

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи



Юн Сон Ук

ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ
ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ВОЗМУЩАЮЩИХ УСКОРЕНИЙ

Специальность 2.5.16.

Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель
доктор технических наук, член-корреспондент РАН
Петухов В.Г.

Москва – 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ	17
1.1 Математическая модель движения многовиткового перелета космического аппарата с электроракетной двигательной установкой с использованием угловой независимой переменной	17
1.2 Математическая модель возмущенного гелиоцентрического движения космического аппарата с электроракетной двигательной установкой	23
1.3 Заключение по разделу	24
2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИЙ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ	26
2.1 Математическая постановка задачи оптимизации возмущенных траекторий космического аппарата с двигателем ограниченной тяги	26
2.2 Математическая постановка задачи оптимизации возмущенных траекторий космического аппарата с идеально-регулируемым двигателем ограниченной мощности ..	31
2.3 Математическая постановка задачи оптимизации возмущенных траекторий космического аппарата с минимальной тягой	35
2.4 Заключение по разделу	37
3 МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГЕБРЫ КОМПЛЕКСНЫХ ДУАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ	38
3.1 Метод продолжения по параметру	38
3.2 Методы точного вычисления производных	39
3.3 Применение автоматического дифференцирования с использованием алгебры комплексных дуальных чисел при решении задач оптимизации возмущенных траекторий космических аппаратов с малой тягой	45
3.4 Метод диагностики существования траекторий с ограниченной тягой и постоянной скоростью истечения с помощью решения задачи минимизации тяги	51
3.5 Заключение по разделу	52
4 ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОВИТКОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ МЕЖОРБИТАЛЬНЫХ ПЕРЕЛЕТОВ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ	55
4.1 Численные примеры невозмущенных задач: автоматизация вычислений оптимальных многовитковых траекторий с малой тягой	57
4.2 Численные примеры возмущенных задач с использованием комплексных дуальных чисел	67
4.2.1 Оптимизация траектории перелета между двумя эллиптическими орбитами	67

4.2.2 Оптимизация траектории перелета между геопереходной и геостационарной орбитами	76
4.2.3 Оптимизация траектории перелета между околокруговыми низкими околоземными орбитами	80
4.3 Заключение по разделу.....	84
5 ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ ПЕРЕЛЕТА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА К ЛУНЕ С ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ	86
5.1 Траектория перелета к Луне с минимальной тягой.....	86
5.1.1 Математическая модель	87
5.1.2 Методы решения задачи оптимального управления: минимизация тяги.....	90
5.1.3 Численные примеры.....	92
5.2 Оптимизация свободных граничных условий на траектории перелета с минимальной тягой между околоземной и окололунной орбитами	98
5.2.1 Необходимые условия оптимальности: задача оптимизации траектории с частично свободными граничными условиями	99
5.2.2 Численные примеры.....	101
5.3 Минимизация затрат топлива для траекторий перелета к Луне с малой тягой.....	107
5.3.1 Математическая модель	110
5.3.2 Схема решения задачи оптимального управления: минимизация затрат топлива.	112
5.3.3 Численные примеры.....	115
5.4 Сквозная оптимизация траекторий перелета к Луне с малой тягой.....	127
5.4.1 Сквозная оптимизация возмущенных траекторий с идеально-регулируемым двигателем ограниченной мощности	131
5.4.2 Каноническое преобразование сопряженных переменных	134
5.4.3 Общая схема решения задачи оптимизации траектории.....	136
5.4.4 Численные примеры.....	140
5.5 Заключение по разделу.....	150
6 ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ МЕЖПЛАНЕТНЫХ ПЕРЕЛЕТОВ МЕЖДУ ТОЧКАМИ ЛИБРАЦИИ	152
6.1 Метод решения задачи оптимизации возмущенной гелиоцентрической траектории ..	154
6.2 Численные примеры	157
6.3 Заключение по разделу.....	169
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	170
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ.....	175
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	177
ПРИЛОЖЕНИЕ А (БИБЛИОТЕКА ПРОГРАММ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ДУАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ).....	186

А.1 Особенности реализации библиотеки программ для вычислений в комплексной дуальной области	186
А.2 Результаты разработки, тестирование и обсуждение.....	189
ПРИЛОЖЕНИЕ Б (НЕОБХОДИМЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЖДУ СИСТЕМАМИ КООРДИНАТ)	190
Б.1 Перевод фазовых переменных	190
Б.2 Перевод из EME2000 в LME2000	191
ПРИЛОЖЕНИЕ В (ТОЧНОСТЬ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ).....	193

ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени имеется развитая теория возмущенного движения космических аппаратов (КА) и теория оптимальных межорбитальных и межпланетных перелетов и перелета к Луне. Теория возмущенного движения основывается на классических результатах небесной механики, полученных Эйлером, Лагранжем, Лапласом, Пуанкаре и многими другими исследователями. Для прогнозирования движения космических аппаратов разработаны современные теории возмущенного движения, точные численные модели гравитационных полей небесных тел, высокоточное эфемеридное обеспечение, динамические модели верхней атмосферы, специальные численные методы интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Развитие теории движения материальной точки в сложных гравитационных полях, рассматриваемое многими авторами в рамках ограниченных задач трех и более тел или в задачах движения вокруг небесного тела сложной формы, привело к важным практическим результатам в виде открытия новых закономерностей в динамике периодического и квазипериодического движения вокруг точек либрации, астероидов и естественных спутников планет, открытия нового класса низкоэнергетических перелетов космических аппаратов.

Современная теория и методы расчета оптимальных траекторий космических аппаратов развиваются во многих научных школах США, Европы, России, КНР и других стран. Среди активных групп современных исследователей в этой области следует упомянуть группы из Advanced Concept Team (ESA, ESTEC), JPL – Outer Planet Mission Analysis Group, The Aerospace Corporation, University of Texas at Austin, University of Colorado – Colorado Center for Astrodynamics (США), Politecnico di Milano, Politecnico di Torino, Universita di Roma “Sapienza” (Италия), GMV, Deimos Space (Испания), CNES, INRIA (Франция), Technical University of Delft (Нидерланды), University of Strathclyde (Шотландия), Nanjing University, Tsinghua University, State Key Laboratory of Astronautic Dynamics (КНР), Институт прикладной математики РАН, Исследовательский центр им. М.В. Келдыша, Московский государственный университет, Самарский национальный исследовательский университет, Московский авиационный институт (Россия). Большое количество исследовательских групп, занимающихся проблемами возмущенного орбитального движения и оптимизации траекторий, связано с большим многообразием решаемых задач, их ключевой ролью в практической космонавтике и сложностью их решения.

Внешние возмущающие ускорения могут оказывать определяющее влияние на орбитальное движение космических аппаратов. Только благодаря возмущениям от нецентральности гравитационного поля Земли существуют такие важные для прикладных

задач классы орбит, как солнечно-синхронные орбиты и орбиты типа «Молния». Притяжение удаленных небесных тел определяет существование точек относительного равновесия – точек либрации – и позволяет реализовать движение КА вокруг этих точек, например, по гало-орбитам или орбитам Лиссажу. Возмущающее ускорение от притяжения Солнца позволяет реализовать слабоустойчивые траектории перелета к Луне (WSB-траектории), позволяющие сократить требуемые затраты рабочего топлива. Организация движения КА по многообразиям к квазипериодическим орбитам вокруг точек либрации L_1 и L_2 (существование и характеристики которых определяются возмущающими ускорениями от притяжения удаленных небесных тел) позволяет уменьшить требуемые затраты характеристической скорости в межпланетных перелетах. Однако, в большинстве случаев, возмущающие ускорения являются фактором, существенно усложняющим расчеты траекторий КА, особенно траекторий КА с малой тягой.

В настоящее время для реализации транспортных операций в космосе часто используются электроракетные двигательные установки (ЭРДУ) с высоким удельным импульсом тяги, позволяющие существенно сократить требуемые затраты рабочего топлива. Основной особенностью перелетов КА с ЭРДУ является малая величина реактивной тяги. У современных КА уровень реактивного ускорения, обеспечиваемый ЭРДУ, обычно не превосходит десятых долей $\text{мм}/\text{с}^2$. На межорбитальных перелетах возмущающие ускорения часто могут быть сравнимы по величине с реактивным ускорением и даже существенно превосходить его. Так, возмущения от второй зональной гармоники геопотенциала на низких орбитах имеют величину около $1 \text{ см}/\text{с}^2$, более чем на порядок превосходя типичное значение реактивного ускорения КА с ЭРДУ. К числу основных возмущающих ускорений для околоземных КА следует отнести ускорения от нецентральности гравитационного поля Земли, возмущающие ускорения от притяжения Луны и Солнца, аэродинамическое ускорение и ускорение от силы светового давления. Разумеется, для КА различной конфигурации и в разных областях околоземного пространства будут преобладать различные типы возмущающих ускорений и их влияние на траекторию и на программу управления вектором тяги ЭРДУ может быть очень сложным.

Традиционно исследование траекторий КА с малой тягой начинается с рассмотрения движения КА в центральном ньютоновском гравитационном поле. В большинстве случаев, при дальнейшем анализе требуется оценка влияния возмущающих ускорений на траекторию и программу управления, а при подготовке полетного задания учет основных возмущающих является необходимым. В простейших случаях, например при многовитковом перелете между средневысотными круговыми орбитами без изменения наклона с заданной программой управления (например, с постоянной по величине трансверсально направленной тягой), учет

основных возмущающих ускорений может быть сведен к оценке векового ухода в долготу восходящего узла и короткопериодических возмущений во всех орбитальных элементах. Прецессия долготы восходящего узла в этом случае может быть скомпенсирована надлежащим выбором долготы восходящего узла начальной орбиты, и, если амплитуды короткопериодических колебаний орбитальных элементов находятся в заданном допуске, задачу проектирования возмущенной траектории перелета можно считать завершенной.

В более сложных задачах, особенно в случае оптимизации управления, для оценки влияния возмущающих ускорений на оптимальную траекторию и оптимальную программу управления, требуется учитывать возмущающие ускорения в процессе оптимизации траектории. К настоящему времени разработано множество численных методов оптимизации траекторий КА с малой тягой. Детальный обзор по ранним исследованиям в этой области приведен в [1], а по современным работам – в [2, 3]. Для оптимизации траекторий с малой тягой используются различные подходы, основанные на прямых или не прямых методах.

Прямые методы оптимизации, в типичном варианте, сводятся к некоторой параметризации и/или дискретизации управления и дальнейшем представлении задачи минимизации заданного функционала (например, времени перелета или массы топлива) в виде задачи нелинейного программирования большой размерности. Преимуществом прямого подхода является относительная простота учета возмущающих ускорений, однако платой за это является большая вычислительная трудоемкость (время счета) и неопределенность критерия окончания процесса оптимизации, что может приводить к вычислению решений, существенно отличающихся от оптимальных.

Непрямые методы основаны на использовании необходимых и/или достаточных условий оптимальности. Наиболее распространенным вариантом является использование необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума. Основными преимуществами не прямых методов являются их относительно высокая производительность (существенное сокращение времени вычислений по сравнению с использованием прямых методов) и высокая точность. Однако, для оптимизации возмущенных траекторий с использованием принципа максимума, при вычисления правых частей дифференциальных уравнений для сопряженных переменных, требуется точное вычисление производных от возмущающих ускорений по фазовым координатам.

Если математическая модель возмущающих ускорений простая (например, учитываются только зональные гармоники геопотенциала и/или аэродинамическое сопротивление со статической моделью верхней атмосферы), возможно разумное по сложности аналитическое представление правых частей дифференциальных уравнений для сопряженных переменных. В случае использования сложных математических моделей для

высокоточного вычисления возмущающих ускорений представить их производные в замкнутой форме практически не представляется возможным. В этом случае можно воспользоваться высокоточным численным дифференцированием методом комплексного шага [4] или автоматическим дифференцированием с использованием алгебры дуальных чисел [5, 6]. Применение метода комплексного шага или автоматического дифференцирования позволяет существенно облегчить разработку математической модели движения КА для ее применения в задаче оптимизации траектории, так как в этом случае требуется только вычислить возмущающие ускорения в комплексной или дуальной области. При программировании с использованием техники перегрузки операторов и правильном доопределении встроенных функций в комплексной или дуальной области (то есть, при использовании специально разработанных классов или модулей для вычислений в комплексной или дуальной области), задача реализации вычислений возмущающих ускорений и их производных по известному алгоритму вычисления этих ускорений в вещественной области сводится к простому переопределению в программном коде вещественных фазовых переменных на комплексные или дуальные. Применительно к задаче оптимизации траекторий КА с малой тягой такая техника начала использоваться не так давно, но уже успела себя хорошо зарекомендовать [4, 5, 6].

Однако, существует еще одна проблема, существенно ограничивающая устойчивость и скорость сходимости оптимизации траекторий с малой тягой при рассматриваемом подходе. Принцип максимума редуцирует задачу оптимального управления к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений для фазовых и сопряженных переменных. Для решения этой краевой задачи необходимо найти значения неизвестных параметров (в простейшем случае – начальные значения сопряженных переменных), при которых выполняются заданные краевые условия и условия трансверсальности (то есть, при которых вектор невязок краевой задачи становится нулевым). Формально, требуется решить систему нелинейных уравнений для невязок относительно вектора неизвестных параметров краевой задачи. Для этой цели возможно использование различных методов, например различных модификаций метода Ньютона или градиентных методов. В 1990-х годах было предложено [7] использовать для решения краевой задачи принципа максимума в задачах оптимизации траекторий КА с малой тягой метод непрерывного продолжения в форме, представленной в работах [8, 9] для решения систем нелинейных уравнений и к тому времени уже успешно примененному для решения некоторых других краевых задач [10, 11]. Спустя некоторое время метод непрерывного продолжения (или просто – метод продолжения), благодаря своей вычислительной устойчивости и быстрдействию, начал применяться в задачах оптимизации траекторий КА с малой тягой многими другими авторами [12, 13, 14].

Метод продолжения формально редуцирует задачу решения системы нелинейных уравнений к интегрированию вложенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, причем в правые части системы дифференциальных уравнений метода продолжения входят частные производные от невязок краевой задачи принципа максимума по ее неизвестным параметрам. Для численного интегрирования системы дифференциальных уравнений метода продолжения требуется точное вычисление этих производных, что в случае невозмущенной задачи легко реализовать с помощью тех же методов комплексного шага или автоматического дифференцирования с применением алгебры дуальных чисел [4, 5, 6]. Однако, при оптимизации возмущенных траекторий использование этих методов существенно менее эффективно, так как они позволяют вычислять с высокой точности только первые производные, что уже было использовано при вычислении производных от возмущающих ускорений по фазовым координатам, необходимом для вычисления невязок краевой задачи. В этих условиях для вычисления производных от невязок краевой задачи по ее неизвестным параметрам использовался менее точный метод конечных разностей, что снижало вычислительную устойчивость и точность рассматриваемого подхода.

Для построения эффективных методов оптимизации возмущенных траекторий с малой тягой на основе принципа максимума и метода продолжения, необходимо использование метода, обеспечивающего высокоточное вычисление смешанных производных второго порядка. Для высокоточного вычисления вторых производных в ряде работ предлагалось использовать мультикомплексные или гипердуальные числа [15, 16]. Их применение, однако, приводит к слишком большому увеличению вычислительных затрат из-за необходимости вычисления «лишних» вторых производных, которые не используются в процессе решения задачи.

Для преодоления этого обстоятельства мы предлагаем использовать другой математический объект – комплексные дуальные числа, представляющие собой дуальные числа с комплексными коэффициентами [17-22]. Для снижения вычислительных затрат используются комплексные дуальные числа с векторной дуальной частью, позволяющие сократить число повторных вычислений функций и их первых производных по сравнению с комплексными дуальными числами со скалярной дуальной частью, мультикомплексными и гипердуальными числами.

Задача оптимизации рассматриваемого класса траекторий приводит к необходимости преодоления ряда вычислительных проблем. Одной из таких проблем является необходимость выбора правильного соотношения угловой дальности и длительности перелета. В случае, если эти соотношения выбраны неправильно, в результате оптимизации будет получена некоторая локально-оптимальная траектория, которая удовлетворяет всем необходимым условиям

оптимальности, но для реализации которой требуется большая тяга и больше топлива, чем на траектории с оптимальными соотношениями угловой дальности и времени перелета. Для решения задачи вычисления траектории с оптимальными соотношениями угловой дальности и длительности перелета предлагаются использовать постановку задачи оптимизации траекторий с фиксированной угловой дальностью перелета и свободным временем перелета, что позволяет избежать вычислительных трудностей, связанных с существованием множества локально-оптимальных решений с различной угловой дальностью [24-26].

Еще одной значительной трудностью при решении задачи минимизации затрат рабочего тела является негладкая зависимость невязок краевой задачи принципа максимума от вектора неизвестных параметров. Угловые точки в этой зависимости появляются при равенстве нулю локального минимума или максимума функции переключения в какой-либо точке траектории, то есть при рождении или исчезновении пассивных или активных участков траектории. Выходом из этой ситуации является использование сглаженного представления релейной функции тяги [27-31].

Наконец, проблемным остается вопрос существования решения. Введем обозначение ОТ-траектория для траектории КА с ограниченной тягой и постоянной скоростью истечения и обозначение ОТ-задача для задачи минимизации топлива на ОТ-траектории. Очевидно, что при ограниченной длительности или угловой дальности перелета, решение существует только в случае, если располагаемая величина тяги достаточно велика. В общем случае, если не удастся получить решение при попытке оптимизации ОТ-траектории каким-либо численным методом, остается открытым вопрос, по какой причине это произошло: из-за отказа численного метода или из-за того, что решения не существует. Для ответа на этот вопрос в работах [32, 33, 81] было предложено решить задачу минимизации тяги. В этих работах задача вычисления минимальной величины тяги поставлена как задача оптимального управления перелетом между двумя заданными точками с фиксированным временем и угловой дальностью. Очевидно, что траектория заданной продолжительности и угловой дальности существует только если располагаемая тяга больше или равна минимальному значению, вычисленному при решении этой задачи. Кроме того, из необходимых условий оптимальности задачи минимизации тяги следует, что двигатель должен работать непрерывно без выключений, т.е. в программе управления нет никаких разрывов. Рассматриваемая задача возможно использоваться для проверки существования решений задачи с ограниченной тягой и постоянной скоростью истечения, что открывает путь к автоматизации решения задач оптимизации таких траекторий КА.

В этой работе предлагается метод решения задачи оптимизации возмущенной многовитковой траектории с заданной угловой дальностью и свободным временем перелета.

Предлагаемый метод основан на применении принципа максимума и метода продолжения для решения краевых задач. В большинстве случаев метод сходится с нулевого начального приближения для неизвестных начальных значений сопряженных переменных, соответствующего пассивному (баллистическому) движению КА по начальной орбите. На первом этапе решается задача оптимизации траектории КА с идеально-регулируемым двигателем ограниченной мощности, после чего решение этой задачи продолжается в оптимальную траекторию с минимальной тягой и заданным удельным импульсом. По результатам решения задачи минимизации тяги делается вывод о существовании траекторий КА с двигателем, имеющим заданное значение тяги и удельного импульса. В случае, если минимальная тяга меньше заданной, оптимальная траектория КА с идеально-регулируемым двигателем продолжается в оптимальную траекторию КА с двигателем, имеющим заданные значения тяги и удельного импульса. В противном случае решения не существует, но можно найти оптимальную траекторию с увеличенной угловой дальностью перелета, повторяя процесс решения, начиная с оптимизации траектории КА с идеально-регулируемым двигателем.

Актуальность и степень разработанности темы настоящей диссертационной работы определяется следующими факторами:

- рост количества проектов с применением ЭРДУ в качестве маршевой двигательной установки (выведение и довыведение КА на геостационарную орбиту (ГСО), полеты в системе Земля-Луна для грузового обеспечения лунной пилотируемой программы, доставка к планетам Солнечной системы автоматических космических аппаратов и др.);
- необходимость решения новых прикладных и научных задач в области механики космического полета с малой тягой для повышения эффективности использования ЭРДУ;
- многообразие задач, связанных с расчетом, анализом и оптимизацией траекторий полетов с малой тягой;
- необходимость проведения оценки влияния возмущающих ускорений на оптимальную траекторию и оптимальную программу управления вектором тяги ЭРДУ;
- необходимость разработки эффективной методики решения задач оптимизации траекторий перелета с малой тягой при использовании высокоточных моделей возмущающих ускорений;
- недостаточная полнота современного состояния теории оптимальных возмущенных траекторий с малой тягой.

Основной целью диссертационной работы является повышение эффективности космических транспортных систем при реализации перспективных космических миссий с

использованием электроракетных двигательных установок. Актуальной задачей для разработки таких космических транспортных систем является оптимизация траекторий с малой тягой с учетом влияния возмущающих ускорений. В связи с этим проведена разработка универсальных подходов к решению задач оптимизации возмущенных траекторий межорбитальных, межпланетных перелетов и перелетов к Луне с использованием ЭРДУ.

Основные задачи, поставленные в диссертации:

1. Разработка нового подхода к оптимизации возмущенных траекторий с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета.
2. Разработка автоматизации процесса вычисления оптимальной траектории с двигателем ограниченной тяги и скорости истечения.
3. Разработка инструмента диагностики существования решения в задаче минимизации затрат топлива.
4. Разработка методики для оптимизации возмущенных многовитковых траекторий межорбитальных перелетов с использованием алгебры комплексных дуальных чисел.
5. Разработка эффективной методики вычисления оптимальной траектории перелета к Луне с малой тягой в рамках полной эфемеридной модели.
6. Разработка методики сквозной оптимизации траекторий перелета к Луне с идеально-регулируемым двигателем.
7. Исследования оптимальных гелиоцентрических траекторий с малой тягой, проходящих через коллинеарные точки либрации у планет отправления и прибытия.

Методологии и методы исследования. При решении задачи оптимизации траекторий космического аппарата с конечной тягой используется принцип максимума Понтрягина и метод продолжения (гомотопии). Принцип максимума редуцирует задачу оптимального управления к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод гомотопии редуцирует краевую задачу принципа максимума к задаче Коши. При использовании принципа максимума и метода продолжения (или любого другого метода решения краевых задач, требующих вычисления производных) необходимо вычислить смешанные производные второго порядка от правых частей дифференциальных уравнений, включающих возмущающие ускорения, по фазовым переменным и неизвестным параметрам краевой задачи. Для вычисления требуемых первых и вторых производных в диссертационной работе применяется метод, основанный на использовании комплексных дуальных чисел. При решении задачи сквозной оптимизации траектории перелета к Луне требуется перевод сопряженных переменных из одной системы координат в другую с использованием канонического преобразования. Для моделирования возмущенных траекторий используются методы численного интегрирования уравнений возмущенного движения КА. Для оценки

эффективности использования оптимальных гелиоцентрических траекторий между точками либрации по сравнению с оптимальными траекториями, полученными традиционными методами, используется метод точечных сфер действия.

Объектом исследования являются траектории управляемого возмущенного движения центра масс КА с ЭРДУ.

Предметом исследования являются математические модели оптимального возмущенного движения КА с ЭРДУ.

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием строгих математических методов и известных фундаментальных подходов, например принципа максимума и метода продолжения, при решении задачи оптимизации траекторий КА. Решения, полученных с помощью разработанных в этой диссертационной работе методов, сравнивались с известными результатами других авторов, включающих параметры оптимальных траекторий КА с ЭРДУ с учетом возмущающих ускорений от притяжения удаленных небесных тел и гармоник геопотенциала. Кроме того, было проведено тестирование библиотеки программ для вычислений в комплексной дуальной области и преобразований между различными системами координатами.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

- разработан новый метод оптимизации возмущенных траекторий с малой тягой на основе использования комплексных дуальных чисел для автоматического вычисления производных при использовании высокоточных моделей возмущающих ускорений;
- рассмотрен новый подход к оптимизации многовитковых траекторий КА с ЭРДУ с использованием угловой переменной – вспомогательной долготы – в качестве новой независимой переменной вместо времени;
- предложен процесс автоматизации вычисления оптимальной траектории с двигателем с заданной тягой и удельным импульсом, не требующий задания начальных приближений для неизвестных параметров краевой задачи;
- предложен подход к решению задачи сквозной оптимизации траекторий перелета КА с малой тягой между околоземной и окололунной орбитами на базе использования канонического преобразования;
- предложен новый подход к оптимизации траекторий с малой тягой с использованием коллинеарных точек для стыковки планетоцентрических и гелиоцентрических участков траектории;

- проведен качественный и количественный анализ полученных с помощью разработанной методики решений возмущенных задач оптимизации межорбитального и межпланетного перелетов, а также перелета к Луне с малой тягой.

Практическая значимость настоящей работы состоит в следующем:

- разработана и теоретически обоснована методика решения задачи оптимизации межорбитальных перелетов с малой тягой с учетом влияния возмущающих ускорений, имеющая важное практическое значение для реализации высокоэкономичных схем выведения космических аппаратов увеличенной массы на высокие целевые орбиты с помощью электроракетных двигательных установок;
- разработана эффективная методика оптимизации траекторий с малой тягой к окололунным орбитам и точкам либрации системы Земля-Луна для реализации эффективных космических транспортных операций между околоземной и окололунной орбитами с помощью космических буксиров с ЭРДУ с целью обеспечения перспективных лунных пилотируемых программ, которые требуют значительных грузопотоков в системе Земля-Луна;
- разработана методика оптимизации возмущенной траектории межпланетного перелета между точками либрации с малой тягой в рамках полной эфемеридной модели движения небесных тел;
- на основе разработанных численных методов разработан комплекс программно-математического обеспечения для оптимизации межпланетных и межорбитальных траекторий, а также траекторий перелета к Луне.

Разработанный метод и программное обеспечение могут применяться для проектно-баллистического анализа и оперативного планирования перспективных космических миссий.

Основные научные положения, выносимые на защиту:

- методика для оптимизации возмущенных траекторий космических аппаратов на основе использования принципа максимума, метода продолжения, автоматического дифференцирования с использованием комплексных дуальных чисел, использования вспомогательной долготы в качестве независимой переменной и постановки задачи с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета;
- методика для оптимизации траектории перелета к Луне КА с идеально-регулируемым двигателем, с минимальной тягой и с ограниченной тягой со стыковкой в точке либрации EML_1 системы Земля-Луна;

- методика для сквозной оптимизации траектории перелета к Луне КА с идеально-регулируемым двигателем с оптимальной точкой стыковки геоцентрического и селеноцентрического участков траектории;
- методика для оптимизации возмущенных траекторий межпланетного перелета КА с идеально-регулируемым двигателем и с ограниченной тягой с использованием метода продолжения по гравитационному параметру;
- результаты численного анализа полученных оптимальных решений возмущенных задач при рассмотрении различных типов многовитковых межорбитальных перелетов КА с ЭРДУ (между высокими эллиптическими орбитами, геопереходной орбитой и ГСО, околокруговыми низкими околоземными орбитами), межпланетных перелетов к разным планетам Солнечной системы (между точками либрации L_2 системы Земля-Солнце и L_1 системы планета-Солнце) и перелетов к Луне (между околоземной и окололунной орбитами);
- библиотека программ, позволяющая вычислять первые и смешанные вторые производные вещественных функций нескольких переменных с точностью, близкой к точности вычисления функций и используемая в составе разработанного программного обеспечения для оптимизации возмущенных траекторий космических аппаратов.

Личный вклад и публикации. Все результаты, приведенные в диссертации, получены лично автором. Основные результаты опубликованы в 4 работах [22, 23, 84, 122] – в изданиях из списка ВАК Минобрнауки России или входящих в международные реферативные базы данных (МРБД) и 3 работах [21, 108, 123] – в иностранных рецензируемых изданиях.

Апробация работы. Полученные в диссертационной работе результаты обсуждались на российских и международных конференциях, а также обсуждались в рамках научных семинаров, включая:

- XLV Академические чтения по космонавтике посвященные памяти академика С.П. Королёва, МГТУ, Москва, апрель, 2021
- 8th International Conference on Astrodynamics Tools and Techniques (ICATT), Online, июнь, 2021
- 72nd International Astronautical Congress (IAC), Dubai, октябрь, 2021
- XLVI Академические чтения по космонавтике посвященные памяти академика С.П. Королёва, МГТУ, Москва, Январь, 2022
- 73rd International Astronautical Congress (IAC), Paris, сентябрь, 2022
- 57-е научные чтения памяти К.Э. Циолковского, Калуга, сентябрь 2022

- VI Симпозиум «Современные проблемы создания российских малых космических аппаратов и их использования для решения социально-экономических задач», Калуга, сентябрь, 2022
- Конференция «Проблемы и перспективы космических миссий с электрореактивными двигателями (КМЭРД)», Махачкала, октябрь, 2022
- XLVII Академические чтения по космонавтике посвященные памяти академика С.П. Королёва, МГТУ, Москва, Январь, 2023
- семинар Механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова «Механика космического полета им. В.А. Егорова», Москва, ноябрь, 2021
- семинар кафедры Космических систем и ракетостроения МАИ, Москва, апрель 2023

Структура и объем работы. Объем работы составляет 195 страниц (основная часть работы - 185 страницы, приложение – 10 страниц). Работа содержит 71 рисунка и 30 таблиц.

1 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ

1.1 Математическая модель движения многовиткового перелета космического аппарата с электроракетной двигательной установкой с использованием угловой независимой переменной

Рассмотрим математическую модель для применения в методе оптимизации многовитковой траектории КА с конечной тягой с учетом воздействия возмущающих ускорений. Использование декартовых координат для оптимизации многовитковых траекторий с малой тягой не вполне практично, так как координаты и компоненты скорости КА являются короткопериодическими знакопеременными функциями, что приводит к необходимости уменьшения шага численного интегрирования, соответствующему увеличению вычислительной трудоемкости и росту глобальной ошибки интегрирования на больших интервалах времени. Использование орбитальных элементов позволяет значительно сократить время вычислений и повысить точность численного интегрирования. Мы используем модифицированные равноденственные орбитальные элементы (МОО) [34], не имеющие (в отличие от классических кеплеровских элементов) особенностей в окрестности круговых и экваториальных орбит. Дифференциальные уравнения возмущенного движения КА с конечной тягой в модифицированных равноденственных элементах p, e_x, e_y, i_x, i_y, L имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{2p}{q} a_t, \\
 \frac{de_x}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\sin L \cdot a_r + \frac{(q+1)\cos L + e_x}{q} a_t - \frac{e_y \xi}{q} a_n \right], \\
 \frac{de_y}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\cos L \cdot a_r + \frac{(q+1)\sin L + e_y}{q} a_t + \frac{e_x \xi}{q} a_n \right], \\
 \frac{di_x}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{s^2}{2q} \cos L \cdot a_n, \quad \frac{di_y}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{s^2}{2q} \sin L \cdot a_n, \\
 \frac{dL}{dt} &= \sqrt{\mu p} \left(\frac{q}{p} \right)^2 + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\xi}{q} \cdot a_n, \quad \frac{dm}{dt} = -\delta \frac{T}{c},
 \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

где p – фокальный параметр, $e_x = e \cos(\omega + \Omega)$, $e_y = e \sin(\omega + \Omega)$ – элементы вектора эксцентриситета, $i_x = \operatorname{tg} \frac{i}{2} \cos \Omega$, $i_y = \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin \Omega$ – элементы вектора наклона,

$L = v + \omega + \Omega$ – истинная долгота, e – эксцентриситет, i – наклонение, ω – аргумент перицентра, Ω – долгота восходящего узла, v – истинная аномалия, $s^2 = 1 + i_x^2 + i_y^2$, $q = 1 + e_x \cos L + e_y \sin L$, $\xi = i_x \sin L - i_y \cos L$, μ – гравитационный параметр центрального небесного тела, m – масса КА, T – тяга двигательной установки, c – скорость истечения двигательной установки, δ – релейная функция тяги ($\delta = 1$ при включенной двигательной установке и $\delta = 0$ при выключенной двигательной установке), a_t , a_r , a_n – тангенциальная, радиальная и бинормальная составляющие вектора ускорения (суммы реактивного и возмущающего ускорений) соответственно, которые определяются следующими соотношениями:

$$a_t = \delta \frac{T}{m} \cos \vartheta \cos \psi + a_{pt}, a_r = \delta \frac{T}{m} \sin \vartheta \cos \psi + a_{pr}, a_n = \delta \frac{T}{m} \sin \psi + a_{pn} \quad (1.1.2)$$

где ϑ – угол тангажа (угол между проекцией вектора тяги на орбитальную плоскость и тангенциальным направлением), ψ – угол рысканья (угол между вектором тяги и орбитальной плоскостью), a_{pt} , a_{pr} , a_{pn} – компоненты возмущающего ускорения.

Во многих работах, например в [21, 41, 42, 43], показывается существование множества локальных экстремумов решения задачи оптимизации многовитковых траекторий с малой тягой с фиксированным временем перелета, которые отличаются друг от друга числом витков. Значение функционала в разных локальных экстремумах может быть сильно отличаться. Выполнение необходимых условий оптимальности никоим образом не гарантирует того, что получено наилучшее решение. Для вычисления наилучшего решения в многоэкстремальной задаче необходимо найти все локальные экстремумы и выбрать из них лучшее. В работах [7, 27, 35, 36], для вычисления оптимальных траекторий встречи с фиксированной длительностью и угловой дальностью, предложен метод продолжения по гравитационному параметру. Это оказывается весьма трудоемким при большом числе витков и больших вычислительных затратах на вычисление каждой оптимальной траектории.

Кроме того, существование множества локальных экстремалей со своими областями притяжения в пространстве неизвестных параметров краевой задачи принципа максимума снижает устойчивость численных методов, так как на границах этих областей притяжения вырождается матрица частных производных от невязок краевой задачи по ее неизвестным параметрам. Это является одной из причин отказов типичных численных методов, потому что матрица частных производных от невязок краевой задачи по ее неизвестным переменным вырождается на границах областей притяжения отдельных локальных экстремумов. Таким образом, для традиционного подхода к оптимизации траектории существует множество

локальных экстремумов, что приводит к проблеме выбора наилучшего решения и дополнительным вычислительным сложностям при решении задачи.

Чтобы преодолеть эту трудность, в диссертационной работе используется постановка задачи с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета. В такой постановке задачи, для каждой заданной угловой дальности заданного типа оптимальной траектории существует только одно оптимальное значение времени перелета, поэтому проблема оптимизации соотношения угловой дальности и времени перелета решается автоматически. Применение угловой независимой переменной позволяет практически снять ограничение на максимальную угловую дальность оптимизируемых траекторий.

В задаче перелета с малой тягой между некомпланарными эллиптической и круговой орбитами ранее обнаружено существование двух типов траекторий, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности, которые в работе [37] названы С- и Е-решениями. При угле между плоскостями начальной и конечной орбитами, меньшем критического, существует только решение С-типа, в противном случае существуют оба типа решения. Анализ задачи оптимального быстрогодействия показывает, что для заданной длительности перелета для каждого типа траекторий, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности, может существовать множество решений с разной угловой дальностью. На рисунке 1 представлена характерная зависимость минимального времени перелета от его угловой дальности для С-решения (аналогичные зависимости для других перелетов были приведены в работах [28, 38]). Видно, что глобальный минимум длительности перелета (98.316 суток) достигается при угловой дальности 83.646 витков, а при длительности перелета 98.45 суток (пунктирная линия на рисунке 1) существует 10 различных решений с разной угловой дальностью – от 81.5 до 85.8 витков.



Рисунок 1.1.1 – Типичная зависимость минимальной длительности перелета от его угловой дальности

График на рисунке 1 получен для задачи минимизации времени перелета между начальной эллиптической орбитой, имеющей высоту перигея 5000 км, высоту апогея 80000 км, наклонение 25° , нулевые значения аргумента перигея и долготы восходящего узла и геостационарной орбитой (круговой орбитой высотой 35793 км с нулевым наклонением). Все высоты здесь и далее приведены относительно среднего радиуса Земли 6371 км, гравитационный параметр Земли принят равным $398600.436 \text{ км}^3/\text{с}^2$. Начальная точка траектории имеет истинную долготу 200° , начальная масса КА принята равной 2500 кг, тяга двигательной установки – 0.56 Н, удельный импульс тяги – 1640 с.

Из рисунка 1 видно, что для фиксированной угловой дальности существует единственное решение с минимальным временем перелета. Можно предположить, что качественно картина не изменится и для задачи на минимум затрат топлива, по крайней мере при величине тяги, близкой к минимальной: возможно существование множества оптимальных решений с разной угловой дальностью при фиксированном времени перелета и существует единственное оптимальное решение данного типа (например, E- или C-) с фиксированной угловой дальностью и свободным (оптимальным) временем перелета.

Из приведенного анализа следует, что решение задачи оптимизации перелета с фиксированной угловой дальностью и свободной длительностью перелета должно быть проще решения задачи с оптимальной угловой дальностью хотя бы потому, что в первом случае, в отличие от второго, существует не более одного решения для заданного семейства (например, E- или C-) экстремалей. В связи с этим логично использовать в качестве независимой переменной вместо времени какую-либо величину, связанную с угловым положением КА на орбите, например, истинную долготу L . Такой прием использовался в целом ряде работ, например, [24, 25]. Если мы используем L в качестве независимой переменной, в знаменателе правых частей дифференциальных уравнений движения появляется управления (слагаемые с реактивным ускорением). В связи с этим, при максимизации функции Понtryгина по управлению получаются очень сложные выражения для оптимального управления. Кроме того, возможно нарушение монотонности изменения этой независимой переменной (истинной долготы) при достаточно больших значениях реактивного или возмущающего ускорения. Вероятно, первый из этих недостатков, является одной из причин использования прямых методов оптимизации в [24, 25]. В статье [28] предложено разбить истинную долготу на две части: вспомогательную долготу K и отклонение истинной долготы от вспомогательной L_K , причем в качестве новой независимой переменной рассматривается именно вспомогательная долгота K . Такой прием позволяет избежать обеих указанных проблем. Далее будет показано, что для случая, когда действующие на КА внешние силы не зависят от времени, оптимизация траекторий с фиксированной угловой дальностью с использованием дифференциальных

уравнений движения с K в качестве независимой переменной автоматически приводит к выполнению необходимого условия оптимальности по длительности перелета [28]. Использование вспомогательной долготы в качестве независимой переменной оказалось крайне эффективным, позволяя рассчитывать оптимальные траектории с любой представляющей практический интерес угловой дальностью. Независимая переменная, совпадающая с K , использовалась в ряде более ранних работ для оптимизации осредненных траекторий, например в [39, 40]. Однако в этих работах использовалась малость L_K при рассмотрении траекторий с очень большим числом витков и очень малой величиной реактивного ускорения, в результате чего делался вывод о малости ошибки, связанной с заменой L на K по сравнению с ошибками метода осреднения и принималось допущение, что $L_K(t) \equiv 0$. Такой подход обоснован для оптимизации осредненных траекторий, но не может быть использован для неосредненных задач, особенно при достаточно малой угловой дальности перелета и достаточно большом угловом ускорении. Даже при малом реактивном ускорении и большом числе витков такой подход может привести к большой ошибке при вычислении истинной долготы КА. В нашем исследовании, в отличие от [39, 40] и других аналогичных работ, переход к новой независимой переменной K не приводит к потере точности математической модели. В результате существенно изменяются необходимые условия оптимальности, а предлагаемый подход позволяет изучать траектории без ограничений на величину реактивного ускорения и угловую дальность перелета.

Итак, введем в рассмотрение вспомогательную долготу K , удовлетворяющую следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{dK}{dt} = \sqrt{\mu p} \left(\frac{q}{p} \right)^2, \quad (1.1.3)$$

и отклонение истинной долготы от вспомогательной $L_K = L - K$, которое, в соответствии с (1.1.1) и (1.1.3), подчиняется дифференциальному уравнению

$$\frac{dL_K}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\xi}{q} a_n. \quad (1.1.4)$$

Заменяя в системе (1.1.1) шестое уравнение на (1.1.3) и (1.1.4), получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{2p}{q} a_t, \\
\frac{de_x}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\sin L \cdot a_r + \frac{(q+1)\cos L + e_x}{q} a_t - \frac{e_y \xi}{q} a_n \right], \\
\frac{de_y}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\cos L \cdot a_r + \frac{(q+1)\sin L + e_y}{q} a_t + \frac{e_x \xi}{q} a_n \right], \\
\frac{di_x}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{s^2}{2q} \cos L \cdot a_n, \quad \frac{di_y}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{s^2}{2q} \sin L \cdot a_n, \\
\frac{dL_K}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\xi}{q} a_n, \quad \frac{dK}{dt} = \sqrt{\mu p} \left(\frac{q}{p} \right)^2, \quad \frac{dm}{dt} = -\delta \frac{T}{c}.
\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

В системе (1.1.5) истинная долгота L во всех уравнениях заменяется на ее выражение через вспомогательную долготу K и отклонение истинной долготы L_K : $L = K + L_K$. Если величина реактивного ускорения мала, то уравнения движения (1.1.5) сводятся к системе дифференциальных уравнений с 7 медленными переменными p , e_x , e_y , i_x , i_y , L_K , m и одной быстрой K .

В случае, если возмущающие ускорения не зависят от времени, правые части системы (1.1.5) также не зависят от времени. Правая часть дифференциального уравнения для K положительна для любых значений фазовых координат при $p > 0$. Таким образом, если исключить случай вырождения оскулирующей орбиты в отрезок прямой линии (случай $p = 0$), можно провести замену независимой переменной t на K с использованием соотношения:

$$dK = \frac{dK}{dt} dt \Rightarrow \frac{d}{dK} = \frac{dt}{dK} \frac{d}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left(\frac{p}{q} \right)^2 \frac{d}{dt}. \tag{1.1.6}$$

В итоге получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dK} &= \frac{2p^3}{\mu q^3} a_t, \\
\frac{de_x}{dK} &= \frac{p^2}{\mu q^2} \left[\sin L \cdot a_r + \frac{(q+1)\cos L + e_x}{q} a_t - \frac{e_y \xi}{q} a_n \right], \\
\frac{de_y}{dK} &= \frac{p^2}{\mu q^2} \left[-\cos L \cdot a_r + \frac{(q+1)\sin L + e_y}{q} a_t + \frac{e_x \xi}{q} a_n \right], \\
\frac{di_x}{dK} &= \frac{p^2 s^2}{2\mu q^3} \cos L \cdot a_n, \quad \frac{di_y}{dK} = \frac{p^2 s^2}{2\mu q^3} \sin L \cdot a_n, \quad \frac{dL_K}{dK} = \frac{p^2}{\mu q^3} \xi \cdot a_n, \\
\frac{dm}{dK} &= -\frac{\delta}{\sqrt{\mu p}} \left(\frac{p}{q} \right)^2 \frac{T}{c}, \quad \frac{dt}{dK} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left(\frac{p}{q} \right)^2.
\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

При использовании L в качестве независимой переменной компоненты реактивного ускорения появляются и в числителях, и в знаменателях правых частей дифференциальных

уравнений, что приводит к очень громоздкому выражению для оптимального управления при использовании принципа максимума. Использование в качестве независимой переменной K вместо L позволяет существенно упростить выражения для оптимального управления, следующие из принципа максимума.

Далее ограничимся рассмотрением задач перелета с фиксированной угловой дальностью по истинной долготе ΔL . Параметры начальной орбиты будем обозначать нижним индексом «0», а конечной – нижним индексом «f». Рассмотрим перелет из точки начальной орбиты с истинной долготой L_0 с угловой дальностью ΔL . В этом случае конечная точка траектории будет иметь истинную долготу $L_f = L_0 + \Delta L$. Введем обозначение $\mathbf{x} = (p, e_x, e_y, i_x, i_y)^T$. В этом случае краевые условия для свободного времени перелета принимают вид:

$$L_K(K_0) + K_0 = L_0, \mathbf{x}(K_0) = \mathbf{x}_0(L_0), m(K_0) = m_0, t(K_0) = t_0, \quad (1.1.8)$$

$$L_K(K_f) + K_f = L_f, \mathbf{x}(K_f) = \mathbf{x}_f(L_f), \quad (1.1.9)$$

где K_0 и K_f – начальное и конечное значения вспомогательной долготы соответственно, t_0 – начальное время перелета. Так как L_K входит в уравнения движения (1.1.6) только в виде суммы $L = L_K + K$, без потери общности можно положить $K_0 = 0$, а начальные условия (1.1.8) – переписать в виде

$$L_K(0) = L_0, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0(L_0), m(0) = m_0, t(0) = t_0. \quad (1.1.10)$$

В случае, если время перелета Δt задано, к конечным условиям (1.1.9) добавляется условие

$$t(K_f) = t_f, \quad (1.1.11)$$

где $t_f = t_0 + \Delta t$ – конечное время перелета.

1.2 Математическая модель возмущенного гелиоцентрического движения космического аппарата с электроракетной двигательной установкой

Для анализа возмущенного гелиоцентрического движения КА с ЭРДУ используются уравнения движения в гелиоцентрической инерциальной декартовой системе координат в виде:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Omega_r + \delta \frac{T}{m} \mathbf{e}_T, \\ \frac{dm}{dt} = -\delta \frac{T}{c}, \end{cases} \quad (1.2.1)$$

где $\Omega = \Omega_0 + \Omega_p$ – силовая функция ($\Omega_0 = \frac{\mu_s}{r}$ – основная часть силовой функции, связанная

с центральным гравитационным полем (Солнцем), $\Omega_p = \sum_{j=1}^2 \mu_j \left[\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} \right]$ –

возмущающая часть силовой функции, связанная с притяжением удаленных небесных тел (планет)), \mathbf{r} – вектор положения КА, \mathbf{v} – вектор скорости КА, μ_s – гравитационный параметр Солнца, $r = |\mathbf{r}|$, \mathbf{r}_j , μ_j – векторы положения и гравитационные параметры Земли ($j = 1$) и целевой планеты ($j = 2$), \mathbf{e}_T – единичный вектор в направлении тяги. Векторы положения и скорости планеты вычисляются с помощью эфемеридного обеспечения JPL DE [60].

В качестве инерциальной декартовой системы координат использовалась гелиоцентрическая эклиптическая система J2000. При расчете гелиоцентрического движения КА плоскость инерциальной системы координат совпадает с плоскостью эклиптики в эпоху 1.5 января 2000 г. При этом осуществляется переход от экваториальной системы координат к эклиптической системе с использованием угла ε наклона плоскости среднего геоэкватора к эклиптике в эпоху.

Краевые условия для межпланетного перелета КА могут быть представлены в виде:

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, m(t_0) = m_0, \quad (1.2.2)$$

$$\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_0, \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_0. \quad (1.2.3)$$

1.3 Заключение по разделу

В этом разделе предложено использовать новую угловую переменную – вспомогательную долготу – в качестве независимой переменной в задаче оптимизации возмущенных траекторий космических аппаратов с малой тягой. Показаны преимущества использования этой переменной для решения задачи оптимизации траектории с фиксированной угловой дальностью и свободным (оптимальным) временем перелета. Ранее полученные численные результаты позволили сформулировать гипотезу, что в задачах оптимизации траекторий с фиксированной угловой дальностью существует единственное

оптимальное время перелета для каждого типа оптимальной траектории, в отличие от существования многих локально-оптимальных угловых дальностей при фиксированном времени перелета. Это свойство позволяет решить достаточно трудную задачу выбора оптимального соотношения между угловой дальностью и временем перелета. Уравнения возмущенного движения космического аппарата представлены в модифицированных равноденственных орбитальных элементах с угловой независимой переменной. Приведены уравнения гелиоцентрического движения КА с ЭРДУ в инерциальной декартовой системе координат с учетом возмущений от притяжения удаленных небесных тел.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИЙ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ

2.1 Математическая постановка задачи оптимизации возмущенных траекторий космического аппарата с двигателем ограниченной тяги

Рассмотрим задачу оптимального управления динамической системой, описываемой дифференциальными уравнениями (1.1.7) с целью ее перевода из состояния (1.1.10) в состояние (1.1.9) с минимальными затратами топлива $m_p = m(K_0) - m(K_f)$. Очевидно, что для решения этой задачи требуется найти функции (программы) $\delta(K)$, $\vartheta(K)$ и $\psi(K)$, минимизирующие функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \delta \frac{T}{m} dt = \int_{K_0}^{K_f} \delta \frac{T}{q^2 m} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} dK. \quad (2.1.1)$$

В общем случае оптимальная ОТ-траектория содержит неизвестное заранее число включений и выключений двигателя.

Функция Понтрягина рассматриваемой задачи оптимального управления имеет следующий вид:

$$H = H_T + H_p + H_t, \quad (2.1.2)$$

где

$$H_T = \delta T k_1 \cdot \left[\frac{k_2}{m} \cdot (A_r \sin \vartheta \cos \psi + A_t \cos \vartheta \cos \psi + A_n \sin \psi) - \frac{p_m + 1}{c} \right], \quad (2.1.3)$$

$$H_p = k_1 k_2 \cdot (A_r a_{pr} + A_t a_{pt} + A_n a_{pn}), \quad (2.1.4)$$

$$H_t = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left(\frac{p}{q} \right)^2 p_t \quad (2.1.5)$$

– зависящие от тяги, возмущающих ускорений и сопряженной к времени переменной p_t части функции Понтрягина соответственно,

$$\begin{aligned} A_t &= 2p \cdot p_p + [(q+1)\cos L + e_x] p_{ex} + [(q+1)\sin L + e_y] p_{ey}, \\ A_r &= q \cdot (\sin L \cdot p_{ex} - \cos L \cdot p_{ey}), \\ A_n &= \xi \cdot (-e_y p_{ex} + e_x p_{ey} + p_{LK}) + \frac{S^2}{2} (\cos L \cdot p_{ix} + \sin L \cdot p_{iy}), \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

$p_p, p_{ex}, p_{ey}, p_{ix}, p_{iy}, p_{LK}, p_m, p_t$ – переменные, сопряженные к соответствующим фазовым

переменным системы $p, e_x, e_y, i_x, i_y, L_K, m, t$, $k_1 = \frac{1}{q^2} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}}$, $k_2 = \frac{1}{q} \sqrt{\frac{p}{\mu}}$.

Очевидно, что только слагаемое H_T (2.1.3) функции Понтрягина (2.1.2) явно зависит от управления δ, ϑ, ψ . Максимизируя (2.1.3) по δ, ϑ, ψ , получим выражения для оптимального управления:

$$\sin \vartheta = A_r / A_n, \cos \vartheta = A_l / A_n, \sin \psi = A_n / A, \cos \psi = A_r / A, \quad (2.1.7)$$

$$\delta = (1 + \text{sign } S) / 2, S \neq 0; \delta \in [0; 1], S = 0, \quad (2.1.8)$$

где $A_n = \sqrt{A_r^2 + A_l^2}$, $A = \sqrt{A_r^2 + A_l^2 + A_n^2}$, $S = \frac{k_2 A}{m} - \frac{p_m + 1}{c}$ – функция переключения.

Подставляя выражения для оптимального управления (2.1.7), (2.1.8) в (2.1.3), получим следующее выражение для H_T :

$$H_T = \delta T k_1 \cdot \left[\frac{k_2 A}{m} - \frac{p_m + 1}{c} \right], \quad (2.1.9)$$

подставив которое в (2.1.2) вместо (2.1.3) получим выражение для оптимального гамильтониана H .

Уравнения оптимального движения примут вид

$$\frac{d\mathbf{x}_1}{dK} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_{x1}}, \frac{d\mathbf{p}_{x1}}{dK} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_1}, \quad (2.1.10)$$

где $\mathbf{x}_1^T = (p, e_x, e_y, i_x, i_y, L_K, m, t)$ – фазовый вектор, $\mathbf{p}_{x1}^T = (p_p, p_{ex}, p_{ey}, p_{ix}, p_{iy}, p_{LK}, p_m, p_t)$ – вектор сопряженных переменных.

Для решения рассматриваемой задачи оптимизации траектории необходимо определить 8 начальных значений сопряженных переменных \mathbf{p}_{x1} и конечное значение вспомогательной долготы K_f (всего 9 неизвестных переменных). Краевые условия (1.1.9), (1.1.10) определяют только 6 уравнений для определения этих 9 неизвестных переменных и должны быть дополнены тремя условиями трансверсальности. Для их вывода запишем конечную функцию Лагранжа в следующем виде:

$$\begin{aligned} l = & (L_K(K_0) + K_0 - L_0) \lambda_L^0 + (L_K(K_f) + K_f - L_f) \lambda_L^f + \\ & + (\mathbf{x}(K_0) - \mathbf{x}_0(L_0))^T \lambda_x^0 + (\mathbf{x}(K_f) - \mathbf{x}_f(L_f))^T \lambda_x^f + \\ & + (m(K_0) - m_0) \lambda_m^0 + (t(K_0) - t_0) \lambda_t^0, \end{aligned}$$

где $\lambda_L^0, \lambda_L^f, \lambda_x^0, \lambda_x^f, \lambda_m^0, \lambda_t^0$ – неопределенные множители Лагранжа. Для такой функции Лагранжа условия трансверсальности примут вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_x(K_0) &= \frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}(K_0)} = \lambda_x^0, & \mathbf{p}_x(K_f) &= -\frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}(K_f)} = -\lambda_x^f, \\
p_{LK}(K_0) &= \frac{\partial l}{\partial L_K(K_0)} = \lambda_L^0, & p_{LK}(K_f) &= -\frac{\partial l}{\partial L_K(K_f)} = -\lambda_L^f, \\
p_m(K_0) &= \frac{\partial l}{\partial m(K_0)} = \lambda_m^0, & p_m(K_f) &= -\frac{\partial l}{\partial m(K_f)} = 0, \\
p_t(K_0) &= \frac{\partial l}{\partial t(K_0)} = \lambda_t^0, & p_t(K_f) &= -\frac{\partial l}{\partial t(K_f)} = 0, \\
H(K_0) &= -\frac{\partial l}{\partial K_0} = -\lambda_L^0, & H(K_f) &= \frac{\partial l}{\partial K_f} = \lambda_L^f,
\end{aligned}$$

где $\mathbf{p}_x = (p_p, p_{ex}, p_{ey}, p_{ix}, p_{iy})^T$.

Из этих условий следуют соотношения $p_m(K_f) = 0$, $p_t(K_f) = 0$, $p_{LK}(K_0) + H(K_0) = 0$ и $p_{LK}(K_f) + H(K_f) = 0$. Покажем, что $p_{LK} + H$ является первым интегралом системы (2.1.10). В самом деле, $\frac{dp_{LK}}{dK} = -\frac{\partial H}{\partial L_K} = -\frac{\partial H}{\partial K} = -\frac{dH}{dK}$, так как K и L_K входят в гамильтониан (2.1.2) только в виде суммы $K + L_K$ и с учетом известных свойств неавтономных гамильтоновых систем. Отсюда следует, что $d(p_{LK} + H)/dK = 0$, то есть $p_{LK} + H$ – первый интеграл. Следовательно, равенство нулю $p_{LK} + H$ при каком-либо значении K влечет за собой тождественное равенство нулю этого выражения на всей траектории. С учетом принятого равенства $K_0 = 0$, дополнительное краевое условие сводится к виду $p_{LK}(0) + H(0) = 0$.

Это уравнение можно использовать для вычисления неизвестного значения $p_{LK}(0)$, что позволяет уменьшить число неизвестных параметров краевой задачи до 8. Окончательно, краевые условия для рассматриваемой задачи можно записать в виде:

$$L_K(0) = L_0, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0(L_0), m(0) = m_0, t(0) = t_0, p_{LK}(0) + H(0) = 0, \quad (2.1.11)$$

$$L_K(K_f) + K_f = L_f, \mathbf{x}(K_f) = \mathbf{x}_f(L_f), p_m(K_f) = 0, p_t(K_f) = 0, \quad (2.1.12)$$

причем для решения краевой задачи принципа максимума (2.1.10), (2.1.11), (2.1.12) требуется определить 8 компонент вектора $\mathbf{p}_{x1}(0)$ и конечную вспомогательную долготу K_f при которых удовлетворяется последнее уравнение в (2.1.11) и 8 уравнений (2.1.12).

Последнее уравнение в (2.1.11), из-за зависимости гамильтониана от p_{LK} , сводится к квадратному уравнению относительно $p_{LK}(0)$, решение которого имеет следующий вид:

$$p_{LK}(0) = \frac{-b_0 \pm \sqrt{b_0^2 - 4a_0c_0}}{2a_0}, \quad (2.1.13)$$

где

$$\begin{aligned}
a_0 &= a_1^2 \xi^2 - (1 + a_2^2), b_0 = 2 \left[a_1^2 A_{n0} \xi - H_{00} \cdot (1 + a_2) \right], c_0 = a_1^2 (A_r^2 + A_t^2 + A_{n0}^2) - H_{00}^2, \\
a_1 &= \delta T \frac{k_1 k_2}{m}, a_2 = k_1 k_2 \xi a_{pm}, H_{00} = -\delta T k_1 \frac{p_m + 1}{c} + k_1 k_2 \cdot (A_r a_{pr} + A_t a_{pt} + A_{n0} a_{pn}) + H_t, \\
A_{n0} &= \xi \cdot (-e_y p_{ex} + e_x p_{ey}) + \frac{s^2}{2} (\cos L \cdot p_{ix} + \sin L \cdot p_{iy}).
\end{aligned}$$

Это квадратное уравнение может быть решено при заданных начальных условиях и текущем значении других элементов $\mathbf{p}_{x1}(0)$, после чего $p_{LK}(0)$ вместе с последним уравнением (2.1.11) могут быть исключены из краевой задачи, снижая ее порядок до 8. Отметим, что только одно из двух решений квадратного уравнения для $p_{LK}(0)$ является решением этой краевой задачи.

Следует отметить, что при оптимизации невозмущенных траекторий или в случае, когда возмущающие ускорения не зависят явно от времени, дифференциальное уравнение для времени может быть исключено из системы дифференциальных уравнений оптимального движения вместе с краевыми условиями для времени и сопряженной к времени переменной. В этом случае гамильтониан не зависит явно от времени, поэтому $dp_t/dK \equiv 0$ и $p_t(K) \equiv 0$ в силу последнего уравнения (2.1.12). В этом случае необходимое условие оптимальности времени перелета (условие трансверсальности) выполняется автоматически.

При необходимости оптимизации начальной истинной долготы L_0 для вывода условий трансверсальности используем конечную функцию Лагранжа в следующем виде [43]:

$$\begin{aligned}
l &= (L_K(K_0) + K_0 - L_0) \lambda_L^0 + (L_K(K_f) + K_f - L_f) \lambda_L^f + (L_K(K_f) + K_f - L_K(K_0) - K_0 - \Delta L) \lambda_L + \\
&+ (\mathbf{x}(K_0) - \mathbf{x}_0(L_0))^T \boldsymbol{\lambda}_x^0 + (\mathbf{x}(K_f) - \mathbf{x}_f(L_f))^T \boldsymbol{\lambda}_x^f,
\end{aligned}$$

где λ_L – дополнительный неопределенный множитель Лагранжа. Условия трансверсальности при использовании этой конечной функции примут вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_x(K_0) &= \frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}(K_0)} = \boldsymbol{\lambda}_x^0, \quad \mathbf{p}_x(K_f) = -\frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}(K_f)} = -\boldsymbol{\lambda}_x^f, \\
p_{LK}(K_0) &= \frac{\partial l}{\partial L_K(K_0)} = \lambda_L^0, \quad p_{LK}(K_f) = -\frac{\partial l}{\partial L_K(K_0)} = -\lambda_L^f, \\
H(K_0) &= -\frac{\partial l}{\partial K_0} = -\lambda_L^0, \quad H(K_f) = \frac{\partial l}{\partial K_f} = \lambda_L^f, \\
\frac{\partial l}{\partial L_0} &= -\lambda_L - \lambda_L^0 - \left(\frac{d\mathbf{x}_0(L_0)}{dL_0} \right)^T \boldsymbol{\lambda}_x^0 = 0, \quad \frac{\partial l}{\partial L_f} = \lambda_L - \lambda_L^f - \left(\frac{d\mathbf{x}_f(L_f)}{dL_f} \right)^T \boldsymbol{\lambda}_x^f = 0.
\end{aligned}$$

Из этих условий следуют соотношения $p_{LK}(K_0) + H(K_0) = 0$, $p_{LK}(K_f) + H(K_f) = 0$ и

$$p_{LK}(K_f) + \left(\frac{d\mathbf{x}_f(L_f)}{dL_f} \right)^T \mathbf{p}_x(K_f) - p_{LK}(K_0) - \left(\frac{d\mathbf{x}_0(L_0)}{dL_0} \right)^T \mathbf{p}_x(K_0) = 0. \quad (2.1.14)$$

Первые два соотношения, аналогично случаю перелета с фиксированной начальной истинной долготой, сводятся к дополнительному краевому условию, представленному последним равенством в (2.1.11). Соотношение (2.1.14) для случая кеплеровских начальной и конечной орбит упрощается до вида $p_{LK}(K_f) - p_{LK}(K_0) = 0$.

Таким образом, задача оптимизации траектории перелета при свободном L_0 сводится к краевой задаче для системы дифференциальных уравнений (2.1.10) с краевыми условиями (2.1.11), (2.1.12), (2.1.14). Установив без потери общности $K_0 = 0$, для решения этой задачи необходимо найти 8 компонент вектора $\mathbf{p}_x(0)$, начальную истинную долготу L_0 и конечную вспомогательную долготу K_f , при которых выполняются условие (2.1.14) и 9 краевых условий следующего вида:

$$\begin{aligned} L_K(K_f) + K_f - L_0 = \Delta L, p_{LK}(0) + H(0) = 0, \\ \mathbf{x}(K_f) = \mathbf{x}_f(L_f), p_m(K_f) = 0, p_t(K_f) = 0, \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

дополняющих начальные условия при $K = 0$:

$$L_K(0) = L_0, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0(L_0), m(0) = m_0, t(0) = t_0. \quad (2.1.16)$$

Для анализа гелиоцентрического участка траектории межпланетного перелета КА с ЭРДУ, рассмотрим задачу минимизации затрат топлива на перелете между двумя заданными точками либрации L_1 и L_2 за фиксированное время Δt с использованием уравнений движения в декартовых координатах (1.2.1).

Мы рассматриваем следующий функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \delta \frac{T}{c} dt \rightarrow \min, \quad (2.1.17)$$

соответствующий задаче минимизации затрат топлива. Применяя принцип максимума, можно записать функцию Понтрягина в виде:

$$H = -\delta \frac{T}{c} + \mathbf{p}_r^T \mathbf{v} + \mathbf{p}_v^T \Omega_r + \delta \frac{T}{m} \mathbf{p}_v^T \mathbf{e}_T - \delta \frac{T}{c} p_m, \quad (2.1.18)$$

где \mathbf{p}_r , \mathbf{p}_v – векторы сопряженных переменных к \mathbf{r} и \mathbf{v} .

Следующее оптимальное управление обеспечивает максимум H по направлению тяги и функции переключения:

$$\mathbf{e}_T = \frac{\mathbf{p}_v}{p_v}, \delta = \frac{1 + \text{sgn } S}{2}, S = \frac{p_v}{m} - \frac{p_m + 1}{c}. \quad (2.1.19)$$

Подстановка этого оптимального управления в функцию Понтрягина приводит к следующему гамильтониану:

$$H = \mathbf{p}_r^T \mathbf{v} + \mathbf{p}_v^T \Omega_r + \delta T S. \quad (2.1.20)$$

Уравнения оптимального движения рассматриваемой задачи оптимального управления имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_r} = \mathbf{v}, \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_v} = \Omega_r + \delta T \frac{\partial S}{\partial \mathbf{p}_v}, \frac{dm}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m} = \delta T \frac{\partial S}{\partial p_m}, \\ \frac{d\mathbf{p}_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\Omega_{rr} \mathbf{p}_v, \frac{d\mathbf{p}_v}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} = -\mathbf{p}_r, \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial m} = -\delta T \frac{\partial S}{\partial m}. \end{cases} \quad (2.1.21)$$

С учетом условия трансверсальности, граничные условия для задачи перелета между точками либрации на гелиоцентрическом участке траектории можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, m(t_0) = m_0, \\ \mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f, \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f, p_m(t_f) = 0. \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

Сама задача оптимального управления, с использованием принципа максимума, сводится к двухточечной краевой задаче. Подход к решению рассматриваемого класса краевой задачи будет рассмотрен в разделе 6.

2.2 Математическая постановка задачи оптимизации возмущенных траекторий космического аппарата с идеально-регулируемым двигателем ограниченной мощности

С целью вычисления начального приближения для решения ОТ-задачи, рассмотрим задачу оптимизации возмущенной траектории КА с идеально-регулируемым двигателем ограниченной мощности, которую далее будем называть ОМ-задачей [7]. В этой задаче оптимальное управление является гладкой функцией независимой переменной, поэтому получить численное решение этой задачи достаточно просто. Используем приведенный в [28, 43] подход к решению задачи оптимизации многовитковой ОМ-траектории.

В рамках рассматриваемой математической модели, на величины тяги T и скорости истечения c накладывается единственное ограничение – $Tc/2 = P_b = \text{const}$, где P_b – заданная мощность. В рамках этого ограничения, тяга и скорость истечения могут произвольно изменяться. Хорошо известно [44], что задача оптимизации траектории КА с идеально-регулируемым двигателем разделяется на параметрическую и динамическую части. Параметрическая часть задачи включает в себя уравнения для массы m и сопряженной к ней переменной p_m , а динамическая – дифференциальные уравнения для остальных фазовых и сопряженных переменных. Возможность такого разделения обусловлена существованием

первого интеграла задачи $m^2 p_m = \text{const}$ [36, 45] и условием трансверсальности на сопряженную к массе переменную в конечной точке траектории $p_m(t_f) = 0$, из чего следует условие оптимальности $p_m(t) \equiv 0$. Учитывая, что $T = m \cdot a_{LP}$ и $dm/dt = -T/c$, где $a_{LP}(t) = \sqrt{a_{LP_r}^2(t) + a_{LP_t}^2(t) + a_{LP_n}^2(t)}$ – реактивное ускорение (a_{LP_r} , a_{LP_t} , a_{LP_n} – радиальная, трансверсальная и бинормальная компоненты реактивного ускорения соответственно), можно записать $c = 2P_b/T$, $\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} = -\frac{T^2}{2P_b} = -\frac{m^2 a^2}{2P_b}$. Интегрируя последнее уравнение по времени от t_0 до текущего момента времени t с учетом $m(t_0) = m_0$, получим

$$\int_{m_0}^{m(t)} m^{-2} dm = -\frac{1}{2P_b} \int_{t_0}^t a_{LP}^2 dt \Rightarrow \frac{1}{m(t)} - \frac{1}{m_0} = \frac{1}{2P_b} \int_{t_0}^t a_{LP}^2 dt = \frac{J_{LP}(t)}{P_b},$$

где $J_{LP}(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t a_{LP}^2 dt$. Из последнего уравнения следует, что $m(t) = m_0 P_b / [P_b + m_0 J_{LP}(t)]$.

Очевидно, что из выражения $m_f = m(t_f) = \frac{m_0 P_b}{P_b + m_0 J_{LP}(t_f)}$ следует, что минимизация

функционала $J_{LP}(t_f) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} a_{LP}^2 dt$ эквивалентна максимизации m_f , а при заданной начальной

массе m_0 – минимизации затрат топлива $m_p = m_0 - m_f$. Функционал $J_{LP}(t_f)$ для ОМ-задачи получен именно из условия максимизации конечной массы КА (или минимизации затрат рабочего тела при фиксированной начальной массе). В случае, если в качестве независимой переменной используется K вместо t , необходимо заменить переменную в последнем интеграле, таким образом минимизируемый функционал примет вид:

$$J_{LP} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} a_{LP}^2 dt = \frac{1}{2} \int_{K_0}^{K_f} \frac{a_{LP}^2}{q^2} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} dK. \quad (2.2.1)$$

Динамические уравнения возмущенного движения КА с идеально-регулируемым двигателем имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dK} &= \frac{2p^3}{\mu q^3} \cdot (a_{LP_t} + a_{p_t}), \\ \frac{de_x}{dK} &= \frac{p^2}{\mu q^2} \left[\sin L \cdot (a_{LP_r} + a_{p_r}) + \frac{(q+1) \cos L + e_x}{q} \cdot (a_{LP_t} + a_{p_t}) - \frac{e_y \xi}{q} \cdot (a_{LP_n} + a_{p_n}) \right], \\ \frac{de_y}{dK} &= \frac{p^2}{\mu q^2} \left[-\cos L \cdot (a_{LP_r} + a_{p_r}) + \frac{(q+1) \sin L + e_y}{q} \cdot (a_{LP_t} + a_{p_t}) + \frac{e_x \xi}{q} \cdot (a_{LP_n} + a_{p_n}) \right], \\ \frac{di_x}{dK} &= \frac{p^2 s^2}{2\mu q^3} \cos L \cdot (a_{LP_n} + a_{p_n}), \quad \frac{di_y}{dK} = \frac{p^2 s^2}{2\mu q^3} \sin L \cdot (a_{LP_n} + a_{p_n}), \quad \frac{dL_K}{dK} = \frac{p^2}{\mu q^3} \xi \cdot (a_{LP_n} + a_{p_n}), \\ \frac{dt}{dK} &= \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left(\frac{p}{q} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Так как правые части этих уравнений не зависят от массы КА, дифференциальные уравнения для m не включены в эту систему. В работе [28, 43] показано, что для перелетов в центральном ньютоновском гравитационном поле и в случае, когда возмущающие ускорения не зависят явно от времени t , дифференциальное уравнение для времени может быть исключено из системы дифференциальных уравнений движения и сопряженная ко времени переменная имеет вид $dp_t/dK \equiv 0$.

