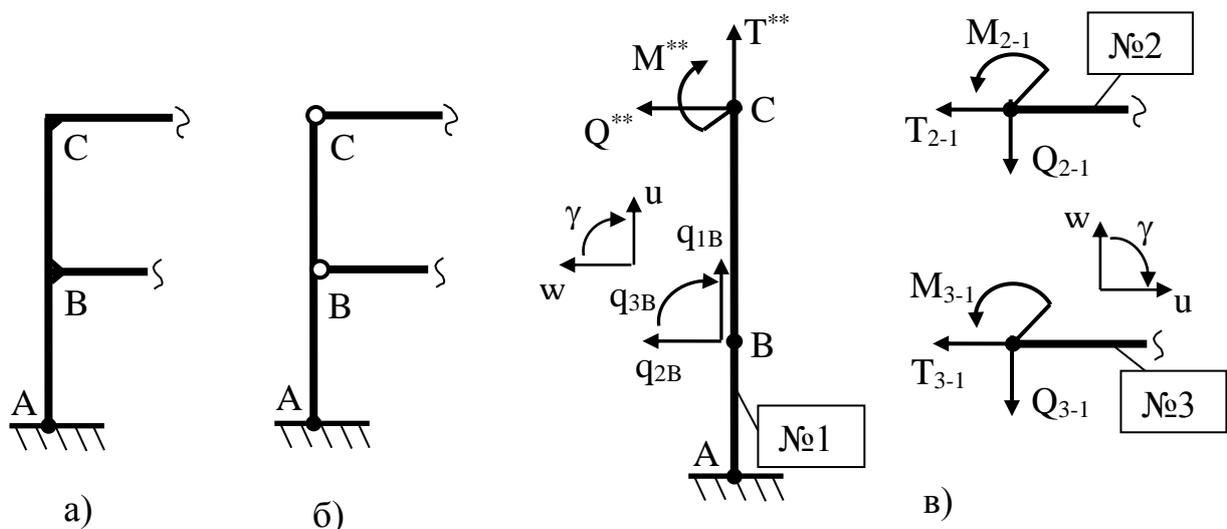


Рис. 4

Уравнения равновесия и движения (5),(6) получены в проекциях на оси, связанные с недеформированной координатной системой, что позволяет легко сформулировать задачу для составной конструкции. Монолитное соединение элементов составной конструкции моделируется условиями жесткого защемления (рис. 4а). Граничные условия типа шарнирного закрепления могут быть использованы для моделирования условий сопряжения в точках В и С сборных конструкций. Начальные условия ставятся для обобщенных перемещений  $u_k$  и их скоростей  $\dot{u}_k$

$$u_k|_{t=0} = u_k^0; \quad \frac{\partial u_k}{\partial t}|_{t=0} = \dot{u}_k^0, \quad (8)$$

где  $u_k^0, \dot{u}_k^0$  – заданные начальные значения обобщенных перемещений и их скоростей при  $t=0$ .

Разрабатывается математическая модель для конструкции на амортизированной фундаментной плите при воздействии горизонтальной компоненты сейсмической волны  $x_{sw}$ . При построении математической модели система «сооружение - фундаментная плита» рассматривается как составная конструкция с учетом их совместной работы. На рис. 5 показана амортизированная фундаментная плита, установленная на упругих элементах в сочетании с демпферами вязкого трения, работающими независимо друг от друга в двух направлениях.

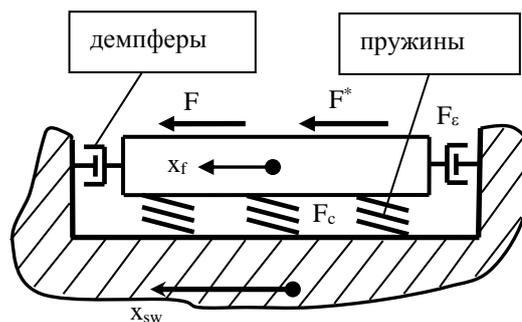


Рис. 5

В предположении, что движение плиты характеризуется только перемещением  $x_f$  как жесткого целого вдоль горизонтальной оси, уравнение движения можно представить в виде (рис. 2,5)

$$m_f \ddot{x}_f + F_c + F_\varepsilon - (F + F^*) = 0, \quad (9)$$

где в соответствии с принятым правилом знаков (рис.2,3)

$$F = \sum_{m=1}^M Q_{xx}^{(m)}; \quad F_c = c_z(x_f - x_{sw}); \quad F_\varepsilon = \varepsilon_v \dot{x}_f, \quad (10)$$

и где  $M$  – число опорных элементов, связанных с фундаментной плитой,  $m_f$  – масса плиты,  $F^*$  – заданная нагрузка на плиту,  $F$  – реакция от опорных элементов сооружения,  $F_c$  и  $F_\varepsilon$  – упругая и вязкая составляющая реакции амортизирующих элементов (АЭ),  $c_z$  и  $\varepsilon_v$  – интегральные значения упругой и вязкой компонент АЭ,  $x_{sw}=x_{sw}(t)$  – заданный закон перемещения основания. В общем случае  $F^*=F^*(t)$ , в частном:  $F^*=\text{const}$ . В опорных точках конструкции реализуются кинематические граничные условия, которые формулируются как

$$u_m = 0; \quad w_m = x_f; \quad \gamma_m = 0, \quad (11)$$

где  $m=1,2,\dots,M$ . Для неамортизированного фундамента, жестко связанного с грунтом:  $w_m=x_f=x_{sw}$ . Аналогичная модель для конструкции на амортизированном фундаменте может быть построена и для случая действия вертикальной составляющей сейсмической волны, а также совместного действия как вертикальной, так и горизонтальной компонент.

