Тепловые процессы в технике. 2025. Т. 17. № 2. С. 77–88
Thermal processes in engineering, 2025, vol. 17, no. 2, pp. 77–88

Научная статья
УДК 539.3
URL: https://tptmai.ru/publications.php?ID=184635
EDN: https://www.elibrary.ru/QUASUS

Динамическая несвязанная осесимметричная задача теории термоупругости для полого консольно закрепленного цилиндра

Д.А. Шляхин[1], Д.В. Раков[2]✉

[1,2]*Самарский государственный технический университет, Самара, Российская Федерация*
[2]*rakovdaniil1@gmail.com*✉

Аннотация. Построено новое замкнутое решение осесимметричной задачи термоупругости для толстостенного полого изотропного консольно закрепленного цилиндра в случае действия на его торцевой и внешней цилиндрической поверхностях нестационарного осесимметричного теплового воздействия в виде изменения температуры. Замкнутое решение в несвязанной постановке получено при использовании метода конечных интегральных преобразований по пространственным переменным. Для реализации данного подхода используется процедура приведения граничных условий по торцам цилиндра к смешанным расчетным соотношениям. Построенный алгоритм расчета дает возможность определить напряженно-деформированное состояние и температурное поле в цилиндре. Разработанный алгоритм расчета находит свое применение при проектировании несущих конструкций в виде круглых колонн.

Ключевые слова: нестационарная осесимметричная задача теории термоупругости, толстостенный цилиндр, конечные интегральные преобразования, несвязанная задача теории термоупругости, полый консольный цилиндр

Для цитирования. Шляхин Д.А., Раков Д.В. Динамическая несвязанная осесимметричная задача теории термоупругости для полого консольно закрепленного цилиндра // Тепловые процессы в технике. 2025. Т. 17. № 2. С. 77–88. URL: https://tptmai.ru/publications.php?ID=184635

Original article

Dynamic unbonded axisymmetric thermoelasticity problem for a hollow cantilevered cylinder

D.A. Shlyakhin[1], D.V. Rakov[2]✉

[1,2]*Samara State Technical University, Samara, Russian Federation*
[2]*rakovdaniil1@gmail.com*✉

Abstract. A new closed-form solution has been developed for the axisymmetric problem of thermoelasticity, specifically targeting a thick-walled hollow isotropic cantilevered cylinder. This solution is particularly pertinent in scenarios that involve unsteady axisymmetric thermal action applied to the external cylindrical surfaces of the cylinder, characterized by dynamic variations in temperature over both

spatial variables and time. The thermal influence exerted on the cylinder's surface changes dynamically, reflecting the complexities of real-world conditions and operational environments.
In this sophisticated model, the inner curvilinear surface of the cylinder is subject to convective heat exchange with the surrounding environment, which is maintained at a constant temperature. The inherent complexity involved in integrating the initial differential equations, especially due to the presence of a non-self-conjugate operator, necessitates the construction of a closed-form solution that can only be achieved within an uncoupled formulation. Initially, the study focuses on the heat conduction problem, deliberately excluding the effects of volumetric changes in the body on the temperature function to simplify the analysis. The solution to this problem is achieved through a systematic application of the Fourier cosine transform concerning the axial variable, combined with the generalized method of finite integral transforms (FIT) applied to the radial coordinate.
Following this initial analysis, the research progresses to consider the thermoelasticity problem while incorporating a specific temperature field. In this advanced phase, the boundary conditions at the ends of the cylinder are transformed into mixed homogeneous design relations, which facilitate a more manageable approach to solving the transformed problem. This is accomplished through the sequential application of both sine and cosine Fourier transforms, alongside the FIT method, which enhances the robustness of the solution.
The calculation algorithm developed through this comprehensive research enables the precise determination of the stress-strain state and temperature distribution within the cantilevered cylinder. This innovative approach has significant implications for the calculation and design of load-bearing structures, particularly circular columns that experience unsteady heating during operational conditions or emergency situations. Furthermore, the algorithm serves as a valuable tool for validating results in the development of numerical calculation methods, thereby contributing to advancements in the field of structural engineering and thermoelastic analysis. The findings from this study not only enhance theoretical understanding but also provide practical applications in engineering design, ensuring safety and reliability in structural performance under varying thermal conditions.

Keywords: unsteady axisymmetric thermoelasticity problem, thick-walled cylinder, finite integral transformations, unbound thermoelasticity problem, hollow cantilever cylinder

For citation. Shlyakhin D.A., Rakov D.V. Dynamic unbonded axisymmetric thermoelasticity problem for a hollow cantilevered cylinder. *Thermal processes in engineering*. 2025, vol. 17, no. 2, pp. 77–88. (In Russ.). URL: https://tptmai.ru/publications.php?ID=184635

1. Введение

При проектировании конструкций различного назначения возникает необходимость исследования их работы в условиях неравномерного нестационарного нагрева. Данное воздействие сопровождается возникновением температурных деформаций и напряжений, которые необходимо учитывать в случае всестороннего анализа прочностных характеристик рассматриваемых систем.

Для описания работы упругих систем используются различные теории термоупругости [1–2]. При этом математическая постановка начально-краевых задач включает систему несамосопряженных дифференциальных уравнений. Проблема интегрирования приводит, как правило, к исследованию их в несвязанной постановке [3–8], что, при температурном воздействии, не позволяет учесть влияние скорости изменения объема тела на температурное поле.

В связанной постановке замкнутые связанные решения нестационарных задач термоупругости можно отметить ограниченное количество работ [9–15]. Работы [9, 10] посвящены анализу частотного уравнения в бесконечном цилиндрическом волноводе, а в [11] исследовался длинный двухслойных цилиндр. Публикации [12–14] выполнены для конечного изотропного цилиндра с мембранным закреплением его торцевых поверхностей, а в [15] рассмотрена жестко закрепленная круглая пластина. Решения построены при использовании обобщенного и биортогонального конечного интегрального преобразования [16–17].

В настоящей работе рассматривается динамическая осесимметричная задача для короткого консольно закрепленного цилиндра, выполненного из изотропного материала. Особенность построенного ниже решения заключается в том, что в отличие от полученных ранее аналитических результатов, в которых удовлетворялись смешанные граничные условия на торцевых поверхностях, в построенном алгоритме выполняется условие жесткого закрепления конструкции, а именно отсутствие перемещений. Новое замкнутое решение построено с помощью обобщенного метода конечных интегральных преобразований [16].

