

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ КЛЕЕВОГО СОЕДИНЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК РАЗНОЙ ШИРИНЫ

Куреннов С.С.* , Танчик Е.В.

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт»,
ХАИ, ул. Чкалова, 17, Харьков, 61070, Украина

*e-mail: ss_kurennov@mail.ru

Упрощенная двумерная модель соединения Фолькерсена [9] использована для решения задачи о напряженном состоянии клеевого соединения прямоугольных пластин разной ширины. Перемещения элементов несущих слоев в поперечном направлении полагаются равными нулю. Решение имеет вид разложения в ряд по собственным функциям. Коэффициенты ряда находятся из условия ортогональности вектора невязки краевых условий векторам собственных функций. Решена модельная задача, и проведено сравнение полученных результатов с расчетами, выполненными при помощи метода конечных элементов. Показано, что точность метода достаточна для проектирования соединений.

Ключевые слова: клеевое соединение, аналитическое решение, двумерная модель.

Введение

При расчете напряженного состояния соединений в ряде случаев необходимо учитывать неравномерность деформаций по ширине соединения. Построение аналитического решения задачи о двумерном напряженном состоянии соединения в общей постановке является чрезвычайно сложным и пока не осуществлено [2]. В связи с этим предложено два приближенных подхода, которые позволяют получить решение в аналитической форме:

1) для изучения влияния поперечных деформаций, обусловленных коэффициентами Пуассона, на напряженное состояние соединения касательные напряжения и производные от них полагаются равными нулю. Приложенная нагрузка в этом случае должна быть равномерно распределена по сторонам соединения [3–6];

2) для решения задачи о напряженном состоянии соединения при неравномерно приложенной нагрузке перемещения несущих слоев в поперечном направлении полагаются равными нулю.

Гипотеза о равенстве нулю поперечных перемещений ранее была использована при создании уточненной теории балок [7, 8]. В работе [9] с помощью описанного подхода было получено аналитическое решение задачи о напряженном состоянии нахлесточного соединения прямоугольных пластинок одинаковой ширины и дано математическое обо-

снование решения. Эта модель позволяет получить аналитические решения широкого круга новых задач, которые ранее не рассматривались ни одним автором. В данной работе предлагается аналитическое решение задачи о напряженном состоянии симметричного относительно продольной оси клеевого соединения пластинок разной ширины. Примерами таких соединений являются соединения силовых элементов (стрингеров, шпангоутов и т.п.) с обшивкой, которые широко встречаются в конструкциях аэрокосмической техники. Классические одномерные модели соединений позволяют оценить напряженное состояние соединения лишь при малом расхождении ширины соединяемых деталей. Предложенный подход избавлен от этого ограничения.

Постановка задачи

Рассмотрим клеевое соединение двух прямоугольных пластин ($L \times 2h$ и $L \times 2H$), показанное на рис. 1. Ось Ox проходит по оси симметрии соединения. Продольная нагрузка $P(y)$ приложена к первой пластинке вдоль стороны $x = 0$, вторую пластинку вдоль стороны $x = L$ будем считать жестко закрепленной. Функция $P(y)$ четная, чтобы исключить влияние изгиба в плоскости соединения.

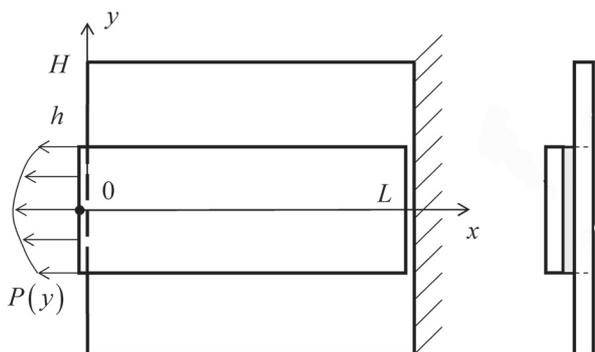


Рис. 1. Схема соединения

Боковые стороны свободны от нагрузки. Несущие слои деформируются только в плоскости соединения, клеевой слой работает только на сдвиг, напряжения равномерно распределены по толщине слоев.

