

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи

Соболь Виталий Романович

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ В ЗАДАЧАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО  
ХЕДЖИРОВАНИЯ КОЛЛ-ОПЦИОНОВ ПРИ НАЛИЧИИ ПОЛОСЫ  
НЕЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Специальность 05.13.01 —  
системный анализ, управление и обработка информации  
(авиационная и ракетно-космическая техника)

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
профессор А. И. Кибзун

Москва, 2015 год

# Оглавление

Введение	4
<b>1. Модификация стратегии последовательного хеджирования</b>	<b>21</b>
1.1. Последовательное хеджирование	23
1.1.1. Доказательство несомофинансируемости стратегии	24
1.1.2. Средние потери при использовании стратегии последовательного хеджирования	28
1.2. Модификация стратегии последовательного хеджирования	29
1.2.1. Математическая модель	30
1.2.2. Затраты на хеджирование	34
1.3. Свойства процесса ценообразования	36
1.3.1. Свойства диффузионных процессов	36
1.3.2. Распределение момента первого достижения заданного уровня	37
1.3.3. Распределение числа пересечений полосы	39
1.4. Выводы по главе 1	43
<b>2. Исследование модифицированной стратегии последовательного хеджирования</b>	<b>44</b>
2.1. Минимизация средних потерь	46
2.1.1. Средние потери хеджера	46
2.1.2. Минимизация безусловного математического ожидания потерь	49
2.1.3. Минимизация условного математического ожидания потерь	50
2.1.4. Результаты численных экспериментов	51
2.2. Распределение потерь	53
2.2.1. Функция распределения потерь хеджера	54
2.2.2. Квантиль распределения потерь хеджера	57
2.2.3. Результаты численных экспериментов	62
2.3. Выводы по главе 2	63
<b>3. Двухшаговая задача хеджирования европейского колл-опциона при случайной длительности транзакций</b>	<b>65</b>
3.1. Процедура хеджирования	67
3.2. Постановка задачи	70
3.3. Динамическое программирование	73
3.4. Математическое ожидание функции будущих потерь	74
3.5. Алгоритм поиска оптимальной стратегии	80
3.6. Пример	82

3.7. Выводы по главе 3. . . . .	83
<b>4. Алгоритм удержания автоматического аэростата в заданной полосе высот</b>	<b>85</b>
4.1. Постановка задачи . . . . .	87
4.2. Распределение числа пересечений полосы . . . . .	89
4.3. Алгоритм поиска оптимального управления . . . . .	91
4.4. Численный пример . . . . .	92
4.5. Выводы по главе 4 . . . . .	93
<b>Заключение</b>	<b>95</b>
<b>Список литературы</b>	<b>97</b>

# Введение

Рынок срочных контрактов в России является одной из важнейших и наиболее динамично развивающихся отраслей экономики. Срочный рынок привлекает все больше инвесторов возможностью совершать спекулятивные операции с доходностью выше, чем на рынке акций, а также хеджировать (страховать) риски при инвестировании в акции. Из года в год российский рынок срочных контрактов показывает рост активности и объемов торгов. Например, объем торгов производными финансовыми инструментами на Московской бирже в апреле 2015 года составил 6,3 трлн рублей (прирост в 48,7% к показателю за апрель 2014 года) или 129,1 млн контрактов (107,3 млн контрактов в апреле 2014 года). Объем торгов фьючерсными контрактами составил 126,2 млн контрактов, опционными контрактами — 2,9 млн контрактов.

Фондовый рынок включает в себя первичный и вторичный рынки. Основная функция первичного рынка — размещение новых выпусков корпоративных, правительственных, региональных и муниципальных ценных бумаг. Эти бумаги приобретаются индивидуальными инвесторами, коммерческими банками, инвестиционными фондами, а также страховыми компаниями и др. На вторичном рынке происходит перепродажа ценных бумаг. Важная функция вторичного рынка — поддержание высокой ликвидности бумаг, продающихся на первичном рынке. Приобретая бумагу, инвестор должен быть уверен, что сможет ее продать, в случае необходимости.

С юридической точки зрения, ценная бумага представляет собой документально закрепленное право владельца на какую-либо собственность. При этом владение ценными бумагами также может быть оформлено как ценная бумага (такие бумаги называют производными). Существуют также срочные контракты, закрепляющие право на приобретение или продажу определенной собственности по определенной, заранее оговоренной цене (такие контракты называются опционами).

Для того, чтобы продавец и покупатель могли найти друг друга, существует рынок. Рынок ценных бумаг характеризуется тем, что товаром на этом рынке являются ценные бумаги, приобретение которых происходит исключительно в целях получения прибыли. Стоимость

ценной бумаги не всегда может быть адекватно оценена участниками сделки, а потому большинство сделок заключается при участии профессионалов, деятельность которых контролируется государственными органами. Контроль со стороны государства создает условия для нормальной деятельности участников рынка, защищают от действий недобросовестных действий других лиц и обеспечивают высокую эффективность рынка.

Для организации торговли ценными бумагами с участием профессионалов существуют фондовые биржи. Биржа берет на себя гарантии по исполнению обязательств по совершенным сделкам, проверяет платежеспособность участников торговли, регламентирует процесс торговли, осуществляет процесс котировки ценных бумаг. К котировке своих акций на бирже допускаются компании, прошедшие специальный отбор.

Существует два основных типа первичных ценных бумаг: облигации и акции. Акция представляет собой право на часть собственности предприятия-эмитента, включая доходы этого предприятия. Акция не может быть возвращена эмитенту, она может только продана другому инвестору. Облигация представляет собой право на получение предоставленного предприятию-эмитенту облигации капитала с процентами, независимо от доходов предприятия.

Важнейшее предназначение рынка срочных контрактов заключается в увеличении ликвидности ценных бумаг. Для инвесторов срочные контракты могут использоваться как инструменты страхования рисков.

Определим основные понятия рынка срочных контрактов. Простейшим и исторически первым срочным контрактом является форвард (или его стандартизированный вариант — фьючерс). В контракте оговаривается срок исполнения, т.е. время совершения сделки, и цена исполнения, т.е. цена, по которой будет осуществляться продажа актива. При заключении такого контракта и отсутствии устойчивой тенденции роста или снижения цены актива оба участника сделки рискуют одинаково: покупатель рискует купить актив по цене выше рыночной, а продавец — продать по цене ниже рыночной, поскольку будущая цена актива неизвестна обоим участникам сделки.

Один из участников сделки может переложить часть риска на другого, предложив ему денежную компенсацию. Если это устраивает обоих участников сделки, то они могут заключить не форвардный, а опционный контракт. Опцион предусматривает обязательное исполнение сделки только для одной из сторон (продавца опциона). Если опцион предусматривает право на продажу товара, то он называется пут-опционом, а если право на покупку — колл-опционом. Если опцион может быть исполнен только в определенный момент времени, то он называется европейским, если его можно исполнить в любой момент до истечения сро-

ка действия — американским, а если его можно исполнить только в определенные моменты времени до истечения срока действия контракта — бермудским.

Продавец колл-опциона может частично застраховаться от риска, связанного с превышением ценой актива цены поставки, затратив на это часть премии (стоимости опциона). Для этого он формирует инвестиционный портфель, состоящий из данного опциона, других опционов, фьючерсов, облигаций, акций и прочего. В простейшем случае портфель состоит из базового актива, оговоренного в контракте. Этим портфелем он может управлять так, чтобы доходность портфеля хотя бы частично компенсировала риск опционной позиции. Такая стратегия управления называется хеджированием, а лицо, управляющее портфелем — хеджером.

Несмотря на то, что история рынков срочных контрактов насчитывает более 400 лет, теория страхования и расчетов срочных позиций начала развиваться лишь во второй половине XX века. Первой работой в этой области являлась диссертация Л. Башелье [53], в которой впервые было предложено использование броуновского движения для построения математической модели динамики цен активов. Эта работа получила развитие в трудах Самюэлсона, предложившего модель, учитывающую неотрицательность цены базового актива.

Фундаментальный результат этой теории был получен в 1973 г. Ф.Блэком и М.Шоулсом [55]. Они вывели формулу для оценки премии европейского колл-опциона для диффузионной модели котировки базового актива при “идеальных” условиях функционирования рынка ценных бумаг. Доходность такого портфеля приравнивалась к доходности безрискового актива. Отправным пунктом модели Блэка-Шоулса было то, что премия опциона может быть воспроизведена непрерывной перебалансировкой портфеля состоящего из безрискового вложения и базового актива. На управление таким портфелем хеджер затрачивает в среднем всю премию за опцион. В модели Блэка-Шоулса строится так называемый “совершенный хедж”, т.е. стратегия хеджирования, при которой инвестор избегает риска путем продажи и покупки определенного количества акций базового актива (в литературе подобные стратегии также называются “суперхеджирующими”). Доказано, что “совершенный” хедж не может быть построен даже для малых отрезков времени, за исключением случая, когда процесс изменения цены базового актива является непрерывным по времени и подчиняется следующей формуле:

$$\Delta S_t = (\alpha(S_t, t) - D(S_t, t))S_t \Delta t + \sigma(S_t, t)S_t \Delta Z_t, \quad (1)$$

где  $\Delta S_t = S_{t+\Delta t} - S_t$ ;

$\alpha(S_t, t)$  — ожидаемая доходность на акцию на отрезке времени  $[t, t + \Delta t]$ ;

$D(S_t, t)$  — дивиденд на акцию на отрезке времени  $[t, t + \Delta t]$ ;

$\sigma(S_t, t)$  — среднее квадратическое отклонение доходности акции на отрезке времени  $[t, t + \Delta t]$ ;  $\Delta Z_t$  — приращение винеровского процесса на отрезке времени  $[t, t + \Delta t]$ .

Кроме этого, в модели Блэка-Шоулса требуется выполнение следующих условий:

1. Рынки опционов и акций идеальны, т.е. не имеется никаких ограничений на короткие продажи; отсутствуют транзакционные издержки; любые доли всех ценных бумаг бесконечно делимы. Эти предположения позволяют осуществлять непрерывную торговлю.

2. Доходность безрисковых ценных бумаг постоянна на протяжении времени жизни опциона.

3. Выплата дивидендов по акциям базового актива осуществляется на таких условиях, что опционы американского типа не могут быть исполнены раньше срока поставки.

Согласно их модели, в каждый момент времени  $t$  формируется хеджирующий портфель, состоящий из  $n(S_t, t)$  акций базового актива и  $m(S_t, t)$  единиц безрисковых ценных бумаг. Стоимость такого портфеля в момент времени  $t$  будет равна

$$V = nS_t + mB_t,$$

где  $B_t$  — стоимость безрискового актива в момент времени  $t$ . Безрисковый актив имеет фиксированную процентную ставку  $r$ :

$$B_{t+\Delta t} = (1 + r\Delta t)B_t.$$

Функции  $n$  и  $m$  необходимо выбрать таким образом, чтобы

1. Доход от портфеля полностью покрывал затраты по открытой опционной позиции, а прибыль по опционной позиции — убытки портфеля, т.е. должно выполняться условие самофинансирования.

2. Стоимость портфеля в момент исполнения опциона равнялась  $C_T$  — стоимости опциона в момент поставки:

$$C_T = \max\{S_T - K, 0\},$$

где  $K$  — указанная в договоре цена поставки.

Для того чтобы портфель был самофинансируемым, затраты на перебалансировку портфеля полагаются равными дивидендам по имеющимся в портфеле  $n$  акциям базового актива. В результате всех преобразований в [55] было получено дифференциальное уравнение, определяющее стоимость  $V(S_t, t)$  хеджирующего портфеля:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S - t \frac{\partial V}{\partial S_t} - rV = 0. \quad (2)$$

При этом должно выполняться краевое условие

$$V(S_t, T) = \max(S_t - K, 0). \quad (3)$$

Для этого дифференциального уравнения в частных производных существует единственное решение  $V(S_t, t)$ . Существование единственного решения обеспечивает существование и единственность решений  $n(S_t, t) = \frac{\partial V}{\partial S_t} m(\Delta t, t) = e^{rt}(V(S_t, t) - n(S_t, t))S_t$ . Сформированный таким образом хеджирующий портфель обеспечивает точное копирование выплат по опционному контракту. Для избежания возможности арбитража следует приравнять стоимость опциона на момент времени  $t$  и хеджирующего портфеля:

$$C = V(S_t, t).$$

Таким образом, цена опциона зависит от  $S_t$ ,  $r$ ,  $\sigma^2(S_t, t)$ , времени жизни опциона  $T$  и цены поставки  $K$ . Следует отметить, что стоимость опциона не зависит от ожидаемой доходности акции  $\alpha$  и от предпочтений инвестора. Эти результаты дают возможность аналитического решения уравнения (2).

Решение уравнения (2) с граничным условием (3) было получено в 1973 Ф. Блэком и М. Шоулсом. Полученная в результате оценка стоимости европейского колл-опциона получила название “формула Блэка-Шоулса”. Для ее получения было сделано дополнительное предположение о том, что на акции базового актива не выплачивается никаких дивидендов. При этом предположении уравнение (2) сводится к уравнению

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial C}{\partial t} + rS - t \frac{\partial C}{\partial S_t} - rC = 0,$$

с граничным условием

$$C_T = \max(S_T - K, 0), \text{ при } 0 \leq t \leq T; 0 \leq S_t < +\infty.$$

Решение этого уравнения дает оценку величины премии колл-опциона с ценой поставки  $K$ , стоимостью базового актива на момент заключения контракта  $S_0$ , ставкой доходности безрискового актива  $r$  и волатильностью  $\sigma$ . Решение уравнения задается следующей формулой:

$$C(S_0, t, r, \sigma, K) = S_0 \cdot \Phi_0 \left( \frac{\ln(S_0/K e^{-rt}) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) - K e^{-rt} \cdot \Phi_0 \left( \frac{\ln(S_0/K e^{-rt}) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right), \quad (4)$$

где  $t$  — текущее время, отсчитываемое назад от срока исполнения контракта, а  $\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ .

Текущее время и цена базового актива называются переменными состояния, в то время как остальные переменные — фиксированные параметры модели.



Дальнейшее развитие работа получила в трудах Дж. Кокса, Р. Росса, М. Рубинштейна [59]. Они рассмотрели в качестве модели динамики цены базового актива модель с дискретным временем, а именно, биномиальную модель котировки, для которой геометрическое броуновское движение является предельной моделью, при шаге разбиения, стремящемся к нулю:

$$S_{n+1} = S_n(1 + \rho_{n+1}),$$

где

$$\rho_{n+1} = \begin{cases} u - 1, & \text{с вероятностью } P \\ d - 1, & \text{с вероятностью } 1 - P. \end{cases}$$

Такая модель переходит в (1) при уменьшении шага дискретизации. При этом были сделаны следующие предположения:

1. Рынки опционов, акций и безрисковых активов удовлетворяют предположению 1 модели Блэка-Шоулса (идеальны).
2. Доходность безрисковых активов постоянна на протяжении времени жизни опциона.
3. На акции базового актива не начисляется дивидендов на протяжении времени жизни опциона.

Эти ограничения обеспечивают тождественность американского и европейского опционов (раннее исполнение американского опциона — неоптимально).

Пусть  $r$  определяет ставку безрискового актива на протяжении времени жизни опциона, и пусть выполняется соотношение  $u > r > d$ . Выполнение данного неравенства исключает возможность арбитража, т.е. получения прибыли без риска.

Для вывода оценки стоимости колл-опциона в работе сперва рассматривается простейшая ситуация, когда до истечения времени жизни опциона остается один период времени. Справедливая цена опциона определяется как стоимость самофинансируемого хеджирующего портфеля. В простейшем случае справедливая цена опциона получается равной

$$C = [pC_u + (1 - p)C_d]/r, \tag{5}$$

где  $p \triangleq \frac{r-d}{u-d}$ , а  $C_u$  и  $C_d$  — стоимости опционов в момент истечения срока действия, когда цена базового актива меняется с уровня  $S$  до  $uS$  и  $dS$  соответственно:

$$C_u = \max(0, uS - K),$$

$$C_d = \max(0, dS - K).$$

Стоит отметить, что вероятность  $P$  не фигурирует в выражении (5). Это означает, что даже если инвесторы имеют различные представления о вероятности дальнейшего роста или падения цены актива, их оценки стоимости опционного контракта будут согласованы.

С помощью рекурсивной процедуры определяется стоимость опциона с произвольным количеством временных периодов до его истечения. Начиная с момента истечения и ведя отсчет в обратном времени, можно получить формулу цены опциона для любого  $n$ :

$$C = \frac{\left[ \sum_{j=a}^n \left( \frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} (u^j d^{n-j} S - K) \right]}{r^n}. \quad (6)$$

Полученное выражение для стоимости  $C$  опциона можно разделить на две части:

$$C = S \left[ \sum_{j=a}^n \left( \frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \left( \frac{u^j d^{n-j}}{r^n} \right) \right] - Kr^{-n} \left[ \sum_{j=a}^n \left( \frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \right].$$

Значения в квадратных скобках могут быть интерпретированы как значения функции распределения для биномиального закона распределения. Структура полученного выражения аналогична структуре формулы Блэка-Шоулса (4).

Другой предельной моделью для биномиальной модели Кокса-Росса-Рубинштейна является модель Мертона [74], в которой модель ценообразования актива связана с центрированным пуассоновским процессом. Как и в модели Блэка-Шоулса, в ней присутствует диффузионная составляющая, но добавляется также и “скачковая”:

$$\Delta S_t = [\alpha(S_t, t) - D(S_t, t)] S_t \Delta t + \sigma(S_t, t) S_t \Delta Z_t + (J - 1) S_t \Delta \pi_t,$$

где  $\Delta \pi_t$  — случайная величина, распределенная по закону Пуассона, принимающая значение 1 с вероятностью  $\lambda \Delta t$ ,  $\lambda \geq 0$ ,

$\sigma(S_t, t)$  — мгновенное среднеквадратическое отклонение цены актива на интервале  $[t, t + \Delta t]$  при условии отсутствия скачков на этом интервале,

$\Delta Z_t$  — приращение винеровского процесса на отрезке времени  $[t, t + \Delta t]$ ,

$J$  — случайная величина, распределенная по логнормальному закону с параметрами  $\mu$  и  $\gamma^2$ ,

$\Delta Z_t, \Delta \pi_t, J$  — независимы в совокупности.

Интерпретация “скачковой” составляющей состоит в следующем: в случайные моменты времени, распределенные по закону Пуассона, происходит скачок цены базового актива до величины  $SJ$ . Амплитуда скачка  $J$  не зависит от  $\Delta Z_t$  и  $\Delta \pi_t$ . Моменты скачков независимы и одинаково распределены. Вероятность того, что за малый интервал времени  $\Delta t$  произойдет более одного скачка, есть  $o(\Delta t)$ .

К предположениям, принятым в модели Блэка-Шоулса, в модели Мертона добавляются еще четыре предположения, позволяющие разрешить задачу определения начальной стоимости самофинансируемого хеджирующего портфеля:

- стоимость опциона должна быть дважды непрерывно-дифференцируемой функцией стоимости базового актива и времени;
- “скачковая” компонента процесса изменения цены акций базового актива “несистематична” и не компенсируется рыночной премией за риск;
- на акции базового актива не выплачиваются дивиденды;
- среднеквадратическое отклонение цены базового актива остается постоянным на протяжении всего срока действия опциона.

На практике скачок цены обычно вызывается поступлением новой важной информации об акциях и эмитенте базового актива. На остальные активы данная информация не влияет или влияет слабо, поэтому связанный со скачкообразным изменением цены риск может быть снижен с помощью диверсификации портфеля.

При сделанных предположениях стоимость опциона в модели Мертона оценивается по следующей формуле:

$$C_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} C(S, t, r, \sigma^2 + \frac{n\gamma^2}{t}, K), \quad (7)$$

где  $C(S, t, r, \sigma^2 + \frac{n\gamma^2}{t}, K)$  определяется по формуле Блэка-Шоулса (4). Результаты работы Мертона были в последствии обобщены на случай ненулевых транзакционных издержек в работе [75].

Среди публикаций по проблеме хеджирования опционных контрактов наиболее полной и законченной работой является специальный выпуск журнала “Теория вероятностей и ее применения”, посвященный результатам работы актуарно-финансового центра. Центральное место в выпуске занимают статья А. Н. Ширяева [49], посвященная теории расчетов опционов европейского и американского типов для моделей с дискретным и непрерывным временем. В статье приводятся постановки задач инвестирования и хеджирования с использованием теории мартингалов, с позиции этой теории выводятся формулы Кокса-Росса-Рубинштейна (6) для дискретной модели и формула Блэка-Шоулса (4) для непрерывной модели. Дается подробное описание различных видов опционов, приводятся их платежные функции. Формулируется и доказывается важный результат финансовой математики о существовании мартингальной меры, т.е. меры относительно которой отношение стоимости хеджирующего портфеля и курса безрисковых активов является мартингалом. Оказывается, что для существования мартингальной меры необходимо и достаточно отсутствие арбитражных стратегий внутри

класса всех допустимых самофинансируемых стратегий.

Подробный обзор известных стохастических моделей приводится в книге А. Н. Ширяева “Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели.” [50], а также статье [48], составленной при участии А. Н. Ширяева, В. М. Кабанова, Д. О. Крамкова и А. В. Мельникова. Здесь же приводится описание основных инструментов срочного рынка, история развития финансовой математики, а также критика модели Блэка-Шоулса, акцентированная на неполную адекватность принятых в модели предположений.

Ряд статей, посвященных опционным стратегиям опубликован в журнале “Рынок ценных бумаг” [16, 32, 46]. В работе А. Кабицина [16] исследуются вопросы ценообразования опционов на валютный курс и стратегия биржевой игры. Выделяются позиционные и волатильные стратегии. Позиционная игра основана на прогнозе курса базового актива на момент исполнения и заключается в занятии соответствующей этому прогнозу позиции, которая пересматривается в зависимости от колебаний реального курса базового актива. Волатильные игры основаны на покупке опционов, которые по прогнозу инвестора недооценены рынком, и продаже переоцененных опционов. Автор указывает на трудности, связанные с применением данной стратегии, в частности с неопределенностью исходных данных (нестабильностью рынка). Предложены простые характеристики для определения состояния рынка и настроения игроков: величины равновесной премии (значение премии опционов колл и пут при их равенстве), диапазон цен исполнения опционов и степень его асимметрии, предполагаемый диапазон колебаний курса базового актива.

Изучению вопроса применения хеджирования в модели Блэка-Шоулса в условиях реального рынка посвящена статья А. И. Нейштадта и соавторов [32]. В статье кратко излагается методика хеджирования дельты (показатель опциона, характеризующий изменение стоимости опциона при изменении цены базового актива на один пункт), приводятся методы подготовки исходных данных для модели, в частности, расчет “исторической волатильности”. Для исследования границ применимости хеджирования по Блэку-Шоулсу авторами был проведен статистический эксперимент на американских данных о курсах акций. Результаты показали, что при оценке реальной стоимости хеджирования ошибка не превышала 100% в ту или иную сторону. Существенное возрастание реальной стоимости хеджирования по сравнению с теоритической объясняется резкими скачками курса акций (диффузионные модели котировки неадекватно описывают данные явления). Неизбежную неопределенность рынка можно компенсировать повышением продажной цены опциона. Это можно сделать, повышая ожидаемую волатильность базового актива.

В работе В. Четверикова [46] хеджирование опционного контракта демонстрируется для

предельно простого случая с двумя возможными конечными исходами для курса базового актива. В качестве справедливой цены рассматривается минимальная цены, при которой продавец не несет никаких потерь при любом изменении курса базового актива. Автором рассматриваются три условия, которым должна удовлетворять стратегия хеджера:

1. Условие полного размещения продавцом денежных средств;
2. Отсутствие у продавца потерь при реализации значения курса, меньшего цены исполнения;
3. Отсутствие у продавца потерь при реализации значения курса, большего цены исполнения.

Из этих условий выводится система двух неравенств, определяющая область допустимых стратегий. Из этой области выбирается точка, для которой стоимость опциона минимальна. Эта стоимость принимается в качестве справедливой цены опциона, а соответствующая стратегия принимается как хеджирующая. В статье анализируется перераспределение денежных средств и акций базового актива между всеми участниками биржевой игры: продавцом опциона, покупателем, банком, кредитующим продавца, и брокерской конторой. Автор делает вывод, что при справедливой премии за опцион рассматриваемая модельная ситуация является игрой только для покупателя опциона и брокерской конторы. На основании этого анализа автор делает вывод, что премия и хеджирующая стратегия Блэка-Шоулса обслуживают интересы лишь продавца опциона и не может претендовать на роль справедливого арбитра для всех участников рынка.

Задаче расчета стоимости опционов европейского типа в многошаговых моделях неполных рынков посвящены, например, работы В.М. Хаметова [12, 13]. В статье [12] рассмотрена задача минимаксного хеджирования европейского опциона. Принцип минимакса в задачах хеджирования и расчета стоимости опционов может быть сформулирован следующим образом: “. . . поскольку неизвестно, какое распределение вероятностей имеет последовательность цен рискованных активов, следует считать, что оно таково, что стоимость европейского опциона максимальна, при этом в рискованные активы надо вкладывать такой минимальный капитал, который позволил бы достоверно исполнить платежное обязательство” [12]. Такой подход ранее был предложен в работах [9, 64, 65, 72]. Статья [13] посвящена решению задачи расчета европейского опциона с квантильным критерием на неполном рынке с дискретным временем. Задачи квантильного хеджирования являются противопоставлением задачам определения суперхеджирующих стратегий, так как построенный таким образом хеджирующий портфель копирует выплаты по опциону с некоторой заданной вероятностью, т.е. допускает возможность неисполнения опциона в момент исполнения только за счет стоимости хеджи-

рующего портфеля. Задаче расчета стоимости опциона в многошаговой модели рынка также посвящены, например, работы О. В. Шатаева [47], Н. С. Дёмина и М. Ю. Шиширина [11], а также вторая часть монографии Г. Фёльмера и А. Шида [39].

Задача расчета стоимости и хеджирования опционов на неликвидных рынках рассматривалась, например, в работах У. Сетина и П. Шонбухера [57, 81]. Неликвидность рынка в рассмотренных математических моделях с непрерывным временем выражалась в зависимости стоимости базового актива от объема торгов. Полученные в работе [57] результаты проиллюстрированы на примере расчета колл-опциона европейского типа. Модели неликвидного рынка в предположении, что операции купли-продажи активов имеют неизвестную продолжительность по времени, ранее рассмотрены не были. При этом, математические модели, описывающие длительности рыночных транзакций, рассмотрены, например, в работах [87] и [61]. В указанных работах выдвигается предположение, что длительность транзакций случайна и имеет гамма-распределение, частным случаем которого является экспоненциальное распределение.

Аналитическому расчету стоимости американского колл-опциона посвящены работы Р. Минени [76], И. Каратзаса [70], Г. МакКина [73], В. М. Хаметова [41, 42] и многие другие. В работах [68] и [86] для оценки стоимости американского опциона был предложен подход, основанный на применении метода Монте-Карло.

Стратегия последовательного хеджирования опциона впервые была описана Сейденвергом в работе [82], где получила название “stop-loss start-gain strategy” (стратегия остановки потерь и начала выигрышей). Стратегия последовательного хеджирования заключается в полном покрытии опционной позиции (т.е. приобретении базового актива в полном объеме) при переходе состояния опциона от проигрыша к выигрышу, т.е. при превышении ценой базового актива уровня цены поставки, при обратном переходе хеджер полностью продает все активы в хеджирующем портфеле (открывает опционную позицию), чтобы избежать потерь, связанных с дальнейшим возможным падением стоимости. Для покупки активов хеджером используются заимствованные фонды. Таким образом, в любой момент времени, когда опцион может быть исполнен, опционная позиция остается закрытой. В работе П. Карра [56] было доказано, что в случае непрерывной по времени модели стратегия остановки потерь и начала выигрышей не является самофинансируемой. В зарубежной литературе данная стратегия рассматривалась также в работах [51, 54, 62, 67, 69, 78]. В работе К. Голье [67] рассмотрен вариант модификации стратегии остановки потерь и начала выигрышей, в котором при переходе опциона от состояния проигрыша к выигрышу в базовый актив инвестируются все средства, за исключением заранее установленного минимального резерва. В России страте-

гия остановки потерь и начала выигрышей впервые исследовалась Бурениным в [6] и [7], где получила название “стратегия последовательного хеджирования”. В статье А. И. Кибзуна и В. И. Губерниева [10] для дискретной мультипликативной модели ценообразования базового актива было получено значение средних потерь продавца американского опциона типа колл, использующего стратегию последовательного хеджирования. В этой же работе был предложен вариант модификации стратегии последовательного хеджирования, заключающийся во введении полосы “нечувствительности” хеджа. Данная модификация позволяет избавиться от основного недостатка стратегии последовательного хеджирования: чрезвычайно высоких затрат на хеджирование в случае частых колебаний цены базового актива относительно уровня цены поставки. Наиболее сильно данный недостаток проявляется в случае модели с непрерывным временем при ненулевых транзакционных издержках, когда затраты хеджера будут стремиться к бесконечности при выполнении предположения модели Блэка-Шоулса о процессе ценообразования. Это является следствием свойства бесконечного числа пересечений заданного уровня траекторией винеровского процесса, если этот уровень был достигнут. Однако, такая модификация стратегии последовательного хеджирования ранее исследована не была.

Из представленного обзора видно, что в настоящий момент остается неисследованной модификация стратегии последовательного хеджирования, заключающаяся во введении полосы “нечувствительности” хеджа. При этом данная модификация позволит избежать высоких затрат на хеджирование в случае частых колебаний цены базового актива относительно уровня цены поставки, особенно при ненулевых транзакционных издержках. Также в литературе остается открытым вопрос о хеджировании опционных контрактов при ненулевой заранее неизвестной длительности операций купли-продажи. Предположение о неизвестной ненулевой длительности операций купли-продажи становится особенно важным в случае неликвидных активов или чрезвычайно больших объемах торгов.

**Объектом исследования** диссертационной работы являются стратегии хеджирования колл-опционов европейского и американского типов.

**Цель и задачи работы.** Целью данной работы является исследование модификации стратегии последовательного хеджирования американского колл-опциона, заключающейся во введении полосы “нечувствительности” хеджирования, а также исследование задачи хеджирования европейского колл-опциона при неизвестной ненулевой длительности операций купли-продажи базового актива.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Найти выражение и исследовать свойства математического ожидания затрат на хеджи-

рования продавца колл-опциона американского типа, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования. Выработать алгоритм поиска оптимальной ширины полосы “нечувствительности”, минимизирующей средние затраты хеджера. Исследовать связь между задачами минимизации условного и безусловного математических ожиданий потерь хеджера.

2. Найти выражение для функции распределения потерь хеджера. Найти выражения для условной функции распределения потерь и квантили условного распределения потерь хеджера, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования, при известном количестве пересечений полосы “нечувствительности” траекторией курса базового актива. Исследовать связь между квантилями условного и безусловного распределений. Разработать алгоритм построения верхней и нижней оценок квантили безусловного распределения потерь.

3. Разработать алгоритм поиска оптимального управления в классе позиционных стратегий в двухшаговой задаче хеджирования европейского колл-опциона в случае, когда длительность операций купли-продажи базового актива случайна, а ее распределение зависит от объема приобретаемых/продаваемых активов.

**Методы исследования.** В диссертации используются современные методы системного анализа, математического моделирования, теории вероятности и случайных процессов, стохастического программирования, теории оптимизации и оптимального управления, в частности, метод динамического программирования.

**Достоверность результатов** обеспечивается строгостью математических постановок и доказательств утверждений, корректным использованием методов системного анализа, подтверждением теоретических результатов численными экспериментами.

**Научная новизна.** В диссертационной работе впервые исследована модификация стратегии последовательного хеджирования колл-опциона, заключающаяся во введении полосы “нечувствительности” хеджирования, а также впервые рассмотрена задача хеджирования опционных контрактов при заранее неизвестной ненулевой длительности операций купли-продажи базового актива. Среди полученных в работе результатов можно выделить следующие:

1. Получены выражения для математического ожидания и функции распределения потерь хеджера, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования, а также предложен алгоритм построения верхней и нижней оценок квантили распределения потерь

2. Предложен алгоритм поиска оптимальной ширины полосы “нечувствительности”, ми-



нимизирующей средние затраты хеджера, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования.

3. Получены выражения для функций условного и безусловного распределения затрат на хеджирование продавца колл-опциона американского типа, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования. Найдены точки разрыва и промежутки монотонности функций условного и безусловного распределений. Предложен метод построения верхней и нижней оценок квантили распределения затрат хеджера на основе значений квантилей условных распределений затрат хеджера при известном числе пересечений полосы “нечувствительности” траекторией цены базового актива.

4. Предложен алгоритм решения двухшаговой задачи хеджирования европейского колл-опциона при случайной длительности выполнения операций купли-продажи базового актива. Доказано существование не более чем двух точек локального минимума функции будущих потерь на последнем шаге в области допустимых управлений.

**Практическая ценность** работы состоит в том, что ее теоретические результаты могут служить основой для разработки математического и программно-алгоритмического обеспечения для решения прикладных задач в области финансовой и актуарной математики. Разработанные в диссертации методы и алгоритмы могут быть применены при решении задач управления техническими системами с релейными переключениями при наличии гауссовских помех в авиационной и ракетно-космической областях.