2. Материалы и методы

Пусть полый круглый консольно закрепленный цилиндр, выполненный из изотропного материала, занимает в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z_*) область $\Omega: \{a \le r_* \le b,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z_* \le h^*\}$. На внешней цилиндрической $(r_* = b)$ и торцевой $(z_* = h^*)$ поверхностях заданы осесимметричные законы изменения температуры $\omega_1^*(z_*, t_*)$ и $\omega_2^*(r_*, t_*)$, а на внутренней $(r_* = a)$ выполняется конвективный теплообмен при заданной температуре внешней среды ϑ^* (рис. 1).

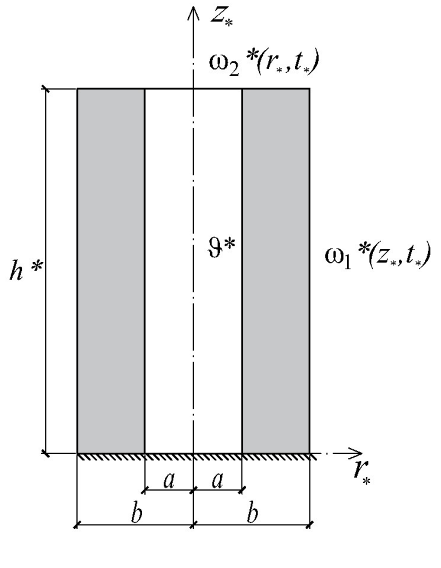

Рис. 1. Расчетная схема пластины

Математическая формулировка рассматриваемой задачи в безразмерной форме записывается следующим образом [3]:

$$\frac{\partial}{\partial r}\nabla U + a_1\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2\frac{\partial^2 W}{\partial r\partial z} - \frac{\partial\Theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$a_1\nabla\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_2\frac{\partial}{\partial z}\nabla U - \frac{\partial\Theta}{\partial z} - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0,$$

$$\nabla\frac{\partial\Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} - a_3\frac{\partial\Theta}{\partial t} - a_4\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla U + \frac{\partial W}{\partial z}\right) = 0;$$

$$z = 0, h \quad \left(a_5\nabla U + \frac{\partial W}{\partial z}\right)_{|z=h} = \omega_2, \quad W_{|z=0} = 0, \quad (2)$$

$$U_{|z=0,h} = 0,$$

$$\Theta_{|z=h} = \omega_2, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial z}_{|z=0} = 0;$$

$$r = 1, R \quad \frac{\partial U}{\partial r} + a_5\left(\frac{U}{r} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) - \Theta = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\Theta_{|r=1} = \omega_1, \quad \left(-a_6\frac{\partial\Theta}{\partial r} + \Theta\right)_{|r=R} = \vartheta;$$

$$t = 0 \quad U = U_0, \quad W = W_0, \quad \Theta = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}_{|t=0} = \dot{U}_0, \quad \frac{\partial W}{\partial t}_{|t=0} = \dot{W}_0; \quad (4)$$

где $\{U, W, r, z, R, h\} = \{U^*, W^*, r_*, z_*, a, h^*\}/b$,

$$t = \frac{a_7}{b}t_*, \quad \gamma = \frac{E}{(1-2\nu)}\alpha_t, \quad \{\Theta, \omega_1, \omega_2, \vartheta\} =$$

$$= \frac{\gamma}{a_7^2\rho}\left(\{T, \omega_1^*, \omega_2^*, \vartheta^*\} - T_0\right), \quad a_1 = a_2(1-2\nu),$$

$$a_2 = 0{,}5(1-\nu)^{-1}, \quad a_3 = \frac{c_\varepsilon b}{\Lambda}a_7, \quad a_4 = \frac{bT_0}{\Lambda}\frac{\gamma^2}{\rho a_7},$$

$$a_5 = \nu(1-\nu)^{-1}, \quad a_6 = \frac{\Lambda}{\alpha b}, \quad a_7 = \left[\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}\right]^{0,5},$$

$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}$, $U^*(r_*, z_*, t_*)$, $W^*(r_*, z_*, t_*)$, $T(r_*, z_*, t_*)$ – компоненты вектора перемещений и температура в размерной форме; t_*– время; E, ν, ρ – модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность изотропного материала; $\alpha_t, c_\varepsilon, \Lambda$ – коэффициенты линейного теплового расширения, объемной теплоемкости и теплопроводности материала; T_0 – первоначальная температура тела; $U_0, \dot{U}_0, W_0, \dot{W}_0$ – известные в начальный момент перемещения и их скорости; α – коэффициент теплоотдачи.

Сложность интегрирования системы (1) с несамосопряженным дифференциальным оператором, приводит к необходимости исследования несвязанной задачи термоупругости. На первом этапе рассматривается задача теплопроводности без учета влияния изменения объема тела на температуру. На втором этане исследуется задача термоупругости с учетом определенного (вычисленного) температурного поля.

Математическая формулировка задачи теплопроводности имеет вид:

$$\nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - a_3 \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0; \qquad (5)$$

$$z = 0, h \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, \quad \Theta_{|z=h} = \omega_2; \qquad (6)$$

$$r = 1, R \quad \Theta_{|r=1} = \omega_1, \quad \left(-a_6 \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \Theta \right)_{|r=R} = \vartheta; \qquad (7)$$

$$t = 0 \quad \Theta = 0. \qquad (8)$$

На первом этапе исследования граничные условия (6) приводятся к однородным с помощью следующего разложения:

$$\Theta(r, z, t) = \omega_2(r, t) + Y(r, z, t). \qquad (9)$$

Подстановка (9) в (5)–(8) позволяет получить новую задачу относительно функции $Y(r, z, t)$. При этом дифференциальное уравнение (5), граничные (7) и начальные условия (8) становятся неоднородными с правыми частями $F_1(r, z, t)$, $Z_1(z, t)$, $Z_2(z, t)$,, $Y_0(r, z)$:

$$F_1 = \left(a_3 \frac{\partial}{\partial t} - \nabla \frac{\partial}{\partial r} \right) \omega_2, \quad Z_1 = \omega_1 - \omega_2,$$

$$Z_2 = \vartheta + a_6 \frac{\partial \omega_2}{\partial r} - \omega_2, \quad Y_0 = -\omega_2(r, 0).$$

К краевой задаче относительно $Y(r, z, t)$ применяется косинус-преобразование Фурье с конечными пределами по переменной z [18]:

$$\Theta_H(r, n, t) = \int_0^h Y(r, z, t) \cos(j_n z)\, dz, \qquad (10)$$

$$Y(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega^{-1} \Theta_H(r, n, t) \cos j_n z,$$

$$j_n = n\pi / h, \quad \Omega_n = \begin{cases} h, & (n = 0) \\ h/2, & (n \neq 0) \end{cases}.$$

В результате в пространстве изображений Фурье получается следующая начально-краевая задача:

$$\nabla \frac{\partial \Theta_H}{\partial r} - j_n^2 \Theta_H - a_3 \frac{\partial \Theta_H}{\partial t} = F_{1H}; \qquad (11)$$

$$r = 1, R \quad \Theta_{H|r=1} = \omega_H, \quad \left(-a_6 \frac{\partial \Theta_H}{\partial r} + \Theta_H \right)_{|r=R} = \vartheta_H; \qquad (12)$$

$$t = 0 \quad \Theta_H = 0, \qquad (13)$$

где $\{F_{1H}, \omega_H, \vartheta_H\} = \int\limits_0^h \{F_1, Z_1, Z_2\} \cos(j_n z)\, dz.$

На следующем этапе граничные условия (12) приводятся к однородным с помощью следующего разложения:

$$\Theta_H(r, n, t) = H_1(r, n, t) + T_H(r, n, t), \qquad (14)$$

где $H_1(r, n, t)$ – дважды дифференцируемая функция, выражение которой определяется в процессе решения задачи.