Толщину первого и второго несущих слоев обозначим соответственно δ_1 и δ_2 , толщину соединительного слоя — δ_0 . Уравнения равновесия элементов несущих слоев в общей двумерной постановке задачи приведены в работах [5, 6]. Отсутствие поперечных перемещений в несущих слоях усилия в поперечном направлении и соответствующие касательные напряжения в клее будут равны нулю. Уравнения равновесия элементов несущих слоев в данном случае имеют вид

$$\tau + \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y} = 0; \quad -\tau + \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где N_m, q_m — нормальные (в продольном направлении) и касательные усилия в несущем в слое $m, m=1, 2$; τ — касательные напряжения в клеевом слое в продольном направлении.

Соотношения Коши при условии равенства нулю поперечных перемещений имеют вид

$$N_m = \delta_m E_m \frac{\partial U_m}{\partial x}; \quad q_m = \delta_m G_m \frac{\partial U_m}{\partial y}, \quad m=1, 2,$$

где U_1 и U_2 — продольные перемещения слоев в области склейки.

Напряжения в клеевой прослойке

$$\tau = \frac{G_0}{\delta_0} (U_2 - U_1), \quad (2)$$

где G_0 — модуль сдвига клеевого слоя.

Подставив приведенные выше соотношения в уравнения (1), получим систему

$$\begin{cases} \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right) - U_1 + U_2 = 0; \\ \alpha_2 \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} \right) + U_1 - U_2 = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $\alpha_m = E_m \delta_m \frac{\delta_0}{G_0}$; $\mu_m = \frac{G_m}{E_m}$.

За пределами области склейки перемещения второго слоя при указанных выше гипотезах описываются уравнением [7, 8]

$$\frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 U_3}{\partial y^2} = 0, \quad (4)$$

где U_3 — перемещения второго слоя за пределами области склейки.

Учитывая симметрию, краевые условия можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial U_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial U_1}{\partial y} \Big|_{y=h} = \frac{\partial U_3}{\partial y} \Big|_{y=H} = 0; \quad (5)$$

$$N_1 \Big|_{x=0} = E_1 \delta_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = P(y); \quad (6)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial U_3}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial U_1}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0; \quad (7)$$

$$U_2 \Big|_{x=L} = U_3 \Big|_{x=L} = 0. \quad (8)$$

Условия сопряжения

$$\frac{\partial U_2}{\partial y} \Big|_{y=h} = \frac{\partial U_3}{\partial y} \Big|_{y=h}; \quad U_2 \Big|_{y=h} = U_3 \Big|_{y=h}. \quad (9)$$

Условия (4) представляют собой условия равенства нулю касательных напряжений в несущих слоях вдоль оси симметрии и свободных краев.

Построение решения

Из первого уравнения системы (1) следует

$$U_2 = U_1 - \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right). \quad (10)$$

Подставив (9) во второе уравнение системы (1), найдем

$$\begin{aligned} \beta_1 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_3 \frac{\partial^4 U_1}{\partial y^4} - \\ - \beta_4 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \beta_5 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\beta_1 = \alpha_1 \alpha_2$; $\beta_2 = (\mu_1 + \mu_2) \alpha_1 \alpha_2$;

$$\beta_3 = \mu_1 \mu_2 \alpha_1 \alpha_2; \beta_4 = \alpha_1 + \alpha_2; \beta_5 = \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2.$$

В работе [9] решение уравнения (11) получено при помощи метода разделения переменных при условии $\mu_1 = \mu_2$ и показано, что общее решение уравнения (11) можно представить в виде суммы

$$U_m = W_m(x) + V_m(x, y),$$

где $W_m(x)$ — классическое одномерное решение Фолькерсена; $V_m(x, y)$ — ряд Фурье, составленный из частных решений (11), которые могут быть представлены в виде линейных комбинаций функций $e^{\pm \lambda x} \sin ky$ и $e^{\pm \lambda x} \cos ky$ (как и решение уравнения (4) [7]).