**Соответствие паспорту научной специальности.** В диссертации с использованием методов системного анализа исследованы сложные экономические и технические системы, проведены исследования оптимизационных задач, предложены алгоритмы и методы их решения (области исследования 1, 4, 5 специальности 05.13.01).

**Структура и объем диссертации.** Диссертация содержит введение, четыре главы, заключение и список используемой литературы. Работа состоит из 105 страниц, включая 10 рисунков и 3 таблицы. Список литературы содержит 87 наименований.

### Содержание диссертации

**Во введении** приведено обоснование актуальности выбранной темы диссертации, сформулирована цель и задачи исследования, аргументирована ее научная новизна и практическая ценность. Кратко изложено содержание глав диссертации.

**В первой главе** дается определение стратегии последовательного хеджирования. Приводится утверждение о несамофинансируемости стратегии последовательного хеджирования, а также дано выражение для средних потерь хеджера, использующего стратегию по-

следовательного хеджирования, в случае дискретной мультипликативной модели ценообразования базового актива. В первой главе вводится в рассмотрение модификация стратегии последовательного хеджирования, заключающаяся во введении полосы “нечувствительности” хеджирования, содержащей уровень цены поставки. Покупка и продажа полного объема базового актива в предложенной модификации осуществляется при пересечении указанной полосы “нечувствительности” траекторией курса базового актива в направлениях “снизу вверх” и “сверху вниз”. Предлагается математическая модель с непрерывным временем, в которой в качестве процесса ценообразования выбран процесс геометрического броуновского движения. В предложенной математической модели учитывается возможность досрочного исполнения опциона держателем в случае опциона американского типа, в том числе в моменты, когда опционная позиция остается открытой. Момент исполнения и цена базового актива, при которой опцион был исполнен предполагаются случайными. Для процесса геометрического броуновского движения приведены доказательства утверждений о распределении момента первого достижения заданного уровня и распределении числа пересечений горизонтальной прямолинейной полосы траекториями процесса.

**Во второй главе** получены выражения для безусловного и условного математического ожидания затрат хеджера, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования. Условное математическое ожидание определяется при фиксированном моменте первого достижения нижней границы полосы “нечувствительности” траекторией курса базового актива. Безусловное математическое ожидание может быть использовано для оценки стоимости опциона, условное математическое ожидание характеризует средние затраты хеджера за время, оставшееся после достижения ценой базового актива уровня цены поставки, до истечения срока действия контракта по уже заключенному опционному контракту. Предложен алгоритм поиска оптимальной ширины полосы “нечувствительности” хеджирования, минимизирующей средние затраты хеджера. Исследована связь между задачами минимизации условного и безусловного математического ожидания затрат.

Получены выражения для функции распределения затрат хеджера. Исследованы свойства монотонности и непрерывности функции распределения затрат, найдены ее точки разрыва и значения левых пределов в точках разрыва. Предложен алгоритм построения оценок квантили безусловного распределения затрат хеджера. В алгоритме используется доказанное свойство монотонности квантилей условных распределений при известном количестве пересечений полосы “нечувствительности” траекторией курса базового актива по количеству пересечений полосы. Для иллюстрации работы предложенных алгоритмов приводятся результаты численных экспериментов.

**В третьей главе** исследована двухшаговая задача хеджирования европейского коллопциона на неликвидном рынке. В предложенной математической модели предполагается, что время исполнения каждой операции купли-продажи базового актива случайно и имеет экспоненциальное распределение, параметр которого зависит от объема продаваемого или покупаемого базового актива. Исследована задача минимизации средних затрат на хеджирование, в которой ведется поиск оптимального управления на первом и втором шаге в классе позиционных управлений. Под управлением на каждом шаге понимается объем покупки или продажи базового актива. Данная задача решается методом динамического программирования. Приведено доказательство теоремы о виде функции будущих потерь на последнем шаге, доказано существование не более чем двух точек локального минимума у функции будущих потерь на последнем шаге в области допустимых стратегий. Предложен численный алгоритм поиска оптимального управления на первом шаге. Работа алгоритма иллюстрируется на примере.

**В четвертой главе** рассматривается задача удержания автоматического аэростата по высоте в фиксированной полосе высот в течение заданного времени полета  $T$ . Управление аэростатом осуществляться путем сброса балласта на нижней границе полосы высот и частичным выпуском через клапан рабочего газа на верхней границе таким образом, чтобы при отсутствии внешних возмущений после достижения какой-либо границы полосы аэростат двигался с одной и той же по модулю скоростью в сторону противоположной границы полосы. Предложен численный алгоритм поиска оптимальной массы одного груза и оптимального количества грузов в балласте в задаче минимизации среднего времени нахождения аэростата за пределами указанной полосы высот при ограничении, что требуемое для управления аэростатом в течение времени полета количество грузов не превысит имеющийся запас с заданной вероятностью.

**В заключении** подведены основные результаты данной работы, сформулированы результаты, представляемые к защите, а также сформулированы некоторые перспективные направления исследований в области исследования стратегии последовательного хеджирования, а также применения разработанных методов в иных прикладных областях.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались на научных семинарах кафедры теории вероятностей Московского авиационного института (рук. проф. Кибзун А.И.), научном семинаре “Математические модели принятия решений” Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (рук. проф. Береснев В.Л.), научном семинаре лаборатории №7 Адаптивных и робастных систем им. Я.З. Цыпкина (рук. проф. Поляк Б.Т.).

Материалы диссертации представлялись на ряде конференций: Международный молодежный научный форум “ЛОМОНОСОВ-2013” (Россия, Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова), IV научно-техническая конференция молодых ученых и специалистов “Актуальные вопросы развития систем и средств ВКО”, посвященная 105-летию со дня рождения академика А.А. Расплетина (Россия, Москва, 2013 г.), 40-ая международная молодежная научная конференция “Тагаринские чтения” (Россия, Москва, МАТИ, 2014 г.), 6-я Традиционная молодежная школа “Управление, информация и оптимизация” (Россия, Московская область, Григорчиково, 2014 г.), XI Всероссийская школа-конференция молодых ученых и специалистов “Управление большими системами” (Россия, Арзамас, 2014 г.), EURO Mini Conference on Stochastic Programming and Energy Applications ECSP-2014 (Франция, Париж, 24-26 сентября 2014 г.), 13-я Международная конференция “Авиация и космонавтика — 2014” (Россия, Москва, МАИ ГТУ, 2014 г.), 20-я Международная конференция “Системный анализ, управление и навигация” (Россия, Евпатория).

Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 15-08-02833 А “Разработка вероятностно-гарантирующих алгоритмов управления техническими объектами”).

**Публикации.** Основные результаты опубликованы в 3 научных статьях [24–26] в журналах, входящих в перечень ВАК, в 2 статьях [27, 84] в сборниках и материалах конференций, а также в сборниках тезисов докладов конференций [28, 37, 38]. Общее количество публикаций по теме данной диссертации — 8.

**Благодарности.** Автор выражает благодарность научному руководителю профессору А. И. Кибзуну и доценту кафедры теории вероятностей МАИ С. Л. Семакову за разностороннюю помощь, оказанную в процессе исследований и написания диссертации.

# Глава 1.

## Модификация стратегии последовательного хеджирования

В данной главе приводится описание стратегии последовательного хеджирования, заключающейся в полном покрытии опционной позиции при превышении ценой базового актива уровня цены поставки, и продаже всего имеющегося объема базового актива при падении уровня цены базового актива ниже уровня цены поставки.

В разделе 1.1 приводится выражение для средних затрат продавца колл-опциона, использующего стратегию последовательного хеджирования, для модели дискретной мультипликативной модели ценообразования базового актива. Для модели финансового рынка с непрерывным временем приводится доказательство несамостоятельности стратегии последовательного хеджирования.

В разделе 1.2 предлагается вариант модификации стратегии последовательного хеджирования, заключающийся во введении полосы “нечувствительности” хеджа. Данная модификация позволяет избежать чрезмерного роста затрат на хеджирование в случае частых колебаний цены базового актива относительно уровня цены поставки. Для учета возможности досрочного исполнения опциона американского типа держателем опциона предполагается, что исполнение опциона может произойти при любом пересечении полосы “нечувствительности” с фиксированной вероятностью.

В разделе 1.3 приводятся основные свойства процесса ценообразования, утверждения о распределении момента первого достижения уровня цены поставки траекторией цены базового актива и о распределении числа пересечений полосы “нечувствительности” хеджа траекторией цены базового актива в направлениях “сверху вниз” и “снизу вверх”, а также распределение общего числа пересечений.

В первой и второй главах используются следующие обозначения:

$K$  — цена поставки;

$T$  — время жизни опциона;  
 $S$  — стартовая цена базового актива;  
 $r$  — безрисковая процентная ставка;  
 $\sigma$  — волатильность цены базового актива;  
 $\mu$  — коэффициент линейного тренда в изменении стоимости базового актива;  
 $\theta$  — процент комиссионных издержек при покупке базового актива;  
 $I\{A\}$  — индикаторная функция события  $A$ ;  
 $\eta(\cdot)$  — функция Хевисайда;  
 $\mathcal{P}\{A\}$  — вероятность события  $A$ ;  
 $\mathbf{M}[\cdot]$  — математическое ожидание случайной величины;  
 $W(t)$  — винеровский процесс;  
 $S(t)$  — стоимость базового актива в момент времени  $t$ ;  
 $B(t)$  — стоимость безрискового актива в момент времени  $t$ ;  
 $V(t)$  — процесс стоимости хеджирующего портфеля;  
 $F(t) = \frac{S(t)}{B(t)}$  — форвардная цена базового актива;  
 $\Lambda_t(y)$  — локальное время процесса ценообразования на уровне  $y$  к моменту времени  $t$ ;  
 $F(\rho)$  — функция распределения относительных приращений цены базового актива в дискретной мультипликативной модели ценообразования;  
 $N$  — горизонт хеджирования в дискретной мультипликативной модели;  
 $\Delta = T/N$  — шаг дискретизации в дискретной мультипликативной модели;  
 $H$  — полоса “нечувствительности” хеджа;  
 $d$  — относительная ширина полосы “нечувствительности” хеджа;  
 $\tau$  — момент первого достижения уровня  $K$  цены поставки траекторией цены  $S(t)$  базового актива;  
 $F_\tau(t, x, K)$  — значение функции распределения СВ  $\tau$  в точке  $t$  при условии, что  $S(0) = x$ ;  
 $f_\tau(t, x, K)$  — плотность распределения СВ  $\tau$  в точке  $t$  при условии, что  $S(0) = x$ ;  
 $\eta^+$  — количество пересечений полосы  $H$  траекторией  $S(t)$  в направлении “снизу вверх” за время  $T$ ;  
 $\eta^-$  — количество пересечений полосы  $H$  траекторией  $S(t)$  в направлении “сверху вниз” за время  $T$ ;  
 $P(i, t_0)$  — вероятность того, что суммарное количество пересечений  $\eta^+ + \eta^-$  полосы  $H$  траекторией  $S(t)$  равно  $i$  при условии, что цена  $S(t)$  достигла уровень  $K$  цены поставки в момент  $t_0$ ;

$P(i)$  — вероятность того, что суммарное количество пересечений  $\eta^+ + \eta^-$  полосы  $H$  траекторией  $S(t)$  равно  $i$ ;

$\rho^+$  — затраты хеджера при пересечении “снизу вверх” полосы  $H$  траекторией  $S(t)$ ;

$\rho^-$  — затраты хеджера при пересечении “сверху вниз” полосы  $H$  траекторией  $S(t)$ ;

$p(d)$  — вероятность исполнения опциона держателем при одном пересечении полосы  $H$  траекторией  $S(t)$ ;

$\nu_i$  — случайная величина, определяющая факт исполнения опциона держателем при  $i$ -м пересечении полосы  $H$  траекторией  $S(t)$ ;

$\zeta$  — цена базового актива в момент исполнения опциона держателем, за вычетом цены поставки  $K$ ;

$F_\zeta(\cdot)$  — функция распределения случайной величины  $\zeta$ ;

$l_i$  — затраты на хеджирование при  $i$ -м пересечении полосы  $H$  траекторией цены  $S(t)$  базового актива;

$L(d)$  — суммарные затраты хеджера, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования, при фиксированной ширине  $d$  полосы “нечувствительности” хеджа.

## 1.1. Последовательное хеджирование

Стратегия последовательного хеджирования заключается в полном покрытии опционной позиции (т.е. приобретении базового актива в полном объеме) при переходе состояния опциона от проигрыша к выигрышу, т.е. при превышении ценой базового актива уровня цены поставки, при обратном переходе хеджер полностью продает все активы в хеджирующем портфеле (открывает опционную позицию), чтобы избежать потерь связанных с дальнейшим возможным падением стоимости. Для покупки активов хеджером используются заимствованные фонды.

Стратегия последовательного хеджирования является простым и эффективным правилом управления хеджирующим портфелем продавцом колл-опциона. Впервые стратегия была описана в [82], где получила название “stop-loss start-gain strategy” (стратегия остановки потерь и начала выигрышей). В России данная стратегия впервые исследовалась Бурениным в [6] и [7], где получила название “стратегия последовательного хеджирования”. В [10] для дискретной мультипликативной модели ценообразования получено значение средних потерь продавца американского опциона типа колл, использующего стратегию последовательного хеджирования.

При использовании хеджером моделей, описанных ранее, хеджер может продифференцировать формулу цены опциона, выбранную в зависимости от принятой ценовой модели, по интересующему его параметру (например волатильности) и приравнять производную к нулю, подобрав соответствующие коэффициенты хеджа. Тем самым хеджер будет страховать свой портфель от колебаний выбранного параметра модели. Такой подход называется “частичным покрытием”.

Преимущество стратегии последовательного хеджирования перед частичным покрытием заключается в том, что стратегии частичного покрытия страхуют портфель хеджера от колебаний только одного параметра, кроме того, для реализации этих стратегий требуется постоянная перебалансировка портфеля, в то время как при использовании стратегии последовательного хеджирования перебалансировка происходит только в моменты пересечения курсом актива уровня цены поставки базового актива, и для ее осуществления не требуется трудоемких вычислений объема вложений в рисковый актив в каждый момент времени.

### 1.1.1. Доказательство несомофинансируемости стратегии

В случае непрерывной модели цены акции базового актива стратегия последовательного хеджирования может показаться самофинансируемой, т.е. не требующей дополнительных инвестиций, однако П. Карр [56] доказал несомофинансируемость стратегии последовательного хеджирования и вывел с помощью этой стратегии новую формулу для оценки европейского колл-опциона, эквивалентную формуле Блэка-Шоулса. Пусть изменение цены базового актива описывается случайным процессом, определяемым следующим уравнением:

$$\begin{aligned} dS(t) &= [\mu dt + \sigma dW(t)]S(t), \\ S(0) &= S. \end{aligned}$$

А стоимость безрискового актива в момент времени  $t$  равна

$$B(t) = e^{-r(T-t)},$$

где  $r$  — безрисковая процентная ставка.

Как и ранее, хеджирующий портфель в момент времени  $t$  будет состоять из  $n(t)$  акций базового актива и  $m(t)$  безрисковых ценных бумаг. Стоимость хеджирующего портфеля в момент времени  $t$  равна

$$V(t) = n(t)S(t) + m(t)B(t), \tag{1.1}$$



где, согласно стратегии последовательного хеджирования,

$$m(t) = -I\{S(t) > KB(t)\}K,$$

$$n(t) = I\{S(t) > KB(t)\}, \text{ для всех } t \in [0, T].$$

Для определенности положим, что для опциона без выигрыша позиция подписчика опциона остается открытой. Подставим выражения для  $m(t)$  и  $n(t)$  в (1.1) и получим, что стоимость портфеля в момент времени  $t$  равна нижней границе стоимости колл-опциона с ценой исполнения  $K$  и сроком поставки  $T$ :

$$V(t) = -I\{S(t) > KB(t)\}KB(t) + I\{S(t) > KB(t)\}S(t) = \max\{0, S(t) - KB(t)\},$$

для всех  $t \in [0, T]$ . Поскольку  $B(T) = 1$  на момент времени  $T$  хеджирующий портфель копирует выплаты колл-опциона:

$$V(T) = \max\{0, S(T) - K\}.$$

Стратегия последовательного хеджирования была бы самофинансируемой, если бы выполнялось условие

$$V(t) = V(0) + \int_0^t m(v) dB(v) + \int_0^t n(v) dS(v)$$

или

$$\frac{V(t)}{B(t)} = \frac{V(0)}{B(0)} + \int_0^t n(v) d\left(\frac{S(v)}{B(v)}\right),$$

для всех  $t \in [0, T]$ .

Пусть  $F(t) = \frac{S(t)}{B(t)} = S(t)e^{rt}$  — форвардная цена актива. Используя это обозначение, условие самофинансирования можно записать как

$$\max\{0, F(t) - K\} = \max\{0, F(0) - K\} + \int_0^t I\{F(v) > K\} dF(v).$$

Арбитражная возможность определяется как самофинансируемая стратегия, не требующая начальных инвестиций, не допускающая отрицательных значений стоимости портфеля и обеспечивающая некоторую ненулевую вероятность положительных выплат:

- 1)  $V(0) = 0$ ;
- 2)  $\mathcal{P}\{V(T) \geq 0\} = 1$ ;
- 3)  $\mathcal{P}\{V(T) > 0\} > 0$ .

Если рассмотреть стоимость хеджирующего портфеля при стратегии последовательного хеджирования для опциона, стартующий с проигрышем или без выигрыша, то она удовлетворяет всем трем условиям арбитражной возможности и кажется самофинансируемой. Однако,

в рамках модели Блэка-Шоулса арбитражной возможности существовать не должно. Разрешение этого парадокса заключается в том, что данная стратегия не является самофинансируемой. Действительно, форвардная цена актива имеет разрывную первую производную. Однако обобщенная форма леммы Ито [71] имеет место для выпуклых функций, которые не обязательно являются непрерывно-дифференцируемыми:

$$g(F(t)) = g(F(0)) + \int_0^t D^-g(F(v))dF(v) + \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda_t(y)\mu(dy), \quad (1.2)$$

где

$$D^-g(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{g(y) - g(y - \varepsilon)}{\varepsilon}$$

является левой производной  $g$ ,  $\mu(a, b) = D^-g(b) - D^-g(a)$ . Полагая  $g(y) = \max\{0, y - K\}$ , получим  $D^-g(y) = I\{y > K\}$ . Подстановка этой функции в (1.2) дает формулу Танака-Мейера [71]:

$$\max\{0, F(t) - K\} = \max\{0, F(0) - K\} + \int_0^t I\{F(v) > K\}dF(t) + \Lambda_t(K). \quad (1.3)$$

Без учета последнего слагаемого, уравнение (1.3) представляет собой условие самофинансирования. Однако, последнее слагаемое положительно с ненулевой вероятностью для любого  $t$ . Следовательно, условие самофинансирования не выполняется.

Стратегия последовательного хеджирования не является самофинансируемой из-за дополнительного члена в обобщенной форме леммы Ито. Этот дополнительный член отличен от нуля благодаря тому, что геометрическое броуновское движение пересекает уровень цены поставки (в случае его достижения) бесконечно много раз. Как только цена актива достигает цены поставки, она бесконечно часто возвращается к данному уровню на любом последующем интервале времени, независимо от его продолжительности. Каждый раз при возвращении цены актива инвестор должен принять решение: держать ли позицию открытой или нет. Если он решает держать позицию открытой, то требуется дополнительное финансирование в случае последующего роста цены, если решает держать закрытой — то инвестор несет потери в случае падения цены. Величина дополнительных затрат на момент времени  $t$  равна  $\Lambda_t(x)$ . Величина  $\Lambda_t(x)$  соответствует локальному времени процесса ценообразования на уровне  $x$  к моменту времени  $t$ .

Используя понятие локального времени, П. Карр получил новое представление стоимости европейского колл-опциона в рамках модели Блэка-Шоулса:

$$C(0) = \max(0, S - KB(0)) + B(0)\mathbf{M}[\Lambda_t(K)], \quad (1.4)$$

где первое слагаемое является по определению внутренней стоимостью опциона, то есть выплатой по опциону если срок исполнения был бы равен нулю. Второе слагаемое называется временной стоимостью опциона, т.е. дополнительной платой за временной риск подписчика. Из формулы (1.4) следует, что временная цена опциона есть текущее значение математического ожидания его локального времени. Она также является ожидаемой величиной внешнего финансирования стратегии.

В своей работе П. Карр показал, что ожидаемое локальное время может быть представлено как

$$\mathbf{M}[\Lambda_t(K)] = \frac{\sigma^2 K^2}{2} \int_0^T \frac{1}{\sigma K \sqrt{t}} \Phi' \left( \frac{\ln(F(0)/K) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) dt,$$

где  $\Phi'(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ .

Подстановка этого выражения в (1.4) дает новую оценку премии за опцион

$$C(0) = \max(0, S - Ke^{-rT}) + e^{rT} \frac{\sigma K}{2} \int_0^T \frac{1}{\sqrt{t}} \Phi' \left( \frac{\ln(S/Ke^{-rT}) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}} \right) dt \quad (1.5)$$

Это разложение эквивалентно формуле Блэка-Шоулса (4). Чтобы убедиться в этом, выпишем формулу Блэка-Шоулса как явную функцию волатильности  $\sigma$ :

$$C(\sigma) = S_0 \Phi(d_1(\sigma)) - Ke^{-rT} \Phi(d_2(\sigma)),$$

где  $d_1(\sigma) \triangleq \left( \ln \left( \frac{S_0}{Ke^{-rT}} \right) + \frac{\sigma^2 T}{2} \right) / \sigma \sqrt{T}$ ,  $d_2(\sigma) \triangleq d_1(\sigma) - \sigma(\sqrt{T})$ .

Дифференцирование по волатильности дает

$$C'(\sigma) = Ke^{-rT} \Phi'(d_2(\sigma)) \sqrt{T}.$$

Обратно, интегрируя по волатильности, получим

$$C(\sigma) = Ke^{-rT} \int_0^\sigma \Phi'(d_2(\eta)) \sqrt{T} d\eta + \max(0, S - Ke^{-rT}). \quad (1.6)$$

Используя замену  $t = (T/\sigma^2)\eta^2$ , получим выражение (1.5).

Эта стратегия может также применяться к другим стохастическим процессам. Для непрерывных процессов, отличных геометрического броуновского движения, может оказаться проще работать с собственным интегралом по времени, аналогичным (1.5), чем с несобственным пространственным интегралом, аналогичным (1.6).

### 1.1.2. Средние потери при использовании стратегии последовательного хеджирования

В работе В. И. Губерниева и А. И. Кибзуна [10] был произведен расчет средних потерь хеджера, использующего стратегию последовательного хеджирования для дискретной мультипликативной модели ценообразования акций базового актива.

Примем модель ценообразования, при которой относительные приращения цены акций  $\rho_n$  являются независимыми в совокупности случайными величинами, имеющими некоторое абсолютно непрерывное распределение с нулевым математическим ожиданием и некоторой конечной (весьма малой по сравнению с величиной курса) дисперсией  $\sigma^2\Delta$ , где  $\Delta = T/N$ ,  $T$  — крайний срок поставки,  $n$  — число разбиений интервала  $[0, T]$ ,  $\Delta$  — шаг дискретизации. Таким образом

$$\rho_n \sim F(\rho), \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

при этом модель котировки базового актива будет следующей:

$$S_n = S_{n-1}(1 + \rho_n) = S_0 \cdot \prod_{k=1}^n (1 + \rho_k), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (1.7)$$

В соответствии со стратегией последовательного хеджирования, в момент времени  $n_1$ , когда  $S_{n_1-1} \leq K < S_{n_1}$  эмитент покупает  $M$  акций базового актива по цене  $S_{n_1}$  и держит их до тех пор, пока  $S_n > K$ . В момент  $n_2$ , когда  $S_{n_2-1} > K \geq S_{n_2}$ , хеджер продает купленные ранее  $M$  акций по цене  $S_{n_2}$ .

В статье был решен следующий вопрос: каковы будут ожидаемые затраты хеджера при проведении стратегии последовательного хеджирования для выбранной модели котировки базового актива? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема:

*Теорема 1 ([10]). Пусть выполнены следующие условия:*

- (i) Случайные величины  $S_n$  подчиняются рекуррентному соотношению (1.7), где  $\rho_n$  имеют распределение  $F(\rho)$  и независимы в совокупности;
- (ii)  $P_n(s)$  — функция распределения случайной величины  $S_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ;
- (iii) Случайная величина  $L_N$  определяет потери хеджера и определяется соотношением

$$L_N = \sum_{n=1}^N l_n, \quad \text{где } l_n = \begin{cases} S_n, & \text{если } S_{n-1} \leq K < S_n \\ -S_n, & \text{если } S_{n-1} > K \geq S_n \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

- (iv) Функция  $G_n(y)$  определяется соотношением

$$G_n(y) = \int_0^{\infty} \left( f\left(\frac{K+y-s}{s}\right) \frac{\eta(K-s)}{s} + f\left(\frac{K-y-s}{s}\right) \frac{\eta(K-s)}{s} \right) dP_n(s),$$

где  $f(\rho) = F'(\rho)$  — плотность распределения случайных величин  $\rho_n$ , причем  $x \cdot f(x) \rightarrow_{x \rightarrow \infty} 0$ ,  $\eta(x)$  — функция Хевисайда;

тогда математическое ожидание величины  $L_N$  вычисляется по формуле

$$\mathbf{M}[L_N] = \sum_{n=1}^N \int_0^{\infty} G_{n-1}(y) y dy. \quad (1.8)$$

*Замечание 1.* Пусть все инвесторы согласны с тем, что процесс котировки базового актива подчиняется дискретной мультипликативной модели (1.7). Тогда, согласно утверждению теоремы, ожидаемые потери хеджера при проведении последовательного хеджирования колл-опциона на этот актив на момент  $n$  рассчитываются по формуле (1.8).

Теорема 1 оставляет открытым вопрос о нахождении функции распределения  $P_n(s)$ . Следующая теорема дает асимптотическую оценку этой функции.

*Теорема 2.* Пусть выполнены следующие условия:

(i) Случайные величины  $S_n$  подчиняются рекуррентному соотношению (1.7), где  $\rho_n$  имеют распределение  $F(\rho)$  и независимы в совокупности;

(ii)  $P_n(s)$  — функция распределения случайной величины  $S_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$

$$\tilde{P}_n(s) = \int_0^s \frac{1}{x \sqrt{2\pi n \gamma}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\left(\ln \frac{x}{S_0} + \frac{n\gamma}{2}\right)^2}{n\gamma}} dx, \text{ где } \gamma \triangleq \ln(1 + \sigma^2 \Delta), s > 0;$$

(iii) функции  $G_n(y)$  и  $\tilde{G}_n(y)$  определяются соотношениями

$$G_n(y) = \int_0^{\infty} \left( f\left(\frac{K+y-s}{s}\right) \frac{\eta(K-s)}{s} + f\left(\frac{K-y-s}{s}\right) \frac{\eta(K-s)}{s} \right) dP_n(s),$$

$$\tilde{G}_n(y) = \int_0^{\infty} \left( f\left(\frac{K+y-s}{s}\right) \frac{\eta(K-s)}{s} + f\left(\frac{K-y-s}{s}\right) \frac{\eta(K-s)}{s} \right) d\tilde{P}_n(s),$$

где  $f(\rho) = F'(\rho)$  — плотность распределения случайных величин  $\rho_n$ , причем  $x \cdot f(x) \rightarrow_{x \rightarrow \infty} 0$ ,  $\eta(x)$  — функция Хевисайда;

Тогда

$$\forall y > 0 |G_N(y) - \tilde{G}_N(y)| \rightarrow 0, \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Таким образом, выражение для математического ожидания потерь хеджера при проведении стратегии последовательного хеджирования для дискретной мультипликативной модели ценообразования базового актива полностью определено.

## 1.2. Модификация стратегии последовательного хеджирования

В работе [10] была получена величина средних потерь хеджера, использующего стратегию последовательного хеджирования, для дискретно-мультипликативной модели коти-

ровки базового актива, в случае нулевых транзакционных выплат. Вместе с тем, в случае, когда транзакционные выплаты не равны нулю, у стратегии последовательного хеджирования проявляется существенный недостаток: потери хеджера становятся неоправданно высоки при частых колебаниях курса базового актива относительно цены поставки. В пределе, если рассматривать непрерывную по времени модель, потери хеджера будут стремиться к бесконечности. Это связано со свойством бесконечного числа пересечений заданного уровня траекторией винеровского процесса или геометрического броуновского движения, если этот уровень был достигнут. Для избежания подобного явления может быть предложена модификация метода последовательного хеджирования, заключающаяся во введении полосы “нечувствительности” хеджа. В соответствии с модифицированной стратегией хеджер будет полностью покрывать опционную позицию (покупать необходимый объем базового актива) при пересечении курсом базового актива некоторой полосы, содержащей уровень цены поставки, в направлении “снизу вверх”. Соответственно, хеджер полностью продает акции при пересечении полосы “нечувствительности” траекторией цены актива в направлении “сверху вниз”. Данная модификация впервые была предложена в работе [10], однако подробный анализ модификации ранее не проводился.

### 1.2.1. Математическая модель

Пусть цена поставки базового актива равна  $K$ . Определим модифицированную стратегию последовательного хеджирования следующим образом: будет производиться полное покрытие опционной позиции, когда рыночная цена базового актива превышает уровень  $K(1 + d)$ , где  $d$  — некоторое значение, соответствующее ширине полосы “нечувствительности” при хеджировании. Продажа актива будет осуществляться при падении цены актива ниже уровня  $K$ , т.е. цены поставки, это должно уберечь хеджера от потерь при дальнейшем возможном падении цены актива. Введем полосу “нечувствительности” хеджа

$$H \triangleq \{(y, t) : y \in [K, K(1 + d)], t \in [0, T]\}, \quad (1.9)$$

где  $T$  - срок, в течение которого опцион может быть исполнен.

Рассматривается только односторонняя полоса, расположенная выше уровня цены поставки  $K$ . В те моменты времени, когда цена актива ниже цены поставки, опцион не может быть исполнен, так как это приводит к потерям со стороны подписчика опциона, а значит опционная позиция должна оставаться открытой, чтобы избежать потерь, связанных с возможным дальнейшим падением цены актива.

Для дальнейших расчетов потерь хеджера примем модель ценообразования, при которой

все относительные приращения цены актива за малое время  $\Delta t$  являются независимыми в совокупности случайными величинами, имеющими нормальное распределение с ненулевым математическим ожиданием и некоторой конечной (весьма малой по сравнению с величиной курса) дисперсией, пропорциональной  $\Delta t$ . Указанным условиям удовлетворяет случайный процесс, являющийся решением следующего стохастического дифференциального уравнения

$$dS(t) = S(t) (\mu dt + \sigma dW(t)), \quad t \in [0, T], \quad (1.10)$$

с начальным условием  $S(0) = S$ , где  $W(t)$  - стандартный винеровский процесс,  $S$  - стартовая цена актива, не превышающая  $K$  (опцион с проигрышем),  $\mu$  - коэффициент линейного сноса,  $\sigma$  - волатильность. Решением уравнения (1.10) является случайный процесс

$$S(t) = S(0)e^{\mu t + \sigma W(t)}, \quad t \in [0, T]. \quad (1.11)$$

Эта модель ценообразования была предложена П. Самюэльсоном в [80] в 1965 году. Она является развитием модели, предложенной Л. Башелье [53] в 1900 году. Свойства процесса  $S(t)$  будут рассмотрены позднее.

Пусть  $\eta^+$  — число пересечений полосы (1.9) “снизу вверх”, а  $\eta^-$  — “сверху вниз”, траекториями процесса (1.11) за время  $T$ . Под пересечением будем понимать прохождение полосы насквозь траекторией процесса  $S(t)$ . Введем в рассмотрение случайную величину  $\tau$ , являющуюся моментом первого достижения траекторией процесса  $S(t)$  уровня  $K$ :

$$\tau \triangleq \min\{t : S(t) = K\}. \quad (1.12)$$

Далее, пусть  $\tau_1$  - момент первого достижения уровня  $K(1 + d)$  траекторией процесса  $S(t)$ , если оно произошло, т.е.

$$\tau_1 \triangleq \min\{t : S(t) = K(1 + d), \tau \leq t \leq T\}.$$

Если пересечение не произошло или указанный временной интервал пуст, то полагаем  $\tau_1 = T + 1$ . Пара  $(\tau, \tau_1)$  задает координаты первого пересечения “снизу вверх” полосы  $H$  траекторией процесса  $S(t)$ . В общем случае, момент  $i$ -го пересечения полосы  $H$  будет определяться величиной

$$\tau_i = \begin{cases} \min\{t : S(t) = K(1 + d), t \leq T\}, & \text{если } i = 1, \\ \min\{t : S(t) = K(1 + d), \tau_{i-1} < t \leq T\}, & \text{если } i = 2m + 1, \\ \min\{t : S(t) = K, \tau_{i-1} < t \leq T\}, & \text{если } i = 2m, \\ T + 1, & \text{если пересечения нет,} \end{cases}$$

где  $m = 1, 2, \dots$ . Для любого натурального  $m$  пара  $(\tau_{2m-1}, \tau_{2m})$  задает координаты  $m$ -го пересечения полосы  $H$  “сверху вниз”. Пересечения “снизу вверх” будут иметь нечетный порядковый номер, а “сверху вниз” — четный.