Подстановка (14) в (11)–(13), при выполнении условий

$$r = 1, R \quad H_1 = \omega_H, \quad -a_6 \frac{\partial H_1}{\partial r} + H_1 = \vartheta_H, \qquad (15)$$

позволяет получить новую задачу относительно функции $T_H(r,n,t)$. Здесь правая часть дифференциального уравнения (11) F_{1H}^* и начальные условия (13) принимают следующий вид:

$$F_{1H}^* = F_{1H} - \nabla\frac{\partial H_1}{\partial r} + j_n^2 H_1 + a_3\frac{\partial H_1}{\partial t},$$
$$T_{0H} = -H_{1|t=0}.$$

К задаче (11)–(13) относительно функции $T_H(r,n,t)$ применяется обобщенный метод конечных интегральных преобразований (КИП) [16] с неизвестной функцией ядра преобразований $K(\lambda_{in},r)$:

$$G(\lambda_{in},n,t) = \int_R^1 T_H(n,z,t)K(\lambda_{in},r)rdr, \quad (16)$$

$$T_H(n,z,t) = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in},n,t)K(\lambda_{in},r)\|K_{in}\|^{-2},$$

$$\|K_{in}\|^2 = \int_R^1 K(\lambda_{in},r)^2 rdr,$$

где λ_{in} – положительные параметры, образующие счетное множество $\left(i=\overline{1,\infty}\right)$.

Использование алгоритма метода КИП позволяет получить задачу относительно трансформанты $G(\lambda_{in},n,t)$:

$$\frac{dG(\lambda_{in},n,t)}{dt} + A_{in}G(\lambda_{in},n,t) = P_H, \quad (17)$$

$$t=0 \quad G(\lambda_{in},n,0) = G_0,$$

решение которых записывается в виде

$$G(\lambda_{in},n,t) =$$
$$= G_0\exp(-A_{in}t) + \int_0^t P_H(\tau)\exp[A_{in}(\tau - t)]d\tau, \quad (18)$$

и однородную задачу относительно ядра преобразования $K(\lambda_{in},r)$:

$$\frac{d^2K(\lambda_{in},r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dK(\lambda_{in},r)}{dr} + B_{in}^2K(\lambda_{in},r) = 0, \quad (19)$$

$$r = 1, R \quad K(\lambda_{in},r)_{|r=1} = 0,$$
$$\left[-a_6\frac{dK(\lambda_{in},r)}{dr} + K(\lambda_{in},r)\right]_{|r=R} = 0, \quad (20)$$

где $P_H = -a_3^{-1}\int_R^1 F_{1H}^*K(\lambda_{in},r)rdr,\ \ G_0 = \int_R^1 T_{0H}K(\lambda_{in},r)rdr,$

$A_{in} = a_3^{-1}\lambda_{in}^2,\ \ B_{in}^2 = \lambda_{in}^2 - j_n^2.$

Общий интеграл уравнения (19) имеет вид:

$$K(\lambda_{in},r) = C_{1in}J_0(B_{in}r) + C_{2in}Y_0(B_{in}r). \quad (21)$$

где $J_\mu(\ldots), Y_\mu(\ldots)$ – функции Бесселя первого и второго рода порядка μ [19].

Подстановка $K(\lambda_{in},r)$ в граничные условия (20) позволяет определить постоянные интегрирования C_{1in}, C_{2in} и собственные значения λ_{in}.

Окончательные выражения для функции приращения температуры с учетом формул обращения (10), (16) и разложений (9), (14) имеют вид:

$$\Theta(r,z,t) = \omega_2(r,t) + \sum_{n=0}^{\infty}\Omega^{-1}\Big[H_1(r,t) +$$
$$+\sum_{i=1}^{\infty}G(\lambda_{in},n,t)K(\lambda_{in},r)\|K_{in}\|^{-2}\Big]\cos j_n z. \quad (22)$$

Выражение для $H_1(r,t)$ определяется из условия упрощения правой части дифференциального уравнения относительно функции $T_H(r,n,t)$:

$$\nabla\frac{\partial H_1}{\partial r} - j_n^2 H_1 = 0. \quad (23)$$

Общее решение (23) записывается, при удовлетворении условий (15), следующим образом:

$$H_1(r,t) = D_1(t)I_0(j_n r) + D_2(t)\tilde{K}_0(j_n r), \quad (24)$$

где $D_2(t) = \dfrac{\vartheta_H(R,n,t)I_0(j_n) - \omega_H(1,n,t)\left[I_0(j_nR) - a_6 j_n I_1(j_nR)\right]}{I_0(j_n)\left[\tilde{K}_0(j_nR) + a_6 j_n\tilde{K}_1(j_nR)\right] - \left[I_0(j_nR) - a_6 j_n I_1(j_nR)\right]\tilde{K}_0(j_n)},$

$D_1(t) = \dfrac{\omega_H(1,n,t) - D_2(t)\tilde{K}_0(j_n)}{I_0(j_n)},\ \ I_\mu(\ldots), \tilde{K}_\mu(\ldots)$ –

модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка μ.