Рассмотрим задачу оптимизации перелета КА с идеально-регулируемым двигателем между двумя заданными точками с фиксированной угловой дальностью. Краевые условия для такой задачи имеют следующий вид:

$$L_K(0) = L_0, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0(L_0), t(0) = t_0, \quad (2.2.3)$$

$$L_K(K_f) + K_f = L_f, \mathbf{x}(K_f) = \mathbf{x}_f(L_f). \quad (2.2.4)$$

Таким образом, требуется найти такую программу реактивного ускорения $\mathbf{a}_{LP}(K) = [a_{LPt}(K), a_{LPr}(K), a_{LPn}(K)]^T$, которая минимизирует функционал (2.2.1) на решении системы дифференциальных уравнений (2.2.2), удовлетворяющем начальным условиям (2.2.3) и конечным условиям (2.2.4).

Функция Понтрягина задачи оптимального управления (2.2.1) - (2.2.4) имеет вид

$$H = H_{LP} + H_p + H_t, \quad (2.2.5)$$

$$H_{LP} = -\frac{1}{2} \frac{a_{LP}^2}{q^2} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} + \frac{p^2}{q^3 \mu} \mathbf{A}^T \mathbf{a}_{LP}, \quad (2.2.6)$$

где $\mathbf{A}^T = (A_t, A_r, A_n)$, $a_{LP} = |\mathbf{a}_{LP}|$.

Из условия максимума функции Понтрягина (2.2.5) по управлению \mathbf{a}_{LP} легко получить выражение для оптимального управления:

$$\mathbf{a}_{LP} = \frac{1}{q} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \mathbf{A}, \quad (2.2.7)$$

подставляя которое в (2.2.5) получим выражение для гамильтониана рассматриваемой задачи оптимального управления:

$$H = H_{LP} + H_p + H_t = k \mathbf{A}^T \mathbf{A} + k_1 k_2 \cdot (A_r a_{pr} + A_t a_{pt} + A_n a_{pn}) + k_1 p_t. \quad (2.2.8)$$

где $k = \frac{1}{2q^4} \sqrt{\frac{p^5}{\mu^3}}$. Очевидно, что уравнения оптимального движения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dK} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \frac{dL_K}{dK} = \frac{\partial H}{\partial p_{LK}}, \frac{dt}{dK} = \frac{\partial H}{\partial p_t}, \\ \frac{d\mathbf{p}}{dK} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \frac{dp_{LK}}{dK} = -\frac{\partial H}{\partial L_K}, \frac{dp_t}{dK} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Аналогично рассмотренному ранее случаю ОТ-задачи, начальные условия (2.2.3) необходимо дополнить условием трансверсальности $p_{LK}(0) + H_{LP}(0) = 0$, а конечные условия (2.2.4) – условием оптимальности времени $p_t(K_f) = 0$. Таким образом, для рассматриваемой краевой задачи принципа максимума, граничные условия принимают вид:

$$L_K(0) = L_0, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0(L_0), t(0) = t_0, p_{LK}(0) + H_{LP}(0) = 0, \quad (2.2.10)$$

$$L_K(K_f) + K_f = L_f, \mathbf{x}(K_f) = \mathbf{x}_f(L_f), p_t(K_f) = 0. \quad (2.2.11)$$

Для решения рассматриваемой краевой задачи необходимо найти $p_{LK}(0)$, 5 компонент вектора $\mathbf{p}(0)$, начальное значение p_t и конечную вспомогательную долготу K_f , при которых выполняются 7 конечных условий из (2.2.11) и последнее условие в (2.2.10).

Для решения задачи оптимизации возмущенных ОМ-траекторий межпланетного перелета используется следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \Omega_r + \mathbf{a}_{LP}. \quad (2.2.12)$$

Рассматривается ОМ-задача на траектории межпланетного перелета между двумя заданными точками либрации за фиксированное время Δt с функционалом в (2.2.1) – первое равенство. Функция Понтрягина рассматриваемой задачи в этом случае принимает вид:

$$H = -\frac{1}{2} \mathbf{a}_{LP}^T \mathbf{a}_{LP} + \mathbf{p}_r^T \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{p}_v^T \Omega_r + \mathbf{p}_v^T \mathbf{a}_{LP}, \quad (2.2.13)$$

Из условия максимума (2.2.13) по \mathbf{a}_{LP} , оптимальное управление имеет вид:

$$\mathbf{a}_{LP} = \mathbf{p}_v, \quad (2.2.14)$$

а уравнения оптимального движения КА,

$$\begin{cases} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \Omega_r + \mathbf{p}_v, \\ \frac{d^2 \mathbf{p}_v}{dt^2} = \Omega_{rr} \mathbf{p}_v. \end{cases} \quad (2.2.15)$$

Начальное и конечное условия для рассматриваемой задачи перелета имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t_0) &= \mathbf{r}_0, \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, \\ \mathbf{r}(t_f) &= \mathbf{r}_f, \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

При решении задачи оптимизации ОМ-траекторий межпланетного перелета используется методика, представленная в работе [36].

2.3 Математическая постановка задачи оптимизации возмущенных траекторий космического аппарата с минимальной тягой

Перед началом оптимизации ОТ-траектории полезно убедиться, что решение этой задачи существует. Вопрос существования решения можно решить, рассматривая задачу минимизации тяги [32, 33, 41, 46], то есть задачу вычисления траектории КА с двигателем минимальной тяги и с заданным удельным импульсом. Эту задачу будем обозначать как T_{\min} -задачу, а соответствующие траектории – как T_{\min} -траектории. Очевидно, что при заданной угловой дальности или времени перелета, ОТ-траектории существуют только если величина тяги не меньше минимальной.

В T_{\min} -задаче можно использовать несколько эквивалентных представлений функционала. В этой работе рассматривается задача минимизации функционала:

$$J = \frac{1}{2} \int_{L_0}^{L_f} T^2 dL = \frac{1}{2} \int_{K_0}^{K_f} T^2 \cdot \frac{dL}{dK} dK = \frac{1}{2} \int_{K_0}^{K_f} T^2 \cdot \left(1 + \frac{dL_K}{dK} \right) dK = \frac{1}{2} \int_{K_0}^{K_f} T^2 \cdot \left[1 + k_1 k_2 \xi \cdot \left(\delta \frac{T}{m} \sin \psi + a_{pn} \right) \right] dK \quad (2.3.1)$$

для динамической системы (7), (10), (9), дополненной формальным дифференциальным уравнением для тяги

$$dT/dK = 0. \quad (2.3.2)$$

Таким образом, минимизируемая величина тяги рассматривается как дополнительная фазовая переменная рассматриваемой динамической системы. Минимизация функционала (2.3.1) эквивалентна минимизации величины тяги, так как эта величина постоянна на всей траектории, а угловая дальность перелета $\Delta L = L_f - L_0$ – фиксирована.

Функция Понтрягина T_{\min} -задачи имеет вид:

$$H = H_{T_{\min}} + H_p + H_t, \quad (2.3.3)$$

$$\begin{cases} H_{T_{\min}} = -\frac{1}{2} T^2 \cdot \left(1 + \delta \frac{T}{m} k_1 k_2 \xi \sin \psi \right) + \\ + \delta T k_1 \cdot \left[\frac{k_2}{m} \cdot (A_r \sin \vartheta \cos \psi + A_t \cos \vartheta \cos \psi + A_n \sin \psi) - \frac{p_m}{c} \right] = \\ = -\frac{1}{2} T^2 + \delta T k_1 \cdot \left[\frac{k_2}{m} \cdot (A_r \sin \vartheta \cos \psi + A_t \cos \vartheta \cos \psi + A_{n1} \sin \psi) - \frac{p_m}{c} \right], \end{cases} \quad (2.3.4)$$

$$A_{n1} = \xi \cdot \left(-e_y p_{ex} + e_x p_{ey} + p_{LK} - \frac{T^2}{2} \right) + \frac{s^2}{2} (\cos L \cdot p_{ix} + \sin L \cdot p_{iy}).$$

Очевидно, что только слагаемое $H_{T \min}$ (2.3.4) функции Понтрягина (2.3.3) явно зависит от управления δ, ϑ, ψ . Максимизируя (2.3.4) по δ, ϑ, ψ , получим выражения для оптимального управления:

$$\sin \vartheta = A_r / A_{r1}, \cos \vartheta = A_t / A_{t1}, \sin \psi = A_{n1} / A_1, \cos \psi = A_{r1} / A_1, \quad (2.3.5)$$

$$\delta = (1 + \text{sign } S_{T \min}) / 2, S_{T \min} \neq 0; \delta \in [0; 1], S_{T \min} = 0, \quad (2.3.6)$$

где $S_{T \min} = \frac{k_2 A_1}{m} - \frac{p_m}{c}$ – функция переключения, $A_1 = \sqrt{A_r^2 + A_t^2 + A_{n1}^2}$. Так как величины k_2, A_1, m, c положительны на всей траектории, а p_m – неположительна (в конечной точке $p_m = 0$ в силу необходимых условий оптимальности, а $dp_m/dK = -\partial H/\partial m \geq 0$), то $S_{T \min} > 0$ на всей траектории. Следовательно, на всей траектории с минимальной тягой

$$\delta(K) \equiv 1. \quad (2.3.7)$$

Подставляя выражения для оптимального управления (2.3.5), (2.3.7) в (2.3.4), получим следующее выражение для $H_{T \min}$:

$$H_{T \min} = -\frac{1}{2} T^2 + T k_1 S_{T \min}, \quad (2.3.8)$$

подставив которое в (2.3.3) вместо (2.3.4), получим выражение для оптимального гамильтониана H :

$$H = \underbrace{-\frac{1}{2} T^2 + T k_1 S_{T \min}}_{H_{T \min}} + \underbrace{k_1 k_2 \cdot (A_r a_{pr} + A_t a_{pt} + A_{n1} a_{pn})}_{H_p} + \underbrace{k_1 p_t}_{H_t}.$$

Уравнение для массы КА m , с учетом (2.3.7), можно представить в виде:

$$m(K) = m(K_0) - \frac{T}{c} \cdot [t(K) - t(K_0)].$$

В систему дифференциальных уравнений (1.1.7) следует добавить дифференциальные уравнения для тяги (2.3.2) и сопряженной к ней переменной p_T :

$$\frac{dp_T}{dK} = T + k_1 \frac{p_m}{c} + k_1 k_2 \cdot \left[\frac{1}{m} \left(-A_1 + \xi T^2 \frac{A_{n1}}{A_1} \right) + \xi T a_{pn} \right]. \quad (2.3.9)$$

Краевые условия также совпадают с краевыми условиями задачи на минимум затрат топлива (2.1.11)-(2.1.12), но должны быть дополнены условиями трансверсальности для p_T на левом и правом концах траектории:

$$p_T(K_0) = 0, \quad p_T(K_f) = 0. \quad (2.3.10)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений оптимального движения имеют вид:

$$\frac{d\mathbf{x}_1}{dK} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_{x1}}, \frac{dT}{dK} = 0, \frac{d\mathbf{p}_{x1}}{dK} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_1}, \frac{dp_T}{dK} = -\frac{\partial H}{\partial T}. \quad (2.3.11)$$

Для решения краевой задачи принципа максимума (2.3.11), (2.1.11), (2.1.12), (2.3.10), требуется определить 8 компонент вектора $\mathbf{p}_{x1}(0)$, конечную вспомогательную долготу K_f и $T = T(0)$, при которых удовлетворяется последнее уравнение в (2.1.11), 8 уравнений (2.1.12) и второе уравнение в (2.3.10).

Следует отметить, что при оптимизации невозмущенных траекторий гамильтониан не зависит явно от времени t , то $dp_t/dK = 0$ и, в силу последнего уравнения (2.1.12), $p_t(K_f) \equiv 0$. Следовательно, $p_t(0) = 0$, а последнее уравнение (2.1.12) может быть исключено из краевых условий, что уменьшает порядок краевой задачи до 9. Последнее уравнение (2.1.11) сводится к квадратному уравнению относительно $p_{LK}(0)$, которое может быть решено аналитически, что позволяет исключить $p_{LK}(0)$ и последнее уравнение (2.1.11) из краевой задачи. Таким образом, решение краевой задачи принципа максимума для невозмущенного движения сводится к определению таких 6 начальных значений сопряженных переменных $p_p, p_{ex}, p_{ey}, p_{ix}, p_{iy}, p_m$, конечного значения вспомогательной долготы K_f и тяги T , при которых удовлетворяются первые три уравнения (2.1.12) (два скалярных и одно векторное размерности 5) и второе уравнение (2.3.10).

2.4 Заключение по разделу

Рассмотрена задача оптимизации возмущенной траектории КА с идеально-регулируемым двигателем, с минимальной тягой и с ограниченной тягой. Представлена полная система необходимых условий оптимальности для рассматриваемых задач перелета с фиксированной угловой дальностью и свободным временем.

3 МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГЕБРЫ КОМПЛЕКСНЫХ ДУАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

3.1 Метод продолжения по параметру

Основные проблемы при реализации численного метода решения краевой задачи принципа максимума, описанная в разделе 2.1, 2.2 и 2.3, связаны с обеспечением его сходимости и устойчивости. Сходимость и устойчивость численных методов тесно связана с проблемой выбора начального приближения и с негладкой зависимостью невязок рассматриваемой краевой задачи от ее неизвестных параметров (угловые точки в этой зависимости появляются при рождении новых или исчезновении старых точек переключения тяги). В ряде работ [7, 13, 14, 18-23, 27, 35-37] для решения подобных задач предлагается использовать методы продолжения, основанные на гомотопии между известным решением некоторой задачи и искомым решением. Весьма эффективным оказались двухстадийные методы, в рамках которых сначала вычисляется оптимальная ОМ-траектория, а затем она продолжается в оптимальную ОТ-траекторию [13, 18-23, 27, 28], причем на обеих стадиях используется метод продолжения для решения соответствующей краевой задачи принципа максимума. В рамках такого подхода оказалось возможным использовать тривиальное (нулевое) начальное приближение для неизвестных начальных значений сопряженных переменных [18-23]: $p_p(0) = p_{ex}(0) = p_{ey}(0) = p_{ix}(0) = p_{iy}(0) = p_{Lk}(0) = p_m(0) = 0$ и “естественное” начальное приближение для конечной вспомогательной долготы $K_f = L_f - L_0$. Такое начальное приближение соответствует баллистическому движению КА с выключенными двигателями по начальной орбите из заданного начального положения на заданную угловую дальность.

Приведем краткое описание варианта метода продолжения, используемого в этой диссертационной работе. Рассматриваемые краевые задачи принципа максимума формально можно формально представить в виде решения системы уравнений

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}, \tau) = 0, \quad (3.1.1)$$

где \mathbf{f} , \mathbf{z} – векторы невязок и неизвестных параметров краевой задачи соответственно. Явная зависимость вектора невязок от параметра продолжения τ будет иметь место, если по каким-либо причинам τ будет введен в правые части уравнений движения или в краевые условия. Рассмотрим вектор \mathbf{z} как функцию τ : $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\tau)$. При $\tau = 0$ и некотором начальном приближении $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$ можно вычислить

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}_0, 0) = \mathbf{b}. \quad (3.1.2)$$

Вместо исходной системы (3.1.1) рассмотрим ее погружение в однопараметрическое семейство вида

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}(\tau), \tau) = (1-\tau)\mathbf{b}, \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0. \quad (3.1.3)$$

Очевидно, что (3.1.3) при $\tau = 0$ совпадает с (3.1.2), а при $\tau = 1$ – с исходной системой (3.1.1). Дифференцируя первое уравнение (3.1.3) по параметру продолжения τ и разрешая результат относительно $d\mathbf{z}/d\tau$, получим следующую задачу Коши, к которой сводится решение исходной нелинейной системы (3.1.1):

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}\right]^{-1} \left(\mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau}\right), \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0. \quad (3.1.4)$$

Таким образом, для решения задачи (3.1.1) требуется проинтегрировать систему (3.1.4) по параметру продолжения от 0 до 1. Это влечет за собой необходимость интегрирования системы уравнений оптимального движения и вычисления $\partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{z}$ и $\partial \mathbf{f}/\partial \tau$.

Таким образом, используемый метод продолжения сводит решение краевой задачи принципа максимума к задаче Коши (3.1.4), для решения которой необходимо численно проинтегрировать вложенные системы дифференциальных уравнений. Во многих работах, например [27, 43], для точного вычисления производных $\partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{z}$ и $\partial \mathbf{f}/\partial \tau$ был использован метод комплексного шага вместе с многократным интегрированием уравнений для фазовых и сопряженных переменных, либо с одновременным интегрированием дифференциальных уравнений для фазовых и сопряженных переменных с дифференциальными уравнениями для $\partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{z}$ и $\partial \mathbf{f}/\partial \tau$. Подход к вычислению требуемых производных (матрицы чувствительности $\partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{z}$ и $\partial \mathbf{f}/\partial \tau$) будет описан более подробно в следующем разделе 3.2.

3.2 Методы точного вычисления производных

Задача высокоточного вычисления производных вещественных функций, включая функции, вычисляемые по сложным алгоритмам, крайне важна для эффективной реализации численных методов решения задач оптимального управления при использовании рассматриваемых подходов в данной работе [4-6]. Для численной реализации метода продолжения требуется вычисление первых производных от вектора невязок \mathbf{f} по неизвестным параметрам \mathbf{z} , а для автоматизации подготовки математической модели оптимального движения (особенно в возмущенных задачах) требуется вычисление производных от гамильтониана (или от возмущающих ускорений) по фазовым координатам. Оба типа частных производных используются для вычисления правых частей дифференциальных уравнений (производные от невязок краевой задачи по ее неизвестным параметрам – для вычисления

правых частей дифференциальных уравнений метода продолжения, а производные от гамильтониана по фазовому вектору – для вычисления правых частей дифференциальных уравнений для сопряженных переменных), поэтому требуется высокая точность их вычисления. Как правило, желательно, чтобы ошибка вычисления производных не превосходила ошибки вычисления функций.

Например, для рассматриваемой в разделе 2.1 задачи минимизации затрат топлива, рассматриваемые частные производные $\partial f/\partial z$ и $\partial f/\partial \tau$ удобно вычислять совместным интегрированием дифференциальных уравнений (2.1.10) с дифференциальными уравнениями для $\partial \mathbf{x}_1/\partial \tau$, $\partial \mathbf{p}_{x1}/\partial \tau$, $\partial \mathbf{x}_1/\partial \mathbf{p}_{x10}$, $\partial \mathbf{p}_{x1}/\partial \mathbf{p}_{x10}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_1}{dK} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_{x1}}, \quad \frac{d\mathbf{p}_{x1}}{dK} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_1}, \\ \frac{d}{dK} \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 H}{\partial \tau \partial \mathbf{p}_{x1}}, \quad \frac{d}{dK} \frac{\partial \mathbf{p}_{x1}}{\partial \tau} = -\frac{\partial^2 H}{\partial \tau \partial \mathbf{x}_1}, \\ \frac{d}{dK} \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{p}_{x10}} &= \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}_{x10} \partial \mathbf{p}_{x1}}, \quad \frac{d}{dK} \frac{\partial \mathbf{p}_{x1}}{\partial \mathbf{p}_{x10}} = -\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}_{x10} \partial \mathbf{x}_1}, \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

при этом начальные условия (2.1.11) дополняются очевидными соотношениями:

$$\frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \tau} = \frac{\partial \mathbf{p}_{x1}}{\partial \tau} = \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{p}_{x10}} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{p}_{x1}}{\partial \mathbf{p}_{x10}} = \mathbf{E} \quad (3.1.6)$$

при $K = 0$, где \mathbf{E} – единичная матрица.

В соответствии с (2.1.2), гамильтониан H возмущенной задачи может быть представлен в виде $H = H_T + H_p + H_t$. Частные производные $\partial H/\partial \mathbf{p}_{x1}$, $\partial H_T/\partial \mathbf{x}_1$ и $\partial H_t/\partial \mathbf{x}_1$ легко выражаются в явном виде, поэтому необходимые для вычисления правых частей системы (3.1.5) смешанные вторые производные $\partial^2 H/\partial \tau \partial \mathbf{p}_{x1}$, $\partial^2 H/\partial \mathbf{p}_{x10} \partial \mathbf{p}_{x1}$, $\partial^2 H_T/\partial \tau \partial \mathbf{x}_1$, $\partial^2 H_T/\partial \mathbf{p}_{x10} \partial \mathbf{x}_1$, $\partial^2 H_t/\partial \tau \partial \mathbf{x}_1$ и $\partial^2 H_t/\partial \mathbf{p}_{x10} \partial \mathbf{x}_1$ легко могут быть вычислены с высокой точностью с использованием метода комплексного шага [49, 50, 51, 52] при условии вычисления первых производных $\partial H/\partial \mathbf{p}_{x1}$, $\partial H_T/\partial \mathbf{x}_1$ и $\partial H_t/\partial \mathbf{x}_1$ в комплексной области с использованием малых приращений в мнимых частях комплексного представления τ и элементов векторов \mathbf{x}_1 и \mathbf{p}_{x1} . Существенно более сложной оказывается задача точного вычисления производных $\partial H_p/\partial \mathbf{x}_1$, $\partial^2 H_p/\partial \tau \partial \mathbf{x}_1$ и $\partial^2 H_p/\partial \mathbf{p}_{x10} \partial \mathbf{x}_1$. Действительно, слагаемое гамильтониана H_p зависит от возмущающих ускорений. Компоненты возмущающих ускорений зависят от \mathbf{x}_1 и вычисляются с использованием сложных алгоритмов, не позволяющих, в общем случае, представить точную аналитическую оценку их производных по компонентам фазового вектора. Конечно, можно произвести вычисления по этим алгоритмам с использованием комплексных или дуальных чисел для вычисления $\partial H_p/\partial \mathbf{x}_1$ методом комплексного шага [49, 50, 51, 52] или автоматическим

дифференцированием с использованием алгебры дуальных чисел [53, 54], однако при этом для вычисления требуемых вторых производных $\partial^2 H_p / \partial \tau \partial \mathbf{x}_1$ и $\partial^2 H_p / \partial \mathbf{p}_{x_{10}} \partial \mathbf{x}_1$ потребуется воспользоваться каким-либо менее точным и менее устойчивым методом, например методом конечных разностей. В качестве альтернативы, в ряде работ для точного вычисления вторых производных вещественных функций предлагается использовать мультикомплексные [15] или гипердуальные [16, 55, 56] числа. Основным недостатком методов, использующих мультикомплексные или гипердуальные числа является большая вычислительная трудоемкость, связанная, в частности, с попутным вычислением не используемых в рассматриваемой задаче вторых производных вида $\partial^2 H_p / \partial \tau^2$, $\partial^2 H_p / \partial \mathbf{x}_1^2$, $\partial^2 H_p / \partial \mathbf{p}_{x_{10}}^2$. Для реализации высокоточного вычисления только требуемых производных второго порядка вещественной функции H_p мы предлагаем использовать комплексные дуальные числа [17-23].

Так как вычисление производных с использованием комплексных дуальных чисел фактически является комбинацией методов дифференцирования с использованием комплексных и дуальных чисел, приведем основные соотношения для численного дифференцирования методом комплексного шага [49-52] и автоматического дифференцирования с использованием дуальных чисел [53, 54].

В работе Яглома [57] приводится описание «самых общих комплексных чисел». Под «самым общим комплексным числом», будем подразумевать число вида $a + bE$, где a, b – вещественные числа, E – особый элемент. Системы «самых общих комплексных чисел» фактически сводятся к следующим трем различным системам: обыкновенные комплексные числа ($E^2 = i^2 = -1$), дуальные числа ($E^2 = \varepsilon^2 = 0$) и двойные числа ($E^2 = e^2 = 1$).

Благодаря алгебраическим свойствам «самых общих комплексных чисел», их можно использовать для вычисления первых производных вещественной функции вещественного аргумента с помощью приращения в невещественной (т.е. мнимой, дуальной) части аргумента. Некоторые авторы установили связь между «самыми общими комплексными числами» и «автоматическим дифференцированием». Одним из методов высокоточного дифференцирования с помощью обыкновенных комплексных чисел является метод комплексного шага [49-52].

Метод комплексного шага был открыт в 1967 [49, 50], забыт, переоткрыт в 1998 [51] и с тех пор используется во многих приложениях, например [4, 27]. Этот метод предназначен для вычисления производных дифференцируемых вещественных функций вещественного аргумента. Очевидно, что при $x, h \in \mathbb{R}, f(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, можно разложить функцию f в ряд Тейлора с использованием малого приращения в мнимой части аргумента, в результате чего получим приближенное выражение для ее производной:

$$f(x+ih) = f(x) + ih \frac{df(x)}{dx} - \frac{1}{2} h^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + O(h^3) \Rightarrow$$

$$\text{Im}[f(x+ih)] = h \frac{df(x)}{dx} + O(h^3) \Rightarrow$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{\text{Im}[f(x+ih)]}{h} + O(h^2).$$

В отличие от метода конечных разностей, в последней формуле в числителе отсутствует разность значений функций при близких значениях аргумента, поэтому шаг дифференцирования может быть выбран достаточно малым для обеспечения точности вычисления производной равной по порядку точности вычисления функции.

Хорошо известен также метод автоматического дифференцирования, основанный на алгебре Клиффорда, более точно – на использовании дуальных чисел [53]. Рассмотрим

$$z = x + \varepsilon h, \varepsilon^2 = 0, x, h \in \mathbb{R}, f(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{RP}(z) \triangleq x, \text{DP}(z) \triangleq h.$$

Раскладывая f в ряд Тейлора с использованием приращения в дуальной части аргумента, мы получим точное выражение для производной этой функции:

$$f(x + \varepsilon h) = f(x) + \varepsilon h \frac{df(x)}{dx} \Rightarrow$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{\text{DP}[f(x + \varepsilon h)]}{h} \quad \text{или}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \text{DP}[f(x + \varepsilon)].$$

Здесь используется обозначение $\text{DP}(\cdot)$ для операции выделения дуальной части числа:

$$\text{DP}(x + \varepsilon h) = h.$$

Этот метод позволяет несколько снизить вычислительные затраты по сравнению с методом комплексного шага, особенно при использовании дуальных чисел с векторной дуальной частью [53]. Например, при использовании дуальных чисел с векторной дуальной частью, имеющей размерность 2 можно вычислить обе частные производные вещественной функции двух переменных с помощью одного вычисления этой функции в дуальной области:

$$x = x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2, y = y_0 + \varepsilon_1 y_1 + \varepsilon_2 y_2, \varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0, x_i, y_i \in \mathbb{R}, i = 0 \dots 2,$$

$$\text{RP}(x) \triangleq x_0, \text{DP}_i(x) \triangleq x_i, z = f(x, y): z = z_0 + \varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2 = f(x_0 + \varepsilon_1 \cdot 1 + \varepsilon_2 \cdot 0, y_0 + \varepsilon_1 \cdot 0 + \varepsilon_2 \cdot 1) =$$

$$= f(x_0, y_0) + \varepsilon_1 \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_0} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \text{DP}_1[f(x + \varepsilon_1, y + \varepsilon_2)], \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \text{DP}_2[f(x + \varepsilon_1, y + \varepsilon_2)].$$

Здесь используются обозначение $\text{DP}_i(\cdot)$ для операции выделения i -й дуальной части числа, а $\text{RP}(\cdot)$ – для выделения вещественной части числа.

В общем случае оба метода позволяют вычислить с высокой точностью первые производные дифференцируемых вещественных функций вещественного переменного. Однако, ни один из этих методов не позволяет точного вычисления вторых производных.

При использовании метода комплексного шага для вычисления вторых производных снова появляется разность двух близких величин, являющаяся источником ошибки:

$$\frac{df^2(x)}{dx^2} = \frac{2(f(x) - \operatorname{Re}[f(x+ih)])}{h^2} + O(h^2).$$

Точное вычисление вторых производных требует более сложных математических конструкций. В частности, можно использовать числа с несколькими не вещественными частями аргумента. Смешанные вторые производные должны выражаться с использованием разложения функции в ряд Тейлора при не вещественном приращении аргумента. Для вычисления вторых производных требуется многомерное расширение понятия «самых общих комплексных чисел». В работах [16, 56] подробно описано разложение в ряд Тейлора функции с шагом $d=h_1E_1+h_2E_2+0 \cdot E_1E_2$ – основной шаг (*generic step*) с использованием числа с тремя не вещественными частями аргумента E_1 , E_2 , и E_1E_2 , где операция умножения коммутативна: $E_1E_2=E_2E_1$ и h_1, h_2 – вещественные числа. Это приводит к свойству $(E_1E_2)^2 = E_1E_2E_1E_2 = E_1E_1E_2E_2 = E_1^2E_2^2$. Существуют различные возможные многомерные расширения «самых общих комплексных чисел», которые обладают коммутативным умножением. Например, используются мультикомплексные $E_1=i_1, E_2=i_2$ ($E_1^2=E_2^2=-1, (E_1E_2)^2=1$) [15] и гипердуальные $E_1=\varepsilon_1, E_2=\varepsilon_2$ ($E_1^2=E_2^2=0, (E_1E_2)^2=0$) [16, 56] числа. Но использование мультикомплексных или гипердуальных чисел приводит к вычислению всех вторых производных, некоторые из которых не требуются для решения рассматриваемых нами задач и, следовательно, к избыточному росту вычислительных затрат.

Мы предлагаем для вычисления вторых производных использовать комплексные дуальные числа $E_1=i, E_2=\varepsilon$ ($E_1^2=-1, E_2^2=0, (E_1E_2)^2=0$) [17-23, 58]. Комплексные дуальные числа являются дуальными числами с комплексными коэффициентами:

$$z = x + \varepsilon x', \quad \varepsilon^2 = 0, \quad x, x' \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{CP}(z) \triangleq x, \quad \operatorname{CDP}(z) \triangleq x'.$$

Здесь используются обозначение $\operatorname{CDP}(\cdot)$ для операции выделения комплексной дуальной части числа, а $\operatorname{CP}(\cdot)$ – для выделения комплексной части числа.

Если $x = x_0 + ix_1$ и $x' = x_2 + ix_3$, то можно представить в виде действительных чисел:

$$z = x_0 + x_1i + x_2\varepsilon + x_3i\varepsilon, \quad \text{где } x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Здесь, x_0 – действительная часть числа; x_1 – мнимая часть числа; x_2 – дуальная часть числа и x_3 – мнимо-дуальная часть числа. В работе [57], «самые общие комплексные числа» представлены на двумерной вещественной плоскости (с двумя вещественными компонентами

– a и b). Расширяемые варианты «самых общих комплексных чисел» можно представить с четырьмя вещественными компонентами – x_0 ; x_1 ; x_2 и x_3 . Базовые элементы комплексных дуальных чисел $(1, i, \varepsilon, i\varepsilon)$ обладают следующими свойствами [58]:

$$\begin{cases} i = i, \\ \varepsilon = \varepsilon, \\ i^2 = -1, \\ \varepsilon^2 = 0, \\ i\varepsilon = i\varepsilon, \\ i \cdot i\varepsilon = -\varepsilon, \\ \varepsilon \cdot i\varepsilon = 0, \end{cases}$$

где ε – дуальная единица, i – мнимая единица и $i\varepsilon$ – мнимо-дуальная единица. Если $x_1 = x_3 = 0$, то комплексное дуальное число становится чистым дуальным числом, а если $x_2 = x_3 = 0$ – то чистым комплексным числом. Более подробно, основные свойства алгебры комплексных дуальных чисел, а также элементы теории функции комплексного дуального переменного рассматриваются в работах [17, 58].

Теперь можно привести обоснование метода численного дифференцирования, основанного на применении алгебры комплексных дуальных чисел. Мы можем разложить функцию f в ряд Тейлора по комплексному дуальному шагу $d = ih + \varepsilon \cdot 1 + i\varepsilon \cdot 0$:

$$\begin{aligned} f(x+d) &= f(x+ih+\varepsilon \cdot 1+i\varepsilon \cdot 0) = \\ &= f(x) + (ih+\varepsilon \cdot 1+i\varepsilon \cdot 0) \frac{df(x)}{dx} + \frac{1}{2} (ih+\varepsilon \cdot 1+i\varepsilon \cdot 0)^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + O(h^3). \end{aligned}$$

Здесь используется приращение к x на единичную дуальную часть, малую мнимую часть ($h \ll 1$) и нулевую мнимо-дуальную часть чтобы вычислить вторую производную функции f . С использованием такого разложения, окончательно приходим к следующим простым выражениям для первых и вторых производных:

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &= \frac{\text{Im}\{\text{CP}[f(x+ih+\varepsilon)]\}}{h} + O(h^2) = \text{Re}\{\text{CDP}[f(x+ih+\varepsilon)]\} + O(h^2), \\ \frac{d^2 f(x)}{dx^2} &= \frac{\text{Im}\{\text{CDP}[f(x+ih+\varepsilon)]\}}{h} + O(h^2). \end{aligned}$$

Для вычисления смешанной второй производной вещественной функции f по x и y можно добавить к x единичную дуальную часть ($x = x_0 + \varepsilon$), а к y – малую мнимую часть ($y = y_0 + ih$, $h \ll 1$), где x_0 , y_0 , h – вещественные числа. Анализ разложения этой функции f в ряд Тейлора в окрестности точки (x_0, y_0) позволяет показать, что вычисление комплексного дуального представления функции приводит к следующим простым выражениям для первых производных и смешанной второй производной:

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= f(x_0, y_0) + ih \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_0} - \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y_0^2} + \\
\varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial x_0} \left[f(x_0, y_0) + ih \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_0} - \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y_0^2} \right] \right\} &+ O(h^3) \Rightarrow \\
\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_0} &= \frac{\text{Im}\{\text{CP}[f(x, y)]\}}{h} + O(h^2), \\
\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_0} &= \text{Re}\{\text{CDP}[f(x, y)]\} + O(h^2), \\
\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x_0 \partial y_0} &= \frac{\text{Im}\{\text{CDP}[f(x, y)]\}}{h} + O(h^2).
\end{aligned}$$

Областью применения разработанной библиотеки программ для вычислений в комплексной дуальной области является высокоточное вычисление первых и вторых смешанных производных вещественных функций нескольких вещественных переменных, в том числе функций, вычисляемых по сложным алгоритмам. В библиотеке программ реализован комбинированный метод вычисления вторых производных с использованием автоматического дифференцирования с применением комплексных дуальных чисел с векторной дуальной частью и дифференцирование с применением метода комплексного шага.

Более подробное описание библиотеки программ для вычислений в комплексной дуальной области представлено в Приложении А настоящей диссертационной работы.

3.3 Применение автоматического дифференцирования с использованием алгебры комплексных дуальных чисел при решении задач оптимизации возмущенных траекторий космических аппаратов с малой тягой

Предлагается следующая схема решения задачи оптимизации возмущенной траектории с малой тягой.

1) Задаются исходные данные, включающие в себя элементы начальной орбиты $\mathbf{x}_0 = (p_0, e_{x0}, e_{y0}, i_{x0}, i_{y0})^T$, начальную истинную долготу L_0 , элементы конечной орбиты $\mathbf{x}_f = (p_f, e_{xf}, e_{yf}, i_{xf}, i_{yf})^T$, угловую дальность перелета ΔL (конечная истинная долгота определяется соотношением $L_f = L_0 + \Delta L$), начальную массу КА m_0 , тягу T и скорость истечения с двигательной установки.

2) Методом продолжения решается краевая задача для оптимизации невозмущенной траектории КА с идеально-регулируемым двигателем ограниченной мощности (ОМ-траектории, см. раздел 2.2). В качестве начального приближения для неизвестных начальных

значений сопряженных переменных используются нулевые значения: $p_p(0) = p_{ex}(0) = p_{ey}(0) = p_{ix}(0) = p_{iy}(0) = p_{LK}(0) = 0$ (что соответствует пассивному движению КА по начальной орбите), а начальное приближение для неизвестного конечного значения вспомогательной долготы устанавливается равным угловой дальности перелета: $K_f = \Delta L$.

3) Методом продолжения решается краевая задача принципа максимума (2.1.10), (2.1.11), (2.1.12) для оптимизации траектории с ограниченной тягой (ОТ-траектории). В качестве начального приближения неизвестных начальных значений сопряженных переменных $p_p, p_{ex}, p_{ey}, p_{ix}, p_{iy}, p_{LK}$ и конечной вспомогательной долготы K_f используются значения, полученные при оптимизации ОМ-траектории. Начальные приближения для $p_m(0)$ и $p_t(0)$ устанавливаются равными 0. Для реализации гомотопии между ОМ- и ОТ-траекториями используется следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dK} &= \frac{(1-\tau)k + \tau\delta \frac{T}{m} k_1 k_2}{1-\tau + \tau A} \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{A} + \tau k_1 k_2 \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{a}_p, \\ \frac{dL_K}{dK} &= \frac{(1-\tau)k + \tau\delta \frac{T}{m} k_1 k_2}{1-\tau + \tau A} \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial p_{LK}} \mathbf{A} + \tau k_1 k_2 \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial p_{LK}} \mathbf{a}_p, \quad \frac{dt}{dK} = k_1, \quad \frac{dm}{dK} = -\tau\delta k_1 \frac{T}{c}, \\ \frac{d\mathbf{p}}{dK} &= -\frac{(1-\tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} k A^2 + \tau\delta T \cdot \left[\frac{\partial k_1}{\partial \mathbf{x}} SA + \frac{k_1}{m} \left(\frac{\partial k_2}{\partial \mathbf{x}} A^2 - k_2 \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A} \right) \right]}{1-\tau + \tau A} - \tau \frac{\partial H_p}{\partial \mathbf{x}}, \\ \frac{dp_{LK}}{dK} &= -\frac{(1-\tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} k A^2 + \tau\delta T \cdot \left[\frac{\partial k_1}{\partial L_K} SA + \frac{k_1}{m} \left(\frac{\partial k_2}{\partial L_K} A^2 - k_2 \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial L_K} \mathbf{A} \right) \right]}{1-\tau + \tau A} - \tau \frac{\partial H_p}{\partial L_K}, \\ \frac{dp_t}{dK} &= -\tau \frac{\partial H_p}{\partial t}, \quad \frac{dp_m}{dK} = \tau\delta T k_1 k_2 \frac{A}{m^2}, \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

где $k = \frac{1}{2q^4} \sqrt{\frac{P^5}{\mu^3}}$.

Эта система при $\tau=0$ совпадает с системой дифференциальных уравнений для невозмущенного перелета с идеально-регулируемым двигателем, а при $\tau=1$ – с системой (2.1.10). Выбор такого вида дифференциальных уравнений обеспечивает независимость правых частей системы (2.1.10) от времени при $\tau=0$, что позволяет в качестве начального приближения использовать $p_t(K) \equiv 0$.

В предлагаемом методе используется одновременное интегрирование уравнений движения (3.3.1) и частных производных от фазового и сопряженных векторов по неизвестным параметрам краевой задачи \mathbf{z} и параметру продолжения τ (для дальнейшего вычисления $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{z}$ и $\partial \mathbf{f} / \partial \tau$). Для этого методом комплексного шага вычисляются

невозмущенные правые части дифференциальных уравнений для $\partial \mathbf{x}_1 / \partial \mathbf{z}$, $\partial \mathbf{p}_{\mathbf{x}_1} / \partial \mathbf{z}$, $\partial \mathbf{x}_1 / \partial \tau$ и $\partial \mathbf{p}_{\mathbf{x}_1} / \partial \tau$. Для вычисления необходимых смешанных производных вида $\partial^2 H_p / \partial \mathbf{x}_1 \partial \mathbf{z}$, $\partial^2 H_p / \partial \mathbf{x}_1 \partial \tau$ используется автоматическое дифференцирование по \mathbf{x}_1 в комплексной дуальной области с последующим дифференцированием по \mathbf{z} или τ методом комплексного шага. Производные от фазового и сопряженных векторов по конечному значению вспомогательной долготы K_f включать в состав интегрируемых переменных нет необходимости, так как они вычисляются по завершении интегрирования системы (3.3.1) от K_0 до K_f одним дополнительным вызовом функции расчета правых частей системы (3.3.1).

Таким образом одновременно интегрируется система уравнений для 8 фазовых переменных, 8 сопряженных переменных и их производных по начальным значениям 8 сопряженных переменных и параметру продолжения τ , всего $8+8+(8+8)(8+1) = 160$ уравнений. Индексы переменных, используемые при совместном интегрировании системы дифференциальных уравнений (3.3.1) и частных производных от фазового и сопряженного векторов по неизвестным параметрам краевой задачи и параметру продолжения, приведены в таблице 3.3.1. В этой таблице используется обозначение y_i для элементов вектора $\mathbf{y} = (\mathbf{x}_1^T, \mathbf{p}_{\mathbf{x}_1}^T)^T$.

Таблица 3.3.1 – Индексы переменных, используемые при совместном интегрировании системы дифференциальных уравнений (3.3.1) и частных производных от фазового и сопряженного векторов по неизвестным параметрам краевой задачи и параметру продолжения

Переменная	p	e_x	e_y	i_x	i_y	L_K	t	m	p_p	p_{ex}	p_{ey}	p_{ix}	p_{iy}	p_{LK}	p_t	p_m
y_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\partial y_i / \partial p_{p0}$	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
$\partial y_i / \partial p_{ex0}$	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
$\partial y_i / \partial p_{ey0}$	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
$\partial y_i / \partial p_{ix0}$	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
$\partial y_i / \partial p_{iy0}$	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
$\partial y_i / \partial p_{LK0}$	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112
$\partial y_i / \partial p_{t0}$	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128
$\partial y_i / \partial p_{m0}$	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144
$\partial y_i / \partial \tau$	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160

Ниже приводится схема вычисления правых частей дифференциальных уравнений возмущенного оптимального движения, включая вычисление вторых смешанных производных возмущенной части гамильтониана по орбитальным элементам и начальным значениям сопряженных переменных (рассматривается случай учета возмущений от

нецентральности гравитационного поля Земли заданной степени и порядка, а также возмущения от притяжения Луны и Солнца):

1. Вычисляются эфемеридные данные, необходимые для дальнейшего вычисления возмущающих ускорений (матрица перехода \mathbf{M} из геоцентрической инерциальной системы координат ICRS в геоцентрическую экваториальную вращающуюся систему координат ITRS [59] и ее производная по времени, векторы положения \mathbf{r}_{pj} и скорости \mathbf{v}_{pj} Луны ($l = 1$) и Солнца ($l = 2$) в ICRS). Для дальнейшего вычисления требуемых производных по времени используется их комплексное дуальное представление в виде $\mathbf{M}_c = \mathbf{M} + \varepsilon_7 d\mathbf{M}/dt$, $\mathbf{r}_{pcl} = \mathbf{r}_{pl} + \varepsilon_7 \mathbf{v}_{pl}$, $l = 1, 2$.
2. Устанавливается $j = 1$.
3. Если $j < 9$, то вычисляется комплексное представление вектора \mathbf{y} : $y_k = y_k + ih_{diff} \partial y_k / \partial z_j$, иначе вычисляется комплексное представление параметра продолжения τ : $\tau = \tau + ih_{diff}$, где $h_{diff} \ll 1$ – величина шага дифференцирования методом комплексного шага, $k = 1 \dots 16$, $j = 1 \dots 8$.
4. Невозмущенные слагаемые правых частей дифференциальных уравнений для фазовых и сопряженных переменных вычисляются в комплексном представлении используя комплексное представление \mathbf{y} ($j < 9$) или τ ($j = 9$).
5. Создаются копии фазовых переменных в комплексном дуальном представлении с единичной векторной дуальной частью: $p + \varepsilon_1$, $e_x + \varepsilon_2$, $e_y + \varepsilon_3$, $i_x + \varepsilon_4$, $i_y + \varepsilon_5$, $L_K + \varepsilon_6$, $t + \varepsilon_7$, $m + \varepsilon_8$.
6. Из этих копий, с использованием комплексной дуальной алгебры, вычисляются фазовые координаты \mathbf{r} , \mathbf{v} .
7. Вычисляется комплексное дуальное представление базисных векторов орбитальной системы координат в ICRS.
8. Вычисляется комплексное дуальное представление возмущающих ускорений в ICRS, при этом используются вещественные представления положения планет и матрицы преобразования между ITRS и ICRS если $j \neq 7$, а в противном случае – их комплексные дуальные представления.
9. Вычисляется комплексное дуальное представление возмущающих ускорений в орбитальной системе координат.
10. Вычисляется возмущенная часть гамильтониана H_p в комплексном дуальном представлении.
11. Вычисляются производные H_p по фазовым переменным (слагаемые правых частей дифференциальных уравнений для сопряженных переменных). В данном случае комплексное представление производной от H_p по k -й фазовой переменной оказывается равным k -й комплексной дуальной части комплексного дуального представления H_p .

12. Вычисляются правые части \mathbf{g} возмущенной системы (3.3.1) в комплексном представлении.
13. Для вычисления производных от правых частей дифференциальных уравнений по начальным значениям сопряженных переменных используется метод комплексного шага: $\partial \mathbf{g} / \partial z_j = \text{Im}(\mathbf{g}) / h_{diff}$ ($j < 9$) или $\partial \mathbf{g} / \partial \tau = \text{Im}(\mathbf{g}) / h_{diff}$ ($j = 9$). В результате вычисляются правые части дифференциальных уравнений для $\partial y_k / \partial z_j$ ($j < 9$) или для $\partial y_k / \partial \tau$ ($j = 9$).
14. При необходимости производится вычисление гамильтониана H (2.1.2) в комплексном представлении. Если $j < 9$, методом комплексного шага вычисляются производные $\partial H / \partial z_j = \text{Im}(H) / h_{diff}$, иначе методом комплексного шага вычисляются производные $\partial H / \partial \tau = \text{Im}(H) / h_{diff}$, $\partial H / \partial K = \partial H / \partial L_K$ и вещественное представление гамильтониана $H = \text{Re}(H)$.
15. Если $j = 9$, то осуществляется переход к п. 16, иначе устанавливается $j = j + 1$ и осуществляется переход к п. 3.
16. Вычисляются правые части дифференциальных уравнений для \mathbf{y} в вещественном представлении: $d\mathbf{y} / dK = \text{Re}(\mathbf{g})$.
17. Производится возврат в вызывающую программу.

Матрица перехода \mathbf{M} от ICRS в ITRS и ее производная вычисляются с помощью библиотеки Международного астрономического союза SOFA [59], а векторы положения и скорости Луны и Солнца – с помощью эфемеридного обеспечения JPL [60].

Входными параметрами для вычисления правых частей системы дифференциальных для вектора \mathbf{y} и его производных являются текущее значение вспомогательной долготы K , текущее значение вектора \mathbf{y} и его производных $\partial \mathbf{y} / \partial z_j$ ($j = 1 \dots 8$), $\partial \mathbf{y} / \partial \tau$, задающиеся вещественным массивом в порядке, определяемом таблицей 3.3.1. Выходными параметрами являются правые части системы дифференциальных уравнений (3.3.1) \mathbf{g} и их производные $\partial \mathbf{g} / \partial z_j$ ($j = 1 \dots 8$), $\partial \mathbf{g} / \partial \tau$, представленные в виде вещественного массива в том же порядке.

Вектор невязок краевой задачи \mathbf{f} , матрица $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{z}$ и вектор $\partial \mathbf{f} / \partial \tau$ необходимые для вычисления правых частей дифференциальных уравнений метода продолжения (3.1.4) вычисляются после интегрирования дифференциальных уравнений для \mathbf{y} , $\partial \mathbf{y} / \partial z_j$ ($j = 1 \dots 8$) и $\partial \mathbf{y} / \partial \tau$. Для их вычисления необходимо задать текущий параметр продолжения τ и текущее значения вектора неизвестных параметров краевой задачи \mathbf{z} . Все входные и выходные параметры имеют вещественный тип. Для вычисления правых частей системы дифференциальных уравнений метода продолжения сначала определяются начальные условия интегрирования системы дифференциальных уравнений (3.3.1) для \mathbf{y} , расширенной уравнениями для производных $\partial \mathbf{y} / \partial z_j$ ($j = 1 \dots 8$), $\partial \mathbf{y} / \partial \tau$.

$$\begin{aligned}
y_1 &= p_0, y_2 = e_{x0}, y_3 = e_{y0}, y_4 = i_{x0}, y_5 = i_{y0}, y_6 = L_{K0} = L_0, y_7 = t_0 = 0, y_8 = m_0, \\
y_9 &= z_1 = p_{p0}, y_{10} = z_2 = p_{ex0}, y_{11} = z_3 = p_{ey0}, y_{12} = z_4 = p_{ix0}, y_{13} = z_5 = p_{iy0}, \\
y_{14} &= z_6 = p_{LK0}, y_{15} = z_7 = p_{t0}, y_{16} = z_8 = p_{m0}, \\
y_{17+i} &= \partial y_{i+8} / \partial z_i = 1, i = 1 \dots 8,
\end{aligned}$$

а остальные значения массива (соответствующие начальным значениям производных $\partial y_{i+8} / \partial z_j = 1, i \neq j$) устанавливаются нулевыми.

Начальная вспомогательная долгота устанавливается нулевой: $K_0 = 0$, а конечная – равной текущему значению конечной вспомогательной долготы: $K_f = z_9$.

После установки начальных условий, границ интервала интегрирования K_0, K_f и настроек метода интегрирования, производится вычисление гамильтониана и его производных в начальной точке траектории, вычисление невязки, определяемой последним уравнением (2.1.11), численное интегрирование совместной системы дифференциальных уравнений (3.3.1) и уравнений для требуемых частных производных с использованием ранее описанной схемы вычисления правых частей дифференциальных уравнений возмущенного оптимального движения, заполнение массивов, представляющих вектор невязок краевой задачи \mathbf{f} , матрицы $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{z}$, и вектора $\partial \mathbf{f} / \partial \tau$ с использованием результатов численного интегрирования и вычисление с их помощью правых частей дифференциальных уравнений метода продолжения (3.1.4). Система дифференциальных уравнений метода продолжения численно интегрируется по параметру продолжения τ от 0 до 1. Для численного интегрирования используется метод Грегга-Булриша-Штоера с адаптивным шагом и порядком [47]. После каждого успешного шага численного интегрирования проводится коррекция накопившейся вычислительной ошибки с использованием ограниченного числа итераций метода Ньютона или гибридного алгоритма [48] для уравнения $\mathbf{f}-(1-\tau)\mathbf{b}$. После успешного завершения численного интегрирования по τ , вектор неизвестных параметров краевой задачи \mathbf{z} (фазовый вектор системы дифференциальных уравнений продолжения) содержит искомое решение задачи оптимизации возмущенной траектории.

Проблема негладкой зависимости невязок краевой задачи от ее неизвестных параметров при рождении и исчезновении точек переключения тяги решается сглаживанием ступенчатой функции тяги $\delta(S)$ [13, 14, 29-31]. Такое сглаживание может быть проведено с использованием какой-либо аналитической аппроксимации функции Хевисайда. В данной работе используется аналитическая аппроксимация вида

$$\delta(S) \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{S}{\sqrt{S^2 + c\varepsilon^2(\tau)}} \right), \quad (3.3.2)$$

где $c = 2 \cdot (\sqrt{2} + 1) \approx 4.828427$, $\varepsilon(\tau)$ – положительный регуляризирующий член, регулирующий степень близости аппроксимации (3.3.2) к ступенчатой функции: чем меньше ε , тем ближе аппроксимация к ступенчатой функции. Само значение ε является линейной функцией параметра продолжения τ : в начале продолжения, при $\tau = 0$, значение ε достаточно велико, в результате величина $d\delta/dS$ остается достаточно малой в окрестности $S = 0$. В конце продолжения, при $\tau = 1$ значение ε становится достаточно малым для приемлемой аппроксимации ступенчатой функции тяги. При проведении вычислений в этой работе использовалась зависимость $\varepsilon(\tau) = 1 - \tau + \varepsilon_f \tau$, где $\varepsilon_f = 10^{-4} \dots 10^{-5}$. Следует отметить, что выражение (3.3.2) было получено как производная от формулы для гиперболы $\varphi(S, \varepsilon) = \frac{1}{2} \left(S + \sqrt{S^2 + c\varepsilon^2} \right)$: $\lim_{S \rightarrow -\infty} \varphi(S, \varepsilon) = 0$, $\lim_{S \rightarrow \infty} \varphi(S, \varepsilon) = S$.

3.4 Метод диагностики существования траекторий с ограниченной тягой и постоянной скоростью истечения с помощью решения задачи минимизации тяги

Вопрос существования решения является одним из наиболее важных при анализе траекторий с малой или конечной тягой и, в общем случае, остается пока нерешенным. В разделе 2.3 представлен метод решения задачи минимизации тяги в постановке с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета.

Рассматривается процесс вычисления многовитковой траектории с минимальной тягой. В качестве начального приближения для T_{\min} -задачи используются значения неизвестных параметров краевой задачи, полученные для оптимальной ОМ-траектории. Начальное приближение для значения минимальной тяги T_{\min} устанавливается равным $\frac{m_0 c}{\Delta t^{LP}} \cdot \left(1 - e^{-V_{id}^{LP}/c} \right)$, где $\Delta t^{LP}, V_{id}^{LP}$ – время перелета и затраты характеристической скорости на идеально-регулируемой траектории соответственно. Начальное приближение для p_t и p_m устанавливается равным 0.

В правые части дифференциальных уравнений для фазовых и сопряженных переменных вводится параметр продолжения τ таким образом, чтобы при $\tau = 0$, с учетом начального приближения для сопряженных переменных, дифференциальные уравнения совпадали с уравнениями невозмущенной ОМ-задачи, а при $\tau = 1$ – с уравнениями для возмущенной T_{\min} -задачи (2.3.11) (с гамильтонианом (2.3.3), (2.3.8)) и с краевыми условиями (2.1.11), (2.1.12) и (2.3.10). К сожалению, наиболее очевидный подход, заключающийся в

использовании гамильтоновой формы записи этих уравнений с гамильтонианом вида $(1-\tau)H_{LP} + \tau H_{T_{\min}}$, приводит к неограниченному росту начальных значений сопряженных переменных при стремлении τ к 1. Поэтому используется немного более сложная параметризация уравнений движения следующего вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{x}}{dK} = \frac{(1-\tau)k + \tau T_{\min} k_1 k_2 / m}{1-\tau + \tau B} \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{B} + \tau k_1 k_2 \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{a}_p, \\ \frac{dL_K}{dK} = \frac{(1-\tau)k + \tau T_{\min} k_1 k_2 / m}{1-\tau + \tau B} \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial p_{LK}} \mathbf{B} + \tau k_1 k_2 \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial p_{LK}} \mathbf{a}_p, \\ \frac{dt}{dK} = k_1, \frac{dT_{\min}}{dK} = 0, \\ \frac{d\mathbf{p}}{dK} = -\frac{(1-\tau)}{1-\tau + \tau B} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial k}{\partial \mathbf{x}} A^2 + k \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A} \right) - \\ - \frac{\tau T_{\min}}{1-\tau + \tau B} \cdot \left[\frac{\partial k_1}{\partial \mathbf{x}} S_{T_{\min}} A_1 + \frac{k_1}{m} \cdot \left(\frac{\partial k_2}{\partial \mathbf{x}} A_1^2 + k_2 \frac{\partial \mathbf{A}_1^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}_1 \right) \right] - \tau \frac{\partial H_p}{\partial \mathbf{x}}, \\ \frac{dp_{LK}}{dK} = -\frac{(1-\tau)}{1-\tau + \tau B} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial k}{\partial L_K} A^2 + k \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial L_K} \mathbf{A} \right) - \\ - \frac{\tau T_{\min}}{1-\tau + \tau B} \cdot \left[\frac{\partial k_1}{\partial L_K} S_{T_{\min}} A_1 + \frac{k_1}{m} \cdot \left(\frac{\partial k_2}{\partial L_K} A_1^2 + k_2 \frac{\partial \mathbf{A}_1^T}{\partial L_K} \mathbf{A}_1 \right) \right] - \tau \frac{\partial H_p}{\partial L_K}, \\ \frac{dp_t}{dK} = -\tau \frac{\partial H_p}{\partial t}, \frac{dp_m}{dK} = \tau T_{\min} k_1 k_2 \frac{A_1}{m^2}, \\ \frac{dp_T}{dK} = \tau \cdot \left[T_{\min} + k_1 \frac{p_m}{c} + k_1 k_2 \cdot \left[\frac{1}{m} \left(-A_1 + \xi T^2 \frac{A_{n1}}{A_1} \right) + \xi T a_{pn} \right] \right], \end{array} \right. \quad (3.4.1)$$

где $\mathbf{B} = (1-\tau)\mathbf{A} + \tau\mathbf{A}_1$.

В результате решения этой задачи определяется значение минимальной тяги T_{\min} . Если заданное значение тяги T меньше T_{\min} , то перелет с заданной угловой дальностью невозможен. В этом случае необходимо увеличить значение тяги T либо угловую дальность перелета ΔL . Если $T \geq T_{\min}$, то решение существует и можно переходить к задаче на минимум затрат рабочего тела.

3.5 Заключение по разделу

В результате проведенных работ разработана библиотека программ, позволяющая вычислять первые и смешанные вторые производные вещественных функций нескольких переменных с точностью, близкой к точности вычисления функций.

Благодаря используемой технологии объектно-ориентированного программирования минимизирован требуемый объем доработок программного кода, используемого для вычисления значения некоторой функции в вещественной области, для его трансформации в программный код, в котором кроме значений функции вычисляются и значения ее первых и смешанных вторых производных.

Использование в качестве основного типа данных комплексных дуальных чисел с векторной комплексной дуальной частью позволяет с помощью одного вычисления функции в комплексной дуальной области вычислить массив первых производных этой функции по элементам заданного векторного аргумента и массив смешанных вторых производных по этому векторному аргументу и по дополнительному скалярному аргументу. Эта особенность реализации алгоритма вычисления производных и разработанной на его основе библиотеки программ позволяет сократить требуемый объем вычислений в типовых задачах оптимального управления по сравнению с методами, использующими мультикомплексные [15] или гипердуальные [16, 55, 56] числа для вычисления вторых производных.

Разработанный метод и программное обеспечение обеспечивают возможность проведения оптимизации траектории без необходимости задания начального приближения для неизвестных параметров краевой задачи принципа максимума, продемонстрировали хорошую вычислительную устойчивость (благодаря использованию метода продолжения и последовательности оптимизации траекторий с идеально-регулируемым двигателем и с двигателем ограниченной тяги) и скорость сходимости. Немаловажным фактором является существенное упрощение подготовки математической модели возмущенного движения КА при применении разработанного метода и программного обеспечения. В отличие от других известных подходов оптимизации возмущенных траекторий, основанных на непрямых подходах, в нашем случае не требуется крайне трудоемкий вывод выражений или специализированных алгоритмов вычислений производных от возмущающих ускорений по фазовым координатам при рассмотрении нового состава или математической модели возмущающих ускорений. Для обеспечения работы нашего метода требуется только вычисление самих возмущающих ускорений в комплексной дуальной области, что облегчается разработкой библиотеки программ для вычисления в комплексной дуальной области и с помощью этой библиотеки, использующей технику перегрузки операторов и функций, практически сводится к переопределению типов используемых переменных. Перечисленные особенности разработанного метода и программного обеспечения позволили преодолеть типичные недостатки непрямых подходов – сложность подготовки математической модели оптимального движения, чувствительность к выбору начального приближения для решения краевой задачи, при сохранении типичных достоинств непрямых

подходов – высокой точности и скорости вычислений. В частности, по скорости вычисления, разработанный метод и программное обеспечение существенно (в типовых случаях – на порядок) превосходит известные аналоги, основанные на применении прямых методов. Детальное сравнение характеристик разработанного программного обеспечения с известными (малочисленными) аналогами затруднено из-за отсутствия достаточно полной информации по вычислительной устойчивости и производительности аналогов, однако, исходя из имеющейся информации, можно утверждать, что разработанные метод и программно-математическое обеспечение находятся на современном мировом уровне, а по отдельным показателям, возможно, превосходят его.

Разработанный метод вычисления траекторий с минимальной тягой может использоваться в качестве средства для диагностики существования решения в задаче оптимизации траекторий с ограниченной тягой: при заданной угловой дальности траектория КА с двигателем заданной тяги существуют только в том случае, если величина заданной тяги не меньше минимальной. Для решения этой задачи использовано последовательное решение задач оптимизации траектории космического аппарата с идеально-регулируемым двигателем и минимизации тяги.

4 ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОВИТКОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ МЕЖОРБИТАЛЬНЫХ ПЕРЕЛЕТОВ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ

Значительное число современных космических аппаратов выводится на геостационарную орбиту и другие целевые орбиты с использованием электроракетных двигательных установок. Высокий удельный импульс ЭРДУ позволяет существенно сократить требуемые затраты топлива на выведение, обеспечить выведение на высокие целевые орбиты КА увеличенной массы или использовать для выведения более легкие и дешевые ракеты-носители. Использование ЭРДУ позволяет отказаться от использования токсичных компонентов ракетного топлива (гидразина) на борту КА и заменить их экологически чистым ксеноном или криптоном. Ценой, которую приходится платить за эти преимущества применения ЭРДУ, является существенное увеличение длительности выведения, так как тяга ЭРДУ ограничена располагаемой на борту КА электрической мощностью и мала по сравнению с тягой традиционных химических ракетных двигателей.

Типичная схема выведения КА с ЭРДУ на ГСО включает в себя выведение КА на некоторую эллиптическую промежуточную орбиту с помощью двигателей большой тяги (верхней ступени ракеты-носителя или апогейной двигательной установки КА) и многовиткового перелета КА с этой орбиты на ГСО с помощью ЭРДУ. Такая схема выведения позволяет реализовать компромисс между возможностями выведения с низкой околоземной орбиты на ГСО КА максимально большой массы за длительное время с использованием только ЭРДУ или КА относительно малой массы за короткое время с использованием только двигателей большой тяги.

Для эффективного применения комбинированной схемы выведения требуется сквозная оптимизация траектории перелета с низкой околоземной орбиты на ГСО, включающая в себя оптимизацию участков перелета с большой и малой тягой и оптимизацию условий стыковки этих участков, то есть выбор оптимальных параметров промежуточной орбиты. Целью оптимизации может быть, например, выведение на ГСО КА максимальной массы за заданное время или КА заданной массы за минимальное время. Задача сквозной оптимизации комбинированной схемы перелета на ГСО может быть разделена на подзадачи оптимизации перелета с большой тягой на промежуточную орбиту и перелета с малой тягой с промежуточной орбиты на ГСО со стыковкой участков перелета с большой и малой тягой через параметры промежуточной орбиты. Задача оптимизации многовиткового перелета с промежуточной орбиты на ГСО (или другую целевую орбиту) представляет наибольшую методическую сложность.

В разделе 1, 2 и 3 диссертационной работы приведено подробное описание нового метода оптимизации возмущенных траекторий космических аппаратов с конечной тягой, основанного на применении принципа максимума, метода продолжения и алгебры комплексных дуальных чисел для высокоточного вычисления требуемых производных. В этом разделе приводятся численные результаты оптимизации траекторий между различными околоземными орбитами с использованием этого метода.

Кроме того, предложенный метод в диссертационной работе позволяет автоматизировать процесс вычисления оптимальной траектории с ограниченной тягой, фиксированной угловой дальностью и оптимальным временем перелета. В процессе вычислений проводится проверка существования решения и, в случае его отсутствия возможна выработка рекомендаций для изменения исходных данных (тяги или угловой дальности перелета) до значений, при которых решение существует. С использованием разработанного метода был проведен численный анализ оптимальных траекторий с фиксированной угловой дальностью и оптимальным временем перелета. В результате этого анализа обнаружен ряд новых свойств таких траекторий.

Для иллюстрации возможностей разработанного метода рассматриваются возмущающие ускорения от гармоник геопотенциала до 4-го порядка и 4-й степени включительно и притяжения Луны и Солнца. Такой состав возмущений рассматривается для всех решаемых задач, если специально не указывается использование другой модели возмущающих ускорений. В качестве математической модели гравитационного поля Земли использовалась модель EGM-96 [61]. Матрицы прецессии и нутации фиксировались на начальный момент времени, а матрица собственного движения полюса принималась единичной. Для расчета эфемерид Луны и Солнца использовалось эфемеридное обеспечение DE405 [60]. Гравитационный параметр Солнца был принят равным $0.132712440018 \cdot 10^{21} \text{ м}^3/\text{с}^2$, а Луны – $0.4902799 \cdot 10^{13} \text{ м}^3/\text{с}^2$.

В этом разделе приводятся численные результаты решения краевых задач принципа максимума для невозмущенных и возмущенных траекторий, а также анализируется влияние на параметры оптимальных возмущенных траекторий времени начала перелета, угловой дальности перелета и состава учитываемых возмущающих ускорений.

Представленные в этом разделе численные результаты были опубликованы в работах автора [19, 20, 21, 23].

4.1 Численные примеры невозмущенных задач: автоматизация вычислений оптимальных многовитковых траекторий с малой тягой

Рассмотрим задачу перелета КА с ЭРДУ с начальной орбиты, имеющей высоту перигея 500 км, высоту апогея 60000 км, наклонение 7 градусов, аргумент перигея 178 градусов и долготу восходящего узла 0 градусов на геостационарную орбиту (круговую орбиту высотой 35793 км с нулевым наклонением). При решении T_{\min} - и ОТ-задач, начальную массу КА будем считать равной 1000 кг, а удельный импульс ЭРДУ – 1520 с. Значение тяги T , угловая дальность перелета ΔL и начальная истинная долгота L_0 будут варьироваться.

При угловой дальности 720 градусов и начальной истинной долготе 300 градусов, функционал (2.2.1) на оптимальной ОМ-траектории равен $7.945323 \text{ м}^2/\text{с}^3$, затраты характеристической скорости – 1850.792 м/с, а оптимальное время перелета – 2.761054 суток. По величинам характеристической скорости и времени перелета, полученным для оптимальной ОМ-траектории, можно оценить, что на траектории с двигателем заданной постоянной скорости истечения требуется тяга 7.296023 Н. Эта величина использовалась в качестве начального приближения при решении T_{\min} -задачи вместе с конечным значением вспомогательной долготы $K_f = 719.958547127$ градусов и безразмерными начальными значениями сопряженных переменных $p_p = 0.0601712907$, $p_{ex} = -0.0569745841$, $p_{ey} = 0.0016263456$, $p_{ix} = -0.0068812764$, $p_{iy} = 0.0004556386$, $p_{LK} = -0.0001706370$, полученными в результате оптимизации ОМ-траектории (в качестве масштаба длины здесь используется радиус конечной орбиты, а в качестве масштаба скорости – круговая скорость на этой орбите). В результате решения T_{\min} -задачи получено минимальное значение тяги 7.85384929 Н, оптимальное время перелета 2.926468 суток, $K_f = 719.960624$ градуса, $p_p = 0.0360544680$, $p_{ex} = -0.0408377881$, $p_{ey} = 0.0026177997$, $p_{ix} = -0.0026549863$, $p_{iy} = 0.0001313567$, $p_{LK} = 0.0001100354$, $p_m = -0.0154193714$. Разумеется, значение минимальной тяги, как и все остальные параметры этой краевой задачи, зависит от удельного импульса. Например, при снижении удельного импульса до 1000 с минимальная тяга уменьшается до 7.51139009 Н.