Величины  $\eta^+$  и  $\eta^-$  случайны и зависимы. Каждому пересечению “сверху вниз” должно предшествовать пересечение “снизу вверх”. Для каждой реализации  $\eta^-$  величина  $\eta^+$  может принимать значения, равные  $\eta^-$  и  $\eta^- + 1$ . Затраты хеджера при одном пересечении “снизу вверх”, в случае если опцион не был исполнен преждевременно, обозначим как  $\rho^+$ , а при пересечении “сверху вниз” — как  $\rho^-$ . Тогда

$$\rho^+ = K(1+d)(1+\theta), \quad \rho^- = -K,$$

где  $\theta$  — комиссионные издержки при покупке актива.

Устанавливая ненулевую ширину полосы “нечувствительности”, хеджер принимает на себя риск, связанный с исполнением опциона в момент времени, когда у хеджера нет необходимого количества единиц базового актива. Подписчик может исполнить опцион как при движении курса базового актива вверх, т.е. при пересечении полосы  $H$  “снизу вверх”, так и при падении рыночной стоимости базового актива, т.е. при пересечении “сверху вниз”.

Если считать, что исполнение опциона является случайным событием, то естественно предположить, что вероятность исполнения опциона при открытой позиции будет возрастать с ростом величины  $d$ , т.е. с ростом максимальной потенциальной выручки подписчика. Заметим, что при нулевой ширине полосы, что соответствует использованию простой стратегии последовательного хеджирования, исполнение опциона при открытой позиции невозможно, т.е. вероятность досрочного исполнения должна быть равна нулю. Будем считать, что при фиксированном параметре  $d$  исполнение опциона держателем при каждом пересечении полосы, если опцион не был исполнен прежде, может произойти с одной и той же вероятностью  $p(d)$ , где  $p(\cdot) : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ , при этом  $\lim_{d \rightarrow 0} p(d) = 0$ ,  $\lim_{d \rightarrow \infty} p(d) = 1$ ,  $p(d)$  строго возрастает по  $d$ . Случай, когда  $d \rightarrow \infty$ , соответствует отсутствию хеджирования вообще.

Описанным выше условиям удовлетворяет, например, вероятность, определяемая следующим выражением

$$p(d) = 1 - e^{-\lambda K d}, \quad \lambda > 0. \quad (1.13)$$

Нетрудно проверить, что

$$p(0) = 0, \quad \lim_{d \rightarrow \infty} p(d) = 1.$$

Выбор экспоненты обусловлен тем, что она обеспечивает достаточно быстрый рост вероятности исполнения опциона с ростом потенциальной выручки подписчика. Параметр  $\lambda$  в



рассматриваемой модели может быть определен из экономических соображений. Так, исходя из рыночных ожиданий, текущей обстановки и условий опционного контракта, хеджер может определить цену актива, при которой опцион будет исполнен с высокой вероятностью  $(1 - \alpha)$ , где  $\alpha \ll 1$ . На основании этого можно определить максимальное “разумное” значение ширины полосы “нечувствительности” хеджирования  $d_{max}$ . Тогда значение параметра  $\lambda$  может быть найдено как решение уравнения

$$1 - e^{-\lambda K d_{max}} = 1 - \alpha,$$

т.е.

$$\lambda = -\frac{\ln \alpha}{K d_{max}}. \quad (1.14)$$

Введем в рассмотрение последовательность случайных величин  $\nu_i$ , определенную следующим образом:

1. СВ  $\nu_i$  принимают значения 0 и 1,  $i = 1, 2, \dots$ ;
2.  $\mathcal{P}\{\nu_1 = 1\} = p(d)$ ;
3.  $\mathcal{P}\left\{\nu_i = 1 \mid \sum_{j=1}^{i-1} \nu_j = 0\right\} = p(d), i > 1$ . То есть если для любого  $j = 1 : i - 1$  реализации  $\nu_j$  равны 0, то вероятность того, что  $\nu_i = 1$ , равна  $p(d)$ ;
4.  $\mathcal{P}\left\{\nu_i = 0 \mid \sum_{j=1}^{i-1} \nu_j = 1\right\} = 1, i > 1$ . То есть если существует  $j$  такое, что  $1 \leq j < i$  и  $\nu_j = 1$ , то  $\nu_i = 0$  с вероятностью 1.

Таким образом, если опцион был исполнен на  $i$ -м пересечении, то  $\nu_i = 1$ , если же опцион был исполнен до  $i$ -го пересечения, то  $\nu_i = 0$ .

Опцион так же может исполнен в случае, когда курс базового актива не пересек полосу  $H$  за время  $T$ , а только превысил уровень цены поставки  $K$ . Будем считать, что исполнение опциона в этом случае происходит случайным образом с вероятностью  $p(d)$ . Будем описывать исполнение опциона при отсутствии пересечений полосы “нечувствительности” за время  $T$  с помощью случайной величины  $\nu_0$ , распределенной по закону Бернулли с вероятностью “успеха”  $p(d)$ :

$$\mathcal{P}\{\nu_0 = 1\} = p(d).$$

Задав распределение случайных величин  $\nu_i$  мы можем определить вероятность того, что опцион не был исполнен до  $j$ -го пересечения включительно. Эта вероятность равна

$$\mathcal{P}\{\nu_1 = 0, \dots, \nu_j = 0\} = (1 - p(d))^j.$$

Если опцион исполняется при пересечении “снизу вверх”, точный момент исполнения заранее неизвестен и хеджер не имеет необходимого количества единиц базового актива, а

значит цена базового актива в момент исполнения случайна и равна  $K + \zeta$ , где  $\zeta$  - случайная величина, с функцией распределения  $F_\zeta(\cdot)$  такой, что  $F_\zeta(0) = 0$ ,  $F_\zeta(Kd) = 1$ , и  $F_\zeta(\cdot)$  строго возрастает на отрезке  $[0, Kd]$ . На покрытие опционной позиции хеджер тратит при этом сумму, равную  $(K + \zeta)(1 + \theta)$ . Для дальнейших расчетов определим распределение случайной величины  $\zeta$ . Очевидно, что событие, заключающееся в том, что опцион будет исполнен при пересечении полосы  $H$ , соответствует тому, что он будет исполнен по цене, не превышающей  $K + Kd$ . Таким образом, вероятности вида  $\mathcal{P}\{\zeta \leq Kd\}$  и  $\mathcal{P}\{\nu_i = 1\}$  связаны и должны определяться аналогичным образом. Потребуем, чтобы функция распределения случайной величины  $\zeta$  была строго возрастающей по  $d \in [0, Kd]$  и непрерывной на всей области определения. Остается напомнить, что все реализации  $\zeta$  должны принадлежать отрезку  $[0, Kd]$ . На основании этого, функцию распределения величины  $\zeta$  зададим следующим образом:

$$F_\zeta(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s > Kd, \\ \frac{1 - e^{-\lambda s}}{1 - e^{-\lambda Kd}}, & \text{если } 0 \leq s \leq Kd, \\ 0, & \text{если } s < 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Математическое ожидание случайной величины  $\zeta$  с учетом (1.15) будет равно

$$\mathbf{M}[\zeta] = \frac{1}{1 - e^{-\lambda Kd}} \int_0^{Kd} s e^{-\lambda s} ds = \frac{1}{\lambda} - \frac{Kd e^{-\lambda Kd}}{1 - e^{-\lambda Kd}}. \quad (1.16)$$

### 1.2.2. Затраты на хеджирование

Найдем выражение для суммарных затрат продавца американского колл-опциона, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования.

Потери хеджера при  $i$ -м пересечении полосы обозначим как  $l_i$ . При нечетных  $i$  величина  $l_i$  соответствует потерям при пересечении “снизу вверх”, а при четных — потерям при пересечении “сверху вниз”. С учетом сделанных предположений затраты хеджера при первом пересечении составят величину

$$l_1 \triangleq \nu_1((K + \zeta)(1 + \theta) - K) + (1 - \nu_1)\rho^+, \zeta \in [0, Kd]. \quad (1.17)$$

Первое слагаемое соответствует затратам в случае, когда опцион исполнен, второе слагаемое — затратам на покрытие опционной позиции, если опцион исполнен не был. Если  $\nu_1 = 1$ , т.е. опцион исполнен, то при втором пересечении хеджер не должен нести никаких потерь. Затраты при втором пересечении (“сверху вниз”) составят соответственно

$$l_2 \triangleq (1 - \nu_1)(\nu_2\rho^- + (1 - \nu_2)\rho^-) = (1 - \nu_1)\rho^-.$$

Аналогично, если опцион исполнен, то и при последующих пересечениях хеджер не несет никаких потерь. В общем случае затраты при  $i$ -м пересечении полосы будут равны

$$l_i \triangleq \begin{cases} \nu_i((K + \zeta)(1 + \theta) - K) + (1 - \nu_i)\rho^+, & i = 1, \\ \left( \prod_{j=1}^{i-1} (1 - \nu_j) \right) (\nu_i((K + \zeta)(1 + \theta) - K) + \\ + (1 - \nu_i)\rho^+), & i = 2m + 1, \\ \left( \prod_{j=1}^{i-1} (1 - \nu_j) \right) \rho^-, & i = 2m, \end{cases} \quad (1.18)$$

где  $m = 1, 2, \dots$

Поясним приведенное равенство. Сомножитель  $\prod_{j=1}^{i-1} (1 - \nu_j)$  не равен 0 только если опцион не был исполнен до  $i$ -го пересечения. Если же опцион был исполнен до текущего пересечения, то хеджер не несет никаких дополнительных потерь. При пересечении “снизу вверх”, т.е. на пересечении с нечетным номером, возможны два варианта. Подписчик может исполнить опцион, тогда  $\nu_i = 1$ , и хеджер покупает актив по случайной цене, затратив с учетом комиссионных издержек  $(K + \zeta)(1 + \theta)$ , и продает подписчику по цене  $K$ . Либо опцион остается не исполненным, тогда  $(1 - \nu_i) = 1$ , а хеджер закрывает позицию, затратив сумму  $\rho^+$ . При пересечении “сверху вниз” позиция является закрытой, т.е. у хеджера есть необходимое количество акций, и независимо от того, был ли опцион исполнен при пересечении, хеджер продает активы по цене поставки  $K$  либо держателю опциона, либо другим участникам рынка. Затраты хеджера в случае, когда курс базового актива не пересек полосу  $H$ , а только превысил уровень цены поставки  $K$ , составят

$$l_0 \triangleq \nu_0((K + \zeta)(1 + \theta) - K).$$

Суммарные потери хеджера за время жизни опциона в зависимости от ширины полосы “нечувствительности” обозначим как  $L(d)$ . Очевидно, что суммарные потери хеджера зависят от общего числа пересечений полосы  $H$ , равного  $\eta^+ + \eta^-$ . В частности, если произошло нечетное число пересечений, т.е. последнее пересечение было “снизу вверх” и опцион до окончания своей жизни не был исполнен, то он будет исполнен в момент времени  $T$ , поскольку рыночная цена актива в этот момент будет выше цены поставки. Если же количество пересечений четное, т.е. последнее пересечение было в направлении “сверху вниз”, то контракт в момент времени  $T$  исполнен не будет, если он не был исполнен ранее. Общее число пересечений полосы  $H$  будет определяться величиной  $\eta^+ + \eta^-$ . Таким образом, суммарные потери

хеджера за время жизни опциона полностью определены и равны

$$L(d) \triangleq \begin{cases} \sum_{i=0}^{2m} l_i, & \eta^+ + \eta^- = 2m, \\ \sum_{i=0}^{2m+1} l_i - \left( \prod_{j=1}^{2m+1} (1 - \nu_j) \right) K, & \eta^+ + \eta^- = 2m + 1, \end{cases} \quad (1.19)$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$

### 1.3. Свойства процесса ценообразования

#### 1.3.1. Свойства диффузионных процессов

Рассмотрим подробнее свойства процесса (1.11). Для этого нам понадобятся некоторые сведения из теории диффузионных процессов.

*Теорема 3.* [31, глава III, §11] Пусть процесс  $\xi(t)$  является решением стохастического дифференциального уравнения вида

$$d\xi(t) = f(\xi(t))dt + \sigma(\xi(t))dW(t),$$

при  $t \in [0, T]$ , с начальным условием

$$\xi(0) = \xi_0.$$

где  $W(t)$  - стандартный винеровский процесс, случайная величина  $\xi_0$  не зависит от  $W(t)$  и имеет конечный второй начальный момент. Пусть также выполняются условия:

а) найдется такое  $K < \infty$ , что при всех  $t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^1$ :

$$|f(x)|^2 + |\sigma(x)|^2 \leq K(1 + x^2);$$

б) найдется такое  $C < \infty$ , что при всех  $t \in [0, T], x, y \in \mathbb{R}^1$ :

$$|f(x) - f(y)|^2 + |\sigma(x) - \sigma(y)|^2 \leq C|x - y|^2.$$

Тогда  $\xi(t)$  является однородным марковским диффузионным процессом с коэффициентом сноса  $a(x) = f(x)$  и коэффициентом диффузии  $b(x) = \sigma^2(x)$ .

Процесс  $S(t)$ , определяемый соотношением (1.11), удовлетворяет условиям теоремы, а значит является марковским диффузионным процессом с коэффициентом сноса  $\mu S(t)$  и коэффициентом диффузии  $\sigma^2 S^2(t)$ .

Рассмотрим основные свойства процесса (1.11). Для этого введем переходную вероятность процесса  $S(t)$ :

$$P(x, t, B) = \mathcal{P}\{S(t) \in B | S(0) = x\},$$

при  $t > 0, x \in \mathbb{R}^1$ , и  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ , где  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$  —  $\sigma$ -алгебра борелевских подмножеств  $\mathbb{R}^1$ , а также переходную плотность, которая определяется следующим образом:

$$P(x, t, B) = \int_B p(x, t, s) ds.$$

Переходная плотность  $p(x, t, s)$  является условной плотностью распределения случайной величины  $S(t)$  в точке  $s$ , при условии  $S(0) = x$ . Из определения случайного процесса (1.11) следует, что логарифм относительного изменения цены  $S(t)$  базового актива имеет нормальное распределение:

$$\ln \left( \frac{S(t)}{x} \right) \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t),$$

Поэтому условная плотность распределения  $S(t)$  имеет вид

$$p(x, t, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} e^{-\frac{(\ln \frac{s}{x} - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}}. \quad (1.20)$$

В силу того, что процесс  $S(t)$  является диффузионным, для любых  $\varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}^1, n = 3, 4, \dots$ , справедливы следующие соотношения [31, 35]:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{|s-x| > \varepsilon} p(x, t, s) ds = 0, \quad (1.21)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{|s-x| \leq \varepsilon} (s-x)p(x, t, s) ds = a(x) = x\mu, \quad (1.22)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{|s-x| \leq \varepsilon} (s-x)^2 p(x, t, s) ds = b(x) = x^2 \sigma^2, \quad (1.23)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{|s-x| \leq \varepsilon} (s-x)^n p(x, t, s) ds = 0, \quad (1.24)$$

Первое условие обеспечивает непрерывность ( $\mathbf{P}$ -п.н) траекторий процесса. Функция  $a(x)$  характеризует среднюю скорость смещения за малое время из состояния  $S(0) = x$ . Функция  $b(x)$  характеризует отклонение от усредненного движения, определяемого коэффициентом сноса.

### 1.3.2. Распределение момента первого достижения заданного уровня

Потери хеджера напрямую зависят от того, когда рыночная цена базового актива достигнет уровня цены поставки, т.е. от момента  $\tau$ . В частности, если пересечения не происходит в течение срока действия опциона, хеджер вовсе не производит затрат на покрытие позиции, получив при этом премию за опцион.

Найдем распределение случайной величины  $\tau$ , считая, что  $S(0) = x$ , где  $x \in [0, K]$ . Введем в рассмотрение функцию распределения случайной величины  $\tau$  в зависимости от начального положения  $x$  и уровня  $K$ :

$$F_\tau(t, x, K) \triangleq \mathcal{P}\{\tau \leq t\}.$$

Введем в рассмотрение случайный процесс  $X(t)$ , соответствующий логарифму относительных приращений цены  $S(t)$ :

$$X(t) \triangleq \ln \frac{S(t)}{S(0)}. \quad (1.25)$$

По формуле Ито получаем, что случайный процесс  $X(t)$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$X(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t),$$

т.е. является винеровским процессом с линейным сносом. Поскольку логарифм является монотонным преобразованием, распределение момента  $\tau$  первого достижения уровня  $K$  траекторией процесса  $S(t)$  при условии, что  $S(0) = x$ , будет совпадать с распределением момента первого достижения уровня  $\ln \frac{K}{x}$  траекторией процесса  $X(t)$  при условии, что  $X(0) = 0$ .

Очевидно, что вероятность того, что винеровский процесс с линейным сносом  $X(t)$  достигнет заданный уровень  $\ln \frac{K}{x}$  не позднее момента времени  $t$ , будет совпадать с вероятностью того, что максимум процесса  $X(t)$  до момента  $t$  окажется не меньше  $\ln \frac{K}{x}$ . Следовательно,

$$F_\tau(t, x, K) = \mathcal{P} \left\{ \sup_{t \in [0; T]} X(t) > \ln \frac{K}{x} \right\}. \quad (1.26)$$

Для вычисления вероятности в правой части данного равенства может быть использована известная формула для распределения винеровского процесса с линейным сносом на конечном отрезке времени [5], но с учетом отличной от 1 дисперсии  $\sigma$ . Получаем

$$F_\tau(t, x, K) = \mathcal{P} \left\{ \sup_{t \in [0; T]} X(t) > \ln \frac{K}{x} \right\} = 1 - \Phi \left( \frac{\ln \frac{K}{x} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \right) + e^{\frac{\ln \frac{K}{x}(2\mu - \sigma^2)}{\sigma^2}} \left( 1 - \Phi \left( \frac{\ln \frac{K}{x} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \right) \right). \quad (1.27)$$

Данный результат совпадает с результатом, полученным в [35, глава 2, §6], в которой рассматривается произвольный марковский диффузионный процесс, а вместо функции распределения  $F_\tau(t, x, K)$  момента первого достижения уровня  $K$  фигурирует функция  $\varphi(t, x)$ , значение которой определяет вероятность того, что траектория процесса в течение времени  $t$  достигнет верхней границы заданного интервала при условии, что траектория стартует из точки  $x$ , принадлежащей этому интервалу. Для нахождения распределения момента первого достижения заданного уровня траекторией произвольного диффузионного процесса в [35] решалась смешанная задача для уравнения в частных производных параболического типа.

Обозначим как  $f_\tau(t, x, K)$  плотность распределения случайной величины  $\tau$ . Вычислим

производную по  $t$  от  $F_\tau(t, x, K)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F_\tau(t, x, K) = & -f \left( \frac{\ln \frac{K}{x} - \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} \right) \left( \frac{\partial \ln \frac{K}{x}}{\partial t \sigma \sqrt{t}} - \frac{\partial \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\partial t \sigma \sqrt{t}} \right) - \\ & - e^{\frac{\ln \frac{K}{x} (2\mu - \sigma^2)}{\sigma^2}} f \left( \frac{\ln \frac{K}{x} + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} \right) \left( \frac{\partial \ln \frac{K}{x}}{\partial t \sigma \sqrt{t}} + \frac{\partial \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\partial t \sigma \sqrt{t}} \right), \end{aligned}$$

где  $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$  — плотность стандартного нормального распределения. Нетрудно убедиться, что

$$e^{\frac{\ln \frac{K}{x} (2\mu - \sigma^2)}{\sigma^2}} f \left( \frac{\ln \frac{K}{x} + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} \right) = f \left( \frac{\ln \frac{K}{x} - \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} \right)$$

С учетом этого, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} F_\tau(t, x, K) = -2f \left( \frac{\ln \frac{K}{x} - \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} \right) \frac{\partial \ln \frac{K}{x}}{\partial t \sigma \sqrt{t}} = \frac{\ln \frac{K}{x}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} \exp \left\{ -\frac{\left( \ln \frac{K}{x} - \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right)^2}{2\sigma^2 t} \right\}.$$

Таким образом

$$f_\tau(t, x, K) \triangleq \frac{\partial F_\tau(t, x, K)}{\partial t} = \frac{\ln \frac{K}{x}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} \exp \left\{ -\frac{\left( \ln \frac{K}{x} - \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right)^2}{2\sigma^2 t} \right\}. \quad (1.28)$$

### 1.3.3. Распределение числа пересечений полосы

Затраты хеджера, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования, зависят от количества пересечений полосы “нечувствительности”  $H$  траекторией цены  $S(t)$  базового актива за время жизни опциона. Таким образом, для исследования распределения величины потерь хеджера  $L(d)$  необходимо найти распределение общего числа пересечений полосы  $H$  траекторией  $S(t)$  за время  $T$ .

Найдем распределение числа пересечений полосы  $H$  траекторией процесса  $S(t)$  за время  $T$  в направлениях “снизу вверх” и “сверху вниз”, то есть найдем распределение случайных величин  $\eta^+$  и  $\eta^-$ . Поскольку логарифм является монотонным преобразованием, любой траектории случайного процесса  $S(t)$ , которая пересекла полосу  $H$  суммарно  $k$  раз, будет соответствовать траектория процесса  $X(t)$ , которая за время  $T$  суммарно  $k$  раз пересекла полосу  $\tilde{H}$  с нижней границей  $\ln \frac{K}{S(0)}$  и верхней границей  $\ln \frac{K(1+d)}{S(0)}$ :

$$\tilde{H} \triangleq \left\{ (y, t) : y \in \left[ \ln \frac{K}{S(0)}, \ln \frac{K(1+d)}{S(0)} \right], t \in [0, T] \right\}.$$

Следовательно, распределение числа пересечений полосы  $H$  траекторией  $S(t)$  будет совпадать с распределением числа пересечений полосы с нижней границей  $\ln \frac{K}{S(0)}$  и верхней границей  $\ln \frac{K(1+d)}{S(0)}$  траекторией процесса  $X(t)$ .

Пусть начальная цена  $S(0)$  базового актива совпадает с ценой поставки  $K$ , т.е.  $X(0) = 0$ , тогда для распределения числа пересечений указанной выше прямолинейной полосы  $\tilde{H}$  траекторией процесса  $X(t)$  справедливо следующее утверждение:

*Теорема 4 ([3, с. 157]). Пусть  $\tilde{\eta}^-$  — число пересечений полосы  $\tilde{H}$  траекторией процесса  $X(t)$  в направлении “сверху вниз” при условии  $S(0) = K$ . Тогда для любого натурального  $k$  вероятность того, что траектория процесса  $X(t)$  пересечет  $\tilde{H}$  в направлении “сверху вниз” не менее  $k$  раз равна*

$$\mathcal{P}\{\tilde{\eta}^- \geq k\} = e^{(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})(v_k - a)} \left( 1 - \Phi \left( \frac{v_k}{\sqrt{T}} + \left( \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right) \sqrt{T} \right) \right) + e^{-(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})(v_k + a)} \left( 1 - \Phi \left( \frac{v_k}{\sqrt{T}} - \left( \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right) \sqrt{T} \right) \right),$$

где  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ , и с учетом коэффициента волатильности  $\sigma$ , который играет роль коэффициента масштабирования,  $v_k = 2k(a+b) - a = \frac{2k \ln(1+d)}{\sigma}$ ,  $b = \frac{\ln(1+d)}{\sigma}$  — верхняя граница полосы  $\tilde{H}$ ,  $a = 0$  — нижняя граница полосы  $\tilde{H}$ .

Для нахождения распределения числа  $\tilde{\eta}^+$  пересечений “снизу вверх” необходимо сделать замену переменных  $y \rightarrow -y$ . Тогда процесс  $X(t)$  будет идти от верхней границы полосы  $\tilde{H}$ , т.е.  $a = -\frac{\ln(1+d)}{\sigma}$ ,  $b = 0$ , а коэффициент линейного сноса  $\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$  нужно взять с обратным знаком. Таким образом, распределение величины  $\tilde{\eta}^+$  определяется выражением:

$$\mathcal{P}\{\tilde{\eta}^+ \geq k\} = e^{-(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})(v_k - a)} \left( 1 - \Phi \left( \frac{v_k}{\sqrt{T}} - \left( \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right) \sqrt{T} \right) \right) + e^{(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})(v_k + a)} \left( 1 - \Phi \left( \frac{v_k}{\sqrt{T}} + \left( \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right) \sqrt{T} \right) \right),$$

где с учетом коэффициента волатильности  $\sigma$ , который играет роль коэффициента масштабирования, и замены переменных  $v_k = 2k(a+b) - a = -\frac{(2k-1)\ln(1+d)}{\sigma}$ ,  $b = 0$  — верхняя граница полосы,  $a = -\frac{\ln(1+d)}{\sigma}$  — нижняя граница полосы.

На основании приведенных соотношений для распределения числа пересечений полосы траекторией винеровского процесса с линейным сносом получаем, что для распределения числа пересечений полосы  $H$  траекторией процесса  $S(t)$  ценообразования за время  $T$  справедливо следующее утверждение:

*Теорема 5. Пусть траектория случайного процесса  $S(t)$  достигла уровня  $K$  в момент  $t_0$ , тогда для любого натурального  $k$  траектория  $S(t)$  пересечет полосу  $H$  в направлении*



“сверху вниз” за оставшееся время  $T - t_0$  не менее  $m$  раз с вероятностью

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\{\eta^- \geq k | \tau = t_0\} &= e^{\left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) \frac{2k \ln(1+d)}{\sigma}} \left( 1 - \Phi \left( \frac{2k \ln(1+d)}{\sigma \sqrt{T}} + \left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) \sqrt{T} \right) \right) + \\ &+ e^{-\left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) \frac{2k \ln(1+d)}{\sigma}} \left( 1 - \Phi \left( \frac{2k \ln(1+d)}{\sigma \sqrt{T}} - \left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) \sqrt{T} \right) \right); \end{aligned} \quad (1.29)$$

а в направлении “снизу вверх” с вероятностью

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\{\eta^+ \geq m | \tau = t_0\} &= e^{\left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) \frac{(2k-2) \ln(1+d)}{\sigma}} \left( 1 - \Phi \left( -\frac{(2k-1) \ln(1+d)}{\sigma \sqrt{T}} - \left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) \sqrt{T} \right) \right) + \\ &+ e^{-\left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) \frac{2k \ln(1+d)}{\sigma}} \left( 1 - \Phi \left( -\frac{(2k-1) \ln(1+d)}{\sigma \sqrt{T}} + \left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) \sqrt{T} \right) \right), \end{aligned} \quad (1.30)$$

где  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

В силу неотрицательности возможного числа пересечений

$$\mathcal{P}\{\eta^+ \geq m | \tau = t_0\} = \mathcal{P}\{\eta^- \geq m | \tau = t_0\} = 1, \text{ при } m \leq 0.$$

Найдем условное распределение общего числа пересечений  $\eta^- + \eta^+$  при условии, что  $\tau = t_0$ .

По свойствам вероятности получаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\{\eta^- = i | \tau = t_0\} &= \mathcal{P}\{\eta^- \geq i | \tau = t_0\} - \mathcal{P}\{\eta^- \geq i + 1 | \tau = t_0\}, \\ \mathcal{P}\{\eta^+ = i | \tau = t_0\} &= \mathcal{P}\{\eta^+ \geq i | \tau = t_0\} - \mathcal{P}\{\eta^+ \geq i + 1 | \tau = t_0\}. \end{aligned}$$

Напомним, что величины  $\eta^-$  и  $\eta^+$  зависимы, а каждому пересечению “сверху вниз” предшествует пересечение “снизу вверх”. В силу этого

$$\mathcal{P}\{\eta^+ + \eta^- = 0 | \tau = t_0\} = \mathcal{P}\{\eta^+ = 0 | \tau = t_0\}.$$

Рассмотрим теперь вероятность одного пересечения полосы  $H$ . В этом случае не должно произойти пересечения “сверху вниз”, но общее количество пересечений не равно нулю, получаем

$$\mathcal{P}\{\eta^+ + \eta^- = 1 | \tau = t_0\} = \mathcal{P}\{\eta^- = 0 | \tau = t_0\} - \mathcal{P}\{\eta^+ + \eta^- = 0 | \tau = t_0\}.$$

Аналогично, в случае двух пересечений должно произойти одно пересечение “снизу вверх”, при этом общее количество пересечений не равно одному, то есть

$$\mathcal{P}\{\eta^+ + \eta^- = 2 | \tau = t_0\} = \mathcal{P}\{\eta^+ = 1 | \tau = t_0\} - \mathcal{P}\{\eta^+ + \eta^- = 1 | \tau = t_0\}.$$

В результате получаем рекуррентное соотношение, определяющее распределение общего чис-

ла пересечений:

$$P(i, t_0) \triangleq \mathcal{P}\{\eta^+ + \eta^- = i | \tau = t_0\} = \begin{cases} \mathcal{P}\{\eta^+ = 0 | \tau = t_0\}, & \text{при } i = 0; \\ \mathcal{P}\{\eta^+ = l | \tau = t_0\} - \\ \mathcal{P}\{\eta^+ + \eta^- = 2l - 1 | \tau = t_0\}, & \text{при } i = 2l, l > 0; \\ \mathcal{P}\{\eta^- = l | \tau = t_0\} - \\ \mathcal{P}\{\eta^+ + \eta^- = 2l | \tau = t_0\}, & \text{при } i = 2l + 1, l > 0. \end{cases} \quad (1.31)$$

В силу того, что процесс  $S(t)$  является процессом с независимыми приращениями и нам известно распределение момента  $\tau$  первого достижения уровня  $K$  цены поставки траекторией процесса  $S(t)$ , мы можем определить безусловное распределение числа пересечений полосы  $H$  траекторией  $S(t)$  за время  $T$  в направлениях “сверху вниз” и “снизу вверх”, а также общего числа пересечений. Получаем, соответственно:

$$\mathcal{P}\{\eta^- \geq m\} = \int_0^T \mathcal{P}\{\eta^- \geq m | \tau = t_0\} f_\tau(t_0, S, K) dt_0, \quad (1.32)$$

$$\mathcal{P}\{\eta^+ \geq m\} = \int_0^T \mathcal{P}\{\eta^+ \geq m | \tau = t_0\} f_\tau(t_0, S, K) dt_0, \quad (1.33)$$

$$P(i) \triangleq \mathcal{P}\{\eta^+ + \eta^- = i\} = \int_0^T \mathcal{P}\{\eta^+ + \eta^- = i | \tau = t_0\} f_\tau(t_0, S, K) dt_0 + I\{i = 0\} \mathcal{P}\{\tau \geq T\} = \begin{cases} \mathcal{P}\{\eta^+ = 0\} + \mathcal{P}\{\tau \geq T\}, & \text{при } i = 0; \\ \mathcal{P}\{\eta^+ = l\} - \\ \mathcal{P}\{\eta^+ + \eta^- = 2l - 1\}, & \text{при } i = 2l, l > 0; \\ \mathcal{P}\{\eta^- = l\} - \\ \mathcal{P}\{\eta^+ + \eta^- = 2l\}, & \text{при } i = 2l + 1, l > 0, \end{cases} \quad (1.34)$$

где  $I\{\cdot\}$  — индикаторная функция. Отметим, что распределения случайных величин  $\eta^-$  и  $\eta^+$  не определены при нулевой ширине полосы нечувствительности, так как при  $d = 0$  получаем

$$\mathcal{P}\{\eta^- \geq m | \tau = t_0\} = 1,$$

для любого натурального  $m$  и  $t_0 \in [0, T]$ . Это связано со свойством бесконечного числа пересечений заданного уровня винеровским процессом, если этот уровень был достигнут.

## 1.4. Выводы по главе 1

В данной главе изучен вариант модификации стратегии последовательного хеджирования, заключающийся во введении полосы “нечувствительности” хеджирования. Данная модификация должна позволить избежать чрезмерного роста затрат на хеджирование в случае частых колебаний цены базового актива относительно уровня цены поставки. Для учета возможности досрочного исполнения опциона американского типа держателем опциона предполагается, что исполнение опциона может произойти при любом пересечении полосы “нечувствительности” с фиксированной вероятностью.

Получены доказательства основных свойств процесса ценообразования  $S(t)$ . Найдено распределение момента первого достижения уровня цены поставки траекторией цены базового актива и распределение числа пересечений полосы “нечувствительности” хеджирования траекторией цены базового актива в направлениях “сверху вниз” и “снизу вверх”, а также распределение общего числа пересечений.

Предложенная математическая модель может быть использована при исследовании распределения затрат на хеджирование продавца колл-опциона европейского типа. В этом случае достаточно положить вероятность  $p(d)$  досрочного исполнения опциона при каждом пересечении равной 0.

## Глава 2.

# Исследование модифицированной стратегии последовательного хеджирования

Данная глава посвящена исследованию моментных и вероятностных характеристик величины затрат на хеджирование со стороны продавца колл-опциона американского типа, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования. В разделе 2.1 исследуются свойства безусловного и условного математических ожиданий затрат хеджера. Условное математическое ожидание определяется при фиксированном моменте первого достижения нижней границы полосы “нечувствительности” траекторией курса базового актива. Для условного и безусловного математических ожиданий найдены представления в виде суммы бесконечного ряда. Предложен алгоритм поиска оптимальной ширины полосы “нечувствительности” хеджирования, минимизирующей средние затраты хеджера. Исследована связь между задачами минимизации условного и безусловного математического ожидания затрат.