С учетом определенного температурного поля математическая постановка задачи термоупругости имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial r}\nabla U + a_1\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2\frac{\partial^2 W}{\partial r\partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial\Theta}{\partial r}, \quad (25)$$

$$a_1\nabla\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_2\frac{\partial}{\partial z}\nabla U - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\partial\Theta}{\partial z};$$

$$z = 0, h \quad \left(a_5\nabla U + \frac{\partial W}{\partial z}\right)_{|z=h} = \Theta, \; W_{|z=0} = 0, \quad (26)$$

$$U_{|z=0,h} = 0;$$

$$r = 1, R \quad \frac{\partial U}{\partial r} + a_5\left(\frac{U}{r} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) = \Theta, \; \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0; \quad (27)$$

$$t = 0 \quad U = U_0, \; W = W_0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}_{|t=0} = \dot U_0, \; \frac{\partial W}{\partial t}_{|t=0} = \dot W_0. \quad (28)$$

Решение краевой задачи (25)–(28) строится методом разделения переменных по пространственным переменным. При этом применение конечного интегрального преобразования по переменной z возможно при наличии смешанных однородных граничных условий. Для этого граничное условие (26) $W_{|z=0} = 0$ заменяется на условие, при котором на нижней торцевой поверхности цилиндра действуют нормальные напряжения $q(r,t)$:

$$z = 0 \quad a_3\nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} = q + \Theta_{|z=0}, \quad (29)$$

и используется следующее разложение:

$$W(r,z,t) = W_1(t) + H_2(r,z,t) + w(r,z,t), \quad (30)$$

где $H_2(r,z,t) = \left(z - \frac{1}{2h}z^2\right)\left[q(r,t) + \Theta_{|z=0}\right] + \frac{z^2}{2h}\Theta_{|z=h}$, $q(r,t) = \frac{q^*(r,t)}{a_7^2\rho}$, $q^*(r,t)$ – нормальные напряжения в жестком закреплении в размерной форме; $q(r, t)$, $W_1(t)$ – определяются в процессе решения задачи из условия отсутствия вертикальных перемещений при $z = 0$.

В результате подстановки (30) в (25)–(29) формируется новая краевая задача относительно функций $U(r, z, t)$, $w(r, z, t)$ с однородными смешанными условиями по переменной z. При этом правые части дифференциальных уравнений (25) и граничных условий (27) имеют вид $F_2(r, z, t)$, $F_3(r, z, t)$, $B_1(r, z, t)$, $B_2(r, z, t)$, а начальные условия относительно аксиальных перемещений следует заменить на $w_0, \dot w_0$:

$$F_2 = \frac{\partial\Theta}{\partial r} - a_2\frac{\partial^2 H_2}{\partial r\partial z},$$

$$F_3 = \frac{\partial\Theta}{\partial z} - \left(a_1\nabla\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)H_2 + \frac{d^2 W_1}{dt^2},$$

$$B_2 = -\frac{\partial H_2}{\partial r}, \; B_1 = \Theta - a_5\frac{\partial H_2}{\partial z},$$

$$w_0 = W_0 - \left(H_2 + W_1\right)_{|t=0},$$

$$\dot w_0 = \dot W_0 - \left(\frac{\partial H_2}{\partial t} + \frac{dW_1}{dt}\right)_{|t=0}.$$

К краевой задаче (25)–(29) относительно $U(r, z, t)$, $w(r, z, t)$ применяется синус- и косинус-преобразования Фурье с конечными пределами по переменной z, используя следующие трансформанты [18]:

$$u_H(r,n,t) = \int_0^h U(r,z,t)\sin(j_n z)\,dz, \quad (31)$$

$$w_H(r,n,t) = \int_0^h w(r,z,t)\cos(j_n z)\,dz$$

с соответствующими формулами обращения

$$U(r,z,t) = \frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty} u_H(r,n,t)\sin j_n z,$$

$$w(r,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\Omega^{-1} w_H(r,n,t)\cos j_n z, \quad (32)$$

$$j_n = n\pi / h, \; \Omega_n = \begin{cases} h, & (n = 0) \\ h/2, & (n \neq 0) \end{cases}.$$

В пространстве изображений Фурье получается следующая краевая задача:

$$\frac{\partial}{\partial r}\nabla u_H - a_1 j_n^2 u_H - a_2 j_n \frac{\partial w_H}{\partial r} - \frac{\partial^2 u_H}{\partial t^2} = F_{2H}, \quad (33)$$

$$a_1 \nabla \frac{\partial w_H}{\partial r} - j_n^2 w_H + a_2 j_n \nabla u_H - \frac{\partial^2 w_H}{\partial t^2} = F_{3H};$$

$$r = 1, R \quad \frac{\partial u_H}{\partial r} + a_5\left(\frac{u_H}{r} - j_n w_H\right) = B_{1H}, \quad \frac{\partial w_H}{\partial r} + j_n u_H = B_{2H}; \quad (34)$$

$$t = 0 \quad u_H = u_{0H}, \quad w_H = w_{0H}, \quad \left.\frac{\partial u_H}{\partial t}\right|_{t=0} = \dot{u}_{0H}, \quad \left.\frac{\partial w_H}{\partial t}\right|_{t=0} = \dot{w}_{0H}, \quad (35)$$

где $\left\{F_{2H}, B_{1H}, u_{0H}, \dot{u}_{0H}\right\} = \int\limits_0^h \left\{F_2, B_1, U_0, \dot{U}_0\right\} \sin\left(j_n z\right) dz,$

$$\left\{F_{3H}, B_{2H}, w_{0H}, \dot{w}_{0H}\right\} = \int\limits_0^h \left\{F_3, B_2, w_0, \dot{w}_0\right\} \cos\left(j_n z\right) dz.$$

На следующем этапе исследования повторяется процедура приведения неоднородных граничных условий (34) к однородным при использовании следующих разложений:

$$u_H\left(r,n,t\right) = H_3\left(r,n,t\right) + U_H\left(r,n,t\right), \quad (36)$$
$$w_H\left(r,n,t\right) = H_4\left(r,n,t\right) + W_H\left(r,n,t\right).$$

Подстановка (36) в (33)–(35) при выполнении условий

$$r = 1, R \quad \frac{\partial H_3}{\partial r} + a_5\left(\frac{H_3}{r} - j_n H_4\right) = B_{1H}, \quad \frac{\partial H_4}{\partial r} + j_n H_3 = B_{2H}, \quad (37)$$

позволяет получить новую краевую задачу относительно функций U_H, W_H, которая решается обобщенным методом конечных интегральных преобразований (КИП) с неизвестными компонентами вектор-функции ядра $K_1\left(\lambda_{in}, r\right)$, $K_2\left(\lambda_{in}, r\right)$:

$$G\left(\lambda_{in}, n, t\right) = \int\limits_R^1 \left[U_H\left(r,n,t\right) K_1\left(\lambda_{in}, r\right) + W_H\left(r,n,t\right) K_2\left(\lambda_{in}, r\right)\right] r dr, \quad (38)$$

$$\left\{U_H\left(n,z,t\right), W_H\left(n,z,t\right)\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} G\left(\lambda_{in}, n, t\right) \left\{K_1\left(\lambda_{in}, r\right), K_2\left(\lambda_{in}, r\right)\right\} \left\|K_{in}\right\|^{-2},$$

$$\left\|K_{in}\right\|^2 = \int\limits_R^1 \left[K_1^2\left(\lambda_{in}, r\right) + K_2^2\left(\lambda_{in}, r\right)\right] r dr,$$

где λ_{in} – положительные параметры, образующие счетное множество $\left(i = \overline{1, \infty}\right)$.