Решение T_{\min} -задачи позволяет утверждать, что при заданном удельном импульсе 1520 с траектории перелета заданной угловой дальности с заданными краевыми условиями существуют, если значение тяги больше 7.85384929 Н. Рассмотрим ОТ-задачу для КА с двигателем, имеющим тягу 15 Н. В качестве начального приближения для начальных значений сопряженных переменных p_p , p_{ex} , p_{ey} , p_{ix} , p_{iy} , p_{LK} и для K_f , как и в T_{\min} -задаче, используются значения, полученные при оптимизации ОМ-траектории. В результате решения ОТ-задачи оптимальное время перелета оказалось равным 2.476998 суток, $K_f = 719.967117$ градуса, $p_p = 0.1827583099$, $p_{ex} = -0.0866805090$, $p_{ey} = 0.0021479554$, $p_{ix} = -0.0354353837$, $p_{iy} = -$

0.0116091643, $p_{LK} = 5.4714834255 \cdot 10^{-11}$, $p_m = -0.1116559277$. Конечная масса КА оказалась равной 902.000747 кг (в T_{\min} -задаче – 866.778046 кг).

На рисунке 4.1.1 слева представлены проекции на координатные плоскости оптимальных ОМ-траекторий (толстые линии), T_{\min} -траекторий (тонкие сплошные линии) и ОТ-траекторий с тягой 15 Н (пунктирные линии для участков с выключенным двигателем и толстые сплошные красные линии для участков с работающим двигателем). Справа на рисунке 4.1.1 представлены зависимости реактивного ускорения, угла тангажа и угла рысканья от времени. Из этого рисунка видно, что оптимальные траектории для рассматриваемых задач достаточно сильно отличаются. Оптимальное время перелета оказалось минимальным на ОТ-траектории, а максимальным – на T_{\min} -траектории.

На рисунке 4.1.2 представлены оптимальные траектории с теми же граничными условиями и с тем же удельным импульсом, но с угловой дальностью перелета 100 витков. Для ОМ-траектории оптимальная длительность перелета оказалась равной 114.944643 суток. Минимальная тяга, вычисленная в результате решения T_{\min} -задачи, оказалась равной 0.19171759 Н, оптимальное время перелета на траектории с минимальной тягой равно 144.785558 суток, а конечная масса КА – 839.107175 кг. Оптимальная ОТ-траектория была рассчитана для тяги 0.25 Н. Для нее оптимальное время перелета равно 109.324364 суток, а конечная масса КА – 888.438782 кг. Черные линии на рисунке 4.1.2 обозначают участки траектории с работающим двигателем, а серые линии – участки траектории с выключенным двигателем.

Оптимальное управление на этих 100-витковых траекториях представлено на рисунке 4.1.3. Верхний ряд графиков представляет оптимальное управление для ОМ-задачи, средний ряд - для T_{\min} -задачи и нижний ряд – для ОТ-задачи с тягой 0.25 Н. В левой колонке представлены зависимости реактивного ускорения от времени. Для ОТ-задачи добавлена зависимость функции переключения от времени, обозначенная красной линией. В средней и правой колонках представлены зависимости от времени угла тангажа и угла рысканья соответственно. Следует отметить схожесть оптимальных программ тангажа и рысканья для ОМ- и ОТ-траекторий. В обоих случаях угол тангажа на первом участке траектории колеблется около нуля, обеспечивая увеличение большой полуоси, а на втором участке изменяется от -180 до 180 градусов, проходя нулевое значений в окрестности апогея и значение 180 (-180) градусов – в окрестности перигея, обеспечивая уменьшение эксцентриситета орбиты. Угол рысканья колеблется в окрестности нуля с максимальным отклонением около 10 градусов везде, кроме момента перехода от первого к второму участку траектории. В этот момент происходит кратковременное увеличение угла рысканья почти до 90 градусов в районе перигея. Зависимость от времени реактивного ускорения на ОМ-

траектории имеет вид, близкий к зависимости от времени функции переключения S ОТ-траектории. На рисунке 4.1.4 представлена зависимость оптимального реактивного ускорения и функции переключения от времени на среднем участке оптимальной ОТ-траектории в более крупном масштабе.

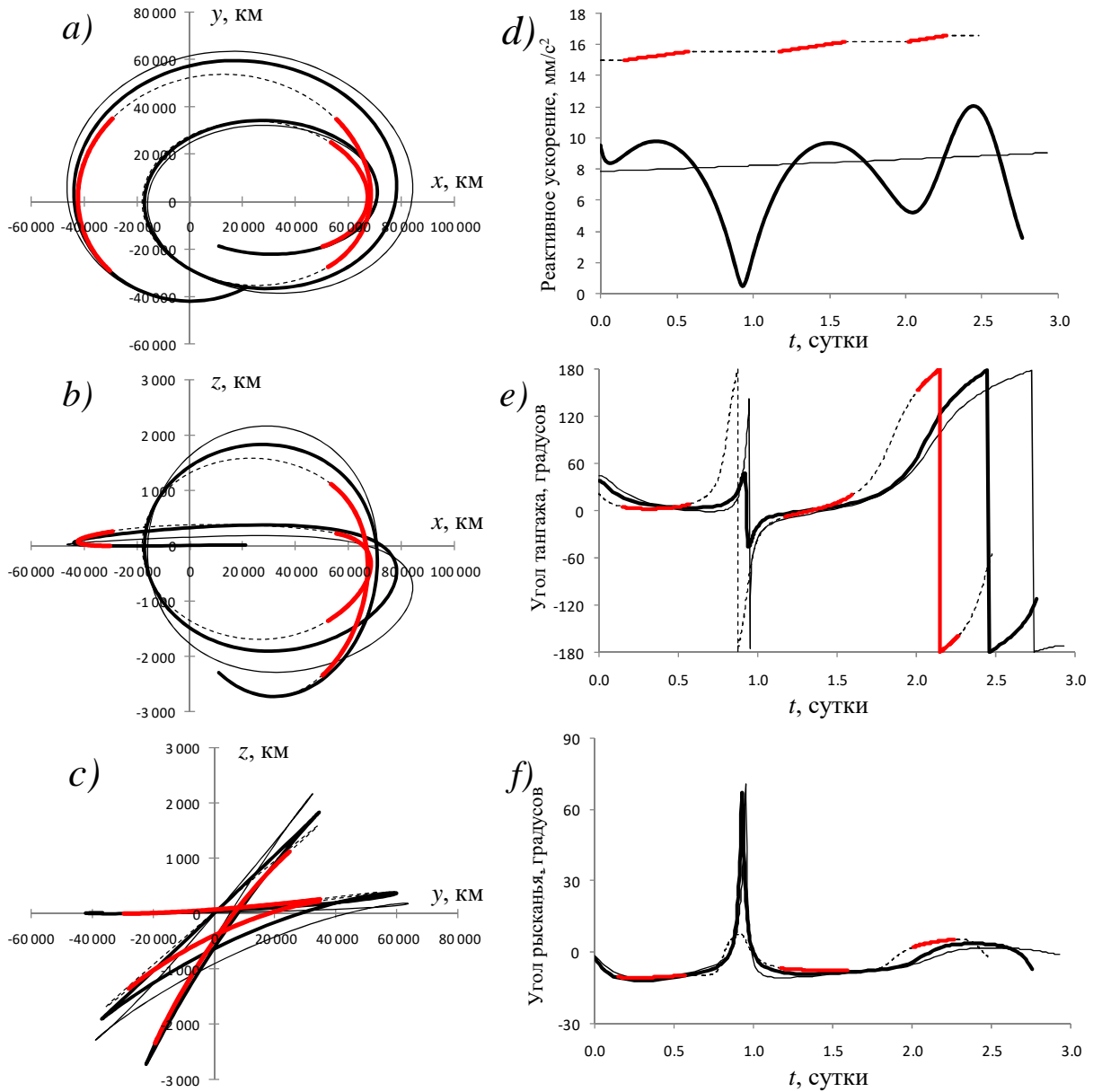


Рисунок 4.1.1. Проекция оптимальных двухвитковых траекторий на координатные плоскости (a, b, c) и зависимость оптимального управления от времени (d, e, f).

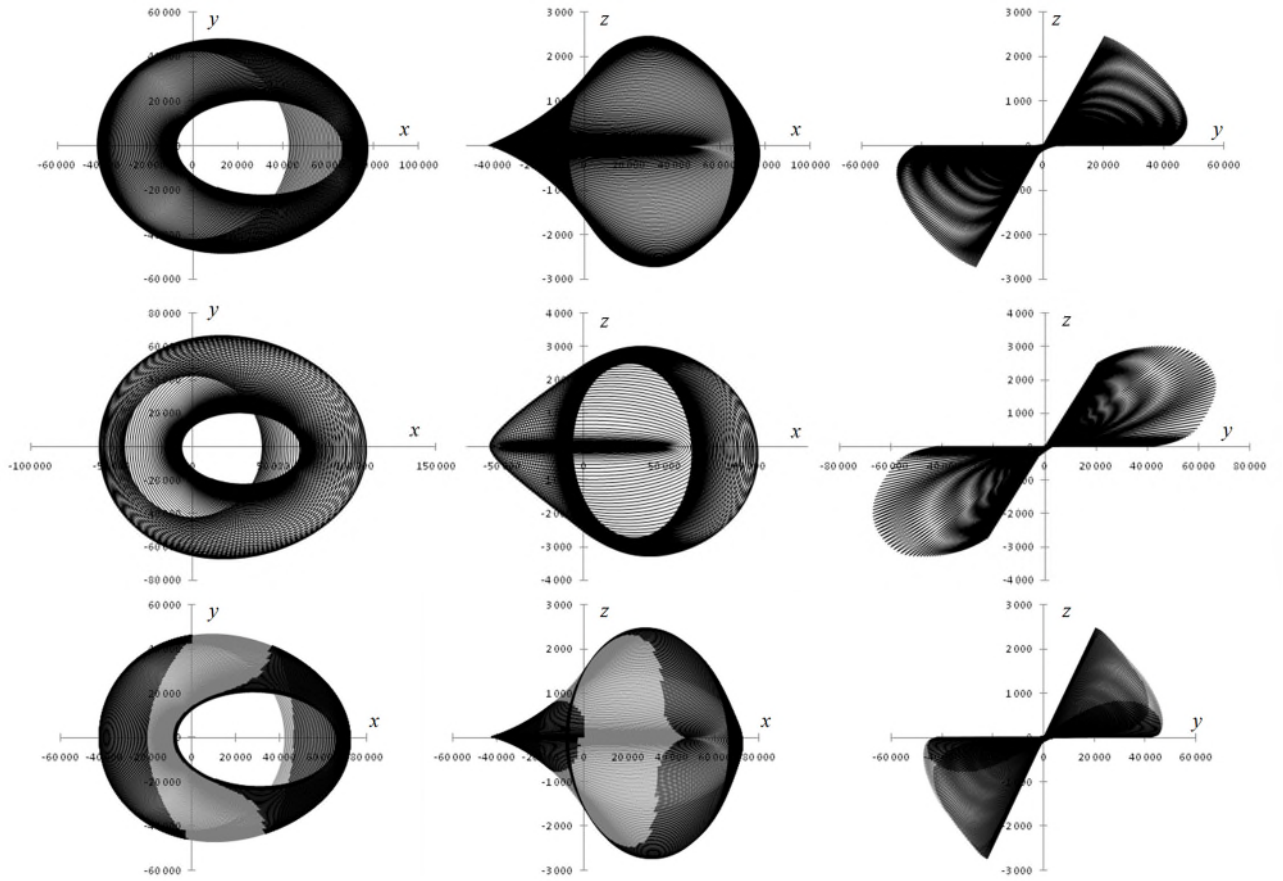


Рисунок 4.1.2. Проекция оптимальных 100-витковых траекторий на координатные плоскости. Верхний ряд – OM-траектория, средний ряд – T_{\min} -траектория, нижний ряд – OT-траектория с двигателем тягой 0.25 Н.

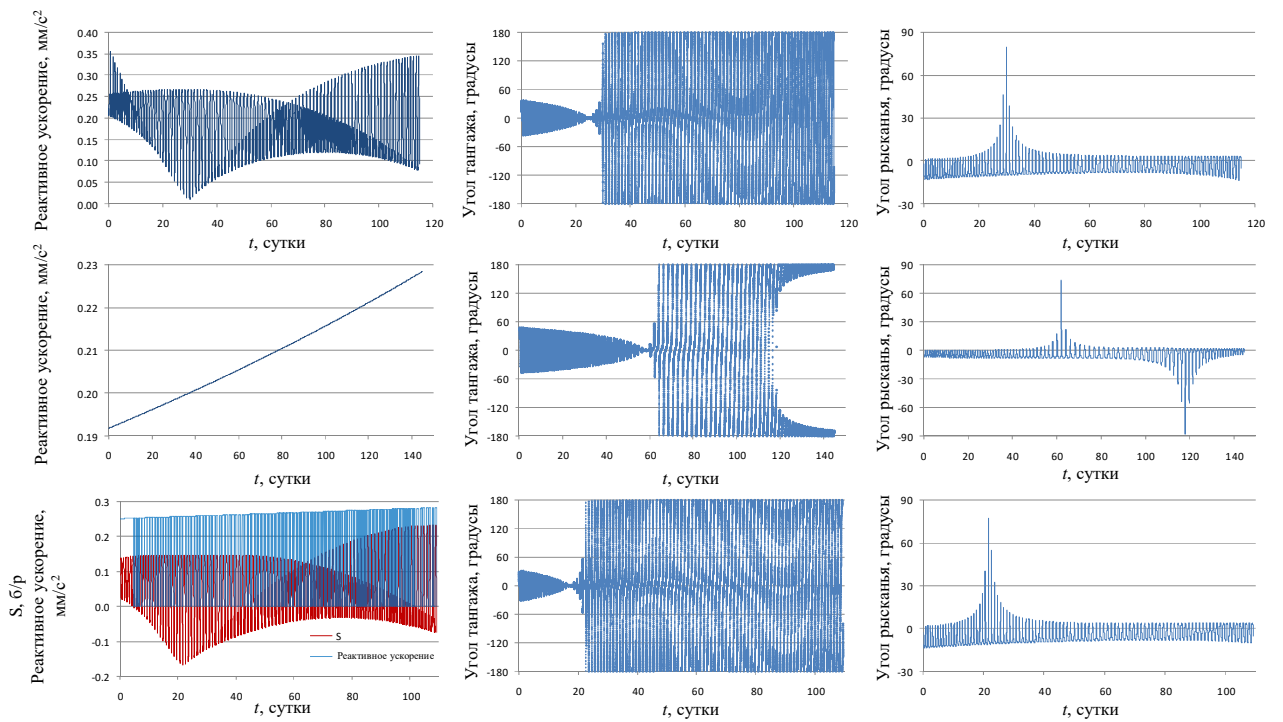


Рисунок 4.1.3. Оптимальное управление на 100-витковых OM-, T_{\min} - и OT-траекториях.

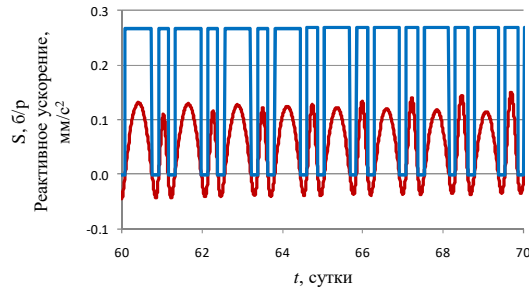


Рисунок 4.1.4. Зависимость оптимального реактивного ускорения и функции переключения от времени на среднем участке оптимальной ОТ-траектории.

Оптимальное управление в T_{\min} -задаче заметно отличается от оптимального управления в ОМ- и ОТ-задачах. В конце траектории добавляется третий участок, на котором угол тангажа колеблется около значения 180 градусов, обеспечивая уменьшение большой полуоси. В момент перехода от второго к третьему участку траектории угол рысканья в районе апогея кратковременно достигает значения, близкого к -90 градусов.

На рисунке 4.1.5 представлены зависимости эксцентриситета, большой полуоси и наклона от времени и угловой дальности на оптимальных ОМ-, T_{\min} - и ОТ-траекториях. На всех траекториях эксцентриситет и наклонение монотонно уменьшаются, а большая полуось на начальном этапе перелета увеличивается, а затем уменьшается. Зависимости эксцентриситета, большой полуоси и наклона от времени и угловой дальности для рассматриваемых оптимальных ОМ- и ОТ-траекторий схожи друг с другом, но существенно отличаются от зависимостей для T_{\min} -траектории. Это можно объяснить существенным отличием структуры оптимального управления на T_{\min} -траектории по сравнению с ОМ- и ОТ-траекториями.

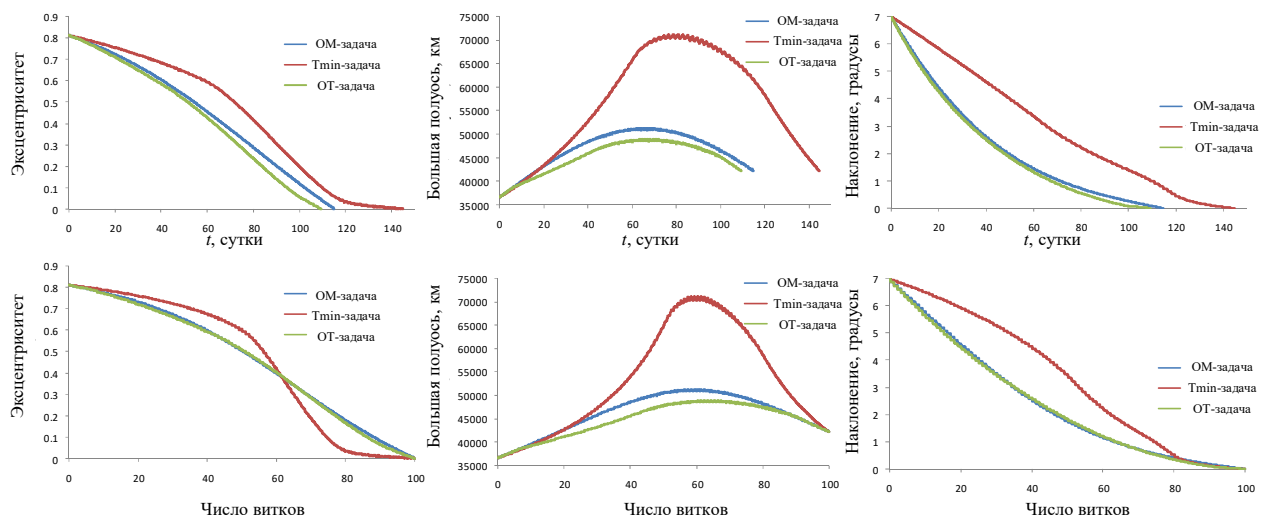


Рисунок 4.1.5. Зависимости эксцентриситета, большой полуоси и наклона от времени и угловой дальности на оптимальных ОМ-, T_{\min} - и ОТ-траекториях.

Рассмотрим влияние числа витков n_{rev} и начальной истинной долготы КА L_0 на основные характеристики T_{min} -траекторий. Будем рассматривать перелет между теми же орбитами КА с такой же начальной массой и удельным импульсом двигательной установки. Значение L_0 будем варьировать от 0 до 360 градусов, а n_{rev} – от 2 до 300. В таблице 4.1.1. представлена зависимость минимального значения тяги T_{min} от n_{rev} и L_0 .

Таблица 4.1.1. Минимальное значение тяги [Н] в зависимости от числа витков и начальной истинной долготы КА

L_0 , градусы	Число витков					
	2	20	50	100	200	300
0	8.72241	0.96116	0.38459	0.19229	0.09614	0.06409
10	9.26153	0.96528	0.38529	0.19246	0.09618	0.06411
50	10.72033	0.97301	0.38656	0.19278	0.09626	0.06415
100	10.95410	0.97092	0.38621	0.19269	0.09624	0.06414
150	10.30636	0.96456	0.38517	0.19243	0.09617	0.06411
200	9.29495	0.95674	0.38391	0.19211	0.09609	0.06407
250	8.42057	0.94986	0.38281	0.19184	0.09603	0.06404
300	7.85385	0.94682	0.38232	0.19172	0.09600	0.06403
350	8.19780	0.95672	0.38387	0.19211	0.09609	0.06407
360	8.72241	0.96116	0.38459	0.19229	0.09614	0.06409

На рисунке 4.1.6 слева показана зависимость осредненной по L_0 минимальной тяги \tilde{T}_{min} от числа витков. Эта зависимость очень близка к гиперболической, то есть произведение средней по L_0 минимальной тяги на число витков почти постоянно. Это свойство позволяет легко оценить требуемое минимальное число витков n_{rev}^* при заданном значении тяги T^* после вычисления минимальной тяги T_{min1} на T_{min} -траектории с произвольным (достаточно большим) числом витков n_{rev1} : $n_{rev}^* = n_{rev1} \cdot T_{min1} / T^*$.

На рисунке 4.1.6 справа представлена зависимости от L_0 относительного отклонения минимальной тяги от среднего значения в процентах: $\delta T_{min}(L_0) = \frac{T_{min}(L_0) - \tilde{T}_{min}}{\tilde{T}_{min}} \cdot 100$. На двухвитковой траектории отклонение минимальной тяги от среднего значения достигает 18.5% при $L_0 = 100$ градусов. При увеличении числа витков максимальное отклонение минимальной тяги от среднего значения быстро уменьшается (рисунок 4.1.6 справа). При 20 витках отклонение не превышает 1.5%, а при 100 – 0.3%. Зависимость $T_{min}(L_0)$ при заданной угловой дальности перелета имеет единственный минимум на отрезке $L_0 \in [0^\circ; 360^\circ]$. В рассматриваемой задаче минимальное значение T_{min} достигается при $L_0 \approx 300^\circ$.

Единственность минимума функции $T_{\min}(L_0)$ облегчает решение задачи минимизации тяги со свободной начальной истинной долготой и фиксированным временем перелета.

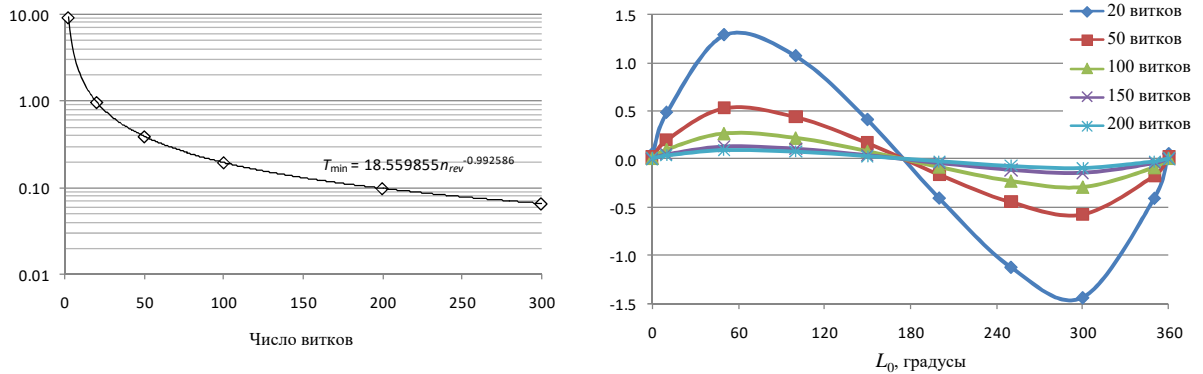


Рисунок 4.1.6. Минимальная тяга, осредненная по начальной истинной долготе, в зависимости от числа витков (слева, в ньютонах) и отклонение минимальной тяги от среднего значения (в процентах) в зависимости от начальной истинной долготы для разного числа витков.

Время перелета по T_{\min} -траектории в зависимости от L_0 и n_{rev} представлено в таблице 4.1.2. На рисунке 4.1.7 слева представлена зависимость среднего по L_0 времени перелета $\Delta\tilde{t}$ от числа витков T_{\min} -траектории. Оказалось, что среднее время перелета почти пропорционально угловой дальности. Это означает, что после решения T_{\min} -задачи с каким-либо, достаточно большим числом витков n_{rev1} , и вычисления времени перелета Δt_1 по этой траектории, можно оценить время перелета Δt по T_{\min} -траектории с любым другим, достаточно большим числом витков n_{rev} : $\Delta t = \Delta t_1 n_{rev}/n_{rev1}$.

На среднем и правом графиках рисунка 4.1.7 представлены зависимости от L_0 относительного отклонения длительности перелета по T_{\min} -траектории от среднего значения в процентах: $\delta\Delta t(L_0) = \frac{\Delta t(L_0) - \Delta\tilde{t}}{\Delta\tilde{t}} \cdot 100$. При угловой дальности 2 витка максимальное отклонение превышает 15%, но быстро снижается с увеличением n_{rev} : до 0.5% при $n_{rev} = 50$ и до 0.1% при $n_{rev} = 200$. Следует отметить, что зависимость $\Delta t(L_0)$ может иметь до 2 локальных минимумов и 2 локальных максимумов на $L_0 \in [0^\circ; 360^\circ]$.

Таблица 4.1.2. Время перелета [сутки] по оптимальной T_{\min} -траектории в зависимости от числа витков и начальной истинной долготы КА

L_0 , градусы	Число витков					
	2	20	50	100	200	300
0	2.82846	29.64422	72.44863	144.91142	289.79669	434.67575
10	2.67253	29.62206	72.48133	144.98159	289.88294	434.76371
50	2.25457	29.38962	72.57578	145.03465	289.91583	434.79466
100	2.18151	29.34143	72.84494	145.13972	289.99056	434.86675
150	2.22460	29.13429	72.75741	145.04514	289.89404	434.77000
200	2.35156	28.95537	72.48980	144.82785	289.68567	434.56239
250	2.58951	28.88783	72.35675	144.70712	289.56599	434.44290
300	2.92647	28.87163	72.47762	144.78557	289.62679	434.50227
350	2.99916	28.74424	72.41803	144.83279	289.69438	434.57084
360	2.82846	29.64422	72.44863	144.91141	289.79671	434.67574

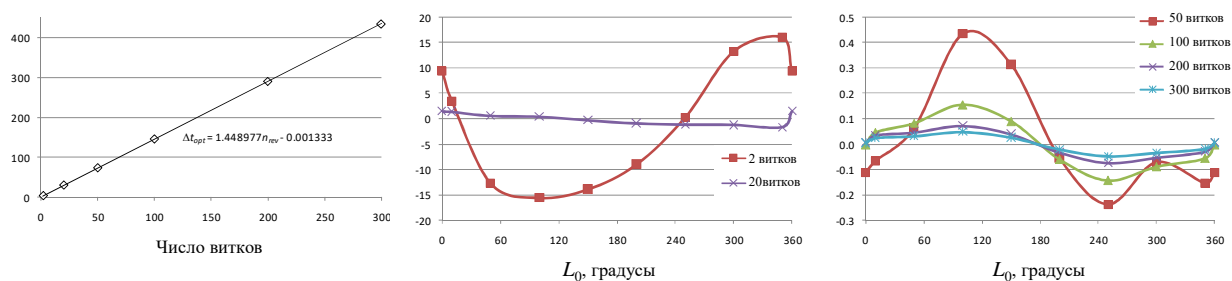


Рисунок 4.1.7. Зависимость от L_0 средней длительности перелета (слева, в сутках) и относительного отклонения длительности перелета (в середине и справа, в процентах) от среднего значения для T_{\min} -траекторий

Рассмотрим зависимости основных параметров оптимальных ОТ-траекторий с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета от величины тяги. Исследовать особенности этих зависимостей будем на примере перелета между теми же орбитами, что и ранее. Начальное значение истинной долготы примем равным 300° , начальную массу КА – 1000 кг, удельный импульс двигательной установки – 1520 с, число витков – 100, а значение тяги T проварьируем от минимального значения (решения T_{\min} -задачи) до 1 Н. Основные параметры оптимальных ОТ-траекторий для этих исходных данных в зависимости от величины тяги приведены в таблице 4.1.3. В таблице 4.1.3 используются следующие обозначения: Δt_{opt} – оптимальное время перелета по ОТ-траектории, m_f – конечная масса КА в точке с истинной долготой L_f , Δt_b – общее время работы двигателя на ОТ-траектории, S_{\min} и S_{\max} – безразмерные минимальное и максимальное значения функции переключения S на ОТ-траектории. На рисунке 4.1.8 представлены проекции оптимальных ОТ-траекторий на плоскость экватора для значений тяги 0.191718 Н (минимальная тяга), 0.195, 0.2, 0.3, 0.4 и 1.0 Н. Из рисунка 4.1.8 видно, что с увеличением тяги уменьшается максимальная

высота апогея и максимальная большая полуось на оптимальной ОТ-траектории. В пределе, в рассматриваемом примере, при увеличении тяги максимальная высота апогея становится равной высоте апогея начальной орбиты, а максимальная большая полуось – радиусу конечной орбиты.

Таблица 4.1.3. Основные параметры оптимальных ОТ-траекторий в зависимости от величины тяги

T , Н	Δt_{opt} , сутки	m_f , кг	Δt_b , сутки	$\Delta t_b/\Delta t_{opt}$	S_{min}	S_{max}
0.191718	144.7856	839.1072	144.7856	1.0000	-	-
0.191900	138.9601	845.4337	138.9601	1.0000	0.2729	18.5901
0.192000	137.6233	846.8409	137.6233	1.0000	0.1681	14.3748
0.192500	133.2768	851.2919	133.2768	1.0000	0.0054	7.4922
0.193000	130.5754	854.1752	130.3541	0.9983	-0.0426	5.4252
0.195000	123.9840	861.3472	122.6717	0.9894	-0.1052	2.7345
0.200000	116.1961	869.6394	112.4520	0.9678	-0.1318	0.9026
0.250000	109.3105	888.4388	76.9881	0.7043	-0.1688	0.2324
0.300000	106.2226	895.6003	60.0383	0.5652	-0.1750	0.1373
0.400000	106.7937	901.4687	42.4976	0.3979	-0.1793	0.0649
0.500000	107.4782	903.8702	33.1695	0.3086	-0.1815	0.0391
1.000000	108.6846	906.8862	16.0644	0.1478	-0.1870	0.0088

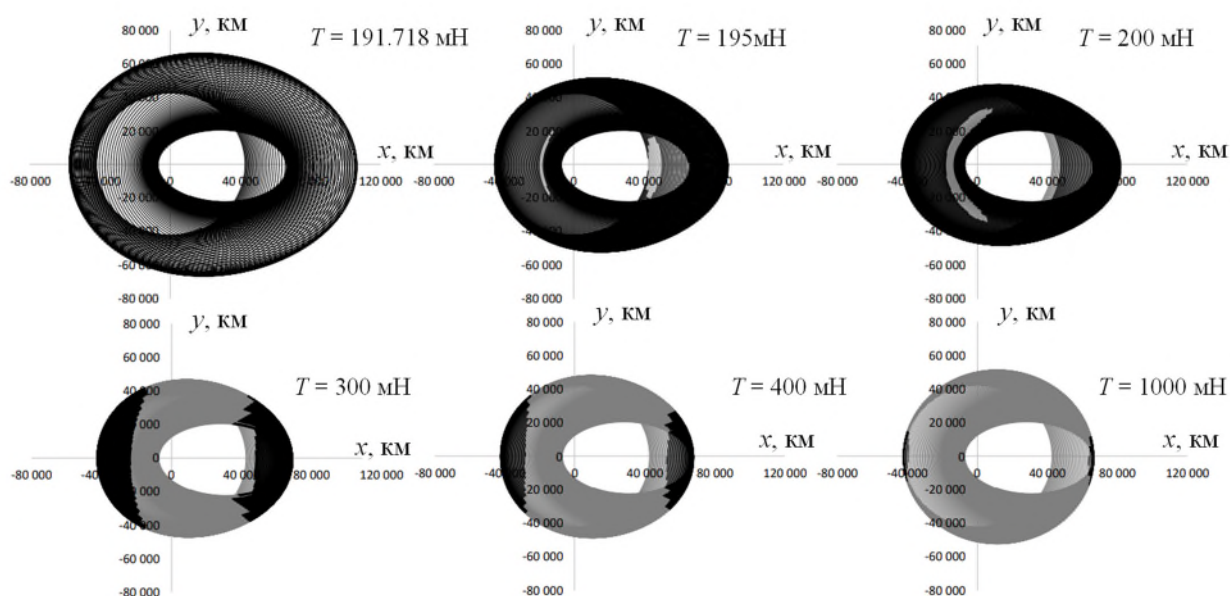


Рисунок 4.1.8. Проекция оптимальных 100-витковых ОТ-траекторий на плоскость экватора для различных величин тяги

На рисунке 4.1.9, на основе данных из таблицы 4.1.3, представлены зависимости оптимального времени перелета, конечной массы КА и отношения времени работы двигателя к общему времени перелета от тяги на оптимальных ОТ-траекториях. Из таблицы 4.1.3 и

рисунка 4.1.9 видно, что время перелета на ОТ-траектории с фиксированной угловой дальностью имеет максимальное значение при минимальной тяге. С ростом тяги оптимальное время перелета быстро уменьшается до минимального значения, а затем опять начинает расти, асимптотически приближаясь к некоторому предельному значению. В рассматриваемом примере максимальное время перелета при минимальной тяге равно 144.8 суток, минимум оптимального времени перелета около 106.2 суток достигается при тяге около 0.3 Н, а асимптотическое значение оптимального времени перелета при увеличении тяги близко к 110 суткам (левый график на рисунке 4.1.9). Конечная масса КА монотонно растет с ростом тяги, приближаясь к некоторому асимптотическому значению (около 910 кг в рассматриваемом примере, средний график на рисунке 4.1.9). Неожиданным открытием оказалось, что на оптимальных ОТ-траекториях с тягой, близкой к минимальному значению, двигатель работает постоянно (правый график на рисунке 4.1.9). В рассмотренном примере двигатель не выключается на оптимальных траекториях с тягой от 0.191718 до 0.1925 Н. Это свойство отличает оптимальные ОТ-траектории с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета от оптимальных ОТ-траекторий с фиксированным временем перелета. На оптимальных ОТ-траекториях с фиксированным временем перелета увеличение тяги по сравнению с минимальным значением приводит к появлению участка траектории с неработающим двигателем, так как на них минимальное значение функции переключения S равно нулю при минимальной тяге. Анализ рассматриваемых оптимальных ОТ-траекторий с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета показал, что минимальное значение функции переключения на интервале изменения тяги от 0.191718 до 0.1925 Н положительно и монотонно уменьшается с увеличением тяги. Минимальное значение функции переключения ОТ-задачи монотонно уменьшается с увеличением тяги и за пределами этого интервала, стремясь к некоторому отрицательному предельному значению при стремлении тяги к бесконечности. Максимальное значение функции переключения также монотонно уменьшается, стремясь к нулю при стремлении тяги к бесконечности.

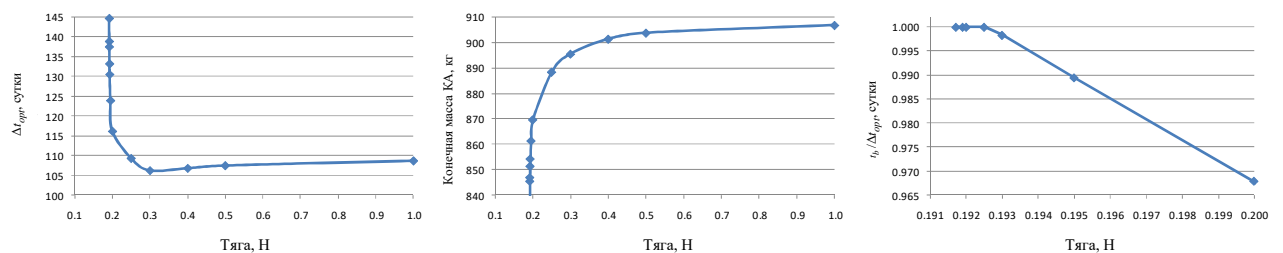


Рисунок 4.1.9. Зависимости оптимального времени перелета (слева), конечной массы КА (в середине) и отношения времени работы двигателя к общему времени перелета (справа) от тяги на оптимальных ОТ-траекториях

4.2 Численные примеры возмущенных задач с использованием комплексных дуальных чисел

Для разных межорбитальных перелетов состав основных возмущающих ускорений, оказывающих наибольшее влияние на траекторию, может различаться. Очевидно, что для перелетов между очень высокими орбитами, с радиусом апогея, сравнимым с радиусом орбиты Луны, в качестве основных возмущающих ускорений, определяющих основные параметры траектории, следует рассматривать ускорения от притяжения Луны и Солнца. Для типичных перелетов КА с электроракетной двигательной установкой на геостационарную орбиту существенно влияние нецентральности геопотенциала и притяжение Луны и Солнца. Наконец, на перелеты между низкими околоземными орбитами наиболее существенное влияние оказывает нецентральность гравитационного поля Земли. В связи с этим, в первом подразделе 4.2.1 приводятся результаты оптимизации между высокими эллиптическими орбитами, во втором подразделе 4.2.2 – результаты оптимизации многовитковых траекторий перелета между геопереходной орбитой и ГСО, а в третьем подразделе 4.2.3 – результаты оптимизации многовиткового перелета между околокруговыми низкими околоземными орбитами. Для рассмотренных во втором и третьем подразделе перелетов имеется ряд численных результатов, полученных другими авторами, поэтому эти примеры использовались для оценки достоверности результатов, полученных с использованием методов из разделов 1, 2 и 3 данной работы.

4.2.1 Оптимизация траектории перелета между двумя эллиптическими орбитами

Первой рассматриваемой задачей является задача оптимизации затрат топлива на перелет КА с ЭРДУ между эллиптическими начальной и конечной орбитами, параметры которых представлены в таблице 4.2.1.1. Угловая дальность перелета фиксирована и составляет 5 витков.

Таблица 4.2.1.1. Параметры начальной и конечной орбиты

	Начальная орбита	Конечная орбита
Высота перигея, км	500	20000
Высота апогея, км	600000	250000
Наклонение, градусы	50	65
Долгота восходящего узла, градусы	0	320
Аргумент перигея, градусы	100	90
Истинная долгота, градусы	160	1960

Начальная масса КА принята равной 1000 кг, тяга ЭРДУ равна 0.5 Н, а удельный импульс – 1520 с. Численные результаты решения краевой задачи оптимального управления ((2.1.10), (2.1.11), (2.1.12)) из раздела 2.1 для приведенных исходных данных и даты начала перелета 9 мая 2021 года 12:00 UTC для траектории с учетом перечисленных возмущений и невозмущенной траектории приведены в таблице 4.2.1.2, а относительные ошибки решения краевой задачи принципа максимума в орбитальных элементах для этих траекторий – в таблице 4.2.1.3.

Таблица 4.2.1.2. Начальные значения безразмерных сопряженных переменных для возмущенной и невозмущенной оптимальной траектории перелета между эллиптическими орбитами

	Возмущенная траектория	Невозмущенная траектория
p_p	0.097657723	0.174121297
p_{ex}	0.009133118	-0.027603781
p_{ey}	0.067734445	0.239003689
p_{ix}	0.050282471	0.013836165
p_{iy}	0.020409383	0.003738602
p_{Lk}	$1.533357887 \cdot 10^{-5}$	$-6.498740712 \cdot 10^{-6}$
p_t	$1.788597491 \cdot 10^{-5}$	$1.962669196 \cdot 10^{-24}$
p_m	-0.056255821	-0.057428138
K_f , градусы	1817.367048750	1818.033626880
m_f , кг	956.069829275	955.257737953
Δt , сутки	60.453857879	60.669362453

Таблица 4.2.1.3. Относительные ошибки в конечных значениях орбитальных элементов для оптимальных возмущенной и невозмущенной траекторий перелета между эллиптическими орбитами

Относительные ошибки	Возмущенная траектория	Невозмущенная траектория
p	$8.546 \cdot 10^{-5}$	$-7.718 \cdot 10^{-6}$
e	$3.595 \cdot 10^{-5}$	$-3.231 \cdot 10^{-6}$
i	$-1.775 \cdot 10^{-6}$	$8.861 \cdot 10^{-9}$
Ω	$9.090 \cdot 10^{-7}$	$1.037 \cdot 10^{-8}$
ω	$5.976 \cdot 10^{-5}$	$-5.383 \cdot 10^{-6}$
L	$9.796 \cdot 10^{-11}$	$-5.102 \cdot 10^{-13}$

На рисунке 4.2.1.1 представлены проекции оптимальных невозмущенной и возмущенной траекторий на координатные плоскости. Активные участки траектории на этом рисунке обозначены толстыми сплошными линиями, пассивные участки невозмущенной траектории – тонкими сплошными линиями, а пассивные участки возмущенной траектории – пунктирными линиями. Из рисунка видно, что действие возмущающих ускорений приводит к значительной деформации оптимальной траектории. Качественным отличием возмущенной траектории в рассматриваемом случае является отсутствие активного участка в начале перелета.

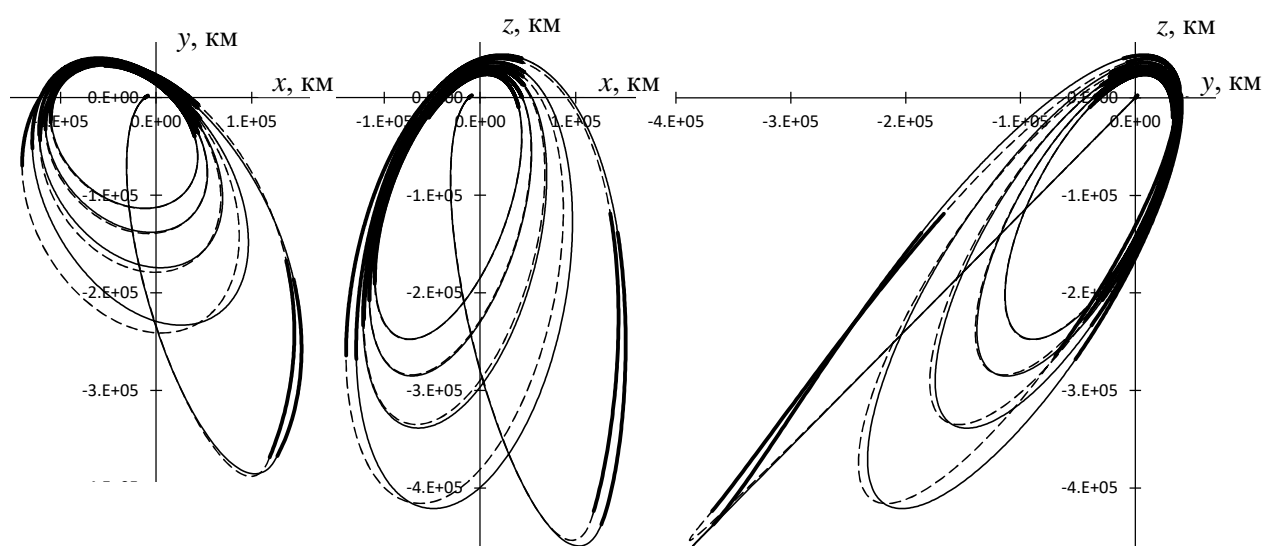


Рисунок 4.2.1.1. Проекция оптимальных невозмущенной и возмущенной траекторий на координатные плоскости

На рисунке 4.2.1.2 представлены зависимости орбитальных элементов от времени на невозмущенной и возмущенной оптимальных траекториях. Для невозмущенной траектории

зависимости представлены сплошными линиями, а для возмущенных – пунктирными. Зависимости от времени функции переключения, углов тангажа и рысканья на оптимальных невозмущенной (сплошные линии) и возмущенной (пунктирные линии) траекториях представлены на рисунке 4.2.1.3. Видна большая разница в зависимостях угла рысканья от времени для возмущенной и невозмущенной траекторий.

На рисунке 4.2.1.4 показаны зависимости конечной массы КА и оптимального времени перелета от даты отлета для оптимальных невозмущенных (пунктирная линия) и возмущенных (сплошная линия) траекторий. Для построения этих зависимостей были вычислены оптимальные возмущенные траектории с временем отлета в диапазоне от 1 мая 2021 года 12:00 UTC до 31 мая 2021 года 12:00 UTC с шагом в одни сутки. Значения конечной массы и оптимальной длительности перелета на невозмущенной траектории представлены пунктирной линией. Из рисунка 4.2.1.4 видно, что в рассматриваемом случае возмущения почти всегда позволяют увеличить массу КА, доставляемого на конечную орбиту. Максимальное увеличение массы (на 5.91 кг) достигается при начале перелета 13 мая 2021 года. Единственной датой начала перелета, при которой действующие возмущающие ускорения приводят к уменьшению конечной массы КА (на 0.68 кг) оказалось 21 мая 2021 года. В среднем, в мае 2021 года, возмущающие ускорения позволяют увеличить массу КА, доставляемого на конечную орбиту на 1.5 кг. Оптимальное время перелета для возмущенной траектории в среднем на 0.92 суток меньше, чем для невозмущенной. Однако, из-за действия возмущений в отдельные даты начала перелета оптимальная длительность возмущенной траектории может быть на 2.34 суток больше (дата отлета 25 мая) или на 3.74 суток меньше (дата отлета 12 мая), чем невозмущенной траектории.

На рисунке 4.2.1.5 представлены зависимости безразмерных начальных значений сопряженных переменных для оптимальных возмущенных траекторий от даты отлета. Сложный характер этих зависимостей определяется, в первую очередь, сильным влиянием лунных гравитационных возмущающих ускорений на рассматриваемом интервале дат отлета, за который Луна совершает более витка вокруг Земли.

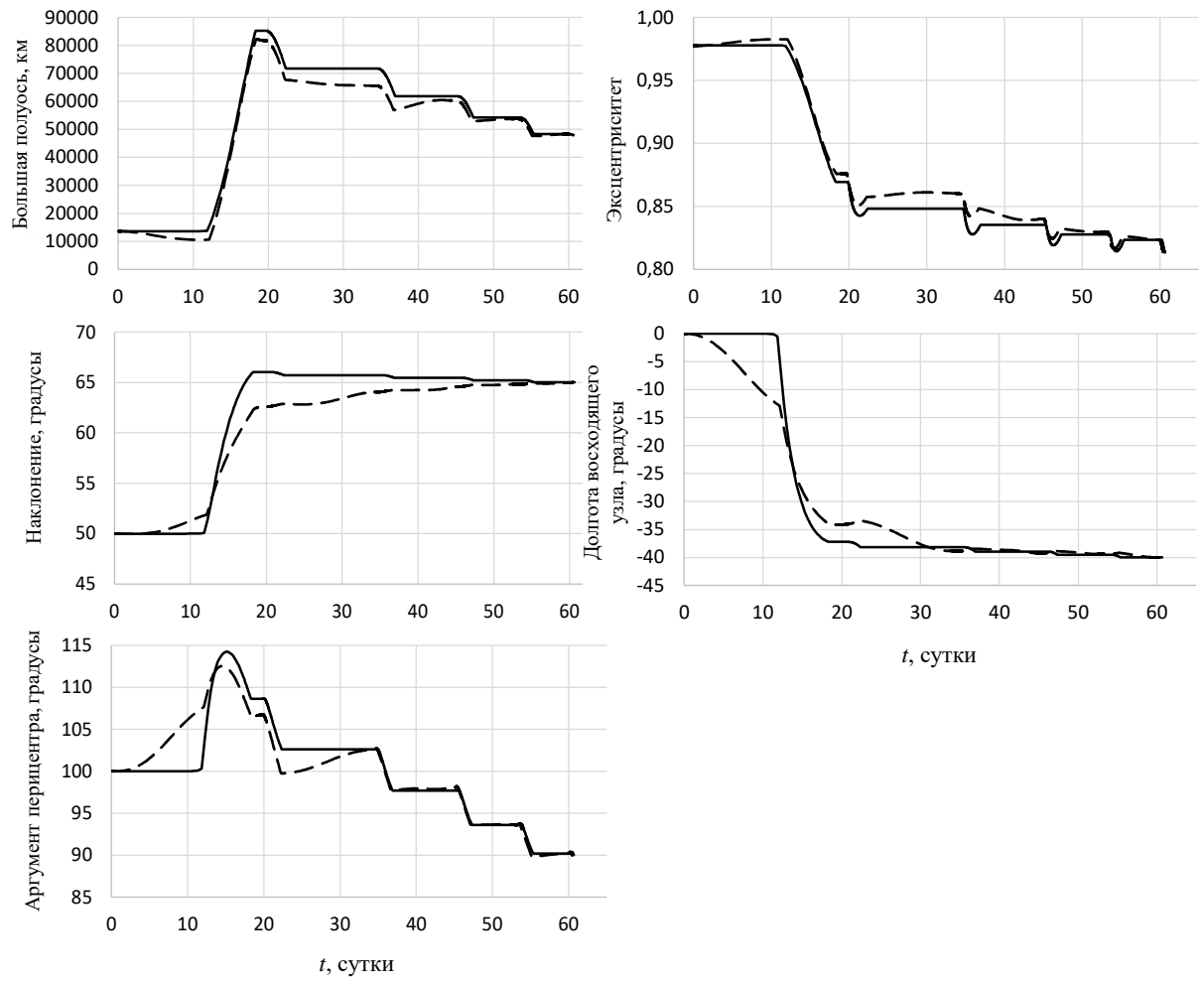


Рисунок 4.2.1.2. Зависимости от времени орбитальных элементов на невозмущенной и возмущенной оптимальных траекториях

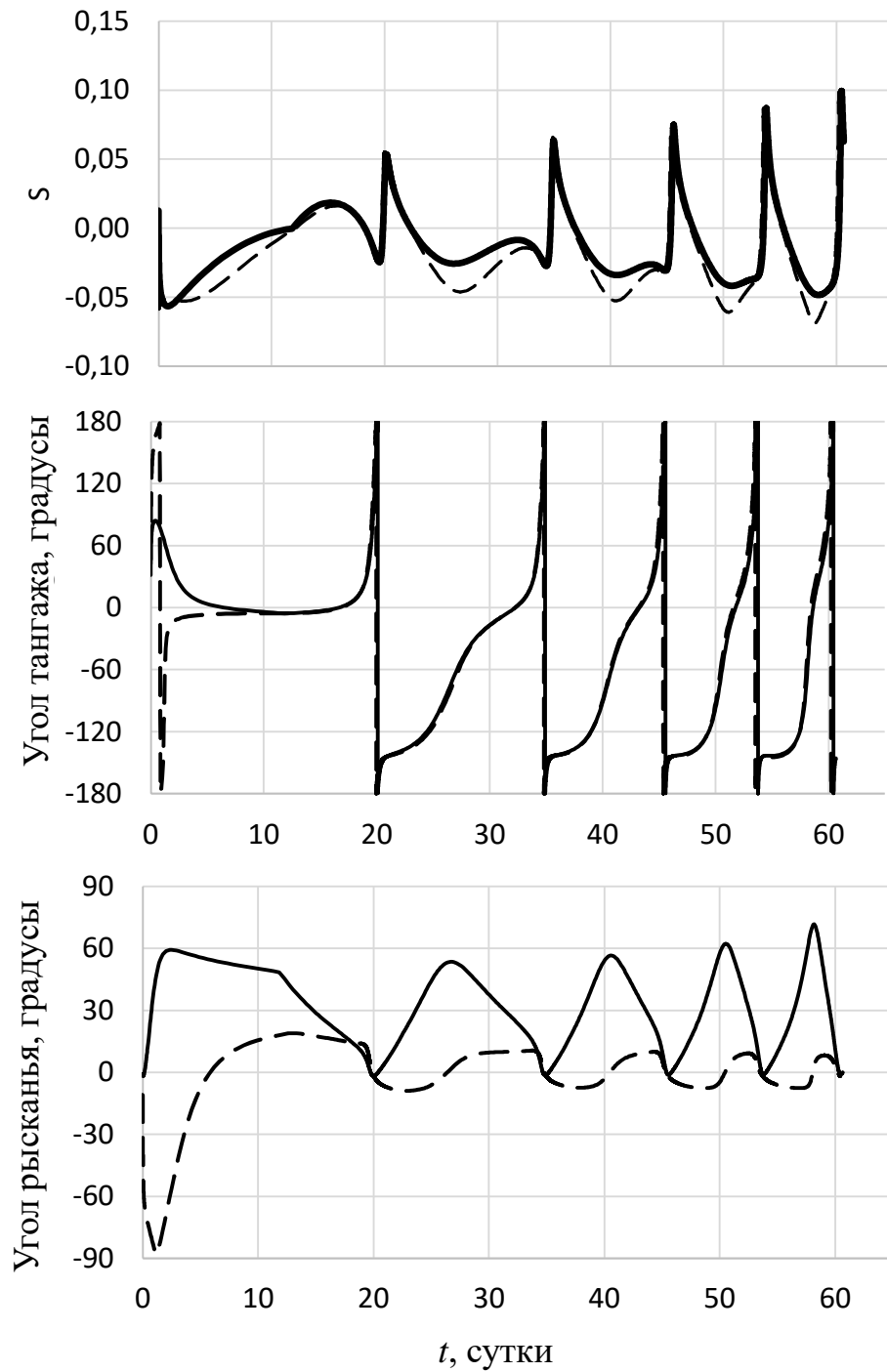


Рисунок 4.2.1.3. Зависимость от времени функции переключения (вверху), углов тангажа (посередине) и рысканья (внизу) на оптимальных невозмущенной и возмущенной траекториях

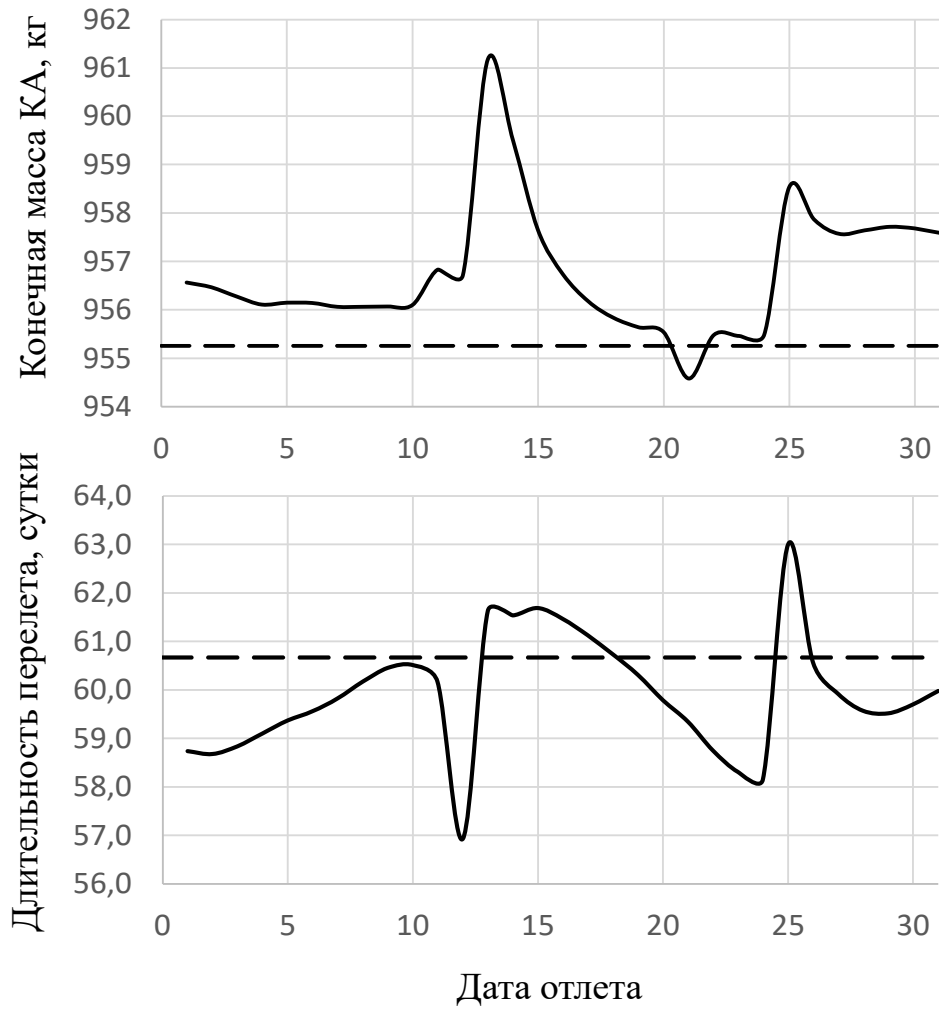


Рисунок 4.2.1.4. Зависимость конечной массы КА (вверху) и оптимального времени перелета (внизу) от даты отлета для оптимальных невозмущенных (пунктирная линия) и возмущенных (сплошная линия) траекторий.

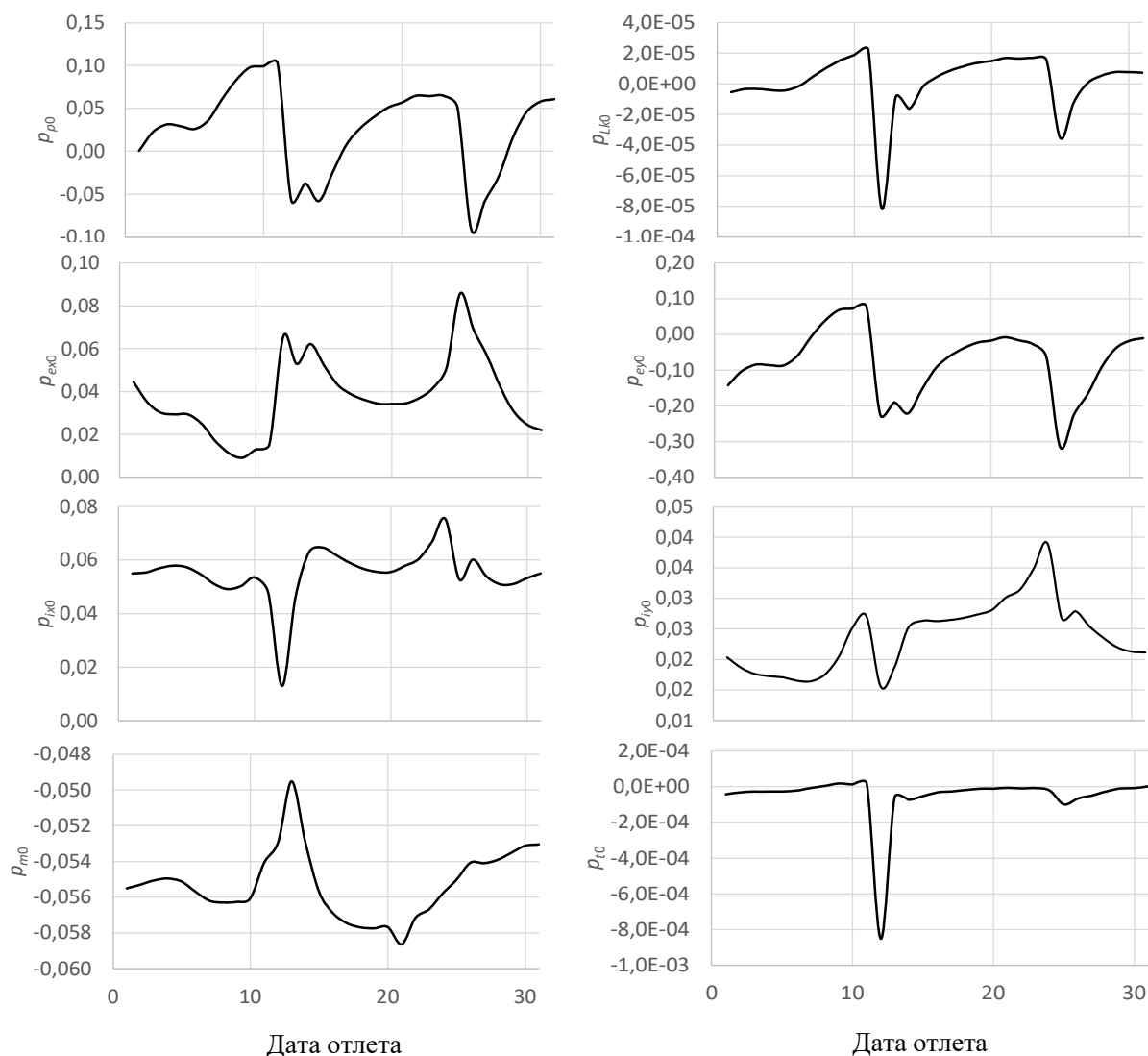


Рисунок 4.2.1.5. Зависимость начальных значений сопряженных переменных от даты отлета для оптимальных возмущенных траекторий

Для демонстрации возможностей разработанного метода оптимизации был рассмотрен 100-витковый перелет между двумя эллиптическими орбитами с существенным изменением всех орбитальных элементов (рисунок 4.2.1.6). В качестве начальной орбиты была рассмотрена геопереходная орбита с высотой перигея 500 км, высотой апогея 60000 км, наклонением 52 градуса и с нулевыми значениями аргумента перигея и долготы восходящего узла (начальная истинная аномалия принята равной 300 градусам), а в качестве конечной – орбита типа «Молния» с высотой перигея 1500 км, высотой апогея 40000 км, наклонением 63.4 градуса, аргументом перигея 270 градусов, долготой восходящего узла 350 градусов. Масса КА принята равной 1000 кг, тяга – 1 Н, удельный импульс – 1520 с. При оптимизации рассматриваемой траектории использовалась следующая модель возмущений: возмущения от

геопотенциала 4×4 и от притяжения Луны и Солнца. Длительность перелета составила 88.4068 суток на невозмущенной траектории и 88.2124 суток на возмущенной траектории. Масса рабочего тела, затраченного на перелет, оказалась равной 136.2567 кг на невозмущенной траектории и 135.9336 кг на возмущенной траектории.

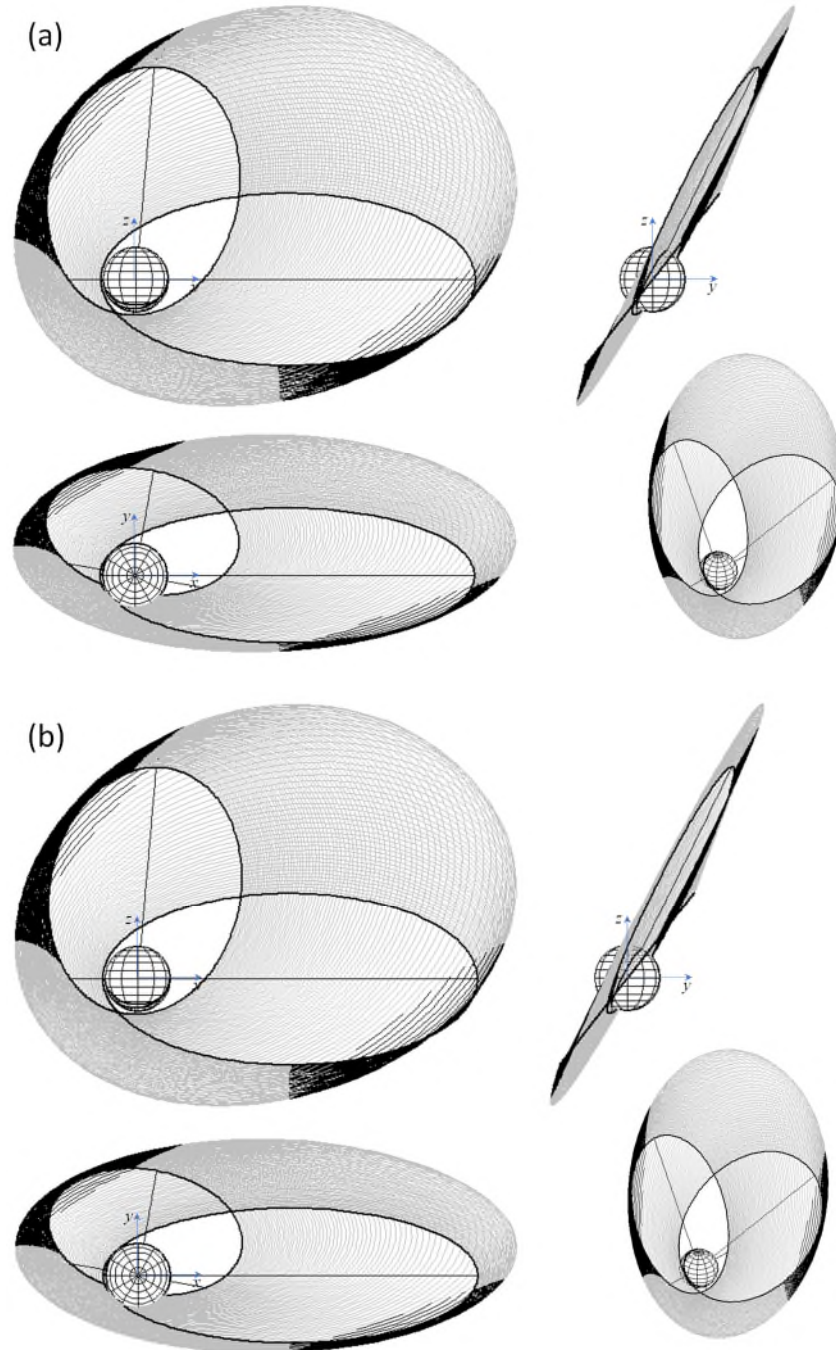


Рисунок 4.2.1.6 – Проекция и пространственный вид (а) невозмущенной и (б) возмущенной 100-витковой оптимальной траектории перелета между геопереходной орбитой и орбитой типа «Молния»

4.2.2 Оптимизация траектории перелета между геопереходной и геостационарной орбитами

В качестве второго примера рассмотрим случай перелета КА с ЭРДУ с начальной (геопереходной) орбиты, имеющей большую полуось 24505.9 км, эксцентриситет 0.725, наклонение 7 градусов, нулевые значения аргумента перигея и долготы восходящего узла на конечную круговую экваториальную орбиту радиусом 42165 км (геостационарную орбиту). Начальное значение истинной аномалии принято равным 0, дата начала перелета – 01.01.2000, 12:00:00 UTC, начальная масса КА – 2000 кг, тяга ЭРДУ – 0.35 Н, удельный импульс ЭРДУ – 2000 с, угловая дальность перелета от 200 до 500 витков.

Рассматриваемая задача соответствует случаю В из работ [62, 63, 64]. В [62, 63] были приведены результаты только для осредненной задачи. В работе [64] приведено решение неосредненной невозмущенной и возмущенной задач. В случае возмущенной задачи в [64] учитывались только ускорения от второй зональной гармоники геопотенциала и притяжения Луны, а для решения задачи использовалось дифференциальное динамическое программирование и преобразование Зундмана к обобщенной истинной, средней или эксцентрической аномалии.

В [64] представлены величины затрат топлива m_p и длительности перелета Δt для 500-витковых траекторий в зависимости от состава возмущений и используемой независимой переменной в математической модели движения КА (истинной или эксцентрической аномалии): $m_p = 152.77$ кг, $\Delta t = 318.55$ суток для невозмущенной траектории и $m_p = 157.93$ кг, $\Delta t = 320.08$ суток для возмущенной траектории с учетом возмущений от второй зональной гармоники геопотенциала J_2 и притяжения Луны при использовании истинной аномалии в качестве независимой переменной. При использовании метода, основанного на использовании комплексных дуальных чисел, нами получены следующие результаты: $m_p = 152.46$ кг, $\Delta t = 318.88$ суток для невозмущенной траектории и $m_p = 156.87$ кг, $\Delta t = 321.05$ суток для возмущенной траектории с учетом возмущений от членов разложения геопотенциала до 4-го порядка и 4-й степени включительно, притяжения Луны и Солнца.

Полученная в нашей работе оптимальная длительность перелета немного превышает длительность вариантов оптимальных перелетов, приведенных в [64], а полученные затраты топлива, наоборот, меньше. Из сравнения приведенных результатов можно сделать вывод, что невозмущенные и возмущенные траектории, полученные в [64] и в настоящей работе близки. Небольшая разница между результатами для возмущенных траекторий, полученными в [64] и в этой работе может объясняться различием в составе возмущений (в нашей работе

рассматривается полная матрица геопотенциала 4×4 , а не только J_2 , и, дополнительно, гравитационные возмущения от Солнца). Разница по затратам топлива для невозмущенных траекторий составляет 0.20%, а по длительности перелета 0.10%.

На рисунке 4.2.2.1 представлены проекции на координатные плоскости системы координат J2000 и пространственный вид невозмущенной и возмущенной оптимальных 500-витковых траекторий (черной сплошной линией обозначены активные участки траектории, а серой – пассивные участки траектории), а на рисунке 4.2.2.2 – зависимости долготы восходящего узла, аргумента перигея и наклона от времени для оптимальных невозмущенной и возмущенной траектории, представленных на рисунке 4.2.2.1. Видно большое отличие этих зависимостей для невозмущенной и возмущенной траектории в то время как зависимости от времени эксцентриситета и большой полуоси для невозмущенной и возмущенной траекторий оказались близки друг к другу. На рисунке 4.2.2.3 представлены зависимости от времени угла тангажа, угла рысканья и функции переключения S для невозмущенной и возмущенной 500-витковой траектории. Видно существенное различие в оптимальной программе угла рысканья и в зависимости функции переключения от времени.