**Во второй главе** для дискретизации по пространственным и временной координатам используется метод конечных разностей (МКР). Дифференциальные операторы аппроксимируются разностными второго порядка. Для каждого элемента составной конструкции в области непрерывного изменения аргумента  $x$  ( $0 \leq x \leq l$ ) вводится основная сетка с шагом  $\Delta x = \text{const}$ , узлы которой имеют целочисленные индексы  $i$ , а также вспомогательная сетка с дробными индексами ( $i \pm 1/2$ ), узлы которой лежат посередине между узлами основной. В узлах основной сетки функциям обобщенных перемещений  $u_k(x)$ , скоростей  $\dot{u}_k(x)$  и нагрузок  $q_k(x)$  сопоставляются сеточные функции  $u_k(i)$ ,  $\dot{u}_k(i)$  и  $q_k(i)$ . С узлами вспомогательной сетки сопоставляются сеточные функции параметров НДС. При решении физически нелинейных задач для определения состояния армирующих элементов (упругое, пластическое, нагрузка, разгрузка) вводятся сеточные функции интенсивности деформаций для нижнего  $(e_i)_{a1}(i \pm 1/2)$  и верхнего  $(e_i)_{a2}(i \pm 1/2)$  слоя арматуры при  $z=z_1$  и  $z=z_2$  соответственно (рис. 6).



$$\frac{\partial \mathcal{E}_\Sigma}{\partial u_i} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}_\Sigma}{\partial w_i} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}_\Sigma}{\partial \gamma_i} = 0, \quad (13)$$

можно представить в операторном виде

$$[L_{\Delta x}(u_k; q_k)]_i = 0, \quad (14)$$

где  $[L_{\Delta x}(u_k; q_k)]_i$  - соответствующие конечно-разностные операторы для вектора сеточных функций перемещений и нагрузок.

При численном решении нестационарных задач в области  $t \geq 0$  вводится основная сетка  $t^{(n)} = \Delta t \cdot n$  ( $\Delta t = \text{const}$ ,  $n \geq 0$ ), с узлами которой соотносятся сеточные функции перемещений  $u_k(i)$ . Сеточные функции скоростей  $\dot{u}_k(i)$  соотносятся с узлами вспомогательной сетки  $t^{(n \pm 1/2)}$ . Конечно-разностные аналоги уравнений движения (6) вытекают из вариационно-разностных уравнений вида (13)

$$\frac{\partial I_\Sigma}{\partial [u_k]_i^{(n)}} = 0, \quad (15)$$

где дискретная форма функционала  $I_\Sigma$  представляется суммированием по сеточной области  $t^{(n)}$ . После выполнения соответствующих преобразований конечно-разностные аналоги уравнений движения (6), аппроксимированные относительно узловой точки  $i$ , можно представить в операторной форме как

$$\{f^* [L_{\Delta x}(u_k; q_k)]\}_i^{(n)} = \frac{[f_{22}^* c^* m_k \dot{u}_k]_i^{(n+1/2)} - [f_{11}^* c^* m_k \dot{u}_k]_i^{(n-1/2)}}{\Delta t}, \quad (16)$$

где через  $[L_{\Delta x}(u_k; q_k)]$  обозначены левые части разностных аналогов уравнений равновесия (14). Для регулярной в сеточной области  $t^{(n)}$  узловой точки с индексом  $n > 0$ :  $f_{11}^* = f_{22}^* = f^* = 1$ . Уравнения (28) позволяют описать переходные процессы при изменении во времени не только нагрузок, но и физико-механических характеристик материалов, массовых характеристик и геометрических параметров элементов конструкций, что имеет существенное значение при расчете железобетонных каркасных конструкций с учетом процессов трещинообразования в бетоне и упруго-пластической работы арматуры.

Рассмотрены особенности конечно-разностной аппроксимации условий сопряжения элементов монолитных и сборных каркасных конструкций, а также особенности аппроксимация начальных условий.