Использование алгоритма метода КИП позволяет получить систему задач относительно трансформанты $G\left(\lambda_{in}, n, t\right)$:

$$\frac{d^2 G\left(\lambda_{in}, n, t\right)}{dt^2} + \lambda_{in}^2 G\left(\lambda_{in}, n, t\right) = -F\left(\lambda_{in}, n, t\right), \quad (39)$$

$$t = 0 \quad G\left(\lambda_{in}, n, 0\right) = G_0, \quad \frac{dG}{dt} = \dot{G}_0,$$

решение которых записывается в виде

$$G\left(\lambda_{in}, n, t\right) = G_0 \cos\left(\lambda_{in} t\right) + \dot{G}_0 \sin\left(\lambda_{in} t\right) / \lambda_{in} - \lambda_{in}^{-1} \int_0^t F\left(\lambda_{in}, n, t\right) \sin \lambda_{in}\left(t - \tau\right) d\tau,$$

и однородную задачу относительно компонент ядра преобразования $K_1\left(\lambda_{in}, r\right)$, $K_2\left(\lambda_{in}, r\right)$:

$$\frac{d}{dr}\nabla K_1 + \left(\lambda_{in}^2 - a_1 j_n^2\right) K_1 - a_2 j_n \frac{dK_2}{dr} = 0, \quad (40)$$

$$a_1 \nabla \frac{dK_2}{dr} + \left(\lambda_{in}^2 - j_n^2\right) K_2 + a_2 j_n \nabla K_1 = 0;$$

$$r = 1, R \quad \frac{dK_1}{dr} + a_5\left(\frac{K_1}{r} - j_n K_2\right) = 0, \quad \frac{dK_2}{r} + j_n K_3 = 0, \quad (41)$$

где

$$\left\{F, G_0, \dot{G}_0\right\} = \int_R^1 \left(\left\{F_{2H}^*, U_{0H}, \dot{U}_{0H}\right\} K_1 + \left\{F_{3H}^*, W_{0H}, \dot{W}_{0H}\right\} K_2\right) r dr,$$

$$F_{2H}^* = F_{2H} - \frac{\partial}{\partial r}\nabla H_3 + a_1 j_n^2 H_3 + a_2 j_n \frac{\partial H_4}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_3}{\partial t^2},$$

$$F^*_{3H} = F_{3H} - a_1\nabla\frac{\partial H_4}{\partial r} + j_n^2 H_4 - a_2 j_n \nabla H_3 + \frac{\partial^2 H_4}{\partial t^2},$$

$$U_{0H} = u_{0H} - H_{3|t=0},\ W_{0H} = w_{0H} - H_{4|t=0},$$

$$\dot{U}_{0H} = \dot{u}_{0H} - \frac{\partial H_3}{\partial t}_{|t=0},\ \dot{W}_{0H} = \dot{w}_{0H} - \frac{\partial H_4}{\partial t}_{|t=0}.$$

Система (40) приводится к разрешающему уравнению 4-го порядка относительно $K_1(\lambda_{in}, r)$, которое раскладывается на коммутативные дифференциальные сомножители 2-го порядка

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \left(A_{in}^2 - \frac{1}{r^2}\right)\right]\times$$
$$\times\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \left(D_{in}^2 - \frac{1}{r^2}\right)\right]K_1(\lambda_{in}, r) = 0, \tag{42}$$

где $A_{in}^2 = \frac{m_{1in}}{2} + \sqrt{\frac{m_{1in}^2}{4} + m_{2in}}$, $D_{in}^2 = -\frac{m_{1in}}{2} + \sqrt{\frac{m_{1in}^2}{4} + m_{2in}}$, $m_{1in} = \frac{(a_1+1)\lambda_{in}^2}{a_1} - 2j_n^2$,

$$m_{2in} = \frac{\left(j_n^2 - \lambda_{in}^2\right)\left(\lambda_{in}^2 - a_1 j_n^2\right)}{a_1}.$$

Приравнивая к нулю каждый сомножитель уравнения (42), в зависимости от отношения постоянных материала и собственных значений, получаем следующие частные случаи решения:

$$A_{in}^2 < 0,\ D_{in}^2 < 0:$$
$$K_1(\lambda_{in}, r) = C_{3in} I_1(A_{in} r) + C_{4in}\tilde{K}_1(A_{in} r) + C_{5in} I_1(D_{in} r) + C_{6in}\tilde{K}_1(D_{in} r); \tag{43}$$

$$A_{in}^2 > 0,\ D_{in}^2 < 0:$$
$$K_1(\lambda_{in}, r) = C_{3in} J_1(A_{in} r) + C_{4in} Y_1(A_{in} r) + C_{5in} I_1(D_{in} r) + C_{6in}\tilde{K}_1(D_{in} r);$$

$$A_{in}^2 > 0,\ D_{in}^2 > 0:$$
$$K_1(\lambda_{in}, r) = C_{3in} J_1(A_{in} r) + C_{4in1}(A_{in} r) + C_{5in} J_1(D_{in} r) + C_{6in} Y_1(D_{in} r).$$

Выражение для K_2 имеет вид:

$$K_2(\lambda_{in}, r) = \frac{a_1}{a_2 j_n\left(j_n^2 - \lambda_{in}^2\right)}\left[\frac{d^3}{dr^3} + \frac{2}{r}\frac{d^2}{dr^2} + \left(m_{3in} - \frac{1}{r^2}\right)\frac{d}{dr} + \left(\frac{m_{3in}}{r} + \frac{1}{r^3}\right)\right]K_1(\lambda_{in}, r), \tag{44}$$

где $m_{3in} = \left(\lambda_{in}^2 - a_1 j_n^2\right) + a_1^{-1}\left(a_2 j_n\right)^2$.

Подстановка K_1, K_2 в граничные условия (41) позволяют определить постоянные интегрирования $C_{3in} \ldots C_{6in}$ и собственные значения λ_{in}.