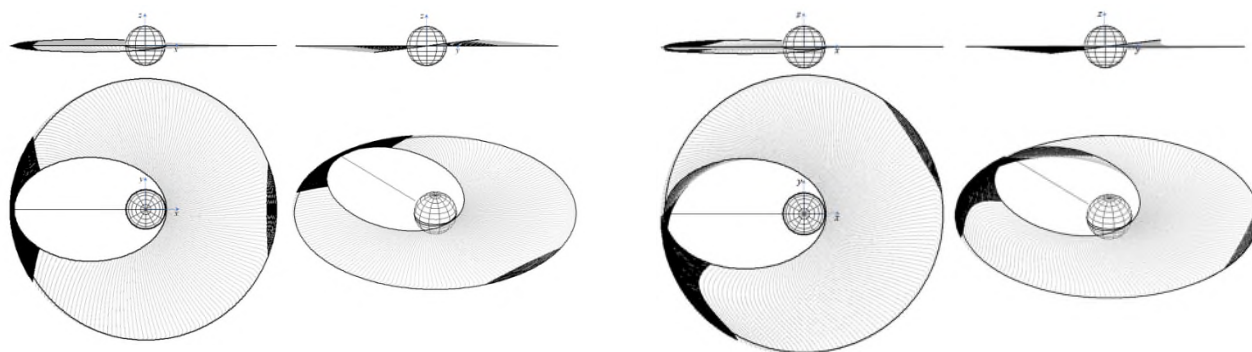


Рисунок 4.2.2.1. Проекция на координатные плоскости системы координат J2000 и пространственный вид невозмущенной (слева) и возмущенной (справа) оптимальных 500-витковых траекторий

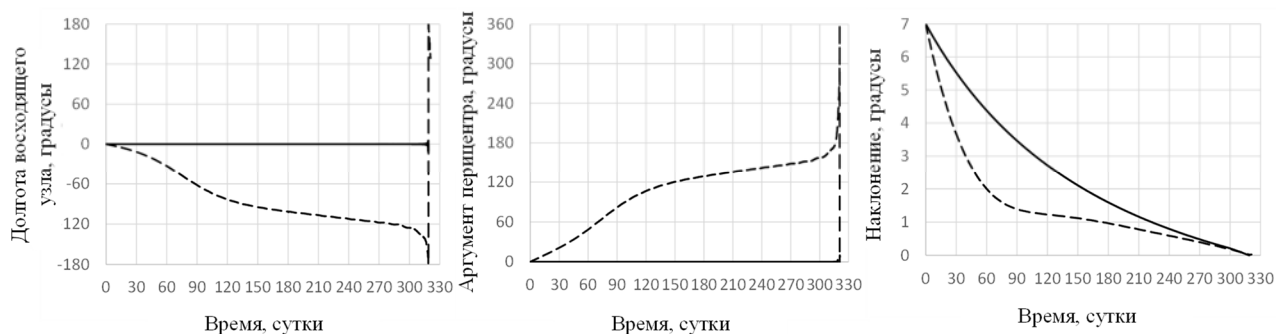


Рисунок 4.2.2.2. Зависимости долготы восходящего узла (слева), аргумента перигея (посередине) и наклона (справа) от времени на невозмущенной (сплошные линии) и возмущенной (пунктирные линии) 500-витковой траектории.

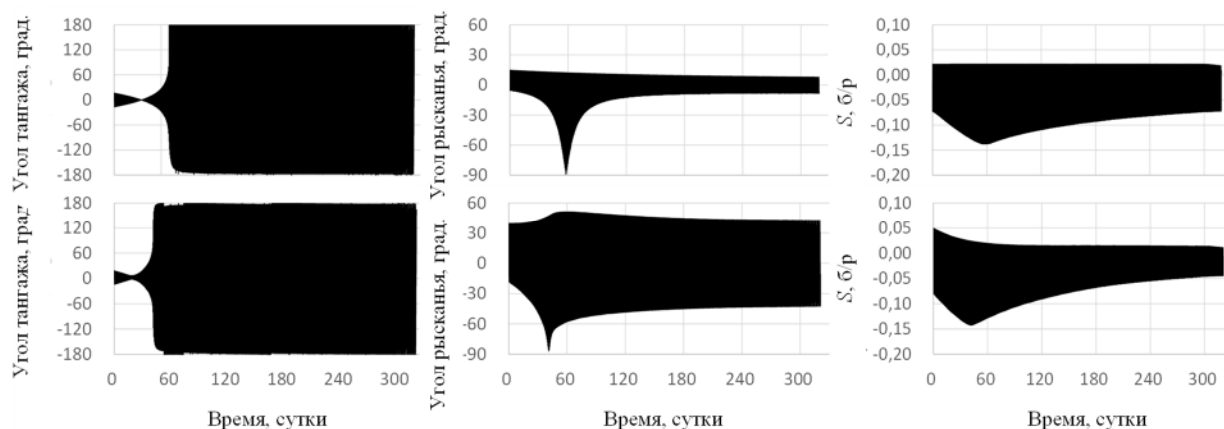


Рисунок 4.2.2.3. Зависимости от времени угла тангажа (слева), угла рысканья (посередине) и функции переключения S (справа) для невозмущенной (верхний ряд) и возмущенной (нижний ряд) 500-витковой траектории

На рисунке 4.2.2.4 приведены проекции возмущенной оптимальной траектории с 200...350 витками на экваториальную плоскость с учетом возмущений от гармоник геопотенциала до 4-й степени и 4-го порядка включительно и притяжения Луны и Солнца. Активные участки траектории обозначены маркерами, а пассивные – сплошными серыми линиями. Возмущающие ускорения приводят к значительному развороту линии апсид и линии узлов. Увеличение числа витков приводит к росту разворота линии апсид и линии узлов в процессе перелета, что влияет на оптимальное управление, приводя к сдвигу моментов включения и выключения двигателей и изменению программ тангажа и рысканья. Однако, влияние возмущающих ускорений на продолжительность перелета и требуемые затраты рабочего тела оказалось незначительным. На рисунке 4.2.2.5 представлены зависимости величины затрат топлива m_p от длительности перелета Δt и от числа витков для невозмущенных (сплошная линия) и возмущенных (пунктирная) оптимальных траекторий, полученных в этой работе. Из рисунка видно, что в рассматриваемом случае возмущающие ускорения приводят к увеличению затрат рабочего топлива на 1.417...4.404 кг и к уменьшению оптимальной длительности перелета (на 0.554...1.024 суток), за исключением перелета с угловой дальностью 500 витков, на котором оптимальная длительность возмущенной траектории на 2.176 суток превышает оптимальную длительность невозмущенной траектории. Очевидно, что в различных задачах действие возмущающих ускорений может приводить как к увеличению, так и к уменьшению требуемых затрат рабочего тела и длительности перелета.

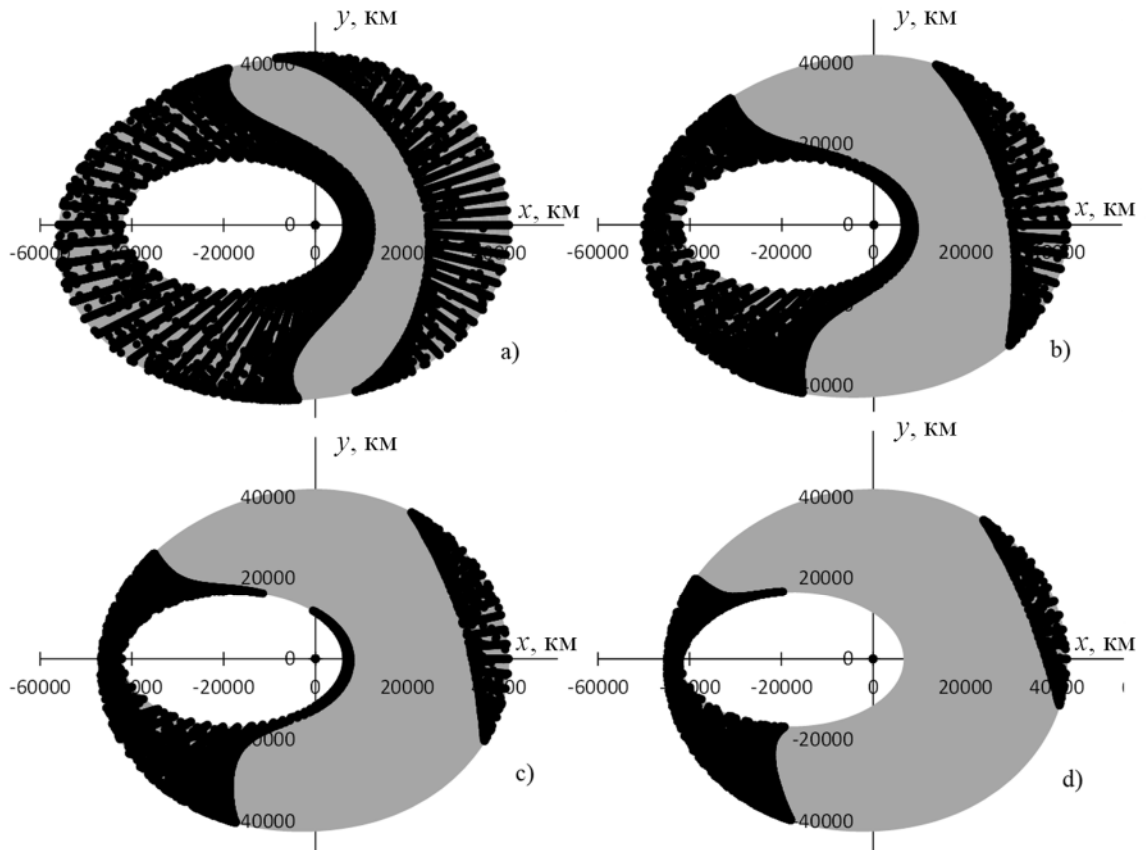


Рисунок 4.2.2.4. Проекция возмущенной оптимальной траектории (а) с 200 витками, (б) с 250 витками, (с) с 300 витками, (д) с 350 витками на экваториальную плоскость с учетом возмущений от геопотенциала до 4 степени и 4 порядка и притяжения Луны и Солнца

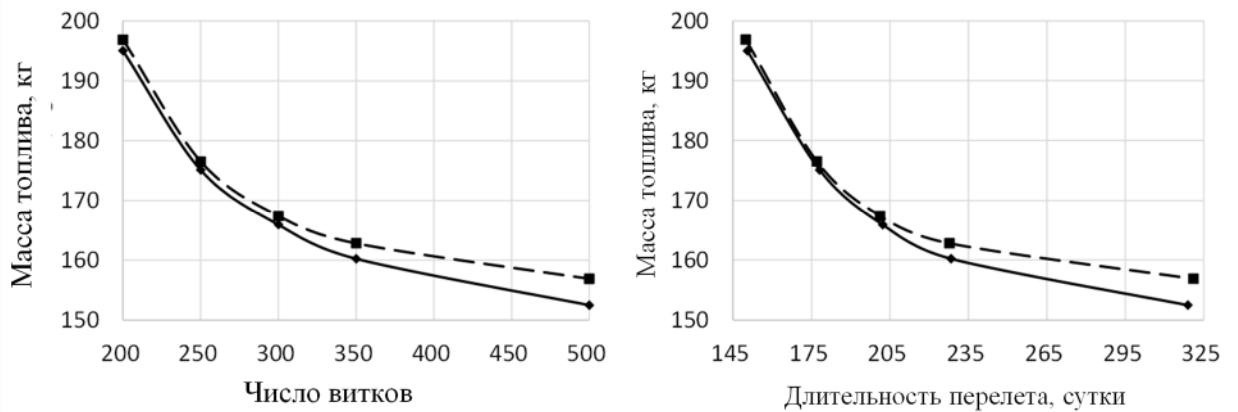


Рисунок 4.2.2.5. Зависимости величины затрат топлива m_p от числа витков (слева) и от длительности перелета Δt (справа) для невозмущенных (сплошная линия) и возмущенных (пунктирная линия) оптимальных траекторий

4.2.3 Оптимизация траектории перелета между околокруговыми низкими околоземными орбитами

В работе [65] была рассмотрена задача оптимизации перелета с начальной низкой околоземной орбиты (НОО), имеющей большую полуось 7792 км, эксцентриситет 0.000138, наклонение 51.99 градусов, аргумент перигея 0 градусов и долготу восходящего узла 256.65 градусов на конечную НОО, имеющей такое же значение большей полуоси, эксцентриситет 0.0002, наклонение 52 градуса, аргумент перигея 11.070 градусов и долготу восходящего узла 241.57 градусов. Начальное значение истинной аномалии принято равным 45 градусам, дата начала перелета – 09.05.2021, 12:00:00 UTC, начальная масса КА – 1000 кг, тяга – 1 Н, удельный импульс – 1500 с, а число витков – 63.007.

В статье [65] для решения рассматриваемой задачи использовалось программное обеспечение T_3D, в котором используются не прямые методы оптимизации на основе принципа максимума. В [65] представлены решения для осредненной и неосредненной задач с учетом возмущения от J_2 . При формулировке задачи использовалась оптимизация траектории с фиксированным временем перелета (5 суток) и свободной угловой дальностью.

Рассматриваемая задача достаточно интересна тем, что благодаря возмущению от нецентральности гравитационного поля Земли получено оптимальное решение с коррекцией долготы восходящего узла за счет управления скоростью прецессии линии узлов в процессе перелета, поэтому решение этой задачи без учета возмущений от нецентральности гравитационного поля Земли невозможно. Сравним результаты, полученные с использованием программного обеспечения T_3D [65] с результатами, полученными с помощью представленного в этой диссертационной работе метода.

В таблице 4.2.3.1 приведены полученные результаты оптимизации осредненных и неосредненных траекторий из работы [65] (здесь используются следующие обозначения: Δt – заданная длительность перелета, N_{rev} – оптимальная угловая дальность перелета по истинной долготе, m_p – затраты топлива, V_x – характеристическая скорость перелета и T_m – моторное время). В таблице 4.2.3.2 представлены результаты оптимизации траекторий в зависимости от состава возмущений, полученные по разработанной в этой работе методике (здесь N_{rev} – заданное число витков, Δt – оптимальная длительность перелета).

Таблица 4.2.3.1. Результаты оптимизации многовитковых траекторий перелета в окрестности НОО, полученные в [65] с учетом возмущений от второй зональной гармоники геопотенциала

	Δt , сутки	N_{rev}	m_p , кг	V_x , м/с	T_m , часов
осредненная задача	5	63.012	0.8009	11.786	3.273
неосредненная задача	5	63.007	0.8036	11.826	3.284

Таблица 4.2.3.2. Результаты оптимизации многовитковых траекторий перелета в окрестности НОО, полученные по разработанной в этой работе методике.

Возмущения	N_{rev}	Δt , сутки	m_p , кг	V_x , м/с	T_m , часов
Вторая зональная гармоника геопотенциала	63.007	4.997454	0.6849	10.078	2.798
Геопотенциал 4×4	63.007	4.997276	0.6553	9.643	2.678
Геопотенциал 4×4, Луна и Солнце	63.007	4.997285	0.6565	9.661	2.683

Видно, что для полученных в нашей работе оптимальной траектории с учетом возмущений только от второй зональной гармоники при заданной угловой дальности 63.007 витков длительность перелета уменьшается на 220 секунд (0.05%), а затраты топлива уменьшаются на 0.118 кг (~ 15 %). Это разница, вероятно, связана с удовлетворением необходимых условий оптимальности по длительности перелета при оптимизации траекторий по методике, представленной в этой работе.

Из таблицы 4.2.3.2 видно, что оптимальные траектории с учетом возмущений от членов разложения геопотенциала до 4-й степени и 4-го порядка требуют меньших затрат топлива и времени перелета чем траектории с учетом возмущений только от второй зональной гармоники. Влияние возмущений от притяжения Луны и Солнца на продолжительность перелета и требуемые затраты рабочего тела оказалось незначительным.

Полученные в этой работе зависимости орбитальных элементов (большой полуоси, эксцентриситета и долготы восходящего узла), угла тангажа, угла рысканья, функции переключения S и функции тяги δ от времени для оптимальных возмущенных траекторий с учетом возмущений от второй зональной гармоники представлены на рисунке 4.2.3.1.

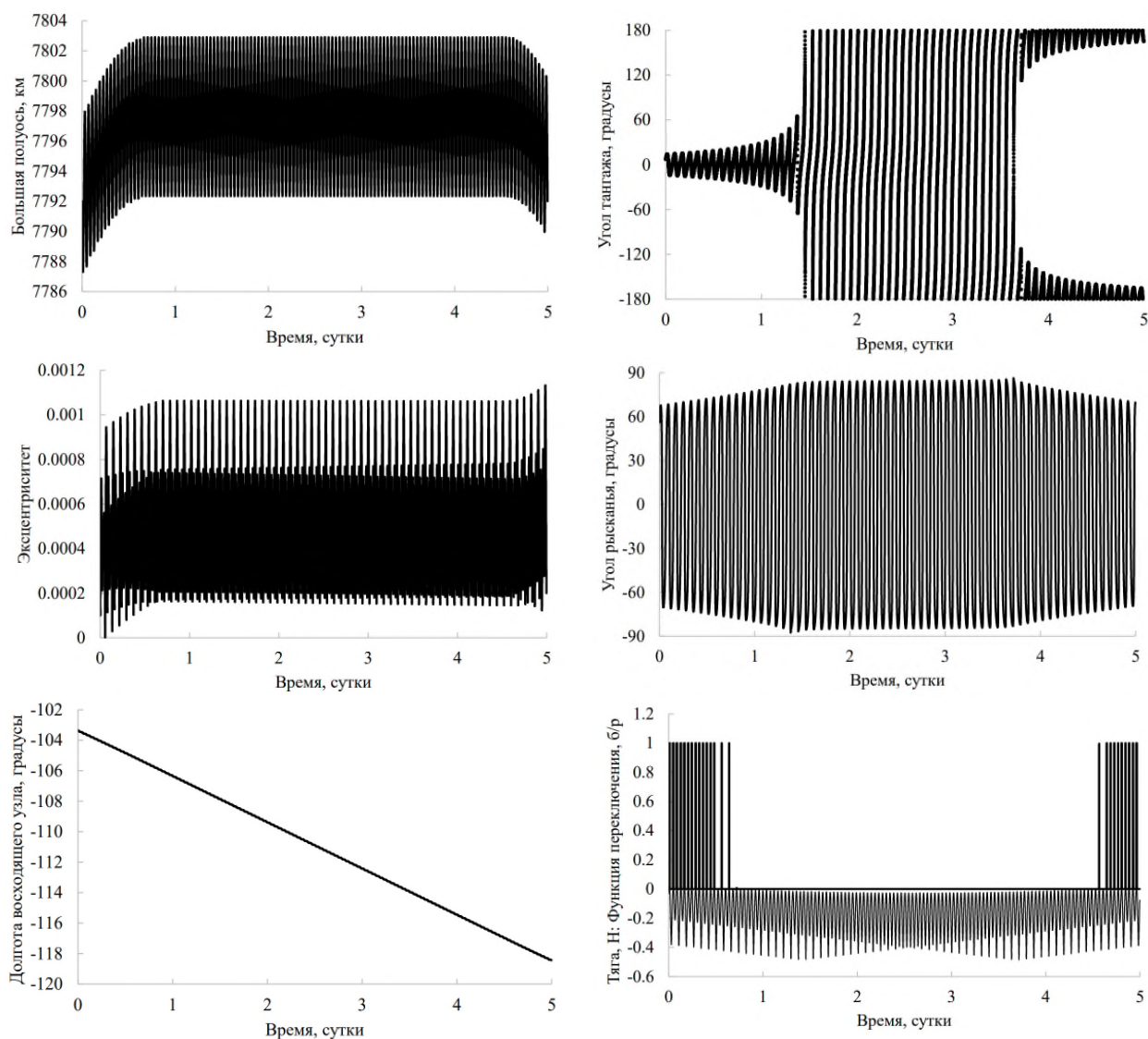


Рисунок 4.2.3.1 – Зависимости от времени большой полуоси, эксцентриситета, долготы восходящего узла, угла тангажа, угла рысканья, функции переключения S и функция тяги δ для оптимальных возмущенных траекторий с учетом возмущений от второй зональной гармоники

На рисунке 4.2.3.2 приведены зависимости орбитальных элементов (большой полуоси, эксцентриситета и долготы восходящего узла), угла тангажа, угла рысканья, функции переключения S и функция тяги δ от времени для оптимальных возмущенных траекторий с учетом возмущений от членов разложения геопотенциала до 4-й степени и 4-го порядка.

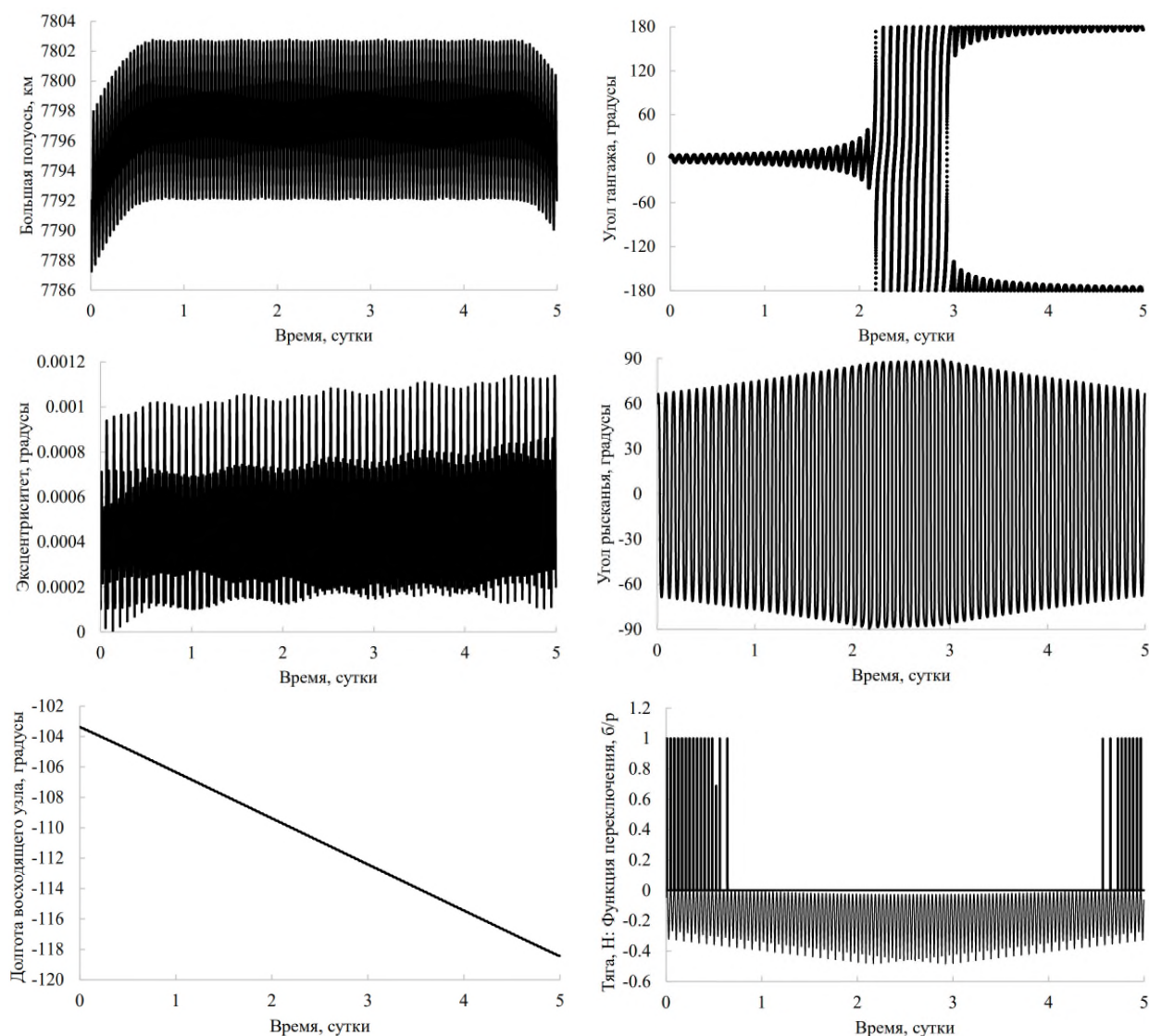


Рисунок 4.2.3.2 – Зависимости от времени большой полуоси, эксцентриситета, долготы восходящего узла, угла тангажа, угла рысканья, функции переключения S и функция тяги δ для оптимальных возмущенных траекторий с учетом возмущений от членов разложения геопотенциала до 4-й степени и 4-го порядка

На всех полученных траекториях долгота восходящего узла монотонно уменьшается, а средняя величина большой полуоси на начальном этапе перелета увеличивается, а затем остается постоянной на определенном интервале времени (этап ожидания) и на конечном этапе перелета уменьшается до исходного значения. Диапазон короткопериодических колебаний большой полуоси на этапе ожидания составляет от 7792 км до 7802 км, а среднее значение большой полуоси на этом этапе приблизительно равно 7797 км. В работе [65] диапазон короткопериодических колебаний большой полуоси составляет от 7795 км до 7805 км (среднее значение 7798.5 км). Разница в полученных средних значениях большой полуоси соответствует разности во времени перелета для траекторий, полученных в настоящей работе

и [65], с учетом необходимости коррекции долготы восходящего узла на этапе ожидания за счет разницы в скорости прецессии восходящего узла на начальной орбите и орбите ожидания.

В полученных в [65] решениях включения ЭРДУ производится на начальном и конечном участках траектории длительностью примерно по 0.5 суток. В полученных нами результатах длительность начального и конечного участков траектории, на которых производятся включения ЭРДУ возрастает до 0.65 суток, однако суммарное длительность работы ЭРДУ меньше, чем в [65].

Учет матрицы геопотенциала 4×4 приводит к заметному изменению оптимальных программ тангажа и рысканья по сравнению с траекториями, на которых учитывается только вторая зональная гармоника. В частности, значительно уменьшается длительность участка, на котором угол тангажа изменяется от -180 до 180 градусов и угол рысканья изменяется от -90 до 90 градусов.

4.3 Заключение по разделу

С использованием разработанного метода были проведен численный анализ оптимальных траекторий с фиксированной угловой дальностью и оптимальным временем перелета. В результате этого анализа обнаружены следующие свойства таких траекторий.

1. Произведение минимальной тяги на угловую дальность перелета почти постоянно при достаточно большой величине угловой дальности. Это свойство позволяет легко оценить требуемое минимальное число витков n_{rev}^* при заданном значении тяги T^* после вычисления минимальной тяги T_{min1} на T_{min} -траектории с произвольным (достаточно большим) числом витков n_{rev1} : $n_{rev}^* = n_{rev1} \cdot T_{min1} / T^*$.

2. В задаче на минимум тяги с фиксированной угловой дальностью и оптимальным временем перелета существует один локальный минимум и один локальный максимум тяги по начальной истинной долготе на интервале от 0 до 360 градусов, но, в зависимости от угловой дальности перелета, может существовать по одному либо по два локальных минимума и максимума оптимального времени перелета на этом интервале.

3. Оптимальное время перелета в T_{min} -задаче с фиксированной угловой дальностью почти пропорционально угловой дальности перелета. Это означает, что после решения T_{min} -задачи с каким-либо, достаточно большим числом витков n_{rev1} , и вычисления времени перелета Δt_1 по этой траектории, можно оценить время перелета Δt по T_{min} -траектории с любым другим, достаточно большим числом витков n_{rev} : $\Delta t = \Delta t_1 \cdot n_{rev} / n_{rev1}$.

С помощью разработанной программы проведен ряд тестовых расчетов возмущенных траекторий КА с ЭРДУ с угловой дальностью до 500 витков. Показано сильное влияние

возмущающих ускорений на оптимальное управление для типовых траекторий перелета КА с ЭРДУ на ГСО уже при угловой дальности 100 витков. При большей угловой дальности возмущающие ускорения приводят к заметной деформации самой оптимальной траектории, что показано на примере оптимизации траектории с угловой дальностью 500 витков. Таким образом, подтверждена необходимость учета возмущающих ускорений при проектировании многовитковых траекторий перспективных КА с ЭРДУ. Показана близость решений, полученных с помощью разработанного в этой работе метода, с решениями, найденными другими авторами [62-65].

5 ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ ПЕРЕЛЕТА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА К ЛУНЕ С ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ

Перспективные лунные пилотируемые программы требуют значительных грузопотоков в системе Земля-Луна. Стоимость космических транспортных операций во многом определяется массой полезной нагрузки, которую требуется вывести на низкую околоземную орбиту, то есть стоимостью пусковых услуг. Для заданной массы грузов, доставляемых на окололунную орбиту, требуемая масса на низкой околоземной орбите и требуемое число пусков могут быть существенно снижены при использовании электроракетных двигательных установок за счет снижения затрат топлива благодаря высокому удельному импульсу ЭРДУ. Наоборот, при заданном числе пусков суммарная масса грузов, доставляемых на окололунную орбиту, может быть существенно увеличена (при использовании многократного лунного буксира с ЭРДУ – в несколько раз). Для реализации эффективных космических транспортных операций в системе Земля-Луна необходима разработка эффективных методов оптимизации траекторий с малой тягой.

Задачи оптимизации лунных траекторий с малой тягой рассматривались во многих работах, например в [69–74]. Анализ работ, посвященных оптимизации лунных траекторий с малой тягой показывает наличие трудностей, связанных с численной устойчивостью и сходимостью существующих методов. Эти трудности возрастают при увеличении длительности перелета и суммарного числа витков траектории перелета между околоземной и окололунной орбитами до величин, характерных для современного технологического уровня. Следовательно, разработка устойчивых численных методов решения таких задач и теоретических аспектов перелетов к Луне с малой тягой остается актуальной.

В этом разделе диссертационной работы рассматривается одна из таких задач – вычисление траекторий КА с малой тягой между околоземной и окололунной орбитами. Представленный в этом разделе материал был опубликован в работах автора [83-85, 88-91, 103, 108, 123].

5.1 Траектория перелета к Луне с минимальной тягой

Целью представленной в этом разделе является анализ траекторий с минимальной тягой между околоземной и окололунной орбитами. Так как масса ЭРДУ и бортовой системы электропитания почти пропорциональна величине тяги [82], актуальной задачей является вычисление траекторий с минимальной тягой и анализ зависимости минимальной тяги от

длительности перелета. Одной из проблем решения задачи оптимизации траекторий КА к Луне с малой тягой является необходимость выбора правильного соотношения угловой дальности и длительности перелета как на геоцентрическом, так и на селеноцентрическом участках. Для преодоления этой трудности предлагается использовать подход к оптимизации траекторий малой тяги с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелёта, описанный в разделе 1.1. Этот подход позволяет избежать множественности локально-оптимальных решений с различной угловой дальностью перелета, которая характерна для традиционной постановки задачи с фиксированным временем перелета и затрудняет решение задачи оптимизации.

Известно, что оптимальная траектория перелета с малой тягой между околоземной и окололунной орбитами проходят через окрестность точки либрации EML_1 системы Земля-Луна. В связи с этим, точка либрации EML_1 использовалась как точка стыковки геоцентрического и селеноцентрического участков траектории во многих исследованиях [77-79]. Такой прием позволяет получить результаты расчетов траекторий, близкие к оптимальным, с незначительными потерями в функционале. Рассматриваются перелеты между околоземной и окололунной орбитами со стыковкой в точке либрации EML_1 системы Земля-Луна. Таким образом, траектория разбивается на два участка: геоцентрический (от околоземной орбиты до EML_1) и селеноцентрический (от EML_1 до окололунной орбиты).

5.1.1 Математическая модель

Рассматривается математическая модель движения космического аппарата с учетом притяжения Земли, Луны и Солнца, а также силы тяги ЭРДУ. Одной из особенностей перелета КА к Луне с малой тягой является большая длительность перелета и большое число витков вокруг Земли и Луны. В качестве фазовых переменных мы используем модифицированные равноденственные элементы [34], которые позволяют в этих условиях повысить точность и увеличить скорость численного интегрирования уравнений движения по сравнению с использованием в качестве фазовых координат векторов положения и скорости КА [86]. Мы используем модифицированные равноденственные элементы и вспомогательную долготу K в качестве независимой переменной. Использование угловой переменной в качестве независимой переменной удобно для рассматриваемой задачи оптимизации траектории с фиксированной угловой дальностью. Использование вспомогательной долготы позволяет упростить выражения для оптимального управления, вытекающие из принципа максимума, по сравнению с использованием других угловых независимых переменных.

Модель возмущенного движения космического аппарата с ЭРДУ и применение принципа максимума к рассматриваемой задаче были приведены в разделе 1.1 и 2.3.

Траектория перелета между заданными околоземной и окололунной орбитами разбивается на геоцентрический и селеноцентрический участки со стыковкой в точке либрации EML_1 системы Земля-Луна. Время пролета точки либрации EML_1 фиксируется, в этой точке векторы положения и скорости КА равны векторам положения и скорости EML_1 . На обоих (гео- и селеноцентрическом) участках траектории решается задача оптимизации траектории с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета. Такая постановка задачи оптимизации, в отличие от более традиционных, позволяет избежать вычислительных трудностей, связанных с существованием множества локальных оптимумов по угловой дальности в задаче с фиксированным временем перелета.

На геоцентрическом участке траектории в составе возмущающих ускорений будем учитывать ускорения от второй зональной гармоники геопотенциала, притяжения Луны и Солнца. На селеноцентрическом участке в качестве возмущающих ускорений рассмотрим ускорения от притяжения Земли и Солнца. Параметры, связанные с геоцентрическим участком траектории будем обозначать нижним индексом « gc », а с селеноцентрическим участком траектории – нижним индексом « sc ».

Таким образом, вектор возмущающего ускорения на геоцентрическом \mathbf{a}_{pgc} и селеноцентрическом \mathbf{a}_{psc} участках имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{pgc} &= \mathbf{a}_{J_2} + \mu_M \left(\frac{\mathbf{r}_M - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_M}{|\mathbf{r}_M|^3} \right) + \mu_S \left(\frac{\mathbf{r}_S - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_S}{|\mathbf{r}_S|^3} \right), \\ \mathbf{a}_{psc} &= \mu_E \left(\frac{\mathbf{r}_E - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_E - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_E}{|\mathbf{r}_E|^3} \right) + \mu_S \left(\frac{\mathbf{r}_S - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_S}{|\mathbf{r}_S|^3} \right) \end{aligned} \quad (5.1.1.1)$$

соответственно, где \mathbf{r} – вектор геоцентрического или селеноцентрического удаления КА, \mathbf{r}_M – вектор геоцентрического удаления Луны, \mathbf{r}_E – вектор селеноцентрического удаления Земли, \mathbf{r}_S – вектор геоцентрического или селеноцентрического удаления Солнца, μ_E , μ_M , μ_S – гравитационные параметры Земли, Луны и Солнца, \mathbf{a}_{J_2} – вектор возмущающего ускорения от второй зональной гармоники геопотенциала.

Возмущения от второй зональной гармоники геопотенциала можно представить в виде аналитического выражения, указанного в [87]:

$$\mathbf{a}_{J_2} = \frac{1}{2} \frac{\mu_E J_2 R_e^2}{r^5} \begin{pmatrix} \left(5 \frac{r_z^2}{r^2} - 1\right) r_x \\ \left(5 \frac{r_z^2}{r^2} - 1\right) r_y \\ 5 \left(\frac{r_z^2}{r^2} - 3\right) r_z \end{pmatrix},$$

где J_2 – коэффициент второй зональной гармоники геопотенциала, R_e – экваториальный радиус Земли, r_x, r_y, r_z – компоненты вектора геоцентрического удаления КА.

Как было отмечено выше, время пролета EML_1 фиксируется, а времена отлета с начальной околоземной орбиты и прибытия на конечную окололунную орбиту должны удовлетворять необходимым условиям оптимальности. Начальное значение вспомогательной долготы K_0 без потери общности может быть принято нулевым, поэтому краевые условия для геоцентрического участка траектории могут быть представлены в виде:

$$L_K(0) = L_0, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0(L_0), m(0) = m_0, \quad (5.1.1.2)$$

$$L_K(K_{fgc}) + K_{fgc} = L_{EML1gc}, \mathbf{x}(K_{fgc}) = \mathbf{x}_{EML1gc}, t(K_{fgc}) = t_{EML1}, \quad (5.1.1.3)$$

где K_{fgc} – конечное значение вспомогательной долготы геоцентрического участка, \mathbf{x}_{EML1gc} , L_{EML1gc} – геоцентрические оскулирующие орбитальные элементы EML_1 и истинная долгота EML_1 в заданный момент ее пролета t_{EML1} , $L_0 = L_{EML1gc} - \Delta L_{gc}$ – начальная истинная долгота КА, ΔL_{gc} – заданная угловая дальность геоцентрического участка перелета.

Краевые условия для селеноцентрического участка траектории можно записать в виде

$$L_K(0) = L_{EML1sc}, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_{EML1sc}, m(0) = m_{EML1}, t(0) = t_{EML1}, \quad (5.1.1.4)$$

$$L_K(K_{fsc}) + K_{fsc} = L_{fsc}, \mathbf{x}(K_{fsc}) = \mathbf{x}_f(L_{fsc}), \quad (5.1.1.5)$$

где K_{fsc} – конечное значение вспомогательной долготы селеноцентрического участка, \mathbf{x}_{EML1sc} , L_{EML1sc} – селеноцентрические оскулирующие орбитальные элементы EML_1 и истинная долгота EML_1 в заданный момент ее пролета t_{EML1} , m_{EML1} – масса КА в конце геоцентрического участка (в момент достижения EML_1), $L_{fsc} = L_{EML1sc} + \Delta L_{sc}$ – конечная истинная долгота КА, ΔL_{sc} – заданная угловая дальность селеноцентрического участка перелета.

Краевые условия должны быть дополнены условиями трансверсальности. В частности, в начале обоих участков должно выполняться условие трансверсальности $p_{LK} + H = 0$ и $p_T = 0$, в конце обоих участков – условие трансверсальности $p_m = 0$ и $p_T = 0$, а в начале геоцентрического и в конце селеноцентрического участка – условие трансверсальности $p_t = 0$. Окончательно, краевые условия для геоцентрического участка траектории принимают вид:

$$\begin{aligned} L_K(0) = L_0, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0(L_0), m(0) = m_0, \\ p_t(0) = 0, p_{LK}(0) + H(0) = 0, p_T(0) = 0, \end{aligned} \quad (5.1.1.6)$$

$$\begin{aligned} L_K(K_{fgc}) + K_{fgc} = L_{EML1gc}, \mathbf{x}(K_{fgc}) = \mathbf{x}_{EML1gc}, \\ t(K_{fgc}) = t_{EML1}, p_m(K_{fgc}) = 0, p_T(K_{fgc}) = 0, \end{aligned} \quad (5.1.1.7)$$

Для решения рассматриваемой краевой задачи требуется определить 8 компонент вектора $\mathbf{p}_{x1}(0)$, конечную вспомогательную долготу K_f и тягу T при которых удовлетворяется последнее уравнение в (5.1.1.6) и 9 уравнений (5.1.1.7).

Краевые условия для селеноцентрического участка, дополненные условиями трансверсальности, имеют вид:

$$\begin{aligned} L_K(0) = L_{EML1sc}, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_{EML1sc}, m(0) = m_{EML1}, \\ t(0) = t_{EML1}, p_{LK}(0) + H(0) = 0, p_T(0) = 0, \end{aligned} \quad (5.1.1.8)$$

$$\begin{aligned} L_K(K_{fsc}) + K_{fsc} = L_{fsc}, \mathbf{x}(K_{fsc}) = \mathbf{x}_f(L_{fsc}), \\ p_t(K_{fsc}) = 0, p_m(K_{fsc}) = 0, p_T(K_{fsc}) = 0. \end{aligned} \quad (5.1.1.9)$$

Подробный вывод условий (5.1.1.6)-(5.1.1.9) для задачи перелета между околоземными орбитами был приведен в разделе 2.3.

5.1.2 Методы решения задачи оптимального управления:

МИНИМИЗАЦИЯ ТЯГИ

Рассмотрим решение краевой задачи (10)–(12) методом продолжения по параметру в форме, представленной в разделе 3.1. Для решения задачи оптимизации геоцентрического участка траектории требуется найти значения неизвестных параметров

$$\mathbf{z} = [\mathbf{p}_x^T(0), p_{LK}(0), t(0), T, p_m(0), K_{fgc}]^T, \quad (5.1.2.1)$$

при которых удовлетворяются условия

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(K_{fgc}) - \mathbf{x}_{EML1gc} \\ p_{LK}(0) + H(0) \\ t_f - t(K_{fgc}) \\ p_m(K_{fgc}) \\ L_K(K_{fgc}) + K_{fgc} - L_{EML1gc} \\ p_T(K_{fgc}) \end{bmatrix} = 0.$$

Для решения задачи оптимизации селеноцентрического участка траектории требуется найти значения неизвестных параметров

$$\mathbf{z} = [\mathbf{p}_x^T(0), p_{LK}(0), p_t(0), T, p_m(0), K_{fsc}]^T, \quad (5.1.2.2)$$

при которых удовлетворяются условия

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(K_{fsc}) - \mathbf{x}_f(L_{fsc}) \\ p_{LK}(0) + H(0) \\ p_t(K_{fsc}) \\ p_m(K_{fsc}) \\ L_K(K_{fsc}) + K_{fsc} - L_{fsc} \\ p_T(K_{fsc}) \end{bmatrix} = 0.$$

Таким образом, задача формально сводится к решению системы уравнений $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = 0$, причем для вычисления вектора невязок \mathbf{f} при текущем значении \mathbf{z} необходимо проинтегрировать на отрезке $K \in [0, K_{fgc}]$ и $K \in [0, K_{fsc}]$ систему дифференциальных уравнений (2.3.11). При решении подобных задач используется методика решения задачи оптимизации возмущенных траекторий с конечной тягой, представленная в разделе 3.3 и 3.4. А также, для вычисления производных от возмущающих ускорений предлагается использовать программу CDNAD (см. раздел 3.2).

В качестве начального приближения используются значения неизвестных параметров краевой задачи, полученные для оптимальной ОМ-траектории. Начальное приближение для значения минимальной тяги T_{\min} устанавливается равным некоторому малому значению (например, 10^{-4} Н). Начальное приближение для p_m и, для селеноцентрического участка, p_t устанавливается равным 0. Начальная масса КА на селеноцентрическом участке устанавливается равной конечной массе КА на геоцентрическом участке траектории. В результате решения задачи минимизации тяги (см. раздел 3.4) определяются значения минимальной тяги на геоцентрическом $T_{\min gc}$ и на селеноцентрическом $T_{\min sc}$ участках перелета. Удовлетворение равенства значений минимальной тяги на обоих участках заданному значению тяги T_{\min}^* осуществляется с помощью подбора угловых дальностей этих участков

$$T_{\min gc}(\Delta L_{gc}) = T^*, T_{\min sc}(\Delta L_{sc}) = T^* \quad (5.1.2.1)$$

где ΔL_{gc} и ΔL_{sc} – угловая дальность перелёта на геоцентрическом и селеноцентрическом участках перелёта соответственно.

Ранее уже упоминалось, что для фиксированной угловой дальности в заданном классе экстремалей существует единственное решение T_{\min} -задачи с оптимальным временем перелета. Отсюда следует, что 1) соотношение угловой дальности и времени перелета на каждом участке оптимально и 2) не существует T_{\min} -траекторий с другим числом витков и с такой же минимальной тягой T_{\min}^* на обоих участках. На рисунке 5.1.2.1 представлен процесс решения задачи оптимизации T_{\min} -траекторий к Луне.

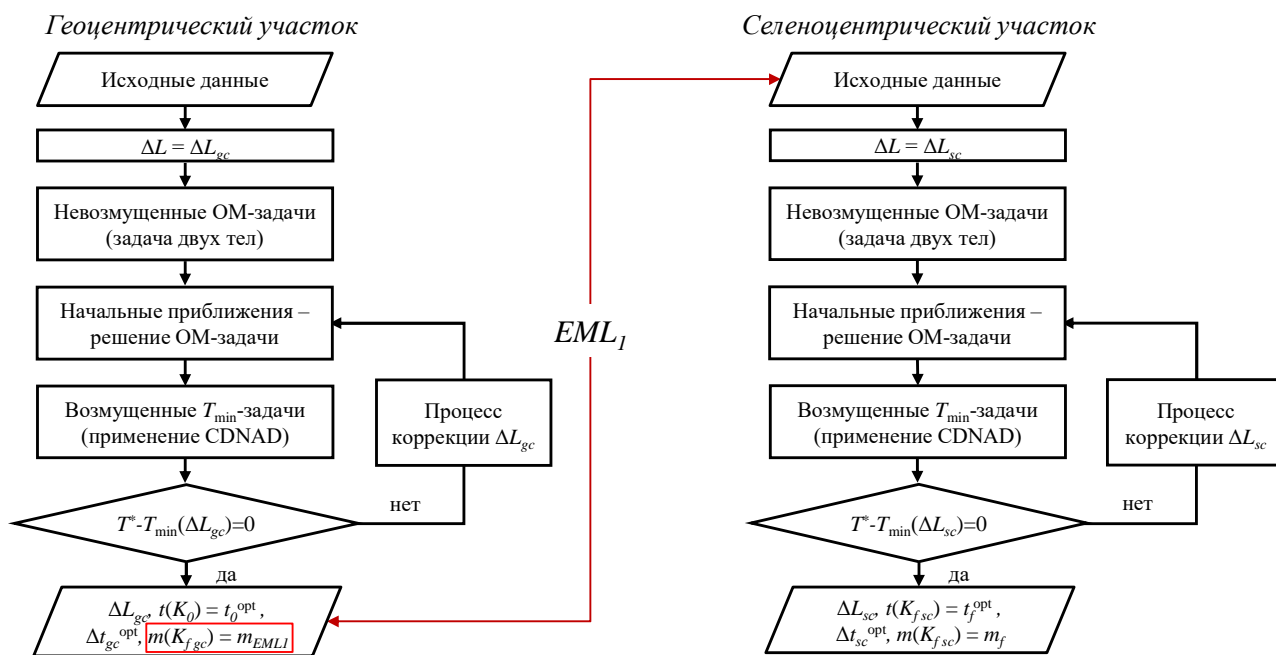


Рисунок 5.1.2.1. Схема решения задачи оптимизации T_{\min} -траекторий к Луне

5.1.3 Численные примеры

Рассмотрим результаты вычисления траекторий с минимальной тягой с эллиптической околоземной орбиты на круговую окололунную орбиту, эллиптическую окололунную орбиту и на устойчивые инвариантные многообразия гало-орбит у точек либрации EML_1 и EML_2 .

В первых двух примерах будем рассматривать начальную орбиту с высотой перигея 4500 км, высотой апогея 50000 км, наклонением 28° , аргументом перигея 101.409° и долготой восходящего узла 10° . Дата пролёта точки EML_1 - 18 сентября 2021 года, 12:00:00 UTC. Начальная масса КА 1000 кг, удельный импульс $I_{sp} = 3500$ с.

Время прохождения точки либрации является внешним выбираемым параметром задачи. Для оптимизации времени прохождения точки либрации (стыковки) может быть получено дополнительное условие оптимальности, однако практика показывает, что его использование приводит к существенному ухудшению сходимости. Поэтому для оптимизации

времени прохождения точки либрации целесообразнее решить серию задач с разным временем стыковки.

Первая конечная орбита - круговая окололунная орбита с высотой 5000 км, наклонением 35° и долготой восходящего узла 10° . Параметры окололунной орбиты приведены в селеноцентрической геоэкваториальной системе координат. Требуемое минимальное значение тяги T^* выбрано равным 0.2 Н.

В таблице 5.1.3.1. представлены орбитальные параметры геоцентрической и селеноцентрической оскулирующей орбиты EML_1 для заданного времени.

Таблица 5.1.3.1. Параметры орбиты геоцентрической и селеноцентрической оскулирующей орбиты EML_1 на 12:00:00 UTC 18 сентября 2021 года

Участок траектории	Геоцентрический	Селеноцентрический
Большая полуось, км	235601.23	33575.53
Эксцентриситет	0.375785	0.714726
Наклонение, град.	26.016	
Долгота восходящего узла, град.	10.383	
Аргумент перицентра, град.	138.970	316.415
Истинная аномалия, град.	176.638	179.193

На рисунке 5.1.3.1. показаны проекции оптимальной траектории на плоскость XY в инерциальной системе координат J2000 и на мгновенную плоскость орбиты Луны в синодической системе координат.

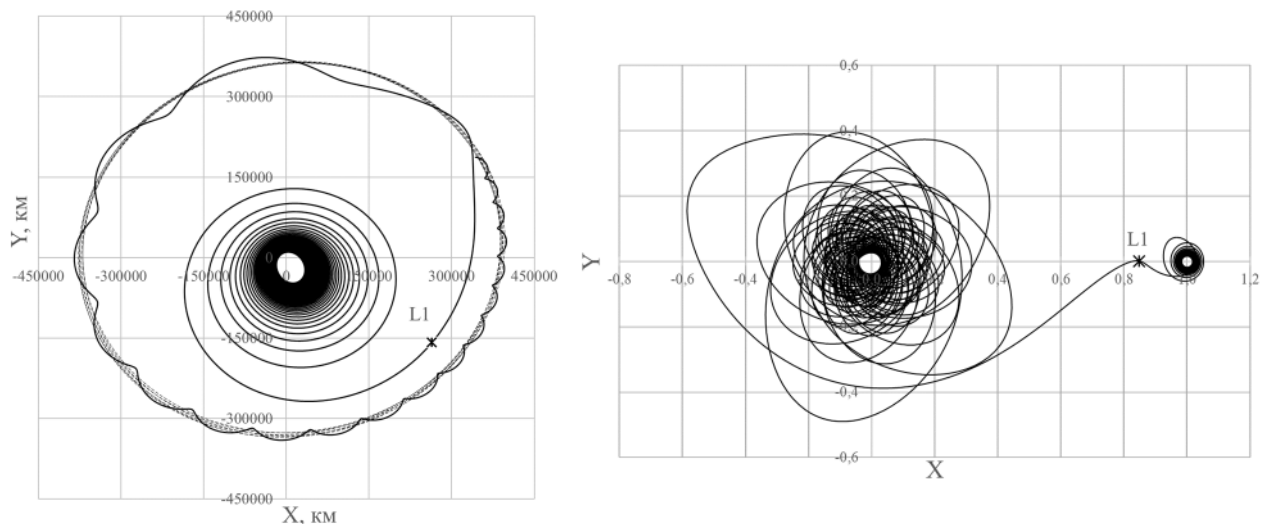


Рисунок 5.1.3.1. Проекция оптимальной траектории на плоскость XY в инерциальной системе координат J2000 (слева) и на мгновенную плоскость орбиты Луны в синодической системе координат (справа), $T^* = 0.2$ Н

В результате оптимизации траектории были получены оптимальная длительность перелета $\Delta t = 164.587$ суток, конечная масса КА $m_f = 917.113$ кг (масса топлива $m_p = 82.887$ кг), начальное (167.437 градуса) и конечное (4.268 градуса) значения истинной аномалии и угловые дальности геоцентрического (74.09908 витков) и селеноцентрического (20.02767 витков) участков траектории с минимальной тягой. Зависимости углов тангажа и рыскания от времени для рассматриваемой траектории представлены на рисунке 5.1.3.2.

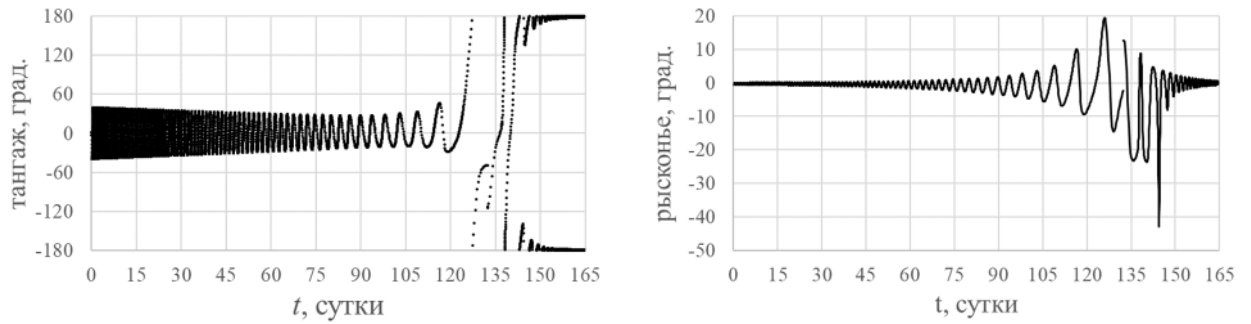


Рисунок 5.1.3.2. Зависимости от времени углов тангажа (слева) и рысканья (справа) для перелета на круговую окололунную орбиту

Вторая рассматриваемая конечная орбита - эллиптическая окололунная орбита с высотой периселения 6000 км и высотой апоселения 10000 км (наклонение 35 градусов, аргумент перицентра 316 градусов, долгота восходящего узла 10 градусов). Приведем результаты расчета оптимальных траекторий на эту орбиту со значениями требуемой минимальной тяги: 0.3 Н, 0.5 Н и 0.7 Н. Проекция траекторий с минимальной тягой на плоскость XY инерциальной системы координат J2000 (слева) и синодической системы координат (справа) представлены на рисунке 5.1.3.3. В таблице 5.1.3.2 представлены основные параметры оптимальных траекторий с различной минимальной тягой. Требуемые затраты топлива уменьшаются со снижением значения тяги за счет уменьшения гравитационных потерь.

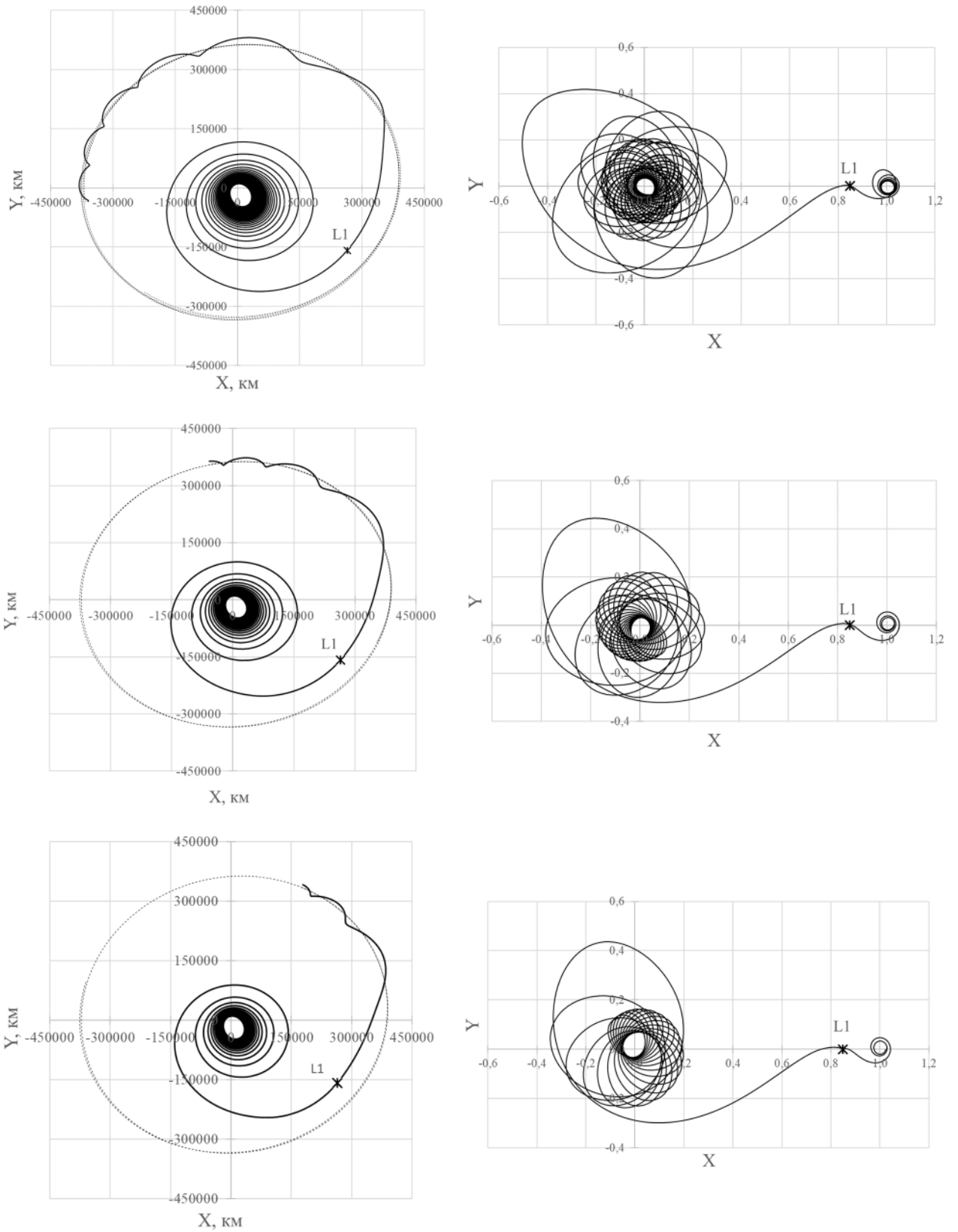


Рисунок 5.1.3.3. Оптимальные траектории с минимальной тягой 0.3 Н (верхний ряд), 0.5 Н (средний ряд) и 0.7 Н (нижний ряд)

Таблица 5.1.3.2. Основные параметры оптимальных траекторий с различным значением требуемой минимальной тяги

T^* , Н	0.3	0.5	0.7
Δt , сутки	105.882	64.429	46.903
m_f , кг	920.159	918.915	917.355
ΔL_{gc}	49.30	29.73	21.13
ΔL_{sc}	6.714	3.858	2.774

В качестве третьего примера рассмотрим траектории с минимальной тягой к устойчивым инвариантным многообразиям гало-орбит, ранее рассмотренным в работе [79]. В [79] был проведен анализ прямых перелетов к гало-орбитам и точкам либрации и перелетов к ним с выходом на инвариантные многообразия. Для расчета траекторий использовалось квазиоптимальное управление с обратной связью (КОУСОС). В качестве начальной околоземной орбиты рассматривалась круговая орбита высотой 42164 км с наклоном 51.8° . Удельный импульс двигательной установки был принят равным 1770 с, а тяга – 290 мН. Рассматривались перелеты с датой окончания 12.04.2026 00:00 UTC. Для перечисленных выше гало-орбит наиболее эффективными оказались траектории с выходом на инвариантное многообразие.

Сравним траектории с квазиоптимальным управлением из работы [79] с траекториями с минимальной тягой, полученными по представленному в этой работе методу. Проекция траекторий перелёта с минимальной тягой к гало-орбитам на мгновенную плоскость орбиты Луны в синодической системе координат представлены на рисунках 5.1.3.4, 5.1.3.5 и 5.1.3.6.

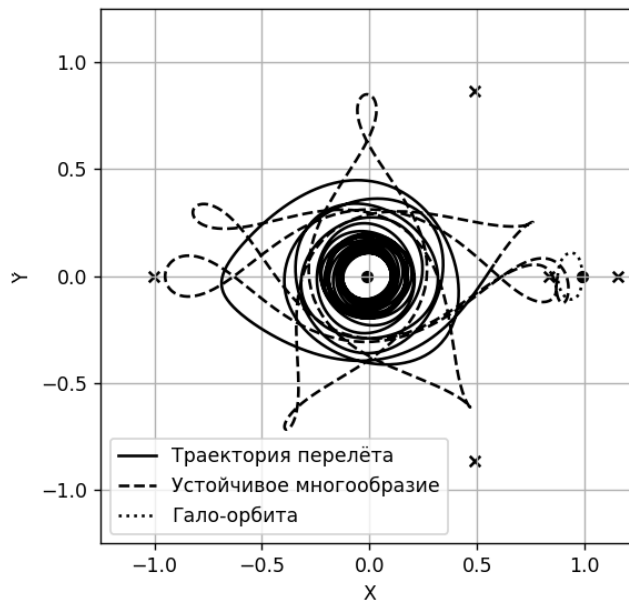


Рисунок 5.1.3.4. Траектории перелета на L1HO (гало-орбита у точки либрации EML_1) с минимальной тягой

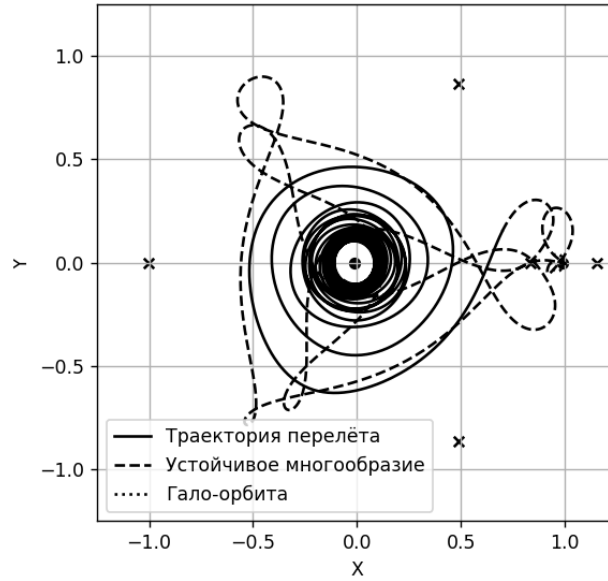


Рисунок 5.1.3.5. Траектория перелета на L1NRHO (гало-орбита у точки либрации EML_1 , относящаяся к классу почти прямолинейных орбит) с минимальной тягой

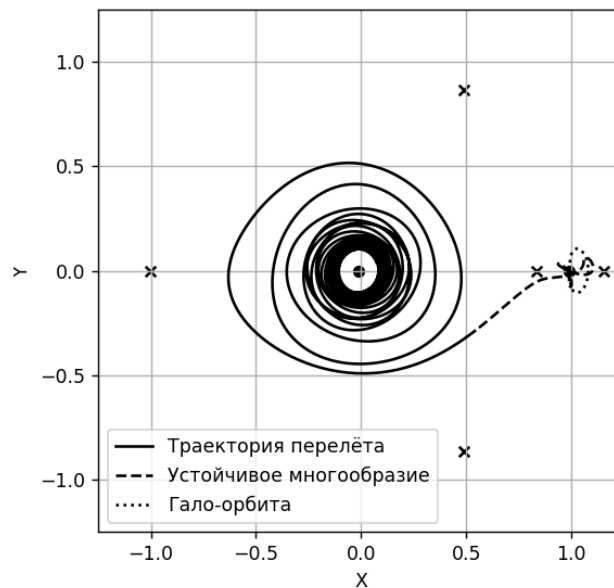


Рисунок 5.1.3.6. Траектория перелета на L2HO (гало-орбита у точки EML_2) с минимальной тягой

В таблице 5.1.3.3 представлены основные параметры траекторий к инвариантным многообразиям гало-орбит с использованием КОУСОС [79] и оптимального управления, минимизирующего величину тяги, при одинаковой угловой дальности перелета. В таблице 5.1.3.3 приводятся: длительность движения по многообразию (Δt_c), суммарное (Δt_Σ) и

моторное (Δt_m) время, количество витков (N_{rev}), тяга (T) и относительная конечная масса КА (μ_k).

Таблица 5.1.3.3. Сравнение основных параметров перелета к инвариантным многообразиям гало-орбит с помощью КОУСОС и оптимального управления T_{min} -задачи

	Δt_c сутки	Δt_Σ сутки	Δt_m сутки	N_{rev}	T , Н	μ_k
КОУСОС [79]						
L1HO	96.3	183.396	87.096	36.25603	0.290	0.86184
L1NRHO	103.8	193.285	89.485	36.325873	0.290	0.87839
L2HO	21.3	109.051	87.751	35.79731	0.290	0.88832
T_{min} -задача						
L1HO	96.3	188.391	92.091	36.25603	0.2678	0.89066
L1NRHO	103.8	198.614	94.814	36.325873	0.2688	0.88744
L2HO	21.3	115.177	93.877	35.79731	0.2711	0.88753

Как видно во всех рассмотренных случаях минимальная тяга оказалась меньше тяги, используемой в [79] для расчета траекторий с КОУСОС. Оптимальная длительность перелета на траекториях с минимальной тягой превышает длительность перелета на траекториях с КОУСОС. Конечная масса КА на траекториях с минимальной тягой может быть больше или меньше, чем на траекториях с КОУСОС, так как при использовании КОУСОС долгота восходящего узла конечной орбиты не фиксировалась, а при решении задачи минимизации тяги была задана.

5.2 Оптимизация свободных граничных условий на траектории перелета с минимальной тягой между околоземной и окололунной орбитами

Рассматривается задача оптимизации свободных граничных условий на траектории с минимальной тягой между круговыми или эллиптическими околоземной и окололунной орбитами [88]. Целью оптимизации является минимизация тяги.

Ранее метод решения задачи минимизации тяги на траектории перелета к Луне с заданной околоземной орбиты на заданную окололунную орбиту был представлен в разделе 5.1. В этой методике все элементы граничных орбит считались заданными. Однако очевидно, что для многих прикладных задач значения долготы восходящего узла и аргумента перицентра граничных орбит могут выбираться с целью улучшения показателей качества решаемой задачи (в рассматриваемом случае – с целью снижения величины тяги).

Для определения оптимальных значений долготы восходящего узла и аргумента перицентра начальной геоцентрической орбиты и конечной селеноцентрической орбиты в данном разделе используются дополнительные условия оптимальности – условия трансверсальности (как, например, в работе [37]). Рассматриваются три варианта частично-свободных граничных условий: «свободная линия апсид», «свободная линия узлов» и «свободные линия узлов и линия апсид».

Приводятся численные примеры траекторий перелета к Луне с минимальной тягой с использованием рассматриваемых условий трансверсальности. Рассматриваются различные варианты граничных условий и проводится сравнение полученных значений минимальной тяги и требуемых затрат топлива для оптимальных траекторий с частично свободными граничными условиями и с полностью заданными элементами граничных орбит.