В разделе 2.2 получено выражение для функции распределения затрат хеджера. Исследованы свойства монотонности и непрерывности функции. Предложен алгоритм построения верхней и нижней оценок квантили безусловного распределения затрат хеджера. В алгоритме используется доказанное свойство монотонности квантилей условных распределений при известном количестве пересечений полосы “нечувствительности” траекторией курса базового актива по количеству пересечений полосы. Для иллюстрации работы предложенных алгоритмов приводятся результаты численных экспериментов.

Дополнительно к обозначениям из главы 1 в данной главе используются следующие обозначения:

$\bar{L}(d)$  — средние затраты хеджера при фиксированной относительной ширине  $d$  полосы

“нечувствительности”  $H$ ;

$\bar{L}(d, t_0)$  — средние затраты хеджера при фиксированной относительной ширине  $d$  полосы  $H$  и при условии, что цена  $S(t)$  достигла уровень  $K$  цены поставки в момент  $t_0$ ;

$d_{max}$  — максимальная допустимая относительная ширина полосы  $H$ ;

$d^*$  — оптимальная ширины полосы  $Y$  при условии, что цена  $S(t)$  достигла уровень  $K$  цены поставки в момент  $t_0$

$d^*(t_0)$  — оптимальная ширины полосы  $Y$  при условии, что цена  $S(t)$  достигла уровень  $K$  цены поставки в момент  $t_0$ ;

$P_\varphi(d)$  — функция распределения затрат хеджера при фиксированной относительной ширине  $d$  полосы “нечувствительности”  $H$ ;

$P_\varphi(d, t_0)$  — функция условного распределения затрат хеджера при известном моменте  $t_0$  первого достижения уровня  $K$  ценой  $S(t)$ , а также при фиксированной относительной ширине  $d$  полосы “нечувствительности”  $H$ ;

$P_\varphi(d, i)$  — функция условного распределения затрат хеджера при известном количестве  $i$  пересечений  $H$  траекторией  $S(t)$ , а также при фиксированной относительной ширине  $d$  полосы “нечувствительности”  $H$ ;

$P_\varphi(d, i, t_0)$  — функция условного распределения затрат хеджера при известном моменте  $t_0$  первого достижения уровня  $K$  ценой  $S(t)$ , известном количестве  $i$  пересечений  $H$  траекторией  $S(t)$ , а также при фиксированной относительной ширине  $d$  полосы “нечувствительности”  $H$ ;

$\varphi_\alpha(d)$  — квантиль уровня  $\alpha$  распределения затрат хеджера при фиксированной относительной ширине  $d$  полосы “нечувствительности”  $H$ ;

$\varphi_\alpha(d, i)$  — квантиль уровня  $\alpha$  условного распределения затрат хеджера при известном количестве  $i$  пересечений  $H$  траекторией  $S(t)$ , а также при фиксированной относительной ширине  $d$  полосы “нечувствительности”  $H$ ;

$\psi_\alpha(d) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \varphi_\beta(d) d\beta$  — интегральная квантиль уровня  $\alpha$  распределения затрат хеджера;

$\varphi_\alpha^+$  — верхняя оценка квантили  $\varphi_\alpha(d)$ ;

$\varphi_\alpha^-$  — нижняя оценка квантили  $\varphi_\alpha(d)$ ;

$\varphi_j = j(\rho^+ + \rho^-)$  —  $j$ -я точка разрыва функции распределения затрат хеджера;

$P_{\varphi_j}^+(\cdot)$  — значение предела справа функции распределения затрат хеджера в точке  $\varphi_j$ ;

$P_{\varphi_j}^-(\cdot)$  — значение предела слева функции распределения затрат хеджера в точке  $\varphi_j$ ;

$F^+(\varphi, d)$  — верхняя кусочно-линейная огибающая функции  $P_\varphi(d)$  на отрезке  $[\varphi_\alpha^-; \varphi_\alpha^+]$ ;

$F^-(\varphi, d)$  — нижняя кусочно-линейная огибающая функции  $P_\varphi(d)$  на отрезке  $[\varphi_\alpha^-; \varphi_\alpha^+]$ ;

$L$  — константа Липшица функции  $P_\varphi(d)$ ;

$k^*(\varphi) = \left\lceil \frac{\varphi}{\rho^+ + \rho^-} \right\rceil$  — максимальное количество пар последовательных пересечений  $H$  траекторией  $S(t)$ , при котором потери  $L(d)$  гарантированно не превосходят  $\varphi$ ;

$\varphi^* = \frac{\max\{\varphi + K - k^*(\varphi)(\rho^+ + \rho^-), K(1+\theta)\}}{1+\theta}$  — максимальная цена актива в момент досрочного исполнения, при которой после  $k^*(\varphi)$  пар последовательных пересечений  $H$  траекторией  $S(t)$  потери  $L(d)$  могут не превзойти  $\varphi$ ;

$\beta = \alpha + F_\tau(T, S, K) - 1$  — уровень  $\alpha$  за вычетом вероятности того, что  $S(t)$  не достигнет уровня  $K$  за время  $T$ .

## 2.1. Минимизация средних потерь

В данном разделе рассматривается задача поиска оптимальной относительной ширины полосы “нечувствительности”  $H$ , минимизирующей средние потери хеджера  $\mathbf{M}[L(d)]$ . Также в разделе рассматривается задача минимизации условного математического ожидания потерь  $\mathbf{M}[L(d)|\tau = t_0]$ . Условное математическое ожидание характеризует средние затраты хеджера за время, оставшееся после достижения ценой базового актива уровня цены поставки, до истечения срока действия контракта по уже заключенному опционному контракту.

### 2.1.1. Средние потери хеджера

Введем обозначения следующие обозначения для условного и безусловного математического ожидания потерь хеджера:

$$\begin{aligned}\bar{L}(d) &\triangleq \mathbf{M}[L(d)], \\ \bar{L}(d, t_0) &\triangleq \mathbf{M}[L(d)|\tau = t_0].\end{aligned}$$

Функция  $\bar{L}(d, t_0)$  определяет условное математическое ожидание потерь хеджера при условии, что стоимость  $S(t)$  базового актива достигла уровень  $K$  цены поставки в момент времени  $t_0$ . Поставим задачу минимизации величины средних потерь хеджера по ширине полосы “нечувствительности”  $d$ :

$$\bar{L}(d) \rightarrow \min_{0 \leq d \leq d_{max}}. \quad (2.1)$$

Максимальная допустимая ширина полосы  $d_{max}$  задается хеджером и зависит от его склонности к риску, рыночных ожиданий и стоимости опциона.

Для решения задачи (2.1) необходимо знать математическое ожидание величины потерь хеджера  $L(d)$ , использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования. Распределение величины потерь хеджера  $L(d)$  зависит от момента достижения траекторией курса базового актива уровня цены поставки, поэтому математическое ожидание

величины потерь можно представить как полное математическое ожидание:

$$\bar{L}(d) = \int_0^{\infty} \bar{L}(d, t_0) f_{\tau}(t_0, S, K) dt_0,$$

где  $f_{\tau}(t_0, S, K)$  — плотность распределения случайной величины  $\tau$  в точке  $t_0$ , определяемая согласно (1.28). В случае, когда  $\tau \geq T$ , т.е. когда в течение всего времени жизни опциона рыночная цена актива оставалась ниже уровня цены поставки, исполнение опциона невыгодно держателю и хеджер (продавец опциона) не несет никаких потерь, т.е.  $\bar{L}(d, t_0) = 0$ . С учетом этого математическое ожидание потерь хеджера можно определить как

$$\bar{L}(d) = \int_0^T \bar{L}(d, t_0) f_{\tau}(t_0, S, K) dt_0. \quad (2.2)$$

Стоит отметить, что условное математическое ожидание  $\bar{L}(d, t_0)$  потерь хеджера имеет свой экономический смысл: оно соответствует величине средних потерь хеджера за время, оставшееся до истечения срока действия опциона с момента достижения курсом базового актива уровня цены поставки, то есть с момента, когда опцион может быть исполнен. По этой причине, наряду с задачей (2.3) минимизации безусловных средних потерь хеджера, мы рассмотрим задачу минимизации условных средних потерь:

$$d^*(t_0) = \operatorname{argmin}_{0 \leq d \leq d_{max}} \bar{L}(d, t_0), \quad t_0 \in (0, T). \quad (2.3)$$

Найдем выражение для условного математического ожидания потерь хеджера. С учетом соотношения (1.19) для суммарных потерь хеджера условное математическое ожидание потерь хеджера будет определяться выражением

$$\begin{aligned} \bar{L}(d, t_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(k, t_0) \mathbf{M} \left[ \sum_{j=0}^k l_j \right] - \sum_{k=0}^{\infty} P(2k+1, t_0) \mathbf{M} \left[ \left( \prod_{j=1}^{2k+1} (1 - \nu_j) \right) K \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \mathbf{M}[l_j] P(k, t_0) - \sum_{k=0}^{\infty} (1 - p(d))^{2k+1} K P(2k+1, t_0). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Первое слагаемое соответствует средним затратам хеджера на покупку и продажу базового актива хеджером при пересечениях полосы  $H$  траекторией цены  $S(t)$  базового актива за время  $T$  жизни опциона. Второе слагаемое соответствует дополнительным средним потерям хеджера в случае, когда опцион исполняется в момент  $T$  окончания срока жизни опциона, при этом у хеджера есть необходимое количество единиц базового актива, так как последнее пересечение произошло в направлении “снизу вверх”. С учетом выражения (1.18) для потерь хеджера при одном пересечении, а также известной вероятности досрочного исполнения

при каждом пересечении, математическое ожидание потерь хеджера при одном пересечении определяется следующим выражением:

$$\mathbf{M}[l_i] = \begin{cases} p(d)(\mathbf{M}[(K + \zeta)(1 + \theta)] - K) + (1 - p(d))\rho^+, & \text{если } i = 1, \\ (1 - p(d))^{i-1} \rho^-, & \text{если } i = 2m, \\ (1 - p(d))^{i-1} (p(d)(\mathbf{M}[(K + \zeta)(1 + \theta)] - K) + (1 - p(d))\rho^+), & \\ \text{если } i = 2m + 1, & \end{cases} \quad (2.5)$$

где  $m = 1, 2, \dots$ .

Сформулируем следующую теорему:

*Теорема 6. Пусть выполнены следующие предположения:*

- 1) процесс котировки базового актива описывается случайным процессом (1.11);
- 2) при фиксированной ширине  $d$  полосы “нечувствительности” хеджа исполнение опциона держателем при пересечении полосы “нечувствительности” происходит случайно с вероятностью  $p(d)$ , не зависящей от момента времени, в который произошло пересечение;
- 3) цена базового актива при досрочном исполнении равна  $K + \zeta$ , где  $\zeta$  — случайная величина, независимая от случайных величин  $\{\nu_j\}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$  и случайного процесса  $S(t)$ .

Тогда средние потери хеджера, использующего модернизированную стратегию последовательного хеджирования, определяются выражением (2.2), в котором условные средние потери хеджера вычисляются по формуле (2.4).

Доказательство теоремы 6 напрямую следует из приведенных выше рассуждений. Случайная величина  $\zeta$  не зависит от случайных величин  $\nu_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$  по определению. Кроме того, согласно (1.34), полностью известно распределение числа пересечений полосы  $H$ , а значит выражение (2.4) для условного математического ожидания  $L(d, t_0)$  полностью определено. Следовательно, определено выражение (2.2) для безусловного математического ожидания потерь.

С точки зрения хеджера, безусловное математическое ожидание величины затрат может быть использовано для оценки справедливой цены опциона. Решение задачи (2.1) будет определять минимально возможную величину средних потерь хеджера, которая будет задавать минимальную сумму премии за опцион, при которой в среднем хеджер, использующий модифицированную стратегию последовательного хеджирования с оптимальной шириной полосы “нечувствительности”, не будет в проигрыше. Решение задачи (2.3) позволит найти оптимальную ширину полосы “нечувствительности” непосредственно для проведения модифицированной стратегии последовательного хеджирования по отдельному обязательству (опциону), по которому цена базового актива уже достигла уровня цены поставки.



## 2.1.2. Минимизация безусловного математического ожидания потерь

Решим задачу (2.1) минимизации средних потерь хеджера за время жизни опциона. Для этого необходимо исследовать зависимость средних потерь хеджера от ширины полосы “нечувствительности”.

Условное математическое ожидание потерь  $L(d, t_0)$  непрерывно дифференцируемо по  $d$ , при  $d > 0$ , поскольку оно является суммой (2.4) непрерывно дифференцируемых по  $d$  функций. Следовательно, с учетом (2.2) безусловное математическое ожидание также будет непрерывно дифференцируемой по  $d$  функцией, при  $d > 0$ .

Оценим средние потери хеджера при  $d \rightarrow 0$ . С учетом соотношения (1.29) получаем, что для любого натурального  $m$  и любого  $t_0 \in [0, T)$   $\mathcal{P}\{\eta^- \geq m \mid \tau = t_0\} \rightarrow 1$  при  $d \rightarrow 0$ , т.е. за конечное время вероятность бесконечного числа пересечений полосы  $H$  стремится к единице. При этом вероятность  $p(d)$  исполнения опциона держателем при одном пересечении будет стремиться к нулю. Поскольку при каждом пересечении полосы хеджер производит перебалансировку портфеля с ненулевыми комиссионными издержками при покупке актива ( $\theta > 0$ ) условные средние потери хеджера (2.4) будут стремиться к бесконечности, а значит и средние потери хеджера будут стремиться к бесконечности

$$\bar{L}(d) \rightarrow \infty \text{ при } d \rightarrow 0.$$

Оценим теперь средние потери хеджера при  $d \geq d_{max}$ . При  $d = d_{max}$  вероятность  $p(d_{max})$  исполнения опциона подписчиком при первом пересечении полосы, согласно (1.13), будет равна  $1 - \alpha$ , где  $\alpha \ll 1$ . С учетом (2.5) средние затраты хеджера при первом пересечении составят

$$\mathbf{M}[l_1] = p(d) ((K + \mathbf{M}[\zeta]) \cdot (1 + \theta) - K) + (1 - p(d))\rho^+, d \geq d_{max}. \quad (2.6)$$

Средние потери в случае, когда после достижения уровня цены поставки ни одного пересечения не происходит, будут равны

$$\mathbf{M}[l_0] = p(d) ((K + \mathbf{M}[\zeta]) \cdot (1 + \theta) - K), d \geq d_{max}.$$

При  $d \geq d_{max}$  средние потери при втором и последующих пересечениях приближенно можно считать равными нулю, поскольку с вероятностью не меньше  $1 - \alpha$  опцион будет исполнен раньше. Тогда условные средние потери хеджера приближенно равны

$$\begin{aligned} \tilde{L}(d, t_0) &\approx P(0, t_0)\mathbf{M}[l_0] + (1 - P(0, t_0))\mathbf{M}[l_1] = \mathbf{M}[l_1] - P(0, t_0) (\mathbf{M}[l_0] - \mathbf{M}[l_1]) = \\ &= \mathbf{M}[l_1] - P(0, t_0)(1 - p(d))K(1 + d)(1 + \theta), d \geq d_{max}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Более того, условные средние потери хеджера будут стремиться к величине

$$\bar{L}(d, t_0) \rightarrow (K + \mathbf{M}[\zeta]) \cdot (1 + \theta) - K \text{ при } d \rightarrow \infty.$$

С учетом вышесказанного можно предположить, что существует хотя бы одна точка минимума функции  $\bar{L}(d)$  на  $(0, d_{max})$ .

Поскольку вычисление математического ожидания потерь хеджера связано с суммированием рядов и интегрированием неэлементарных функций, аналитическое выражение для  $\bar{L}(d)$  найти не удастся. Численные расчеты показывают, что математическое ожидание потерь хеджера  $\bar{L}(d)$  имеет единственную точку минимума по  $d$  на  $(0, d_{max})$  для любого  $d_{max} > \theta$ .

Обозначим искомую точку минимума средних потерь как  $d^*$ . Для поиска значения  $d^*$  может быть предложен любой метод оптимизация для одноэкстремальных задач [1], например метод дихотомии. Выбор метода дихотомии обусловлен тем, что данный метод является робастным, т.е. слабо чувствительным к погрешности вычислений, а значение функции  $\bar{L}(d)$  не может быть вычислено точно. К тому же метод дихотомии обеспечивает сходимость к одному из локальных минимумов, в случае если задача не является одноэкстремальной.

Решение задачи (2.1) будет давать оптимальное управление в классе программных стратегий, поскольку для ее решения не используется информация о движении актива в течение времени жизни опциона.

### 2.1.3. Минимизация условного математического ожидания потерь

Из соотношения (2.2) следует, что, минимизируя условное математическое ожидание потерь хеджера  $\bar{L}(d, t_0)$ , можно также минимизировать безусловное математическое ожидание потерь  $\bar{L}(d)$ . Функция  $d^*(t_0)$ , являющаяся решением задачи (2.3), будет представлять собой оптимальное управление в классе позиционных стратегий. Значение математического ожидания потерь при этом будет не больше, чем на решении в классе программных стратегий  $d^*$ , поскольку класс позиционных стратегий включает в себя класс программных. Следовательно, будут выполняться соотношения

$$1) \bar{L}(d^*) \geq \int_0^T \bar{L}(d^*(t_0), t_0) f_\tau(t_0, S, K) dt_0;$$

$$2) \bar{L}(d^*, t_0) \geq \bar{L}(d^*(t_0), t_0) \text{ для любого } t_0 \in (0, T).$$

Задача минимизации условного математического ожидания имеет также самостоятельный экономический смысл. Как было сказано ранее, решение задачи (2.1) может быть использовано для определения минимальной премии за опцион. Для решения задачи (2.1) не требу-

ется никаких сведений о движении курса базового актива в течение времени жизни опциона. Таким образом, сразу после заключения опционного контракта хеджер может определить ширину полосы  $d^*$  и далее осуществлять хеджирование опционной позиции в соответствии с описанной стратегией. Распределение потерь хеджера  $L(d)$  в свою очередь будет зависеть от момента  $\tau$  достижения курсом базового актива уровня цены поставки. Если в течение времени жизни опциона уровень цены поставки не был достигнут, то опцион не будет исполнен и хеджирование не производится, если же рыночная цена актива стала равной цене поставки в момент времени  $t_0$ , то хеджер, решив задачу (2.3), может найти новое оптимальное значение ширины полосы  $d^*(t_0)$ , при этом средние потери за оставшееся время  $T - t_0$  будут не больше, чем при “старом” значении ширине полосы  $d^*$ . Величина  $\bar{L}(d^*(t_0), t_0)$  будет характеризовать средние затраты на хеджирование за время  $T - t_0$ , в течение которого опцион может быть предъявлен.

Численные расчеты показывают, что условное математическое ожидание потерь хеджера  $\bar{L}(d, t_0)$ , рассматриваемое как функция параметра  $d$ , обладает теми же свойствами, что и безусловное математическое ожидание потерь  $\bar{L}(d)$ . Это означает, что для решения задачи (2.3) также может быть использован метод дихотомии.

Поскольку, как было сказано ранее, значение величины средних потерь не может быть вычислено точно, для хеджера, осуществившего продажу колл-опциона американского типа, может быть предложен численный алгоритм оценки средних потерь при заданной ширине полосы “нечувствительности”  $d$ . Данная оценка также может быть использована при поиске оптимальной ширины полосы “нечувствительности”.

*Алгоритм 1.*

1. Задать величины  $d_{max}$ ,  $\alpha$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ .
2. Задать или определить распределение случайной величины  $\zeta$  и вероятность исполнения при пересечении  $p(d)$ .
3. Найти  $m^* \triangleq \min_{m \in \mathbb{N}} \{m : \mathcal{P}\{\eta^- \geq m | \tau = 0\} < \varepsilon\}$ , где соответствующая вероятность вычисляется по формуле (1.29).
4. Вычислить средние потери хеджера по формуле (2.2), используя величину  $m^*$  в качестве верхнего предела суммирования.

В результате работы данного алгоритма строится нижняя оценка величины средних потерь. Эта оценка будет стремиться к точному значению  $\bar{L}(d)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

#### 2.1.4. Результаты численных экспериментов

*Пример 1.* Рассмотрим в качестве примера задачу (2.1) со следующими значениями параметров:

$S = 19$  у.е,  $K = 20$  у.е,  $T = 40$  дней,  $\mu = 0,01$ ,  $\sigma = 0,1$ ,  $\theta = 0,01$ . Будем считать, что цена

базового актива при досрочном исполнении случайна и равна  $K + \zeta$ , где случайная величина  $\zeta$  имеет следующую функцию распределения:

$$F_{\zeta}(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s > 20d, \\ \frac{1 - e^{-0,3s}}{1 - e^{-6d}}, & \text{если } 0 \leq s \leq 20d, \\ 0, & \text{если } s < 0. \end{cases}$$

И пусть исполнение опциона при каждом пересечении происходит с вероятностью

$$p(d) = 1 - e^{-6d}.$$

График зависимости безусловного математического ожидания приведен на рисунке 2.1.

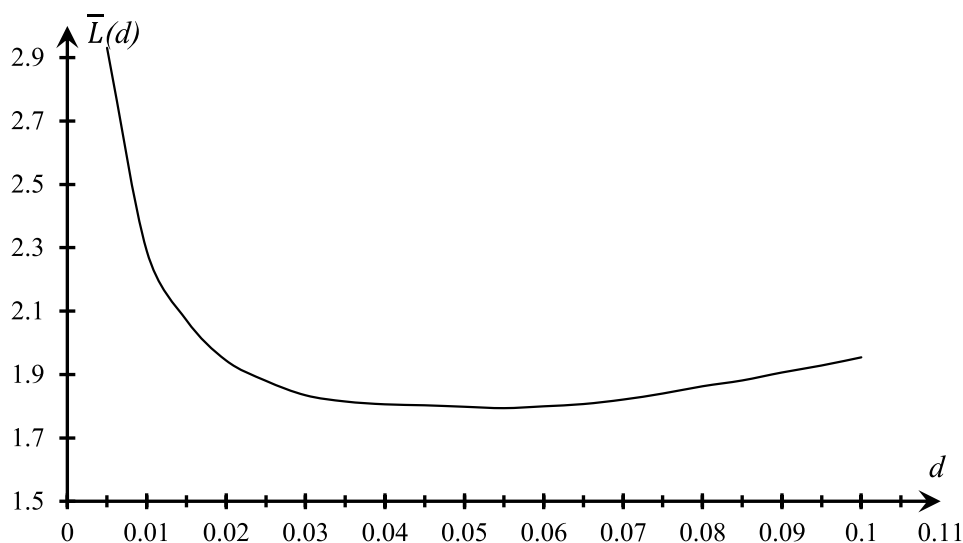


Рис. 2.1. зависимость средних потерь от ширины полосы.

Оптимальная ширина полосы в данном случае равна  $d^* = 0,055$ .

Ожидаемые потери хеджера при этом составят  $\bar{L}(0,055) = 1,79$  у.е.

Из полученных результатов следует, что оптимальная ширина полосы “нечувствительности” сопоставима с величиной комиссионных издержек. Величина средних затрат на хеджирование, которая может быть использована для оценки премии за опцион, существенно меньше стоимости базового актива, что вполне соответствует реальным данным, а также расчетам стоимости американского опциона, проведенных с помощью метода Монте-Карло. Однако стоит отметить, что полученная величина средних затрат на хеджирование существенно превышает средние затраты в случае линейной модели ценообразования, полученные в [24], когда изменение цены базового актива описывается винеровским процессом с линейным сносом. Это связано с тем, что процесс геометрического броуновского движения при близких к указанным значениям параметров имеет существенно большую вариацию, по сравнению с винеровским процессом с линейным сносом.

Зависимость условного математического ожидания  $\bar{L}(d, t_0)$  от параметра  $d$  имеет такой же характер, как и  $\bar{L}(d)$ , но величина условного математического ожидания превышает безусловное математическое ожидание для любого  $d > 0$  при  $S < K$ . При  $t_0 = 10$  и тех же значениях параметров, ожидаемые условные потери хеджера составят 1,8385 у.е. при оптимальной ширине полосы  $d^*(10) = 0,045$ . Величина безусловного математического ожидания потерь оказывается меньше условного математического ожидания, поскольку в соотношении (2.2) не выполняется условие нормировки, т.е.

$$\int_0^T f_\tau(t_0, S, K) dt_0 < 1.$$

Физически это означает, что с ненулевой вероятностью хеджер не понесет никаких потерь в случае, когда рыночная цена базового актива не достигает уровня цены поставки за время жизни опциона и опцион не предъявляется. Условное математическое ожидание соответствует случаю, когда уровень цены поставки был достигнут в течение времени жизни опциона и опцион мог быть предъявлен.

## 2.2. Распределение потерь

Критерий в форме математического ожидания потерь подходит для определения справедливой цены опциона, однако он не учитывает разброс реализаций величины потерь относительно среднего значения, а значит не может использоваться для оценки объема средств, необходимых для использования модифицированной стратегии последовательного хеджирования.

Традиционно [17], в задачах проектирования экономических и технических систем в качестве критериев качества управления используются функция вероятности и функция квантили. При заданной функции  $L(d)$  потерь функция вероятности характеризует вероятность того, что потери хеджера не превысят заданный уровень  $\varphi$ :

$$P_\varphi(d) \triangleq \mathcal{P}\{L(d) \leq \varphi\}. \quad (2.8)$$

Параметр  $\varphi$  задает допустимый уровень потерь. В качестве параметра  $\varphi$  может быть выбрана, например, премия за опцион, которую хеджер получает при продаже контракта.

Функция квантили характеризует порог, который потери хеджера не превысят с заданной вероятностью  $\alpha$ :

$$\varphi_\alpha(d) \triangleq \min\{\varphi : P_\varphi(d) \geq \alpha\}, \text{ где } \alpha \in (0; 1). \quad (2.9)$$

В литературе квантиль распределения потерь  $\varphi_\alpha(d)$  также известна под названием VaR (Value-at-Risk) [79].

Исходя из физического смысла указанных критериев возникают задачи максимизации функции вероятности и минимизации функции квантили:

$$\begin{aligned} P_\varphi(d) &\rightarrow \max_d, \\ \varphi_\alpha(d) &\rightarrow \min_d. \end{aligned}$$

Методы и алгоритмы решения задач минимизации функции квантили и максимизации функции вероятности подробно разобраны в монографиях [17, 20, 83]. Методам решения этих задач посвящены работы [8, 19, 21–23, 33] и многие другие. Подробный разбор работ по данной теме выходит за рамки данной диссертации.

### 2.2.1. Функция распределения потерь хеджера

Найдем вероятность такого события, что потери хеджера не превысят заданный порог  $\varphi$ , т.е. найдем функцию распределения потерь хеджера. В силу известного распределения общего числа пересечений  $\eta^+ + \eta^-$ , задав распределение случайных величин  $\nu_i$ , распределение цены досрочного исполнения  $\zeta$ , а также определив распределение момента первого достижения уровня цены поставки  $\tau$ , удастся получить выражение для функции распределения величины  $L(d)$ , т.е. для функции распределения потерь хеджера (2.8):

$$P_\varphi(d) \triangleq \mathcal{P}\{L(d) \leq \varphi\}.$$

Эта вероятность будет зависеть от ширины полосы  $H$  и времени жизни опциона  $T$ , и может быть вычислена по формуле полной вероятности

$$P_\varphi(d) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}\{L(d) \leq \varphi | \eta^+ + \eta^- = i\} \cdot P(i) + (1 - \mathcal{P}\{L(d) \leq \varphi | \eta^+ + \eta^- = 0\}) (1 - F_\tau(T, S, K)), \quad (2.10)$$

где  $i$  — количество пересечений полосы  $H$ . Последнее слагаемое возникает из-за того, что величина  $P(0)$  складывается из вероятности того, что цена  $S(t)$  базового актива не достигнет уровня  $K$  цены поставки за время  $T$  жизни опциона, и вероятности того, что не произойдет ни одного пересечения полосы  $H$ , если уровень  $K$  был достигнут за время  $T$ . В связи с тем, что распределение суммарных потерь  $L(d)$  зависит от момента  $\tau$  первого достижения уровня  $K$  цены поставки траекторией цены  $S(t)$  базового актива, вероятность  $P_\varphi(d)$  может

быть представлена как

$$P_\varphi(d) = 1 - F_\tau(T, S, K) + \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^T \mathcal{P}\{L(d, t_0) \leq \varphi|\eta^+ + \eta^- = i\} P(i, t_0) f_\tau(t_0, S, K) dt_0, \quad (2.11)$$

Введем в рассмотрение условную функцию распределения потерь при условии, что траектория процесса  $S(t)$  достигла уровня  $K$  цены поставки в момент времени  $t_0$ . Обозначим ее как

$$P_\varphi(d, t_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}\{L(d, t_0) \leq \varphi|\eta^+ + \eta^- = i\} P(i, t_0). \quad (2.12)$$

Очевидно, что функции  $P_\varphi(d)$  и  $P_\varphi(d, t_0)$  связаны следующим соотношением:

$$P_\varphi(d) = 1 - F_\tau(T, S, K) + \int_0^T P_\varphi(d, t_0) f_\tau(t_0, S, K) dt_0. \quad (2.13)$$

Обозначим функции условного распределения потерь хеджера, стоящие под знаком суммы в формуле (2.10) как

$$P_\varphi(d, i) \triangleq \mathcal{P}\{L(d) \leq \varphi|\eta^+ + \eta^- = i\}, \quad (2.14)$$

а в формуле (2.11) как

$$P_\varphi(d, i, t_0) \triangleq \mathcal{P}\{L(d, t_0) \leq \varphi|\eta^+ + \eta^- = i\}. \quad (2.15)$$

Функции  $P_\varphi(d, i)$  и  $P_\varphi(d, i, t_0)$  связаны между собой соотношением

$$P_\varphi(d, i) = \int_0^T P_\varphi(d, i, t_0) f_\tau(t_0, S, K) dt_0. \quad (2.16)$$

Найдем выражения для условных функций распределения  $P_\varphi(d, i, t_0)$ . Для этого введем обозначения:

$$k^*(\varphi) = \left[ \frac{\varphi}{\rho^+ + \rho^-} \right], \varphi^* \triangleq \frac{\max\{\varphi + K - k^*(\varphi)(\rho^+ + \rho^-), K(1 + \theta)\}}{1 + \theta}. \quad (2.17)$$

При каждом пересечении “снизу вверх” хеджер тратит сумму, не превосходящую  $\rho^+$ , а на пересечении “сверху вниз” хеджер продает актив по цене поставки  $K$  держателю опциона, если опцион был исполнен, либо другим участникам рынка. Следовательно, в результате двух последовательных пересечений “снизу вверх” и “сверху вниз” хеджер затрачивает сумму, не превышающую  $\rho^+ + \rho^-$ . При этом отметим, что если хеджер при досрочном исполнении опциона приобретает актив по минимально возможной цене, его дополнительные потери, без учета ранее произведенных затрат, не могут быть меньше чем  $K\theta$ . Таким образом, при фиксированном  $\varphi$ , число  $k^*(\varphi)$  определяет допустимое количество пар последовательных пересечений до момента исполнения опциона, при котором суммарные потери гарантированно

не превосходят  $\varphi$ . Величина  $\varphi^*$  определяет максимальную цену покупки базового актива, при которой суммарные потери, с учетом уже произведенных затрат, не превосходят  $\varphi$ . Рассмотрим 3 возможных случая:

1. Если  $i < 2k^*(\varphi)$ , то есть произошло слишком мало пересечений, то

$$P_\varphi(d, i, t_0) = 1. \quad (2.18)$$

2. Если  $i = 2k^*(\varphi)$ , то

$$P_\varphi(d, i, t_0) = 1 - (1 - p(d))^{2k^*(\varphi)} + (1 - p(d))^{2k^*(\varphi)} \frac{\mathcal{P}\{S(T) \leq \varphi^* | S(t_0) = K\}}{\mathcal{P}\{S(T) \leq K(1+d) | S(t_0) = K\}}. \quad (2.19)$$

Первое слагаемое соответствует вероятности того, что опцион был исполнен до пересечения с номером  $2k^*(\varphi)$  включительно. Второе слагаемое соответствует вероятности того, что опцион не был исполнен преждевременно, а рыночная цена актива в момент времени  $T$  была либо выше уровня цены поставки, но ниже  $\varphi^*$ , и опцион был исполнен, либо цена актива оказалась ниже уровня цены поставки и опцион исполнен не был. Вероятность в знаменателе соответствует тому, что не произошло еще одного пересечения “снизу вверх”, т.е. общее число пересечений осталось четным.

3. Если  $i \geq 2k^*(\varphi) + 1$ , то

$$P_\varphi(d, i, t_0) = 1 - (1 - p(d))^{2k^*(\varphi)} + (1 - p(d))^{2k^*(\varphi)} p(d) F_\zeta(\varphi^* - K). \quad (2.20)$$

Первое слагаемое соответствует вероятности того, что опцион был исполнен до пересечения с номером  $2k^*(\varphi)$  включительно. Второе слагаемое соответствует вероятности того, что опцион был исполнен на пересечении с номером  $2k^*(\varphi) + 1$ , и цена исполнения была такова, что суммарные потери не превысили  $\varphi$ .