Подставив данные частные решения в (11), получим связывающее λ и k алгебраическое уравнение

$$\beta_3 k^4 + (\beta_5 - \beta_2 \lambda^2) k^2 + \beta_1 \lambda^4 - \beta_4 \lambda^2 = 0, \quad (12)$$

из которого следует, что каждому значению $\pm \lambda$ соответствуют четыре значения k , которые можно записать в форме $\pm k_1(\lambda)$ и $\pm k_2(\lambda)$. Следовательно, частное решение (11), соответствующее, например, положительному λ , имеет вид

$$U_1^* = e^{\lambda x} (S_1 \sin k_1 y + C_1 \cos k_1 y + S_2 \sin k_2 y + C_2 \cos k_2 y),$$

где C_m, S_m — произвольные константы.

Из соотношения (10) находим соответствующие перемещения второго слоя:

$$U_2^* = e^{\lambda x} (S_1 \gamma_1 \sin k_1 y + C_1 \gamma_1 \cos k_1 y + S_2 \gamma_2 \sin k_2 y + C_2 \gamma_2 \cos k_2 y),$$

где $\gamma_m = 1 - \alpha_1 (\lambda^2 - \mu_1 k_m^2)$, $m = 1; 2$.

Все частные решения должны удовлетворять однородным краевым условиям. Из (5) следует $S_1 = S_2 = 0$. Учитывая также, что данные решения справедливы и для $-\lambda$, общее решение (1) можно записать в виде

$$U_m = W_m(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n X_n^{(1)}(x) + B_n X_n^{(2)}(x)] Y_n^{(m)}(y), \quad (13)$$

где A_n, B_n — произвольные коэффициенты;

$$X_n^{(1)} = \frac{\cosh(\lambda_n x)}{\lambda_n \sinh(\lambda_n L)}; Y_n^{(1)} = C_{1,n} \cos k_{1,n} y + C_{2,n} \cos k_{2,n} y;$$

$$X_n^{(2)} = \frac{\cosh(\lambda_n (x - L))}{\lambda_n \sinh(\lambda_n L)};$$

$$Y_n^{(2)} = C_{1,n} \gamma_{1,n} \cos k_{1,n} y + C_{2,n} \gamma_{2,n} \cos k_{2,n} y.$$

Здесь λ_n — ряд значений параметра λ , которые определяются из краевых условий;

$$k_{m,n} = k_m(\lambda_n); \gamma_{m,n} = \gamma_m(\lambda_n);$$

$C_{m,n}$ — константы, определяемые из однородных краевых условий;

$$\lambda_n \sinh(\lambda_n L) — нормирующие множители.$$

В свою очередь,

$$W_m = A_0 x + B_0 + d_m \left(A_0^{(1)} \cosh\left(\frac{x}{\sqrt{\beta_4}}\right) + B_0^{(1)} \cosh\left(\frac{x-L}{\sqrt{\beta_4}}\right) \right),$$

где $d_1 = 1$; $d_2 = -\alpha_1 / \alpha_2$.

Общее решение уравнения (4), удовлетворяющее однородному краевому условию (5), имеет вид

$$U_3 = a_0 x + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{(3)} X_n^{(1)} + B_n^{(3)} X_n^{(2)}) \cos k_{3,n} (y - H), \quad (14)$$

где $k_{3,n} = \lambda_n / \sqrt{\mu_2}$.