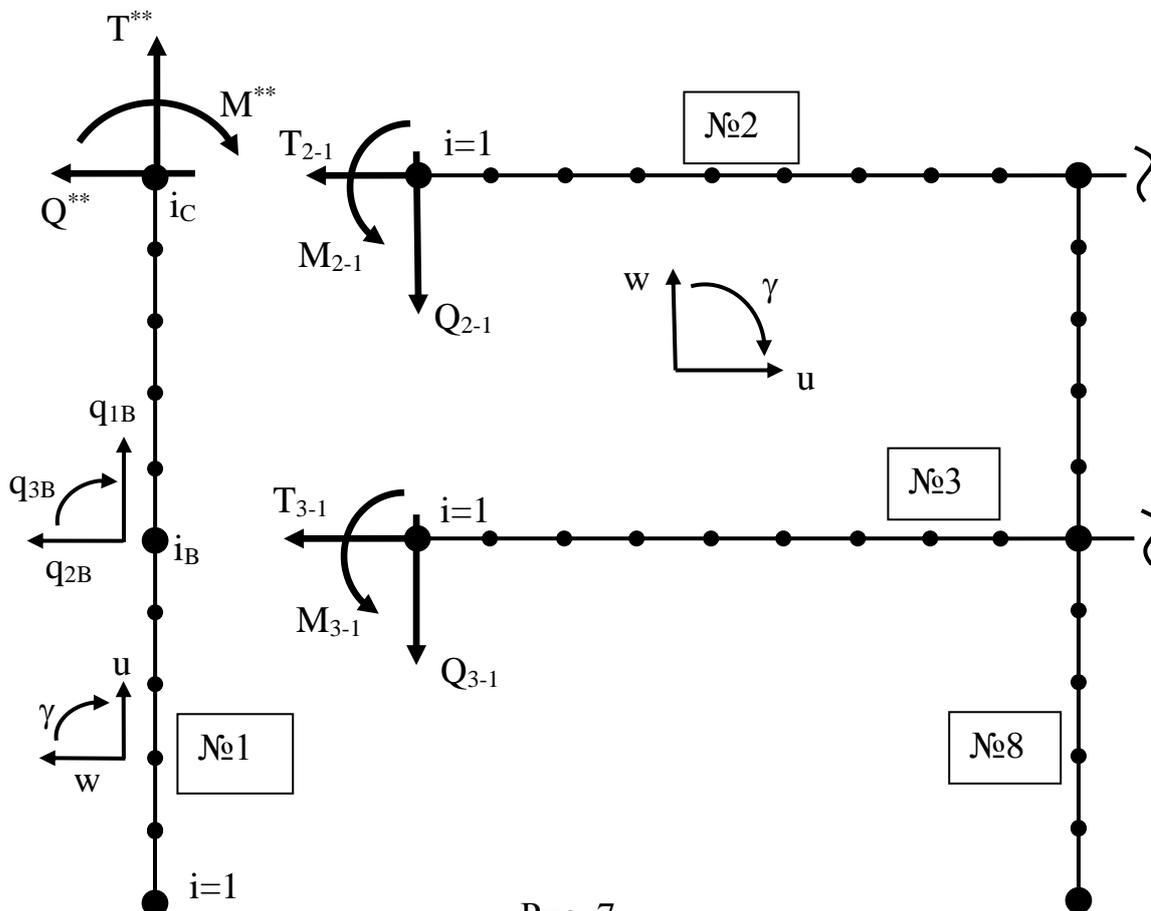


Рис. 7

При построении дискретных моделей для составных конструкций (рис. 2,4) полагается, что начальный ( $i=1$ ) и конечный ( $i=N$ ) узлы несущих горизонтальных элементов сопрягаются с соответствующими узлами основной сетки вертикальных элементов (рис. 7).

Разработана дискретная модель для конструкции на амортизированном фундаменте. При расчете конструкций на сейсмические воздействия для общего случая, когда инструментальная сейсмограмма характеризуется функцией, имеющей сложный, высоко градиентный вид, разработана процедура аппроксимации сейсмограммы с помощью сплайн-интерполяции. Для частного случая при моделировании сейсмического воздействия предложена методика, основанная на аппроксимации параметров сейсмических волн набором тригонометрических функций, заданных на соответствующих временных интервалах.

**В третьей главе** разрабатываются и развиваются численные методы решения нелинейных начально-краевых задач для составных конструкций кар-

касного типа. Для решения сеточных аналогов уравнений равновесия используется квазидинамическая форма метода установления, для которой в сочетании с дискретизацией задачи МКР сеточные аналоги уравнений равновесия (14) заменяются на уравнения, совпадающие по форме с уравнениями движения элемента конструкции в вязкой среде вида

$$[L_{\Delta x}(u_k; q_k)]_i = (c^* m_k \ddot{u}_k)_i + (c^* \varepsilon_k \dot{u}_k)_i, \quad (17)$$

где  $\varepsilon_k(i)$ - параметры удельной вязкости искусственной среды ( $k=1,2,3$ ). Аппроксимация нестационарных уравнений (17) для  $i$ -го узла на сетке с шагом  $\Delta t = \text{const}$  приводит к итерационному процессу для определения скоростей  $[\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)}$  на временном слое  $t^{(n+1/2)}$  и сеточных функций  $[u_k]_i^{(n+1)}$  на слое  $t^{(n+1)}$

$$[\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)} = \left[ \frac{2m_k - \varepsilon_k \Delta t}{2m_k + \varepsilon_k \Delta t} \right] \cdot [\dot{u}_k]_i^{(n-1/2)} + \frac{2\Delta t \cdot [L_{\Delta x}(u_k; q_k)]_i^{(n)}}{c_i^* \cdot [2m_k + \varepsilon_k \Delta t]_i};$$

$$[u_k]_i^{(n+1)} = [u_k]_i^{(n)} + \Delta t \cdot [\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)}. \quad (18)$$

Таким образом, использование метода установления в форме (17) позволяет свести решение исходной нелинейной статической задачи (14) к решению квазидинамической (17) посредством итерационного процесса (18), что значительно упрощает построение и реализацию вычислительного алгоритма решения статической задачи. Параметры итерационного процесса определяются из условия ускорения сходимости и устойчивости разностной схемы

$$\varepsilon_k = 2a_{\varepsilon, (k)} \sqrt{\frac{m_k \mu_{1, (k)} \mu_{2, (k)}}{\mu_{1, (k)} + \mu_{2, (k)}}}; \quad \Delta t_k = 2a_{t, (k)} \sqrt{\frac{m_k}{\mu_{1, (k)} + \mu_{2, (k)}}}, \quad (19)$$

где  $\mu_{1, (k)}$  и  $\mu_{2, (k)}$  - наименьшие и наибольшие собственные числа для разностных операторов в уравнениях (14);  $a_{\varepsilon, (k)}$  и  $a_{t, (k)}$  - близкие к единице поправочные коэффициенты. Шаг по времени  $\Delta t$  для всей РС в целом определяется из условия вида  $\Delta t = \min \Delta t_k$ . В рамках линейных упрощенных соотношений на основе спектрального признака получены оценки  $\mu_{1, (k)}$  и  $\mu_{2, (k)}$  как для конструкций из композитов, так и железобетонных конструкций. Разработан метод ускорения сходимости метода установления путем введения весовых коэффициентов  $a_k$  в параметры массовых характеристик  $\rho_k = a_k \rho$  из условия  $\Delta t_k = \Delta t_{\max}$ .