Окончательные выражения для компонент вектора перемещений с учетом формул обращения (32), (38) и разложений (30), (36) имеют вид:

$$U(r,z,t) = \frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[H_3(r,n,t) + \sum_{n=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_1(\lambda_{in}, r)\left\|K_{in}\right\|^{-2}\Big]\sin(j_n z), \tag{45}$$

$$W(r,z,t) = W_1(t) + H_2(r,z,t) + \sum_{n=0}^{\infty}\Omega_n\Big[H_4(r,n,t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_2(\lambda_{in}, r)\left\|K_{in}\right\|^{-2}\Big]\cos(j_n z).$$

Выражения для $H_3(r,n,t)$, $H_4(r,n,t)$ определяются из условия упрощения правых частей дифференциальных уравнений относительно функций U_H, W_H.

$$\frac{\partial}{\partial r}\nabla H_3 - a_1 j_n^2 H_3 - a_2 j_n\frac{\partial H_4}{\partial r} = F_{1H}, \tag{46}$$

$$a_1\nabla\frac{\partial H_4}{\partial r} - j_n^2 H_4 + a_2 j_n \nabla H_3 = F_{3H},$$

где

$$F_{3H} = \int_0^h\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z} - a_1\nabla\frac{\partial H_1}{\partial r} - \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2}\right)\cos(j_n z)\,dz.$$

Система (46) приводится к следующему разрешающему неоднородному уравнению:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-j_n^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-j_n^2\right)H_3=F_H. \quad (47)$$

Здесь $F_H=a_1^{-1}\left(\nabla\frac{\partial F_{3H}}{\partial r}-F_{3H}-a_2 j_n\nabla F_{1H}\right)$.

Общее решение уравнения (47) имеет вид:

$$H_3(r,n,t)=\bar{H}_3(r,n,t)+H_{3N}(r,n,t), \quad (48)$$

где

$$\bar{H}_2(r,n,t)=D_1(t)I_0(j_n r)+D_2(t)\tilde{K}_0(j_n r)+$$
$$+D_3(t)\left[V_1(r)I_0(j_n r)+V_2(r)\tilde{K}_0(j_n r)\right]+$$
$$+D_4(t)\left[V_3(r)I_0(j_n r)-V_1(r)\tilde{K}_0(j_n r)\right],$$

$$H_{2N}=V_6(r)I_0(j_n r)+V_7(r)\tilde{K}_0(j_n r),$$

$$V_1(r)=\int rI_0(j_n r)\tilde{K}_0(j_n r)dr,$$

$$V_2(r)=-\int rI_0(j_n r)^2dr,\ V_3(r)=\int r\tilde{K}_0(j_n r)^2dr,$$

$$V_4(r)=\int rF_H\tilde{K}_0(j_n r)\,dr,$$

$$V_6(r)=\int r\left[V_4(r)I_0(j_n r)+V_5(r)\tilde{K}_0(j_n r)\right]\tilde{K}_0(j_n r)dr,$$

$$V_5(r)=-\int rF_H I_0(j_n r)dr,$$

$$V_7(r)=-\int r\left[V_4(r)I_0(j_n r)+V_5(r)\tilde{K}_0(j_n r)\right]I_0(j_n r)dr.$$

Используя зависимость, полученную в процессе приведения (46) к (47), получаем выражение для $H_4(r,n,t)$:

$$H_4(r,n,t)=\bar{H}_4(r,n,t)+H_{4N}(r,n,t), \quad (49)$$

где $\bar{H}_4=\left(a_1a_2j_n^3\right)^{-1}\left[-a_1\frac{d}{dr}\nabla\frac{d}{dr}+\left(j_n^2-a_2^2j_n^2\right)\frac{d}{dr}\right]\bar{H}_3$,

$$H_{4N}=\left(a_1a_2j_n^3\right)^{-1}\left[-a_1\frac{d}{dr}\nabla\frac{dH_{3N}}{dr}+\left(j_n^2-a_2^2j_n^2\right)\frac{dH_{3N}}{dr}+\right.$$
$$\left.+\frac{dF_{3H}}{dr}-a_2j_nF_{1H}\right].$$

Следует отметить, что при вычислении $V_1(r)...V_7(r)$ модифицированные функции Бесселя аппроксимировались многочленами [19].

Подстановка (48)–(49) в граничные условия (37) позволяют определить $D_1(t)\ldots D_4(t)$.

Определение функций $W_1(t)$, $q(r,t)$, с помощью которых удается удовлетворить условие отсутствия вертикальных перемещений в жестком закреплении при $z = 0$ (2), выполняется в следующей последовательности:

1) определяется $W_1(t)$ из условия закрепления одной точки при нулевых начальных условиях для данной функции:

$$W_1(t)=-H_2(1,z,t)-\sum_{n=0}^{\infty}\Omega_n\left[H_4(1,n,t)+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{\infty}G(\lambda_{in},n,t)K_2(\lambda_{in},1)\left\|K_{in}\right\|^{-2}\right];$$

2) нормальные напряжения $q(r,t)$, возникающие в жестком закреплении, аппроксимируются в виде следующей зависимости:

$$q(r,t)=W_1(t)\sum_{p=1}^{N}E_pr^{p-1}.$$

При этом постоянные E_p определяются численно из условия уравновешенности цилиндра в вертикальной плоскости

$$\int_R^1 q(r,t)rdr=0$$

и равенства нулю вертикальных перемещений $W(r,0,t)$ в $(N-1)$ точках в момент достижения нестационарной температурной «нагрузки» амплитудного значения.

3. Результаты

В качестве примера рассматривается круглый полый цилиндр (h^* = 1,5 м, b = 0,1 м, a = = 0,05 м, α = 5,6 Вт/(м^2 K)), выполненный из бетона, который имеет следующие физико-механические характеристики: $E = 2{,}7\times10^{10}$ Па, ν = 0,2, ρ = 2400 кг/м^3, Λ = 10,75 Вт/(м K), $c_\varepsilon = 2{,}3\times10^6$ Дж/(м^3 K), $\alpha_t = 1{,}2\times10^{-5}$ 1/K.

Температура внешней среды ϑ^* и температура на торцевой поверхности ω_2^* равны температуре первоначального состояния цилиндра T_0 ($\vartheta = \omega_2 = 0$).

Рассматривается случай действия на внешней цилиндрической поверхности упругой системы ($r = 1$) температурной «нагрузки»:

$$\omega_1^*\left(z_*,t_*\right)=\left(1-\frac{z_*}{h^*}\right)T_{\max}^*\times$$
$$\times\left[\sin\left(\frac{\pi}{2t_{\max}^*}t_*\right)H\left(t_{\max}^*-t_*\right)+H\left(t_*-t_{\max}^*\right)\right],$$

где $H\left(\tilde{t}\right)$ – единичная функция Хевисайда, $T_{\max}^*$, $t_{\max}^*$ – максимальное значение внешнего температурного воздействия и соответствующее ему время в размерной форме ($T_{\max}^*$ = 373 K (100 °C), T_0 = 293 K, (20 °C), $t_{\max}^*$ = 1 с).