При $y = h$ перемещения U_2 и U_3 , а также соответствующие касательные напряжения одинаковы (9). Положим, что это условие выполняется точно, следовательно, перемещения описываются вдоль границы области склейки одинаковыми функциями от x во второй и третьей областях. Отсюда

$$a_0 = A_0, b_0 = B_0, A_0^{(1)} = B_0^{(1)} = 0, A_n^{(3)} = A_n, B_n^{(3)} = B_n.$$

Следовательно, перемещения (13) и (14) можно записать в форме

$$U_m = A_0 x + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n X_n^{(1)}(x) + B_n X_n^{(2)}(x)] Y_n^{(m)}(y), \quad (15)$$

где

$$m = 1, 2, 3; Y_n^{(3)} = C_{3,n} \cos \frac{\lambda_n}{\sqrt{\mu_2}} (y - H).$$

Условия сопряжения (9) и условие отсутствия касательных напряжений на боковой стороне первого несущего слоя (5) приводят к системе однородных линейных уравнений

$$A \cdot \bar{C} = 0, \tag{16}$$

$$A = \begin{pmatrix} \gamma_{1,n} k_{1,n} \sin k_{1,n} h & \gamma_{2,n} k_{2,n} \sin k_{2,n} h & -k_{3,n} \sin k_{3,n} (h - H) \\ \gamma_{1,n} \cos k_{1,n} h & \gamma_{2,n} \cos k_{2,n} h & -\cos k_{3,n} (h - H) \\ k_{1,n} \sin k_{1,n} h & k_{2,n} \sin k_{2,n} h & 0 \end{pmatrix};$$

$$\bar{C} = (C_{1,n}; C_{2,n}; C_{3,n})^T.$$

Система (16) имеет нетривиальное решение, если

$$\det(A(\lambda_n)) = 0. \tag{17}$$

Уравнение (17) имеет бесконечное число корней λ_n . Из системы (15) находим коэффициенты $C_{1,n}, C_{2,n}, C_{3,n}$, соответствующие числам λ_n и определяемые с точностью до произвольного множителя. Для определенности и для облегчения анализа убывания коэффициентов A_n, B_n введем условие нормировки

$$\int_0^h [Y_n^{(1)}]^2 dx + \int_0^h [Y_n^{(2)}]^2 dx + \int_h^H [Y_n^{(3)}]^2 dx = 1,$$

которое накладывает ограничение на коэффициенты $C_{1,n}, C_{2,n}, C_{3,n}$.

Продифференцировав (15), получим усилия в несущих слоях:

$$N_m = E_m \delta_m \left[A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n Z_n^{(1)}(x) + B_n Z_n^{(2)}(x)] Y_n^{(m)}(y) \right]; \tag{18}$$

$$Z_n^{(1)} = \frac{\sinh(\lambda_n x)}{\sinh(\lambda_n L)}; Z_n^{(2)} = \frac{\sinh(\lambda_n (x - L))}{\sinh(\lambda_n L)}.$$

Краевые условия (7), (8) при $x = 0$ и $x = L$ приводят к соотношениям:

$$A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n^{(1)}(y) = \frac{P(y)}{E_1 \delta_1}; \quad y \in (0; h);$$

$$A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n^{(2)}(y) = 0;$$

$$A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n^{(3)}(y) = 0; \quad y \in (h; H);$$

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Y_n^{(1)} = 0; \quad y \in (0; h);$$

$$A_0 L + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \theta_n + B_n \kappa_n] Y_n^{(2)} = 0;$$

$$A_0 L + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \theta_n + B_n \kappa_n] Y_n^{(3)} = 0; \quad y \in (h; H);$$

$$\theta_n = \frac{\cosh(\lambda_n L)}{\lambda_n \sinh(\lambda_n L)}; \quad \kappa_n = \frac{1}{\lambda_n \sinh(\lambda_n L)}.$$

Ограничив суммирование некоторым числом слагаемых N , запишем краевые условия в векторной форме:

$$A_0 \bar{H}_1 + B_0 \bar{H}_2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \bar{W}_n(y) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \bar{Z}_n(y) - \bar{R} = 0, \tag{19}$$

$$\bar{H}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ L \\ L \end{pmatrix}; \quad \bar{H}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{W}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Y_n^{(1)} \\ \theta_n Y_n^{(2)} \\ \theta_n Y_n^{(3)} \end{pmatrix};$$

$$\bar{Z}_n = \begin{pmatrix} -Y_n^{(1)} \\ -Y_n^{(2)} \\ -Y_n^{(3)} \\ 0 \\ \kappa_n Y_n^{(2)} \\ \kappa_n Y_n^{(3)} \end{pmatrix}; \quad \bar{R} = \begin{pmatrix} P(y) \\ E_1 \delta_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Системы функций $Y_n^{(1)}, Y_n^{(2)}, Y_n^{(3)}$ являются переполненными (и, следовательно, неортогональными) на соответствующих интервалах. Это обстоятельство позволяет удовлетворить шести независимым краевым условиям с помощью двух групп ко-