Нетрудно заметить, что функции  $P_\varphi(d, i, t_0)$  являются разрывными по  $\varphi$  в точках  $\varphi_j = j(\rho^+ + \rho^-)$ , для любого натурального  $k$ , а значит и функция  $P_\varphi(d)$  также является разрывной в точках  $\varphi_j, j = 1, 2, \dots$ , в силу соотношений (2.12) и (2.13). Тем не менее, можно непосредственно вычислить левые и правые пределы функций  $P_\varphi(d, i, t_0)$  в этих точках. Обозначим

$$P_{\varphi_j}^+(d, i, t_0) \triangleq \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_j + 0} P_\varphi(d, i, t_0),$$

$$P_{\varphi_j}^-(d, i, t_0) \triangleq \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_j - 0} P_\varphi(d, i, t_0).$$

Если  $\varphi = \varphi_j + 0$ , то по формуле (2.17) получаем  $k^*(\varphi) = j$ , а значит правые пределы равны:

$$P_{\varphi_j}^+(d, i, t_0) = \begin{cases} 1, & \text{при } i < 2j; \\ 1 - (1 - p(d))^{2i} + (1 - p(d))^{2i} \frac{\mathcal{P}\{S(T) \leq K | S(t_0) = K\}}{\mathcal{P}\{S(T) \leq K(1+d) | S(t_0) = K\}}, & \text{при } i = 2j; \\ 1 - (1 - p(d))^{2i}, & \text{при } i \geq 2j + 1. \end{cases} \quad (2.21)$$



Аналогично, при  $\varphi = \varphi_j - 0$  получаем  $k^*(\varphi) = j - 1$ , и левые пределы равны:

$$P_{\varphi_j}^-(d, i, t_0) = \begin{cases} 1, & \text{при } i \leq 2j - 2; \\ 1 - (1 - p(d))^{2i-1}, & \text{при } i \geq 2j - 1. \end{cases} \quad (2.22)$$

Функции  $P_\varphi(d, i, t_0)$  непрерывны справа и неубывают по  $\varphi$ . В силу (2.17)-(2.20) и того, что функция  $F_\zeta(\cdot)$  является возрастающей, для любого  $i > 0$  функция  $P_\varphi(d, i, t_0)$  строго возрастает по  $\varphi$  при  $\varphi \in (j(\rho^+ + \rho^-), (j+1)(\rho^+ + \rho^-)]$ , где  $j$  принимает целочисленные значения от 0 до  $[\frac{i}{2}]$ . Функция принимает постоянное значение, равное  $P_{\varphi_j}^+(d, i, t_0)$ , при  $\varphi \in [j(\rho^+ + \rho^-); j(\rho^+ + \rho^-) + K\theta)$ , где  $j = 0, 1, \dots, [\frac{i}{2}]$ . А также  $P_\varphi(d, i, t_0) = 1$  при  $\varphi > ([\frac{i}{2}] + 1)(\rho^+ + \rho^-)$ .

Из соотношения (2.16) следует, что функция  $P_\varphi(d, i)$  является непрерывной справа неубывающей по  $\varphi$  функцией. Разрывы функции  $P_\varphi(d, i)$  будут происходить также в точках  $\varphi_j$ . Обозначим левые и правые пределы функции  $P_\varphi(d, i)$  в этих точках как

$$P_{\varphi_j}^-(d, i) \triangleq \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_j - 0} P_\varphi(d, i) = \int_0^T P_{\varphi_j}^-(d, i, t_0) f_\tau(t_0, S, K) dt_0, \quad (2.23)$$

$$P_{\varphi_j}^+(d, i) \triangleq \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_j + 0} P_\varphi(d, i) = \int_0^T P_{\varphi_j}^+(d, i, t_0) f_\tau(t_0, S, K) dt_0. \quad (2.24)$$

Аналогично, из соотношений (2.12) и (2.13) следует, что функция безусловного распределения  $P_\varphi(d)$  является непрерывной справа неубывающей по  $\varphi$  функцией. Разрывы функции  $P_\varphi(d)$  будут происходить также в точках  $\varphi_j$ . Обозначим левые и правые пределы функции  $P_\varphi(d)$  в этих точках как

$$P_{\varphi_j}^-(d) \triangleq \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_j - 0} P_\varphi(d) = 1 - F_\tau(T, S, K) + \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^T P_{\varphi_j}^-(d, i, t_0) P(i, t_0) f_\tau(t_0, S, K) dt_0, \quad (2.25)$$

$$P_{\varphi_j}^+(d) \triangleq \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_j + 0} P_\varphi(d) = 1 - F_\tau(T, S, K) + \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^T P_{\varphi_j}^+(d, i, t_0) P(i, t_0) f_\tau(t_0, S, K) dt_0. \quad (2.26)$$

### 2.2.2. Квантиль распределения потерь хеджера

Поскольку нам известна функция распределения величины потерь хеджера, мы можем найти квантиль распределения этой величины (2.9):

$$\varphi_\alpha(d) \triangleq \min\{\varphi : P_\varphi(d) \geq \alpha\}, \alpha \in (0; 1).$$

Квантиль  $\varphi_\alpha(d)$  характеризует порог, который суммарные затраты на хеджирование не превысят с заданной вероятностью  $\alpha$ .

Функция  $P_\varphi(d)$  разрывна в точках  $\varphi_j = j(\rho^+ + \rho^-)$ , а значения пределов справа и слева вычисляются согласно (2.25) и (2.26). Следовательно, если существует целое  $m > 0$  такое, что при заданном  $\alpha$  выполняется  $P_{\varphi_m}^-(d) < \alpha \leq P_{\varphi_m}^+(d)$ , то искомая квантиль  $\varphi_\alpha(d)$  равна  $m(\rho^+ + \rho^-)$ . В противном случае существует  $m > 0$  такое, что  $P_{\varphi_m}^+(d) < \alpha \leq P_{\varphi_{m+1}}^-(d)$  и искомая квантиль будет принадлежать интервалу  $(m(\rho^+ + \rho^-) + K\theta; (m+1)(\rho^+ + \rho^-))$ , на котором функция  $P_\varphi(d)$  является строго возрастающей. В этом случае квантиль может быть определена как решение уравнения

$$P_\varphi(d) = \alpha \quad (2.27)$$

по  $\varphi$  на интервале  $(m(\rho^+ + \rho^-) + K\theta; (m+1)(\rho^+ + \rho^-))$ . Поскольку функция  $P_\varphi(d)$  не может быть вычислена точно в силу необходимости суммирования бесконечного ряда, для решения уравнения (2.27) необходимо использовать численные алгоритмы, устойчивые к погрешностям во входных данных. К таким методам относится, например, метод дихотомии ([40], [1]). Однако, если нет необходимости в получении точного значения квантили, то может быть предложен простой с вычислительной точки зрения алгоритм оценивания неизвестной квантили.

Введем в рассмотрение квантили условного распределения потерь хеджера при известном числе пересечений. Определим квантиль распределения потерь при условии, что произошло суммарно  $i$  пересечений, следующим образом:

$$\varphi_\alpha(d, i) \triangleq \min\{\varphi : P_\varphi(d, i) \geq \alpha\}. \quad (2.28)$$

В силу того, что функции  $P_\varphi(d, i)$  не возрастают по  $i$  при фиксированных  $\varphi$  и  $d$ , величины  $\varphi_\alpha(d, i)$  не убывают по  $i$ .

Квантили условного распределения потерь могут вычислены следующим образом. Как было показано ранее, функции условного распределения  $P_\varphi(d, i)$  разрывны в точках  $\varphi_j = j(\rho^+ + \rho^-)$ , а значения пределов справа и слева вычисляются согласно (2.23) и (2.24). Следовательно, если существует целое  $m > 0$  такое, что при заданном  $\alpha$  выполняется  $P_{\varphi_m}^-(d, i) < \alpha \leq P_{\varphi_m}^+(d, i)$ , то искомая условная квантиль равна  $\varphi_\alpha(d, i) = m(\rho^+ + \rho^-)$ . В противном случае существует  $m > 0$  такое, что  $P_{\varphi_m}^+(d, i) < \alpha \leq P_{\varphi_{m+1}}^-(d, i)$  и искомая условная квантиль принадлежит интервалу  $(m(\rho^+ + \rho^-) + K\theta; (m+1)(\rho^+ + \rho^-))$ . В этом случае, согласно (2.17), получаем

$$k^*(\varphi_\alpha(d, i)) = m, \varphi^* = \frac{\varphi_\alpha(d, i) + K - m(\rho^+ + \rho^-)}{1 + \theta}.$$

Если  $i = 2m$ , то с учетом (2.16) и (2.19) искомая условная квантиль определяется как решение уравнения

$$1 - (1 - p(d))^{2m} + (1 - p(d))^{2m} \frac{\mathcal{P}\{S(T) \leq \varphi^*\}}{\mathcal{P}\{S(T) \leq K(1 + d)\}} = \alpha.$$

Если  $i > 2m$ , то с учетом (2.16) и (2.20) искомая условная квантиль является решением уравнения

$$1 - (1 - p(d))^{2m} + (1 - p(d))^{2m} p(d) F_\zeta(\varphi^* - K) = \alpha.$$

Таким образом, условная квантиль (2.28) полностью определена. Отметим, что в силу соотношений (2.18)—(2.20), функции условного распределения потерь хеджера не возрастают по  $i$ , если

$$p(d) F_\zeta(\varphi^* - K) \leq \frac{\mathcal{P}\{S(T) \leq \varphi^*\}}{\mathcal{P}\{S(T) \leq K(1 + d)\}}. \quad (2.29)$$

Следовательно, при выполнении условия (2.29), величины условных квантилей  $\varphi_\alpha(d, i)$  не убывают по  $i$ . При этом

$$\begin{aligned} P_{\varphi_\alpha(d,0)}(d) &= 1 - F_\tau(T, S, K) + \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^T P_{\varphi_\alpha(d,0)}(d, i, t_0) P(i, t_0) f_\tau(t_0, S, K) dt_0 \leq 1 - F_\tau(T, S, K) + \\ &\quad \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^T P_{\varphi_\alpha(d,0)}(d, i, t_0) f_\tau(t_0, S, K) dt_0 \int_0^T P(i, t_0) f_\tau(t_0, S, K) dt_0 = \\ &\quad 1 - F_\tau(T, S, K) + \sum_{i=1}^{\infty} P_{\varphi_\alpha(d,0)}(d, i) P(i) + (P(0) - F_\tau(T, S, K)) P_{\varphi_\alpha(d,0)}(d, 0) \leq \\ &\quad 1 - F_\tau(T, S, K) + \sum_{i=0}^{\infty} P_{\varphi_\alpha(d,0)}(d, i) P(i) \leq 1 - F_\tau(T, S, K) + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha P(i) = 1 - F_\tau(T, S, K) + \alpha. \end{aligned}$$

Из приведенных соотношений и формулы (2.13) следует, что безусловная квантиль  $\varphi_\alpha(d)$  равна нулю при  $\alpha \leq 1 - F_\tau(T, S, K)$ . Положим по определению

$$\beta \triangleq \alpha + F_\tau(T, S, K) - 1. \quad (2.30)$$

В силу приведенной выше цепочки неравенств с учетом (2.30) получаем, что

$$P_{\varphi_\beta(d,0)}(d) \leq \alpha.$$

Поскольку величины  $\varphi_\alpha(d, i)$  неограничены сверху, то существует  $m > 0$  такое, что

$$P_{\varphi_\beta(d,m)}(d) \geq \alpha$$

$$P_{\varphi_\beta(d,m-1)}(d) \leq \alpha.$$

Величины  $\varphi_\beta(d, m - 1)$  и  $\varphi_\beta(d, m)$  могут быть использованы как нижняя и верхняя оценки безусловной квантили  $\varphi_\alpha(d)$ . Обозначим их как

$$\varphi_\alpha^- = \varphi_\beta(d, m - 1),$$

$$\varphi_\alpha^+ = \varphi_\beta(d, m).$$

Отрезок  $[\varphi_\beta(d, m-1), \varphi_\beta(d, m)]$  всегда будет содержать одну или две точки разрыва функции  $P_\varphi(d)$ , что может вызвать дополнительные трудности при дальнейшем оценивании квантили. Если отрезок содержит две точки разрыва, т.е. если существует  $j > 0$  такое, что

$$\begin{aligned}\varphi_\beta(d, m-1) &= j(\rho^+ + \rho^-), \\ \varphi_\beta(d, m) &= (j+1)(\rho^+ + \rho^-),\end{aligned}$$

то возможны два случая:

1. Если  $P_{\varphi_{j+1}}^-(d) < \alpha$ , тогда положим

$$\varphi_\alpha^- = j(\rho^+ + \rho^-) + K\theta, \text{ и } \varphi_\alpha^+ = (j+1)(\rho^+ + \rho^-). \quad (2.31)$$

2. Если  $P_{\varphi_{j+1}}^-(d) > \alpha$ , тогда положим

$$\varphi_\alpha(d) = j(\rho^+ + \rho^-). \quad (2.32)$$

В первом случае искомая квантиль будет принадлежать интервалу  $(\varphi_\alpha^-; \varphi_\alpha^+)$ , во втором случае значение квантили определяется точно.

Если же отрезок  $[\varphi_\beta(d, m-1), \varphi_\beta(d, m)]$  содержит одну точку разрыва, т.е. существует  $j > 0$  такое, что  $\varphi_\beta(d, m-1) \leq \varphi_j \leq \varphi_\beta(d, m)$ , то новые оценки безусловной квантили определяются в зависимости от значения  $P_{\varphi_j}(d)$ . Возможны 3 случая:

1. Если  $P_{\varphi_j}^-(d) > \alpha$ , тогда положим

$$\varphi_\alpha^- = \varphi_\beta(d, m-1), \text{ и } \varphi_\alpha^+ = j(\rho^+ + \rho^-). \quad (2.33)$$

2. Если  $P_{\varphi_j}^+(d) < \alpha$ , тогда положим

$$\varphi_\alpha^- = j(\rho^+ + \rho^-) + K\theta, \text{ и } \varphi_\alpha^+ = \varphi_\beta(d, m). \quad (2.34)$$

3. Если  $P_{\varphi_j}^-(d) < \alpha < P_{\varphi_j}^+(d)$ , тогда положим

$$\varphi_\alpha(d) = j(\rho^+ + \rho^-). \quad (2.35)$$

В первых двух случаях искомая квантиль будет принадлежать интервалу  $(\varphi_\alpha^-; \varphi_\alpha^+)$ , в третьем случае значение квантили определяется точно.

Отметим, что функция  $P_\varphi(d)$  является непрерывной и строго возрастающей на интервале  $(\varphi_\alpha^-; \varphi_\alpha^+)$ , что позволяет использовать на этом интервале численные методы поиска решения уравнения (2.27). Однако, если удастся найти или оценить сверху константу Липшица функции распределения  $P_\varphi(d)$  на  $(\varphi_\alpha^-; \varphi_\alpha^+)$ , то эти оценки могут быть улучшены.

Предположим, что нам известна оценка константы Липшица  $L$  функции  $P_\varphi(d)$  на интервале  $(\varphi_\alpha^-; \varphi_\alpha^+)$ , тогда могут быть легко построены верхняя и нижняя кусочно-линейные огибающие функции  $P_\varphi(d)$ :

$$F^+(\varphi, d) = \min\{P_{\varphi_\alpha^+}^-(d), P_{\varphi_\alpha^-}^+(d) + L(\varphi - \varphi_\alpha^-)\},$$

$$F^-(\varphi, d) = \min\{P_{\varphi_\alpha^-}^+(d), P_{\varphi_\alpha^+}^-(d) + L(\varphi - \varphi_\alpha^+)\}.$$

Отсюда получаем оценки неизвестной квантили

$$\varphi_\alpha^- = \frac{\alpha - P_{\varphi_\alpha^-}^+(d)}{L} + \varphi_\alpha^-,$$

$$\varphi_\alpha^+ = \frac{\alpha - P_{\varphi_\alpha^+}^-(d)}{L} + \varphi_\alpha^+.$$

Для получения требуемой точности оценивания  $(\varphi_\alpha^+ - \varphi_\alpha^- < \varepsilon)$  предложим алгоритм, объединяющий описанный выше подход с методом дихотомии.

**Алгоритм 2.**

1. Если существует точка разрыва  $\varphi_m$ , где  $m > 0$  такая, что  $P_{\varphi_m}^-(d) < \alpha \leq P_{\varphi_m}^+(d)$ , то  $\varphi_\alpha^- = \varphi_\alpha^+ = \varphi_\alpha = m(\rho^+ + \rho^-)$  и работа алгоритма завершается. Иначе находим условные квантили  $\varphi_\beta(d, m-1)$  и  $\varphi_\beta(d, m)$  такие, что  $P_{\varphi_\beta(d, m-1)}^+(d) < \alpha < P_{\varphi_\beta(d, m)}^-(d)$ , где  $\beta$  определяется согласно (2.30).

2. Если обе условные квантили являются точками разрыва функции  $P_\varphi(d)$ , т.е. если существует такое  $j \geq 0$ , что  $\varphi_\beta(d, m-1) = \varphi_j$ , а  $\varphi_\beta(d, m) = \varphi_{j+1}$ , то в соответствии с (2.31) определим оценки неизвестной квантили, которые обозначим как  $\varphi_\alpha^-(0)$  и  $\varphi_\alpha^+(0)$ , положим  $i = 1$  и перейдем к шагу 4. Иначе переходим к шагу 3.

3. Определим  $j$  такое, что  $\varphi_\beta(d, m-1) \leq \varphi_j \leq \varphi_\beta(d, m)$  и определим в соответствии с (2.33)–(2.35) оценки неизвестной квантили, которые обозначим как  $\varphi_\alpha^-(0)$  и  $\varphi_\alpha^+(0)$ . Положим  $i = 1$  и перейдем к шагу 4.

4. Вычислим уточненные оценки квантили

$$\varphi_\alpha^-(i) = \frac{\alpha - P_{\varphi_\alpha^-(i-1)}^+(d)}{L} + \varphi_\alpha^-(i-1),$$

$$\varphi_\alpha^+(i) = \frac{\alpha - P_{\varphi_\alpha^+(i-1)}^-(d)}{L} + \varphi_\alpha^+(i-1).$$

Если  $\varphi_\alpha^+(i) - \varphi_\alpha^-(i) \leq \varepsilon$ , то переходим к шагу 6, иначе переходим к шагу 5.

5. Вычислим  $p = P_{\frac{\varphi_\alpha^+(i) + \varphi_\alpha^-(i)}{2}}(d)$ . Если  $p > \alpha$ , то  $\varphi_\alpha^+(i+1) = \frac{\varphi_\alpha^+(i) + \varphi_\alpha^-(i)}{2}$  и  $\varphi_\alpha^-(i+1) = \varphi_\alpha^-(i)$ , иначе  $\varphi_\alpha^-(i+1) = \frac{\varphi_\alpha^+(i) + \varphi_\alpha^-(i)}{2}$  и  $\varphi_\alpha^+(i+1) = \varphi_\alpha^+(i)$ . Положим  $i = i+1$  и возвращаемся к шагу 3.

6. Положим верхнюю и нижнюю оценки безусловной квантили равными  $\varphi_\alpha^+(i)$  и  $\varphi_\alpha^-(i)$ . Работа алгоритма завершается.

Данный алгоритм будет сходиться к решению уравнения (2.27), то есть к значению искомой квантили  $\varphi_\alpha(d)$ , так как функция  $P_\varphi(d)$  монотонно возрастает на интервале  $(\varphi_\alpha^-(0); \varphi_\alpha^+(0))$ , получаемом на 2-м шаге алгоритма. При этом,  $P_{\varphi_\alpha^-(0)}^+(d) < \alpha$ , а  $P_{\varphi_\alpha^+(0)}^-(d) > \alpha$ .

Следовательно, выполнены условия сходимости метода дихотомии для поиска решения уравнения (2.27). Алгоритм также будет давать точное значение квантили, если выполняется условие на 1-м шаге.

Использование огибающих на 4-м шаге позволяет повысить точность метода на каждом шаге. Если оценивание константы Липшица  $L$  невозможно, то можно принять  $L = \infty$ , тогда данный алгоритм сводится к методу дихотомии для поиска решения уравнения (2.27).

Преимуществом описанного выше подхода, использующего верхние и нижние огибающие функции  $P_\varphi(d)$ , заключается в том, что эти огибающие могут построены на всей области определения функции  $P_\varphi(d)$  и использованы для построения верхней и нижней оценок функции интегральной квантили [79]:

$$\psi_\alpha(d) \triangleq \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \varphi_\beta(d) d\beta,$$

которая характеризует средние потери хеджера, превышающие порог  $\varphi_\alpha(d)$ . В литературе интегральная квантиль  $\psi_\alpha(d)$  также известна под названием CVaR, что является сокращением от Conditional Value-at-Risk (условные потери на уровне риска). В отличие от VaR-критерия CVaR является когерентной мерой риска [52]. Также верхние и нижние огибающие функции  $P_\varphi(d)$  могут быть использованы для оценки других мер риска, основанных на квантили распределения потерь [60].

### 2.2.3. Результаты численных экспериментов

Приведем пример поиска оценок квантили уровня  $\alpha = 0,9$  с точностью 0,001 по Алгоритму 2.

*Пример 2.* Пусть по условию опциона цена поставки  $K$  равна 20 у.е., стартовая цена базового актива совпадает с уровнем цены поставки ( $S = K$ ), а анализ динамики цены базового актива показывает, что коэффициент  $\sigma$  равен 0,3, коэффициент  $\mu$  равен 0,01. Пусть срок исполнения опциона  $T$  составляет 30 дней, а при покупке актива взимается комиссия  $\theta$  в размере 1%. Вероятность досрочного исполнения  $p(d)$  положим равной 0,24, а оценку константы Липшица  $L$  положим равной 1. Относительную ширину полосы нечувствительности  $d$  установим равной 0,045.

В точках, равных значениям условных квантилей при 6 и 7 пересечениях,  $\varphi_{0,9}(0,045, 30, 6) = 3,39$  и  $\varphi_{0,9}(0,045, 30, 7) = 4,40$  находим значения верхних и нижних пределов функции распределения величины потерь:

$$\begin{aligned} P_{3,39}^+(0,045, 30) &= 0,87, \\ P_{4,40}^-(0,045, 30) &= 0,944. \end{aligned}$$

Следовательно, на первом шаге Алгоритма 1 получаем  $t = 7$ . В результате 9 итераций

алгоритма получаем верхнюю и нижнюю оценки квантили распределения потерь хеджера

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha}^{-} &= 3,6738, \\ \varphi_{\alpha}^{+} &= 3,6745.\end{aligned}$$

Вычислим также верхние и нижние оценки квантили распределения потерь при относительной ширине полосы  $d = 0,005$  и  $d = 0,025$ . При  $d = 0,005$  получаем, что квантиль попадает в точку разрыва функции распределения и равна  $\varphi_{0,9}(0,005, 30) = \varphi_{0,9}^{+} = \varphi_{0,9}^{-} = 6,622$ . При  $d = 0,1$  также получаем точное значение квантили, равное  $\varphi_{0,9} = 4,44$ .

Отметим, что точность полученных оценок достаточно высока. Это обусловлено тем, что найденные на 1-м шаге алгоритма условные квантили дают хорошее начальное приближение для квантили. Более того, анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что существует оптимальная ширина полосы нечувствительности  $d^*$ , минимизирующая квантиль распределения потерь хеджера.

### 2.3. Выводы по главе 2

В данной главе получено аналитическое выражение для математического ожидания затрат хеджера, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования. Показано, что математическое ожидание затрат является непрерывной функцией от относительной ширины полосы “нечувствительности” хеджирования в случае, когда вероятность досрочного исполнения при одном пересечении полосы “нечувствительности” траекторией цены базового актива непрерывна по ширине полосы “нечувствительности”. Предложен алгоритм поиска оптимальной ширины полосы “нечувствительности”, минимизирующей средние затраты на хеджирование.

Также в данной главе получены аналитические выражения для функций условного и безусловного распределения затрат на хеджирование продавца колл-опциона, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования. Найденны точки разрыва и промежутки монотонности функций условного и безусловного распределения. Предложен метод построения верхней и нижней оценок квантили распределения затрат хеджера, использующий значения квантилей условного распределения затрат хеджера при известном числе пересечений полосы “нечувствительности” хеджа траекторией цены базового актива. Значение квантили распределения затрат играет существенную роль в случае использования стратегии последовательного хеджирования, поскольку для формирования хеджирующего портфеля продавцом опциона используются заимствованные фонды. Квантиль распределения потерь будет характеризовать необходимый суммарный объем заимствованных средств.

Описанный в работе метод построения верхней и нижней кусочно-линейных огибающих функции распределения потерь  $P_\varphi(d)$ , может быть использован для построения верхней и нижней оценок функции интегральной квантили, а также других когерентных мер риска, основанных на квантили распределения потерь.



## Глава 3.

# Двухшаговая задача хеджирования европейского колл-опциона при случайной длительности транзакций

В главе рассматривается задача хеджирования с точки зрения продавца европейского колл-опциона. В настоящий момент результаты работ, посвященных исследованию задач хеджирования и оценивания опционов, во многом основываются на предположениях модели Блэка-Шоулза [55], в них не учитывается тот факт, что каждая операция по купле-продаже активов занимает некоторое время. Предполагается, что при формировании и управлении хеджирующим портфелем хеджер может совершать сделки мгновенно. Данное предположение является приемлемым в случае, когда базовый актив является достаточно ликвидным. В случае же, когда базовый актив обладает низкой ликвидностью, то есть сделки по покупке и продаже данного актива происходят достаточно редко, необходимо учитывать при управлении хеджирующим портфелем заранее неизвестную длительность операций (транзакций).

Задача расчета стоимости и хеджирования опционов на неликвидных рынках рассматривалась, например, в работах [57, 81]. Неликвидность рынка в рассмотренных математических моделях с непрерывным временем выражалась в зависимости стоимости базового актива от объема торгов. Полученные в работе [57] результаты проиллюстрированы на примере расчета колл-опциона европейского типа.

Задача хеджирования и оценки опционных контрактов в предположении, что операции купли-продажи базового актива имеют заранее неизвестную продолжительность по времени, ранее рассмотрены не были. Обобщить полученные во второй главе данной диссертации результаты для случая неизвестной длительности транзакций не удастся в связи с чрезвычайным усложнением математической модели: при продаже или покупке актива необходимо учитывать возможные колебания стоимости базового актива за время исполнения тран-

закции. В данной ситуации наиболее эффективными представляются динамические модели хеджирования.

В данной главе будет рассмотрена двухшаговая задача хеджирования колл-опциона европейского типа в предположении, что операции купли-продажи базового актива имеют случайную продолжительность, продолжительности не пересекающихся во времени операций независимы, а их распределение зависит от объема покупаемых или продаваемых активов.

Математические модели, описывающие длительности рыночных транзакций, рассмотрены, например, в работах [87] и [61]. В указанных работах выдвигается предположение, что длительность транзакции случайна и имеет гамма-распределение, частным случаем которого является экспоненциальное распределение.

В третьей главе используются следующие обозначения:

$K$  — цена поставки;

$T$  — время жизни опциона;

$S(0)$  — стартовая цена базового актива;

$r$  — комиссионные издержки за срочные операции;

$\sigma$  — волатильность цены базового актива;

$\mu$  — коэффициент линейного тренда в изменении стоимости базового актива;

$V$  — необходимый по контракту объем базового актива;

$\mathcal{P}\{A\}$  — вероятность события  $A$ ;

$\mathbf{M}[\cdot]$  — математическое ожидание случайной величины;

$W(t)$  — винеровский процесс;

$S(t)$  — стоимость базового актива в момент времени  $t$ ;

$\lambda > 0$  — параметр, характеризующий среднюю продолжительность операций купли-продажи базового актива;

$E(x)$  — экспоненциальное распределение с параметром  $x$ ;

$N(m, \sigma^2)$  — нормальное распределение с математическим ожиданием  $m$  и дисперсией  $\sigma^2$ ;

$W(t)$  — винеровский процесс;

$\text{cov}(X, Y)$  — ковариация случайных величин  $X$  и  $Y$ ;

$\tau_i$  — длительность  $i$ -й операции купли-продажи базового актива;

$u_i$  — объем продаваемых или покупаемых активов на  $i$ -м шаге;

$N$  — горизонт хеджирования;

$L(u_1, u_2, T)$  — суммарные затраты хеджера за время  $T$  при управлениях  $u_1$  и  $u_2$ ;

$L_i$  — потери к началу  $i$ -го шага;

$V_i$  — имеющийся объем базового актива к началу  $i$ -го шага;

$t_i$  — момент начала  $i$ -го шага;

$S_i$  — цена базового актива к началу  $i$ -го шага;

$z_i = \text{col}(L_i, V_i, t_i, S_i)$  — вектор состояния системы;

$U_i$  — множество допустимых управлений на  $i$ -м шаге;

$X_i$  — вектор случайных параметров на  $i$ -м шаге;

$f_i(z_i, u_i, X_i)$  — функция перехода на  $i$ -м шаге;

$g_i(z_i, u_i, X_i)$  — затраты на  $i$ -м шаге;

$\Phi(z_N) = L_N$  — целевая функция;

$\Phi_0(u) = \mathbf{M}[\Phi(z_N)]$  — математическое ожидание целевой функции;

$u_1^*$  — оптимальное управление на первом шаге;

$u_2^*$  — оптимальное управление на втором шаге.

### 3.1. Процедура хеджирования

Пусть цена поставки базового актива равна  $K$ , а время жизни опциона  $T$ . В соответствии с контрактом хеджер должен будет продать держателю опциона  $V$  единиц базового актива по цене  $K$ , в случае если цена базового актива в момент времени  $T$  превышает уровень цены поставки  $K$ . Если в момент времени  $T$  цена базового актива ниже уровня  $K$  цены поставки, то опцион остается неисполненным. Будем по-прежнему считать, что стоимость базового актива определяется случайным процессом (1.11):

$$S(t) = S(0) + \mu t + \sigma W(t), \quad t \in [0, T].$$

Будем считать, что время  $\tau$  исполнения операции купли-продажи базового актива случайно и имеет экспоненциальное распределение, параметр которого зависит от объема продаваемых или покупаемых активов, т.е.

$$\tau \sim \mathbf{E} \left( \frac{\lambda}{|u|} \right),$$

где  $u$  — количество приобретаемых ( $u > 0$ ) или продаваемых ( $u < 0$ ) единиц базового актива, а  $\lambda$  — заданный параметр, характеризующий среднее время покупки или продажи единицы базового актива. Экспоненциальное распределение является частным случаем гамма-распределения, используемого в известных математических моделях длительности рыночных транзакций (см. например [87] и [61]). Однако, в этих моделях не учитывается зависимость времени выполнения транзакции от ее объема, т.е. от количества продаваемых или покупаемых активов. В рассматриваемой модели предполагается, что среднее время выполнения одной операции прямо пропорционально объему сделки, независимо от направления сделки.

Предположим, что продавец опциона (хеджер) хеджирует контракт (покупает или продает базовый актив) в два этапа: в начальный момент времени  $t = 0$  хеджер приобретает  $u_1$  единиц базового актива, а в момент  $\tau_1$  ( $\tau_1 \sim E\left(\frac{\lambda}{|u_1|}\right)$ ) завершения первой покупки покупает еще  $u_2$  единиц базового актива. Длительность второй операции купли-продажи  $\tau_2$  также случайна и имеет экспоненциальное распределение ( $\tau_2 \sim E\left(\frac{\lambda}{|u_2|}\right)$ ),  $\tau_1$  и  $\tau_2$  независимы. Если в момент времени  $\tau_1$  цена базового актива  $S(\tau_1)$  оказывается существенно ниже уровня цены поставки (вероятность достижения уровня цены поставки за оставшееся время мала), то хеджер может продать актив, тогда  $u_2 < 0$ .

Будем считать, что в случае, когда хеджер в момент  $T$  истечения срока жизни опциона не может предоставить необходимое количество единиц  $V$  базового актива, он может купить необходимое количество актива в момент времени  $T$  по более высокой цене, равной  $S(T)(1 + r)$ , где  $r > 0$  — надбавка за “срочность” операции. Данное предположение обеспечивает возможность исполнения обязательства продавца опциона при любой интенсивности операций купли-продажи базового актива и любом времени жизни опциона.

Будем считать, что в рамках хеджирования обязательства по опциону хеджер не может купить большее количество единиц базового актива, чем требуется по условию контракта, и к началу процедуры хеджирования хеджер не имеет на руках ни одной единицы базового актива. Т.е. в данной постановке не допускается возможность дополнительного инвестирования базовый актив с целью получения дополнительной выгоды. После истечения времени жизни опциона хеджер продает оставшиеся единицы базового актива.