Для численного решения конечно-разностных аналогов уравнений движения элементов составных конструкций используется явная двухслойная разностная схема по времени второго порядка аппроксимации. Параметры вязкости  $\varepsilon_k$  могут быть использованы для учета диссипации энергии и оценены как

$$\varepsilon_k = a_{\varepsilon,(k)} \frac{\delta_k}{\pi} \sqrt{\frac{m_k \mu_{1,(k)} \mu_{2,(k)}}{\mu_{1,(k)} + \mu_{2,(k)}}}, \quad (20)$$

где  $\delta_k$ - логарифмический декремент колебаний,  $a_{\varepsilon,(k)}$  - поправочные коэффициенты. Построены численные решения статических и динамических задач для составных конструкций на амортизированном фундаменте и предложена методика оценки оптимальных значений параметров вязко-упругих АЭ. Интегральное значение жесткости  $c_z$  определяется по заданному соотношению  $k_f$  между частотой  $f_f$  свободных колебаний амортизированной фундаментной плиты и преобладающей частотой  $f_{sw}$  сейсмической волны как

$$c_z = 4\pi^2 \cdot k_f^2 \cdot f_{sw}^2 \cdot m_f = k_f^2 \cdot \frac{4\pi^2 \cdot m_f}{T_{sw}^2}. \quad (21)$$

Интегральное значение вязкой компоненты  $\varepsilon_v$  определяется по отношению к величине вязкости для случая предельного аperiodического движения амортизированного фундамента, характеризуемому коэффициентом  $k_\varepsilon \geq 0$

$$\varepsilon_v = 2 \cdot k_\varepsilon \sqrt{c_z m_f}, \quad (22)$$

где  $k_\varepsilon=1$  соответствует случаю предельного аperiodического движения.

Применение квазидинамической формы метода установления для решения статических задач в сочетании с явной схемой решения нестационарных задач приводит к единой разностной схеме для решения как статических, так и динамических задач, что позволяет без перестройки вычислительного алгоритма эффективно исследовать особенности деформирования конструкций при различных видах комбинированного нагружения.

**Четвертая глава** посвящена исследованию нелинейных процессов деформирования составных конструкций каркасного типа при комбинированных видах нагружения. Разработанные математические модели и численные методы решения нелинейных начально-краевых задач были практически реализованы в

прикладных программ на языке FORTRAN-IV применительно к персональным ЭВМ серии Pentium с 32-х и 64-х битовыми процессорами. Достоверность разработанных математических моделей подтверждена хорошей сходимостью и точностью численных решений в зависимости от параметров сетки при сопоставлении с известными аналитическими решениями тестовых задач. На примере решения задачи о поэтапном нагружении заземленной железобетонной балки равномерно распределенной нагрузкой до уровня возникновения пластических деформаций в арматуре и последующей разгрузкой с определением остаточных деформаций и прогибов было проведено исследование влияния учета физической нелинейности на особенности деформирования несущих элементов каркасных конструкций.

Исследовано влияние интегральных характеристик вязкоупругих амортизирующих элементов на особенности процессов нелинейного деформирования статически нагруженной железобетонной каркасной конструкции при динамическом воздействии, моделирующем горизонтальную компоненту сейсмической волны. Рассматривалась монолитная конструкция балочного типа, установленная на фундаментной плите толщиной  $h_f$ , состоящая из 4 элементов с параметрами (рис. 2):  $l_1=l_2=l_3=l_4$ ;  $h_1=h_2=h_3=h_4$ ;  $l_1=10 \cdot h_1$ ;  $h_1=1,5 \cdot b$ ;  $x_4=0,5 \cdot l_1$ , где  $l_m$  и  $h_m$  – длина и толщина  $m$ -го элемента соответственно ( $m=1,2,3,4$ ). Железобетонная конструкция выполнена из бетона класса В25 с арматурой А400 при нормативных значениях коэффициентов армирования  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . В качестве статической нагрузки рассматривался собственный вес элементов составной конструкции. Сейсмическое воздействие моделировалось аппроксимацией инструментальной сейсмограммы набором тригонометрических функций, заданных на соответствующих временных интервалах  $\Delta\tau_j$  ( $j=1,2,3,\dots$ )

$$x_{sw} = \begin{cases} \pm X_j \sin \pi \frac{t - t_{j-1}}{\Delta\tau_j} & - \text{для } t_{j-1} \leq t \leq t_j; \\ 0 & - \text{для } t \geq t_{sw}, \end{cases} \quad (23)$$

где  $t_0=0$ ,  $t_{sw}=\max(t_j)$ ,  $X_j$ ,  $\Delta\tau_j=t_j-t_{j-1}$  - амплитудно-частотные характеристики аппроксимирующих функций. Использовалась аппроксимированная сейсмограмма из 5 полуволн синусоид с параметрами:  $X_2=-0,7\cdot X_1$ ;  $X_3=0,14\cdot X_1$ ;  $X_4=-0,04\cdot X_1$ ;  $X_5=0,1\cdot X_1$ ;  $\Delta\tau_2=\Delta\tau_1$ ;  $\Delta\tau_3=1,5\cdot\Delta\tau_1$ ;  $\Delta\tau_4=1,2\cdot\Delta\tau_1$ ;  $\Delta\tau_5=0,7\cdot\Delta\tau_1$ .

Число точек дискретизации для элементов каркасной конструкции принималось равным:  $N_1=N_2=27$ ;  $N_3=N_4=25$ . Статическая задача о деформировании составной конструкции под действием собственного веса решалась методом установления (18). Результаты решения сеточных уравнений (17) использовались в качестве начальных условий (8) при исследовании волновых процессов в конструкции при сейсмическом воздействии. Устойчивость разностной схемы при решении статической задачи обеспечивалась при значении поправочного коэффициента  $a_{t,(k)}$  в (19)  $a_{t,(k)}=0,75$ , а для динамических задач устойчивость схемы обеспечивалась при  $a_{t,(k)}=0,2$ . Влияние параметров вязкоупругих АЭ на процессы деформирования каркасной железобетонной конструкции исследовались для трех случаев: а) фундаментная плита жестко связана с грунтом ( $x_f=x_{sw}$ ); б) фундаментная плита установлена на упругих АЭ ( $k_\varepsilon=0$ ;  $k_f>0$ ); в) фундаментная плита установлена на вязкоупругих АЭ ( $k_\varepsilon>0$ ;  $k_f>0$ ), где параметры вязкоупругих АЭ определялись по (21), (22) при различных значениях коэффициентов  $k_f$  и  $k_\varepsilon$ . Для всего рассматриваемого диапазона ускорений  $a_{max}=(0,1\div 0,4)\cdot g$  разрушение начиналось с балки №4 и характеризовалось появлением сплошных (по поперечному сечению) трещин в бетоне с последующим возникновением и быстрым развитием значительных пластических деформаций в арматуре, приводящим к исчерпанию несущей способности конструкции.