5.2.1 Необходимые условия оптимальности: задача оптимизации траектории с частично свободными граничными условиями

Рассмотрим задачу оптимизации траектории перелета от EML_1 до окололунной орбиты со свободными (оптимальными) долготой восходящего узла и аргументом перицентра конечной орбит. Вместо заданных конечных значений долготы восходящего узла Ω_f и аргумента перицентра ω_f в уравнении (5.1.1.5), которые используются для вычисления компонентов вектора эксцентриситета $e_{xf}=e_f\cos(\Omega_f+\omega_f)$, $e_{yf}=e_f\sin(\Omega_f+\omega_f)$ и наклона $i_{xf}=i_f\cos\Omega_f$, $i_{yf}=i_f\sin\Omega_f$ в рассматриваемом случае можно использовать следующие уравнения:

$$e_x^2(K_f) + e_y^2(K_f) = e_f^2, \quad i_x^2(K_f) + i_y^2(K_f) = \text{tg}^2 \frac{i_f}{2}. \quad (5.2.1.1)$$

В (5.2.1.1) фиксируется только конечное значение эксцентриситета и наклона. Последнее уравнение в (5.1.1.4), 5 уравнений (5.1.1.5), кроме 4 условий, связанных с элементами e_x , e_y , i_x , i_y , и 2 уравнения (5.2.1.1) определяют 8 уравнений для определения 10 неизвестных переменных (5.1.2.2) и должны быть дополнены двумя условиями трансверсальности. Для их вывода запишем концевую функцию Лагранжа в следующем виде:

$$\begin{aligned} l = & (L_K(K_0) + K_0 - L_0)\lambda_L^0 + (L_K(K_f) + K_f - L_f)\lambda_L^f + (\mathbf{x}(K_0) - \mathbf{x}_0(L_0))^T \lambda_x^0 \\ & + (e_x^2(K_f) + e_y^2(K_f) - e_f^2)\lambda_e^f + (i_x^2(K_f) + i_y^2(K_f) - \text{tg}^2 i_f/2)\lambda_i^f \\ & + (p(K_f) - p_f)^T \lambda_p^f + (m(K_0) - m_0)\lambda_m^0 + (t(K_0) - t_0)\lambda_t^0, \end{aligned} \quad (5.2.1.2)$$

где $\lambda_L^0, \lambda_L^f, \lambda_x^0, \lambda_p^f, \lambda_e^f, \lambda_i^f, \lambda_m^0, \lambda_t^0$ – неопределенные множители Лагранжа. Для такой функции

Лагранжа условия трансверсальности примут вид:

$$\left. \begin{aligned}
p_{ex}(K_f) &= -\frac{\partial l}{\partial e_x(K_f)} = -2e_x(K_f)\lambda_e^f, & p_{ey}(K_f) &= -\frac{\partial l}{\partial e_y(K_f)} = -2e_y(K_f)\lambda_e^f, \\
p_{ix}(K_f) &= -\frac{\partial l}{\partial i_x(K_f)} = -2i_x(K_f)\lambda_i^f, & p_{iy}(K_f) &= -\frac{\partial l}{\partial i_y(K_f)} = -2i_y(K_f)\lambda_i^f.
\end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (5.2.1.3)$$

$$p_{ex}(K_f)e_y(K_f) - p_{ey}(K_f)e_x(K_f) = 0, \quad p_{ix}(K_f)i_y(K_f) - p_{iy}(K_f)i_x(K_f) = 0.$$

Остальные условия трансверсальности представлены в разделе 2.3. Рассматриваемый случай частично-свободных граничных условий, при которых не заданы положения линий апсид и узлов конечной орбиты, назовем случаем «свободных линии апсид и линии узлов». Два дополнительных условия в (5.2.1.3) будем использовать для решения задачи оптимизации траекторий перелета на эллиптическую околосолнечную орбиту. Окончательно, вектор невязок \mathbf{f} для рассматриваемой краевой задачи можно записать в виде:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} p(K_f) - p_f \\ e_x^2(K_f) + e_y^2(K_f) - e_f^2 \\ i_x^2(K_f) + i_y^2(K_f) - \text{tg}^2 i_f / 2 \\ p_{ex}(K_f)e_y(K_f) - p_{ey}(K_f)e_x(K_f) \\ p_{ix}(K_f)i_y(K_f) - p_{iy}(K_f)i_x(K_f) \\ p_{LK}(0) + H(0) \\ p_t(K_f) \\ p_m(K_f) \\ L_K(K_f) + K_f - L_f \\ p_T(K_f) \end{bmatrix}. \quad (5.2.1.4)$$

Если конечная орбита – круговая, то уравнения со второго по пятое в (5.2.1.4) заменяются на следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
e_x(K_f) &= 0, e_y(K_f) = 0, i_x^2(K_f) + i_y^2(K_f) = \text{tg}^2 \frac{i_f}{2}, \\
p_{ix}(K_f)i_y(K_f) - p_{iy}(K_f)i_x(K_f) &= 0.
\end{aligned} \quad (5.2.1.5)$$

При свободном значении аргумента перицентра и фиксированном значении долготы восходящего узла эта четверка уравнений принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
i_x(K_f) &= i_{xf}, i_y(K_f) = i_{yf}, e_x^2(K_f) + e_y^2(K_f) = e_f^2, \\
p_{ex}(K_f)e_y(K_f) - p_{ey}(K_f)e_x(K_f) &= 0.
\end{aligned} \quad (5.2.1.6)$$

Рассмотрим краевую задачу для геоцентрического участка траектории со свободными граничными условиями. Для решения задачи со свободными линиями апсид и линиями узлов

в начальных условиях (5.1.1.2) требуется заменить уравнения для векторов эксцентриситета и наклона на следующие уравнения:

$$\begin{aligned} e_x^2(0) + e_y^2(0) = e_0^2, i_x^2(0) + i_y^2(0) = \operatorname{tg}^2 \frac{i_0}{2}, \\ p_{ex}(0)e_y(0) - p_{ey}(0)e_x(0) = 0, p_{ix}(0)i_y(0) - p_{iy}(0)i_x(0) = 0. \end{aligned} \quad (5.2.1.7)$$

При необходимости вычисления оптимальных значений долготы восходящего узла Ω_0 и аргумента перицентра ω_0 начальной геоцентрической орбиты необходимое количество неизвестных параметров увеличивается с 10 до 14. В этом случае к вектору невязок \mathbf{f} добавляются 4 уравнения (5.2.1.7), а к вектору неизвестных параметров \mathbf{z} – начальные значения e_{x0} , e_{y0} , i_{x0} и i_{y0} :

$$\mathbf{z} = [\mathbf{p}_x^T(0), p_{LK}(0), t(0), T, p_m(0), K_f, e_x(0), e_y(0), i_x(0), i_y(0)]^T. \quad (5.2.1.8)$$

Следовательно, с учетом увеличения размерности, рассматриваемая задача будет более сложной, чем задача оптимизации селеноцентрического участка траектории.

5.2.2 Численные примеры

Рассмотрим примеры оптимальных траекторий перелета с эллиптической геопереходной орбиты (ГПО) к точке EML_1 , от точки EML_1 до эллиптической или круговой окололунных орбит, параметры которых представлены в таблице 5.2.2.1, с минимальной тягой и с использованием рассматриваемых условий трансверсальности. Фиксированное время пролета EML_1 – 26 января 2022 года, 12:00:00 UTC, $m_0 = 1000$ кг, $I_{sp} = 3500$ с. При оптимизации траекторий учитывались вторая зональная гармоника J_2 (при решении задачи оптимизации геоцентрической траектории) и полная эфемеридная модель возмущений (в системе Земля-Луна-Солнце).

Таблица 5.2.2.1. Параметры орбиты

Участок траектории	Эллиптическая геоцентрическая орбита	Эллиптическая селеноцентрическая орбита	Круговая селеноцентрическая орбита
Высота перицентра, км	15000	5000	5000
Высота апоцентра, км	60000	10000	5000
Наклонение, градусов	26	28	28
Угловая дальность, витков	10	3	5

Сначала рассмотрим результаты перелета от EML_1 до эллиптической окололунной орбиты. На рисунках 5.2.2.1 и 5.2.2.2 представлены рассматриваемые оптимальные траектории с минимальной тягой для частично свободных и фиксированных граничных условий на плоскости синодической системы координат. Для траектории с фиксированными граничными условиями значения долготы восходящего узла и аргумента перицентра задавались равными 60 и 360 градусам, соответственно.

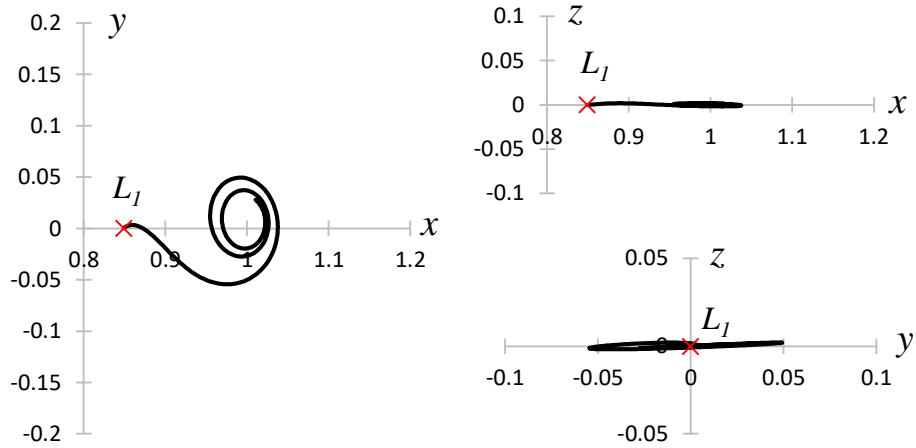


Рисунок 5.2.2.1. Оптимальная траектория перелета от EML_1 до эллиптической окололунной орбиты со свободными долготой восходящего узла и аргументом перицентра.

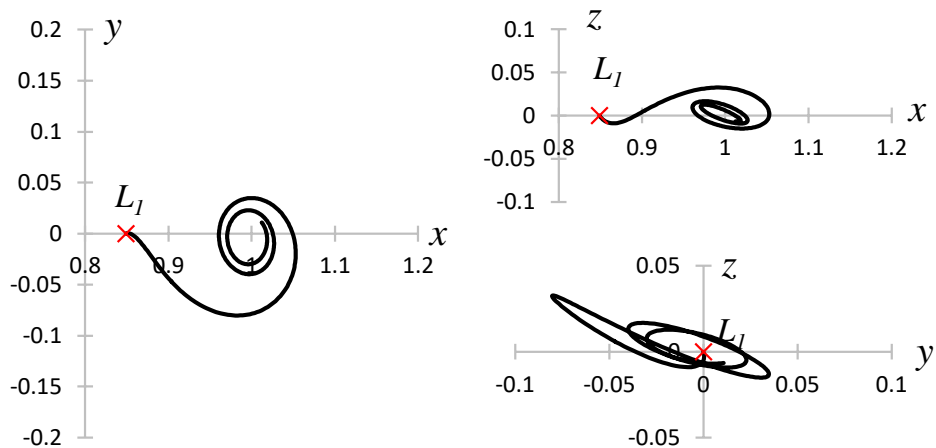


Рисунок 5.2.2.2. Оптимальная траектория перелета от EML_1 до эллиптической окололунной орбиты с полностью заданными элементами граничных орбит.

Из рисунков 5.2.2.1 и 5.2.2.2 видно, что в рассматриваемом случае ($\Delta\Omega = |\Omega_{\text{opt}} - \Omega_{\text{fix}}| = 54.335^\circ$ и $\Delta\omega = |\omega_{\text{opt}} - \omega_{\text{fix}}| = 103.150^\circ$) конечные значения Ω и ω оказывают сильное влияние на внешний вид траектории. На рисунке 5.2.2.3 показаны зависимости аргумента перицентра, долготы восходящего узла и наклона от времени для рассматриваемых оптимальных траекторий с частично свободными граничными условиями (сплошные линии) и с полностью заданными элементами граничных орбит (пунктирные линии). В этих зависимостях хорошо видны «лишние» изменения (увеличение или уменьшение) для трех элементов орбиты из-за неправильно выбранных конечных значений Ω и ω . Величина минимальной тяги на этих двух оптимальных траекториях отличается на 56 мН (745 мН на траектории со частично свободными граничными условиями и 801 мН на траектории с полностью заданными граничными условиями), а для фиксированных граничных орбит длительность перелета и затрат рабочего тела увеличиваются на 1.726 сутки и 4.557 кг.

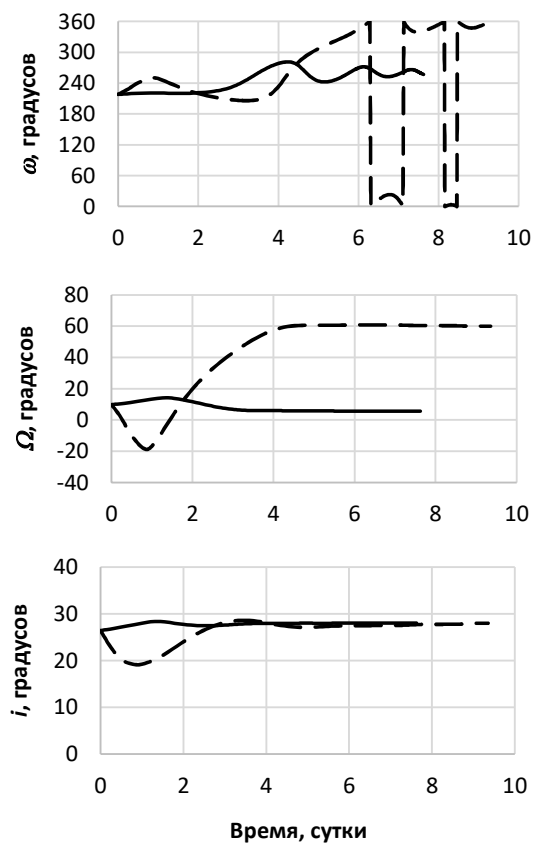


Рисунок 5.2.2.3. Зависимости аргумента перицентра (верхний ряд), долготы восходящего узла (средний ряд) и наклона от времени (нижний ряд) для оптимальных траекторий перелета от EML_1 до окололунной орбиты с частично свободными граничными условиями и с полностью заданными элементами граничных орбит

На рисунке 5.2.2.4 представлены оптимальные геоцентрические траектория с минимальной тягой для частично свободных (сверху) и фиксированных граничных условий (снизу) на плоскости системы координат J2000.

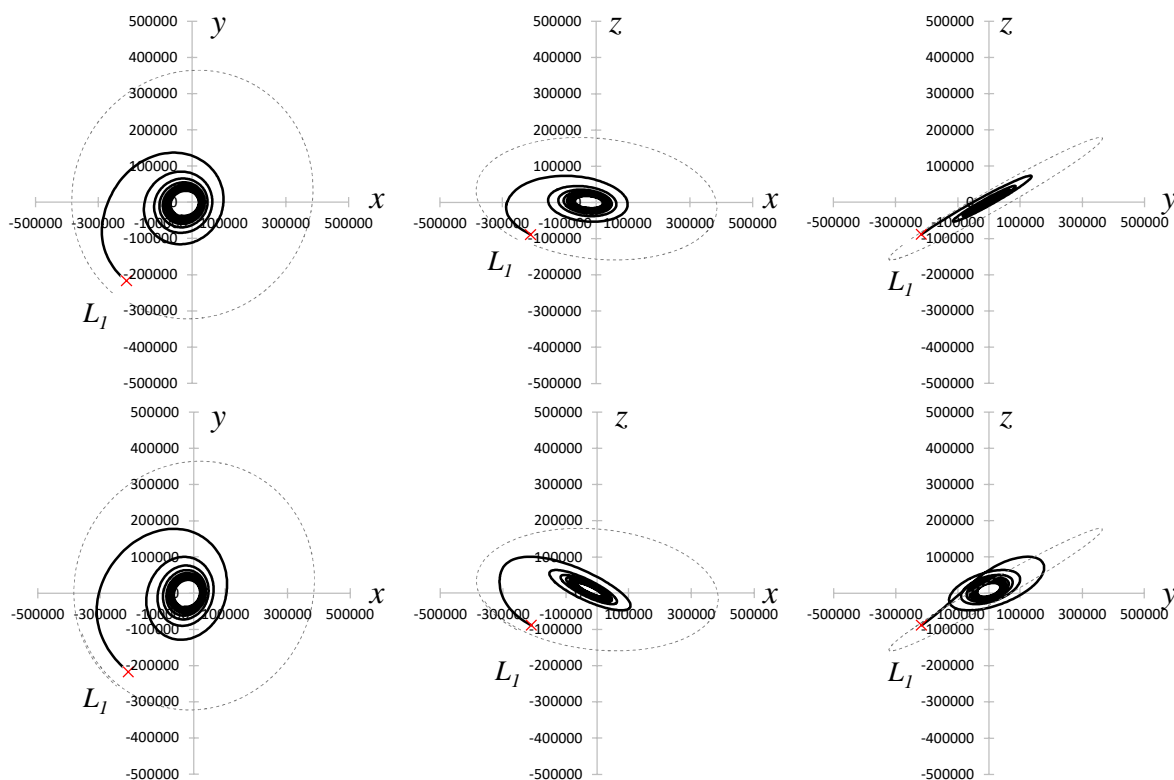


Рисунок 5.2.2.4. Оптимальные траектории перелета с эллиптической ГПО к точке EML_1 со свободными долготой восходящего узла и аргументом перицентра (сверху) и оптимальная траектория с полностью заданными элементами граничных орбит (снизу)

Из рисунка 5.2.2.4 видно, что в рассматриваемых случаях ($\Delta\Omega = 48.546^\circ$ и $\Delta\omega = 56.075^\circ$) неправильно выбранные начальные значения Ω и ω приводят к увеличению отклонения траектории от плоскости орбиты Луны. На рисунке 5.2.2.5 показаны зависимости аргумента перицентра, долготы восходящего узла и наклона от времени для оптимальных траекторий перелета с ГПО к точке EML_1 с частично свободными граничными условиями (сплошные линии) и с полностью заданными элементами граничных орбит (пунктирные линии).

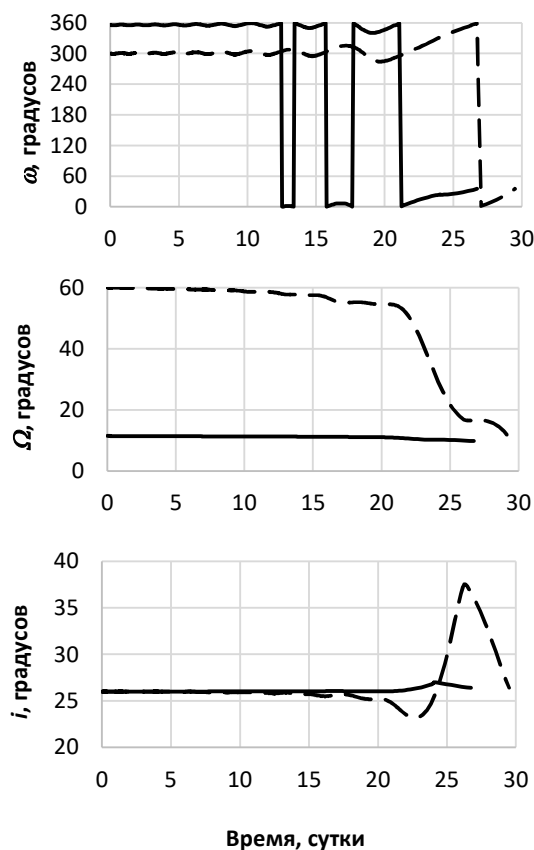


Рисунок 5.2.2.5. Зависимости аргумента перигея (верхний ряд), долготы восходящего узла (средний ряд) и наклона от времени (нижний ряд) от времени для оптимальных траекторий перелета с ГПО к точке EML_1 с частично свободными граничными условиями и с полностью заданными элементами граничных орбит

Из сравнения приведенных результатов можно сделать вывод, что на достаточно высоких орбитах, оптимальные значения долготы восходящего узла и аргумента перигея начальной геоцентрической орбиты и конечной селеноцентрической орбиты близки к значениям элементов оскулирующей орбиты EML_1 . В таблицах 5.2.2.2 и 5.2.2.3 представлены основные параметры для трех рассматриваемых оптимальных траекторий с полностью заданными элементами граничных орбит и с частично свободными граничными условиями.

Таблица 5.2.2.2. Основные параметры оптимальных траекторий с полностью заданными элементами граничных орбит.

Участок траектории	Эллиптическая геоцентрическая орбита	Эллиптическая селеноцентрическая орбита	Круговая селеноцентрическая орбита
Минимальное значение тяги, Н	0.855	0.801	0.859
Длительность перелета, сутки	29.499	9.351	9.513
Затраты топлива, кг	63.517	18.856	20.573
Долгота восходящего узла, градусов	60.0	60.0	50.0
Аргумент перицентра, градусов	300.0	360.0	-

Таблица 5.2.2.3. Основные параметры оптимальных траекторий с частично свободными граничными условиями (со свободными долготой восходящего узла и аргументом перицентра).

Участок траектории	Эллиптическая геоцентрическая орбита	Эллиптическая селеноцентрическая орбита	Круговая селеноцентрическая орбита
Минимальное значение тяги, Н	0.838	0.745	0.852
Длительность перелета, сутки	26.737	7.625	9.218
Затраты топлива, кг	56.428	14.299	19.763
Долгота восходящего узла, градусов	11.454	5.665	5.767
Аргумент перицентра, градусов	356.075	256.850	-

Из таблиц 5.2.2.2 и 5.2.2.3 видно, что для перелета от EML_1 до круговой окололунной орбиты разница в минимальном значении тяги между траекториями с частично свободными и фиксированными граничными условиями уменьшается, так как в этом случае требуется обеспечить только оптимальное значение долготы восходящего узла.

5.3 Минимизация затрат топлива для траекторий перелета к Луне с малой тягой

Рассматривается подход к решению задачи оптимизации многовитковых траекторий космических аппаратов с ограниченной тягой между околоземной и окололунной орбитами.

В известной нам литературе не так много примеров решения задачи минимизации затрат топлива для траекторий перелета КА с ограниченной тягой и постоянной скоростью истечения между околоземной и окололунной орбитами в рамках полной эфемеридной модели. Как правило, при решении этой задачи либо делаются определенные допущения, которые приводят к нарушению выполнения необходимых условий оптимальности, либо рассматриваются упрощенные математические модели движения, либо рассматриваются схемы полета не включающие одновременно участки многовитковой раскрутки у Земли и многовитковой скрутки у Луны.

В работе [80] представлены решения задачи минимизации времени перелета и минимизации затрат топлива на основе использования принципа максимума Понтрягина и метода продолжения в рамках плоской ограниченной круговой задачи трех тел (PCR3BP). В результате вычислены оптимальные по минимуму затрат топлива траектории с различными величинами тяги, а также показана траектория с минимальным временем, которая проходит в окрестности EML_1 .

В работе [105] представлено решение задачи минимизации затрат топлива в рамках модели бикруговой задачи четырех тел (BR4BP) с использованием непрямого подхода оптимизации. В этой работе рассматриваются низкоэнергетические лунные траектории с малой тягой, т.е. в рассматриваемой в [105] схеме полета отсутствует участок многовитковой геоцентрической раскрутки в отличие от рассматриваемой в этой диссертации схемы перелета.

В работах [71, 107], рассмотрена оптимальная траектория перелета КА с ГПО или высокой околоземной опорной орбиты к гало-орбитам вокруг точки либрации с идеально-регулируемым двигателем ограниченной мощности (ОМ) [71] и с двигателем ограниченной тяги с постоянной скоростью истечения (с переключениями тяги) [107] в рамках CR3BP. В этих работах, наоборот, отсутствует участок многовитковой селеноцентрической скрутки.

Конечно, есть решения задачи оптимизации перелета с участками многовитковой геоцентрической раскрутки с начальной околоземной орбиты и многовитковой селеноцентрической скрутки до конечной окололунной орбиты. Результаты решения таких задач представлены, например, в работах [93, 94, 96, 100]. В [100] представлена оптимальная траектория с идеально-регулируемым двигателем от околоземной круговой орбиты с высотой 200 км до окололунной круговой орбиты с высотой 100 км. Представленная в [100]

оптимальная траектория имеет малую длительность перелета (10.76 сутки) и относительно малую угловую дальность (36 витков вокруг Земли и 5 витков вокруг Луны), в результате чего функционал ОМ-задачи и максимальное значение реактивного ускорения на полученном решении очень большие. Это решение было улучшено авторами работы [96], которые увеличили длительность перелета до 73 суток, а угловую дальность – до 289 витков вокруг Земли и 47 витков вокруг Луны.

В работе [94] решена задача оптимизации траектории с ограниченной тягой фиксированной структуры, в которую входят три участка: геоцентрический участок раскрутки с постоянно работающим двигателем, пассивный участок и селеноцентрический участок скрутки с постоянно работающим двигателем. В численных примерах, представленных в [94] используется достаточно большое значение реактивного ускорения (свыше 1 мм/с^2) и полученные оптимальные траектории имеют с небольшое число витков. Полученные в [94] решения не являются, строго говоря, оптимальными ни по функционалу минимума времени перелета, ни по функционалу минимума затрат топлива. Действительно, на траекториях с минимальным временем перелета не может быть пассивных участков, а неоптимальность по затратам топлива следует из того, что в [94] не учитывается условие оптимальности переключения тяги во внутренних точках первого и третьего участков траектории.

Попытка увеличения числа витков с использованием фиксированной структуры траектории приведена в работе [93]. В этой работе число участков увеличивается до пяти – добавляется начальный участок перелета между низкой и высокой околоземными орбитами и конечный участок перелета между высокой и низкой окололунными орбитами. В [93] рассматривается возмущенная (эфмеридная) модель движения КА в модифицированных равноденственных элементах. Но в связи со сложностями вычисления производных от рассматриваемых возмущающих ускорений по фазовым координатам в равноденственных элементах, в правых частях д.у. сопряженных переменных были проигнорированы слагаемые, которые зависят от производных возмущающих ускорений. В связи с этим полученные траектории не являются оптимальными.

С нашей точки зрения, несмотря на существующие трудности, использование модифицированных равноденственных элементов при решении рассматриваемых задач вполне оправданно, так как позволяет значительно увеличить шаг численного интегрирования дифференциальных уравнений и повысить точность их решения по сравнению с использованием декартовых или сферических координат. В конечном итоге, использование модифицированных равноденственных элементов позволяет существенно сократить время решения рассматриваемых задач оптимизации траекторий [86].

В работе [74] для сквозной оптимизации используются многообразия гало-орбит вокруг точки либрации EML_1 . Предложенный в [74] метод включает в себя трудоемкую процедуру выбора подходящих многообразий для транзита КА в сферу Хилла Луны. Этот метод не гарантирует выполнения необходимых условий оптимальности в точках стыковки участков с работающим двигателем с участком движения по многообразию. Более того, рассматриваются только траектории с 3 участками работы ЭРДУ, разделенными 2 пассивными участками, и используется упрощенная математическая модель движения бикруговая задача четырех тел.

Использование управления с обратной связью на основе функций Ляпунова [75, 76] или квазиоптимального управления с обратной связью [77, 78, 79] позволяет существенно снизить вычислительную сложность задачи. При этом, однако, трудно гарантировать близость к оптимальному решению и точное выполнение всех краевых условий.

В результате анализа существующих подходов к решению рассматриваемой задачи, автору не удалось найти в общедоступных источниках методов оптимизации траекторий перелета КА с малой тягой между околоземной и окололунной орбитами, в которых удовлетворяются все следующим требованиям:

(1) на всех участках траектории учитывается притяжения Земли, Луны и Солнца с использованием полной эфемеридной модели для вычисления векторов положения и скорости небесных тел;

(2) решается ОТ-задача минимизации затрат топлива с переключениями тяги с удовлетворением всех необходимых условий оптимальности;

(3) рассматриваются траектории, включающие участок многовитковой геоцентрической раскрутки и участок многовитковой селеноцентрической скрутки;

(4) решается задача выбора оптимального (или близкого к оптимальному) соотношения между угловой дальностью и длительностью, а также, между угловыми дальностями геоцентрического и селеноцентрического участков.

Представленный в данном разделе подход удовлетворяет всем четырем перечисленным условиям, за исключением удовлетворения необходимых условий оптимальности стыковки геоцентрического и селеноцентрического участков траектории. Траектория разбивается на геоцентрический и селеноцентрический участки, которые стыкуются в точке либрации EML_1 системы Земля-Луна. Задача сквозной оптимизации перелета с оптимальной стыковкой этих участков траектории будет рассмотрена в следующем разделе. Для обеспечения выбора оптимального соотношения между угловой дальностью и длительностью каждого участка рассматривается задача оптимизации траектории с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета. Область существования решения задач минимизации затрат

топлива с фиксированным временем или фиксированной угловой дальностью перелета ограничена. Мы используем задачу минимизации тяги как инструмент диагностики существования геоцентрического и селеноцентрического участков траектории с заданной угловой дальностью в задаче минимизации затрат топлива.

Рассматриваемый тип задачи оптимизации траектории очень чувствителен к выбору начального приближения для неизвестных параметров краевой задачи принципа максимума. Для преодоления этой трудности использовалось решение вспомогательной задачи – задачи оптимизации траектории с ограниченной мощностью, которое удается вычислить с использованием тривиального (нулевого) начального приближения. Полученное оптимальное решение для траектории с ограниченной мощностью численно продолжается в оптимальные траектории с минимальной тягой и минимальными затратами топлива с использованием метода, представленного в разделах 3.3 и 3.4.

Приводятся численные примеры оптимизации многовитковых траекторий перелета космических аппаратов с малой тягой с высокоэллиптической околоземной орбиты на круговую окололунную орбиту с учетом притяжения Земли, Луны и Солнца, вычисляемых с использованием точной эфемеридной модели.

5.3.1 Математическая модель

Целью оптимизации в этом разделе является вычисление траекторий с минимальными затратами топлива $m_p = m(0) - m(K_f)$ при заданных угловых дальностях геоцентрического и селеноцентрического участков и свободном времени перелета. На геоцентрическом участке рассматривается задача минимизации функционала

$$J_{gc} = \int_{t_0}^{t_{EML1}} \delta \frac{T}{c} dt = \int_0^{K_{jgc}} \delta \frac{T}{q^2 c} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} dK, \quad (5.3.1.1)$$

а на селеноцентрическом участке – задача минимизации функционала

$$J_{sc} = \int_{t_{EML1}}^{t_f} \delta \frac{T}{c} dt = \int_0^{K_{jgc}} \delta \frac{T}{q^2 c} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} dK. \quad (5.3.1.2)$$

Рассматриваемая задача была проанализирована в разделе 2.1 для оптимизации перелетов между околоземными орбитами. Методика, представленная в разделе 2.1 используется и для рассматриваемой задачи оптимизации траектории перелета к Луне космического аппарата с ограниченной тягой и постоянной скоростью истечения.

Следует отметить, что все граничные условия на геоцентрическом участке траектории определяются в геоэквиаториальной инерциальной системе координат EME2000, а конечные условия на селеноцентрическом участке определяются в селеноэквиаториальной инерциальной

системе координат LME2000. Необходимые преобразования между этими системами координат производятся с использованием матрицы перехода, определенной соотношениями из Приложения Б настоящей работы. В дальнейшем все векторы считаются по умолчанию определенными в EME2000, а векторы представленные в LME2000 отмечаются нижним индексом “LME”.

Краевые условия для геоцентрического участка траектории можно записать в виде:

$$L_K(0) = L_0, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0(L_0), m(0) = m_0, p_t(0) = 0, p_{LK}(0) + H(0) = 0, \quad (5.3.1.3)$$

$$L_K(K_{fgc}) + K_{fgc} = L_{EML1gc}, \mathbf{x}(K_{fgc}) = \mathbf{x}_{EML1gc}, t(K_{fgc}) = t_{EML1}, p_m(K_{fgc}) = 0. \quad (5.3.1.4)$$

Для расчета селеноцентрического участка система дифференциальных уравнений (1.1.7) интегрируется в геоэквиаториальной инерциальной системе координат EME2000. В конечной точке селеноцентрического участка орбитальные элементы переводятся из EME2000 в селеноэквиаториальную инерциальную систему координат LME2000 по вычислительной схеме, представленной в Приложении Б.

Краевые условия для селеноцентрического участка траектории можно записать в виде:

$$L_K(0) = L_{EML1sc}, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_{EML1sc}, m(0) = m_{EML1}, t(0) = t_{EML1}, p_{LK}(0) + H(0) = 0, \quad (5.3.1.5)$$

$$L_K(K_{fsc}) + K_{fsc} = L_{fsc}, [\mathbf{x}(K_{fsc})]_{LME} = \mathbf{x}_{fLME}(L_{fsc}), p_m(K_{fsc}) = 0, p_t(K_{fsc}) = 0, \quad (5.3.1.6)$$

где $\mathbf{x}_{fLME}^T = (p_{fLME}, e_{xfLME}, e_{yfLME}, i_{xfLME}, i_{yfLME})$ – модифицированные равноденственные элементы конечной окололунной орбиты в LME2000.

Таким образом, задача оптимального управления на геоцентрическом участке (1.1.7), (5.1.1.2), (5.1.1.3), (5.3.1.1) сведена к краевой задаче для системы дифференциальных уравнений (2.1.10) с краевыми условиями (5.3.1.3), (5.3.1.4). Для ее решения необходимо вычислить 7 неизвестных начальных значений сопряженных переменных $\mathbf{p}_x(0)$, $p_{LK}(0)$, $p_m(0)$, начальное время $t(0)$ и конечное значение вспомогательной долготы K_{fgc} , при которых удовлетворяются 8 конечных условий (5.3.1.4) и последнее уравнение в (5.3.1.3).

Задача оптимального управления на селеноцентрическом участке сведена к краевой задаче для системы дифференциальных уравнений (2.1.10) с краевыми условиями (5.3.1.5), (5.3.1.6). Для ее решения необходимо вычислить 8 неизвестных начальных значений сопряженных переменных $\mathbf{p}_x(0)$, $p_{LK}(0)$, $p_m(0)$, $p_t(0)$ и конечное значение вспомогательной долготы K_{fsc} , при которых удовлетворяются 8 конечных условий (5.3.1.6) и последнее уравнение в (5.3.1.5).

5.3.2 Схема решения задачи оптимального управления: минимизация затрат топлива

Краевые задачи (2.1.10), (5.3.1.3), (5.3.1.4) для геоцентрического участка траектории и (2.1.10), (5.3.1.5), (5.3.1.6) для селеноцентрического участка траектории решаются последовательно с использованием метода продолжения по параметру. В результате решения первой краевой задачи вычисляется масса КА в момент пролета EML_1 m_{EML_1} , которая используется в начальных условиях (5.3.1.5) для второй краевой задачи. Подробное описание используемой в этом исследовании методики решения возмущенной задачи межорбитального перелета с минимальными затратами топлива приведено в разделе 3.4.

Одной из особенностей рассматриваемой в этой работе задачи является задание конечных условий (5.3.1.6) в системе координат LME2000, поэтому требуется вычисление производных от фазового вектора, заданного в LME2000 по неизвестным параметрам краевой задачи \mathbf{z} и параметру продолжения τ . Для этого, после интегрирования селеноцентрического движения КА создаются копии фазового вектора $\mathbf{x}_{ЕМЕ}$ в комплексном представлении с полученными значениями производных в геоэкваториальной системе координат: $\mathbf{x}_{ЕМЕ} = [\mathbf{x}(K_f)^T + ih\partial\mathbf{x}(K_f)^T/\partial z_j, L_K(K_f) + ih\partial L_K(K_f)/\partial z_j]^T$ при вычислении производных по j -му элементу z_j вектора \mathbf{z} или $\mathbf{x}_{ЕМЕ} = [\mathbf{x}(K_f)^T + ih\partial\mathbf{x}(K_f)^T/\partial\tau, L_K(K_f) + ih\partial L_K(K_f)/\partial\tau]^T$ при вычислении производных по τ , где $i = \sqrt{-1}$, $h \ll 1$ – шаг дифференцирования. С использованием такого комплексного представления конечного фазового вектора проводится перевод из геоэкваториальной в селеноэкваториальную систему координат $[\mathbf{x}_{ЕМЕ}]_{LME}$ и вычисляются его производные $\partial[\mathbf{x}_{ЕМЕ}]_{LME}/\partial z_j$:

$$\frac{\partial[\mathbf{x}_{ЕМЕ}]_{LME}}{\partial z_j} = \frac{1}{h} \operatorname{Im} \left[\left[\mathbf{x}_{ЕМЕ} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(K_f) + ih\partial\mathbf{x}(K_f)/\partial z_j \\ L_K(K_f) + ih\partial L_K(K_f)/\partial z_j \end{pmatrix} \right]_{LME} \right] + O(h^2),$$

и $\partial[\mathbf{x}_{ЕМЕ}]_{LME}/\partial\tau$:

$$\frac{\partial[\mathbf{x}_{ЕМЕ}]_{LME}}{\partial\tau} = \frac{1}{h} \operatorname{Im} \left[\left[\mathbf{x}_{ЕМЕ} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(K_f) + ih\partial\mathbf{x}(K_f)/\partial\tau \\ L_K(K_f) + ih\partial L_K(K_f)/\partial\tau \end{pmatrix} \right]_{LME} \right] + O(h^2).$$

Для обеспечения возможности проведения оптимизации траектории без необходимости задания начального приближения для неизвестных параметров требуется последовательность оптимизации траекторий с идеально-регулируемым двигателем ограниченной мощности (ОМ-задачи) и с двигателем ограниченной тяги (ОТ-задачи). Для проверки существования решения ОТ-задачи используется задача минимизации тяги (T_{\min} -

задача). В работах [21, 22, 23, 43] приведены методы решения задачи ОМ-задачи и продолжения решения ОМ-задачи в решения T_{\min} - и ОТ-задач. На основе этих методов предлагается следующая схема решения задачи оптимизации траектории перелета к Луне с малой тягой.

1) Задаются исходные данные: время прохождения точки либрации t_{EML1} , элементы начальной околоземной орбиты $\mathbf{x}_{0gc} = (p_{0gc}, e_{x0gc}, e_{y0gc}, i_{x0gc}, i_{y0gc})^T$, элементы конечной окололунной орбиты $\mathbf{x}_{fsc} = (p_{fsc}, e_{xfsc}, e_{yfsc}, i_{xfsc}, i_{yfsc})^T$, угловая дальность геоцентрического участка траектории ΔL_{gc} , угловая дальность селеноцентрического участка траектории ΔL_{sc} . Задаются характеристики КА с ЭРДУ, включающие в себя начальную массу КА m_0 , тягу T_{cev} и скорость истечения c двигательной установки. Кроме того, необходимо задать значение минимальной тяги $T_{\min}^* < T_{cev}$, используемой при решении T_{\min} -задачи для коррекции угловых дальностей геоцентрического и селеноцентрического участков траектории. Чем меньше значение T_{\min}^* , тем больше будет продолжительность пассивных участков на оптимальной ОТ-траектории с тягой T_{cev} .

2) Вычисляются оскулирующие элементы \mathbf{x}_{EML1gc} и истинная долгота L_{EML1gc} геоцентрической орбиты EML_1 в момент t_{EML1} ; оскулирующие элементы \mathbf{x}_{EML1sc} и истинная долгота L_{EML1sc} селеноцентрической орбиты EML_1 в момент t_{EML1} ; начальная истинная долгота геоцентрического участка траектории $L_{0gc} = \text{mod}_{2\pi}(L_{EML1gc} - \Delta L_{gc})$; конечная истинная долгота селеноцентрического участка $L_{fsc} = L_{EML1sc} + \Delta L_{sc}$.

3) Методом продолжения решается краевая задача оптимизации невозмущенной геоцентрической и селеноцентрической траекторий КА с идеально-регулируемым двигателем ограниченной мощности [21, 43]. В качестве начального приближения для неизвестных начальных значений сопряженных переменных используются нулевые значения на обоих участках траектории, что соответствует пассивному движению КА по начальной орбите. Начальное приближение для неизвестного конечного значения вспомогательной долготы устанавливается равным угловой дальности перелета: $K_{fgc} = \Delta L_{gc}$ и $K_{fsc} = \Delta L_{sc}$. В результате решения задачи оптимизации невозмущенной ОМ-траектории вычисляется, в частности, начальное приближение для длительности перелета. Начальное приближение для момента начала геоцентрического участка устанавливается равным разности между заданным значением t_{EML1} и начальным приближением для длительности геоцентрического участка.

4) Методом продолжения решается краевая задача для оптимизации возмущенной траектории КА с минимальной тягой (см. раздел 5.1.2). Решение ОТ-задачи существует, если $T_{cev} \geq T_{\min}^*$, поэтому значение T_{\min}^* должно задаваться меньшим T_{cev} . Если заданное значение тяги $T_{cev} \geq T_{\min}^*$ близко к T_{\min}^* (как предполагается в данной работе), то оптимальное соотношение угловых дальностей геоцентрического и селеноцентрического участка близко к

соотношению этих дальностей в T_{\min} -задаче. Конечно, при значительном увеличении T_{cev} оптимальное соотношение угловых дальностей может значительно измениться. Вопрос изменения оптимального соотношения угловых дальностей с ростом T_{cev} требует дальнейшего изучения.

5) Методом продолжения из невозмущенной ОМ-задачи решается возмущенная ОМ-задача со скорректированными по результатам решения T_{\min} -задачи угловыми дальностями ΔL_{gc} и ΔL_{gc} .

6) Методом продолжения из возмущенной ОМ-задачи решается ОТ-задача (см. раздел 3.3).

На рисунке 5.3.2.1 представлена блок-схема процесса решения задачи оптимизации траектории перелета к Луне с малой тягой.

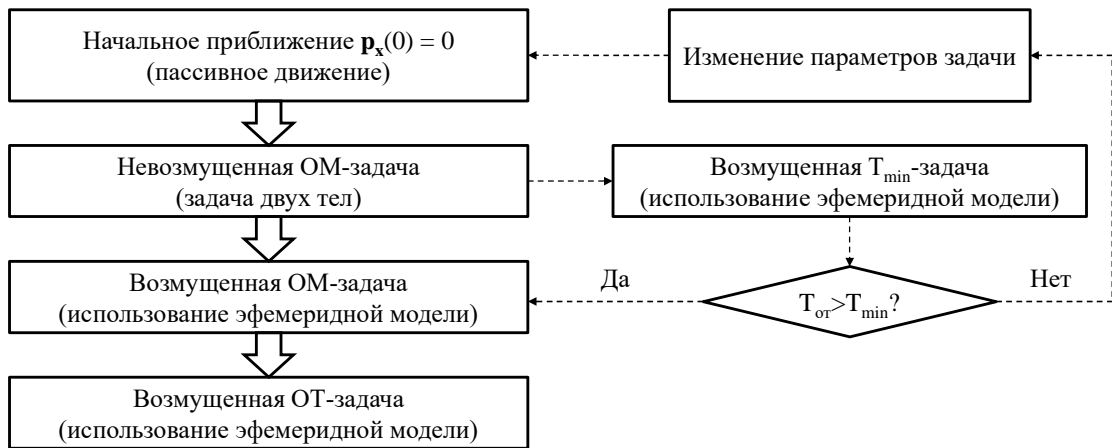


Рисунок 5.3.2.1. Блок-схема процесса решения задачи оптимизации траектории перелета к Луне с малой тягой

5.3.3 Численные примеры

В качестве примера рассмотрим перелет КА с ЭРДУ с высокоэллиптической околоземной орбиты, имеющей высоту перигея 4500 км, высоту апогея 50000 км, наклонение 25° , аргумент перигея 248° и долготу восходящего узла 4° , на круговую окололунную орбиту высотой 5000 км с нулевым наклонением относительно лунного экватора. Для селеноцентрического участка траектории все высоты здесь и далее приведены относительно среднего радиуса Луны 1738 км.

Дату пролёта точки EML_1 примем равной 25 декабря 2023 года, 00:00:00 UTC. При решении T_{\min} - и ОТ-задач, начальную массу КА будем считать равной 1000 кг. Требуемое минимальное значение тяги T_{\min} для вычисления угловых дальностей геоцентрической и селеноцентрической траектории будем варьировать с шагом 0.05 Н в диапазоне 0.15–0.3 Н, а значение удельного импульса ЭРДУ с шагом 500 с в диапазоне 3000–4500 с.

В таблице 5.3.3.1 представлены орбитальные параметры геоцентрической и селеноцентрической оскулирующей орбиты EML_1 для заданной даты пролета.

Таблица 5.3.3.1. Параметры орбиты геоцентрической и селеноцентрической оскулирующей орбиты EML_1 на 00:00:00 UTC 25 декабря 2023 года в системе координат EME2000.

Участок траектории	Геоцентрический	Селеноцентрический
Большая полуось, км	237014.36	33842.94
Эксцентриситет	0.380148	0.716702
Наклонение, град.	28.160	
Долгота восходящего узла, град.	4.0043	
Аргумент перицентра, град.	248.319	65.69453651
Истинная аномалия, град.	176.538	179.1618603

В таблице 5.3.3.2 представлены зависимости основных параметров оптимальных T_{\min} -траекторий для геоцентрического и селеноцентрического участков с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета от величины тяги и удельного импульса. Угловые дальности геоцентрического и селеноцентрического участков вычисляются из условия равенства минимальной тяги на обоих участках заданному значению T_{\min}^* с точностью 10^{-7} Н. В таблице 5.3.3.2 используются следующие обозначения: ΔL_{gc} и ΔL_{sc} – угловые дальности геоцентрического и селеноцентрического участков T_{\min} -траектории с требуемым значением тяги, Δt_{gc} и Δt_{sc} – оптимальные длительности перелета геоцентрического и селеноцентрического участков по T_{\min} -траектории, m_{EML1} – масса КА в момент прохождения EML_1 , m_f – масса КА на конечной окололунной орбите.

Таблица 5.3.3.2. Основные параметры оптимальных T_{\min} -траекторий для геоцентрического и селеноцентрического участков в зависимости от величины удельного импульса I_{sp} [с] и тяги T_{\min} [Н].

I_{sp} , с	T_{\min}^* , Н	ΔL_{gc} , витки	ΔL_{sc} , витки	Δt_{gc} , сутки	Δt_{sc} , сутки	m_{EML1} , кг	m_f , кг
3000	0.15	99.6802	25.9955	186.1015	40.8336	918.0191	900.0312
	0.20	74.7502	19.6729	139.4606	31.8647	918.0868	899.3709
	0.25	59.8019	15.7825	111.7566	26.1179	917.9488	898.7731
	0.30	49.7962	13.2079	92.9979	22.3457	918.0656	898.3783
3500	0.15	99.9195	26.3105	187.1320	41.2891	929.3415	913.7513
	0.20	74.9251	19.8968	140.2521	32.1664	929.3903	913.1962
	0.25	59.9307	16.0310	112.4020	26.4306	929.2640	912.6309
	0.30	49.9117	13.4087	93.5506	22.6303	929.3533	912.2635
4000	0.15	100.0286	26.6084	188.0110	41.6737	937.8834	924.1149
	0.20	75.0107	20.1463	140.9172	32.4682	937.9235	923.6207
	0.25	60.0005	16.1730	112.9346	26.6724	937.8129	923.1258
	0.30	49.9709	13.5284	93.9970	22.8083	937.8889	922.8178
4500	0.15	100.1411	26.7901	188.7078	41.9197	944.5805	932.2696
	0.20	75.0846	20.2980	141.4518	32.7124	944.6115	931.8023
	0.25	60.0575	16.3179	113.3672	26.8915	944.5109	931.3484
	0.30	50.0147	13.6385	94.3652	22.9461	944.5741	931.0965

Суммарное значение длительности перелета и числа витков вычисляется как сумма этих величин на гео- и селеноцентрическом участках: $\Delta t_{\Sigma} = \Delta t_{gc} + \Delta t_{sc}$ и $\Delta L_{\Sigma} = \Delta L_{gc} + \Delta L_{sc}$. В рассматриваемом примере суммарное число витков и суммарная длительность перелета имеют максимальные значения при $T_{\min} = 0.15$ Н и $I_{sp} = 4500$ с равны 126.9312 витков и 230.6275 суток соответственно. Минимальные значения ΔL_{Σ} и Δt_{Σ} равны 63.0041 виткам и 115.3436 суткам при $T_{\min} = 0.30$ Н и $I_{sp} = 3000$ с. Видно, что конечная масса КА слабо зависит от величины минимальной тяги, но значительно увеличивается с увеличением удельного импульса. Оптимальная длительность перелета значительно изменяется с изменением величины минимальной тяги и слабо зависит от величины удельного импульса.

В работе [21] показано, что в невозмущенной T_{\min} -задаче для межорбитальных перелётов произведение минимальной тяги на число витков почти постоянно и оптимальное время перелета почти пропорционально угловой дальности. В рассматриваемом случае влияние возмущений приводит к отклонению от этой зависимости на величину до 1.5%.

На рисунке 5.3.3.1 представлены проекции оптимальных T_{\min} -траекторий на плоскость XY в EME2000 (верхний ряд) и селеноцентрического участка траектории в LME2000 (нижний ряд) для значений тяги 0.15, 0.2, 0.25 и 0.3 Н при фиксированном значении удельного импульса 3000 с. Положение точки либрации EML_1 обозначено на графиках маркером “+”, а движение Луны по орбите обозначено серой линией.

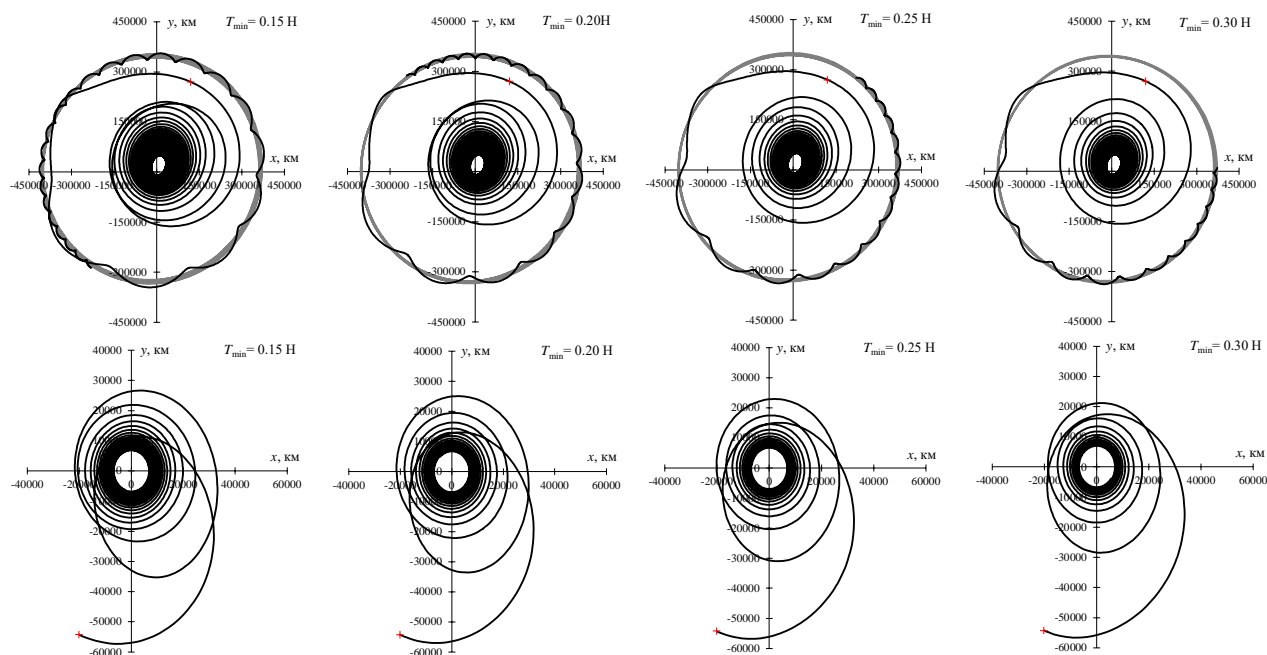


Рисунок 5.3.3.1. Проекция оптимальных T_{\min} -траекторий на плоскость XY в EME2000 и оптимальных T_{\min} -траекторий для селеноцентрического участка на плоскость XY в LME2000 для различных величин тяги ($I_{sp} = 3000$ с)

Из рисунка 5.3.3.1 видно, что с уменьшением тяги минимальное удаление от Земли на последнем участке геоцентрической траектории и минимальное удаление от Луны на первом участке селеноцентрической траектории уменьшается.

Рассмотрим примеры оптимальных ОТ-траекторий перелета между теми же околоземной и окололунной орбитами. Решение T_{\min} -задачи позволяет утверждать, что при заданном удельном импульсе $I_{sp} = 4500$ с траектории перелета заданной угловой дальности геоцентрического ($\Delta L_{gc} = 50.0147$ витков) и селеноцентрического ($\Delta L_{sc} = 13.6385$ витков) участков с заданными краевыми условиями существуют, если значение тяги больше 0.3 Н. Для анализа зависимости основных параметров оптимальных ОТ-траекторий с этими угловыми дальностями от величины тяги, будем варьировать значение тяги T_{sev} от минимального значения 0.3 Н до 0.33 Н.

Основные параметры геоцентрического участка оптимальных ОТ-траекторий в зависимости от величины тяги приведены в таблице 5.3.3.3 (здесь Δt_{gc} – оптимальное время перелета по геоцентрическому участку ОТ-траектории, Δt_b – время работы двигателя на этом участке). На рисунке 5.3.3.2 представлены проекции геоцентрического участка оптимальных ОТ-траекторий на плоскость XY в EME2000. Активные участки траектории на этом рисунке (и везде далее) обозначены черными сплошными линиями, а пассивные участки траектории –

пунктирными линиями. Увеличение тяги приводит к росту длительности пассивных участков, увеличению углов разворота линии апсид и линии узлов в процессе перелета.

Таблица 5.3.3.3. Основные параметры геоцентрического участка оптимальных ОТ-траекторий в зависимости от величины тяги.

$T_{сев}, Н$	$\Delta t_{gc}, \text{сутки}$	$m_{EML1}, \text{кг}$	$\Delta t_b, \text{сутки}$	$\Delta t_b/\Delta t_{gc}$
0.3	94.3652	944.5741	94.3652	1.0000
0.3017	94.7528	946.9595	89.7714	0.9474
0.302	94.8892	947.2221	89.2777	0.9409
0.303	95.4544	947.9589	87.7446	0.9192
0.304	95.8133	948.5898	86.3658	0.9014
0.305	96.2812	949.1247	85.2001	0.8849
0.306	96.6593	949.5796	84.1467	0.8705
0.307	97.2671	949.9520	83.2470	0.8559
0.308	97.9589	950.2206	82.5839	0.8430
0.309	98.5109	950.4198	81.9534	0.8319
0.310	99.1700	950.5588	81.4365	0.8212
0.315	101.5601	950.8686	79.6353	0.7841
0.320	102.2971	951.0627	77.9722	0.7622
0.325	102.3038	951.2802	76.5190	0.7480
0.330	102.7091	951.5243	74.8290	0.7286

На рисунке 5.3.3.3, на основе данных из таблицы 5.3.3.3, представлены зависимости конечной массы КА (в таблице обозначена m_{EML1} – масса КА в момент прохождения EML_1), оптимальной длительности перелета и отношения времени работы двигателя к общему времени перелета от тяги на геоцентрическом участке оптимальных ОТ-траекторий. С ростом тяги конечная масса КА быстро растет на интервале изменения тяги от минимального значения до 0.31 Н, а затем ее рост замедляется. В рассматриваемом примере при минимальной тяге длительность перелета на геоцентрическом участке ОТ-траектории имеет минимальное значение. Оптимальная длительность перелета монотонно растет с ростом тяги. Увеличение $T_{сев}$ на оптимальных ОТ-траекториях к увеличению длительности участков траектории с неработающим двигателем. Из правого графика на рисунке 5.3.3.3 видно, что относительная доля длительности участков с работающим двигателем на оптимальных ОТ-траекториях монотонно уменьшается с увеличением тяги.

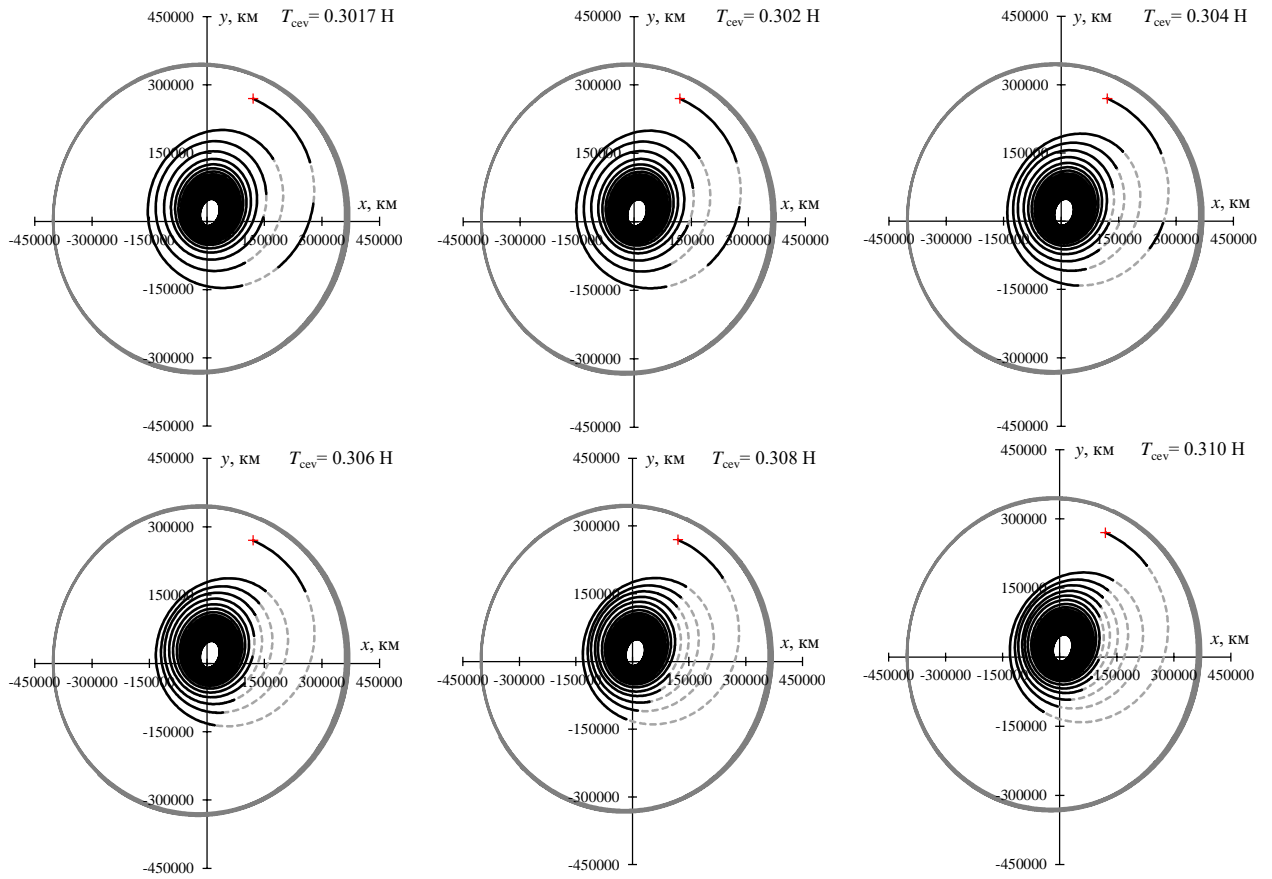


Рисунок 5.3.3.2. Проекция геоцентрического участка оптимальных ОТ-траекторий на плоскость XY в EME2000 для различных величин тяги

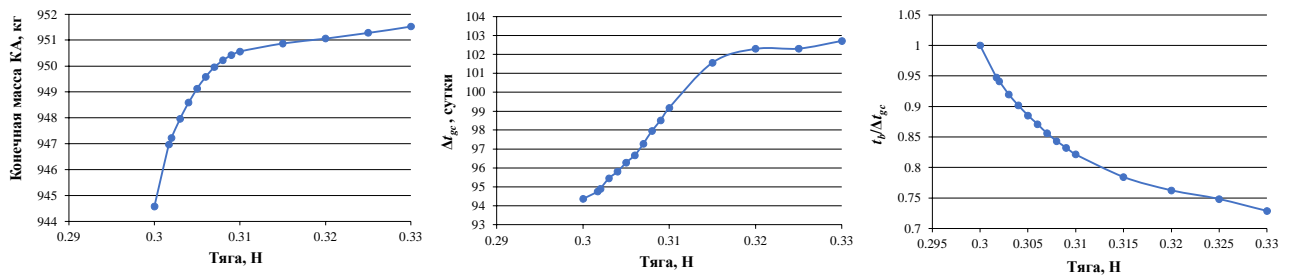


Рисунок 5.3.3.3. Зависимости конечной массы КА (слева), оптимальной длительности перелета (в середине) и отношения времени работы двигателя к общему времени перелета (справа) от тяги на геоцентрическом участке оптимальных ОТ-траекторий

Рассмотрим оптимальные ОТ-траектории с тягой от 0.315 до 0.330 Н, включающие геоцентрический и селеноцентрический участки, т.е. полные оптимальные ОТ-траекторию. На рисунке 5.3.3.4 представлены проекции полных оптимальных ОТ-траекторий с двигателем тягой 0.315 Н (верхний ряд), 0.320 Н (средний ряд) и 0.325 Н (нижний ряд) на плоскость XY в инерциальной системе координат EME2000 и в синодической системе координат (в середине)

и зависимости функции переключения S и функция тяги δ (справа) от времени для этих трех значений тяги. Из рисунка 5.3.3.4 видно, что с ростом величины тяги число переключений и общая длительность пассивных участков ОТ-траекторий увеличивается, а это приводит к значительной деформации оптимальной ОТ-траектории. Интересно, что при увеличении тяги длительность активного участка на начальном этапе селеноцентрического движения уменьшается, а длительность активного участка на конечном этапе геоцентрического движения увеличивается. Это означает, что активный участок ОТ-траектории в окрестности точки стыковки смещается против орбитального движения КА с увеличением величины тяги.

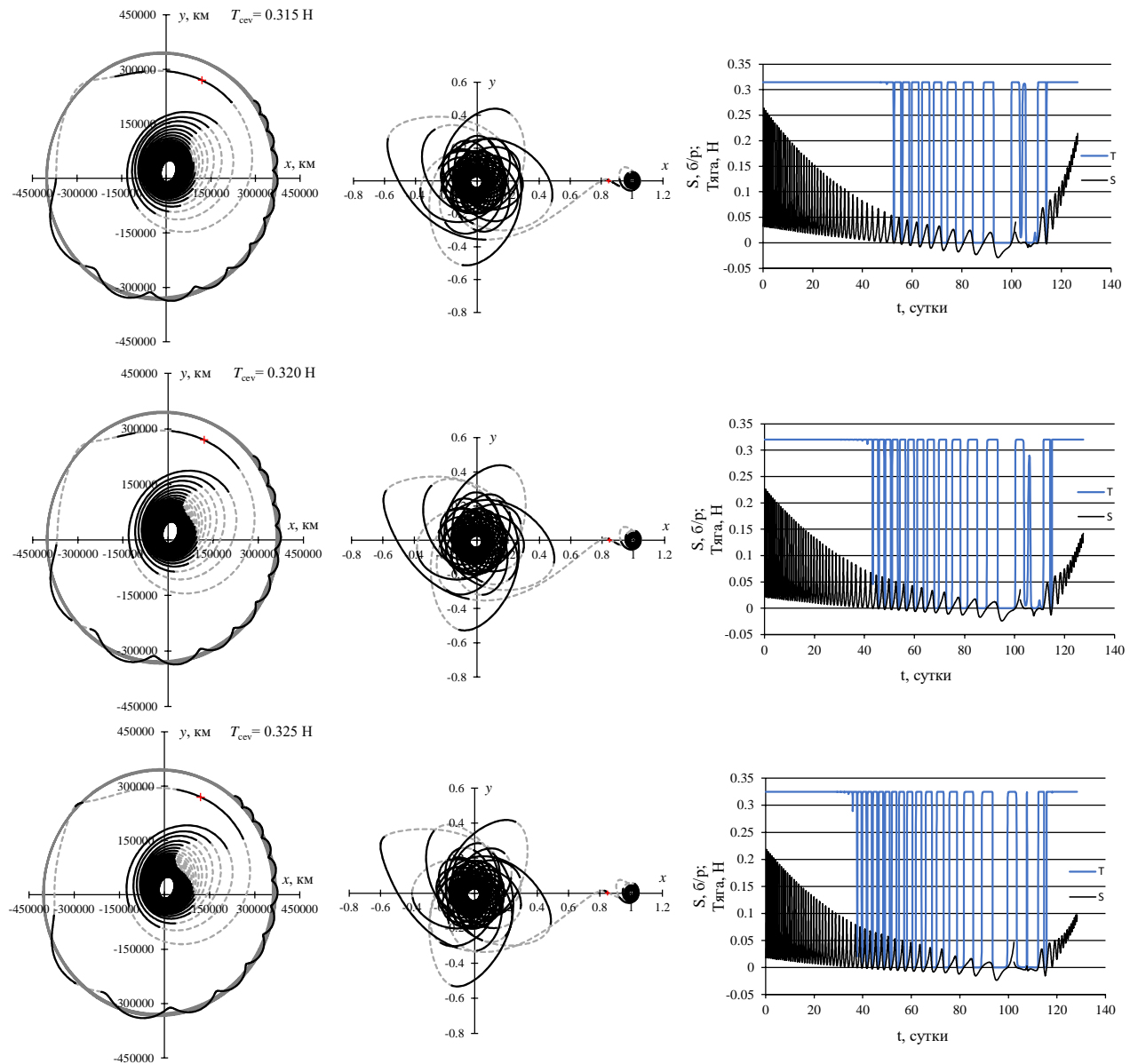


Рисунок 5.3.3.4. Проекция оптимальных ОТ-траекторий с двигателем тягой 0.315, 0.320 и 0.325 Н на плоскость XY в EME2000 (слева) и в синодической системе координат (в середине) и зависимости функции переключения S и функция тяги δ от времени (справа)

В таблице 5.3.3.4 представлены результаты оптимизации ОТ-траекторий с различной тягой T_{cev} (здесь Δt_{opt} – оптимальная длительность ОТ-траектории перелета с околоземной орбиты на окололунную орбиту).

Таблица 5.3.3.4. Результаты оптимизации траекторий с ограниченной тягой и постоянной скоростью истечения между околоземной и окололунной орбитами.

T_{cev} , Н	0.315	0.320	0.325	0.330
Δt_{opt} , сутки	126.50623	127.44776	128.27680	128.82569
m_f , кг	939.20494	940.08771	940.94554	941.48147

Видно, что при увеличении тяги одновременно увеличивается и конечная масса КА, и оптимальная длительность перелета. Конечная масса КА растет из-за уменьшения потерь характеристической скорости при сокращении длины активных участков, а оптимальная длительность перелета растет из-за увеличения длительности пассивных участков. На рисунке 5.3.3.5 представлены проекции на координатные плоскости в EME2000 оптимальных OM-траекторий (верхний ряд), T_{min} -траекторий с минимальной тягой 0.3 Н и с удельном импульсом 4500 с (средний ряд) и ОТ-траекторий с тягой 0.33 Н (нижний ряд). На рисунке 5.3.3.6 представлены проекции тех же оптимальных траекторий на плоскость XY в синодической системе координат (слева) и их селеноцентрических участков в LME2000 (справа). Для OM-траектории оптимальная длительность перелета оказалась равной 153.75952 суток, а затраты характеристической скорости ΔV_{LP} – 2644.81907 м/с. Основные параметры приведенных T_{min} - и ОТ- траекторий представлены в таблице 5.3.3.2 и 5.3.3.4 соответственно. Из рисунков 5.3.3.5 и 5.3.3.6 видно, что внешний вид оптимальных OM- и ОТ-траекторий схож друг с другом, но существенно отличается от оптимальной T_{min} -траектории. Эта схожесть позволяет вычислить оптимальную ОТ-траекторию с хорошей скоростью сходимости при использовании возмущенной OM-траектории в качестве начального приближения вместо невозмущенной OM-траектории или T_{min} -траектории. Оптимальное управление на этих траекториях представлено на рисунке 5.3.3.7. Верхний ряд графиков представляет оптимальное управление для OM-задачи, средний ряд - для T_{min} -задачи и нижний ряд – для ОТ-задачи. В левой колонке представлены зависимости реактивного ускорения от времени. Для ОТ-задачи добавлена зависимость функции переключения от времени, обозначенная синей линией. В средней и правой колонках представлены зависимости от времени угла тангажа и угла рысканья соответственно. На рисунке 5.3.3.8 представлены зависимости орбитальных элементов в EME2000 от времени на оптимальных OM- (синие линии), T_{min} - (красные линии) и ОТ- (черные линии) траекториях. На рисунке можно увидеть, что оба участка траекторий соединяются через точку стыковки EML_1 с заданным значением параметров геоцентрической и селеноцентрической оскулирующих орбиты EML_1 (см. таблицу

5.3.3.1). На всех траекториях орбитальные элементы существенно изменяются в окрестности точки стыковки EML_1 . Зависимости большой полуоси от времени для рассматриваемых оптимальных ОМ- и ОТ-траекторий схожи друг с другом. Зависимость эксцентриситета от времени для оптимальной ОТ-траектории на начальном этапе геоцентрического участка аналогична зависимости для T_{min} -траектории, а затем изменяется так же, как и для ОМ-траектории. На рисунке 5.3.3.9 представлены зависимости наклона и долготы восходящего узла в LME2000 от времени для селеноцентрических участков оптимальных ОМ-, T_{min} - и ОТ-траекторий. (здесь t_{sc} – время, отсчитываемое от начала селеноцентрического участка траектории).