Обозначим потери хеджера как  $L(u_1, u_2, T)$ , тогда возможны следующие случаи:

1. Время исполнения первой транзакции  $\tau_1$  превышает время жизни опциона  $T$  и цена базового актива ниже уровня цены поставки, т.е.  $S(T) < K$ . Тогда опцион в момент  $T$  окончания срока действия остается неисполненным и в момент  $\tau_1$  завершения первой транзакции хеджер продает имеющийся объем базового актива, купленный на первом шаге:

$$L(u_1, u_2, T) = u_1 S(0) - u_1 S(\tau_1).$$

2. Время исполнения первой транзакции  $\tau_1$  превышает время жизни опциона  $T$  и цена базового актива выше уровня цены поставки, т.е.  $S(T) \geq K$ . В этом случае, в момент  $T$  исполнения опциона хеджер приобретает  $V$  единиц базового актива по цене  $S(T)(1 + r)$  и продает держателю опциона. В момент  $\tau_1$  завершения первой транзакции (после исполнения опциона) хеджер продает по рыночной цене имеющийся объем базового актива  $u_1$ :

$$L(u_1, u_2, T) = u_1 S(0) + V S(T)(1 + r) - V K - u_1 S(\tau_1).$$

3. Время исполнения первой транзакции  $\tau_1$  не превышает время жизни опциона  $T$ , при этом суммарное время исполнения двух транзакций превосходит время жизни опциона, т.е.  $\tau_1 + \tau_2 > T$ , а цена базового актива в момент  $T$  находится ниже уровня цены поставки, т.е.  $S(T) < K$ . В этом случае опцион остается неисполненным и в момент  $\tau_1 + \tau_2$  завершения второй транзакции хеджер продает имеющийся объем базового актива по текущей рыночной цене  $S(\tau_1 + \tau_2)$ :

$$L(u_1, u_2, T) = u_1 S(0) + u_2 S(\tau_1) - (u_1 + u_2) S(\tau_1 + \tau_2).$$

4. Время исполнения первой транзакции  $\tau_1$  не превышает время жизни опциона  $T$ , при этом суммарное время исполнения двух транзакций превосходит время жизни опциона, т.е.  $\tau_1 + \tau_2 > T$ , а цена базового актива в момент времени  $T$  выше уровня цены поставки, т.е.  $S(T) \geq K$ . В этом случае, в момент  $T$  исполнения опциона хеджер приобретает недостающий объем базового актива  $V - u_1$  по цене  $S(T)(1 + r)$  и продает держателю опциона по цене поставки  $K$ . В момент  $\tau_1 + \tau_2$  завершения второй транзакции хеджер продает имеющийся у него объем базового актива  $u_2$  по текущей рыночной цене  $S(\tau_1 + \tau_2)$ :

$$L(u_1, u_2, T) = u_1 S(0) + u_2 S(\tau_1) + (V - u_1) S(T)(1 + r) - VK - u_2 S(\tau_1 + \tau_2).$$

5. Суммарное время исполнения транзакции  $\tau_1 + \tau_2$  не превышает время жизни опциона  $T$  и цена базового актива в момент времени  $T$  ниже уровня цены поставки, т.е.  $S(T) < K$ . В этом случае до истечения срока действия опциона хеджер успевает завершить обе транзакции, а в момент  $T$  истечения срока жизни опциона хеджер продает имеющиеся у него  $u_1 + u_2$  единиц базового актива по текущей рыночной цене  $S(T)$ :

$$L(u_1, u_2, T) = u_1 S(0) + u_2 S(\tau_1) - (u_1 + u_2) S(T).$$

6. Суммарное время исполнения транзакции  $\tau_1 + \tau_2$  не превышает время жизни опциона  $T$  и цена базового актива в момент времени  $T$  выше уровня цены поставки, т.е.  $S(T) \geq K$ . В этом случае, в момент  $T$  исполнения опциона хеджер приобретает недостающий объем базового актива  $V - u_1 - u_2$  по цене  $S(T)(1 + r)$  и продает держателю опциона весь имеющийся объем базового актива по цене поставки  $K$ :

$$L(u_1, u_2, T) = u_1 S(0) + u_2 S(\tau_1) + (V - u_1 - u_2) S(T)(1 + r) - VK.$$

В результате получаем, что функция потерь задается соотношением

$$L(u_1, u_2, T) = \begin{cases} u_1 S(0) - u_1 S(\tau_1), & \text{если } \tau_1 > T, S(T) < K; \\ u_1 S(0) + VS(T)(1+r) - VK - u_1 S(\tau_1), & \text{если } \tau_1 > T, S(T) \geq K; \\ u_1 S(0) + u_2 S(\tau_1) - (u_1 + u_2) S(\tau_1 + \tau_2), & \text{если } \tau_1 \leq T, \tau_1 + \tau_2 > T, S(T) < K; \\ u_1 S(0) + u_2 S(\tau_1) + \\ + (V - u_1) S(T)(1+r) - VK - u_2 S(\tau_1 + \tau_2), & \text{если } \tau_1 \leq T, \tau_1 + \tau_2 > T, S(T) \geq K; \\ u_1 S(0) + u_2 S(\tau_1) - (u_1 + u_2) S(T), & \text{если } \tau_1 + \tau_2 \leq T, S(T) < K; \\ u_1 S(0) + u_2 S(\tau_1) + \\ + (V - u_1 - u_2) S(T)(1+r) - VK, & \text{если } \tau_1 + \tau_2 \leq T, S(T) \geq K. \end{cases} \quad (3.1)$$

## 3.2. Постановка задачи

Рассмотрим двухшаговую систему, описывающую динамику изменения портфеля хеджера. Введем в рассмотрение вектор состояния системы

$$z_i = \text{col}(L_i, V_i, t_i, S_i), i = 1, 2, \quad (3.2)$$

где  $L_i$  — накопленные потери к началу  $i$ -го шага,  $V_i$  — количество единиц базового актива к началу  $i$ -го шага,  $S_i$  — стоимость базового актива к началу  $i$ -го шага, а  $t_i$  — момент начала  $i$ -го шага. Начальное состояние системы задается вектором  $z_1$ :

$$z_1 = \text{col}(0, 0, S, 0).$$

Определим модель управления системой. Управление на каждом шаге будем рассматривать как функцию текущего состояния системы:

$$u_i \triangleq u_i(z_i), i = 1, 2. \quad (3.3)$$

Множество допустимых управлений  $U_1$  на первом шаге определяется следующим образом:

$$U_1 \triangleq \{u_1 : u_1 \geq 0\}. \quad (3.4)$$

Множество допустимых управлений  $U_2$  на втором шаге будет зависеть от состояния системы:

$$U_2 \triangleq U_2(z_2) = \{u_2 : z_{12} + u_2 \geq 0, z_{12} + u_2 \leq V\}. \quad (3.5)$$

Таким образом, хеджер не может приобрести больше единиц базового актива, чем прописано в контракте, и не может продать больше, чем у него есть к началу второго шага.

Динамику системы будем описывать рекуррентным соотношением:

$$z_{i+1} = f_i(z_i, u_i, X_i), i = 1, 2, \quad (3.6)$$

где  $X_i \in \mathbb{R}^3$  — вектор случайных параметров, а  $f_i(z_i, u_i, X_i)$  — функция перехода на  $i$ -м шаге. В качестве первой компоненты вектора  $X_i$  возьмем длительность  $i$ -го шага, т.е.

$$X_{i1} = \tau_i.$$

В качестве второй компоненты вектора  $X_i$  возьмем приращение процесса  $S(t)$  на отрезке  $[t_i; t_i + \tau_i]$ , т.е

$$X_{i2} = S(t_i + \tau_i) - S(t_i).$$

Из описанной процедуры хеджирования и соотношения (3.1) для суммарных потерь следует, что потери хеджера также будут зависеть от изменения цены базового актива до момента истечения срока действия опциона, т.е. от  $S(T) - S(t_i)$ . Однако, если реализация  $\tau_1$  времени выполнения первой операции окажется меньше времени  $T$  жизни опциона, то к моменту  $t_2$  начала второго шага хеджеру будет неизвестно изменение цены базового актива на всем отрезке  $[t_1; T]$ , и суммарные потери будут зависеть от приращения цены базового актива на отрезке  $[t_2; T]$ . Напротив, если реализация  $\tau_1$  времени выполнения первой операции окажется больше времени  $T$  жизни опциона, то потери хеджера уже не будут зависеть от приращений цены базового актива на отрезке  $[t_2; T]$ . С учетом вышесказанного вместо зависимых приращений  $S(T) - S(t_1)$  и  $S(T) - S(t_2)$  в рассматриваемой модели случайных возмущений можно использовать независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону, с теми же математическими ожиданиями и дисперсиями.

Известно [31], что приращение винеровского процесса  $W(t)$  на отрезке  $[t_1, t_2]$  имеет нормальное распределение:

$$W(t_2) - W(t_1) \sim N(0, |t_2 - t_1|),$$

а ковариация сечений  $W(t_1)$  и  $W(t_2)$  равна

$$\text{cov}(W(t_1), W(t_2)) = \min\{t_1, t_2\}.$$

С учетом вышесказанного, вместо зависимых между собой приращений  $S(t_i + \tau_i) - S(t_i)$  и  $S(T) - S(t_i)$  в модели случайных возмущений будем использовать следующие случайные величины

$$\begin{aligned} X_{i2} &= \mu\tau_i + \sigma \left( \xi_i \sqrt{\min\{\tau_i, T - t_i\}} + \eta_i \sqrt{\max\{0, \tau_i + t_i - T\}} \right), \\ X_{i3} &= \mu(T - t_i) + \sigma \left( \xi_i \sqrt{\min\{\tau_i, T - t_i\}} + \eta_i \sqrt{\max\{0, T - \tau_i - t_i\}} \right), \end{aligned}$$

где  $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$  — независимые в совокупности одинаково распределенные случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение  $N(0, 1)$ . Нетрудно убедиться, что  $\mathbf{M}[S(t_i + \tau_i) - S(t_i)] = \mathbf{M}[X_{i2}]$ ,  $\mathbf{M}[S(T) - S(t_i)] = \mathbf{M}[X_{i3}]$ , и  $\text{cov}(X_{i2}, X_{i3}) = \text{cov}(S(t_i + \tau_i) - S(t_i), S(T) - S(t_i))$ . Также получаем, что  $\mathbf{M}[X_{i3}] = \mathbf{M}[S(T) - S(t_i)]$  и  $\mathbf{D}[X_{i3}] = \mathbf{D}[S(T) - S(t_i)]$ , однако случайные величины  $X_{13}$  и  $X_{23}$  являются независимыми. В результате получаем, что вектор случайных параметров определяется следующим образом:

$$X_i = \begin{pmatrix} \tau_i \\ \mu\tau_i + \sigma \left( \xi_i \sqrt{\min\{\tau_i, T - t_i\}} + \eta_i \sqrt{\max\{0, \tau_i + t_i - T\}} \right) \\ \mu(T - t_i) + \sigma \left( \xi_i \sqrt{\min\{\tau_i, T - t_i\}} + \eta_i \sqrt{\max\{0, T - \tau_i - t_i\}} \right) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

В силу независимости величин  $\tau_i$ , а также независимости величин  $\xi_i$  и  $\eta_i$ , случайные векторы  $X_1$  и  $X_2$  являются независимыми.

Функция перехода  $f_i$  определяется следующим образом:

$$f_i(z_i, u_i, X_i) = \begin{pmatrix} L_i + g_i(z_i, u_i, X_i) \\ V_i + u_i \\ t_i + X_{i1} \\ S_i + X_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_i + g_i(z_i, u_i, X_i) \\ V_i + u_i \\ t_i + \tau_i \\ S_i + \mu\tau_i + \sigma\sqrt{\tau_i}\xi_i \end{pmatrix} = z_i + \begin{pmatrix} g_i(z_i, u_i, X_i) \\ u_i \\ \tau_i \\ \mu\tau_i + \sigma\sqrt{\tau_i}\xi_i \end{pmatrix},$$

где  $g_1(z_1, u_1, x_1)$  — функция потерь на первом шаге, записанная для реализации  $x_1$  случайного вектора  $X_1$ :

$$g_1(z_1, u_1, x_1) \triangleq \begin{cases} u_1 S(0) - u_1(S + x_{12}), & \text{если } \tau_1 > T, S + x_{13} < K; \\ u_1 S(0) + V(S + x_{13})(1 + r) - VK - u_1(S + x_{12}), & \text{если } \tau_1 > T, S + x_{13} \geq K; \\ u_1 S(0), & \text{если } \tau_1 \leq T. \end{cases} \quad (3.8)$$

Функция  $g_2(z_2, u_2, x_2)$  потерь на втором шаге, где  $x_2$  — реализация случайного вектора  $X_2$ , будет определяться выражением:

$$g_2(z_2, u_2, x_2) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{если } t_2 > T; \\ u_2 S_2 - (V_2 + u_2)(S_2 + x_{22}), & \text{если } \tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} < K; \\ u_2 S_2 - u_2(S_2 + x_{22}) + (V - V_2)(S_2 + x_{23})(1 + r) - VK, & \text{если } \tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} \geq K; \\ u_2 S_2 - (V_2 + u_2)(S_2 + x_{23}), & \text{если } \tau_2 \leq T - t_2, S_2 + x_{23} < K; \\ u_2 S_2 + (V - V_2 - u_2)(S_2 + x_{23})(1 + r) - VK, & \text{если } \tau_2 \leq T - t_2, S_2 + x_{23} \geq K. \end{cases} \quad (3.9)$$



В качестве целевой функции возьмем суммарные потери при хеджировании

$$\Phi(z_3) = z_{31} = L_3.$$

Рассмотрим задачу минимизации математического ожидания потерь

$$\Phi_0(u) = \mathbf{M}[\Phi(z_3)] \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (3.10)$$

### 3.3. Динамическое программирование

Установим возможность применения метода динамического программирования для решения задачи (3.10). Для этого приведем необходимые определения:

*Определение 1. Динамическая система называется марковской, если ее поведение в будущем не зависит от прошлого и полностью определяется текущим состоянием системы.*

*Определение 2. Управление  $u_\varepsilon(\cdot)$  называется  $\varepsilon$ -оптимальным, если*

$$\Phi_0(u_\varepsilon(\cdot)) \leq \begin{cases} \Phi_0^* + \varepsilon & \text{при } \Phi_0^* > -\infty, \\ -\frac{1}{\varepsilon} & \text{при } \Phi_0^* = -\infty, \end{cases}$$

где  $\Phi_0^*$  — оптимальное значение критерия.

*Определение 3. Оператор  $G$  называется монотонным, если для любого  $\delta > 0$  существует  $a > 0$ :*

$$G[\Phi_i(z_i) + \delta] \leq G[\Phi_i(z_i)] + a\delta.$$

Справедлива теорема [2]:

*Теорема 7. Пусть  $N$  — горизонт динамической системы и пусть выполнены следующие условия:*

(i)  $\Phi(z_{N+1}) > -\infty$ ;

(ii) динамическая система является марковской;

(iii) оператор  $G[\cdot]$  является монотонным;

(iv)  $u_i(z_i) \in U_i$ , то есть ведется поиск управления в классе позиционных управлений с геометрическими ограничениями;

тогда в задаче минимизации

$$\Phi_0(u) = G[\Phi(z_{N+1})] \rightarrow \min_{u \in U}$$

существует измеримая  $\varepsilon$ -оптимальная стратегия  $u_\varepsilon$ , определяемая с помощью метода динамического программирования.

Как было показано ранее, векторы  $X_1$  и  $X_2$  случайных параметров на первом и втором шаге независимы между собой, следовательно система является марковской. Математическое ожидание является аддитивным марковским оператором, поскольку его можно представить в виде последовательности вложенных условных математических ожиданий, а математическое ожидание суммы совпадает с суммой математических ожиданий слагаемых, если слагаемые не равны  $\infty$  или  $-\infty$ . Таким образом, математическое ожидание является монотонным

оператором с константой  $a = 1$ . Следовательно, для поиска оптимального управления в задаче минимизации математического ожидания терминальной функции (в данном случае, суммарных потерь при хеджировании) может быть использован метод динамического программирования. Запишем основные соотношения метода динамического программирования:

$$\begin{aligned}\Phi_i(z_i) &= \inf_{u_i \in U_i} \mathbf{M}[\Phi_{i+1}(z_{i+1})|z_i], \quad i = 1, 2; \\ \Phi_3(z_3) &= \Phi(z_3),\end{aligned}$$

где  $\Phi_i(z_i)$  — функция будущих потерь, т.е. наименьшее значение критерия в (3.10), которое может быть достигнуто при оптимальном управлении системой, начиная с  $i$ -го шага из текущего состояния  $z_i$ .

### 3.4. Математическое ожидание функции будущих потерь

Для решения задачи (3.10) необходимо найти условное математическое ожидание функции будущих потерь на последнем шаге. Это математическое ожидание определяется с помощью следующей теоремы:

*Теорема 8. Если функция потерь на втором шаге определяется согласно (3.9), а вектор  $X_2$  случайных параметров на втором шаге определяется в соответствии с (3.7), то условное математическое ожидание функции будущих потерь на последнем шаге равно*

$$\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2] = L_2 - \frac{\mu}{\lambda} u_2^2 e(u_2, z_2) - u_2 e(u_2, z_2) \frac{\mu}{\lambda} V_2 \varphi(z_2) - u_2 \mu (T - t_2) - u_2 (1 - e(u_2, z_2)) d_2 + d_3, \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned}\varphi(z_2) &\triangleq \Phi\left(\frac{K - S_2 - \mu(T - t_2)}{\sigma\sqrt{T - t_2}}\right), \\ e(u_2, z_2) &\triangleq e^{-\frac{\lambda}{|u_2|}(T - t_2)}, \\ m_{23}^+ &\triangleq \mu(T - t_2) + \frac{\sigma\sqrt{T - t_2}}{\sqrt{2\pi}(1 - \varphi(z_2))} e^{-\frac{(K - S_2 - \mu(T - t_2))^2}{2\sigma^2(T - t_2)}}, \\ m_{23}^- &\triangleq \mu(T - t_2) - \frac{\sigma\sqrt{T - t_2}}{\sqrt{2\pi}\varphi(z_2)} e^{-\frac{(K - S_2 - \mu(T - t_2))^2}{2\sigma^2(T - t_2)}}, \\ d_2 &\triangleq r(S_2 + m_{23}^+)(1 - \varphi(z_2)), \\ d_3 &\triangleq ((V - V_2)(1 + r)(S_2 + m_{23}^+) - VK)(1 - \varphi(z_2)) - V_2(S_2 + m_{23}^-)\varphi(z_2).\end{aligned}$$

*Доказательство теоремы 8.* Для вычисления математического ожидания функции потерь на последнем шаге, а, следовательно, и функции будущих потерь на последнем шаге, сперва найдем условные математические ожидания случайных величин  $X_{i2}$  и  $X_{i3}$ ,  $i = 1, 2$ , при условии, что в момент истечения срока жизни опциона  $T$  цена базового актива  $S_i + X_{i3}$  оказалась ниже или выше уровня цены поставки  $K$ .

Безусловные математические ожидания величин  $X_{i2}$  и  $X_{i3}$  цены базового актива равны соответственно

$$\mathbf{M}[X_{i2}] = \mu \mathbf{M}[\tau_i] = u_i \frac{\mu}{\lambda},$$

$$\mathbf{M}[X_{i3}] = \mu(T - t_i).$$

Дисперсия приращения  $X_{i3}$  равна:

$$\mathbf{D}[X_{i3}] = \sigma^2(T - t_i).$$

Для любой нормально распределенной случайной величины  $X \sim N(m; \sigma^2)$  условная плотность распределения при условии, что ее реализация не превосходит заданный уровень  $K$ , равна

$$f_X(x|X < K) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\Phi\left(\frac{K-m}{\sigma}\right)}, & \text{при } x < K; \\ 0, & \text{при } x \geq K. \end{cases}$$

где  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ .

Следовательно, условное математическое ожидание СВ  $X$  при условии  $X < K$  равно

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[X|X < K] &= \int_{-\infty}^K x f_X(x|X < K) dx = \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^K \frac{x-m}{\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{m}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^K e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \right) / \Phi\left(\frac{K-m}{\sigma}\right) = \\ &= m - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\Phi\left(\frac{K-m}{\sigma}\right)} e^{-\frac{(K-m)^2}{2\sigma^2}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Аналогично, условная плотность распределения случайной величины  $X \sim N(m; \sigma^2)$  при условии, что ее реализация не меньше уровня  $K$ , задается выражением

$$f_X(x|X > K) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < K; \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{1-\Phi\left(\frac{K-m}{\sigma}\right)}, & \text{при } x \geq K. \end{cases}$$

Следовательно, условное математическое ожидание СВ  $X$  при условии  $X \geq K$  равно

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[X|X \geq K] &= \int_K^{\infty} x f_X(x|X \geq K) dx = \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_K^{\infty} \frac{x-m}{\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{m}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_K^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \right) / \left( 1 - \Phi\left(\frac{K-m}{\sigma}\right) \right) = \\ &= m + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi} \left( 1 - \Phi\left(\frac{K-m}{\sigma}\right) \right)} e^{-\frac{(K-m)^2}{2\sigma^2}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

На основании формул (3.12)–(3.13) получаем, что

$$\mathbf{M}[X_{i3}|X_{i3} < K - S_i] = \mu(T - t_i) - \frac{\sigma\sqrt{T - t_i}}{\sqrt{2\pi}\Phi\left(\frac{K - S_i - \mu(T - t_i)}{\sigma\sqrt{T - t_i}}\right)} e^{-\frac{(K - S_i - \mu(T - t_i))^2}{2\sigma^2(T - t_i)}}, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{M}[X_{i3}|X_{i3} \geq K - S_i] = \mu(T - t_i) + \frac{\sigma\sqrt{T - t_i}}{\sqrt{2\pi}\left(1 - \Phi\left(\frac{K - S_i - \mu(T - t_i)}{\sigma\sqrt{T - t_i}}\right)\right)} e^{-\frac{(K - S_i - \mu(T - t_i))^2}{2\sigma^2(T - t_i)}}. \quad (3.15)$$

Найдем теперь условные математические ожидания случайной величины  $X_{i2}$ . Необходимо рассмотреть только случай, когда  $\tau_i > T - t_i$ . В силу независимости приращений винеровского процесса и соотношения (3.7), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[X_{i2}|X_{i3} < K - S_i, \tau_i > T - t_i] &= \mathbf{M}[X_{i3}|X_{i3} < K - S_i] + \mu\mathbf{M}[\tau_i + t_i - T|\tau_i > T - t_i] = \\ &= \mathbf{M}[X_{i3}|X_{i3} < K - S_i] + u_i\frac{\mu}{\lambda}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где  $\mathbf{M}[X_{i3}|X_{i3} < K - S_i]$  определяется согласно (3.14).

Аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[X_{i2}|X_{i3} \geq K - S_i, \tau_i > T - t_i] &= \mathbf{M}[X_{i3}|X_{i3} \geq K - S_i] + \mu\mathbf{M}[\tau_i + t_i - T|\tau_i > T - t_i] = \\ &= \mathbf{M}[X_{i3}|X_{i3} \geq K - S_i] + u_i\frac{\mu}{\lambda}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где  $\mathbf{M}[X_{i3}|X_{i3} \geq K - S_i]$  определяется согласно (3.15).

Теперь мы можем перейти непосредственно к вычислению математического ожидания функции будущих потерь на втором шаге. В соответствии с описанной выше моделью, получаем

$$\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2] = \mathbf{M}[z_2 + g_2(z_2, u_2, x_2)] = z_2 + \mathbf{M}[g_2(z_2, u_2, x_2)].$$

Второе слагаемое является математическим ожиданием потерь на последнем шаге при управлении  $u_2$ . Поскольку условные математические ожидания приращений процесса ценообразования нам известны, мы можем найти математическое ожидание функции потерь на последнем шаге:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[g_2(z_2, u_2, x_2)] &= \\ &= \mathbf{M}[u_2S_2 - (V_2 + u_2)(S_2 + x_{22})|\tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} < K] \cdot \mathcal{P}\{\tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} < K\} + \\ &\quad + \mathbf{M}[u_2S_2 - u_2(S_2 + x_{22}) + (V - V_2)(S_2 + x_{23})(1 + r) - VK|\tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} \geq K] \cdot \\ &\quad \cdot \mathcal{P}\{\tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} \geq K\} + \mathbf{M}[u_2S_2 - (V_1 + u_2)(S_2 + x_{23})|\tau_2 \leq T - t_2, S_2 + x_{23} < K] \cdot \\ &\quad \cdot \mathcal{P}\{\tau_2 \leq T - t_2, S_2 + x_{23} < K\} + \\ &\quad + \mathbf{M}[u_2S_2 + (V - V_2 - u_2)(S_2 + x_{23})(1 + r) - VK|\tau_2 \leq T - t_2, S_2 + x_{23} \geq K] \cdot \\ &\quad \cdot \mathcal{P}\{\tau_2 \leq T - t_2, S_2 + x_{23} \geq K\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Математическое ожидание в первом слагаемом равно

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}[u_2 S_2 - (V_2 + u_2)(S_2 + x_{22}) | \tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} < K] &= u_2 S_2 - \\
&- (V_2 + u_2) \mathbf{M}[S_2 + x_{22} | \tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} < K] = u_2 S_2 - \\
&- (V_2 + u_2) \mathbf{M}[S_2 + x_{23} | S_2 + x_{23} < K] - (V_2 + u_2) \mu \mathbf{M}[t_2 + \tau_2 - T | \tau_2 > T - t_2] = \\
&= u_2 S_2 - \mu \frac{u_2 (V_2 + u_2)}{\lambda} - (V_2 + u_2) (S_2 + \mathbf{M}[x_{23} | x_{23} < K - S_2]), \quad (3.19)
\end{aligned}$$

где математическое ожидание в последнем слагаемом определяется по формуле (3.14).

Математическое ожидание во втором слагаемом равно

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}[u_2 S_2 - u_2 (S_2 + x_{22}) + (V - V_2)(S_2 + x_{23})(1 + r) - VK | \tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} \geq K] &= u_2 S_2 - VK - \\
&- u_2 \mathbf{M}[S_2 + x_{22} | S_2 + x_{23} \geq K] + (V - V_2)(1 + r) \mathbf{M}[S_2 + x_{23} | S_2 + x_{23} \geq K] = \\
= u_2 S_2 - VK - u_2 \mu \mathbf{M}[t_2 + \tau_2 - T | \tau_2 > T - t_2] + ((V - V_2)(1 + r) - u_2) \mathbf{M}[S_2 + x_{23} | S_2 + x_{23} \geq K] &= \\
= u_2 S_2 - VK - \mu \frac{u_2^2}{\lambda} + ((V - V_2)(1 + r) - u_2) (S_2 + \mathbf{M}[x_{23} | x_{23} \geq K - S_2]), \quad (3.20)
\end{aligned}$$

где математическое ожидание в последнем слагаемом определяется по формуле (3.15).

Математическое ожидание в третьем слагаемом, учитывая соотношение (3.16), равно

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}[u_2 S_2 - (V_2 + u_2)(S_2 + x_{23}) | \tau_2 \leq T - t_2, S_2 + x_{23} < K] &= \\
&= u_2 S_2 - (V_2 + u_2) (S_2 + \mathbf{M}[x_{23} | x_{23} < K - S_2]), \quad (3.21)
\end{aligned}$$

где математическое ожидание в последнем слагаемом определяется по формуле (3.14).

Математическое ожидание в четвертом слагаемом, учитывая соотношение (3.17), равно

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}[u_2 S_2 + (V - V_2 - u_2)(S_2 + x_{23})(1 + r) - VK | \tau_2 \leq T - t_2, S_2 + x_{23} \geq K] &= \\
&= u_2 S_2 - VK + (V - V_2 - u_2)(1 + r) (S_2 + \mathbf{M}[x_{23} | x_{23} \geq K - S_2]), \quad (3.22)
\end{aligned}$$

где математическое ожидание в последнем слагаемом определяется по формуле (3.15).

Вероятность в первом слагаемом равна

$$p_1 \triangleq \mathcal{P}\{\tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} < K\} = e^{-\frac{\lambda}{|u_2|}(T-t_2)} \cdot \Phi\left(\frac{K - S_2 - \mu(T - t_2)}{\sigma\sqrt{T - t_2}}\right). \quad (3.23)$$

Вероятность во втором слагаемом равна

$$p_2 \triangleq \mathcal{P}\{\tau_2 > T - t_2, S_2 + x_{23} \geq K\} = e^{-\frac{\lambda}{|u_2|}(T-t_2)} \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{K - S_2 - \mu(T - t_2)}{\sigma\sqrt{T - t_2}}\right)\right). \quad (3.24)$$

Вероятность в третьем слагаемом равна

$$p_3 \triangleq \mathcal{P}\{\tau_2 \leq T - t_2, S_2 + x_{23} < K\} = \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{|u_2|}(T-t_2)}\right) \cdot \Phi\left(\frac{K - S_2 - \mu(T - t_2)}{\sigma\sqrt{T - t_2}}\right). \quad (3.25)$$

Вероятность в четвертом слагаемом равна

$$p_4 \triangleq \mathcal{P}\{\tau_2 \leq T - t_2, S_2 + x_{23} \geq K\} = \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{|u_2|}(T-t_2)}\right) \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{K - S_2 - \mu(T - t_2)}{\sigma\sqrt{T - t_2}}\right)\right). \quad (3.26)$$

Таким образом, математическое ожидание функции потерь на втором шаге полностью определено. Следовательно, определено выражение для математического ожидания функции будущих потерь на втором шаге. Используя введенные в утверждении теоремы обозначения, получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2] &= L_2 + \left(u_2 S_2 - \mu \frac{u_2(V_2 + u_2)}{\lambda} - (V_2 + u_2)(S_2 + m_{23}^-)\right) e(u_2, z_2) \varphi(z_2) + \\ &+ \left(u_2 S_2 - VK - \mu \frac{u_2^2}{\lambda} + ((V - V_2)(1 + r) - u_2)(S_2 + m_{23}^+)\right) e(u_2, z_2)(1 - \varphi(z_2)) + \\ &+ (u_2 S_2 - (V_2 + u_2)(S_2 + m_{23}^-)) (1 - e(u_2, z_2)) \varphi(z_2) + \\ &+ (u_2 S_2 - VK + (V - V_2 - u_2)(1 + r)(S_2 + m_{23}^+)) (1 - e(u_2, z_2))(1 - \varphi(z_2)) = \\ &= L_2 - \frac{\mu}{\lambda} u_2^2 e(u_2, z_2) + u_2 S_2 - (V_2 + u_2)(S_2 + m_{23}^-) \varphi(z_2) + ((V - V_2)(1 + r) - u_2)(S_2 + m_{23}^+) (1 - \varphi(z_2)) - \\ &- \frac{\mu}{\lambda} u_2 V_2 e(u_2, z_2) \varphi(z_2) - u_2 r (S_2 + m_{23}^+) (1 - e(u_2, z_2))(1 - \varphi(z_2)) - VK(1 - \varphi(z_2)) = \\ &= L_2 - \frac{\mu}{\lambda} u_2^2 e(u_2, z_2) - u_2 e(u_2, z_2) \frac{\mu}{\lambda} V_2 \varphi(z_2) - u_2 \mu (T - t_2) - u_2 (1 - e(u_2, z_2)) d_2 + d_3. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Величина  $d_2$  положительна и пропорциональна надбавке за “срочность” операции  $r$  и величине  $1 - \varphi(z_2)$ , которая равна вероятности того, что при текущем состоянии  $z_2$  цена базового актива в момент  $T$  окажется не ниже уровня цены поставки  $K$ . Таким образом, величина  $d_2$  характеризует средний “штраф” за каждую недостающую единицу базового актива в момент  $T$  исполнения опциона.

Исследуем свойства условного математического ожидания функции будущих потерь на последнем шаге. Производная математического ожидания  $\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$  при  $u_2 > 0$  равна:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_2} \mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2] &= -\frac{2\mu}{\lambda} u_2 e(u_2, z_2) - \mu(T - t_2) e(u_2, z_2) + \\ &+ e(u_2, z_2) \left(d_2 - \frac{\mu}{\lambda} V_2 \varphi(z_2)\right) + \frac{\lambda}{u_2} (T - t_2) e(u_2, z_2) \left(d_2 - \frac{\mu}{\lambda} V_2 \varphi(z_2)\right) - (\mu(T - t_2) + d_2). \end{aligned}$$

При  $u_2 < 0$  производная равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_2} \mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2] &= -\frac{2\mu}{\lambda} u_2 e(u_2, z_2) + \mu(T - t_2) e(u_2, z_2) + \\ &+ e(u_2, z_2) \left(d_2 - \frac{\mu}{\lambda} V_2 \varphi(z_2)\right) - \frac{\lambda}{u_2} (T - t_2) e(u_2, z_2) \left(d_2 - \frac{\mu}{\lambda} V_2 \varphi(z_2)\right) - (\mu(T - t_2) + d_2). \end{aligned}$$

При этом производная непрерывна в точке  $u_2 = 0$ , ее предел равен:

$$\lim_{u_2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial u_2} \mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2] = -\mu(T - t_2) - d_2.$$

Нетрудно проверить, что функция  $e(u_2, z_2)$  является четной и возрастающей по  $u_2$  при  $u_2 > 0$ , и убывающей при  $u_2 < 0$ :

$$\frac{\partial}{\partial u_2} e(u_2, z_2) = \text{sign}(u_2) c(u_2, z_2) e(u_2, z_2),$$

функция  $\frac{1}{u_2} e(u_2, z_2)$  является нечетной и убывающей по  $u_2$  при  $u_2 > \lambda(T - t_2)$  и  $u_2 \in (-\lambda(T - t_2), 0)$ , и возрастающей при  $u_2 \in (0, \lambda(T - t_2))$  и  $u_2 \leq -\lambda(T - t_2)$ :

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{\lambda(T - t_2)}{u_2} e(u_2, z_2) \right) = \frac{\lambda}{u_2^2} (T - t_2) e(u_2, z_2) \left( \frac{\lambda}{|u_2|} (T - t_2) - 1 \right),$$

а функция  $u_2 e(u_2, z_2)$  является нечетной и возрастающей по  $u_2$ . Пример графика производной функции  $\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$  приведен на рисунке 3.1.