На рис. 8-12 показаны результаты исследования волновых процессов в элементах составной конструкции при сейсмическом воздействии с параметрами:  $a_{max}=0,4\cdot g$ ;  $X_{max}=8,53$ . Кривые 1 соответствуют варианту неамортизированной конструкции, кривые 2 – упругим АЭ с параметрами  $k_f=0,8$ ;  $k_\varepsilon=0$ , и кривые 3 – вязкоупругим АЭ при  $k_f=0,8$ ;  $k_\varepsilon=1$ ;  $\tau=t/t_{sw}$  - безразмерное время. На рис. 8 показаны ускорения фундаментной плиты  $a_f$ , на рис. 9,10 - ускорения  $a_3=\ddot{u}_C$  и  $a_4=\ddot{u}_D$  в серединах пролетов балок № 3 и № 4 (точки С и D, рис.2). Поведение

ускорений  $a_1 = \ddot{w}_A$  и  $a_2 = \ddot{w}_B$  в точках колонн А и В с координатами  $x_A = 0,77 \cdot l_1$ ,  $x_B = 0,27 \cdot l_2$  показаны на рис. 11,12.

Для исключения ошибок при вычислении ускорений с помощью формул численного дифференцирования, обусловленных ошибками округления и длиной разрядной сетки ЭВМ, разработана оригинальная методика применения кубической сплайн-интерполяции, позволяющая вычислять значения ускорений по аналитическим выражениям без использования процедуры численного дифференцирования. Результаты вычислительного эксперимента позволили установить, что использование только упругих АЭ ( $k_\varepsilon = 0$ ) не всегда приводит к повышению несущей способности конструкций. Использование вязкоупругих амортизаторов с параметром  $k_\varepsilon = 1$  в (22) повышало несущую способность каркасной конструкции для всех  $k_f \geq 1$ , за исключением случая  $k_f = 4$ , для которого оптимальное значение составило  $k_\varepsilon = 1,5$ .

Как показали результаты проведенных исследований, использование вязкоупругих АЭ позволяет существенно, более чем в 10 раз, снизить пиковые значения ускорений на элементах каркасной конструкции, возникающие в начальный момент воздействия. Это соответствует результатам экспериментальных и теоретических исследований, проведенных, в частности, в Японии и Германии, которые показали, что за счет демпфирования сейсмическую нагрузку можно снизить более чем в 2 раза.