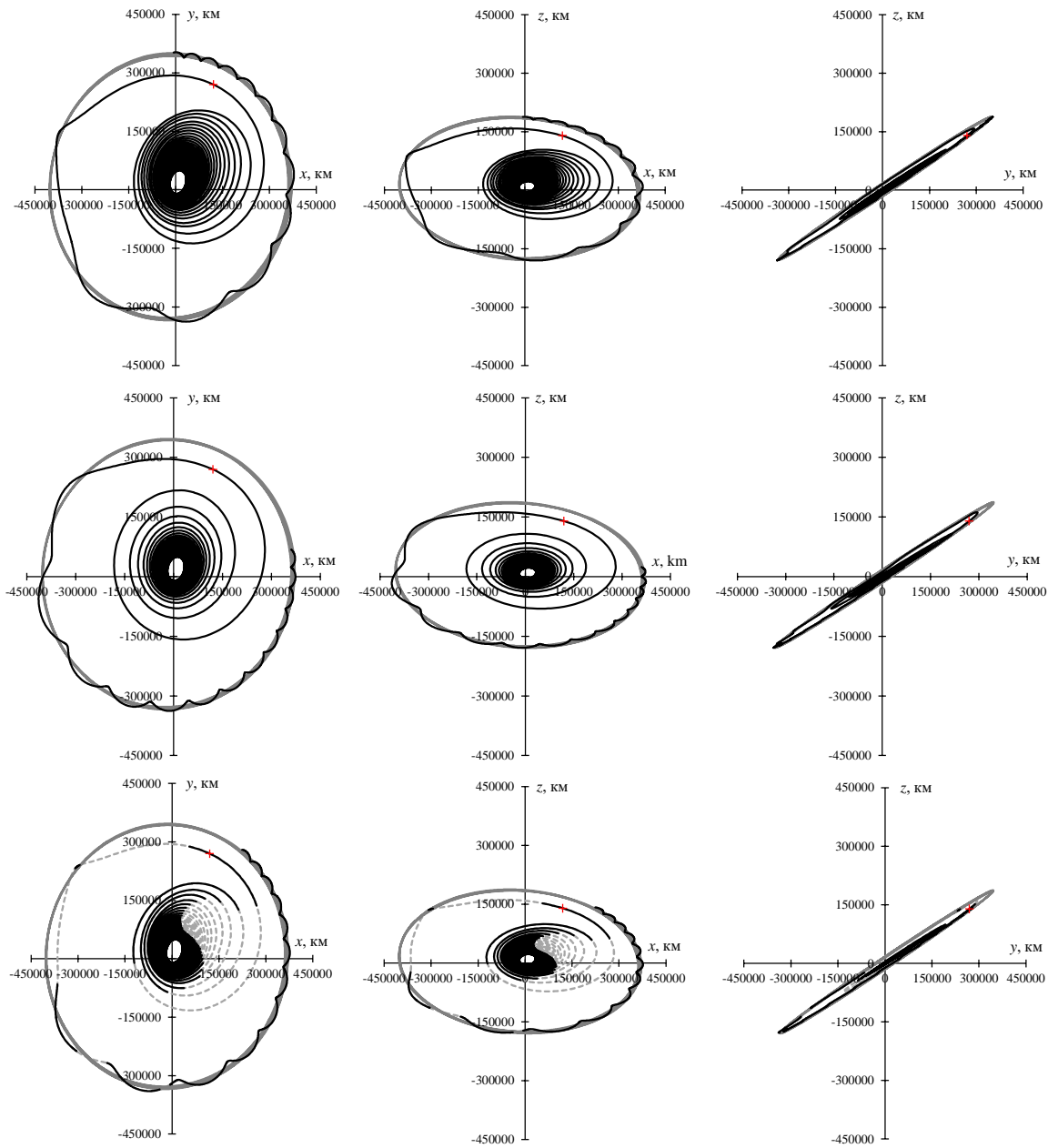


Рисунок 5.3.3.5. Проекция ОМ-, T_{min} - и ОТ-траекторий с тягой 0.33 Н на координатные плоскости в EME2000

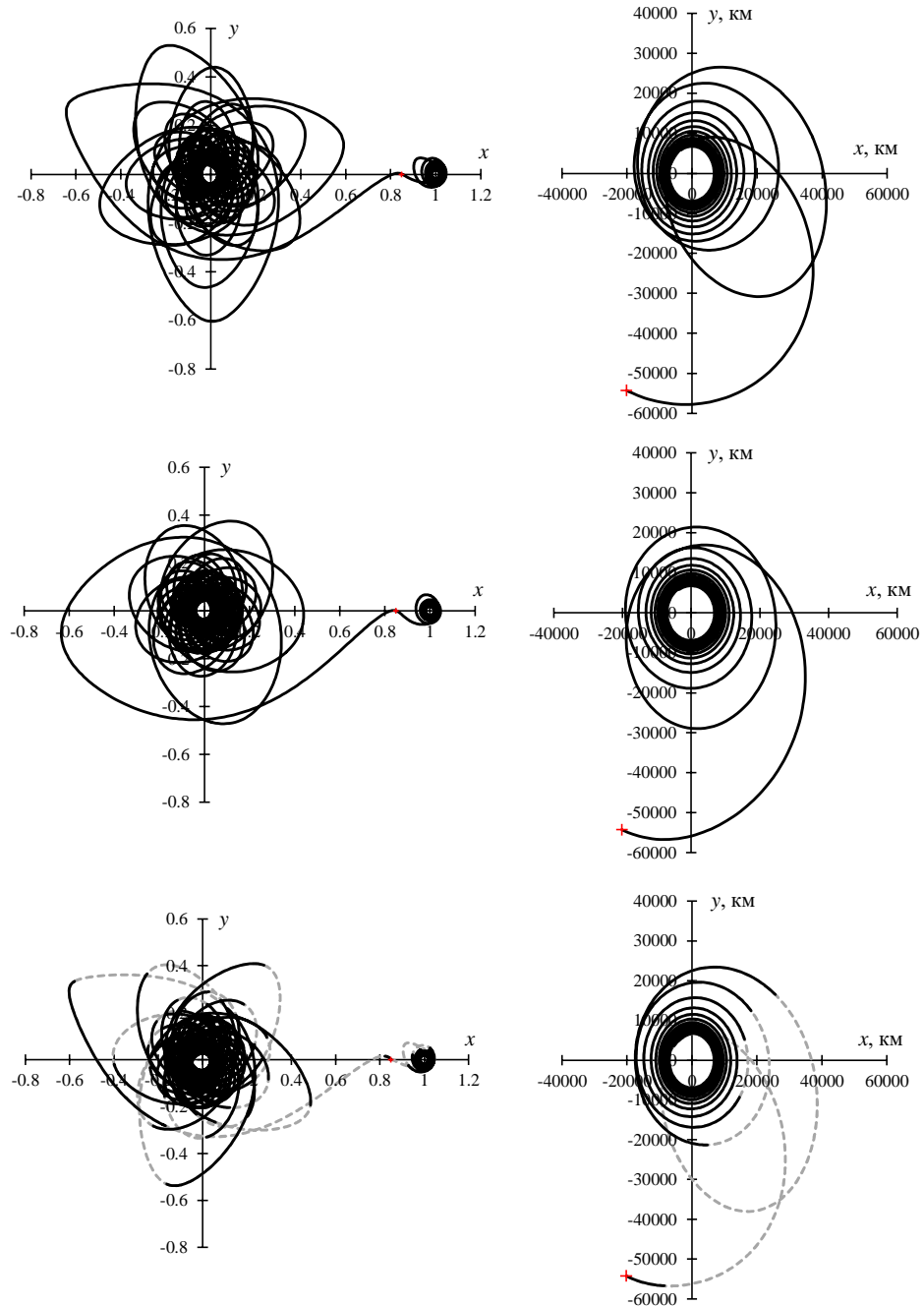


Рисунок 5.3.3.6. Проекция ОМ-траекторий (верхний ряд), T_{\min} -траекторий (средний ряд) и ОТ-траекторий с тягой 0.33 Н (нижний ряд) на плоскость XY в синодической системе координат (справа) и селеноцентрического участка этих траекторий в LME2000 (слева)

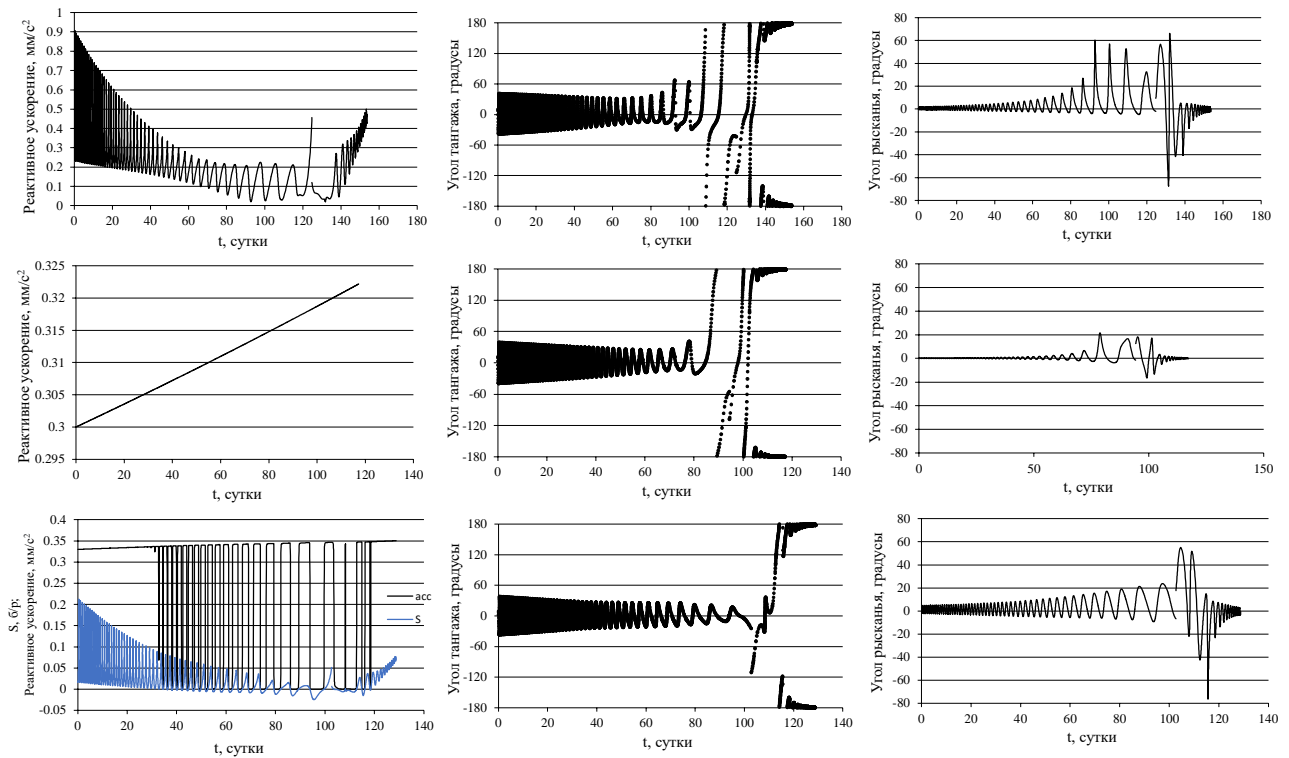


Рисунок 5.3.3.7. Оптимальное управление на ОМ-траектории (вверху), T_{\min} -траектории (в середине) и ОТ-траектории (внизу)

В большинстве работ [71, 74–80, 93, 94, 96, 100, 105, 107] были рассмотрены более традиционные постановки задачи с фиксированной длительностью перелета. Таким образом, было трудно сравнить результаты нашего исследования с результатами других исследований из-за отсутствия информации о точном значении угловой дальности оптимальной траектории. Кроме того, было очень сложно найти результаты исследований, удовлетворяющие указанным в начале раздела 5.3 условиям. В результате был проведен сравнительный анализ с результатами одного из исследований, представленных в этом разделе при описании существующих подходов решения рассматриваемой задачи.

В диссертации автора Bilel Daoud [80] рассмотрены задачи минимизации времени перелета и минимизации затрат топлива для траекторий перелета к Луне с малой тягой. Приведены численные результаты оптимальных траекторий с круговой орбиты радиусом 42165 км вокруг Земли на круговую орбиту радиусом 13084 км вокруг Луны. В этом исследовании время использовалось как независимая переменная, а число витков для полученных оптимальных траекторий к Луне не приводится. Поэтому единственный способ провести сравнительный анализ без информации об угловой дальности перелета – это использовать задачу минимизации тяги, рассмотренную в данном исследовании, и сравнить ее с задачей минимизации времени из [80]. В отличие от данного исследования, в [80] масса

космического аппарата предполагалась постоянной на всей траектории, что формально соответствует использованию ЭРДУ с бесконечным удельным импульсом, а задача оптимизации рассматривалась в рамках плоской CR3BP. В связи с этим для сравнительного анализа были сделаны следующие допущения:

1. Начальное и конечное значения долготы восходящего узла и наклона приняты равными соответствующим значениям оскулирующей орбиты EML_1 в заданную дату для обеспечения движения космического аппарата вблизи плоскости орбиты Луны.

2. Задается значение удельного импульса больше 10^6 с чтобы минимизировать изменение массы во время перелета.

3. Исключается рассмотрение возмущающих ускорений от притяжения Солнца и от зональной гармонике геопотенциала J_2 .

Для расчета рассматриваемой траектории используется та же дата прохождения точки EML_1 , которая обсуждалась в этом разделе (см. табл. 5.3.3.1). В работе [80] траектории с минимальным временем были представлены для начальной массы КА 1500 кг и заданных значений тяги. В [80], минимальное время перелета между околоземной и окололунной орбитами $\Delta t_{\Sigma} = 39.71$ суток для тяги 1 Н и $\Delta t_{\Sigma} = 41.13$ суток для тяги 0.97 Н. В случае оптимальной траектории с тягой 1 Н, в [80] дополнительно показывался результат перелета с околоземной орбиты в точку либрации EML_1 : $\Delta t_{gc} = 36.64$ суток. При использовании разработанного метода в данной работе получены следующие результаты: $\Delta L_{gc} = 13.2425$ витков, $\Delta L_{sc} = 1.759$ витков, $\Delta t_{gc} = 36.16375$ суток, $\Delta t_{sc} = 7.62$ суток для 1 Н и $\Delta L_{gc} = 13.6477$ витков, $\Delta L_{sc} = 1.8064$ витков, $\Delta t_{gc} = 37.18034$ суток, $\Delta t_{sc} = 7.80543$ суток для 0.97 Н.

Полученная в этой диссертации оптимальная траектория перелета к точке либрации EML_1 имеет продолжительность на 0.476 суток меньше по сравнению с результатом в [80]. Это можно объяснить тем, что полученная оптимальная траектория с минимальной тягой 1 Н, в нашей постановке задачи с фиксированной угловой дальностью, оптимизирует продолжительность перелета к Луне. С другой стороны, полученные оптимальные траектории между орбитами вокруг Земли и Луны имеют суммарную продолжительность на 3.856 суток (для тяги 0.97 Н) и 4.074 суток (для тяги 1 Н) больше по сравнению с результатом в [80]. Разница в затратах характеристической скорости составляет 215.422 м/с и 234.662 м/с соответственно. Такая разница может быть связана с неоптимальностью стыковки двух участков при использовании EML_1 в качестве точки стыковки. Полученные результаты согласуются с ранее проведенными оценками потерь характеристической скорости из-за неоптимальности стыковки участков в EML_1 . В рассматриваемом диапазоне числа витков, по оценке сделанной в работе автора [103], потери характеристической скорости из-за стыковки участков в EML_1 не превышают 260 м/с.

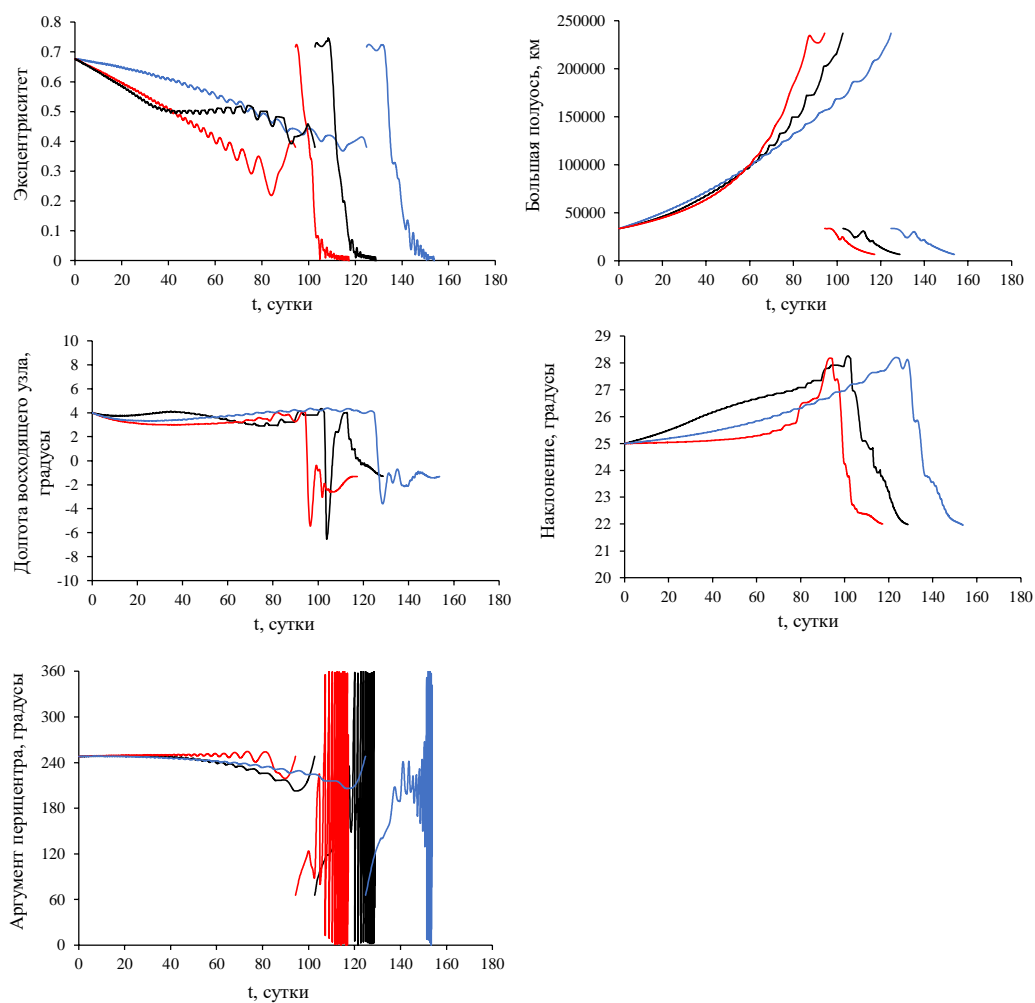


Рисунок 5.3.3.8. Зависимости от времени орбитальных элементов в EME2000 на оптимальных OM-, T_{\min} - и OT-траекториях

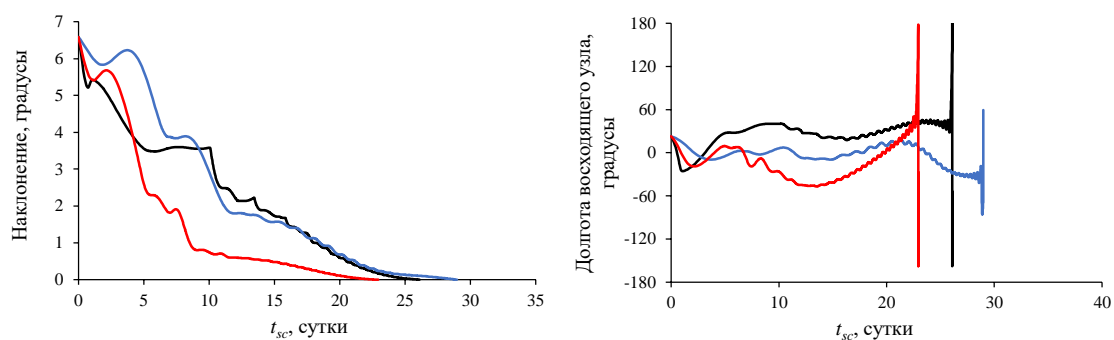


Рисунок 5.3.3.9. Зависимости от времени наклонения и долготы восходящего узла в LME2000 на оптимальных OM-, T_{\min} - и OT-траекториях

5.4 Сквозная оптимизация траекторий перелета к Луне с малой тягой

Применение электроракетных двигательных установок для транспортных операций между околоземной и окололунной орбитами [66-68] является актуальной задачей для перспективных лунных миссий, включая задачи грузового обеспечения лунных пилотируемых программ и доставки к Луне автоматических космических аппаратов, которые выводятся на околоземные орбиты в качестве попутного полезного груза. Для успешной реализации таких миссий необходима разработка новых и совершенствование существующих методов вычисления и оптимизации траекторий перелета у Луне с малой тягой. Эффективный, быстродействующий и устойчивый метод решения задачи сквозной оптимизации траектории с малой тягой с учетом притяжения Земли, Луны и Солнца на всех участках перелета между околоземной и окололунной орбитами критически важен при проектировании миссии, на финальных этапах ее подготовки и при ее реализации.

В работе [104] рассмотрена задача сквозной оптимизации траектории перелета с малой тягой с ГСО к конечную окололунную орбиту с использованием нелинейного программирования (NLP), со всеми достоинствами и недостатками этого подхода. Одним из недостатков этого метода является необходимость решения задачи нелинейного программирования большой размерности. Поэтому, из-за проблем со сходимостью, в работе [104] показаны решения задачи оптимального быстродействия только с относительно большими значениями реактивного ускорения ЭРДУ (около 10^{-3} м/с).

В работе [105] представлено решение задачи минимизации затрат топлива на базе принципа максимума и метода продолжения. В этой работе рассматриваются низкоэнергетические лунные траектории с малой тягой в рамках модели бикруговой задачи четырех тел. В рассматриваемой в этой работе схеме полета отсутствует участок многовитковой геоцентрической раскрутки с начальной околоземной орбиты. Сходство рассматриваемых в работе [105] оптимальных геоцентрических траекторий с импульсными WSB-траекториями отмечено автором статьи [105].

В работе [106] рассмотрен метод проектирования траектории захвата КА с высокоэнергетической траектории вокруг Земли на окололунную орбиту, т.е. рассматривается схема перелета, близкая к рассмотренной в работе [105], но с более высоким уровнем реактивного ускорения.

Во многих работах для решения задачи оптимизации траектории перелета к Луне с малой тягой рассматривались подходы с разбиением траектории КА на нескольких участках. Например, в работах [92-95] рассматриваются траектории с тремя участками: 1) активный геоцентрический участок; 2) промежуточный участок пассивного движения; 3) активный

селеноцентрический участок до выхода на конечную окололунную орбиту. Иногда число участков увеличивается до пяти, при этом обычно добавляют начальный участок перелета между низкой и высокой околоземными орбитами и конечный участок перелета между высокой и низкой окололунными орбитами. Необходимость разбиения траектории на участки связана, в первую очередь, с трудностью обеспечения вычислительной устойчивости методов решения задач оптимизации многовитковых траекторий со сменой центрального притягивающего центра при использовании численного интегрирования дифференциальных уравнений движения, записанных в какой-либо фиксированной (геоцентрической, селеноцентрической или барицентрической) системе координат.

В случае, если траектория разбивается на несколько участков с заданными в фазовом пространстве условиями стыковки участков, а на каждом участке решается отдельная задача оптимизации траектории КА, то в точках стыковки этих участков обычно не выполняются необходимые условия оптимальности, в частности, появляются разрывы в оптимальном управлении. Нарушение необходимых условий оптимальности в точках стыковки участков траектории приводит к отклонению полученных «склеенных» траекторий от оптимальных. Для вычисления оптимальной траектории требуется решение задачи сквозной оптимизации, включающей в себя оптимизацию точек стыковки отдельных участков траектории.

Чтобы уменьшить число разбиений траектории и получить достаточно близкие к оптимальным траектории с незначительными потерями в функционале (времени перелета или затратах топлива), в качестве начального приближения предлагается рассмотреть траектории, состоящие из одного геоцентрического участка и одного селеноцентрического участка, со стыковкой этих участков в точке либрации EML_1 системы Земля-Луна [83, 84]. Необходимость пролета через окрестность точки либрации EML_1 является известной особенностью перелета с малой тягой между околоземной и окололунной орбитами. Однако степень неоптимальности решения, использующего EML_1 в качестве точки стыковки геоцентрического и селеноцентрического участков траектории до настоящего времени малоисследована.

Мы используем систему дифференциальных уравнений геоцентрического и селеноцентрического движения КА в модифицированных равноденственных элементах и вспомогательную долготу в качестве независимой переменной, что обеспечивает высокую вычислительную устойчивость решения задачи оптимизации многовитковой траектории. Преобразование из геоцентрической системы координат в селеноцентрическую (либо наоборот) удобно проводить в декартовой системе координат. В этом случае преобразование сводится к простому переносу начала системы координат. Предлагаемая схема перехода из геоцентрической системы координат в селеноцентрическую систему координат состоит в следующем:

1) переход из модифицированной равноденственной геоцентрической системы координат в декартовую геоцентрическую систему координат.

2) переход из декартовой геоцентрической системы координат в декартовую селеноцентрическую систему координат.

3) переход из декартовой селеноцентрической системы координат в модифицированную равноденственную селеноцентрическую систему координат. Для каждого из этих преобразований координат выводится каноническое преобразование сопряженных переменных.

Канонические преобразования, необходимые для сохранения гамильтоновой структуры уравнений оптимального движения при замене фазовых переменных, часто применяются в задачах оптимального управления. Например, в работе [96] канонические преобразования использовались для обеспечения непрерывности сопряженных переменных в точке стыковки участков траектории. Канонические преобразования между сферической системой координат, декартовой системой координат, кеплеровскими и равноденственными элементами представлены в работе [97]. В работе [98], для решения задачи оптимизации многовитковых межпланетных перелетов с использованием декартовых координат, было предложено использовать сопряженные значения от модифицированных равноденственных элементов в качестве начального приближения. Для реализации этого предложения использовалось каноническое преобразование сопряженных переменных из модифицированных равноденственных элементов в декартовую систему координат.

В работе [86] авторы провели численный эксперимент для сравнения вычислительной скорости решения задачи оптимизации многовитковых траекторий с малой тягой при использовании разных фазовых переменных. Показано, что для различных численных методов время решения задачи при использовании МЕЕ в 10-35 раза меньше, чем при использовании декартовых или сферических координат.

Поэтому для вычисления траекторий рассматриваемого класса, включающих участки многовитковой раскрутки вокруг Земли и скрутки вокруг Луны, целесообразно использовать МЕЕ. В этом случае, однако, усложняется вид канонического преобразования сопряженных переменных в точке стыковки гео- и селеноцентрических участков траектории, необходимого для сквозной оптимизации траектории. Это потребовало от автора этой диссертации разработки специальной процедуры для его вычисления.

Основными преимуществами представленного в этой работе метода сквозной оптимизации траекторий перелета к Луне является отсутствие необходимости использования какого-либо начального приближения для вычисления оптимальной траектории, автоматическое определение оптимальной длительности траектории при заданной угловой

дальности ее участков, простота включения в математическую модель движения произвольных возмущающих ускорений благодаря высокоточному численному вычислению производных с использованием CDNAD.

Следует отметить, что в известных нам исследованиях не удалось найти вывода необходимых условий оптимальности в точке стыковки участков траектории с различными центрами притяжения в рассматриваемой нами постановке задачи. Между тем, анализ этих условий приводит к выводу о необоснованности предположения о непрерывности всех сопряженных переменных в точке стыковки. В настоящей диссертационной работе показано, что в точке стыковки имеет место разрыв в значениях некоторых сопряженных переменных при сохранении непрерывности оптимального управления. Для метода сфер действия существование подобного разрыва, обусловленного скачкообразным изменением ускорения на границе сферы действия, было показано в работе [99]. Мы показываем, что разрыв в части сопряженных переменных существует и при одинаковых математических моделях ускорения на различных участках. Этот разрыв связан со сменой начала системы координат при расчете стыкуемых участков траектории.

На сегодняшний день существует множество различных постановок задач, рассматривающих перелёты КА с малой тягой и методов их решения [2, 3]. В настоящей диссертационной работе рассматривается задача сквозной оптимизации траекторий перелета КА к Луне с идеально-регулируемым двигателем ограниченной мощности. Задача в такой постановке уже рассматривалась, например, в работе [100]. Решение задачи оптимизации траекторий с ограниченной мощностью позволяет получить оценки затрат топлива на перелет с двигателем ограниченной тяги и постоянной скорости истечения.

В этом разделе формулируется задача сквозной оптимизации траектории перелета к Луне КА с идеально-регулируемым двигателем, включая вывод необходимых условий оптимальности в точке стыковки геоцентрического и селеноцентрического участков траектории. Представлены канонические преобразования сопряженных переменных, необходимые для решения задачи сквозной оптимизации траекторий. Приводится описание метода решения краевой задачи, к которой сводится задача оптимизации траектории после применения принципа максимума. Приведены численные примеры оптимальных траекторий КА с малой тягой к Луне с оптимальными точками стыковки геоцентрического и селеноцентрического участков и их сравнение с оптимальными траекториями со стыковкой участков в EML_1 .

5.4.1 Сквозная оптимизация возмущенных траекторий с идеально-регулируемым двигателем ограниченной мощности

Рассмотрим задачу сквозной оптимизации перелета к Луне КА с идеально-регулируемым двигателем ограниченной мощности. На всех участках траектории будем учитывать притяжение Земли, Луны и Солнца. Мы используем приведенный в разделе 2.2 подход к решению задачи оптимизации многовиткового перелета КА с идеально-регулируемым двигателем с фиксированной угловой дальностью и свободным временем.

Ранее в этой работе рассматривались задачи перелета с фиксированной угловой дальностью ΔL и свободным временем перелета. В результате показано, что на типичных многовитковых оптимальных траекториях величина L_K изменяется очень мало. Например, на 500-витковой оптимальной возмущенной межорбитальной траектории, представленной в разделе 4.2.2, величина L_K изменяется от 0 до -0.092 градуса. Поэтому в задаче сквозной оптимизации перелета к Луне ограничимся рассмотрением задач перелета с фиксированной угловой дальностью по вспомогательной долготе ΔK вместо ΔL , а значения L_K на левом или правом концах траектории будем оптимизировать. В этом случае конечное значение вспомогательной долготы будет фиксировано: $K_f = K_0 + \Delta K$.

Для вычисления траектории будем отдельно рассчитывать геоцентрический и селеноцентрический участки, интегрируя систему дифференциальных уравнений (2.2.2) и соединять их в точке стыковки, удовлетворяющей необходимым условиям оптимальности. На геоцентрическом участке траектории центральным притягивающим телом является Земля, а на селеноцентрическом – Луна. Поэтому в правой части системы дифференциальных уравнений (2.2.2) гравитационный параметр μ определяется соответственно участку траектории.

Рассматривается задача сквозной оптимизации траектории перелета к Луне с идеально-регулируемым двигателем со следующими функционалами (на геоцентрическом и селеноцентрическом участках траектории соответственно):

$$\begin{aligned}
 J_{LP_{gc}} &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} a_{LP}^2 dt = \frac{1}{2} \int_{K_0}^{K_1^-} \frac{a_{LP}^2}{q^2} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} dK, \\
 J_{LP_{sc}} &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_f} a_{LP}^2 dt = \frac{1}{2} \int_{K_1^+}^{K_f} \frac{a_{LP}^2}{q^2} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} dK,
 \end{aligned}
 \tag{5.4.1.1}$$

где t_1 – время пролета точки стыковки геоцентрического и селеноцентрического участков, K_1 – промежуточное значение величины вспомогательной долготой $K_0 < K_1 < K_f$. Величина K_1^- определяется соотношением $K_1^- = K_0 + \Delta K_{gc}$, а конечная вспомогательная долгота

$K_f = K_1^+ + \Delta K_{sc}$. Как было показано в разделе 1.1, без потери общности можно использовать нулевое значение K_0 и $K_1^+ = K_1^- = K_1$.

Рассматриваемая задача была сформулирована в разделе 2.2 на основе принципа максимума. При вычислении траекторий перелета к Луне время пролета точки стыковки t_1 (оптимальной точки стыковки или точки либрации EML_1) фиксируется, а время отлета с начальной околоземной орбиты и время выхода на конечную окололунную орбиту должны удовлетворять необходимым условиям оптимальности.

Начальные условия геоцентрического участка траектории с учетом возможности установить без потери общности $K_0 = 0$, можно записать в виде:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, p_{LK}(0) = 0, p_t(0) = 0. \quad (5.4.1.2)$$

Конечные условия селеноцентрического участка траектории можно записать в виде:

$$\mathbf{x}(K_f) = \mathbf{x}_f, p_{LK}(K_f) = 0, p_t(K_f) = 0. \quad (5.4.1.3)$$

Для обеспечения непрерывности фазового вектора, условия стыковки геоцентрического и селеноцентрического участков траектории в заданный момент времени t_1 имеют следующий вид:

$$L_K(K_1^-) + K_1^- = L_K(K_1^+) + K_1^+, \mathbf{x}(K_1^-) = \mathbf{x}(K_1^+), t(K_1^-) = t(K_1^+) = t_1, \quad (5.4.1.4)$$

где орбитальные элементы в конце геоцентрического и в начале селеноцентрического участков траектории вычислены в геоцентрической системе координат, $K_1^+ = K_1^- = \Delta K_{gc}$.

Для решения краевой задачи (2.2.9), (5.4.1.2), (5.4.1.3) и (5.4.1.4) требуется определить 5 компонент вектора $\mathbf{p}_x(0)$, начальные значения L_K и t для геоцентрического участка, а также 5 компонент вектора $\mathbf{p}_x(K_1^+)$, начальное значение p_t и конечное значение L_K для селеноцентрического участков (всего 14 неизвестных переменных). Кроме того, неизвестными являются 6 элементов геоцентрической орбиты $\mathbf{x}(K_1^+)$ и $L_K(K_1^+)$ в точке стыковки в начале селеноцентрического участка. Таким образом, рассматриваемая задача содержит $14+6=20$ неизвестных переменных.

Краевые условия (5.4.1.2), (5.4.1.3), (5.4.1.4) определяют только 7 уравнений для геоцентрического участка и 7 уравнений для селеноцентрического участка, всего $7+7=14$ уравнений для определения этих 20 неизвестных переменных. Эти 14 уравнений должны быть дополнены 6 дополнительными необходимыми условиями оптимальности точки стыковки.

Выбор условия, при котором происходит переход от рассмотрения геоцентрического движения к рассмотрению селеноцентрического движения, довольно произволен. С нашей точки зрения, точку стыковки геоцентрического и селеноцентрического участков траектории удобно расположить на мгновенной сфере Хилла Луны, то есть на сфере с центром в центре

Луны и с радиусом r_1^* , который равен селеноцентрическому удалению EML_1 в момент стыковки t_1 . Такой выбор позволяет использовать непрерывное продолжение из траектории со стыковкой в EML_1 в траекторию с оптимальной точкой стыковки.

Условия непрерывности траектории в точке стыковки (5.4.1.4) геоцентрического и селеноцентрического участков в заданный момент времени t_1 можно переписать с использованием декартовых переменных:

$$\mathbf{r}^- = \mathbf{r}^+ + \mathbf{r}_M, \mathbf{v}^- = \mathbf{v}^+ + \mathbf{v}_M, t^- = t^+ = t_1, \quad (5.4.1.5)$$

где \mathbf{r}^- и \mathbf{v}^- - векторы положения и скорости КА в геоцентрической системе координат в конечный момент t^- геоцентрического участка, \mathbf{r}^+ и \mathbf{v}^+ - векторы положения и скорости КА в селеноцентрической системе координат в начальный момент t^+ селеноцентрического участка, \mathbf{r}_M и \mathbf{v}_M - векторы положения и скорости Луны в геоцентрической системе координат в фиксированный момент стыковки t_1 , $t(K_1^-) = t^-$ и $t(K_1^+) = t^+$.

Выбранное условие стыковки на сфере Хилла Луны имеет вид:

$$r^+ = r_1^* \leftrightarrow (\mathbf{r}^- - \mathbf{r}_M)^T (\mathbf{r}^- - \mathbf{r}_M) = (r_1^*)^2, \quad (5.4.1.6)$$

где $r^+ = |\mathbf{r}^+|$.

Для вывода необходимых условий оптимальности в точке стыковки запишем концевую функцию Лагранжа в виде

$$l = (\mathbf{r}^+ + \mathbf{r}_M - \mathbf{r}^-) \cdot \boldsymbol{\lambda}_r + (\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}_M - \mathbf{v}^-) \cdot \boldsymbol{\lambda}_v + (r^+ - r_1^*) \cdot \lambda_1 + (t^+ - t^-) \cdot \lambda_t + (t^- - t_1) \cdot \lambda_{t1}, \quad (5.4.1.7)$$

где $\boldsymbol{\lambda}_r, \boldsymbol{\lambda}_v, \lambda_1, \lambda_t, \lambda_{t1}$ - неопределенные множители Лагранжа. Для такой функции Лагранжа условия трансверсальности примут вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_r^- &= -\frac{\partial l}{\partial \mathbf{r}^-} = \boldsymbol{\lambda}_r, \\ \mathbf{p}_r^+ &= \frac{\partial l}{\partial \mathbf{r}^+} = \boldsymbol{\lambda}_r + \lambda_1 \frac{\partial r^+}{\partial \mathbf{r}^+} = \boldsymbol{\lambda}_r + \lambda_1 \frac{\mathbf{r}^+}{r^+}, \\ \mathbf{p}_v^- &= -\frac{\partial l}{\partial \mathbf{v}^-} = \boldsymbol{\lambda}_v, \mathbf{p}_v^+ = \frac{\partial l}{\partial \mathbf{v}^+} = \boldsymbol{\lambda}_v, \\ p_t^- &= -\frac{\partial l}{\partial t^-} = \lambda_t - \lambda_{t1}, p_t^+ = \frac{\partial l}{\partial t^+} = \lambda_t. \end{aligned} \quad (5.4.1.8)$$

Из этих условий следуют соотношения $p_t^- = p_t^+ - \lambda_{t1}$ и

$$\mathbf{p}_r^- = \mathbf{p}_r^+ - \lambda_1 \frac{\mathbf{r}^+}{r^+}, \quad \mathbf{p}_v^- = \mathbf{p}_v^+. \quad (5.4.1.9)$$

Для вычисления краевых условий (5.4.1.5) и (5.4.1.6) требуется преобразование из системы равноденственных элементов в декартовый фазовый вектор, а для вычисления необходимых условий оптимальности (5.4.1.8) - соответствующее каноническое

преобразование сопряженного вектора. Необходимые для вычисления (5.4.1.5), (5.4.1.6), (5.4.1.9) преобразования приведены в следующем разделе и в Приложении Б. Из уравнений (5.4.1.9) следует, что вектор \mathbf{p}_v непрерывен в точке стыковки, вектор \mathbf{p}_r претерпевает скачок вдоль селеноцентрического радиуса точки стыковки, а сопряженная ко времени переменная p_t также претерпевает скачок ввиду фиксированного значения t_1 .

Условия (5.4.1.6), (5.4.1.9) замыкают систему краевых условий рассматриваемой краевой задачи принципа максимума. Неизвестные параметры краевой задачи (2.2.9), (5.4.1.2)-(5.4.1.4), (5.4.1.6), (5.4.1.9) состоят из следующих неизвестных переменных:

- значения 5 компонент вектора $\mathbf{p}_x(0)$;
- начальные значения L_K и t для геоцентрического участка;
- значения 5 компонент вектора $\mathbf{p}_x(K_1^+)$;
- начальное значение $p_t(K_1^+)$ и конечное значение $L_K(K_f)$ для селеноцентрического участков;
- 6 оскулирующих элементов орбиты ($\mathbf{x}(K_1)$ и $L_K(K_1)$) в точке стыковки;
- значение множителя Лагранжа λ_1 .

Значения этих 21 неизвестных переменных должны быть выбраны таким образом, чтобы удовлетворить 7 уравнений (5.4.1.3), 7 уравнений (5.4.1.4), 1 уравнение (5.4.1.6) и 6 уравнений (5.4.1.9) (всего 21 уравнение).

5.4.2 Каноническое преобразование сопряженных переменных

Разбиение траектории на геоцентрический и селеноцентрический участки требует преобразования фазовых и сопряженных переменных. Для преобразования фазовых переменных между невращающимися декартовыми геоэкуаториальными геоцентрической и селеноцентрической системами необходимо только перенос начала системы координат между центрами Земли и Луны. При использовании в качестве фазовых переменных модифицированных равноденственных элементов дополнительно требуется вычисление в точке стыковки геоцентрических векторов координат и скорости КА по известным значениям геоцентрических орбитальных элементов, а после в вычисления селеноцентрических векторов координат и скорости КА в точке стыковки необходимо вычислить селеноцентрические орбитальные элементы.

Для перевода сопряженных переменных из геоцентрической системы координат в селеноцентрическую (либо наоборот) должно использоваться каноническое преобразование [101], сохраняющее гамильтонову форму уравнений (2.2.9). Канонические преобразования часто применяется в задачах оптимального управления при переводе сопряженных

переменных между различными системами координат и/или орбитальными элементами [97, 98].

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$ представляют (старую) систему фазовых и сопряженных переменных, а $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$, $\mathbf{p}^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)^T$ – другую (новую) систему. Преобразование между координатами x и x^* может быть представлено через функцию преобразования фазовых переменных \mathbf{F} :

$$\mathbf{x}^*(t) = \begin{bmatrix} x_1^*(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ \dots \\ x_n^*(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{bmatrix} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)). \quad (5.4.2.1)$$

Если используется преобразование фазовых переменных (5.4.2.1), то старые и новые сопряженные переменные гамильтоновой системы подчиняются следующим каноническим преобразованием:

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1^*(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial x_1^*(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial x_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix}_t^T \cdot \mathbf{p}^*(t) = \left[\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]_t^T \cdot \mathbf{p}^*(t). \quad (5.4.2.2)$$

Перевод сопряженных переменных в противоположном направлении, т.е. из старой системы в новую, можно представить в виде:

$$\mathbf{p}^*(t) = \left[\frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}^*} \right]_t^T \cdot \mathbf{p}(t) = \left[\left[\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]_t^T \right]^{-1} \cdot \mathbf{p}(t), \quad (5.4.2.3)$$

где \mathbf{S} – функция преобразования фазовых переменных из \mathbf{x}^* в \mathbf{x} .

Таким образом, для вычисления новых значений сопряженных переменных \mathbf{p}^* необходимо вычислить матрицу $\partial \mathbf{S}(\mathbf{x}^*)/\partial \mathbf{x}^*$. В случае, если векторная функция \mathbf{S} имеет сложное аналитическое представление, затрудняющее вычисление ее якобиана, а векторная функция прямого преобразования фазовых переменных \mathbf{F} более простая, то можно использовать вторую часть уравнения (5.4.2.3), для чего нужно вычислить матрицу $\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x}$. При необходимости возможно высокоточное вычисление матриц $\partial \mathbf{S}(\mathbf{x}^*)/\partial \mathbf{x}^*$ и $\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x}$ методом комплексного шага [52] или с помощью автоматического дифференцирования с использованием алгебры дуальных чисел [53].

В настоящей работе в качестве фазовых переменных используются модифицированные равноденственные орбитальные элементы $\mathbf{x}_{mee} = (p, e_x, e_y, i_x, i_y, L_K)^T$, а необходимые условия оптимальности точки стыковки удобнее всего представляются в декартовой системе

координат с использованием фазовых переменных $\mathbf{x}_{cc} = (\mathbf{r}^T, \mathbf{v}^T)^T$. В связи с этим необходимы канонические преобразования из системы модифицированных равноденственных элементов в декартовую систему координат в конце геоцентрического участка, между геоцентрической и селеноцентрической декартовыми системами координат с учетом необходимых условий оптимальности в точке стыковки, из декартовой системы координат в систему модифицированных равноденственных элементов в начале селеноцентрического участка траектории.

Для преобразования между декартовыми фазовыми координатами и модифицированными равноденственными элементами при известном значении вспомогательной долготы K используются функции преобразования \mathbf{Q} и \mathbf{G} :

$$\mathbf{x}_{cc}(K) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}_{mee}(K)), \quad \mathbf{x}_{mee}(K) = \mathbf{G}(\mathbf{x}_{cc}(K)). \quad (5.4.2.4)$$

Выражения для этих функций преобразования приведены в Приложении Б.1.

Для канонического преобразования из системы модифицированных равноденственных элементов в невращающуюся декартовую систему координат необходимо первое уравнение (5.4.2.4) дополнить одним из следующих уравнений

$$\mathbf{p}_{x_{cc}}(K) = \left[\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x}_{cc})}{\partial \mathbf{x}_{cc}} \right]_{\mathbf{K}}^T \cdot \mathbf{p}_{x_{mee}}(K) = \left[\left[\frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{x}_{mee})}{\partial \mathbf{x}_{mee}} \right]_{\mathbf{K}}^T \right]^{-1} \cdot \mathbf{p}_{x_{mee}}(K). \quad (5.4.2.5)$$

где $\mathbf{p}_{x_{mee}} = (p_p, p_{ex}, p_{ey}, p_{ix}, p_{iy}, p_{LK})^T$, $\mathbf{p}_{x_{cc}} = (\mathbf{p}_r^T, \mathbf{p}_v^T)^T$. Очевидно, что аналитическое представление преобразования \mathbf{Q} существенно проще, чем \mathbf{G} , поэтому для канонического преобразования целесообразно использовать второе равенство (5.4.2.5).

Для обратного канонического преобразования (из невращающейся декартовой системы координат в систему модифицированных равноденственных элементов) необходимо второе уравнение (5.4.2.4) дополнить уравнением

$$\mathbf{p}_{x_{mee}}(K) = \left[\frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{x}_{mee})}{\partial \mathbf{x}_{mee}} \right]_{\mathbf{K}}^T \cdot \mathbf{p}_{x_{cc}}(K). \quad (5.4.2.6)$$

Точность канонических преобразований проверялась сравнением с результатами, представленными в работе [98] (см. Приложение В).

5.4.3 Общая схема решения задачи оптимизации траектории

Краевую задачу (2.2.9), (5.4.1.2)-(5.4.1.4), (5.4.1.6), (5.4.1.9) принципа максимума можно формально представить, как систему нелинейных уравнений для невязок на

геоцентрическом участке траектории \mathbf{f}_{gc} , в точке стыковки \mathbf{f}_{junc} и на селеноцентрическом участке траектории \mathbf{f}_{sc} : $\mathbf{f} = [\mathbf{f}_{gc}^T, \mathbf{f}_{junc}^T, \mathbf{f}_{sc}^T]$, где

$$\mathbf{f}_{gc}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_v^+ - \mathbf{p}_v^- \\ \mathbf{p}_r^+ - \mathbf{p}_r^- + \lambda_1 \frac{(\mathbf{r}^- - \mathbf{r}_M)}{\sqrt{(\mathbf{r}^- - \mathbf{r}_M)^T (\mathbf{r}^- - \mathbf{r}_M)}} \\ (\mathbf{r}^- - \mathbf{r}_M)^T (\mathbf{r}^- - \mathbf{r}_M) - (r_1^*)^2 \\ t^- - t_1 \end{bmatrix} = 0, \quad (5.4.3.1)$$

$$\mathbf{f}_{junc}(\mathbf{z}) = \mathbf{x}_{mee}^- - \mathbf{G}_{gc} [\mathbf{Q}_{sc}(\mathbf{x}_{mee}^+) + \mathbf{x}_M] = 0, \quad (5.4.3.2)$$

$$\mathbf{f}_{sc}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(K_f) - \mathbf{x}_f \\ p_{LK}(K_f) \\ p_t(K_f) \end{bmatrix} = 0, \quad (5.4.3.3)$$

\mathbf{G}_{gc} – функция преобразования \mathbf{x}_{sc} в \mathbf{x}_{mee} в геоцентрическом движении (с использованием гравитационного параметра Земли), \mathbf{Q}_{sc} – функция преобразования \mathbf{x}_{mee} в \mathbf{x}_{sc} в селеноцентрическом движении (с использованием гравитационного параметра Луны), $\mathbf{x}_M = (\mathbf{r}_M^T, \mathbf{v}_M^T)^T$ – вектор геоцентрических координат и скорости Луны. Для решения системы (5.4.3.1), (5.4.3.2), (5.4.3.3) необходимо вычислить вектор неизвестных параметров $\mathbf{z} = [\mathbf{z}_{gc}^T, \mathbf{z}_{junc}^T, \mathbf{z}_{sc}^T]$, в состав которого входят 8 неизвестных параметров геоцентрического участка $\mathbf{z}_{gc} = [\mathbf{p}_x^T(0), L_K(0), t(0), \lambda_1]^T$, 6 неизвестных параметров участка стыковки $\mathbf{z}_{junc} = \mathbf{x}_{mee}^+$ и 7 неизвестных параметров селеноцентрического участка $\mathbf{z}_{sc} = [\mathbf{p}_r^{+T}, \mathbf{p}_v^{+T}, p_t^+]^T$. Для вычисления декартовых координат, компонент скорости и сопряженных к ним переменных в точке стыковки используется каноническое преобразование, использующее функцию \mathbf{Q} .

Следует отметить, что уравнение (5.4.3.2) вводится в состав векторной функции невязок для улучшения сходимости и устойчивости численного метода решения задачи как промежуточный узел в методе многократной стрельбы. Такой подход позволяет снизить чувствительность вектора невязок \mathbf{f} к вариациям неизвестных параметров \mathbf{z} в процессе решения краевой задачи.

Рассматриваемые краевые задачи решаются с помощью метода продолжения. Для вычисления правых частей дифференциальных уравнений метода продолжения (3.1.4) требуется вычислить частные производные от вектора невязок по неизвестным параметрам краевой задачи:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_{gc}}{\partial \mathbf{z}_{gc}} & \frac{\partial \mathbf{f}_{gc}}{\partial \mathbf{z}_{junc}} & \frac{\partial \mathbf{f}_{gc}}{\partial \mathbf{z}_{sc}} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_{junc}}{\partial \mathbf{z}_{gc}} & \frac{\partial \mathbf{f}_{junc}}{\partial \mathbf{z}_{junc}} & \frac{\partial \mathbf{f}_{junc}}{\partial \mathbf{z}_{sc}} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_{sc}}{\partial \mathbf{z}_{gc}} & \frac{\partial \mathbf{f}_{sc}}{\partial \mathbf{z}_{junc}} & \frac{\partial \mathbf{f}_{sc}}{\partial \mathbf{z}_{sc}} \end{pmatrix}. \quad (5.4.3.4)$$

При вычислении траектории будем отдельно рассчитывать геоцентрический и селеноцентрический участок, поэтому неизвестные значения селеноцентрического участка не влияют на вектор невязок геоцентрического участка: $\partial \mathbf{f}_{gc} / \partial \mathbf{z}_{sc} = 0$.

Используется следующая схема решения задачи сквозной оптимизации траекторий перелета к Луне:

1) Задаются исходные данные: время пролета точки стыковки t_1 (для решения задачи оптимизации траекторий со стыковкой в точке EML_1 t_1 равно время прохождения точки либрации t_{EML1}), элементы начальной околоземной орбиты $\mathbf{x}_{0gc} = (p_{0gc}, e_{x0gc}, e_{y0gc}, i_{x0gc}, i_{y0gc})^T$, элементы конечной окололунной орбиты $\mathbf{x}_{fsc} = (p_{fsc}, e_{xfsc}, e_{yfsc}, i_{xfsc}, i_{yfsc})^T$, угловая дальность геоцентрического участка траектории ΔK_{gc} , угловая дальность селеноцентрического участка траектории ΔK_{sc} .

2) Методом продолжения решается краевая задача для вычисления оптимальной возмущенной ОМ-траектории со стыковкой геоцентрического и селеноцентрического участков в точке EML_1 . В правые части дифференциальных уравнений для фазовых и сопряженных переменных вводится параметр продолжения τ таким образом, чтобы при $\tau = 0$, дифференциальные уравнения совпадали с уравнениями невозмущенной ОМ-задачи, а при $\tau = 1$ – с уравнениями возмущенной ОМ-задачи, включающими возмущенную часть гамильтониана H_p и временную часть гамильтониана H_t (с дополнительными уравнениями для времени и сопряженной к ней переменной). Для использования гамильтоновой формы записи этих уравнений гамильтониан должен иметь вид $H_{LP} + \tau (H_p + H_t)$. В качестве начального приближения для неизвестных начальных значений сопряженных переменных используются нулевые значения на обоих участках траектории: $p_p(0) = p_{ex}(0) = p_{ey}(0) = p_{ix}(0) = p_{iy}(0) = p_{LK}(0) = 0$ (что соответствует пассивному движению КА по начальной орбите). Сначала вычисляется геоцентрический участок ОМ-траектории, а затем последовательно вычисляется селеноцентрический участок ОМ-траектории.

3) Методом продолжения решается краевая задача для вычисления оптимальной возмущенной ОМ-траектории с оптимальной точкой стыковки. В качестве начального приближения для неизвестных параметров задачи сквозной оптимизации используются значения, полученные для возмущенной ОМ-траектории со стыковкой геоцентрического и

селеноцентрического участка в точке EML_1 . После установки начальных условий производится численное интегрирование системы дифференциальных уравнений геоцентрического движения от K_0 до K_1^- . Вектор невязок краевой задачи геоцентрического участка \mathbf{f}_{gc} вычисляется после интегрирования дифференциальных уравнений геоцентрического движения. Конечные значения геоцентрического участка траектории, 6 орбитальных элементов и 6 сопряженных переменных к соответствующим фазовым переменным, вычисляется путем преобразования из геоцентрической системы координат в селеноцентрическую с помощью указанной в разделе 5.4.2 методики. С использованием полученных значений вычисляется вектор невязок для участка стыковки фазовых переменных \mathbf{f}_{junc} . Устанавливаются начальные условия селеноцентрического участка при $K = K_1^+$ и производится численное интегрирование системы дифференциальных уравнений селеноцентрического движения от K_1^+ до K_f . Вычисляется вектор невязок краевой задачи селеноцентрического участка \mathbf{f}_{sc} . Матрица $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{z}$ необходимая для вычисления правых частей дифференциальных уравнений метода продолжения вычисляется с помощью автоматического дифференцирования с применением алгебры комплексных дуальных чисел, описанного в разделе 3.2.

На рисунке 5.4.3.1 представлена графическая схема вычисления траектории с начальной орбиты искусственного спутника Земли (ОИСЗ) на орбиту искусственного спутника Луны (ОИСЛ).

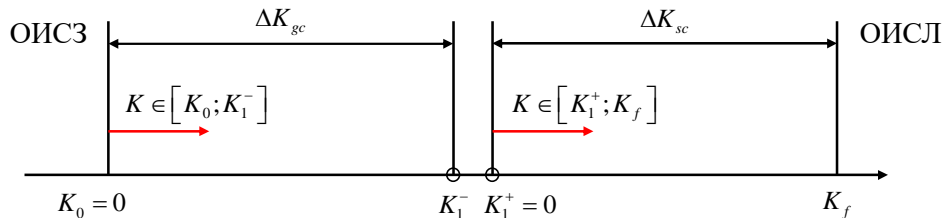


Рисунок 5.4.3.1. Графическая схема вычисления траектории с ОИСЗ на ОИСЛ.

Одним из способов оценки степени отличия оптимальной стыковки траектории от стыковки в EML_1 является величина скорости КА при прохождении точки стыковки двух участков. Для определения синодической скорости КА в момент пролета оптимальной точки стыковки в рамках возмущённой эфемеридной модели необходимо сделать переход из инерциальной системы координат J2000 в мгновенную синодическую систему координат.

Введём мгновенную синодическую систему координат, связанную с текущим положением и скоростью Луны $(\mathbf{r}_M, \mathbf{v}_M)$ в геоцентрической системе координат J2000

следующим образом. Единичные векторы вдоль координатных осей этой системы в системе J2000 $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ определим следующими выражениями:

$$\mathbf{e}_x = \frac{\mathbf{r}_M}{|\mathbf{r}_M|}, \quad \mathbf{e}_z = \frac{\mathbf{r}_M \times \mathbf{v}_M}{|\mathbf{r}_M \times \mathbf{v}_M|}, \quad \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x,$$

а мгновенную угловую скорость вращения Луны - выражением:

$$\dot{\vartheta} = \frac{|\mathbf{r}_M \times \mathbf{v}_M|}{|\mathbf{r}_M|^2}.$$

Положение и скорость КА относительно Земли в инерциальной системе координат можно выразить с использованием координат и компонент скорости КА в мгновенной синодической системе относительно Земли в следующем виде:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{J2000} = (\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y \ \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{r}_{rotating}, \\ \mathbf{v}_{J2000} = r_{J2000} \dot{\vartheta} \mathbf{e}_y + (\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y \ \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{v}_{rotating}. \end{cases}$$

где $\mathbf{r}_{rotating}, \mathbf{v}_{rotating}$ – векторы положения и скорости КА в мгновенной синодической системе координат относительно Земли. Далее, для представления численных результатов будет использоваться безразмерный вектор положения КА $\mathbf{r}_{rotating}/|\mathbf{r}_M|$ во вращающейся системе координат.

5.4.4 Численные примеры

Рассмотрим результаты вычисления траекторий с оптимальной точкой стыковки с начальной эллиптической околоземной орбиты, имеющей высоту перигея 4500 км, высоту апогея 50000 км, наклонение 25° , аргумент перигея 248° и долготу восходящего узла 4° , на круговую окололунную орбиту с высотой 5000 км, наклонением 30° и долготой восходящего узла 4° . Размер, форма и наклонение выбранной орбиты отлета в рассмотренном численном примере близки к типичной супер-ГПО при пусках ракеты-носителя тяжелого класса. Значения аргумента перицентра и долготы восходящего узла выбраны близкими к значениям соответствующих элементов оскулирующей орбиты EML_1 при заданной дате пролета точки стыковки. Задача оптимизации аргумента перицентра и долготы восходящего узла начальной орбиты в этой работе не рассматривалась.

Дату пролёта оптимальной точки стыковки примем равной 25 декабря 2023 года, 00:00:00 UTC. В соответствующую фиксированную дату пролета точки стыковки радиус сферы Хилла Луны в селеноцентрической инерциальной системе координат равен 58082.52 км.

Траектории с оптимальной точкой стыковки сравниваются с траекториями со стыковкой геоцентрического и селеноцентрического участков в точке EML_1 для одинаковых заданных элементов граничных орбит и времени пролета точки стыковки и точки либрации EML_1 . Угловые дальности перелета фиксированы и составляют от 4 до 28 витков для геоцентрического участка и от 1 до 7 витков для селеноцентрического участка. Суммарное значение угловой дальности для перелета к Луне вычисляется как сумма этих величин на геоцентрическом и селеноцентрическом участках: $\Delta K_{\Sigma} = \Delta K_{gc} + \Delta K_{sc}$. В этой работе рассмотрены траектории с соотношением числа витков на геоцентрическом и селеноцентрическом участках 4:1, а суммарное число витков варьируется в диапазоне от 5 до 35. Основным критерием для выбора угловой дальности участка траектории является уровень реактивного ускорения. Соотношение числа витков на гео- и селеноцентрическом участках выбирается из условия примерного равенства средних значений реактивного ускорения на этих участках.

В таблицах 5.4.4.1 и 5.4.4.2 представлены основные параметры оптимальных траекторий с оптимальной точкой стыковки и со стыковкой в точке EML_1 для разной угловой дальности перелета.

Таблица 5.4.4.1. Основные параметры оптимальных траекторий с оптимальной точкой стыковки.

ΔK_{Σ}	Δt , сутки	Δv_{ch} , м/с	J_{LP} , м ² /с ³	\tilde{a}_{gc} , мм/с ²	\tilde{a}_{sc} , мм/с ²	ΔL_{gc} , ВИТКОВ	ΔL_{sc} , ВИТКОВ
5	12.5019	2426.431	4.166911	5.019797	4.437600	4.000847	1.001065
10	23.2934	2423.336	2.061159	2.488547	2.153214	8.000450	2.000285
15	34.1184	2414.030	1.367589	1.654349	1.415061	12.00030	2.999980
20	44.9189	2407.796	1.023116	1.240632	1.056037	16.00022	3.999832
25	55.7171	2403.652	0.817266	0.992601	0.843267	20.00017	4.999750
30	66.5044	2400.837	0.680367	0.826451	0.702236	24.00014	5.999701
35	77.3294	2398.331	0.582603	0.708573	0.601601	28.00011	6.999663

Таблица 5.4.4.2. Основные параметры оптимальных траекторий со стыковкой в точке EML_1 .

ΔK_{Σ}	Δt , сутки	Δv_{ch} , м/с	J_{LP} , м ² /с ³	\tilde{a}_{gc} , мм/с ²	\tilde{a}_{sc} , мм/с ²	ΔL_{gc} , ВИТКОВ	ΔL_{sc} , ВИТКОВ
5	16.3599	2666.178	4.512647	4.897396	4.544912	4.000075	0.999946
10	27.9986	2671.468	2.239662	2.426028	2.176598	8.000047	1.999964
15	39.6325	2672.903	1.498561	1.611979	1.448160	12.00002	2.999969
20	51.1954	2663.745	1.128752	1.205753	1.091558	16.00001	3.999971
25	62.8006	2649.619	0.905442	0.962620	0.878230	20.00000	4.999972
30	74.6966	2637.367	0.75464	0.801968	0.734214	24.00000	5.999972
35	86.8793	2623.987	0.645747	0.687248	0.625917	27.99999	6.999971

В таблицах 5.4.4.1 и 5.4.4.2 используются следующие обозначения: Δt – суммарное время перелета к Луне, Δv_{ch} – характеристическая скорость, J_{LP} – функционал рассматриваемой задачи, \tilde{a}_{gc} и \tilde{a}_{sc} – среднее значение реактивного ускорения для геоцентрического и селеноцентрического участков ОМ-траектории, ΔL_{gc} и ΔL_{sc} – приращение истинной долготы на геоцентрическом и селеноцентрическом участках траектории.

Как видно из таблиц 5.4.4.1 и 5.4.4.2, оптимизация точки стыковки приводит не только к уменьшению функционала, но и к уменьшению требуемых затрат характеристической скорости. Функционал рассматриваемой задачи уменьшается минимум на 7.661% (на 5-витковой траектории) и максимум на 9.842% (на 30-витковой траектории), а затраты характеристической скорости уменьшаются минимум на 8.600% (на 35-витковой траектории) и максимум на 9.685% (на 15-витковой траектории).

В рассмотренных случаях оптимизация точки стыковки позволила сократить суммарное время перелета по ОМ-траектории к Луне минимум на 10.967% (на 30-витковой траектории) и максимум на 23.582% (на 5-витковой траектории).

На рисунке 5.4.4.1 показаны проекции оптимальных траекторий с угловой дальностью 5, 20 и 35 витков в инерциальной системе координат J2000 с оптимальной точкой стыковки и со стыковкой геоцентрического и селеноцентрического участков в точке EML_1 . На рисунке 5.4.4.1 и везде далее положение точки либрации EML_1 обозначено красным маркером «×», а положение оптимальной точки стыковки обозначено красным кружком. Орбита Луны обозначена серой пунктирной линией. Решение, связанное с траекторией с оптимальной точкой стыковки, обозначено синей линией, а с траекторией со стыковкой в точке либрации EML_1 – оранжевой линией.

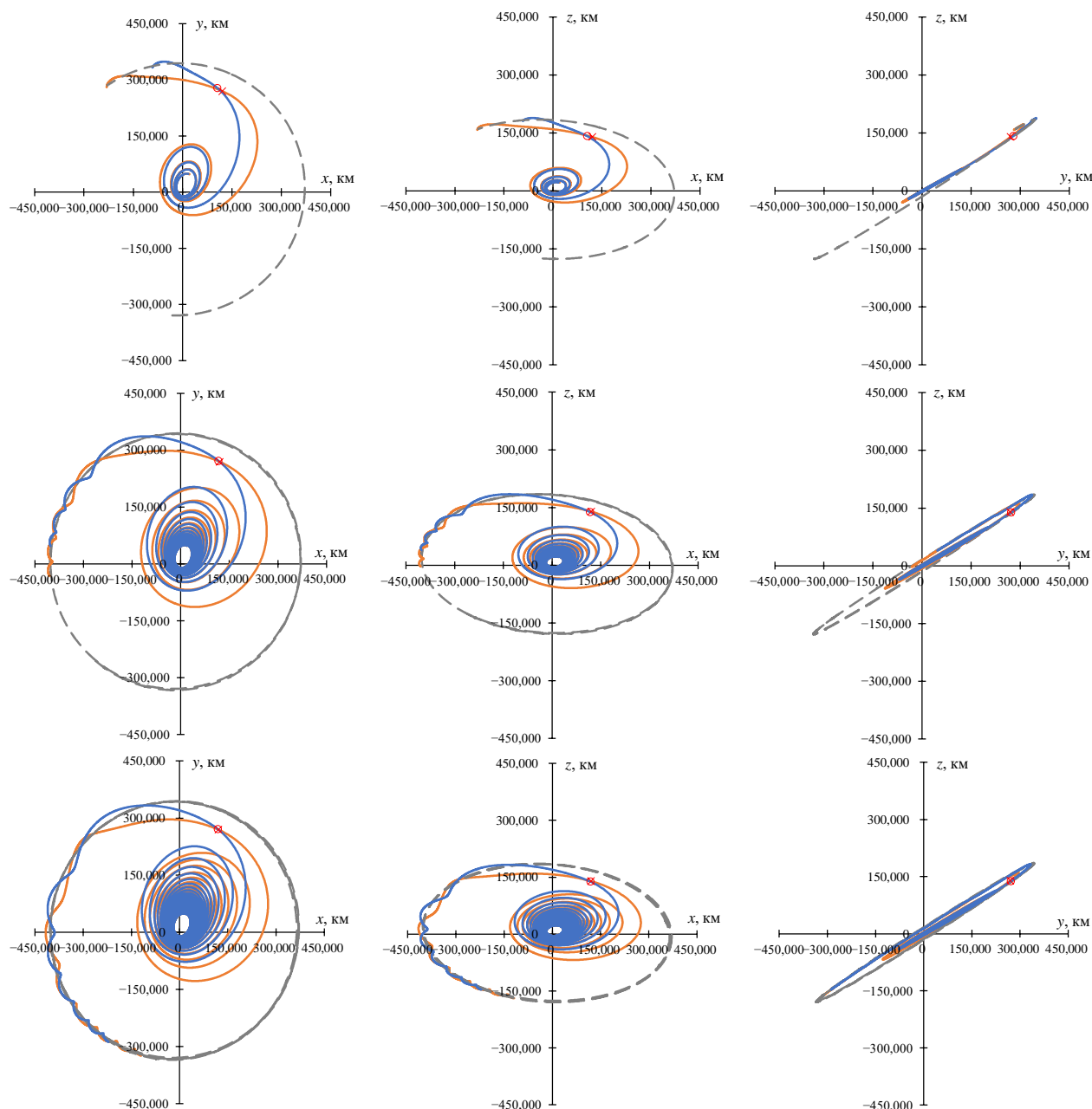


Рисунок 5.4.4.1. Проекция оптимальных 5- (верхний ряд), 20- (средний ряд) и 35- (нижний ряд) витковых траекториях с оптимальной точкой стыковки и со стыковкой в точке EM_1 в инерциальной системе координат J2000.

На последних витках оптимальных траекторий со стыковкой в точке EM_1 радиус перигея увеличивается по сравнению с траекториями с оптимальной точкой стыковки, что необходимо для обеспечения сближения с точкой либрации с нулевой относительной скоростью. На рисунке 5.4.4.2 показаны проекции тех же оптимальных траекторий, что и на рисунке 5.4.4.1, на плоскость XU синодической системы координат.

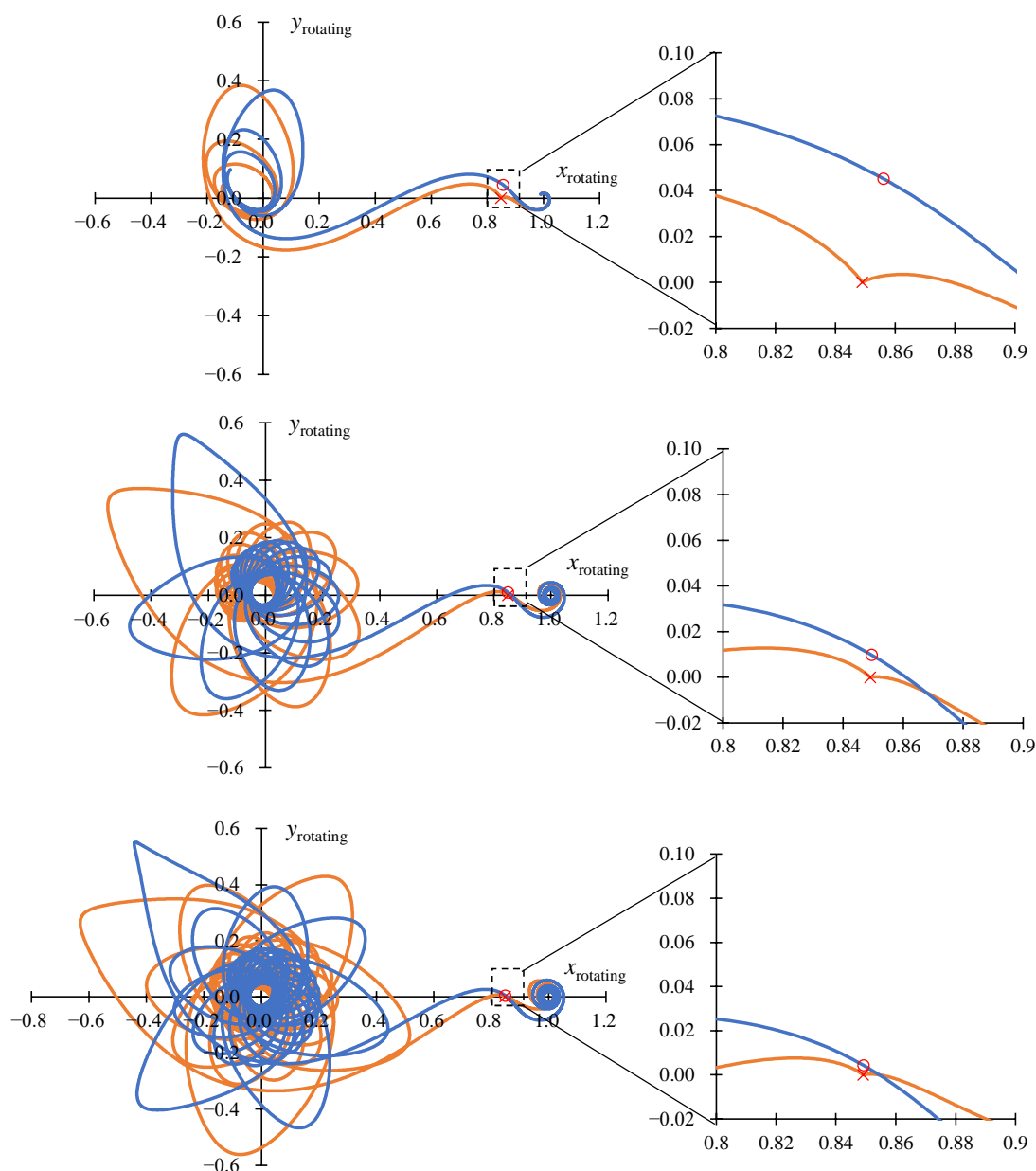


Рисунок 5.4.4.2. Проекция оптимальной 5- (верхний ряд), 20- (средний ряд) и 35- (нижний ряд) витковых траекторий с оптимальной точкой стыковки и со стыковкой в точке EM_1 на плоскость XY на мгновенную плоскость орбиты Луны в синодической системе координат.