На рисунке 2 представлены графики изменения приращения температуры в размерной форме $\Theta^*\left(r,0,t\right)$ по радиальной координате в различные моменты времени ($\Theta^*\left(r,0,t\right)=\dfrac{a_7^2\rho}{\gamma}\Theta\left(r,0,t\right)$). Цифрами 1, 2, 3 обозначены результаты, соответствующие: $t=t_{\max},100t_{\max},600t_{\max}$ ($t_{\max}=\dfrac{a_7}{b}t_{\max}^*$).

Результаты расчета показывают, что в рассматриваемом цилиндре вследствие высокой теплопроводности материала достаточно быстро устанавливается постоянный температурный режим, и в этом случае разница температур на цилиндрических поверхностях несущественна и составляет 3 °C.

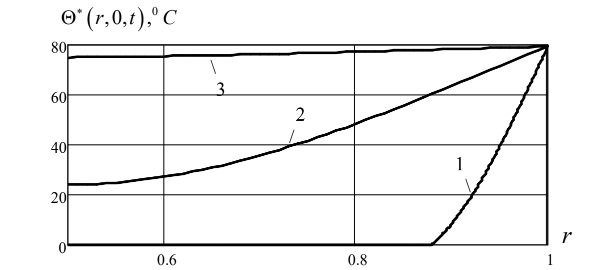

Рис. 2. Изменение $\Theta^*(0, z, t)$ по r: $t = t_{\max}$ (*1*), $t = 100t_{\max}$ (*2*), $t = 600t_{\max}$ (*3*)

На рисунках 3, 4 показано изменение перемещений и напряжений по пространственным переменным в различные моменты времени. При этом аппроксимация температурного поля по радиальной координате в случае $t_{\max}\le t\le 20t_{\max}$ выполнялась с помощью двух линейных функций, а при $t\ge 20t_{\max}$ использовалась линейная зависимость.

На рисунке 3 цифрами *1*, *2* обозначены результаты для $U\left(1,z,t\right),W\left(1,z,t\right)$, а пунктирная и сплошная линии справедливы при $t=t_{\max}$, $600t_{\max}$. На рисунке 4 цифрами *1*, *2*, *3* обозначены нормальные напряжения при $t=t_{\max}$, $200t_{\max}$, $600t_{\max}$.

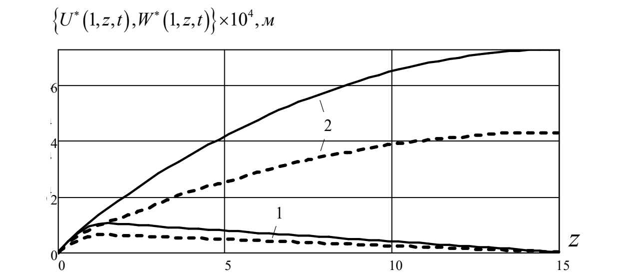

Рис. 3. Изменение перемещений по z: $U^*(1, z, t)$ (*1*), $W^*(1, z, t)$ (*2*), пунктирная линия $t = t_{\max}$, сплошная линия $t = 600t_{\max}$

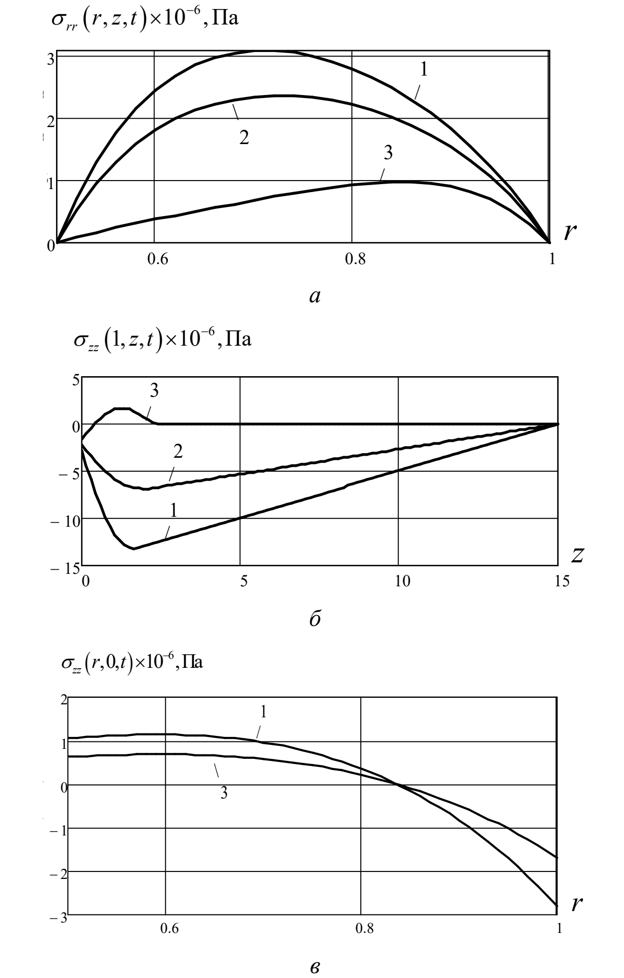

Рис. 4. Изменение напряжений по пространственным переменным: σ_{rr} (r, z, t) – r $(z = 1)$ (*а*), σ_{zz} $(1, z, t)$ – z (*б*), σ_{zz} $(r, 0, t)$ – r, $t = t_{\max}$ (*1*), $t = 100t_{\max}$ (*2*), $t = 600t_{\max}$ (*3*)

4. Обсуждение

Анализ численных результатов позволяет выделить следующее:

– в процессе прогрева цилиндра наблюдается рост компонент вектора перемещений. При этом наибольшие радиальные перемещения образуются в области жесткого закрепления при $z = 1$ за счет характера изменения температурного воздействия $\omega_1^*\left(z_*, t_*\right)$;

– наибольшие нормальные напряжения $\sigma_{rr}(r,z,t)$, за счет наибольших относительных деформаций $\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U}{\partial r}$, $\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{U}{r}$, формируются также при $z = 1$;

– в процессе прогрева конструкции и более равномерного распределения температурного поля нормальные напряжения $\sigma_{rr}\left(r,z,t\right)$, $\sigma_{zz}\left(r,z,t\right)$ снижаются и за исключением зоны жесткого закрепления практически отсутствуют;

– нормальные напряжения в жестком закреплении $\sigma_{zz}\left(r,0,t\right)$ при достижении температурного воздействии наибольших значений $\left(t = t_{\max}\right)$ в процессе дальнейшего изменения температуры $t > t_{\max}$ изменяется несущественно.

5. Заключение

Разработанный алгоритм, позволяющий построить замкнутое решение задачи термоупругости для толстостенного консольно закрепленного упругого цилиндра, можно использовать также при расчете рассматриваемой конструкции в случае учета произвольных осесимметричных граничных условий на цилиндрических поверхностях. В частности, решение применимо при закреплении ее в аксиальной и радиальной плоскостях, а также при учете произвольных условий теплопроводности. Кроме того, разработанный алгоритм можно использовать в качестве тестовых результатов при разработке численных методик расчета.