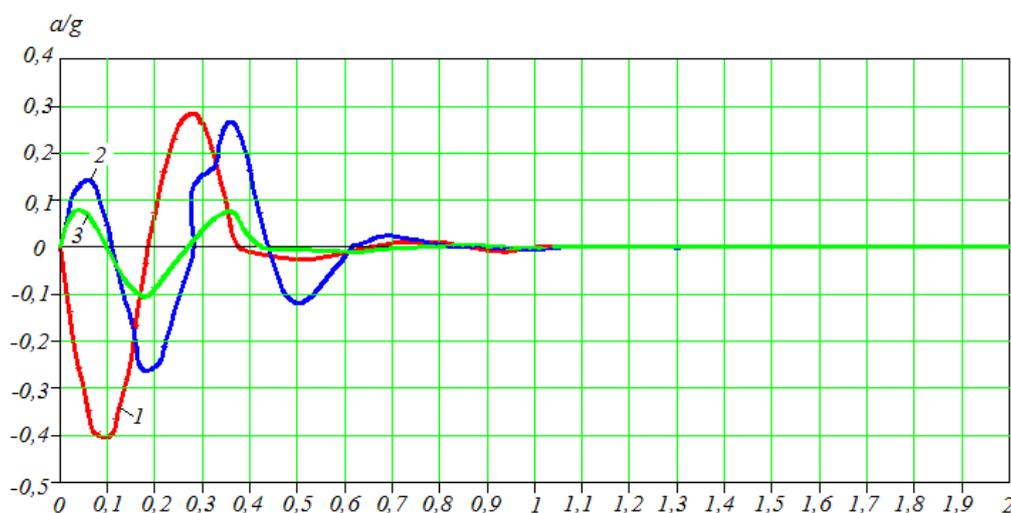


Рис. 8. Горизонтальные ускорения  $a_f$  фундаментальной плиты

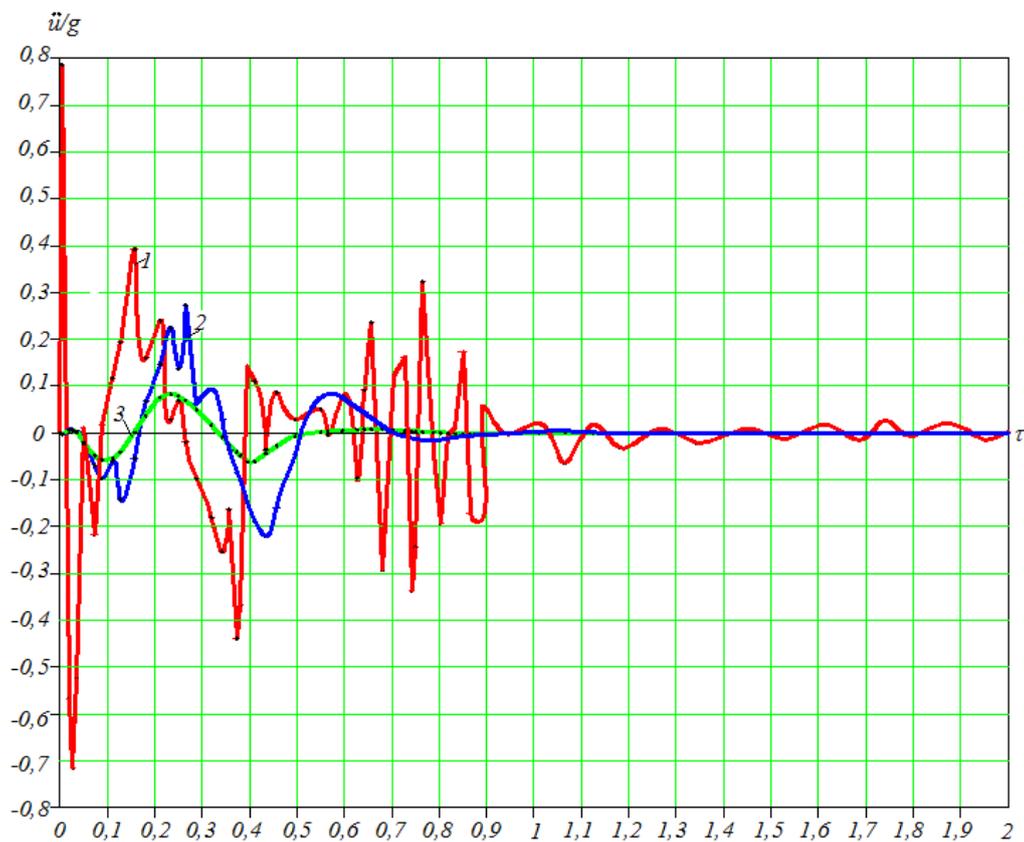


Рис. 9. Тангенциальные ускорения  $\ddot{u}_C$  в т. С балки № 3

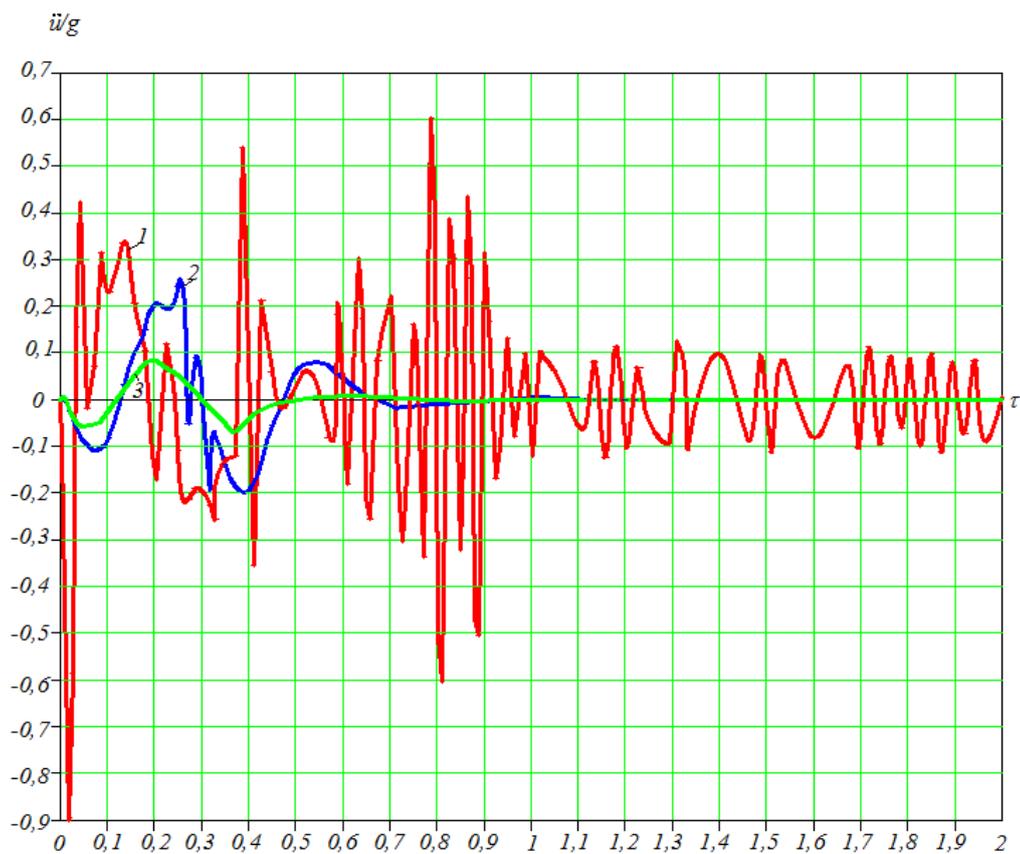


Рис. 10. Тангенциальные ускорения  $\ddot{u}_D$  в т. D балки № 4

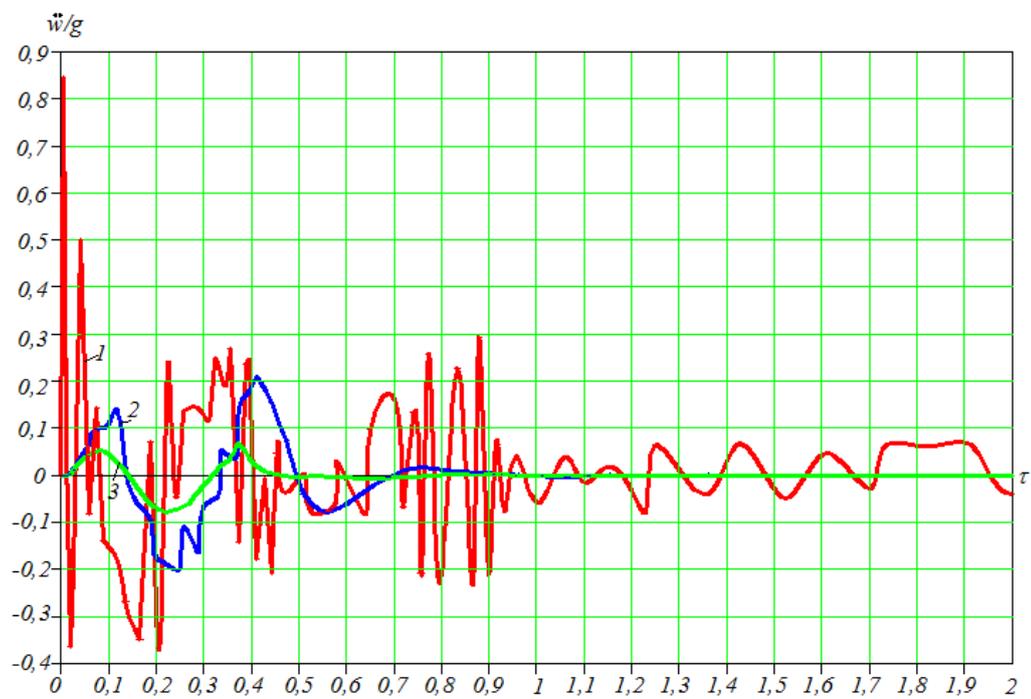


Рис. 11. Нормальные ускорения  $\ddot{w}_A$  в точке А колонны №1

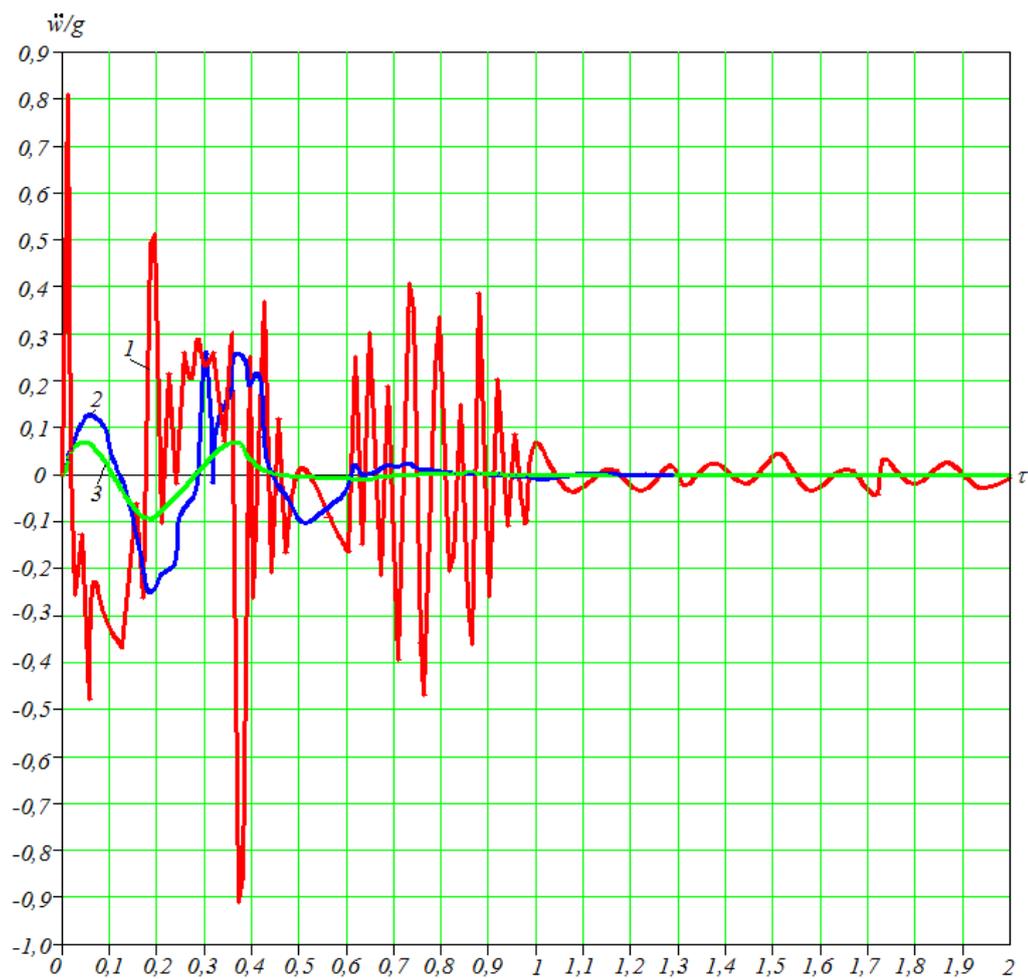


Рис. 12. Нормальные ускорения  $\ddot{w}_B$  в точке В колонны №2

## ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

1. Разработаны и развиты адекватные математические модели и экономичные вычислительные алгоритмы, позволяющие на основе одноступенчатых схем исследовать особенности геометрически и физически нелинейного деформирования составных неоднородных конструкций каркасного типа при воздействии статических и динамических нагрузок различного вида.

2. Для железобетонных элементов составных конструкций в рамках балочной модели Тимошенко и соотношений деформационной теории пластичности построены математические модели, учитывающие возможность возникновения, развития и закрытия трещин в бетоне, а также упруго-пластическую работу армирующих элементов.

3. Рассмотрены различные математические формулировки вариантов сопряжения горизонтальных и вертикальных элементов составных конструкций, моделирующие монолитные и сборные конструкции.

4. В рамках плоской задачи построена новая математическая модель для исследования процессов деформирования каркасных конструкций, установленных, в общем случае, на амортизированной фундаментной плите, при нестационарном воздействии, моделирующем горизонтальную компоненту сейсмической волны, и разработаны практические критерии для определения интегральных значений параметров вязко-упругих амортизаторов.

5. Для общего случая аппроксимации инструментальной сейсмограммы разработана методика, основанная на использовании кубической сплайн-интерполяции. Показано, что в частных случаях инструментальная сейсмограмма может быть аппроксимирована с помощью тригонометрических функций, определенных на соответствующих временных интервалах, при выделении преобладающей частоты сейсмического воздействия.