Из рисунка видно существенное различие оптимальных ОМ-траекторий с оптимальной точки стыковки и со стыковкой в точке EM_1 в синодической системе координат. На правой стороне рисунка 5.4.4.2 представлены участки траекторий вблизи точки стыковки в увеличенном масштабе.

По результатам расчетов, как и ожидалось, увеличение числа витков приводит к уменьшению реактивного ускорения (см. таблица 5.4.4.1) и к уменьшению расстояния от оптимальной точки стыковки до EM_1 . Это связано с тем, что чем меньше значение

реактивного ускорения КА, тем меньше ширина допустимой горловины в окрестности точки либрации EML_1 при входе в сферу Хилла Луны, при прохождении через которую возможен захват КА на окололунную орбиту.

На рисунке 5.4.4.3 представлены зависимости величин оптимального реактивного ускорения от времени для траекторий с угловой дальностью 5 (слева), 20 (в середине) и 35 (справа) витков. Решение с оптимальной стыковкой двух участков позволяет обеспечить непрерывность оптимальной программы управления вектором реактивного ускорения в точке стыковки и гладкое соединение геоцентрического и селеноцентрического участков траектории. Траектории со стыковкой в EML_1 , напротив, имеют излом и разрыв в программе управления в точке EML_1 (Рисунки 5.4.4.2, 5.4.4.3).

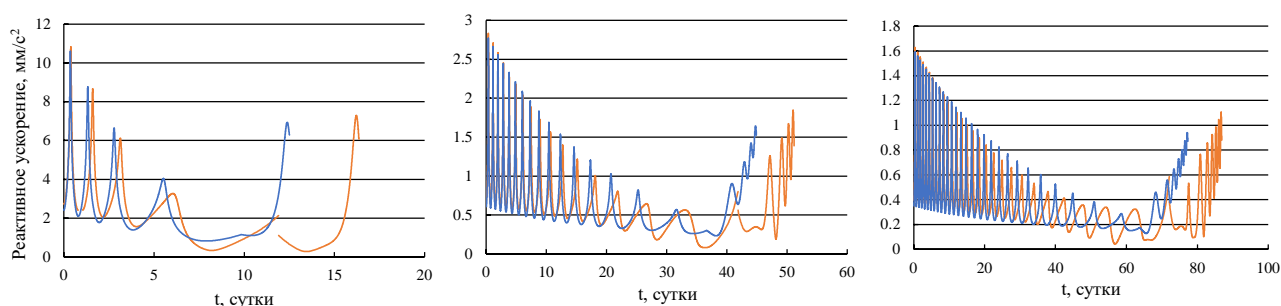


Рисунок 5.4.4.3. Зависимости от времени реактивного ускорения для перелета к Луне.

На рисунке 5.4.4.4 представлены зависимости от времени безразмерных значений сопряженных к \mathbf{r} и \mathbf{v} переменных на 4-витковых ОМ-траектории перелета к Луне. Для траектории со стыковкой в точке EML_1 (оранжевая линия) разрыв имеется во всех 6 сопряженных переменных, так как решаются два отдельные задачи оптимизации геоцентрического и селеноцентрического участков траектории. Для траектории с оптимальной стыковкой двух участков (синяя линия) зависимости сопряженных переменных к компонентам вектора скорости \mathbf{p}_v непрерывны, а сопряженные к вектору положения переменные \mathbf{p}_r имеют в точке стыковки скачок $\lambda_1 \cdot \mathbf{r}^+ / \Gamma^+$.

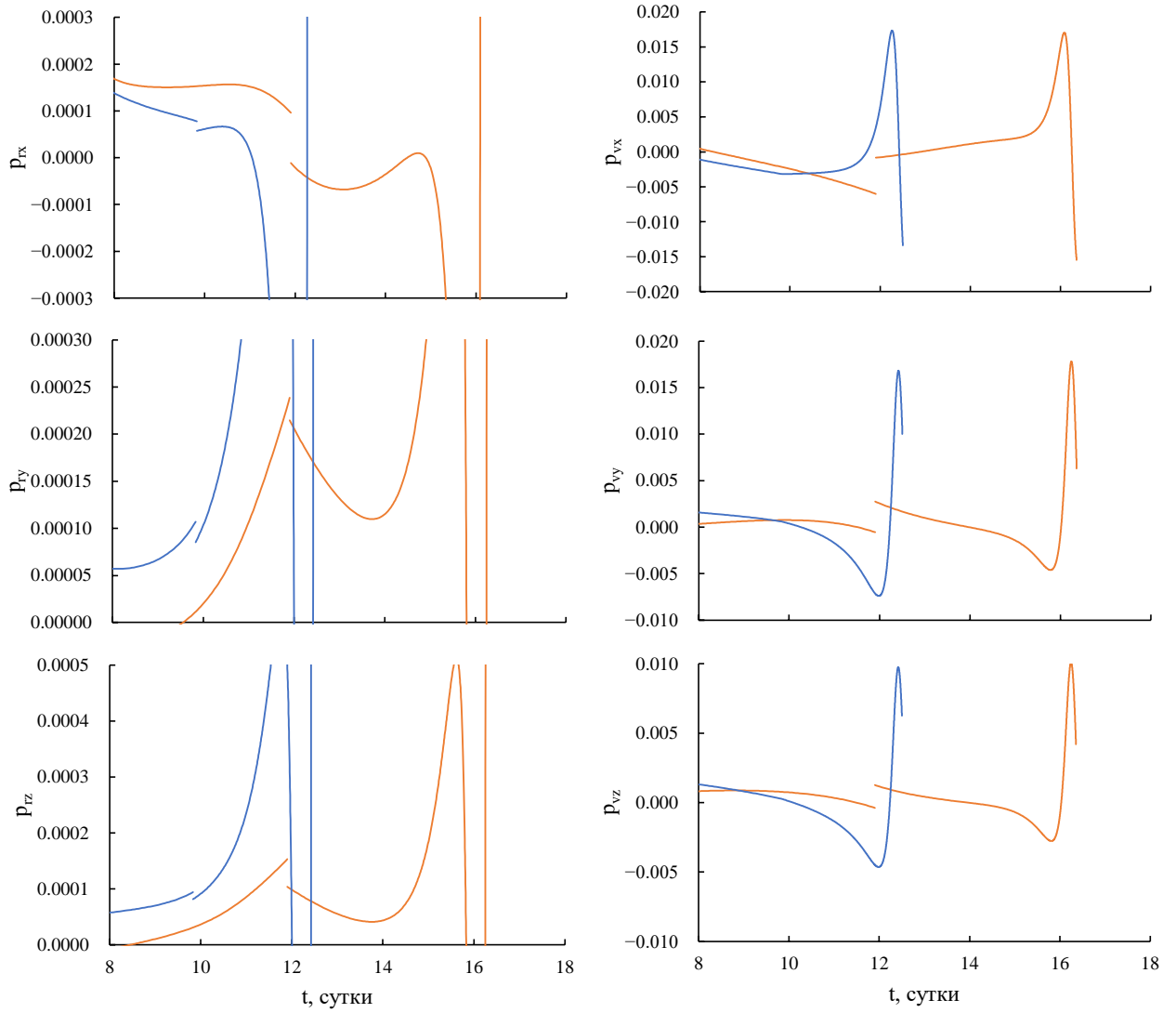


Рисунок 5.4.4.4. Изменение безразмерного значения сопряженных переменных на 4-витковых ОМ-траектории перелета к Луне.

Значения скачка сопряженных переменных к \mathbf{r} в момент стыковки равны $p_{rx}^+ - p_{rx}^- = -2.0424 \cdot 10^{-5}$, $p_{ry}^+ - p_{ry}^- = -2.18182 \cdot 10^{-5}$, $p_{rz}^+ - p_{rz}^- = -1.25671 \cdot 10^{-5}$ для 4-витковой траектории, $p_{rx}^+ - p_{rx}^- = 1.18001 \cdot 10^{-6}$, $p_{ry}^+ - p_{ry}^- = 2.16396 \cdot 10^{-6}$, $p_{rz}^+ - p_{rz}^- = 1.22789 \cdot 10^{-6}$ для 20-витковой траектории, $p_{rx}^+ - p_{rx}^- = 6.48896 \cdot 10^{-7}$, $p_{ry}^+ - p_{ry}^- = 1.31404 \cdot 10^{-6}$, $p_{rz}^+ - p_{rz}^- = 7.40291 \cdot 10^{-7}$ для 35-витковой траектории. Таким образом, величина скачка в \mathbf{p}_r уменьшается с увеличением числа витков.

В таблице 5.4.4.3 представлены значения вектора положения и скорости оптимальной точки стыковки в мгновенной геоцентрической синодической системе координат для траектории перелета с разным числом витков.

Таблица 5.4.4.3. Значения вектора положения (безразмерного) и скорости оптимальной точки стыковки в синодической системе координат.

ΔK_{Σ}	$x_{rotating}$	$y_{rotating}$	$z_{rotating}$	$v_x rotating, \text{ M/C}$	$v_y rotating, \text{ M/C}$	$v_z rotating, \text{ M/C}$
5	0.856126	0.045084	-0.006894	237.8436	-180.8093	11.06208
10	0.850736	0.021426	-0.006398	219.0976	-152.6332	3.993939
15	0.849788	0.013438	-0.005965	213.9416	-147.4695	1.357233
20	0.849493	0.009780	-0.005628	211.8339	-145.3045	0.075297
25	0.849353	0.007504	-0.005384	210.4100	-143.3563	-0.630621
30	0.849268	0.005700	-0.005218	209.0966	-141.3347	-1.062691
35	0.849217	0.004278	-0.005094	207.7519	-139.5594	-1.392600

В мгновенной геоцентрической синодической системе координат безразмерный вектор положения точки либрации EML_1 равен (0.849073, 0, 0), а вектор скорости EML_1 равен (32.18877, 0, 0) м/с. Ненулевое значение первой компоненты вектора скорости точки либрации связано с использованием эфемеридной модели движения, в которой радиальная скорость Луны не равна нулю. Из таблицы 5.4.4.3 видно, что траектория с оптимальной точкой стыковки имеет большие значения компонентов скорости в синодической системе координат при прохождении через точку стыковки двух участков по сравнению с траекториями со стыковкой в точке либрации EML_1 .

На рисунке 5.4.4.5 представлены зависимости синодической скорости от времени на 5-, 20- и 30-витковых траекториях с оптимальной точкой стыковки и со стыковкой в точке EML_1 . Отклонения скорости в синодической системе координат $\Delta v_{rotating}$ от скорости точки либрации EML_1 в точке стыковки геоцентрического и селеноцентрического участков траектории равны 266.7827 м/с для 5-витковой траектории, 224.6906 м/с для 20-витковой траектории и 218.0903 м/с для 35-витковой траектории.

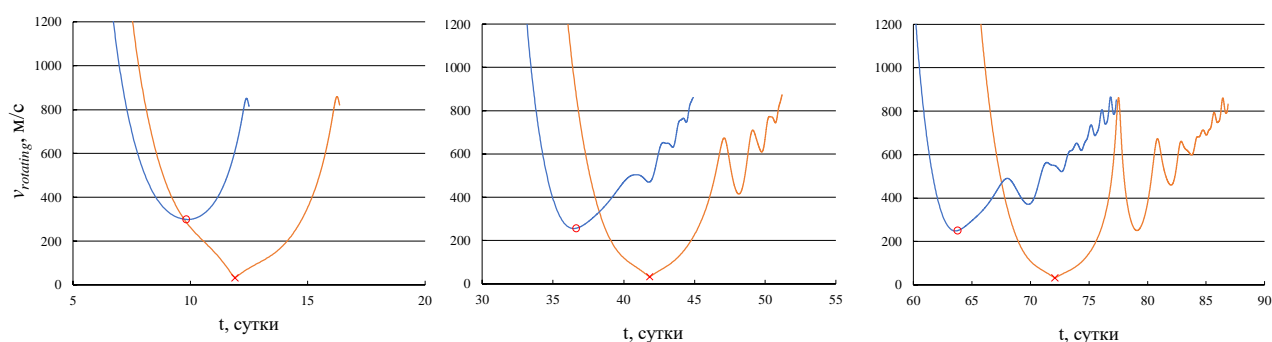


Рисунок 5.4.4.5. Зависимости синодической скорости от времени на 5- (слева), 20- (в середине), 35- (справа) витковых траекториях с оптимальной точкой стыковки и со стыковкой в точке EML_1 .

На рисунке 5.4.4.6 показаны положения оптимальных точек стыковки геоцентрического и селеноцентрического участков на плоскости XU и XZ в синодической системе координат для рассматриваемых траекторий с угловой дальностью от 5 до 35 витков. На графиках точка либрации обозначена красной точкой и оптимальные точки стыковки двух участков обозначены синими квадратами. При увеличении суммарного числа витков оптимальная точка стыковки приближается к точке либрации EML_1 (пунктирная линия тренда на рисунке 5.4.4.6).

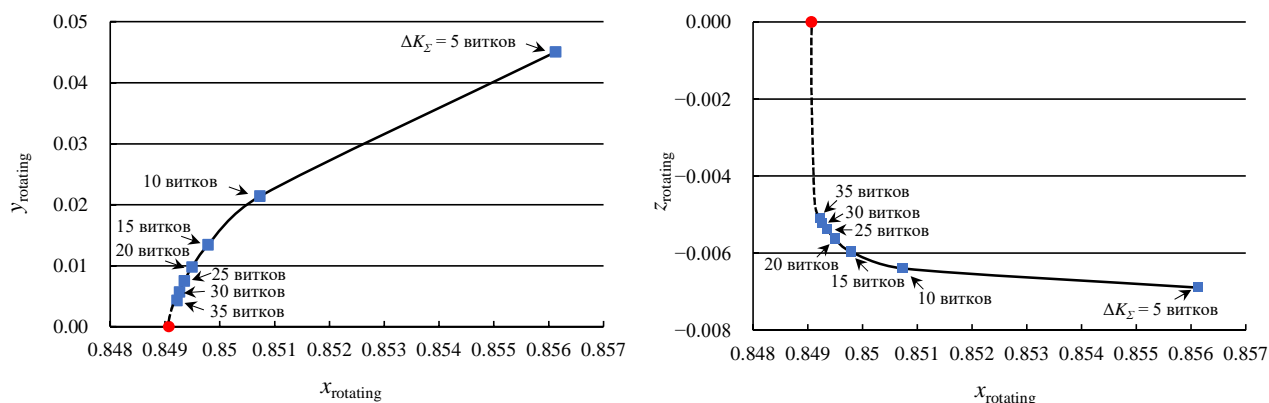


Рисунок 5.4.4.6. Положения оптимальных точек стыковки в синодической системе координат на плоскости XU (слева) и XZ (справа).

На рисунке 5.4.4.7 представлены зависимости расстояния $d_{стык.}$ между оптимальной точкой стыковки и точкой либрации EML_1 от суммарного числа витков траекторий. На графике показана аппроксимационная зависимость $d_{стык.}$ от суммарного значения приращения угловой переменной K с экстраполяцией в область больших значений угловой дальности (пунктирная линия).

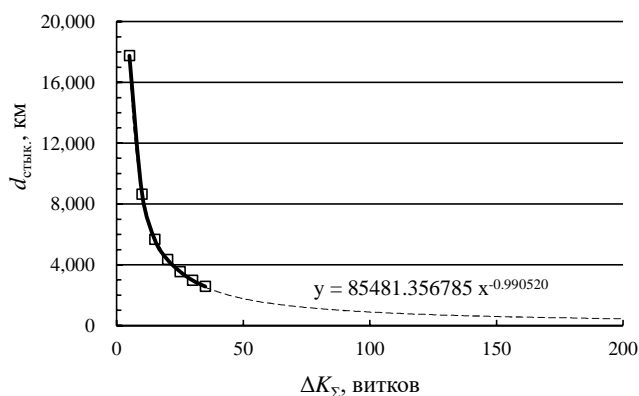


Рисунок 5.4.4.7. Зависимость расстояния между оптимальной точкой стыковки и точкой либрации EML_1 от суммарного значения углового переменного K .

С ростом суммарного числа витков траекторий перелета к Луне в рассмотренном диапазоне от 5 до 35 витков, расстояние между оптимальной точкой стыковки и точкой либрации быстро уменьшается от 17760.037 км до 2560.7455 км (тонкие сплошные линии), а затем асимптотически приближаясь к нулевому значению, т.е. к точке EML_1 . По прогнозу, при 100 витках это расстояние уменьшится до 893 км, а при 200 витках – до 449 км.

Для демонстрации возможностей разработанного метода, в качестве дополнительного примера приведем траекторию перелета с геопереходной орбиты с высотой перицентра 300 км и высотой апогея 35793 км на эллиптическую окололунную орбиту с высотой периселения 1000 км и высотой апоселения 10000 км. Полный набор используемых в этом примере элементов начальной и конечной орбит представлен в таблице 5.4.4.4.

Таблица 5.4.4.4. Параметры начальной околоземной и конечной окололунной орбиты

Граничные орбиты	r_p , км	r_a , км	i , градусы	Ω , градусы	ω , градусы
Начальная ОИСЗ	300	35793	25	4	248
Конечная ОИСЛ	1000	10000	30	4	248

Для обеспечения близкого уровня реактивного ускорения на гео- и селеноцентрическом участках, в этом примере рассматривается соотношение числа витков на двух участках траектории 8:1. На рисунке 5.4.4.8 представлены оптимальные траектории с 16 витками на геоцентрическом участке и 2 витками на селеноцентрическом участке. Как и ранее, оранжевой линия соответствует траектории со стыковкой в точке EML_1 , а синяя – траектории с оптимальной точкой стыковки. Основные параметры этих траекторий представлены в таблице 5.4.4.5.

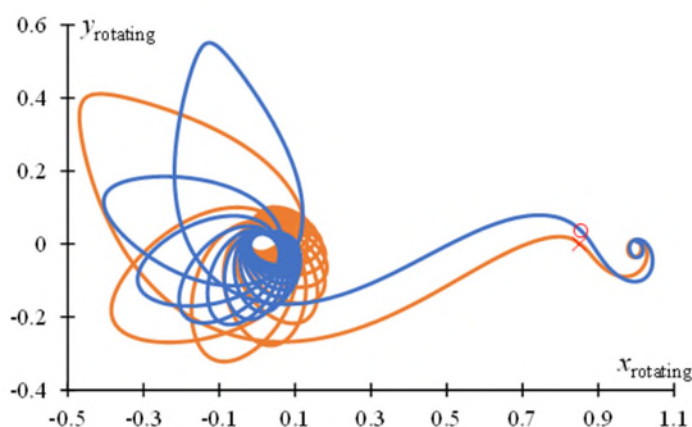


Рисунок 5.4.4.8. Проекция оптимальных 18-витковых траекторий перелета с геопереходной орбиты с низкой высотой перицентра 300 км на эллиптическую окололунную орбиту на плоскость XY в синодической системе координат.

Таблица 5.4.4.5. Результаты оптимальных 18-витковых траекторий перелета с ГПО с высотой перицентра 300 км на эллиптическую окололунную орбиту

Тип стыковки	Δt , сутки	Δv_{ch} , м/с	J_{LP} , м ² /с ³	\tilde{a}_{gc} , мм/с ²	\tilde{a}_{sc} , мм/с ²
Оптимальная стыковки	32.9135	2935.234	2.347619	2.631531	2.368071
Стыковка с точкой EML_1	39.45431	3327.815	2.533057	2.550099	2.366935

5.5 Заключение по разделу

Рассмотрена задача оптимизации перелета к Луне с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета. Для вычисления возмущающих ускорений использована эфемеридная модель движения небесных тел, а на всех участках траектории учитывается притяжение Земли, Луны и Солнца.

Представлены численные результаты оптимизации перелетов с эллиптической околоземной орбиты на круговую и эллиптическую окололунную орбиты, а также с круговой околоземной орбиты на гало-орбиты вокруг точек либрации EML_1 и EML_2 .

Предложен метод решения задачи минимизации тяги на перелете между околоземной и окололунной орбитами со свободными (оптимальными) долготой восходящего узла и аргументом перицентра начальной и конечной орбит. Рассмотрены различные варианты граничных условий для геоцентрического и селеноцентрического участков траектории.

Предложен подход к решению задачи минимизации топлива для многовитковых траекторий перелета между околоземной и окололунной орбитами на основе использования принципа максимума и метода продолжения. Решение последовательности задач оптимизации траекторий с ограниченной мощностью, минимальной тягой и минимальными затратами топлива позволяет избежать необходимости выбора начального приближения для неизвестных начальных значений сопряженных переменных. Задача минимизации тяги используется для коррекции угловой дальности геоцентрического и селеноцентрического участков траектории с целью обеспечения существования решения с заданной величиной тяги.

Приведена формулировка задачи сквозной оптимизации траектории перелета к Луне космического аппарата с идеально-регулируемым двигателем и описание метода ее решения. Использовано каноническое преобразование для перевода сопряженных переменных между геоцентрическими и селеноцентрическими системами координат. Для начального приближения в качестве точки стыковки используется точка либрации EML_1 системы Земля-Луна, а переход к оптимальной стыковке этих участков проводился с использованием метода продолжения.

Устойчивость решения задачи сквозной оптимизации продемонстрирована при изменении числа витков в диапазоне 5-35 витков. При увеличении суммарного числа витков сходимость и численная устойчивость предлагаемого метода ухудшаются. Это можно объяснить следующими причинами: 1) В процессе оптимизации изменение начальных значений сопряженных переменных на геоцентрическом участке сильно влияет не только на промежуточные краевые условия в зоне стыковки, но также и на параметры конечной окололунной орбиты. Эти эффекты усиливаются с ростом числа витков; 2) С ростом числа витков увеличивается длительность перелета и, из-за увеличения интегрального влияния возмущающих ускорений, растет отличие возмущенной траектории от траектории начального приближения, при вычислении которой возмущающие ускорения не учитываются. Представленный численный метод демонстрирует хорошую производительность и может быть дополнительно улучшен за счет дополнительного использования метода многократной стрельбы. Необходимо также отметить, что полученные с помощью рассмотренного метода траектории могут быть улучшены за счет оптимизации условий стыковки геоцентрического и селеноцентрического участков траектории с ограниченной тягой и постоянной скоростью истечения.

6 ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ МЕЖПЛАНЕТНЫХ ПЕРЕЛЕТОВ МЕЖДУ ТОЧКАМИ ЛИБРАЦИИ

Традиционно, на начальном этапе проектирования межпланетных траекторий космических аппаратов используется метод точечных сфер действия (ТСД). В рамках допущений метода ТСД при расчете гелиоцентрических участков траектории пренебрегается протяженностью сферы действия. При этом точная стыковка планетоцентрических и гелиоцентрических участков траектории не используется. Вектор положения КА в начале и конце гелиоцентрического участка считается совпадающим с вектором положения планеты отправления в начальный момент времени и планеты прибытия в конечный момент времени соответственно. Вектор гелиоцентрической скорости КА в начальный момент времени принимается равным сумме вектора гелиоцентрической скорости планеты отправления в этот момент времени и отлетного гиперболического избытка скорости КА. Вектор гелиоцентрической скорости КА в конечный момент времени принимается равным сумме гелиоцентрической скорости планеты назначения в этот момент времени и подлетного гиперболического избытка скорости КА. Для расчета гелиоцентрических и планетоцентрических участков траектории используется математическая модель движения КА в центральном ньютоновском поле тяготения. Метод ТСД широко используется при проведении проектно-баллистического анализа межпланетных миссий с большой и малой тягой и во многих случаях дает удовлетворительные оценки основных траекторных параметров. Однако в рамках этого метода не рассчитывается непрерывная траектория межпланетного перелета, а пренебрежение притяжением Солнца на планетоцентрических участках и притяжением планет на гелиоцентрических участках может приводить к существенной методической погрешности, особенно при расчете межпланетных траекторий с малой тягой и малыми величинами отлетного и подлетного гиперболического избытка скорости. Именно такая ситуация возникает при расчете межпланетных траекторий, включающих планетоцентрические участки спиральной раскрутки при отлете с начальной орбиты вокруг планеты отправления и скрутки при выходе на конечную орбиту вокруг планеты назначения.

Поэтому актуальной является задача разработки подхода к оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой, который бы позволил, с одной стороны, получить более реалистичные результаты, а с другой стороны, был бы достаточно простым и обеспечивал возможность его применения на самых ранних стадиях проектирования космических миссий.

Устранить недостатки метода ТСД позволяет переход к более полной модели движения, учитывающей притяжение Солнца и планет на всех участках траектории. Разумеется, при

использовании таких математических моделей возникает большее число вариантов решения, что осложняет проектирование космических миссий с их использованием, но и предоставляет больше возможностей для их оптимизации.

Существует большое количество работ по проектированию схем перелета межпланетных КА с использованием особенностей задачи трех или четырех тел, включая использование инвариантных многообразий точек либрации и орбит вокруг них [109-113]. Применение таких схем полета к межпланетным миссиям привело к новой концепции низкоэнергетических межпланетных перелетов «Interplanetary Superhighway» [114, 115]. Применение таких схем перелета приводит, как правило, к значительному увеличению длительности перелета, а их расчет является достаточно трудоемким.

В этой работе рассматривается другой подход решения задачи оптимизации межпланетной траектории КА с электроракетной двигательной установкой (ЭРДУ) с учетом притяжения Солнца и планет на всех участках траектории. В рамках этого подхода планетоцентрические и гелиоцентрический участок стыкуются в коллинеарных точках либрации у планет отправления и прибытия. Рассматриваемая схема представляет интерес для межпланетных траекторий, включающих планетоцентрические участки раскрутки и скрутки с малой тягой, таких как траектории марсианской пилотируемой экспедиции с использованием ЭРДУ в качестве маршевой двигательной установки марсианского комплекса [116]. Разумеется, стыковка в точках либрации не является оптимальной, но ее можно использовать в качестве начального приближения для поиска оптимальных точек стыковки планетоцентрических и гелиоцентрических участков траектории с использованием метода, аналогичного методу, представленному в разделе 5.4 для сквозной оптимизации траектории перелета между околоземной и окололунной орбитами. На рисунке 1 представлена схема перелета с малой тягой между точкой либрации L_2 системы Солнце-Земля (ESL_2) и точкой либрации L_1 системы Солнце-Юпитер (JSL_1). На этом рисунке, в частности, показаны оскулирующие гелиоцентрические орбиты этих точек либрации на моменты отправления и прибытия. Видно, что радиус афелия оскулирующей орбиты ESL_2 больше радиуса орбиты Земли, а радиус перигелия оскулирующей орбиты JSL_1 существенно меньше радиуса орбиты Юпитера. Это позволяет надеяться, что требуемые затраты характеристической скорости между этими точками либрации окажутся заметно меньше, чем затраты характеристической скорости на гелиоцентрический участок перелета Земля-Юпитер в рамках метода ТСД.



Рисунок 6.1. Схема межпланетного перелета КА с малой тягой между точками либрации ESL_2 и JSL_1 .

Для оценки перспективности рассматриваемого подхода в данной работе мы ограничимся только оптимизацией гелиоцентрических траекторий перелета с малой тягой между точками либрации у планеты отправления и планеты назначения. Вопросы оптимизации планетоцентрических траекторий и сквозной оптимизации всей межпланетной траектории в этой работе не рассматриваются.

На всех участках траектории учитывается притяжение Солнца, планеты отправления, планеты прибытия и, при необходимости, притяжение других небесных тел. Рассматривается задача оптимизации гелиоцентрического участка траектории с малой тягой между точками либрации планет в рамках математических моделей идеально-регулируемого двигателя ограниченной мощности и двигателя ограниченной тяги. Для оптимизации траекторий используется непрямой подход, основанный на использовании принципа максимума и метода продолжения по гравитационному параметру. Приводится сравнение полученных оптимальных гелиоцентрических траекторий между точками либрации и траекторий с применением метода ТСД.

6.1 Метод решения задачи оптимизации возмущенной гелиоцентрической траектории

В работах [7, 27, 36] приведены методы решения задачи оптимизации межпланетного перелета ОМ-траекторий при использовании метода продолжения по гравитационному

параметру, позволяющий находить экстремали ОМ-задачи с заданной угловой дальностью с нулевым начальным приближением для неизвестных параметров.

Для продолжения решений ОМ-задачи в решения ОТ-задач (гомотопии между ОМ- и ОТ-траекториями), используется следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Omega_{0r} + \tau \cdot \Omega_{pr} + \frac{1-\tau + \tau\delta T}{1-\tau + \tau m p_v} \mathbf{p}_v, \\ \frac{d\mathbf{p}_r}{dt} = -\Omega_{0rr} \mathbf{p}_v - \tau \cdot \Omega_{prr} \mathbf{p}_v, \\ \frac{d\mathbf{p}_v}{dt} = -\mathbf{p}_r, \\ \frac{dm}{dt} = -\tau \cdot \delta \frac{T}{c}, \quad \frac{dp_m}{dt} = \tau \cdot \delta \frac{T}{m^2} p_v. \end{cases} \quad (6.1.1)$$

Эта система при $\tau=0$ совпадает с системой дифференциальных уравнений для невозмущенного межпланетного перелета с идеально-регулируемым двигателем, а при $\tau=1$ – с системой (2.1.21).

Для вычисления правых частей дифференциальных уравнений метода продолжения требуется вычислить частные производные от \mathbf{f} по \mathbf{z} и параметру продолжения τ . Частные производные $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{z}$ и $\partial \mathbf{f} / \partial \tau$ могут быть вычислены с использованием совместного интегрирования дифференциальных уравнений для фазовых и сопряженных переменных с уравнениями для их производных по \mathbf{z} и τ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{z}}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{z}} &= \Omega_{0rr} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}} + \tau \cdot \Omega_{prr} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\tau \mathbf{p}_v}{1-\tau + \tau m p_v} \cdot \left[\frac{\partial \delta}{\partial \mathbf{z}} T - \frac{1-\tau + \tau\delta T}{1-\tau + \tau m p_v} \left(p_v \frac{\partial m}{\partial \mathbf{z}} + m \frac{\partial p_v}{\partial \mathbf{z}} \right) \right] + \\ &+ \frac{1-\tau + \tau\delta T}{1-\tau + \tau m p_v} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \mathbf{z}}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{p}_r}{\partial \mathbf{z}} &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\Omega_{0rr} \mathbf{p}_v) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}} - \Omega_{0rr} \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \mathbf{z}} - \tau \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\Omega_{prr} \mathbf{p}_v) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}} + \Omega_{prr} \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \mathbf{z}} \right], \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \mathbf{z}} &= -\frac{\partial \mathbf{p}_r}{\partial \mathbf{z}}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial m}{\partial \mathbf{z}} &= -\tau \frac{T}{c} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial S}{\partial \mathbf{z}}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial p_m}{\partial \mathbf{z}} &= \tau \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial S}{\partial \mathbf{z}} \frac{T}{m^2} p_v + \tau \cdot \delta \frac{T}{m^2} \cdot \left[\frac{\partial p_v}{\partial \mathbf{z}} - \frac{2 p_v}{m} \frac{\partial m}{\partial \mathbf{z}} \right]. \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau}, \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} &= \Omega_{0rr} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} + \Omega_{pr} + \tau \cdot \Omega_{pr} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} + \frac{\mathbf{p}_v}{1-\tau + \tau m p_v} \left[-1 + \delta T - \frac{(-1 + m p_v) \cdot (1 - \tau + \tau \delta T)}{1 - \tau + \tau m p_v} + \right. \\
&\quad \left. + \tau T \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \tau} - \frac{\tau}{1 - \tau + \tau m p_v} \cdot \left(p_v \frac{\partial m}{\partial \tau} + m \frac{\partial p_v}{\partial \tau} \right) \right] + \frac{1 - \tau + \tau \delta T}{1 - \tau + \tau m p_v} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \tau}, \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{p}_r}{\partial \tau} &= -\frac{\partial}{\partial \tau} (\Omega_{0rr} \mathbf{p}_v) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} - \Omega_{0rr} \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \tau} - \Omega_{pr} \mathbf{p}_v - \tau \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (\Omega_{pr} \mathbf{p}_v) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} + \Omega_{pr} \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \tau} \right], \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \tau} &= -\frac{\partial \mathbf{p}_r}{\partial \tau}, \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial m}{\partial \tau} &= -\delta \frac{T}{c} - \tau \frac{T}{c} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial \tau}, \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial p_m}{\partial \tau} &= \delta \frac{T}{m^2} \cdot p_v + \tau \cdot \frac{\partial \delta}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial \tau} \frac{T}{m^2} p_v + \tau \cdot \delta \frac{T}{m^2} \cdot \left[\frac{\partial p_v}{\partial \tau} - \frac{2 p_v}{m} \frac{\partial m}{\partial \tau} \right].
\end{aligned} \tag{6.1.3}$$

со следующими начальными условиями:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}_{r0}} \right|_{t=t_0} &= 0, \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}_{v0}} \right|_{t=t_0} = 0, \left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{p}_{r0}} \right|_{t=t_0} = 0, \left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{p}_{v0}} \right|_{t=t_0} = 0, \\
\left. \frac{\partial \mathbf{p}_r}{\partial \mathbf{p}_{r0}} \right|_{t=t_0} &= \mathbf{E}, \left. \frac{\partial \mathbf{p}_r}{\partial \mathbf{p}_{v0}} \right|_{t=t_0} = 0, \left. \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \mathbf{p}_{r0}} \right|_{t=t_0} = 0, \left. \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \mathbf{p}_{v0}} \right|_{t=t_0} = \mathbf{E}, \\
\left. \frac{\partial m}{\partial \mathbf{p}_{r0}} \right|_{t=t_0} &= 0, \left. \frac{\partial m}{\partial \mathbf{p}_{v0}} \right|_{t=t_0} = 0, \\
\left. \frac{\partial p_m}{\partial \mathbf{p}_{r0}} \right|_{t=t_0} &= 0, \left. \frac{\partial p_m}{\partial \mathbf{p}_{v0}} \right|_{t=t_0} = 0, \\
\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p_{m0}} \right|_{t=t_0} &= 0, \left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p_{m0}} \right|_{t=t_0} = 0, \left. \frac{\partial \mathbf{p}_r}{\partial p_{m0}} \right|_{t=t_0} = 0, \left. \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial p_{m0}} \right|_{t=t_0} = 0, \left. \frac{\partial p_m}{\partial p_{m0}} \right|_{t=t_0} = 1, \\
\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} \right|_{t=t_0} &= 0, \left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} \right|_{t=t_0} = 0, \left. \frac{\partial \mathbf{p}_r}{\partial \tau} \right|_{t=t_0} = 0, \left. \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \tau} \right|_{t=t_0} = 0, \left. \frac{\partial m}{\partial \tau} \right|_{t=t_0} = 0, \left. \frac{\partial p_m}{\partial \tau} \right|_{t=t_0} = 0.
\end{aligned} \tag{6.1.4}$$

Конечные условия, как и раньше в (2.1.22), следующие:

$$\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f, \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f, p_m(t_f) = 0.$$

Матрица $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{z}$ может быть вычислена с использованием конечных значений производных от фазовых и сопряженных переменных следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}_{r0}} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}_{v0}} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p_{m0}} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{p}_{r0}} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{p}_{v0}} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p_{m0}} \\ \frac{\partial p_m}{\partial \mathbf{p}_{r0}} & \frac{\partial p_m}{\partial \mathbf{p}_{v0}} & \frac{\partial p_m}{\partial p_{m0}} \end{array} \right]_{t=t_f}.$$

Вектор $\partial \mathbf{f} / \partial \tau$ вычисляется аналогично:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau} = \left. \begin{array}{c} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial p_m}{\partial \tau} \end{array} \right|_{t=t_f} .$$

Отметим, что правые части дифференциальных уравнений для сопряженных переменных содержат производные от силовой функции по фазовым переменным, другими словами, производные от возмущающей части функции по фазовым переменным. В рассматриваемой математической модели задачи многих тел эти производные (Ω_{0r} , Ω_{0rr} , Ω_{0rrr} , Ω_{pr} , Ω_{prg} и Ω_{prrr}) достаточно просто представляются в аналитическом виде, поэтому в рассматриваемой задаче не требуется специализированный алгоритм высокоточного вычисления производных от возмущающих ускорений по фазовым координатам.

Вычислительная схема оптимизации гелиоцентрического участка ОТ-траектории между точками либрации следующая:

1) Задается время прохождения точки либрации L_2 системы Земля-Солнце t_{L2} и длительность перелета Δt . Тогда момент прохождения точки либрации L_1 системы планета-Солнце $t_{L1} = t_{L2} + \Delta t$. Вычисляются векторы положения и скорости двух точек либрации \mathbf{r}_{L2} , \mathbf{v}_{L2} , \mathbf{r}_{L1} и \mathbf{v}_{L1} для заданных дат пролета.

2) Методом продолжения по гравитационному параметру вычисляется оптимальная невозмущенная ОМ-траектория. При решении ОМ-задачи задается число целых витков вокруг Солнца.

3) Методом продолжения решается краевая задача (2.1.21), (2.1.22) для вычисления оптимальной возмущенной ОТ-траектории. При этом используются системы дифференциальных уравнений (6.1.1), (6.1.2), (6.1.3) с дополнительными начальными условиями (6.1.4). В качестве начального приближения для начальных значений сопряженных переменных используются значения из решения ОМ-задачи.

6.2 Численные примеры

Верификация численных результатов.

Для проверки корректности используемого подхода была проведена верификация полученных с его помощью численных результатов с результатами, полученными другими авторами.

В работе [4], представлено решение задачи оптимизации возмущенной траектории межпланетного перелета с конечной тягой с использованием программного обеспечения T_3D. В [4] была рассмотрена оптимальная траектория перелета КА от Земли с начальным гиперболическим избытком скорости 2000 м/с до Марса с нулевым гиперболическим избытком скорости. Дата старта принималась равной 25.12.2010, 00:00:00, длительность перелет к Марсу – 877 суток, начальная масса КА – 1000 кг, тяга ЭРДУ – 100 мН и удельный импульс ЭРДУ – 1630 с. В работе [4] учитывались возмущающие ускорения от светового давления и притяжения Земли. Однако, влияние возмущения от светового давления оказалось незначительным, поэтому в процессе верификации мы учитывали только возмущающее ускорение от притяжения Земли. Конечная масса КА, полученная в [4], равна 763.21 кг для невозмущенной задачи и 760.276 кг для возмущенной задачи, а с помощью представленной в этой работе методики – 763.213 кг для невозмущенной задачи и 760.251 кг для возмущенной задачи. Относительная разница в величине конечной массы КА составляет 0.0004% и 0.0033% для невозмущенной и возмущенной задач соответственно. На рисунке 6.2.1 представлены зависимости функций тяги δ (толстые линии) и переключения S (тонкие линии) от времени для невозмущенной (сплошные линии) и возмущенной (пунктирные линии) траекторий.

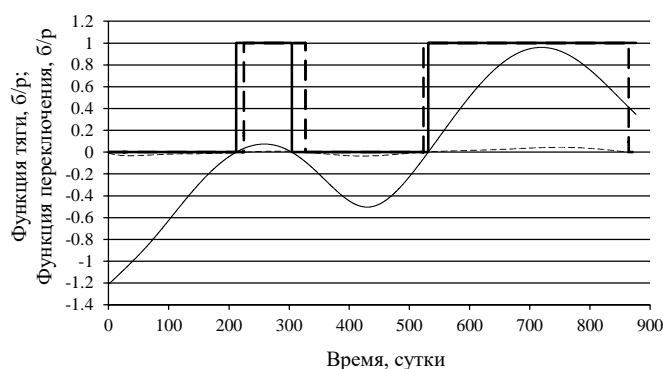


Рисунок 6.2.1. Зависимости функции тяги и переключения от времени для оптимальных невозмущенной и возмущенной траекторий перелета к Марсу.

В [117, 118] были приведены оптимальные траектории перелета к Юпитеру с конечной тягой с использованием метода ТСД с нулевым гиперболическим избытком скорости. Дата старта принималась равной 12.12.2008, 00:00:00, длительность перелета к Юпитеру – 1965 суток, начальная масса КА – 1500 кг, тяга ЭРДУ – 330 мН, удельный импульс ЭРДУ – 3801.29 с. Для этой задачи в работе [117] были получены затраты топлива 508.04 кг, в [118] – 508.7 кг. При использовании приведенной в этой работе методики получены затраты топлива 508.06 кг, что близко к решению из работы [117]. По сравнению с результатом в [118], ЭРДУ выключается на конечном участке траектории в результатах работы [117] и нашем

исследовании. На рисунке 6.2.2 представлены зависимости функций тяги δ (толстые линии) и переключения S (тонкие линии) от времени для рассматриваемой траектории.

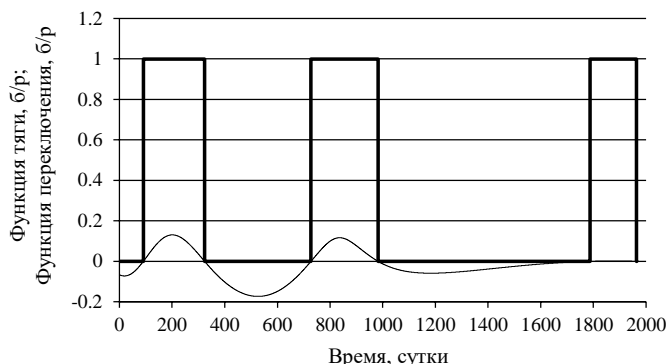


Рисунок 6.2.2. Зависимости функции тяги и переключения от времени для оптимальных траекторий перелета к Юпитеру с использованием метода ТСД.

Определение оптимальной даты отлета КА с использованием метода точечных сфер действия.

Характеристики оптимальных гелиоцентрических участков межпланетных траекторий КА с малой тягой сильно зависят от даты отправления и длительности перелета. Поэтому для сравнения гелиоцентрических траекторий, рассчитанных методом ТСД и рассматриваемым в этом работе методом целесообразно использовать оптимальные даты старта для фиксированной длительности перелета.

Рассмотрим задачу оптимизации гелиоцентрических траекторий с малой тягой к Марсу, Юпитеру и Сатурну. Для поиска оптимальных дат старта проварьируем их с шагом в 1 день в течение синодического периода целевой планеты по отношению к Земле (2.135 года для перелета к Марсу, 1.092 года для перелета к Юпитеру и 1.035 года для перелета к Сатурну). В результате определяется ОМ-траектория с минимальным значением функционала, а ОТ-траектория с минимальным значением затрат характеристической скорости в рассматриваемом диапазоне периода даты отлета. В таблице 6.2.1 представлены основные исходные данные решаемых задач: диапазон рассматриваемых дат отлета КА от Земли, длительность перелета КА, число целых витков гелиоцентрической траектории, начальная масса КА и характеристики ЭРДУ для рассматриваемых вариантов перелета.

Таблица 6.2.1. Исходные данные для решения задачи оптимизации гелиоцентрических траекторий КА с ЭРДУ

Параметры	Земля-Мартс	Земля-Юпитер	Земля-Сатурн
Диапазон дат отлета	1 января 2025 г. – 1 марта 2027 г.	1 января 2022 г. – 1 марта 2023 г.	1 марта 2038 г. – 31 марта 2039 г.
Время перелета, сутки	350	2200	3500
Число целых витков	0	1-2	2
Начальная масса КА, кг	1000	2000	20000
Тяга, мН	350	220	2000
Удельный импульс, с	2000	3000	5000

Сначала найдем оптимальные даты отлета для оптимальных гелиоцентрических траекторий с использованием метода ТСД. Для перелета к Юпитеру рассмотрим оптимальные ОМ-траектории продолжительностью 2200 суток с угловой дальностью от 360 до 1080 градусов. Графики зависимости функционала для таких ОМ-траекторий от даты отлета КА представлены на рисунке 6.2.3. Решения с двумя целыми витками ($N_{rev} = 2$) обозначены черными квадратами, а решения с $N_{rev} = 1$ – серыми кружками.

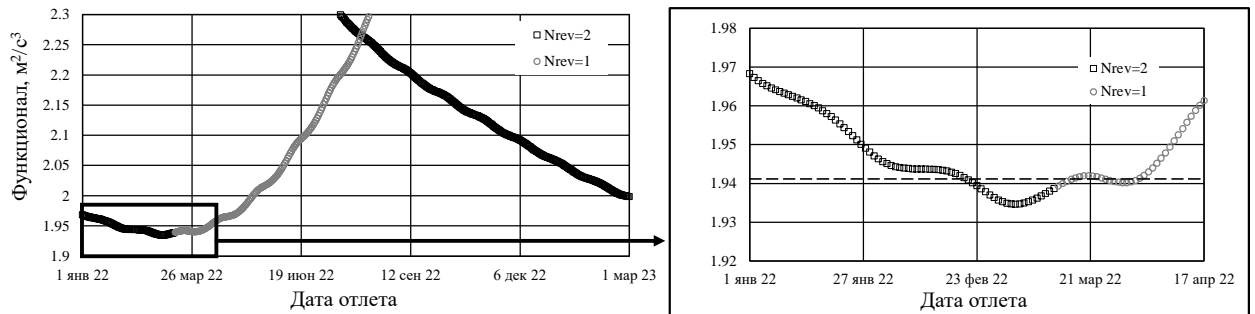


Рисунок 6.2.3. Зависимости функционала от даты отлета для оптимальных ОМ-траекторий перелета Земля-Юпитера, рассчитанных с использованием метода ТСД.

В результате применения метода ТСД вычислена оптимальная дата отлета – 4 марта 2022 года, которой соответствует минимальное значение функционала $J_{LP} = 1.93462 \text{ м}^2/\text{с}^3$. Видно, что, могут существовать 4 разные даты отлета при одинаковом значении функционала, превышающем это минимальное значение (см. пересечения пунктирной линии с кривой на рисунке 6.2.3).

Колебания функционала при изменении даты старта связаны с движением Земли вокруг барицентра системы Земля-Луна в эфемеридной модели движения. На рисунке 6.2.4 представлен график зависимости функционала от даты отлета для этой же задачи при использовании в методе ТСД в качестве точки отлета барицентра системы Земля-Луна вместо центра Земли. На этом графике колебания функционала отсутствуют.

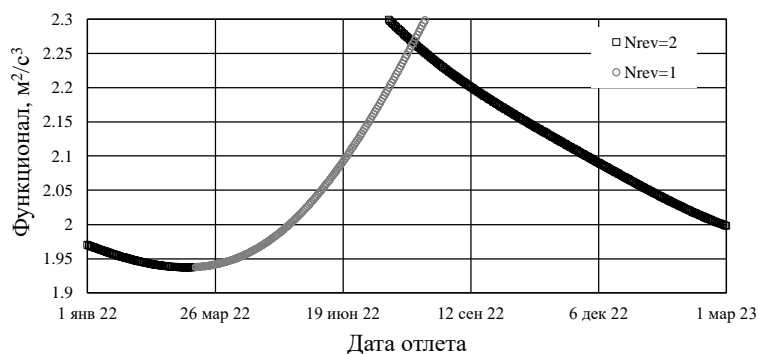


Рисунок 6.2.4. Зависимости функционала от даты отлета для оптимальных ОМ-траекторий перелета от барицентра системы Земля-Луна до Юпитера, рассчитанных с использованием метода ТСД.

Рассмотрим оптимальные ОТ-траектории перелета к Юпитеру на основе использования исходных данных из таблицы 6.2.1. На рисунке 6.2.5 представлены зависимости затрат характеристической скорости перелета V_{ch} к Юпитеру от даты отлета.

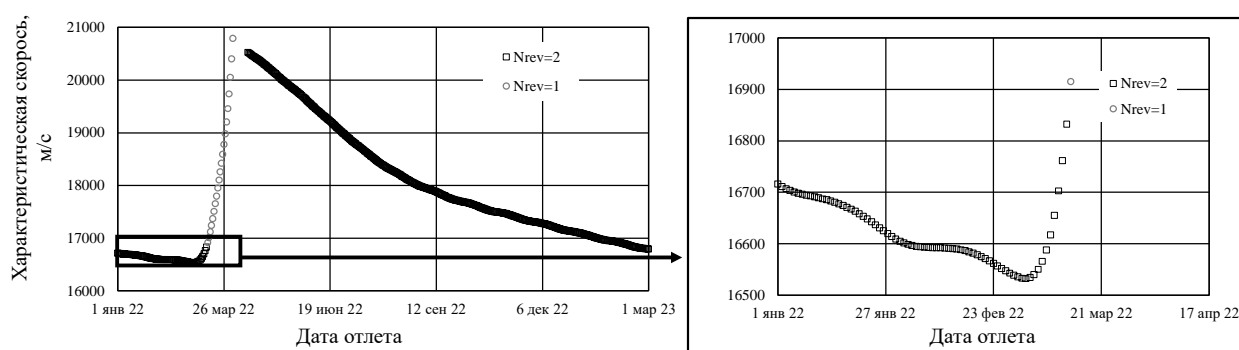


Рисунок 6.2.5. Зависимости характеристической скорости V_{ch} для оптимальных ОТ-траекторий перелета Земля-Юпитера с методом ТСД от даты отлета.

В рассматриваемом синодическом периоде, оптимальная дата отлета, обеспечивающая минимум характеристической скорости V_{ch} – 3 марта 2022 года. Таким образом, при использовании метода ТСД, оптимальная дата отлета для ОМ- и ОТ-траекторий отличается всего на одни сутки.

В качестве следующих примеров рассмотрим оптимальные траектории перелета от Земли к Марсу с длительностью перелета 350 суток и от Земли к Сатурну с длительностью перелета 3500 суток. Рассматриваемая угловая дальность траектории Земля-Марс – менее 360 градусов, а траектории Земля-Сатурн – от 720 до 1080 градусов.

На рисунке 6.2.6 представлены зависимости функционала ОМ-задачи от даты отлета для оптимальных траекторий перелета КА к Марсу и Сатурну при использовании метода ТСД.

На представленных графиках показаны результаты в окрестности их оптимальных значений, а не всего рассматриваемого синодического периода.

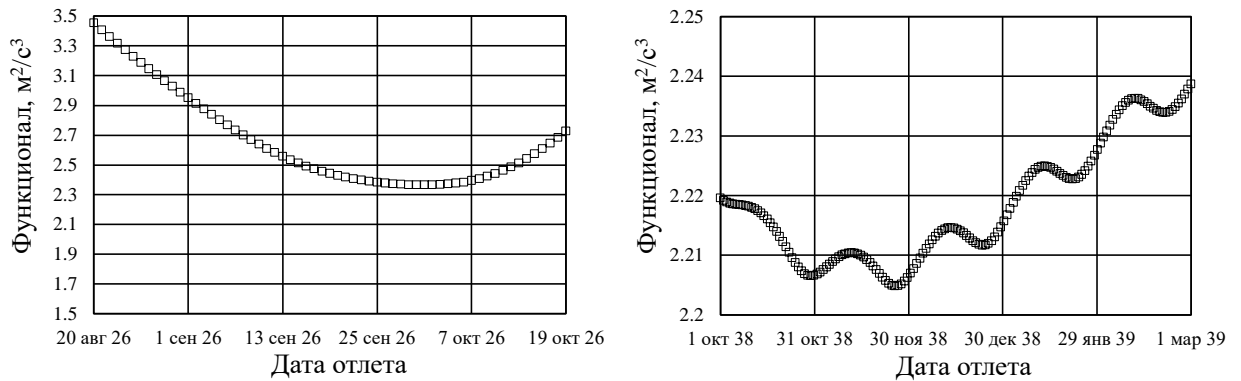


Рисунок 6.2.6. Зависимости функционала от даты отлета для оптимальных ОМ-траекторий перелета Земля-Марс (слева) и Земля-Сатурн (справа) при использовании метода ТСД.

Для гелиоцентрической траектории перелета к Марсу оптимальная дата отлета – 1 октября 2026 года, а величины функционала, соответствующая этой дате $J_{LP} = 2.36546 \text{ м}^2/\text{с}^3$. Для перелета к Сатурну оптимальная дата отлета – 26 ноября 2038 года, а соответствующий этой дате функционал равен $2.20484 \text{ м}^2/\text{с}^3$.

На левом графике рисунке 6.2.6 не очень хорошо виден колебательный характер зависимости функционала от даты отлета из-за большого диапазона изменения функционала на этом графике. При увеличении длительности перелета и количества витков колебательный характер изменения функционала снова становится хорошо заметным. В качестве примера, на рисунке 6.2.7 представлены зависимости функционала ОМ-задачи от даты отлета для перелета Земля-Марс продолжительностью 1300 суток с угловой дальностью от 2 до 3 витков.

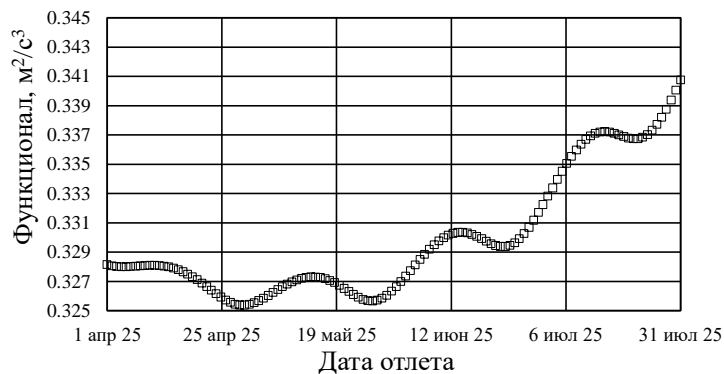


Рисунок 6.2.7. Зависимость функционала от даты отлета для оптимальных ОМ-траекторий перелета к Марсу продолжительностью 1300 суток с угловой дальностью от 2 до 3 витков.

Рассмотрим оптимальные ОТ-траектории перелета к Марсу при заданных удельном импульсе $I_{sp} = 2000$ с и тяге $T = 350$ мН и к Сатурну при $I_{sp} = 5000$ с и тяге $T = 2000$ мН. Начальная масса КА на отлетной от Земли траектории принята равной 1000 кг для перелета к Марсу и 20000 кг для перелета к Сатурну.

На рисунке 6.2.8 представлены зависимости характеристической скорости перелета V_{ch} от даты отлета для рассматриваемых ОТ-траекторий. Интересно, что значение характеристической скорости перелета КА быстро возрастает после прохождения минимального значения, как и для случая перелета к Юпитеру (см. рис 6.2.5).

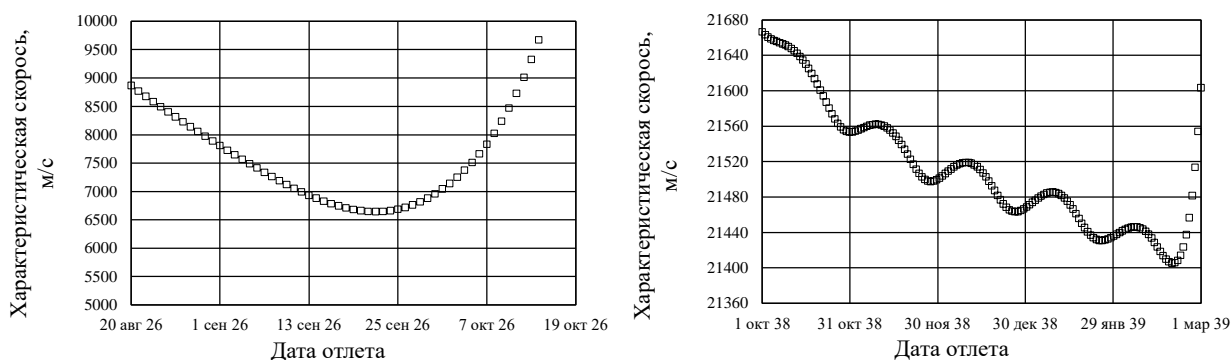


Рисунок 6.2.8. Зависимости характеристической скорости V_{ch} от даты отлета для оптимальных ОТ-траекторий Земля-Марс (слева) и Земля-Сатурн (справа) при использовании метода ТСД.

Оптимальная дата отлета к Марсу для ОТ-траектории – 22 сентября 2026 года, а для перелета к Сатурну – 19 февраля 2039 года. В отличие от перелета к Юпитеру, разница между оптимальными датами отлета для ОМ- и ОТ-траекторий получается существенно больше и составляет 9 суток для перелета Земля-Марс и 85 суток для перелета Земля-Сатурн.

Сравнение оптимальных гелиоцентрических траекторий между точками либрации с результатами оптимизации траекторий с использованием метода точечных сфер действия.

Рассмотрим численные результаты решения задачи оптимизации гелиоцентрического участка межпланетного перелета между точками либрации ESL_2 системы Земля-Солнце и L_1 системы планета-Солнце с учетом притяжения Солнца, Земли и планеты назначения. В таблице 6.2.2 представлены принятые значения гравитационных параметров планет и положения точек либрации L_1 и L_2 системы планета-Солнце в мгновенной синодической системе координат, в которой за единицу расстояния принято текущее гелиоцентрическое удаление планеты.

Таблица 6.2.2. Гелиоцентрическое положение точек либрации системы планета-Солнце

Планет	μ , км ³ ·с ⁻²	x_{L1}	x_{L2}
Земля	398600.435507	0.9900295973	1.010037119
Марс	42828.375816	0.9952516495	1.004763429
Юпитер	126712764.1	0.9333193308	1.069784541
Сатурн	37940584.8418	0.9550308982	1.046359330

Рассмотрим 3 типа оптимальных траекторий перелета между точками либрации, начинающиеся от точки либрации L_2 системы Земля-Солнце (ESL_2): 1) траектории перелета к точке либрации L_1 системы Юпитер-Солнце (JSL_1), 2) траектории перелета к точке либрации L_1 системы Марс-Солнце (MSL_1), 3) траектории перелета к точке либрации L_1 системы Сатурн-Солнце (SSL_1). При вычислении оптимальных траекторий перелета между точками либрации используются даты отлета КА, определенные с помощью метода ТСД при той же длительности перелета.

В результате решения задачи оптимизации возмущенной ОМ-траектории межпланетного перелета с использованием в качестве граничных условий точек либрации получены следующие величины функционала: 1.56095 м²/с³ для перелета ESL_2 – JSL_1 , 1.83791 м²/с³ для перелета ESL_2 – MSL_1 и 1.9153 м²/с³ для перелета ESL_2 – SSL_1 .

Можно сделать вывод, что полученные значения функционала ОМ-траектории перелета между точками либрации уменьшаются по сравнению с траекториями, рассчитанными с использованием метода ТСД во всех рассмотренных случаях перелета (на 19.315 % для перелета Земля-Юпитер, на 22.302 % для перелета Земля-Марс и на 13.132 % для перелета Земля-Сатурн).

На рисунке 6.2.9 показаны рассматриваемые траектории перелета к Юпитеру в проекции на плоскость XY в эклиптической гелиоцентрической системе координат. На левом рисунке представлена оптимальная траектория между точками либрации ESL_2 – JSL_1 , а на правом рисунке – перелета Земля-Юпитер с минимальным значением функционала при использовании метода ТСД. Начальное и конечное положения КА обозначены черными знаками «○» и «×», орбита Земли обозначена серой сплошной линией, а орбита Юпитера – серой пунктирной линией. На рисунке 6.2.10 представлены зависимости реактивного ускорения и углов ориентации реактивного ускорения от времени перелета для обоих решений.

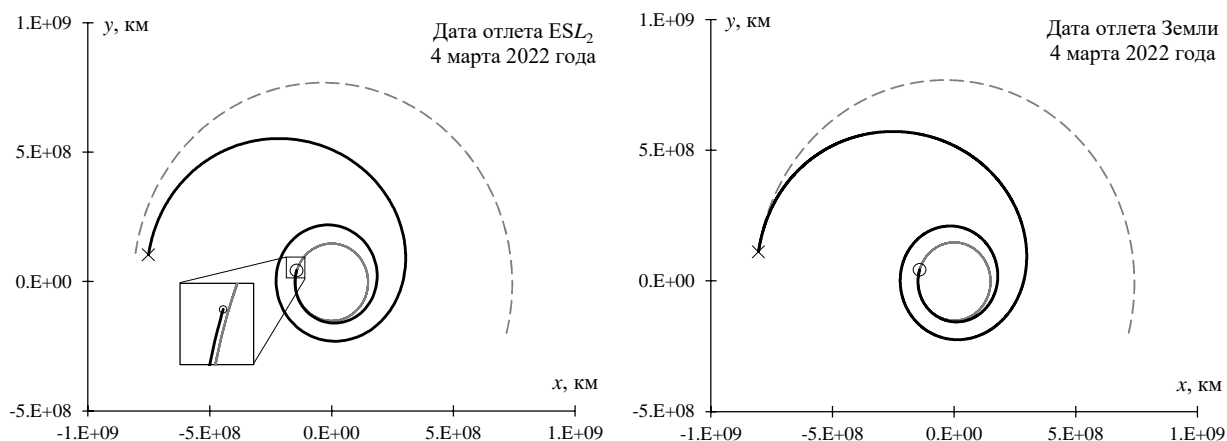


Рисунок 6.2.9. Сравнение ОМ-траекторий межпланетного перелета КА к Юпитеру (слева – возмущенная траектория перелета между точками либрации, справа – траектория, полученная с использованием метода ТСД).

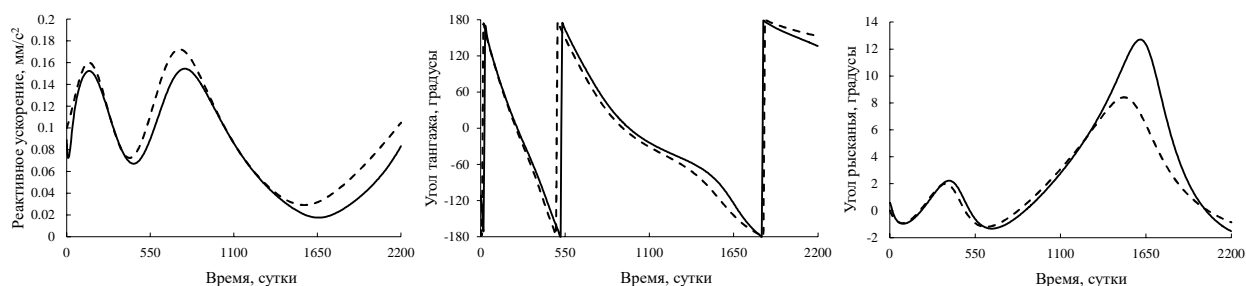


Рисунок 6.2.10. Сравнение программ управления на ОМ-траекториях перелета КА к Юпитеру: пунктирная линия – траектория, рассчитанная с использованием метода ТСД, сплошная линия – возмущенная траектория между точками либрации ESL_2 – JSL_1 .

Для перелета к Юпитеру проводились тестовые расчеты ОМ-траектории межпланетного перелета ESL_2 – JSL_1 с дополнительным учетом притяжения Луны и Марса. Для рассматриваемого варианта учет этих дополнительных возмущений привел к очень малому изменению величины функционала (с 1.56095 до 1.56119 m^2/c^3). В связи с этим можно утверждать, что рассматриваемая модель возмущений (притяжение Земли и Юпитера) дает достаточно точные результаты для оценки эффективности предложенной схемы межпланетного полета КА с малой тягой.

Рассмотрим оптимальные ОТ-траектории перелета от точки либрации ESL_2 системы Земля-Солнце до L_1 системы планета-Солнце. В таблице 6.2.3 приведены результаты оптимизации возмущенных ОТ-траекторий перелета между точками либрации и невозмущенных траекторий перелета к целевой планете, рассчитанных с использованием метода ТСД, для даты отлета, соответствующей минимальному значению характеристической

скорости при расчете с помощью метода ТСД. В таблице 6.2.3 используются следующие обозначения: n_b – количество включений ЭРДУ, T_b – моторное время, m_{fuel} – затраты топлива, V_{ch} – характеристическая скорость перелета.

Таблица 6.2.3. Результаты оптимизации ОТ-траекторий перелета к Юпитеру, Марсу и Сатурну

Тип перелета	Дата отлета	Дата прибытия	Параметры	Перелет между точками либрации	Перелет, рассчитанный с использованием метода ТСД
Земля-Юпитер	3 марта 2022 г.	11 марта 2028 г.	n_b	4	2
			T_b , сутки	1190.4014	1330.7285
			m_{fuel} , кг	769.109	859.7733
			V_{ch} , м/с	14280.706	16531.661
Земля-Марс	22 сентября 2026 г.	7 сентября 2027 г.	n_b	2	2
			T_b , сутки	163.5282	186.2947
			m_{fuel} , кг	252.1295	287.2312
			V_{ch} , м/с	5698.164	6641.029
Земля-Сатурн	19 февраля 2039 г.	25 сентября 2048 г.	n_b	3	2
			T_b , сутки	1863.8517	2007.495
			m_{fuel} , кг	6568.473	7074.691
			V_{ch} , м/с	19521.489	21405.217

На рисунках 6.2.11-6.2.13 представлены проекции на плоскость XY эклиптической гелиоцентрической системы координат приведенных в таблице 6.2.3 возмущенных траекторий перелета между точками либрации, невозмущенных траекторий, рассчитанных методом ТСД, а также зависимости от времени функций переключения (тонкая линия) и тяги (толстая линия) для этих траекторий. Активные участки траектории на этих рисунках обозначены толстыми сплошными линиями, пассивные участки траектории – тонкими сплошными черными линиями, орбиты планет – серыми сплошной и пунктирной линиями. Во всех случаях длительность работы ЭРДУ на перелетах между точками либрации уменьшается по сравнению с длительностью работы ЭРДУ на траекториях, рассчитанных методом ТСД. Видно, что для типа перелета между точками либрации ESL_2 – JSL_1 длительность работы двигательной установки существенно уменьшается. Соответственно, характеристическая скорость перелета уменьшается на 13.616% при перелете к Юпитеру, 14.198% при перелете к Марсу и 8.800% при перелете к Сатурну. Следует отметить существенную разницу в зависимостях функции переключения от времени на траекториях перелета между точками либрации и траекториях, рассчитанных методом ТСД, приводящую к изменению числа включения ЭРДУ для перелетов к Юпитеру и Сатурну.