Список источников

1. Радаев Ю.Н., Таранова М.В. Волновые числа термоупругих волн в волноводе с теплообменом на боковой стенке // Вестн. Сам. гос. техн. ун–та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. №2 (23). С. 53–61.
2. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход. Изд. 2-е доп. М.: Едиториал УРСС, 2004. 296 с.
3. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. Киев: Наук. думка, 1965. 204 с.
4. Sargsyan S.H. Mathematical Model of Micropolar Thermo-Elasticity of Thin Shells // Journal of Thermal Stresses. 2013. Vol. 36. pp. 1200–1216. DOI: 10.1080/01495739.2013.819265
5. Verma K.L. Thermoelastic waves in anisotropic plates using normal mode expansion method // World Academy of Science, Engineering and Technology. 2008. Vol. 37. pp. 573–580.
6. Жорник А.И., Жорник В.А., Савочка П.А. Об одной задаче термоупругости для сплошного цилиндра // Известия ЮФУ. Технические науки. 2012. С. 63–69.
7. Макарова И.С. Решение несвязанной задачи термоупругости с краевыми условиями первого рода // Вестн. Сам.гос. техн. ун–та. Сер. Физ. - мат. науки. 2012. Т. 28. № 3. С. 191–195.
8. Harmatij H., Krol M., Popovycz V. Quasi-Static Problem of Thermoelasticity for Thermosensitive Infinite Circular Cylinder of Complex Heat Exchange // Advances in Pure Mathematics. 2013. Vol. 3. pp. 430–437. DOI: 10.4236/apm.2013.34061
9. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н., Семенов Д.А. Связанные динамические задачи гиперболической термоупругости // Изв. Сарат. ун-та. Нов.сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, № 4. С. 94–127.
10. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н., Ревинский Р.А. Прохождение обобщенной GHIII-термоупругой волны через волновод с проницаемой для тепла стенкой // Изв. Сарат. ун-та. Нов.сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, № 1. С. 59–70.
11. Mubaraki A.M., Althobaiti S., Nuruddeen R.I. Heat and wave interactions in a thermoelastic coaxial solid cylinder driven by laser heating sources // Case Studies in Thermal Engineering. 2022. Vol. 38. DOI: 10.1016/j.csite.2022.102338
12. Сеницкий Ю.Э. К решению связанной динамической задачи термоупругости для бесконечного цилиндра и сферы // Прикл. мех. АН УССР. 1982. Т. 18, № 6. С. 34–41.
13. Лычев С.А. Связанная динамическая задача термоупругости для конечного цилиндра // Вестн. Сам. гос. ун-та. 2003. № 4 (30). С. 112–124.
14. Лычев С.А., Манжиров А.В., Юбер С.В. Замкнутые решения краевых задач связанной термоупругости // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 4. С. 138–154.
15. Шляхин Д.А., Даулетмуратова Ж.М. Нестационарная связанная осесимметричная задача термоупругости для жестко закрепленной круглой пластины // Вестник ПНИПУ. Механика. 2019. № 4. С. 192–200.

References

1. Radaev YN, Taranova MV. Wavenumbers of thermoelastic waves in a waveguide with heat exchange on the lateral wall. *Vestn. Sam. State Tech. Univ., Ser. Phys.–Math. Sci.*, 2011;2(23):53–61. (In Russ.).

2. Shashkov AG, Bubnov VA, Yanovskii SYu. *Wave phenomena of thermal conductivity. System-structural approach*. 2nd ed. Moscow, Editorial URSS, 2004. 296 p. (In Russ.).
3. Kovalenko AD. *Introduction to thermoelasticity*. Kiev: Naukova Dumka, 1965. 204 p. (In Russ.).
4. Sargsyan SH. Mathematical Model of Micropolar Thermo-Elasticity of Thin Shells. *Journal of Thermal Stresses*. 2013;36:1200–1216. DOI: 10.1080/01495739.2013.819265 (In Russ.).
5. Verma KL. Thermoelastic waves in anisotropic plates using normal mode expansion method. *World Academy of Science, Engineering and Technology*. 2008;37:573–580. (In Russ.).
6. Zhornik AI, Zhornik VA, Savochka PA. On a thermoelasticity problem for a solid cylinder. *Izv. YUFU. Tekhn. Nauki*; 2012. pp. 63–69. (In Russ.).
7. Makarova IS. Solution of an uncoupled thermoelasticity problem with first-type boundary conditions. *Vestn. Sam. State Tech. Univ*., *Ser. Phys.–Math. Sci.*, 2012;28(3): 191–195. (In Russ.).
8. Harmatij H, Krol M, Popovycz V. Quasi-Static Problem of Thermoelasticity for Thermosensitive Infinite Circular Cylinder of Complex Heat Exchange. *Advances in Pure Mathematics*. 2013;3:430–437. DOI: 10.4236/apm.2013.34061 (In Russ.).
9. Kovalev VA, Radaev YN, Semenov DA. Coupled dynamic problems of hyperbolic thermoelasticity. *Izv. Sarat. Univ., Ser. Math. Mech. Inform.*, 2009;9(4):94–127. (In Russ.).
10. Kovalev VA, Radaev YN, Revinsky RA. Propagation of a generalized GHIII thermoelastic wave through a waveguide with a heat-permeable wall. *Izv. Sarat. Univ., Ser. Math. Mech. Inform.* 2011;11(1):59–70. (In Russ.).
11. Mubaraki AM, Althobaiti S, Nuruddeen RI. Heat and wave interactions in a thermoelastic coaxial solid cylinder driven by laser heating sources. *Case Studies in Thermal Engineering*, 2022;38. DOI: 10.1016/j.csite.2022.102338 (In Russ.).
12. Senitsky YuE. On the solution of a coupled dynamic problem of thermoelasticity for an infinite cylinder and sphere. *Prikl. Mekh. AN USSR*. 1982;18(6):34–41. (In Russ.).
13. Lychev SA. Coupled dynamic thermoelasticity problem for a finite cylinder. *Vestn. Sam. State Univ.* 2003;(4(30)): 112–124. (In Russ.).
14. Lychev SA, Manzhirov AV, Yuber SV. Closed-form solutions of boundary problems of coupled thermoelasticity. *Izv. RAN. MTT*. 2010;(4):138–154. (In Russ.).
15. Shlyakhin DA, Dauletmuratova ZhM. Unsteady coupled axisymmetric thermoelasticity problem for a rigidly clamped circular plate. *Vestn. PNIPU*. Mech., 2019;(4):192–200. (In Russ.).