6. Адаптация квазидинамической форма метода установления в сочетании с явной разностной схемой второго порядка аппроксимации позволила построить одноступенчатую разностную схему для решения как стационарных, так и нестационарных задач, что позволяет получать оценку остаточной несущей

способности конструкций при решении задач с учетом геометрической и физической нелинейности.

7. Достоверность и обоснованность разработанных математических моделей, консервативных разностных схем и численных методов решения соответствующих нелинейных сеточных уравнений основывается на использовании фундаментальных законов механики деформируемого твердого тела, вариационно-разностного метода построения дискретной задачи и подтверждается практической сходимостью численных решений при их сопоставлении с известными аналитическими решениями тестовых задач.

8. Проведено исследование влияния условий сопряжения элементов составной конструкции, а также параметров армирования на процессы деформирования составных каркасных конструкций при сейсмических воздействиях и установлено, что несущая способность может быть повышена реализацией условий сопряжения с большим числом степеней свободы (сборные конструкции) без увеличения параметров армирования.

9. Результаты исследования влияния параметров вязко-упругих амортизирующих элементов на несущую способность и трещиностойкость составной железобетонной конструкции при совместном действии горизонтальной компоненты сейсмической волны и статической нагрузки показали, что использование вязкоупругих амортизаторов позволяет более чем в 10 раз снизить пиковые значения ускорений на элементах каркасной конструкции.

10. Результаты проведенных исследований показали, что разработанные математические модели и численные методы решения нелинейных статических и динамических задач позволяют оптимизировать составные каркасные конструкции по прочностным и весовым характеристикам и выработать практические рекомендации по снижению их материалоемкости.

## **ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ** изложены в следующих статьях:

1. Дмитриев В.Г., Егорова О.В., Рабинский Л.Н., Роффе А.И. Особенности построения консервативных разностных схем в нелинейных задачах механики многосвязных оболочек из композиционных материалов. - Механика композиционных материалов и конструкций, 2014, том 20, № 3, с. 364 - 374 (**перечень ВАК РФ**).
2. Дмитриев В.Г., Егорова О.В., Рабинский Л.Н., Роффе А.И. Особенности конечно-разностной аппроксимации граничных условий сопряжения элементов составных конструкций при численном решении нелинейных начально-краевых задач. - Труды МАИ, выпуск № 82, 2015, с. 1-21(**перечень ВАК РФ**).
3. Дмитриев В.Г., Роффе А.И. Исследование влияния параметров вязко-упругих амортизаторов на деформирование и несущую способность железобетонных каркасных конструкций при сейсмических воздействиях (англ.). – Int. Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2015. Volume 11, Issue 1, pp. 104-114 (**перечень ВАК РФ**).
4. Дмитриев В.Г., Коровин Е.К., Роффе А.И., Судьин А.А. Исследование особенностей реакции монолитных и сборных строительных конструкций каркасного типа на сейсмические воздействия методами вычислительного эксперимента. – Мат. XVIII Межд. семинара "Технологические проблемы прочности". Подольск. МГОУ, 2011, с. 19 - 31.
5. Дмитриев В.Г., Роффе А.И., Судьин А.А. Математическое моделирование процессов статического и динамического деформирования железобетонных каркасных конструкций с учетом трещинообразования. – Мат. XVIII Межд. симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Том 1.2012. - с. 77.
6. Дмитриев В.Г., Роффе А.И., Судьин А.А. Исследование процессов особенностей статического и динамического деформирования железобетонных строительных конструкций с учетом упруго-пластической работы арматуры. – Мат.

- ХІХ Межд. семинара "Технологические проблемы прочности". Подольск. МГОУ, 2012, с. 37 - 44.
- 7.** Дмитриев В.Г., Роффе А.И., Судьин А.А. Исследование влияния краевых условий на деформирование и несущую способность строительных каркасных конструкций при сейсмических воздействиях. - Мат. ХІХ Межд. симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Том 1. Москва-Ярополец. 2013. - с. 84-86.
- 8.** Дмитриев В.Г., Роффе А.И., Судьин А.А. Учет влияния вариантов кинематических и силовых условий сопряжения перегородок и колонн на несущую способность и деформирование монолитных и сборных железобетонных конструкций каркасного типа при сейсмических воздействиях. – Мат. ХХ Межд. семинара "Технологические проблемы прочности". Подольск. 2013, с. 28 - 34.
- 9.** Дмитриев В.Г., Болтунова М.А., Роффе А.И., Судьин А.А. Особенности математического моделирования переходных процессов в железобетонных строительных конструкциях купольного и каркасного типа при сейсмических воздействиях. - Мат. ХХ Межд. симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Том 1. Москва. 2014. - с. 73-75.
- 10.** Дмитриев В.Г., Роффе А.И., Судьин А.А. Определение оптимальных значений параметров вязкоупругих амортизаторов сейсмозащищенных зданий и сооружений. – Мат. ХХІ Межд. семинара "Технологические проблемы прочности". Подольск. МГОУ, 2014, с. 159 - 166.
- 11.** Дмитриев В.Г., Болтунова М.А., Роффе А.И. Исследование особенностей процессов деформирования многосвязных железобетонных конструкций покрытий при сейсмических воздействиях методами вычислительного эксперимента. - Сб. трудов ІІ Межд. научно-техн. конференции «Инновационные технологии в развитии строительства, машин и механизмов для строительства и коммунального хозяйства, текущего содержания и ремонта железнодорожного пути» в 2 т. / Смоленский филиал МИИТ. Смоленск. Том 1. 2014. - с. 82-91.

**12.** Дмитриев В.Г., Роффе А.И., Судьин А.А. Построение численных решений геометрически и физически нелинейных начально-краевых задач механики неоднородных конструкций на основе вариационно-разностного метода. – Мат. XXII Межд. семинара "Технологические проблемы прочности". Подольск. 2015, с. 126 - 142.