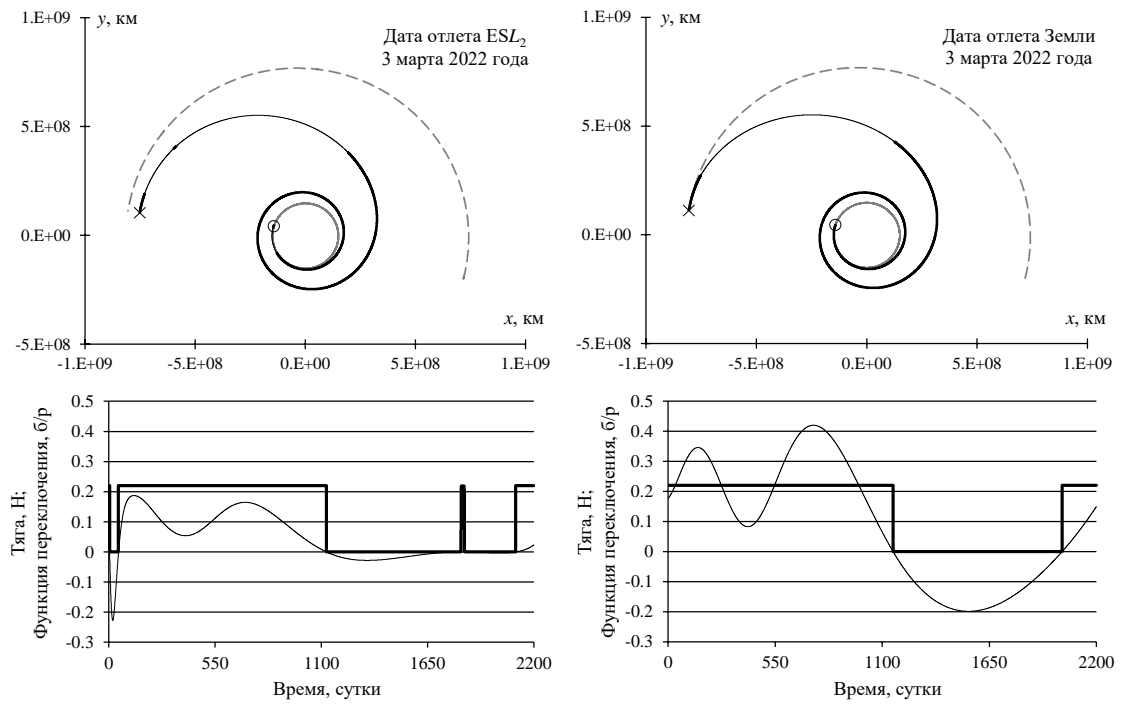


Рисунок 6.2.11. Функции тяги (толстые линии) и переключения (тонкие линии) от времени полета и оптимальные ОТ-траектория для перелета между ESL_2 – JSL_1 (слева) и для перелета к Юпитеру с методом ТСД (справа).

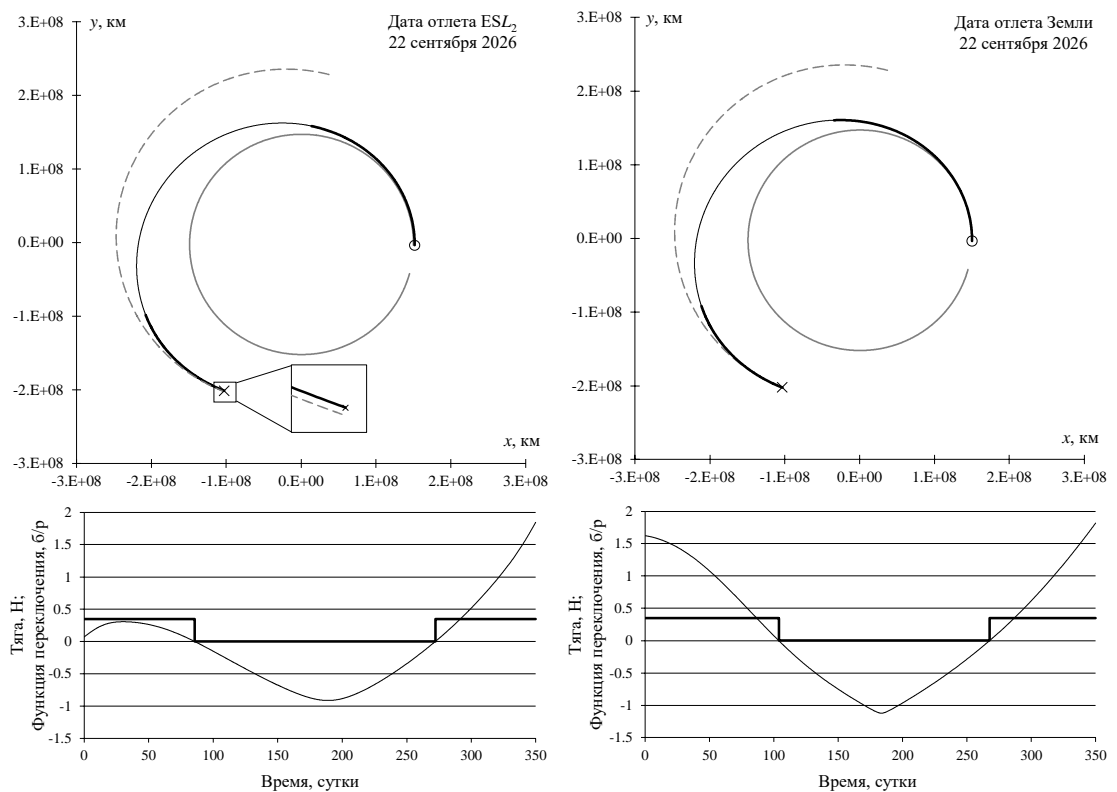


Рисунок 6.2.12. Функции тяги (толстые линии) и переключения (тонкие линии) от времени полета и оптимальные ОТ-траектория для перелета между ESL_2 – MSL_1 (слева) и для перелета к Марсу с методом ТСД (справа).

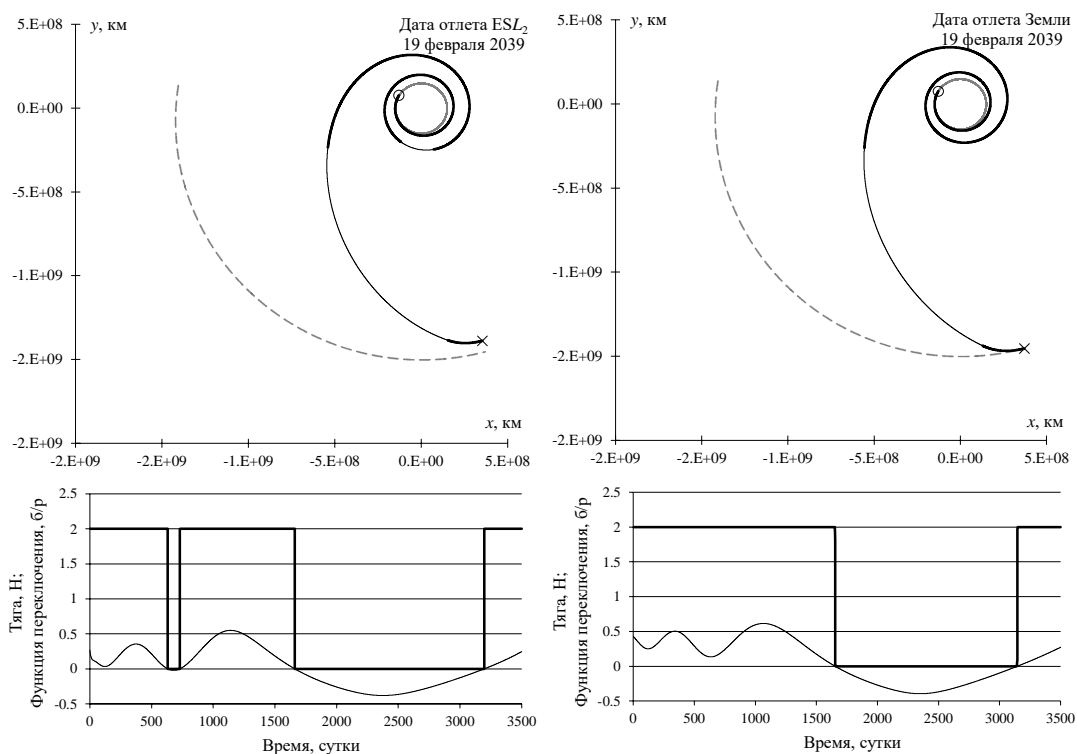


Рисунок 6.2.13. Функции тяги (толстые линии) и переключения (тонкие линии) от времени полета и оптимальные ОТ-траектория для перелета между ESL_2 – SSL_1 (слева) и для перелета к Сатурну с методом ТСД (справа).

Оптимизация даты отлета при расчете возмущенной траектории перелета между точками либрации приводит к дальнейшему сокращению затрат характеристической скорости. Зависимость характеристической скорости от даты отлета для траектории перелета к Марсу (от ESL_2 до MSL_1) приведена на рисунке 6.2.14. Оптимальная дата отлета для такого перелета – 1 октября 2026 года, при этом затраты характеристической скорости составляют 5475.456 м/с. При расчете траектории перелета к Марсу с этой датой отлета методом ТСД затраты характеристической скорости составляют 7040.032 м/с, то есть затраты характеристической скорости на возмущенной траектории перелета между точками либрации меньше на 22.224% по сравнению с затратами характеристической скорости на невозмущенной траектории перелета к Марсу, рассчитанной с использованием метода ТСД. Если для сравнить траектории с оптимальными датами старта (1 октября 2026 года, $V_{ch} = 5475.456$ м/с для перелета между точками либрации и 22 сентября 2026 года, $V_{ch} = 6641.029$ м/с для перелета, рассчитанного с использованием метода ТСД), то выигрыш перелета между точками либрации в характеристической скорости составит 17.551%.

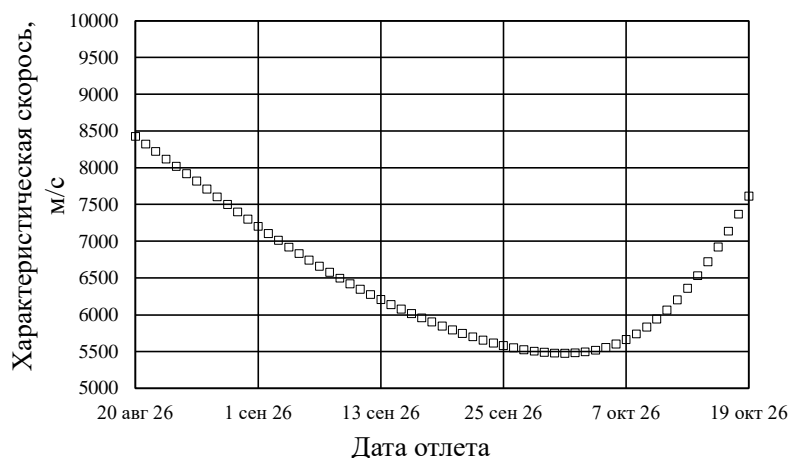


Рисунок 6.2.14. Зависимость характеристической скорости V_{ch} от даты отлета для оптимальных возмущенных ОТ-траекторий перелета между точками либрации ESL_2 и MSL_1 .

6.3 Заключение по разделу

В этом разделе рассмотрена задача оптимизации гелиоцентрического участка траектории межпланетного перелета при использовании схемы полета со стыковкой планетоцентрических и гелиоцентрического участков траектории в точках либрации L_2 системы Земля-Солнце и L_1 системы планета назначения-Солнце с учетом притяжения Солнца, Земли и планеты назначения. Представлен метод оптимизации возмущенной гелиоцентрической траектории с конечной тягой с использованием эфемеридной модели движения небесных тел для вычисления возмущающих ускорений. Показана возможность сокращения требуемых затрат характеристической скорости по сравнению с оценками, полученными с применением метода точечных сфер действия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках настоящей диссертационной работы были рассмотрены следующие фундаментальные проблемы оптимизации возмущенных траекторий КА с ЭРДУ:

1. Проблема выбора начального приближения (высокая чувствительность дифференциальных уравнений оптимального движения к вариациям неизвестных параметров принципа максимума).
2. Проблема существования решения.
3. Многоэкстремальность в задаче оптимизации многовитковых траекторий КА.
4. Недифференцируемость (существование угловых точек в зависимости невязок краевой задачи принципа максимума от ее неизвестных параметров).
5. Проблема оптимизации возмущенных траекторий при использовании сложных алгоритмов вычисления возмущающих ускорений.
6. Проблема оптимизации точки стыковки разных участков траекторий (трудность обеспечения вычислительной устойчивости методов решения задач оптимизации траекторий со сменой центрального притягивающего центра).

Для преодоления этих проблем в диссертационной работе предложен подход к оптимизации траекторий космических аппаратов с конечной тягой с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета, основанный на последовательном решении ОМ- и ОТ-задач. Для вывода необходимых условий оптимальности используется принцип максимума, а краевая задача принципа максимума редуцируется к задаче Коши с помощью метода продолжения. Предложен метод, основанный на решении ОМ-задачи с последующим продолжением оптимальной ОМ-траектории в оптимальную ОТ-траекторию. Для решения ОМ-задачи также используется метод продолжения, причем в качестве начального приближения используются нулевые начальные значения сопряженных переменных.

Предложен метод диагностики существования ОТ-траектории с заданным значением тяги с помощью решения T_{\min} -задачи. T_{\min} -траектория и минимальная тяга также вычисляется продолжением из оптимальной ОМ-траектории. Таким образом, предложенный метод позволяет автоматизировать процесс вычисления оптимальной ОТ-траектории с фиксированной угловой дальностью и оптимальным временем перелета. В процессе вычислений проводится проверка существования решения и, в случае его отсутствия возможна выработка рекомендаций для изменения исходных данных (тяги или угловой дальности перелета) до значений, при которых решение существует.

Рассмотрена задача оптимизации перелета с фиксированной угловой дальностью и свободным временем. В такой постановке, судя по имеющемуся опыту вычислений,

существует только одно значение длительности перелета, удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности в рамках одного семейства оптимальных решений (например, C - или E -траекторий). Это позволяет избежать части вычислительных трудностей, связанных с существованием множества локально-оптимальных значений угловой дальности перелета в более традиционной постановке задачи оптимизации траекторий, при которой фиксируется время перелета, а угловая дальность принимается свободной. Для упрощения постановки задачи в качестве независимой переменной вместо времени используется вспомогательная долгота. Приведена полная система необходимых условий оптимальности для вариантов с фиксированным и свободным значением начальной истинной долготы КА.

Для преодоления вычислительной неустойчивости, связанной с наличием угловых точек в зависимости невязок краевой задачи от ее неизвестных параметров при одновременном обращении в ноль функции переключения и ее производной по времени, используется сглаживание релейной функции тяги.

Одной из проблем при оптимизации возмущенных траекторий с использованием принципа максимума является необходимость точного вычисления производных от возмущающих ускорений по фазовым координатам. В высокоточных моделях движения возмущающие ускорения вычисляются по некоторым сложным алгоритмам, поэтому представить выражения для их производных в замкнутой форме практически не представляется возможным. Ситуация осложняется тем, что для решения краевой задачи принципа максимума требуется вычисление производных от невязок краевой задачи по начальным значениям сопряженных переменных. Так как эти невязки зависят от конечных значений фазовых и сопряженных переменных, которые через дифференциальные уравнения оптимального движения зависят от производных от возмущающих ускорений по фазовому вектору, то фактически для вычисления производных от невязок по начальным значениям сопряженных переменных требуется вычисление вторых производных от возмущающих ускорений по фазовому вектору и начальным значениям сопряженным переменным. Для решения задачи вычисления таких вторых производных с высокой точностью в этой работе развивается метод, основанный на использовании комплексных дуальных чисел.

Представлены теоретические основы и метод оптимизации возмущенных траекторий с конечной тягой с использованием комплексных дуальных чисел. Предлагаемый метод позволяет автоматизировать подготовку математической модели, необходимой для оптимизации возмущенной траектории при использовании принципа максимума и метода продолжения, с помощью автоматизации вычисления производных от возмущающих ускорений по фазовому вектору с использованием комплексных дуальных чисел с

последующим вычислением требуемых производных от вектора невязок краевой задачи методом комплексного шага.

В диссертационной работе предложен подход к решению задачи сквозной оптимизации траектории перелета к Луне с малой тягой на основе использования принципа максимума, метода продолжения и канонического преобразования в точке стыковки геоцентрического и селеноцентрического участков траектории. Получены необходимые условия оптимальности точки стыковки геоцентрического и селеноцентрического участков траектории и сформулирована краевая задача, вытекающая из применения принципа максимума к рассматриваемой задаче сквозной оптимизации перелета между окололунной и околоземной орбитами.

В диссертационной работе рассмотрены задачи оптимизации возмущенных траекторий космического аппарата межорбитального перелета, перелета к окололунным орбитам и точкам либрации системы Земля-Луна и межпланетного перелета.

Межорбитальные перелеты.

Представлены результаты применения нового метода оптимизации возмущенных траекторий межорбитального перелета КА с конечной тягой. На примере оптимизации траекторий перелета между высокими эллиптическими орбитами, геопереходной и геостационарной орбитами и низкими околоземными орбитами показана возможность использования разработанного метода для оптимизации возмущенных траекторий КА с ЭРДУ с угловой дальностью до 500 витков. Проведено сравнение полученных оптимальных возмущенных траекторий с результатами оптимизации возмущенных траекторий, полученными другими авторами, и показана близость этих результатов. Показано, что используемая в настоящей диссертационной работе формулировка задачи оптимизации траекторий с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета обеспечивает вычислительную устойчивость численного метода и позволяет улучшить показатели качества решения за счет выполнения необходимых условий оптимальности по времени перелета. Использование алгебры комплексных дуальных чисел для вычисления требуемых вторых производных от возмущающих ускорений позволило существенно упростить задачу подготовки математической модели оптимального движения КА и получить оптимальные траектории с учетом более сложного состава возмущающих ускорений, чем в известных в литературе примерах с использованием непрямых методов оптимизации.

Перелеты к Луне к окололунным орбитам и точкам либрации системы Земля-Луна.

Представлены численные результаты оптимизации перелетов с эллиптической околоземной орбиты на круговую и эллиптическую окололунную орбиты, а также с круговой околоземной орбиты на гало-орбиты вокруг точек либрации EML_1 и EML_2 . Проведено

сравнение траекторий с квазиоптимальным и оптимальным управлением. В рассмотренных примерах, при одинаковой угловой дальности, оптимальное управление обеспечивает возможность уменьшения величины тяги на 6-8% по сравнению с квазиоптимальным управлением.

Представлены численные результаты оптимизации траектории перелета к Луне КА с идеально-регулируемым двигателем, с минимальной тягой и с ограниченной тягой. Показана возможность использования разработанного метода для оптимизации перелетов с эллиптической околоземной орбиты на круговую окололунную орбиты с угловой дальностью более 100 витков.

Некоторые численные результаты, представленные в этой диссертационной работе, могут прояснить поведение и качественные характеристики оптимальных траекторий перелета к Луне. Например, минимальное расстояние от Земли на последних витках геоцентрического участка и от Луны на первых витках селеноцентрического участка уменьшалось по мере уменьшения величины тяги (и соответствующего увеличения угловой дальности) на траекториях с минимальной тягой. Численно продемонстрировано не только увеличение конечной массы КА, но и увеличение оптимальной длительности перелета с увеличением величины тяги при фиксированной угловой дальности. Обнаружено, что активный участок ОТ-траектории в окрестности точки либрации EML_1 смещается против орбитального движения КА по мере увеличения тяги.

В результате проведенных вычислений показано, что оптимизация точки стыковки геоцентрического и селеноцентрического участков траектории приводит не только к уменьшению функционала (в рассмотренном примере – на 7.7%-9.8% при суммарной угловой дальности 5-35 витков), но и к уменьшению характеристической скорости перелета (на 8.6%-9.7%) и оптимальной длительности перелета (на 11.0%-23.6%). Показано существенное отличие форм траекторий с оптимальной точкой стыковки и со стыковкой в точке либрации EML_1 . Оптимальная точка стыковки может быть значительно удалена от точки либрации EML_1 (на 2560-17760 км в рассмотренных численных примерах), а скорость КА в этой точке может существенно отличаться от скорости точки либрации (на 218-267 м/с). Показано, что с увеличением суммарного числа витков оптимальная точка стыковки приближается к EML_1 , а скорость КА в оптимальной точке стыковке относительно скорости EML_1 асимптотически стремится к нулю с увеличением угловой дальности перелета.

Межпланетные перелеты.

Представлены численные примеры оптимальных траекторий между точкой либрации L_2 системы Земля-Солнце и точками либрации L_1 систем Марс-Солнце, Юпитер-Солнце, Сатурн-Солнце. Проведено сравнение полученных результатов с оптимальными решениями,

полученными с использованием метода точечных сфер действия. В рассмотренных случаях оказалось, что затраты характеристической скорости на перелет между точками либрации существенно (на 8-22%) меньше оценки характеристической скорости перелета, которую можно получить с использованием метода ТСД, причем чем ближе орбита планеты к орбите Земли, тем больше относительная разница в затратах характеристической скорости.

Для окончательной оценки эффективности предложенной схемы межпланетного перелета с малой тягой, необходимо провести оптимизацию планетоцентрических участков между начальной околоземной орбитой и точкой либрации L_2 системы Земля-Солнце, а также между точкой либрации L_1 системы планета назначения – Солнце и конечной орбитой вокруг планеты, после чего сравнить полученные результаты с результатами, полученными при использовании метода точечных сфер действия. Для сквозной оптимизации траектории перелета между начальной орбитой вокруг Земли и конечной орбитой вокруг планеты назначения можно использовать метод, аналогичный представленному в разделе 5.4, который использует траекторию со стыковкой в точке либрации в качестве начального приближения для траектории с оптимальной точкой стыковки отдельных участков.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

CC – декартовы координаты;

CDNAD – автоматическое дифференцирование с использованием комплексных дуальных чисел;

CDP – комплексная дуальная часть комплексного дуального числа;

CP – комплексная часть комплексного дуального числа;

DP – дуальная часть дуального числа;

EME – геоэквиаториальная инерциальная система координат;

RP – вещественная часть дуального числа;

ICRS – International Celestial Reference System;

ITRS – International Terrestrial Reference System;

LME – селеноэквиаториальная инерциальная система координат;

MEE – Modified equinoctial elements;

SOFA – Software of Fundamental Astronomy;

UTC – Universal Time Coordinated;

ВЭО – высокая эллиптическая орбита;

ГСО – геостационарная орбита;

ГПО – геопереходная орбита;

КА – космический аппарат;

КОУСОС – квазиоптимальное управление с обратной связью;

ОМ – ограниченная мощность;

ОТ – ограниченная тяга;

ЭРДУ – электроракетная двигательная установка;

a – большая полуось;

ω – аргумент перицентра;

μ – гравитационный параметр притягивающего центра;

Ω – долгота восходящего узла;

v – истинная аномалия;

τ – параметр продолжения;

ψ – угол рысканья;

ϑ – угол тангажа;

δ – функция дросселирования;

S – функция переключения;

\mathbf{a}_p – вектор возмущающего ускорения;

a_t, a_r, a_n – трансверсальная, радиальная и бинормальная проекции реактивного ускорения;

H – гамильтониан;

p, e_x, e_y, i_x, i_y, L – модифицированные равноденственные элементы;

i – наклонение;

e – эксцентриситет;

K – вспомогательная долгота;

L_K – отклонение истинной долготы от K ;

m – масса космического аппарата;

T – тяга;

J – функционал;

ε – нильпотентный элемент;

\mathbf{r} – вектор положения;

\mathbf{v} – вектор скорости;

\mathbf{f} – вектор-функция;

\mathbf{z} – вектор неизвестных параметров краевой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета с малой тягой. М.: Наука, 1966.
2. Shirazi A., Ceberio J., Lozano J. Spacecraft trajectory optimization: a review of models, objectives, approaches and solutions. *Progress in Aerospace Sciences*. August 2018. P. 76-98.
3. Morante D., Rivo M.S., Soler M. A Survey on Low-Thrust Trajectory Optimization Approaches. *Aerospace*, 8(3), 88, 2021, pp. 1-39.
4. Dargent T. Automatic Minimum Principle Formulation for Low Thrust Optimal Control in Orbit Transfers using Complex Numbers. 2009. International symposium on space flights dynamics, Toulouse, France, 9 p.
5. Петухов В.Г. «Оптимизация возмущенных траекторий с конечной тягой с использованием дуальных чисел», XIX международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация», г. Анапа, Краснодарский край, Россия, 29 июня – 6 июля 2014 г.
6. Николичев И.А. «Оптимизация многовиткового межорбитального перелета космического аппарата с электроракетной двигательной установкой с учетом действия возмущений». Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.07.09 «Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов», М., МАИ, 2017, 283 с.
7. Petukhov V.G. One numerical method to calculate optimal power- limited trajectories. *IEPC-95-221*, 1-8 (1995).
8. Давиденко Д.Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений. *ДАН СССР*. 1953, т. 88, № 4, с. 601-602.
9. Гавурин М.К. Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов. *Известия вузов. Математика*. 1958. № 5, с. 18-31.
10. Холодниок М., Клич А., Кубичек М. и др. Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Мир, 1991.
11. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. М.: Мир, 1982.
12. Jiang F., Baoyin H., Li J. Practical techniques for low-thrust trajectory optimization with homotopic approach. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 35(1), 245–258 (2012).
13. Haberkorn T., Martinon P., Gergaud J.: Low thrust minimum-fuel orbital transfer: a homotopic approach. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 27, No. 6, 1046-1060 (2004).
14. Chi Z., Yang H., Chen S. et al. Homotopy method for optimization of variable-specific-impulse low-thrust trajectories. *Astrophysics and Space Science*, Vol. 362, No. 11, 1-13 (2017).

15. Lantoine G., Russell R., Dargent T. Using multicomplex variables for automatic computation of high-order derivatives, *ACM Transactions on Mathematical Software*, 38 (2012) 1-21.
16. Fike J.A., Alonso J.J. The Development of Hyper-Dual Numbers for Exact Second-Derivative Calculations. *AIAA 2011-886*, 2011, 17 p.
17. Messelmi F Dual-complex numbers and their holomorphic functions, HAL archives-ouvertes.fr, Centre Pour la Comm. Scientifique Directe (2015) 1-11.
18. Petukhov V.G. A new approach to low-thrust perturbed trajectory optimization based on the use of complex dual numbers. *IAC 2020 Congress Proceedings, 71st International Astronautical Congress (IAC) – IAC CyberSpace Edition, 12–14 October 2020*, 10 p.
19. Yoon S.W., Petukhov V.G. Perturbed low-thrust trajectory optimization using the algebra of complex dual numbers, in: *8th International Conference on Astrodynamics Tools and Techniques, 2021*, pp. 1–15.
20. Петухов В.Г., Юн Сон Ук Применение алгебры комплексных дуальных чисел при решении задачи оптимизации возмущенных траекторий с малой тягой. *XLV Академические чтения по космонавтике посвященные памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства М., изд-во МГТУ им. Баумана, 2021, т. 3, с. 115-116.*
21. Petukhov V.G., Ivanyukhin A.V., Popov G.A., Testoyedov N.A., Yoon S.W. Optimization of finite-thrust trajectories with fixed angular distance, *Acta Astronautica*, 197 (2022) 354–367.
22. Petukhov V.G., Yoon S.W. Optimization of perturbed spacecraft trajectories using complex dual numbers. Part 1: Theory and method. *Cosmic Research*, 59 (5) (2021) 401–413.
23. Petukhov V.G., Yoon S.W. Optimization of perturbed spacecraft trajectories using complex dual numbers. Part 2: Numerical Results. *Cosmic Research*, 59 (6) (2021) 517–528.
24. Graham K.F., Rao A.V.: Minimum-time trajectory optimization of low-thrust earth-orbit transfers with eclipsing. *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 53, No. 2, 289-303 (2016).
25. Betts J.T.: Optimal low-thrust orbit transfers with eclipsing. *Optimal Control Applications and Methods*, Vol. 36, No. 2, 218–240 (2015).
26. Schaff S.: Low-Thrust Multi-Revolution Orbit Transfers. In: Fasano G., Pinter J.D. (eds.), *Space Engineering, Springer Optimization and Its Applications 114*, Springer International Publishing Switzerland, 337–367 (2016).
27. Петухов В.Г. Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой. *Космические исследования*, т. 50, № 3, 2012, с. 258–270.
28. Петухов В.Г. Применение угловой независимой переменной и ее регуляризирующего преобразования в задачах оптимизации траекторий с малой тягой. *Космические исследования*, т. 57, № 5, 2019, с. 373–385.

29. Bertrand R., Epenoy R. New Smoothing Techniques for Solving Bang-Bang Optimal Control Problems-Numerical Results and Statistical Interpretation. *Optimal Control Applications and Methods*, Vol. 23, No. 4, 171–197 (2002)
30. Taheri E., Kolmanovsky I., Atkins E. Enhanced Smoothing Technique for Indirect Optimization of Minimum-Fuel Low-Thrust Trajectories. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. Vol. 39, No. 11, 2500-2511 (2016)
31. Restrepo R.L., Russell R.P. Shadow Trajectory Model for Fast Low-Thrust Indirect Optimization. *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 54, No. 1, 44-54 (2017)
32. Petukhov V.G. Minimum-Thrust Problem and Its Application to Trajectory Optimization with Thrust Switchings. IAC-13-C1.6.2, 1-9 (2013)
33. Иванюхин А.В., Петухов В.Г. Задача минимизации тяги и ее приложения. *Cosmic Research*, Vol. 53, No. 4, 300-310 (2015)
34. Walker M., Ireland B., Owens J. A set of modified equinoctial elements. *Celestial Mechanics* 36, 38 (1985, 1986) 409–419, 391–392.
35. Eneev T.M., Egorov V.A., Efimov G.B., et al. Some Methodical Problems of Low-Thrust Trajectory Optimization. Preprint of Keldysh Institute of Applied Mathematics, 110, 1-24 (1996)
36. Петухов В.Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения. *Космические исследования*, т. 46, № 3, 2008, с. 224–237.
37. Петухов В.Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами. *Космические исследования*, т. 42, № 3, 2004, с. 260–279.
38. Ахметшин Р.З. Плоская задача оптимального перелета космического аппарата с малой тягой с высокоэллиптической орбиты на геостационар. *Космические исследования*, т. 42, № 3, 2004, с. 248–259.
39. Geffroy S. Generalisation des techniques de moyennation en contrle optimal - Application aux problemes de transfert et rendez-vous orbitaux pousse faible, These de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse (1997)
40. Geffroy S., Epenoy, R. Optimal Low-Thrust Transfers with Constraints-Generalization of Averaging Techniques, *Acta Astronautica*, Vol. 41, No. 3, 133–149 (1997)
41. Taheri, E., Junkins, J.L. How Many Impulses Redux. *The Journal of the Astronautical Sciences*. Vol. 67, No. 2, 257–334 (2020)
42. Oberle H.J., Taubert K. Existence and Multiple Solutions of the Minimum-Fuel Orbit Transfer Problem. *Journal of optimization theory and applications*, Vol. 95, No. 2, 243-262 (1997)

43. Ivanyukhin A.V., Petukhov V.G. Optimization of Multi-revolution Limited Power Trajectories Using Angular Independent Variable. *Journal of Optimization Theory and Applications*, available online 28 April 2021, 25 pp.
44. Irving J.H.: Low thrust flight: variable exhaust velocity in gravitational fields. In Seifert H.S. (eds.): *Space Technology*, John Wiley and Sons Inc., New York (1959)
45. Edelbaum T.N., Pines S.: Fifth and Sixth Integrals for Optimum Rocket Trajectories in a Central Field. *AIAA Journal*, Vol. 8, No. 7, 1201-1204 (1970)
46. Ivanyukhin A.V. Existence domain for solutions of optimal control problems for bounded-thrust spacecrafts, *Journal of Mathematical Sciences*, 239 (6) (2019) 817–839.
47. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. *Solving ordinary differential equations. Nonstiff problems.* Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1993)
48. Chen H. S., Stadtherr M. A. A modification of Powell's dogleg method for solving systems of nonlinear equations // *Computer & Chemical Engineering*, Vol.5, 3, 1981, p. 143-150.
49. Lyness, J.N., Moller, C.B. Numerical differentiation of analytic functions, *SIAM J. Numer. Anal.*, 4, 1967, pp. 202-210.
50. Lyness, J.N. Numerical algorithms based on the theory of complex variables, *Proc. ACM 22nd Nat. Conf.*, Thompson Book Co., Washington, DC, 1967, pp. 124-134.
51. Squire W., Trapp G. Using complex variables to estimate derivatives of real functions. *SIAM Rev.*, 40(1), 1998, pp. 110-112.
52. Martins J.R.R.A., Sturdza P., and Alonso J.J. The Connection Between the Complex-Step Derivative Approximation and Algorithmic Differentiation. AIAA-2001-0921, 2001, 11 p.
53. Yu W., Blair M. DNAD, a Simple Tool for Automatic Differentiation of Fortran Codes Using Dual Numbers. *Computer Physics Communications Preprint*, 5 February 2013, 16 pp.
54. Семенов К.К. Автоматическое дифференцирование функций, выраженных программным кодом. *Изв. ВУЗов. Приборостроение*. 2011. Т. 54, № 12, с. 34-40.
55. Fike J.A., Jongsma S., Alonso J.J. et al. Optimization with Gradient and Hessian Information Calculated Using Hyper-Dual Numbers. AIAA 2011-3807, 2011, 19 p.
56. Fike J. A. Multi-objective optimization using hyper-dual numbers. PhD thesis (2013).
57. Яглом И.М. *Комплексные числа и их применение в геометрии*. М.: Физматгиз, 1963, 192 с.
58. Cheng, H.H. and Thompson, S. (1996): Dual polynomials and complex dual numbers for analysis of spatial mechanisms. *Proc. 1996 ASME Design Engineering Technical Conference and Computers in Engineering Conference*. August 18–22, Irvine, California.
59. The SOFA Software Libraries. International Astronomical Union. Division 1: Fundamental Astronomy, Commission 19: Rotation of the Earth, Standards of Fundamental Astronomy Board. Release 9, 2012 March 1, 252 p.

60. Standish E.M. JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/LE405, JPL Interoffice Memorandum, IOM 312, F-98-048, Pasadena, 1998.
61. Lemoine F.G. et al. The development of the joint NASA GSFC and National Imagery and Mapping Agency (NIMA) geopotential model EGM96. NASA/TP-1998-206861, GSFC. 1998.
62. Petropoulos A., Tarzi Z.B., Lantoine G. et al. Techniques for designing many-revolution electric-propulsion trajectories,” AAS Paper 14-373, AAS Space Flight Mechanics Meeting, Santa Fe, New Mexico, 2014.
63. Zubin P. Olikara, “Framework for optimizing many-revolution low-thrust transfers,” Space Flight Mechanics Conference, Paper AAS-18-332, Snowbird, Utah, USA, 19-23 Aug., 2018.
64. Aziz D. Low-Thrust Many-Revolution Trajectory Optimization. PhD thesis, University of Colorado, 2018.
65. Dargent T. “Averaging Technique in T_3D an Integrated Tool for Continuous Thrust Optimal Control in Orbit Transfers,” Space Flight Mechanics Conference, Paper AAS-14-158, Santa Fe, New Mexico, USA, 26-30 Jan., 2014.
66. Foing B.H., Racca G.D., Marini A., et al. SMART-1 after lunar capture: First results and perspectives, *J. Earth Syst. Sci.*, 2005, vol. 114, no. 6, pp. 687–697.
67. McGuire M.L., Burke L.M., McCarty S.L., et al. Low thrust cis-lunar transfers using a 40 kW-class solar electric propulsion spacecraft, AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Washington, 2017, AAS 17-583.
68. Легостаев В. П., Лопота В. А., Синявский В. В. Перспективы и эффективность применения космических ядерно-энергетических установок и ядерных электроракетных двигательных установок // *Космическая техника и технологии*. – 2013. – №. 1 (1). – С. 6-17.
69. Kluever C.A., Pierson B.L. Optimal Low-Thrust Earth-Moon Transfers with a Switching Function. *The Journal of Astronautical Sciences*, 42(3), p. 269-284, July-September 1994.
70. Kluever C.A., Pierson B.L. Optimal Low-Thrust Three-Dimensional Earth-Moon Trajectories. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 18(4), July 1995.
71. Ozimek M.T., Howell K.C. Low-Thrust Transfers in the Earth–Moon System, Including Applications to Libration Point Orbits. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 33, No. 2, March–April 2010, 17 p.
72. Mingotti G., Topputo F., and Bernelli-Zazzera F. Low-energy, low-thrust transfers to the Moon, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2009, vol. 105, pp. 61–74.
73. Shimmin R. Trajectory design for a very-low-thrust lunar mission, PhD Thesis, University of Adelaide, 2012, pp. 1–204.
74. Singh, S.K., Anderson, B.D., Taheri, E., & Junkins, J. L. Exploiting manifolds of L1 halo orbits for end-to-end Earth–Moon low-thrust trajectory design. *Acta Astronautica*, 183, 255-272 (2021).

75. Ельников Р.В. Использование функций Ляпунова для вычисления локально-оптимального управления вектором тяги при межорбитальном перелете с малой тягой. *Космические исследования*, т. 59, № 3, 2021, с. 255-264.
76. Shannon J., Ozimek M., Atchison J., Hartzell C. (2020, March). Rapid design and exploration of high-fidelity low-thrust transfers to the moon. In 2020 IEEE Aerospace Conference (pp. 1-12). IEEE.
77. Petukhov V.G. and Konstantinov M.S. Spacecraft insertion into Earth–Moon L1 and lunar orbit, 60th International Astronautical Congress, 2009, IAC-09.D2.3.11, pp. 7423–7431.
78. Petukhov V.G., Popov G.A., and Svitina V.V. Suboptimal low-thrust trajectories for lunar missions, Global Lunar Conference, 31 May–3 June 2010, Beijing, China, 2010, GLUC-2010-2.2.P3.
79. Иванюхин А.В., Петухов В.Г. Низкоэнергетические квазиоптимальные траектории с малой тягой к точкам либрации и гало-орбитам. *Космические исследования*, 2020, том 58, № 2, с. 165-176.
80. Daoud B. On the optimal control of the circular restricted three body problem. *Optimization and Control [math.OC]*. Université de Bourgogne 2011. English.
81. Иванюхин А.В. Область существования решений в задаче оптимального управления космическим аппаратом с ограниченной тягой. *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2016, т. 62, с. 100–123
82. Petukhov V.G., Woo S.W. Joint optimization of the trajectory and the main parameters of an electric propulsion system, *Procedia engineering* 185 (2017) 312–318.
83. Yoon S.W., Petukhov V.G., Ivanyukhin A.V. Minimum-Thrust Lunar Trajectories, 72nd International Astronautical Congress, IAC-21-C1.4.3, 2021, 10 p.
84. Иванюхин А. В., Петухов В. Г., Юн Сон Ук Траектории перелета к Луне с минимальной тягой. *Космические исследования*, 2022, т. 60, № 6, с. 517-527.
85. Юн Сон Ук, Фирсюк С.О., Кульков В.М. Проектно-баллистический анализ вариантов миссии Cubesat с электроракетными двигательными установками для перелета Земля–Луна. *Материалы 57-х Научных чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К.Э. Циолковского*, Калуга, 2022, часть 1, с. 58-60.
86. Junkins, J.L., Taheri, E.: State vector representations for low-thrust trajectory optimization. *AAS* 18– 385, 1–20 (2018)
87. Петухов В.Г., Чжоу жуи Расчет возмущенной импульсной траектории перелета между околоземной и окололунной орбитами методом продолжения по параметру. *Вестник МАИ*: 2019. – т. 26, №2, с. 155-165.

88. Юн Сон Ук, Петухов В.Г. Оптимизация свободных граничных условий на траектории перелета с минимальной тягой между околоземной и окололунной орбитами. XLVI Академические чтения по космонавтике посвященные памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства М., изд-во МГТУ им. Баумана, 2022, т. 1, с. 414-415.
89. Юн Сон Ук, Петухов В.Г., Иванюхин А.В. Минимизация затрат топлива для траекторий перелета к Луне с малой тягой в эфемеридной модели четырех тел. Материалы 57-х Научных чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К.Э. Циолковского, Калуга, 2022, часть 1, с. 268-271.
90. Иванюхин А.В., Ивашкин В.В., Петухов В.Г., Юн Сон Ук Оптимизация траекторий перелета с малой тягой на транзитные траектории временного лунного захвата. Сборник тезисов конференции «Проблемы и перспективы космических миссий с электрореактивными двигателями» (КМЭРД-2022), Махачкала, 2022, с.16.
91. Иванюхин А.В., Петухов В.Г., Юн Сон Ук Проектирование низкоэнергетических межпланетных перелётов с малой тягой использующих движение по инвариантным многообразиям точек либрации. XLVII Академические чтения по космонавтике посвященные памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства М., изд-во МГТУ им. Баумана, 2023.
92. Taheri E. Abdelkhalik O. Fast initial trajectory design for low-thrust Restricted Three-Body Problems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 2015, 38, 2146–2160.
93. Yang G. Earth-moon Trajectory Optimization Using Solar Electric Propulsion. *Chinese Journal of Aeronautics* 2007, 20, 452–463.
94. Kluever, C. A; Pierson B. L. Optimal earth-moon trajectories using nuclear electric propulsion. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 1997, 20, 239–245.
95. Gao Y., Wang Z., Zhang Y. Low thrust Earth–Moon transfer trajectories via lunar capture set. *Astrophysics and Space Science* 2019, 364, 219.
96. Ranieri C.L., Ocampo C.A. Indirect optimization of low Earth orbit to low lunar orbit transfers. In *Proceedings of the AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Honolulu, Hawaii, USA, 18–21 August 2008.*
97. Haissig C.M., Mease K.D., Vinh N.X. Canonical transformations for space trajectory optimization. In *Proceedings of the AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Hilton Head, SC, USA, 10–12 August 1992.*
98. Taheri E., Arya V., Junkins J.L. Costate mapping for indirect trajectory optimization. *Astrodynamics* 2021, 5, 359–371.

99. Ивашкин В.В. Оптимизация космических маневров при ограничении на расстояния до планет. - М: - Наука, 1975. - 392 с.
100. Golan O.M., Breakwell J.V. Minimum fuel lunar trajectories for a low-thrust power-limited spacecraft. *Dynamics and Control*, №. 4, 383-394 (1994).
101. Irving J.H. Low thrust flight: variable exhaust velocity in gravitational fields. (In Seifert H.S. (eds.)): *Space Technology*, John Wiley and Sons Inc., New York (1959).
102. Szebehely. *V Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies*. 1967.
103. Yoon S.W., Petukhov V.G., Ivanyukhin A.V. Low-Thrust Lunar Trajectory Optimization Using Canonical Transformation, 73rd International Astronautical Congress, IAC-22- C1.6.9, 2022, 14 p.
104. Herman A.L., Conway B.A. Optimal, Low-Thrust, Earth–Moon Orbit Transfer. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 21, 141–147 (1998).
105. Pérez-Palau D., Epenoy R. Fuel optimization for low-thrust Earth–Moon transfer via indirect optimal control. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2018, 130, 21.
106. Carletta, S. Design of fuel-saving lunar captures using finite thrust and gravity-braking. *Acta Astronaut.* 2021, 181, 190–200.
107. Zhang C., Topputo F., et al. Low-Thrust Minimum-Fuel Optimization in the Circular Restricted Three-Body Problem. *Journal of Guidance, Control and Dynamics* 38 (8) (2015) 1501–1509.
108. Petukhov V.G., Yoon S.W. End-to-End Optimization of Power-Limited Earth–Moon Trajectories. *Aerospace*, 10 (3), 231, 1–22 (2023).
109. Topputo F., Belbruno E. Earth–Mars transfers with ballistic capture. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 121, 329–346 (2015).
110. Mingotti G., Topputo F., Bernelli-Zazzera F. Earth–Mars transfers with ballistic escape and low-thrust capture. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 110, 169–188 (2011).
111. Mingotti G., Gurfil P. Mixed low-thrust invariant-manifold transfers to distant prograde orbits around Mars. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 33, 1753–1764 (2010).
112. Topputo F., Vasile M., Bernelli-Zazzera F. Low Energy Interplanetary Transfers Exploiting Invariant Manifolds of the Restricted Three-Body Problem. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 53, 353–372 (2005).
113. Ovchinnikov M. Interplanetary Small-Satellite Missions: Ballistic Problems and Their Solutions. *Gyroscope and Navigation*, 12, 281–293 (2021).
114. Lo M., Ross S. The Lunar L1 Gateway: Portal to the Stars and Beyond, AIAA Space 2001 Conference, Albuquerque, New Mexico (2001).

115. Ross S., Koon W., et al. Design of a Multi-Moon Orbiter. 13th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, Ponce, Puerto Rico (2003).
116. Loeb H., Petukhov V., et al. Realistic concept of a manned Mars mission with nuclear-electric propulsion. *Acta Astronautica*, 116, 299–306 (2015).
117. Dargent T. An integrated tool for low thrust optimal control orbit transfers in interplanetary trajectories. in ISSFD, Munich (2004).
118. Bertrand R., Epenoy R. CNES Technical note n° 147, December (2002).
119. Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2009 // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. Vol. 109 (2011). P. 101-135.
120. Kaplan G. H., The IAU Resolutions on Astronomical Reference Systems, Time Scales, and Earth Rotation Models. United States Naval Observatory Circular No. 179 (2005).
121. Generic Frame Definition Kernel File for ESA Planetary Missions
<http://spiftp.esac.esa.int/data/SPICE/JUICE/kernels/fk/rssd0002.tf>
122. Кульков В.М., Юн Сон Ук, Фирсюк С.О. Метод управления движением малых космических аппаратов с использованием надувных тормозных устройств для торможения при орбитальном полете до входа в атмосферу. *Вестник МАИ*: 2020. – т. 27, №3, с. 23-36.
123. Yoon S.W., Petukhov V.G. Minimum-fuel low-thrust trajectories to the Moon, *Acta Astronautica*, available online 4 May 2023, 15 pp.

ПРИЛОЖЕНИЕ А (БИБЛИОТЕКА ПРОГРАММ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ДУАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ)

А.1 Особенности реализации библиотеки программ для вычислений в комплексной дуальной области

В качестве основы для разработки библиотеки программ CDNAD для вычислений в комплексной дуальной области использовалось свободно распространяемое программное обеспечение с открытым исходным кодом Complexify [8], предназначенное для вычисления производных методом комплексного шага, и свободно распространяемое программное обеспечение с открытым исходным кодом DNAD [9], предназначенное для автоматического дифференцирования вещественных функций нескольких вещественных переменных с использованием дуальных чисел с векторной дуальной частью.

Для реализации комплексных дуальных вычислений в прикладных алгоритмах достаточно определить для комплексных дуальных чисел операции присваивания, выделения комплексной и комплексных дуальных частей, арифметические операции, операции сравнения и вычисление элементарных функций в дуальном представлении.

В общем случае, структура данных, представляющее комплексное дуальное число X содержит скалярное значение комплексной части x и массив из n чисел x'_i , представляющих комплексную дуальную часть:

$$X = x + \sum_{i=1}^n x'_i \varepsilon_i, \text{ где } x, x' \in \mathbb{C}, \varepsilon_i^2 = \varepsilon_i \varepsilon_j = 0 \forall i, j.$$

Операция присваивания $X = U$, $U = u + \sum_{i=1}^n u_i \varepsilon_i$ эквивалентна присваиванию соответствующих значений комплексной и комплексной дуальной частей: $x = u$, $x'_i = u'_i$, $i = 1 \dots n$. Если U – комплексное или вещественное число, то комплексной дуальной части X присваивается нулевое значение. В общем случае комплексные числа рассматриваются как комплексные дуальные числа с нулевой комплексной дуальной частью, так же как вещественные числа – как комплексные числа с нулевой мнимой частью.

Операция выделения комплексной части комплексного дуального числа имеет вид:

$$\text{CP}(X) = x,$$

а операция выделения комплексной дуальной части – вид:

$$\text{CDP}_i(X) = x_i'.$$

Операции сравнения ($>$, $<$, $=$, \neq , \geq , \leq) проводятся с использованием только вещественных частей от комплексных частей комплексных дуальных чисел:

$X \sim U$ если $\text{Re}(x) \sim \text{Re}(u)$ (\sim - одна из операций сравнения ($>$, $<$, $=$, \neq , \geq или \leq)).

Арифметические операции над комплексными дуальными числами определяются следующим образом:

- операции сложения и вычитания: $X \pm U = x \pm u + \sum (x_i' \pm u_i') \varepsilon_i$;

- унарный минус: $-X = -x - \sum_{i=1}^n x_i' \varepsilon_i$;

- произведение: $X \cdot U = x \cdot u + \sum_{i=1}^n (x_i' u_i + x_i u_i') \varepsilon_i$;

- деление: $X / U = \frac{xu}{u^2} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i' u_i - x_i u_i'}{(u_i')^2} \varepsilon_i$.

Комплексное дуальное представление основных элементарных функций приведено в таблице А.1.1.

Если рассматривается скалярная вещественная функция $f(\mathbf{x}, y)$ с вещественными векторным аргументом \mathbf{x} и скалярным аргументом y , то ее величина, первые и вторые смешанные частные производные могут быть вычислены с использованием одного вычисления функции в комплексной дуальной области $f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}, y + ih)$ с помощью следующих выражений:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, y) &= \text{Re}\left\{\text{CP}\left[f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}, y + ih)\right]\right\} + O(h^2), \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}, y)}{\partial y} &= \frac{1}{h} \text{Im}\left\{\text{CP}\left[f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}, y + ih)\right]\right\} + O(h^2), \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}, y)}{\partial \mathbf{x}} &= \text{Re}\left\{\text{CDP}\left[f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}, y + ih)\right]\right\} + O(h^2), \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}, y)}{\partial \mathbf{x} \partial y} &= \frac{1}{h} \text{Im}\left\{\text{CDP}\left[f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}, y + ih)\right]\right\} + O(h^2), \end{aligned} \tag{A.1.1}$$

$$\text{где } \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}, \text{CDP}(\cdot) = \begin{pmatrix} \text{CDP}_1(\cdot) \\ \vdots \\ \text{CDP}_n(\cdot) \end{pmatrix}, \dim \mathbf{x} = \dim \boldsymbol{\varepsilon} = n.$$

Таблица А.1.1 – Комплексное дуальное представление основных элементарных функций

Функция	Комплексное дуальное представление
$\sin X$	$\sin x + \sum_{i=1}^n x'_i \varepsilon_i \cos x$
$\cos X$	$\cos x - \sum_{i=1}^n x'_i \varepsilon_i \sin x$
$\operatorname{tg} X$	$\operatorname{tg} x + \sum_{i=1}^n \frac{x'_i \varepsilon_i}{\cos^2 x}$
$\arcsin X$	$\arcsin x + \sum_{i=1}^n \frac{x'_i \varepsilon_i}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos X$	$\arccos x - \sum_{i=1}^n \frac{x'_i \varepsilon_i}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} X$	$\operatorname{arctg} x + \sum_{i=1}^n \frac{x'_i \varepsilon_i}{1+x^2}$
$\sinh X$	$\sinh x + \sum_{i=1}^n x'_i \varepsilon_i \cosh x$
$\cosh X$	$\cosh x + \sum_{i=1}^n x'_i \varepsilon_i \sinh x$
$\operatorname{th} X$	$\operatorname{th} x + \sum_{i=1}^n \frac{x'_i \varepsilon_i}{\cosh^2 x}$
$\operatorname{arcsinh} X$	$\operatorname{arcsinh} x + \sum_{i=1}^n \frac{x'_i \varepsilon_i}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{arccosh} X$	$\operatorname{arccosh} x - \sum_{i=1}^n \frac{x'_i \varepsilon_i}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{arth} X$	$\operatorname{arth} x + \sum_{i=1}^n \frac{x'_i \varepsilon_i}{1-x^2}$
e^X	$e^x + \sum_{i=1}^n x'_i \varepsilon_i e^x$
$\ln X$	$\ln x + \sum_{i=1}^n \frac{x'_i \varepsilon_i}{x}$
$\lg X$	$\ln X / \ln 10$
X^U	$x^u + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (x'_i u x^{u-1} + u'_i x^u \ln x)$
$X^{1/2}$	$x^{1/2} + \sum_{i=1}^n \frac{x'_i \varepsilon_i}{2x^{1/2}}$

Библиотека программ CDNAD реализована на языке программирования Fortran 90 с использованием средств разработки Intel Parallel Studio XE 2020, включая компилятор Intel Fortran Compiler XE. В библиотеке программ используются элементы объектно-

ориентированного программирования, реализованные в стандарте Fortran 90, включая использование модулей, определение нового типа данных, перегрузку операторов и встроенных функций. Эти возможности позволяют использовать для вычисления первых и вторых производных исходные тексты, разработанные для вычисления значений вещественных функций с минимальными доработками. Исходный код разработанной библиотеки состоит из трех файлов: `complexify.f90`, `CDNAD.f90` и `CDNADHeaders.f90`. Файл `complexify.f90` содержит интерфейсы и определения перегруженных функций и операторов модуля `complexify` для реализации метода комплексного шага и является доработанным модулем из работы [8]. Доработка касалась обеспечения интерфейсов с модулем `CDNAD` и оптимизации кода для вычисления комплексного представления тригонометрических, гиперболических и обратных к ним функций для задачи вычисления производных с использованием метода комплексного шага. Файлы `CDNADHeaders.f90` и `CDNAD.f90` содержат интерфейсы и определения констант, типов данных, перегруженных функций и операторов модуля `CDNAD`.

A.2 Результаты разработки, тестирование и обсуждение

Разработанная библиотека программ содержит определение комплексного дуального типа переменных и включает поддержку всех встроенных арифметических операций, операций присваивания и сравнения между комплексными дуальными числами и следующими встроенными типами данных: комплексными с двойной точностью, вещественными с двойной и одинарной точностью, целыми. Реализована поддержка большинства встроенных математических функций, включая тригонометрические функции, гиперболические функции, обратные тригонометрические и гиперболические функции, логарифмы, экспоненты, степенные функции, корень квадратный, функции вычисления максимума и минимума из заданной последовательности аргументов, функцию вычисления остатка от деления, функции округления.

Было проведено тестирование правильности работы библиотеки программ как для отдельных операций и функций, так и для сложных составных функций. В процессе тестирования сравнивались значения функций и их производных, вычисленные с помощью разработанной библиотеки программ с аналитическими значениями функций и их производных. В большинстве случаев относительная ошибка вычислений первых и вторых производных с помощью разработанной библиотеки программ оказалось меньше 10^{-15} , максимальная полученная ошибка составляет $2.7 \cdot 10^{-15}$.

Разработанная библиотека была применена при разработке программного обеспечения для оптимизации возмущенных траекторий космических аппаратов (см. раздел 3).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б (НЕОБХОДИМЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЖДУ СИСТЕМАМИ КООРДИНАТ)

Б.1 Перевод фазовых переменных

Декартовы координаты \mathbf{x}_{cc} могут быть выражены через равноденственные элементы \mathbf{x}_{mee} следующими выражениями (Здесь, истинную долготу можно представить в виде $L = L_K + K$):

$$\mathbf{x}_{cc}(K) = \begin{bmatrix} \frac{r}{s^2}(\cos L + \alpha^2 \cos L + 2i_x i_y \sin L) \\ \frac{r}{s^2}(\sin L - \alpha^2 \sin L + 2i_x i_y \cos L) \\ \frac{2r}{s^2}(i_x \sin L - i_y \cos L) \\ -\frac{1}{s^2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot [(1 + \alpha^2) \cdot (\sin L + e_y) - 2i_x i_y \cdot (\cos L + e_x)] \\ -\frac{1}{s^2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot [(-1 + \alpha^2) \cdot (\cos L + e_x) + 2i_x i_y \cdot (\sin L + e_y)] \\ \frac{2}{s^2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot [i_x \cos L + i_y \sin L + e_x i_x + e_y i_y] \end{bmatrix} = \mathbf{Q}(\mathbf{x}_{mee}(K)),$$

где $r = p/(1 + e_x \cos L + e_y \sin L)$, $\alpha^2 = i_x^2 - i_y^2$.

Равноденственные элементы \mathbf{x}_{mee} могут быть выражены через декартовы координаты \mathbf{x}_{cc} следующими выражениями:

$$\mathbf{x}_{mee}(K) = \begin{bmatrix} p(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \\ e_x(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \\ e_y(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \\ i_x(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \\ i_y(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \\ L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \end{bmatrix} = \mathbf{G}(\mathbf{x}_{cc}(K)),$$

где

$$p(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sigma^2 / \mu, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{r} \times \mathbf{V} = [r_y V_z - r_z V_y, r_z V_x - r_x V_z, r_x V_y - r_y V_x]^T, \quad \sigma = |\boldsymbol{\sigma}| = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2},$$

$$e_x(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \left[1 + \frac{\sigma_x^2}{(\sigma_z + \sigma)^2} + \frac{\sigma_y^2}{(\sigma_z + \sigma)^2} \right]^{-1} \cdot \left[- \left(\frac{r_x}{r} + \frac{\sigma_y V_z - \sigma_z V_y}{\mu} \right) \left(1 + \frac{\sigma_y^2}{(\sigma_z + \sigma)^2} - \frac{\sigma_x^2}{(\sigma_z + \sigma)^2} \right) + \frac{2\sigma_x \left(\frac{r_z}{r} + \frac{\sigma_x V_y - \sigma_y V_x}{\mu} \right)}{\sigma_z + \sigma} + \frac{2\sigma_x \sigma_y \left(\frac{r_y}{r} + \frac{\sigma_z V_x - \sigma_x V_z}{\mu} \right)}{(\sigma_z + \sigma)^2} \right],$$

$$e_y(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \left[1 + \frac{\sigma_x^2}{(\sigma_z + \sigma)^2} + \frac{\sigma_y^2}{(\sigma_z + \sigma)^2} \right]^{-1} \cdot \left[- \left(\frac{r_y}{r} + \frac{\sigma_z V_x - \sigma_x V_z}{\mu} \right) \left(1 - \frac{\sigma_y^2}{(\sigma_z + \sigma)^2} + \frac{\sigma_x^2}{(\sigma_z + \sigma)^2} \right) + \frac{2\sigma_y \left(\frac{r_z}{r} + \frac{\sigma_x V_y - \sigma_y V_x}{\mu} \right)}{\sigma_z + \sigma} + \frac{2\sigma_x \sigma_y \left(\frac{r_x}{r} + \frac{\sigma_y V_z - \sigma_z V_y}{\mu} \right)}{(\sigma_z + \sigma)^2} \right],$$

$$i_x(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = -\sigma_y / (\sigma_z + \sigma), \quad i_y(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sigma_x / (\sigma_z + \sigma),$$

$$\cos(L(\mathbf{r}, \mathbf{v})) = \left[r \left(1 + \frac{\sigma_x^2}{(\sigma_z + \sigma)^2} + \frac{\sigma_y^2}{(\sigma_z + \sigma)^2} \right) \right]^{-1} \cdot \left[r_x \left(1 + \frac{\sigma_y^2}{(\sigma_z + \sigma)^2} - \frac{\sigma_x^2}{(\sigma_z + \sigma)^2} \right) - \frac{2\sigma_x r_z}{\sigma_z + \sigma} - \frac{2\sigma_x \sigma_y r_y}{(\sigma_z + \sigma)^2} \right],$$

$$\sin(L(\mathbf{r}, \mathbf{v})) = \left[r \left(1 + \frac{\sigma_x^2}{(\sigma_z + \sigma)^2} + \frac{\sigma_y^2}{(\sigma_z + \sigma)^2} \right) \right]^{-1} \cdot \left[r_y \left(1 - \frac{\sigma_y^2}{(\sigma_z + \sigma)^2} + \frac{\sigma_x^2}{(\sigma_z + \sigma)^2} \right) - \frac{2\sigma_y r_z}{\sigma_z + \sigma} - \frac{2\sigma_x \sigma_y r_x}{(\sigma_z + \sigma)^2} \right].$$

Б.2 Перевод из EME2000 в LME2000

В диссертационной работе, для более практичного анализа селеноцентрического движения КА используется инерциальная селеноцентрическая селеноэкваториальная система координат LME2000. Прямое восхождение α_p и склонение δ_p вектора в направлении северного полюса Луны в системе координат EME2000 определяются соотношениями из [119]. При переходе между EME2000 и LME2000 используется юлианская дата в шкале динамического барицентрического времени JD(TDB) с помощью выражения из [120]. Единичный вектор в направлении северного полюса Луны в системе координат EME2000 записывается в виде:

$$\mathbf{e}_z = (\cos \alpha_p \cos \delta_p, \sin \alpha_p \cos \delta_p, \sin \delta_p)^T, \quad \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z / |\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z|, \quad \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x, \quad (\text{Б.2.1})$$

где $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$ – единичный вектор в направлении оси Z системы координат EME2000. На рисунке Б.2.1 представлена геометрия между системами координат EME2000 и LME2000.

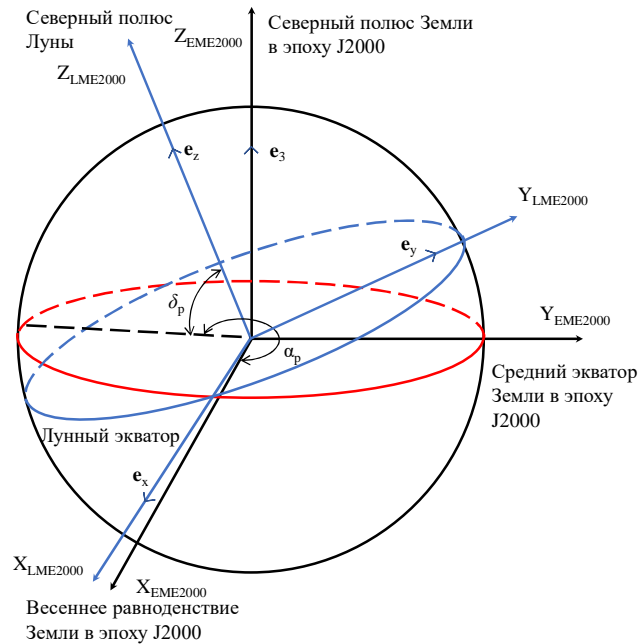


Рисунок Б.2.1. Геометрия между системами координат EME2000 и LME2000.

Матрица перехода от селеноцентрических координат КА в EME2000 $\mathbf{x}_{cc\text{EME}}$ к селеноцентрическим координатам КА в LME2000 $\mathbf{x}_{cc\text{LME}}$ имеет вид:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y \ \mathbf{e}_z) : \mathbf{x}_{cc\text{LME}} = \mathbf{M}^T \mathbf{x}_{cc\text{EME}}. \quad (\text{Б.2.2})$$

Было проведено тестирование правильности матрицы перехода от EME2000 к LME2000. В процессе тестирования сравнивались значения матрицы перехода с результатами из [121], где проведен тестовый расчет для даты J2000 1 января 2000 12:00:00 TT с использованием разработанной программы из ЕКА. Ошибка вычислений матрицы оказалась меньше 10^{-13} .

Мы интегрируем систему дифференциальных уравнений (1.1.7) селеноцентрического движения в геоэкваториальной инерциальной системе координат EME2000 от K_0 до K_f при заданной угловой дальности, а в конечной точке траектории орбитальные элементы должны переводиться из EME2000 в селеноэкваториальную инерциальную систему координат LME2000. Важно отметить, что перевод между EME2000 и LME2000 проводится в декартовых системах координат (из $\mathbf{x}_{cc\text{EME}}$ в $\mathbf{x}_{cc\text{LME}}$). В настоящей работе в правой части системы дифференциальных уравнений использовались модифицированные равноденственные

орбитальные элементы. Схема перевода орбитальных элементов из селеноцентрической геоэкваториальной системы координат в селеноцентрическую селеноэкваториальную систему координат состоит в следующем:

1. Перевод модифицированной равноденственной геоэкваториальной системы координат в декартовую геоэкваториальную систему координат ($\mathbf{x}_{cc\ EME} = \mathbf{Q}(\mathbf{x}_{mee})$).
2. Перевод декартовой геоэкваториальной системы координат в декартовую селеноэкваториальную систему координат ($\mathbf{x}_{cc\ LME} = \mathbf{M}^T \mathbf{x}_{cc\ EME}$).
3. Перевод декартовой селеноэкваториальной системы координат в модифицированную равноденственную селеноэкваториальную систему координат ($[\mathbf{x}_{mee}]_{LME} = \mathbf{G}(\mathbf{x}_{cc\ LME})$).

Здесь используется обозначение $[\cdot]_{LME}$ для операции перехода орбитальных элементов из EME2000 в LME2000. Все используемые уравнения для перевода между модифицированными равноденственными элементами и декартовыми переменными могут быть найдены в Приложении Б.1. На рисунке Б.2.2 представлен процесс вычисления перевода модифицированных равноденственных элементов из геоэкваториальной системы координат в селеноэкваториальную систему координат.

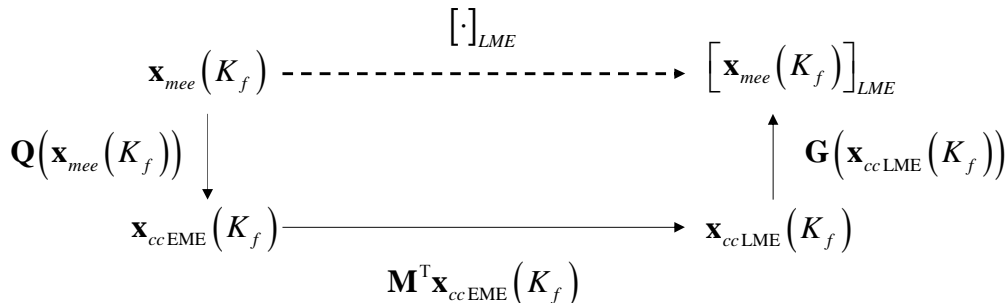


Рисунок Б.2.2. Преобразования между системами координат EME2000 и LME2000.

ПРИЛОЖЕНИЕ В (ТОЧНОСТЬ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ)

В разделе 5.4.2, были представлены формулы (5.4.2.5), (5.4.2.6) для перевода сопряженных переменных между системами координат.

В настоящей диссертационной работе было проведено тестирование правильности перехода между фазовыми переменными и их сопряженными в различных системах координат (декартовой и модифицированных равноденственных элементах). В процессе тестирования сравнивались значения сопряженных переменных с результатом [98] после

преобразования на базе рассматриваемого подхода. В работе [98] проведено решение минимизации затрат топлива для траекторий перелета к астероиду Дионис с использованием двух разных системы дифференциальных уравнений – в модифицированных равноденственных элементах и в декартовой системе координат. Автор демонстрирует эффективность использования преобразования сопряженных переменных из модифицированных равноденственных элементов в декартовую систему координат. Гравитационный параметр солнца был принят равным $132712440018 \text{ км}^3/\text{с}^2$ и астродинамическая единица $AU = 149.6 \cdot 10^6 \text{ км}$.

В таблице В.1 приведены полученные преобразованные значения сопряженных переменных в декартовой системе координат из работы [98] и в нашей работе. В таблице В1ë.2 приведены преобразованные значения сопряженных переменных в модифицированных равноденственных элементах. При вычислении матрица Якобиана $\partial \mathbf{Q} / \partial \mathbf{x}_{mee}$ использовались аналитические выражения, а для вычисления $\partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{x}_{mee}$ использовался метод комплексного шага.

Значения сопряженных переменных после канонических преобразований (5.4.2.5), (5.4.2.6) совпали с соответствующими значениями из работы [98] с точностью до 12-го десятичного знака. Из таблицы В.2 видно, что оба подхода, которые используются функции преобразования фазовых переменных \mathbf{Q} и \mathbf{G} , примерно одинаково хороши для преобразований сопряженных переменных с высокой точностью.

Таблица В.1. Полученные значения сопряженных переменных в декартовой системе координат (преобразованные из модифицированных элементов) в нашей работе и в работе [98]

	[98]	$[[\partial\mathbf{Q}/\partial\mathbf{x}_{mee}]^T]^{-1}\cdot\mathbf{p}_{mee}$	$[\partial\mathbf{G}/\partial\mathbf{x}_{cc}]^T\cdot\mathbf{p}_{mee}$
p_{rx}	178.45123266611	178.45123266 253	178.45123266 5986
p_{ry}	-2064.1601174367	-2064.1601174 4897	-2064.16011743 944
p_{rz}	-349.57592633455	-349.575926334 693	-349.575926334 693
p_{vx}	1353.58251298289	1353.5825129 9477	1353.58251298 554
p_{vy}	-84.6061815387407	-84.606181538 3062	-84.606181538 5344
p_{vz}	-638.174235474305	-638.174235474 277	-638.174235474 277

Таблица В.2. Полученные значения сопряженных переменных в модифицированных равноденственных элементах (преобразованные из декартовой системы координат) в нашей работе и в работе [98]

	[98]	$[\partial\mathbf{Q}/\partial\mathbf{x}_{mee}]^T\cdot\mathbf{p}_{cc}$
p_p	-1347.90134852228	-1347.90134852 094
p_{ex}	-134.085755493427	-134.085755493 603
p_{ey}	646.824780720242	646.8247807202 56
p_{ix}	-651.160791178671	-651.160791178 367
p_{iy}	-1313.94659546968	-1313.946595469 74
p_L	-0.491214714922124	-0.49121471492 0439