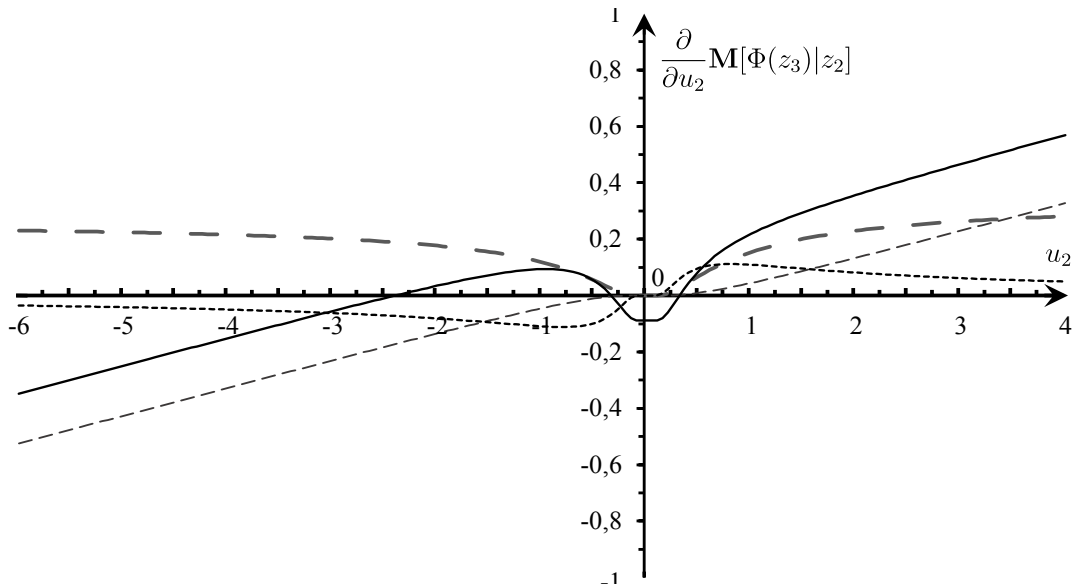


Рис. 3.1. График производной  $\frac{\partial}{\partial u_2} \mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$  и ее составляющих.

Производная  $\frac{\partial}{\partial u_2} \mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$  является суммой двух строго монотонных слева и справа от нуля функций  $u_2 e(u_2, z_2)$  и  $e(u_2, z_2)$ , а также нечетной функции  $\frac{1}{u_2} e(u_2, z_2)$ , имеющей по одной стационарной точке слева и справа от нуля. Анализ выражения для математического ожидания  $\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$  функции будущих потерь на последнем шаге и его производной  $\frac{\partial}{\partial u_2} \mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$  показывают, что производная  $\frac{\partial}{\partial u_2} \mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$  может иметь не более одного корня слева и справа от нуля. Следовательно, математическое ожидание  $\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$  может иметь не более двух локальных минимумов на отрезке  $[-V_2, V - V_2]$ , расположенных по разные стороны от нуля. Данные выводы подтверждаются результатами численного моделирования.

Проиллюстрируем это на примерах. Пусть в момент  $t_2 = 1$  начала второго шага цена  $S_2$  базового актива равна 2, при этом хеджер имеет  $V_2 = 6$  единиц базового актива из 10

( $V = 10$ ) необходимых по условию контракта. Пусть также цена поставки  $K$  равна 3, время  $T$  жизни опциона равно 5, а надбавка  $r$  за срочные операции равна 0.1. Значения коэффициента  $\mu$  линейного сноса, коэффициента  $\sigma$  волатильности и интенсивность торгов  $\lambda$  будем варьировать. Потери  $L_2$  к началу второго шага без ограничения общности можно считать равными нулю.

Ниже представлены типовые графики зависимости  $\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$  по  $u_2$  при различных значениях параметров. График зависимости в случае отрицательного тренда и низкой интенсивности транзакций изображен на рисунке 3.2. График зависимости в случае положительного

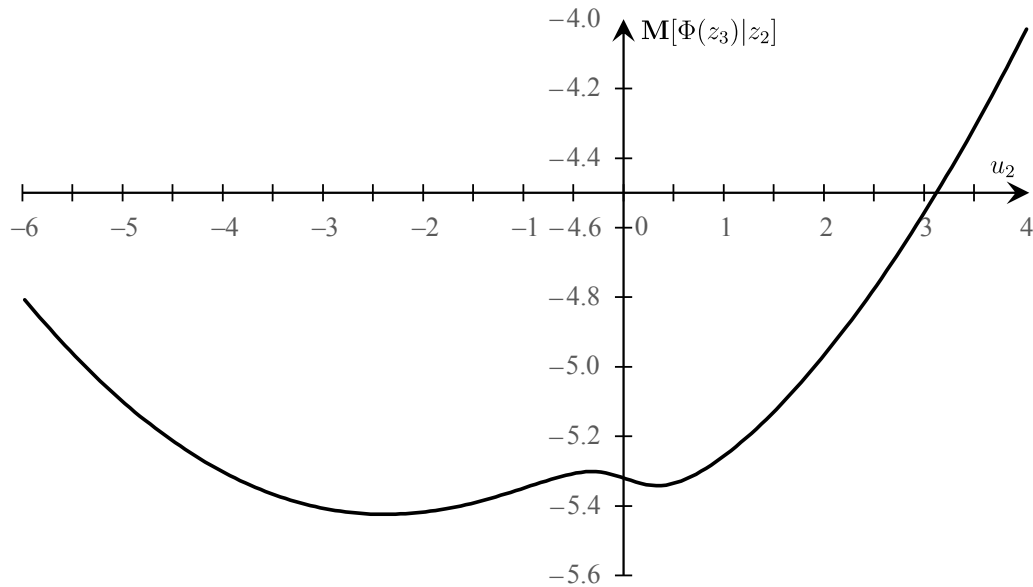


Рис. 3.2. График зависимости  $\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$  по  $u_2$ . Значения параметров:  $\mu = -0, 2$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\lambda = 0, 4$

тренда и низкой интенсивности транзакций представлен на рисунке 3.3. График зависимости в случае существенного отрицательного тренда и высокой интенсивности транзакций представлен на рисунке 3.4.

### 3.5. Алгоритм поиска оптимальной стратегии

На основании того, что у функции может быть не более одной стационарной точки слева и справа от нуля, для определения оптимальной стратегии на втором шаге может быть предложен следующий алгоритм:

*Алгоритм 3.*

1. Вычислить значения  $\mathbf{M}[g_2(z_2, -V_2, x_2)]$  и  $\mathbf{M}[g_2(z_2, V - V_2, x_2)]$ .
2. Найти положительный корень  $u_2^+$  и отрицательный корень  $u_2^-$  уравнения

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \mathbf{M}[g_2(z_2, u_2, x_2)] = 0.$$



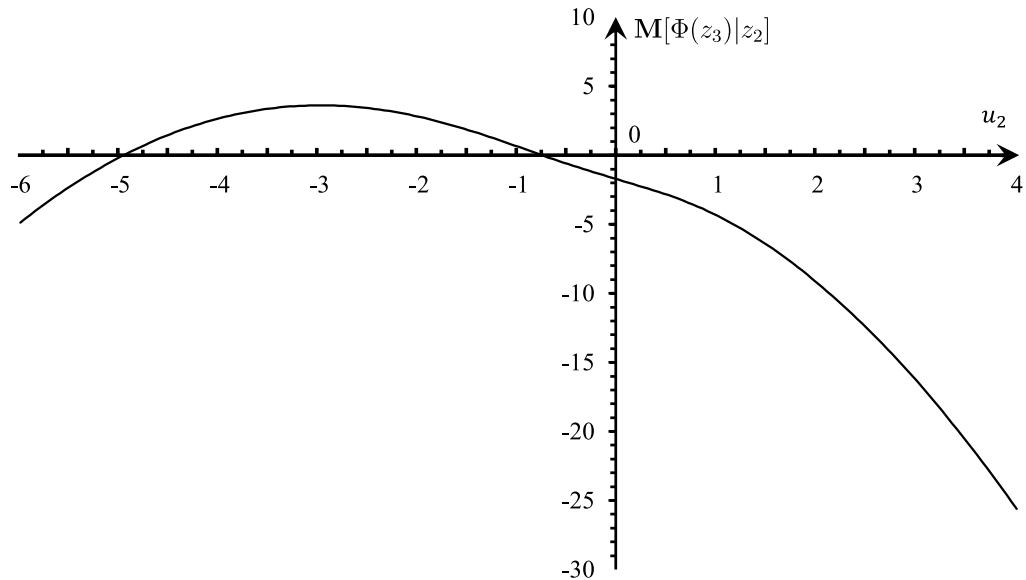


Рис. 3.3. График зависимости  $\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$  по  $u_2$ . Значения параметров:  $\mu = 0,5$ ,  $\sigma = 2$ ,  $\lambda = 0,5$

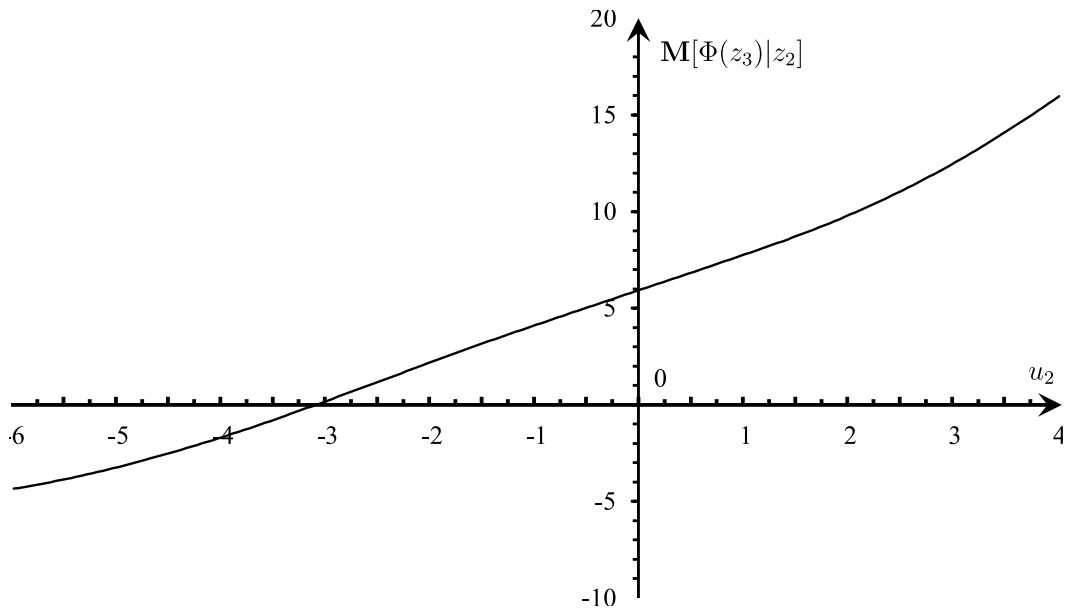


Рис. 3.4. График зависимости  $\mathbf{M}[\Phi(z_3)|z_2]$  по  $u_2$ . Значения параметров:  $\mu = -0,5$ ,  $\sigma = 2$ ,  $\lambda = 1,5$

3. Если положительный корень  $u_2^+$  не существует, то положить  $u_2^+ = 0$ . Аналогично, если отрицательный корень  $u_2^-$  не существует, то положить  $u_2^- = 0$ .

4. Сравнить значения  $\mathbf{M}[g_2(z_2, -V_2, x_2)]$ ,  $\mathbf{M}[g_2(z_2, V - V_2, x_2)]$ ,  $\mathbf{M}[g_2(z_2, u_2^-, x_2)]$  и  $\mathbf{M}[g_2(z_2, u_2^+, x_2)]$ . В качестве  $u_2^*$  выбрать точку, в которой достигается минимум функции  $\mathbf{M}[g_2(z_2, u_2, x_2)]$ . Завершить работу алгоритма.

Получаем, что функция будущих потерь на втором шаге равна

$$\Phi_2(z_2) = L_2 + \mathbf{M}[g_2(z_2, u_2^*, x_2)]. \quad (3.27)$$

Задача минимизации функции будущих потерь на первом шаге является задачей одномерной оптимизации на конечном промежутке, а значит для поиска оптимальной стратегии на пер-

вом шаге может быть использован полный перебор по  $u_1$  на сетке с заданным шагом. В силу сложной структуры функции потерь и зависимости распределения случайных параметров от стратегии для вычисления математического ожидания при фиксированном значении  $u_1$  будем использовать метод Монте-Карло. Для поиска оптимальной стратегии  $u_1^*$  на первом шаге предложим следующий алгоритм:

*Алгоритм 4.*

1. Задать шаг сетки  $h$  и требуемое количество реализации  $N$  для метода Монте-Карло, положить номер шага  $i$  равным 0,  $M^* = \infty$  и  $u_1^* = 0$ .
2. Положить  $u_1 = ih$ ,  $M = 0$  и сгенерировать выборку  $\{Y_i\}, i = 1 : N$ , реализаций случайного вектора  $X_1$ .
3. Для каждой реализации  $Y_j$  определить  $z_2$  согласно (3.6) и вычислить  $\Phi_2(z_2)$  по формуле (3.27). Присвоить  $M = M + \frac{1}{N} (g_1(z_1, ih, Y_j) + \Phi_2(z_2))$ .
4. Если  $M < M^*$ , то положить  $M^* = M$  и  $u_1^* = ih$ . Перейти к шагу 5.
5. Если  $i > \lfloor \frac{V}{h} \rfloor$ , то завершить работу алгоритма, иначе положить  $i = i + 1$  и перейти к шагу 2.

В результате работы данного алгоритма удастся найти оптимальное управление  $u_1^*$  на первом шаге. Величина  $M^*$  будет определять значение функции будущих потерь на первом шаге, т.е. математическое ожидание суммарных затрат на хеджирование за два шага при оптимальном управлении на первом шаге.

### 3.6. Пример

Приведем результаты работы алгоритма 4 для поиска оптимальной стратегии на первом шаге.

*Пример 3.* Пусть начальная цена  $S(0)$  базового актива равна 95 у.е, коэффициент линейного сноса  $\mu$  в процессе ценообразования  $S(t)$  равен  $-0,05$  у.е. в день, коэффициент  $\sigma$  равен 1,5, и коэффициент  $\lambda$ , характеризующий среднее время покупки/продажи единицы базового актива, также равен 1,5. Пусть согласно контракту хеджер обязуется предоставить по требованию держателя опциона через  $T = 20$  дней  $V = 10$  единиц базового актива по цене поставки  $K = 100$ . Будем искать оптимальное управление на первом шаге на отрезке  $[0, 10]$  с шагом  $h = 0,1$ . Математическое ожидание потерь на каждом шаге алгоритма будем оценивать по  $N = 10000$  реализаций.

В результате вычислений получаем, что в начальный момент времени хеджеру необходимо приобрести  $u_1^* = 5,4$  единиц базового актива. График зависимости средних потерь от управления на первом шаге представлен на рисунке 3.5.

Стоит обратить внимание на то, что с ростом  $u_1$  увеличивается дисперсия величины суммарных потерь. Следовательно, для оценки средних потерь требуется большее количество реализаций для метода Монте-Карло. В этом случае, для оптимизации времени расчетов при поиске оптимальной стратегии на первом шаге можно предложить использование переменного объема выборки. Например, можно задать минимальный и максимальный объемы

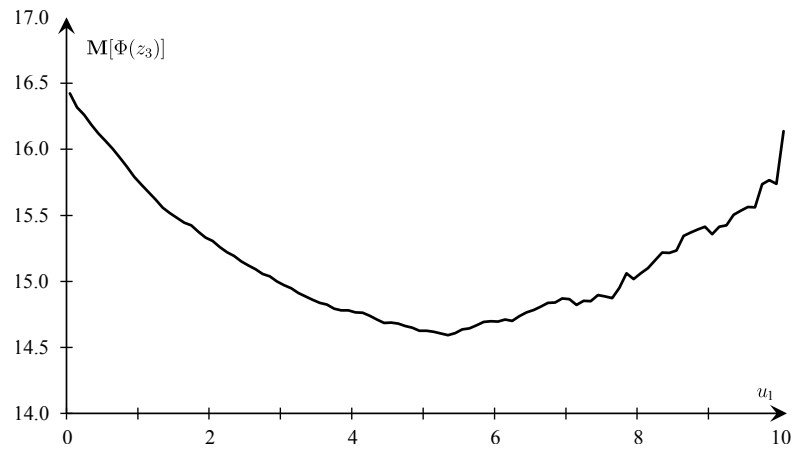


Рис. 3.5. Зависимость средних потерь  $\Phi(z_3)$  от  $u_1$ .

выборки  $N_{min}$  и  $N_{max}$ , и для каждого значения  $u_1$  на 2-м шаге алгоритма 4 использовать в качестве объема выборки величину

$$N = \frac{V - u_1}{V} N_{min} + \frac{u_1}{V} N_{max}.$$

### 3.7. Выводы по главе 3.

В данной главе рассмотрена двухшаговая задача хеджирования колл-опциона европейского типа с критерием в форме математического ожидания затрат на хеджирование. В математической модели сделаны предположения, что длительность каждой операции купли-продажи базового актива случайна и имеет экспоненциальное распределение, параметр которого зависит от объема покупаемых или продаваемых активов, при этом продолжительности операций независимы между собой. Для обеспечения возможности исполнения обязательства по опциону независимо от интенсивности операций купли-продажи, дополнительно сделано предположение о том, что хеджер может приобрести необходимое количество единиц базового актива мгновенно по цене, превышающей рыночную.

Задача исследована методом динамического программирования. Получено выражение для суммарных потерь хеджера, а также для математического ожидания потерь хеджера на втором шаге. Показано, что математическое ожидание потерь на втором шаге может иметь не более двух точек локального минимума в области допустимых управления, расположенные по разные стороны от нуля. Также предложен численный алгоритм поиска оптимального управления на первом шаге.

С экономической точки зрения наличие двух точек минимума у функции будущих потерь на последнем шаге означает, что в условиях неизвестной заранее длительности операций купли-продажи на последнем шаге может быть целесообразна как покупка части недоста-

ющих активов, так и продажа части имеющихся. Предпочтительность одного варианта над другим определяется оставшимся временем до истечения срока действия опциона, интенсивностью операций купли-продажи, величиной тренда в процессе ценообразования и величиной надбавки за срочные операции.

## Глава 4.

# Алгоритм удержания автоматического аэростата в заданной полосе высот

В математических моделях сложных технических систем, применяемых в том числе в авиационной и ракетно-космической технике, воздействие окружающей среды на систему зачастую описываются случайными процессами. Более того, поскольку на практике эти воздействия складываются из влияния большого числа независимых факторов, в математической модели для учета воздействий часто используются нормально распределенные случайные величины и гауссовские случайные процессы. Примером такого процесса является процесс относительных приращений цен базового актива в модели, рассмотренной в главах 1 и 2, а также рассмотренный в главе 3 процесс ценообразования  $S(t)$  базового актива.

С другой стороны, исследованная в главах 1 и 2 математическая модель, может быть рассмотрена как модель системы с релейным переключением. В релейных автоматических системах управляющее воздействие изменяется скачкообразно (происходит переключение) каждый раз, когда входной сигнал проходит через фиксированные пороговые значения. В случае модифицированной стратегии последовательного хеджирования такому переключению соответствует продажа и покупка полного объема базового актива при пересечении полосы (1.9) “нечувствительности” курсом  $S(t)$  базового актива, т.е. сигналом.

Благодаря своей простоте и быстрдействию релейные автоматические системы широко применяются в различных технических областях. “Они используются как в стационарных системах управления промышленного назначения, так и в системах управления подвижными объектами, предназначенных, например, для космических исследований” [45]. Таким образом, предложенные в главе 2 методы могут быть использованы при разработке программно-аппаратных комплексов, осуществляющих управление системами авиационного и ракетно-космического назначения.

В данной главе рассматривается задача управления автоматическим аэростатом с це-

лью удержания аэростата в заданной полосе высот на протяжении фиксированного времени полета. Автоматические аэростаты [34] являются подвидом свободных аэростатов и отличаются от них наличием устройств, регулирующих скорость взлёта и спуска, высоту полёта, а также позволяющих прекратить полёта по заданной программе полета или по желанию оператора. Автоматические и свободные аэростаты применяются для изучения атмосферы, астрономических исследований, испытаний аппаратуры и снаряжения, переноса и сброса боевых грузов, спортивных, рекламных, разведывательных и других целей без непосредственного участия экипажа. Свободные аэростаты состоят из мягкой оболочки (или системы оболочек), наполняемой подъемным газом, и гондолы (контейнера). К оболочке беспилотных свободных и автоматических аэростатов прикрепляются контейнеры с аппаратурой и балластом, а также парашюты. В качестве балласта как правило используются мешки с песком. Изменение высоты полёта автоматического аэростата с оболочками открытого типа осуществляется путем сбрасывания балласта или выпуском газа через клапан. Учитывая направление и скорость ветра, изменяя высоту полёта пилотируемых и управляемых по радио (или по программе) аэростатов, можно в определенных пределах регулировать направление и дальность их полёта.

В четвертой главе используются следующие обозначения:

$T$  — время полета аэростата;

$h_{min}$  — минимальная требуемая высота полета аэростата;

$h_{max}$  — максимальная требуемая высота полета аэростата;

$H \triangleq \{(h, t) : h \in [h_{min}; h_{max}], t \in [0; T]\}$  — требуемая полоса высот;

$M$  — грузоподъемность аэростата;

$h(t)$  — высота полета аэростата в момент времени  $t$ ;

$\mu$  — коэффициент линейного сноса в изменении высоты полета аэростата;

$\sigma$  — среднее квадратическое отклонение изменения высоты на единичном отрезке времени;

$\tilde{h}(t)$  — эквивалентный  $h(t)$  винеровский процесс с постоянным линейным сносом;

$m$  — масса одного груза в балласте;

$N$  — количество грузов в балласте;

$\mathcal{P}\{A\}$  — вероятность события  $A$ ;

$\mathbf{M}[\cdot]$  — математическое ожидание случайной величины;

$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  — функция Лапласа;

$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$  — плотность стандартного нормального распределения;

$W(t)$  — винеровский процесс;

$\eta$  — случайное количество управляющих воздействий за время полета;

$\tau$  — время, в течение которого аэростат находился за пределами полосы  $H$ ;

## 4.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу удержания аэростата по высоте в заданной полосе высот в течение заданного времени  $T$ . Управление аэростатом будет осуществляться путем сброса балласта на нижней границе полосы высот и частичным выпуском через клапан рабочего газа на верхней границе таким образом, чтобы при отсутствии внешних возмущений после достижения какой-либо границы полосы аэростат двигался с одной и той же по модулю скоростью в сторону противоположной границы полосы.

Введем в рассмотрение полосу высот, в которой необходимо удерживать аэростат в течение времени  $T$ :

$$H \triangleq \{(h, t) : h \in [h_{min}; h_{max}], t \in [0; T]\}. \quad (4.1)$$

На аэростат действуют восходящие и нисходящие воздушные потоки. Скорость потока в каждый момент времени будем считать случайной, а случайные изменения высот на непесекающихся интервалах времени независимыми и имеющими нормальное распределение с пропорциональной длине интервала дисперсией. При сделанных предположениях высота  $h(t)$  аэростата в момент времени  $t$  будет описываться винеровским процессом с отражением с постоянным по модулю линейным сносом. Не ограничивая общности будем считать, что в начальный момент времени высота аэростата совпадает с нижней границей полосы  $H$ , тогда высота  $h(t)$  полета аэростата в момент времени  $t$  будет описываться следующим случайным процессом:

$$h(t) \triangleq h_{min} + \mu(t)t + \sigma W(t), \quad (4.2)$$

где  $W(t)$  — стандартный винеровский процесс,  $\sigma$  — параметр, характеризующий дисперсию колебаний высот за счет внешних воздействий, а функция  $\mu(t)$  определяется как

$$\mu(t) \triangleq \begin{cases} \mu, & \text{если последней была достигнута нижняя граница } H; \\ -\mu, & \text{если последней была достигнута верхняя граница } H. \end{cases}$$

Таким образом, функция  $\mu(t)$  может принимать значения, равные только  $-\mu$  и  $\mu$ , то есть при достижении аэростатом границы полосы  $H$  происходит релейное переключение средней вертикальной компоненты скорости с  $\mu$  на  $-\mu$ .

На практике изменение скорости аэростата при сбросе балласта зависит как от массы сброшенного груза, так и от текущей высоты полета аэростата и параметров атмосферы. Для простоты будем считать, что изменение линейной компоненты  $\mu$  вертикальной скорости аэростата будет зависеть только от массы  $m$  одного груза, т.е.

$$\mu = \mu(m),$$

$$\mu(t) = \mu(t, m) = \begin{cases} \mu(m), & \text{если последней была достигнута нижняя граница } H; \\ -\mu(m), & \text{если последней была достигнута верхняя граница } H, \end{cases}$$

где  $\mu(m)$  — положительная строго возрастающая функция.

Очевидно, что количество последовательных пересечений границ полосы  $H$  за конечное время  $T$  траекторией процесса  $h(t)$  конечно и случайно. Обозначим количество переключений (управлений) за время  $T$  полета аэростата как  $\eta$ , а время, в течение которого аэростат находился за пределами полосы  $H$ , как  $\tau$ .

Рассмотрим задачу минимизации математического ожидания времени  $\tau$  нахождения аэростата за пределами полосы  $H$  при условии, что аэростат останется управляемым в течение времени  $T$  с вероятностью не меньше заданного уровня  $\alpha$ , т.е. запаса балласта хватит на обеспечение управления в течение времени  $T$ , а суммарная масса балласта не превышает грузоподъемность аппарата  $M$ . В качестве оптимизационных переменных выберем массу единицы груза балласта (одного мешка с песком) и количество грузов. Обозначим массу одного груза как  $m$ , а общее количество грузов в балласте как  $N$ . Получаем следующую задачу минимизации:

$$\mathbf{M}[\tau] \rightarrow \min_{N, m} \quad (4.3)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\{\eta \leq 2N + 1\} &\geq \alpha, \\ Nm &\leq M, \\ m &\geq 0, \\ N &\in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Поскольку движение аэростата начинается с нижней границы полосы  $H$ , первый сброс груза происходит в момент первого касания нижней границы полосы  $H$  только после первого достижения верхней границы. Таким образом при наличии одного груза за время  $T$  может произойти 3 управляющих воздействия: два выпуска газа и один сброс груза, а при наличии  $N$  грузов можно произвести  $2N + 1$  управляющее воздействие.



## 4.2. Распределение числа пересечений полосы

Определим вероятность того, что за время полета  $T$  произойдет не более  $k$  последовательных пересечений верхней и нижней границ полосы  $H$ , начиная с первого пересечения верхней границы полосы. Для этого воспользуемся свойством независимости приращений винеровского процесса на непересекающихся отрезках времени. В силу этого свойства, используя принцип отражений и перестановки фрагментов траектории процесса  $h(t)$  на промежутках, в которых функция  $\mu(t, m)$  постоянна, для любой траектории (реализации) процесса  $h(t)$  такой, что аэростат последовательно  $k$  раз достиг границ полосы  $H$  за время  $T$ , можно сопоставить траекторию, которая, стартуя с уровня  $h_{\min}$ , достигла за время  $T$  уровня  $h_{\min} + k(h_{\max} - h_{\min})$ , и являющуюся реализацией случайного процесса  $\tilde{h}(t)$ :

$$\tilde{h}(t) = h_{\min} + \mu(m)t + \sigma W(t).$$

Процесс  $\tilde{h}(t)$  является винеровским процессом с постоянным линейным сносом. Пример траектории процесса  $h(t)$  и соответствующей ей траекторией  $\tilde{h}(t)$  представлен на рисунке 4.1. Представленные на рисунке 4.1 траектории процессов  $h(t)$  и  $\tilde{h}(t)$  стартуют с уровня  $h_{\min} = 1$ .



Рис. 4.1. Изменение высоты  $h(t)$  аэростата и эквивалентная траектория процесса  $\tilde{h}(t)$ .

Они совпадают до момента  $t \approx 13.25$  первого достижения траекторией  $h(t)$  уровня  $h_{\max} = 3$ . На отрезке времени  $t \in [13.25; 27.66]$ , то есть до момента первого достижения траекторией процесса  $h(t)$  нижней границы полосы  $H$ , траектория процесса  $\tilde{h}(t)$  является симметричным отражением траектории  $h(t)$  относительно верхней границы полосы  $h_{\max}$ . На оставшемся интервале времени приращения траекторий процессов  $h(t)$  и  $\tilde{h}(t)$  полностью совпадают. Оче-

видно, что построенная таким образом траектория будет являться реализацией винеровского процесса с постоянным линейным сносом  $\tilde{h}(t)$ .

При фиксированных  $h_{min}$  и  $h_{max}$ , описанным выше способом можно установить взаимнооднозначное соответствие между траекториями  $h(t)$  и  $\tilde{h}(t)$ , а значит для любого  $k > 0$  справедливы следующие равенства:

$$\mathcal{P}\{\eta > k\} = \mathcal{P}\left\{\sup_{t \in [0; T]} \tilde{h}(t) > h_{min} + k(h_{min} + h_{max})\right\}, \quad (4.4)$$

$$\mathcal{P}\{\eta = k\} = \mathcal{P}\{\eta > k - 1\} - \mathcal{P}\{\eta > k\}. \quad (4.5)$$

Для вычисления вероятности в правой части (4.4) воспользуемся известной формулой для распределения максимума винеровского процесса с линейным сносом на конечном отрезке времени [5], но с учетом отличной от 1 дисперсии  $\sigma$ :

$$\mathcal{P}\left\{\sup_{t \in [0; T]} \tilde{h}(t) > y\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\mu(m)}{\sigma}\sqrt{T}\right) + e^{\frac{2y\mu(m)}{\sigma^2}} \left(1 - \Phi\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\mu(m)}{\sigma}\sqrt{T}\right)\right). \quad (4.6)$$

Коэффициент  $\sigma$  в данном случае является коэффициентом масштабирования. Таким образом, для описанной модели управления полностью определено распределение числа управляющих воздействий на аэростат за требуемое время полета  $T$ .

Установим монотонность вероятности  $\mathcal{P}\left\{\sup_{t \in [0; T]} \tilde{h}(t) > y\right\}$  в формуле (4.6) по массе единицы балласта  $m$ , т.е. одного мешка с песком. Для этого вычислим производную  $\mathcal{P}\left\{\sup_{t \in [0; T]} \tilde{h}(t) > y\right\}$  по  $m$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m} \mathcal{P}\left\{\sup_{t \in [0; T]} \tilde{h}(t) > y\right\} &= f\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\mu(m)}{\sigma}\sqrt{T}\right) \frac{\sqrt{T}}{\sigma} \mu'(m) + \\ &\frac{2y}{\sigma} e^{\frac{2y\mu(m)}{\sigma^2}} \left(1 - \Phi\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\mu(m)}{\sigma}\sqrt{T}\right)\right) \mu'(m) - e^{\frac{2y\mu(m)}{\sigma^2}} f\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\mu(m)}{\sigma}\sqrt{T}\right) \frac{\sqrt{T}}{\sigma} \mu'(m), \end{aligned}$$

где  $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$  — плотность стандартного нормального распределения. Вычислим произведение первых двух сомножителей в последнем слагаемом:

$$\begin{aligned} e^{\frac{2y\mu(m)}{\sigma^2}} f\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\mu(m)}{\sigma}\sqrt{T}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{2y\mu(m)}{\sigma^2}} e^{-\frac{\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\mu(m)}{\sigma}\sqrt{T}\right)^2}{2}} = \\ &\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2 + 2\frac{y\mu(m)}{\sigma^2} + \left(\frac{\mu(m)}{\sigma}\sqrt{T}\right)^2}{2}} + \frac{4y\mu(m)}{\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\mu(m)}{\sigma}\sqrt{T}\right)^2}{2}} = \\ &f\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\mu(m)}{\sigma}\sqrt{T}\right) \end{aligned}$$

С учетом этого, производная вероятности  $\frac{\partial}{\partial m} \mathcal{P}\{\sup_{t \in [0; T]} \tilde{h}(t) > y\}$  по  $m$  равна

$$\frac{\partial}{\partial m} \mathcal{P}\{\sup_{t \in [0; T]} \tilde{h}(t) > y\} = \frac{2y}{\sigma} e^{\frac{2y\mu(m)}{\sigma^2}} \left(1 - \Phi\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\mu(m)}{\sigma}\sqrt{T}\right)\right) \mu'(m). \quad (4.7)$$

Функция  $\mu(m)$  возрастает по  $m$  по определению, т.е.  $\mu'(m) > 0$ . Следовательно

$$\frac{\partial}{\partial m} \mathcal{P}\{\sup_{t \in [0; T]} \tilde{h}(t) > y\} > 0, \quad \text{при } y > 0.$$

Таким образом, вероятность в ограничении задачи (4.3) будет возрастать с ростом массы  $m$  одного груза при фиксированном числе  $N$  грузов в балласте. Из приведенных рассуждений также следует, что вероятность того, что траектория  $h(t)$  за время  $T$  пересечет полосу  $H$  не менее  $k$  раз, также возрастает с ростом  $m$ , т.е.

$$\frac{\partial}{\partial m} \mathcal{P}\{\eta \geq k\} > 0.$$

### 4.3. Алгоритм поиска оптимального управления

Для вычисления среднего времени пребывания траектории винеровского процесса с линейным сносом за пределами фиксированной полосы могут быть использованы методы, разработанные, например, в [36]. Однако, данные результаты не могут быть непосредственно применены в случае винеровского процесса с непостоянным линейным сносом, в частности в случае винеровского процесса с отражениями. По этой причине для вычисления среднего времени пребывания аэростата за пределами полосы высот  $H$  мы будем использовать метод Монте-Карло.

При моделировании траекторий процесса  $h(t)$  необходимо учитывать тот факт, что при наличии  $N$  грузов в балласте после управления с номером  $2N + 1$ , т.е. после последнего возможного выпуска газа, аэростат остается неуправляемым до момента окончания полета и коэффициент  $\mu(m, t)$  линейного сноса в процессе  $h(t)$  больше не изменяется.

Для решения задачи (4.3) может быть предложен следующий численный алгоритм:

*Алгоритм 5.*

- 1) Задать вероятность  $\alpha$ , требуемый шаг  $\varepsilon > 0$ , количество реализаций  $N_{mc}$  процесса  $h(t)$  для метода Монте-Карло. Положить оптимальное количество грузов  $N^* = 1$ , оптимальную массу одного груза  $m^* = 0$ , среднее время пребывания аэростата за пределами полосы  $H$  при  $m^*$  и  $N^*$  равным  $ET^* = \infty$ , и текущее количество грузов  $N = 1$ ;
- 2) Вычислить  $m_{max} = \frac{M}{N}$ . Если  $m_{max} \leq \varepsilon$ , то завершить работу алгоритма, иначе положить  $m = 0$  и перейти к шагу 3;

- 3) Если  $t \leq t_{max}$ , то при заданных  $N$  и  $t$  по  $M_{mc}$  модельным траекториям  $h(t)$  оценить  $\hat{M}[\tau]$ , а также вычислить  $\mathcal{P}\{\eta > 2N + 1\}$  по формуле (4.4). Иначе положить  $N = N + 1$  и перейти к шагу 2;
- 4) Если  $\mathcal{P}\{\eta > 2N + 1\} \geq 1 - \alpha$ , то положить  $N = N + 1$  и перейти к шагу 2. Иначе, если  $\hat{M}[\tau] < ET^*$ , то положить  $t^* = t$ ,  $N^* = N$ ,  $ET^* = \hat{M}[\tau]$ . Положить  $t = t + \varepsilon$  и перейти к шагу 3.

На 4-м шаге алгоритма используется доказанное свойство монотонности вероятности того, что за время полета количество управлений (пересечений) окажется не меньше наперед заданного числа, что позволяет сократить перебор при поиске оптимального решения.

## 4.4. Численный пример

Рассмотрим пример управления автоматическим аэростатом, предназначенным для переноса 50 кг полезной нагрузки в течение 70 часов на высоте от 9000 м до 11500 м. Грузоподъемность аэростата в указанном диапазоне высот примем равной 135 кг, т.е. максимальная суммарная масса  $M$  балласта равна 85 кг.

Будем считать, что коэффициент  $\mu(m)$  линейного изменения высоты полета прямо пропорционален массе одного груза с коэффициентом пропорциональности равным 100, т.е.  $\mu(m) = 100m$ , и имеет размерность  $\left[\frac{M}{Q}\right]$ . Массу и количество грузов будем искать из условия, что запаса балласта хватит на время полета с вероятностью 0.9.

Проведем расчеты для двух значений коэффициента  $\sigma$ , характеризующего дисперсию изменений высоты, равных  $\sigma_1 = 300 \left[\left(\frac{M}{Q}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$  и  $\sigma_2 = 1000 \left[\left(\frac{M}{Q}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$ . Среднее время пребывания аэростата за пределами полосы  $H$  в течение времени полета  $T$  будем оценивать по  $N_{mc} = 12000$  траекторий процесса  $h(t)$ .

В результате расчетов по алгоритму с точностью  $\varepsilon = 1$  кг получаем, что при  $\sigma = \sigma_1$  оптимальная одного груза равна  $t^* = 12$  кг, а оптимальное количество грузов равно  $N^* = 7$  штук. Среднее время нахождения аэростата за пределами полосы высот составляет 3 часа 12 минут. Пример траектории изменения высоты аэростата за время полета представлен на рисунке 4.2.

При  $\sigma = \sigma_2$  оптимальная одного груза равна  $t^* = 11$  кг, а оптимальное количество грузов равно  $N^* = 7$  штук. Среднее время нахождения аэростата за пределами полосы высот составляет 26 часов. Пример траектории изменения высоты аэростата за время полета представлен на рисунке 4.3. Зависимость оценки  $\hat{M}[\tau]$  среднего времени пребывания аэростата за пределами полосы  $H$  в зависимости от массы  $t$  одного груза при наличии 7 грузов в балласте представлена на рисунке 4.4.

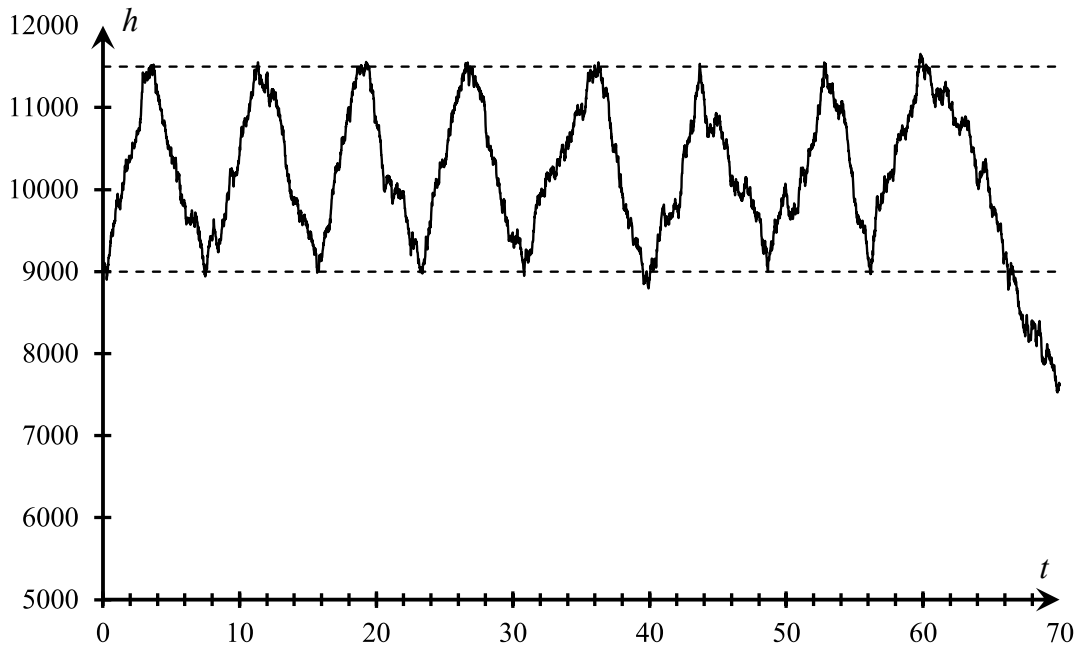


Рис. 4.2. Изменение высоты  $h(t)$  аэростата за 70 часов полета при  $\sigma = 300$ .

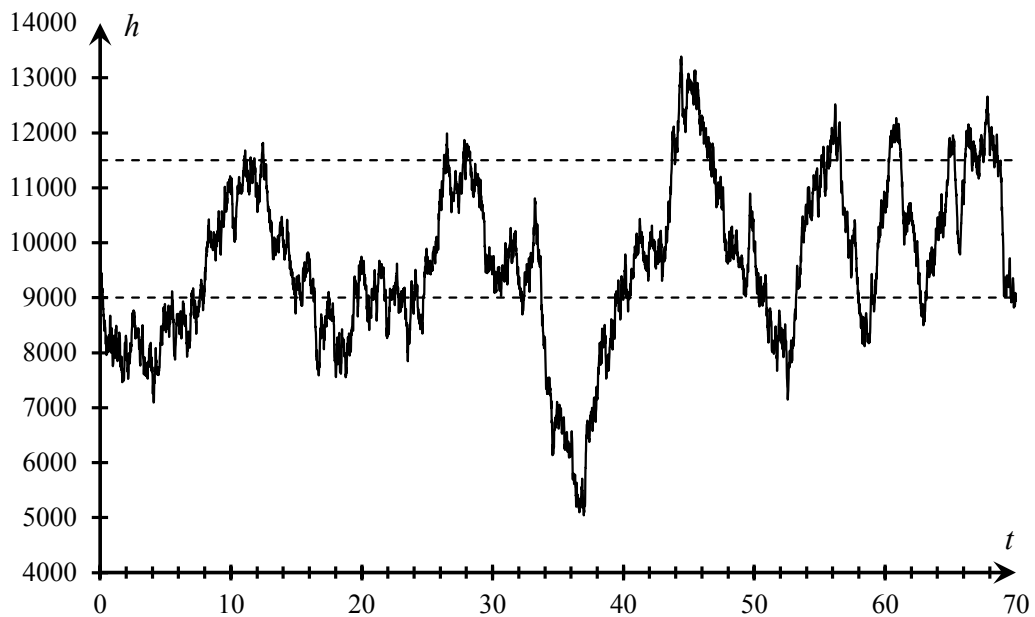


Рис. 4.3. Изменение высоты  $h(t)$  аэростата за 70 часов полета при  $\sigma = 1000$ .

## 4.5. Выводы по главе 4

В данной главе рассмотрена задача управления автоматическим аэростатом с целью удержания его в фиксированной полосе высот на протяжении заданного времени полета. Предложен численный алгоритм поиска оптимальной массы одного груза и оптимального количества грузов в балласте в задаче минимизации среднего времени нахождения аэростата за пределами указанной полосы высот при ограничении, что требуемое для управления в течение времени полета количество грузов не превысит имеющийся запас с заданной вероят-

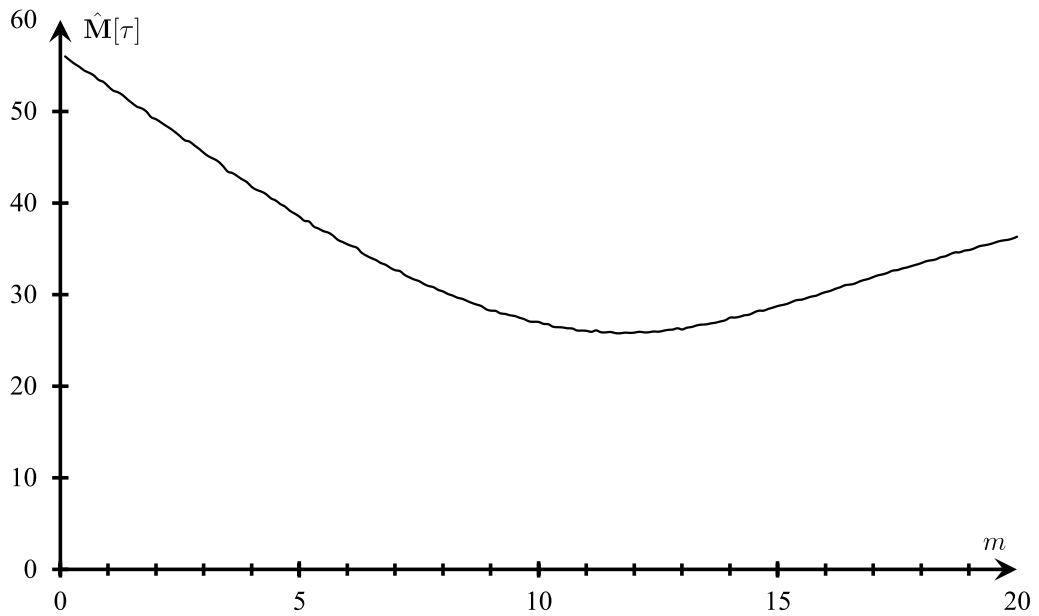


Рис. 4.4. Зависимость  $\hat{M}[\tau]$  от массы  $m$  при наличии 7 грузов.

ностью. Данная задача относится к классу задач оптимизации с вероятностными ограничениями. Для указанной вероятности получен явный вид и доказано свойство монотонности по массе одного груза в балласте. Данное свойство позволяет существенно сократить время работы алгоритма, особенно с учетом того, что для вычисления среднего времени пребывания аэростата за пределами полосы при фиксированных массе и количестве грузов используется метод Монте-Карло. Полученные результаты могут быть обобщены на случай произвольной начальной высоты полета аэростата с использованием полученного в главе 1 распределения момента первого достижения заданного уровня траекторией винеровского процесса с линейным сносом.

# Заключение

В диссертационной работе исследована модификация стратегии последовательного хеджирования колл-опциона европейского или американского типа, заключающаяся во введении полосы “нечувствительности” хеджирования. Также в работе исследована двухшаговая задача хеджирования европейского колл-опциона при случайной длительности операций покупки и продажи базового актива.

В первой главе изучен вариант модификации стратегии последовательного хеджирования, заключающийся во введении полосы “нечувствительности” хеджирования, содержащей уровень цены поставки. В модели ценообразования базового актива используется процесс геометрического броуновского движения. Для учета возможности досрочного исполнения опциона американского типа держателем опциона предполагается, что исполнение опциона может произойти при любом пересечении полосы “нечувствительности” с фиксированной вероятностью. Получены доказательства основных свойств процесса ценообразования, найдено распределение момента первого достижения уровня цены поставки траекторией цены базового актива и распределение числа пересечений полосы “нечувствительности” траекторией цены базового актива в направлениях “сверху вниз” и “снизу вверх”, а также распределение общего числа пересечений.

Во второй главе получены аналитические выражения для безусловного и условного математических ожиданий затрат хеджера, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования. Условное математическое ожидание определяется при известном моменте первого достижения нижней границы полосы “нечувствительности” траекторией курса базового актива. Предложен алгоритм поиска оптимальной ширины полосы “нечувствительности” хеджирования, минимизирующей средние затраты хеджера. Исследована связь между задачами минимизации условного и безусловного математического ожидания затрат. Показано, что предложенная модификация стратегии последовательного хеджирования позволяет избежать чрезмерного роста затрат на хеджирование в случае частых колебаний цены базового актива относительно уровня цены поставки. Также найдены выражения для функций условного и безусловного распределения затрат на хеджирова-

ние продавца колл-опциона американского типа, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования. Найдены точки разрыва и промежутки монотонности функций условного и безусловного распределения. Предложен метод построения верхней и нижней оценок квантили распределения затрат хеджера, использующий значения квантилей условных распределений затрат хеджера при известном числе пересечений полосы “нечувствительности” траекторией цены базового актива. В алгоритме используются найденные значения левых и правых пределов функции распределения в точках ее разрыва. Описан метод построения верхней и нижней кусочно-линейных огибающих функции распределения потерь, который может быть использован для построения верхней и нижней оценок значений когерентных мер риска, основанных на квантили распределения потерь. Полученные результаты могут быть применены при исследовании распределения затрат на хеджирование продавца колл-опциона европейского типа. В этом случае достаточно положить вероятность досрочного исполнения опциона при каждом пересечении равной нулю.

В третьей главе рассмотрена двухшаговая задача хеджирования колл-опциона европейского типа в предположении, что длительность каждой операции по покупке или продаже базового актива случайна и имеет экспоненциальное распределение, параметр которого зависит от объема покупаемых или продаваемых активов, при этом продолжительности последовательных, не пересекающихся во времени операций независимы между собой. Управлением на каждом шаге является объем покупаемых или продаваемых активов. Получено выражение для суммарных потерь хеджера, а также для функции будущих потерь хеджера на втором шаге. Показано, что математическое ожидание функции будущих потерь на втором шаге может иметь не более двух точек локального минимума в области допустимых управлений, расположенные по разные стороны от нуля. Предложен алгоритм поиска оптимальной стратегии на первом шаге.

В четвертой главе рассмотрена задача управления автоматическим аэростатом с целью удержания его в фиксированной полосе высот на протяжении заданного времени полета. Предложен численный алгоритм поиска оптимальной массы одного груза и оптимального количества грузов в балласте в задаче минимизации среднего времени нахождения аэростата за пределами указанной полосы высот при ограничении, что требуемое для управления в течение времени полета количество грузов не превысит имеющийся запас с заданной вероятностью. Для указанной вероятности в ограничении задачи получен явный вид и доказано свойство монотонности по массе одного груза в балласте. Для вычисления среднего времени пребывания аэростата за пределами полосы при фиксированных массе и количестве грузов в алгоритме используется метод Монте-Карло.



### **Основные результаты, выносимые на защиту.**

1) Получено выражение для математического ожидания потерь хеджера, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования. Предложен алгоритм поиска оптимальной ширины полосы “нечувствительности”, минимизирующей средние затраты хеджера, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования [24, 37].

2) Получено выражение для функции распределения потерь хеджера, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования. Найдены точки разрыва, значения левых и правых пределов в точках разрыва, а также промежутки монотонности функции распределения потерь [25, 27, 84].

3) Предложен алгоритм построения верхней и нижней оценок квантили безусловного распределения потерь на основе значений квантилей условных распределений потерь при известном числе пересечений полосы “нечувствительности” траекторией курса базового актива [25, 27, 38].

4) Исследована двухшаговая задача хеджирования европейского колл-опциона при случайной длительности выполнения операций покупки и продажи базового актива. Доказано существование не более чем двух точек локального минимума функции будущих потерь на последнем шаге в области допустимых управлений. Предложен алгоритм поиска оптимальной стратегии на первом шаге, основанный на методе Монте-Карло [26, 28].

# Литература

- [1] *Астафьев Н. Н., Еремин И. И.* Введение в теорию линейного и выпуклого программирования, М.: Наука, 1976.
- [2] *Бертсекас Д., Шрив С.* Стохастическое оптимальное управление. М.: Наука, 1985.
- [3] *Борисов И. С., Никитина Н. Н.* Распределение числа пересечений полосы траекториями простейших случайных блужданий и винеровского процесса со сносом // Теория вероятностей и ее применения. 2011. Т. 56. Вып. 1. С. 152–158.
- [4] *Боровков А. А.* Асимптотические методы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1980.
- [5] *Бородин А. Н., Салминен П.* Справочник по броуновскому движению. СПб.: Лань, 2000. 639 с.
- [6] *Буренин А. Н.* Фьючерсные, форвардные и опционные рынки. М.:Тривола, 1995.
- [7] *Буренин А. Н.* Рынки производных финансовых инструментов. М.:Инфра-М, 1996.
- [8] *Вишняков Б.В., Кибзун А.И.* Детерминированные эквиваленты для задач стохастического программирования с вероятностными критериями // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 6. — С. 126–143.
- [9] *Волков С. Н., Крамков Д. О.* О методологии хеджирования опционов // Обзорные прикладной и промышленной математики. 1998. Т. 4. Вып. 1. С. 18–65.
- [10] *Губерниев В. А., Кибзун А. И.* Последовательное хеджирование опционной позиции: анализ и модернизация // Автоматика и телемеханика. 1999. №1. С. 113–125.
- [11] *Дёмин Н. С., Шиширин М. Ю.* Европейский опцион с произвольным числом типов рискованных ценных бумаг в случае дискретного времени // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2002. Т. 9. №1. С. 3-20.

- [12] *Зверев О. В., Хаметов В. М.* Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках (дискретное время) // *Обозрение прикладной и промышленной математики*. 2011. Т. 18. Вып. 1 С. 26-54.
- [13] *Зверев О. В., Хаметов В. М.* Квантильное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках без трения. Ч. 1. Суперхеджирование // *Проблемы управления*. 2014. №6. С. 31-44.
- [14] *Игнатов А. Н., Кибзун А. И.* О формировании портфеля ценных бумаг с равномерным распределением по логарифмическому критерию с приоритетной рисковой составляющей // *Автоматика и телемеханика*. 2014. №3. С. 87–105.
- [15] *Игнатов А. Н., Кибзун А. И.* Двухшаговая задача формирования портфеля ценных бумаг из двух рискованных активов по вероятностному критерию // *Автоматика и телемеханика*. 2015. №7. С. 78–100.
- [16] *Кабацин А.* Некоторые особенности современного рынка биржевых валютных опционов // *Рынок ценных бумаг*. 1995. №17. С. 17.
- [17] *Кан Ю. С., Кибзун А. И.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями, М.: Физматлит 2009. 372 с.
- [18] *Кибзун А. И., Кузнецов Е. А.* Оптимальное управление портфелем ценных бумаг // *Автоматика и телемеханика*. 2001. №9. С. 101–113.
- [19] *Кибзун А.И., Курбаковский В.Ю.* Численные алгоритмы квантильной оптимизации их применение к решению задач с вероятностными ограничениями // *Известия РАН. Техническая кибернетика*. — 1992. — № 1. — С. 75–81.
- [20] *Кибзун А. И., Малышев В. В.* Обобщенный минимаксный подход к решению задач с вероятностными ограничениями // *Известия АН СССР. Техническая кибернетика*. — 1984. — № 1. — С. 20–29.
- [21] *Кибзун А.И., Матвеев Е.Л.* Стохастический квазиградиентный алгоритм минимизации функции квантили // *Автоматика и телемеханика*. — 2010. — № 6. — С. 64–78.
- [22] *Кибзун А.И., Наумов А.В.* Гарантирующий алгоритм решения задачи квантильной оптимизации // *Космические исследования*. — 1995. — Т. 33. — № 2. — С. 160–165.

- [23] *Кибзун А.И., Наумов А.В., Норкин В.И.* О сведении задачи квантильной оптимизации с дискретным распределением случайных данных к задачам смешанного целочисленного программирования // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 6. — С. 66–86.
- [24] *Кибзун А. И., Соболев В. Р.* Модернизация стратегии последовательного хеджирования опционной позиции // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 17, №2. С. 179–192.
- [25] *Кибзун А. И., Соболев В. Р.* Модификация стратегии последовательного хеджирования. Распределение потерь хеджера // Автоматика и телемеханика. 2015. №11. С. 34–50.
- [26] *Кибзун А. И., Соболев В. Р.* Двухшаговая задача хеджирования европейского колл-опциона при случайной длительности транзакций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, №3. С. 164–174.
- [27] *Кибзун А. И., Соболев В. Р.* Модификация стратегии последовательного хеджирования. Распределение потерь хеджера // Управление большими системами УБС 2014. Материалы XI всероссийской школы-конференции молодых ученых. Москва, 2014. С. 580–591.
- [28] *Кибзун А. И., Соболев В. Р.* Двухшаговая задача хеджирования европейского опциона при случайной длительности транзакций // Системный анализ, управление и навигация: Тезисы докладов. Сборник. 2015. М.: Изд-во МАИ. С. 97–99.
- [29] *Лотов В. И., Орлова Н. Г.* О числе пересечений полосы траекториями случайного блуждания // Математический сборник. 2003. Т. 194. №6. С.135–146.
- [30] *Мальшев В.В., Кибзун А.И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. — М.: Машиностроение, 1987.
- [31] *Миллер Б.М., Панков А. Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах, М.: Физматлит, 2002. 320 с.
- [32] *Нейштадт А. И. и др.* Хеджирование опционов по Блэку-Шоулсу: теория и реальность // Нейштадт А. И., Селезнева Т. В., Тутубалин В. Н., Угер Е. Г. // Рынок ценных бумаг. 1997. №5. С. 52–55.
- [33] *Райк Е.* О функции квантили в задачах стохастического нелинейного программирования // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. 1971. Т. 24. № 1. С. 3-8.

- [34] *Свищев Г. П.* Авиация. Энциклопедия, М.: Большая Российская Энциклопедия / ЦАГИ им. Н.Е.Жуковского, 1994. 776 с.
- [35] *Семаков С. Л.* Выбросы случайных процессов: приложения в авиации, М.: Наука, 2005. 200 с.
- [36] *Смирнова В. А.* Распределение функционалов от винеровского процесса с линейным сносом: дис. ... канд. ф.-м. наук: 01.01.09 Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет. — СПб., 2008. — 105 с.
- [37] *Соболь В. Р.* Модификация метода последовательного хеджирования опционной позиции // Материалы Международного молодежного научного форума “ЛОМОНОСОВ-2013”. М.: МАКС Пресс, 2013
- [38] *Соболь В. Р.* Модифицированная стратегия последовательного хеджирования. Распределение потерь хеджера // 13-я Международная конференция “Авиация и космонавтика – 2014”. 17–21 ноября 2014 года. Москва. Тезисы. — СПб.: Мастерская печати, 2014. — 712 С.
- [39] *Фельмер Г., Шид А.*, Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.:МЦНМО, 2008. 496 с.
- [40] *Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л.* Численные методы. М.: Физматлит, 2004.
- [41] *Хаметов В. М., Шелемех Е. А., Ясонов Е. В.* Минимаксное хеджирование американского опциона на неполном рынке с конечным горизонтом — это задача об оптимальной остановке // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2013. Т. 20. №2. С. 155-156.
- [42] *Хаметов В. М., Шелемех Е. А., Ясонов Е. В.* Алгоритм решения задачи об оптимальной остановке с конечным горизонтом // Управление большими системами / Сборник трудов. 2014. Вып. 52. М.: ИПУ РАН.
- [43] *Хеннан Э.* Многомерные временные ряды. М.: Мир, 1974.
- [44] *Хеннекен П. Л., Тортра А.* Теория вероятностей и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1974. 472 с.
- [45] *Цыпкин Я. З.* Автоматические релейные системы. М.: Наука, 1974. 576 с.

- [46] *Четвериков В.* Исследование игры с покупкой и продажей опциона // Рынок ценных бумаг. 1997. №5. С. 49.
- [47] *Шатаев О. В.* О справедливой цене опциона европейского типа // УМН. 1998. Т. 53. Вып. 6(324). С. 269–270.
- [48] К теории расчетов опционов европейского и американского типов. I дискретное время / Ширяев А. Н., Кабанов Ю. М., Крамков Д. О., Мельников А. В. // Теория вероятностей и ее применения. 1994. Т. 39. Вып. 1. С. 23–79.
- [49] *Ширяев А. Н.* О некоторых понятиях и стохастических моделях финансовой математики // Теория вероятностей и ее применения. 1994. Т. 39. Вып. 1. С. 5–22.
- [50] *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели. М.:Фазис, 1998. 512 с.
- [51] *Andreasen J., Jensen B., Poulsen R.* Eight Valuation Methods in Financial Mathematics: The Black-Scholes Formula as an Example // Mathematical Scientist. 1999. Vol. 23. №1. P. 18–40.
- [52] *Artzner P.* Coherent Measures of Risk // Mathematical Finance. 1999. V. 9. №3. pp. 203–228.
- [53] *Bachelier L.* Theorie de la Speculation // Annales Scientifiques de l'cole Normale Suprieure. 1900. V. 3. P. 21–86.
- [54] *Bird, R., Dennis, D., Tippett, M.* A stop loss approach to portfolio insurance // Journal of Portfolio Management. 1988. №14. P. 35–40.
- [55] *Black F., Scholes M.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. 1973. Vol. 81. №3. P. 637–659.
- [56] *Carr P., Jarrow R.* The Stop-Loss Start-Gain Paradox and Option Valuation: a New Decomposition into Intrinsic and Time Value // Review of Financial Studies. 1990. V. 3. №. 3. P. 469–492.
- [57] *Cetin U., Jarrow R., Protter P., Warachka M.* Pricing Options in an Extended Black Scholes Economy with Illiquidity: Theory and Empirical Evidence // Review of Financial Studies. 2006. Vol. 19. №2. P. 493–529.
- [58] *Cox J., Rubinstein M.* Option Markets. NJ: Prentice-Hall, 1985.

- [59] *Cox J. C., Ross R.A., Rubinstein M.* Option Pricing: a Simplified Approach // Journal of Financial Economics. 1976. V. 7. P. 229–263.
- [60] *Dowd K., Blake D.* After VaR: The Theory, Estimation, and Insurance Applications of Quantile-Based Risk Measures // CRIS Discussion Paper Series, 2006.
- [61] *Dufour A., Engle R. F.* The ACD Model: Predictability of the Time Between Consecutive Trades // Discussion Papers in Finance: 2000-05. California: ISMA Centre. 58 p. (Business School for Financial Markets)
- [62] *Dybvig P. H.* Inefficient dynamic portfolio strategies or how to throw away a million dollars in the stock market // Review of Financial Studies. 1988. №1. P. 67-88.
- [63] *Edirisinghe C., Naik V., Uppal R.* Optimal Replication of Options with Transactions Costs and Trading Restrictions // Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1993. №28. P. 117–138.
- [64] *El Karoui N., Quenez M. C.* Dynamics Programming and Pricing of Contingent Claims in a Incomplete Market //SIAM Journal on Applied Mathematics. 1995. V. 33. №1. P. 29–66.
- [65] *Follmer H., Kramkov D.* Optional Decomposition under Constraints // Probability Theory and Related Fields. 1997 Vol. 109. №1. P. 1–25.
- [66] *Follmer H., Kabanov Yu. M.* Optional Decomposition and Lagrange Multipliers // Finance Stochastic. 1998. Vol. 2. №1. P. 69–81.
- [67] *Gollier C.* On the Inefficiency of Bang-Bang and Stop-Loss Portfolio Strategies // Journal of Finance. 1997. №14. P. 143–154.
- [68] *Jia Q.* Pricing American Options using Monte Carlo Methods // Department of Mathematics, Uppsala University, 2009.
- [69] *Kaminski K. M., Lo A. W.* When do stop loss rules stop loss? // Swedish Institute for Financial Research. Working paper. 2008. №34.
- [70] *Karatzas I.* On the Pricing of American Options // Appl. Math. Optim. 1988. №17. P. 37–60.
- [71] *Karatzas I., Shreve S.* Brownian Motion and Stochastic Calculus // Springer. New York. 1978.

- [72] *Kramkov D. O.* Optional Decomposition of Supermartingales and Hedging Contingent Claims in Incomplete Security Markets // Probability Theory and Related Fields. 1996 Vol. 105. №4. P. 459–479.
- [73] *McKean H. P. Jr.* Appendix: A free boundary problem for the heat equation arising from a problem in mathematical economics // Indust. Manage. Rev. 1965. №6. P. 32–39.
- [74] *Merton R.C.* Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous // Journal of Financial Economics. 1976. 3. P. 125–144.
- [75] *Mocioalca O.* Jump Diffusion Options with Transaction Costs // Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics. 2007. Vol. 52. №3. P. 349–366.
- [76] *Myneni R.* The Pricing of the American Option // The Annals of Applied Probability. 1992. Vol. 2. №. 1. P. 1–23.
- [77] *Ng S. -A.* An Infinitesimal Analysis of the Stop-Loss-Start-Gain Strategy // International Journal of Theoretical and Applied Finance. 2005. Vol. 08. Iss. 05. P. 623–635.
- [78] *Osler C. L.* Stop-loss orders and price cascades in currency markets // Journal of International Money and Finance. 2005. №24. P. 219-241.
- [79] *Rockafellar R.T., Uryasev S.* Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions // Journal of Banking and Finance. 2002. V. 26. №. 7. P. 1443–1471.
- [80] *Samuelson P.* Rational Theory of Warrant Pricing // Industrial Management Review. 1965. V. 6. P. 13-31.
- [81] *Schonbucher P., Wilmott P.* The Feedback Effect of Hedging in Illiquid Markets // SIAM Journal on Applied Mathematics. 2000. №61. P. 232–272.
- [82] *Seidenverg E.* A Case of Confused Identity // Financial Analysts Journal. 1988. P. 63–67.
- [83] *Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A.* Lectures on Stochastic Programming: Modelling and Theory // MPS-SIAM Series on Optimization. Philadelphia. 2009. P. 447.
- [84] *Sobol V.* Modification of the Stop-Loss Start-Gain Strategy. Distribution of Hedger's Losses // Управление, информация и оптимизация: тезисы докладов Шестой Традиционной всероссийской молодежной летней школы (22-29 июня 2014 г. дер. Григорчиково, Ленинский район, Московская обл.). 2014. М.: ИПУ РАН. 65 с.



- [85] *Vaseghi S. V.* Advanced digital signal processing and noise reduction. 2nd ed. // Chichester. Wiley. 2000.
- [86] *Wu Zh.* Pricing American Options using Monte Carlo Methods // Masters thesis. University of Oxford, 2012.
- [87] *Zhang M. Y., Russell J., Tsay R. S.* A nonlinear autoregressive conditional duration model with applications to financial transaction data // Journal of Econometrics. 2001. Vol. 104. №1. P. 179-207.