эффицентов A_n и B_n . В работе [10] подобная проблема возникает в ходе решения задачи о вынужденных колебаниях соединения, и для поиска коэффициентов было предложено минимизировать норму вектор-функции отклонения перемещений и скоростей в начальный момент времени от начальных условий.

Вторым возможным подходом является метод ортогонализации правой части равенства (19) некоторой системе линейно независимых вектор-функций \vec{F}_s , $s = 1, 2, \dots, 2N + 2$. Скалярное произведение вводится как сумма интегралов от произведений компонент векторов на соответствующих интервалах. Если в качестве системы линейно независимых функций \vec{F}_s выбрать функции $\vec{H}_1, \vec{H}_2, \vec{W}_s, \vec{Z}_s$, $s = 1, 2, \dots, N$, то оба подхода приводят к системе уравнений

$$M \cdot \vec{A} = \vec{R}. \tag{20}$$

Здесь

$$M = (C; A; B); \vec{A} = (A_0; B_0; A_1; \dots; A_N; B_1; \dots; B_N)^T;$$

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_{2N+2} \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ \dots & \dots \\ c_{2N+2,1} & c_{2N+2,2} \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,N} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{2N+2,1} & \dots & a_{2N+2,N} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,N} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{2N+2,1} & \dots & b_{2N+2,N} \end{pmatrix},$$

где

$$c_{1,1} = 2h + H + L^2 H; c_{1,2} = c_{2,1} = LH;$$

$$r_1 = \frac{1}{E_1 \delta_1} \int_0^h P(y) dy; c_{2,2} = H;$$

$$a_{1,n} = \int_0^h Y_n^{(1)} dy + \theta_n L \int_0^h Y_n^{(2)} dy + \theta_n L \int_h^H Y_n^{(3)} dy;$$

$$b_{1,n} = -\int_0^h Y_n^{(1)} dy + (\kappa_n L - 1) \left(\int_0^h Y_n^{(2)} dy + \int_h^H Y_n^{(3)} dy \right);$$

$$a_{2,n} = \theta_n \left(\int_0^h Y_n^{(2)} dy + \int_h^H Y_n^{(3)} dy \right);$$

$$b_{2,n} = \kappa_n \left(\int_0^h Y_n^{(2)} dy + \int_h^H Y_n^{(3)} dy \right); r_2 = 0;$$

$$c_{s+2,1} = \int_0^h Y_s^{(1)} dy + \theta_s L \left(\int_0^h Y_s^{(2)} dy + \int_h^H Y_s^{(3)} dy \right); c_{n+2,2} = a_{2,n};$$

$$a_{s+2,n} = \int_0^h Y_n^{(1)} Y_s^{(1)} dy + \theta_s \theta_n \left(\int_0^h Y_n^{(2)} Y_s^{(2)} dy + \int_h^H Y_n^{(3)} Y_s^{(3)} dy \right);$$

$$r_{s+2} = 0; b_{s+2,n} = \theta_s \kappa_n \left(\int_0^h Y_n^{(2)} Y_s^{(2)} dy + \int_h^H Y_n^{(3)} Y_s^{(3)} dy \right);$$

$$c_{n+2+N,2} = b_{2,n}; a_{s+2+N,n} = b_{s+2,n}; c_{s+2+N,1} = b_{1,s};$$

$$b_{s+2+N,1} =$$

$$= \int_0^h Y_s^{(1)} Y_n^{(1)} dy + (1 + \kappa_n \kappa_s) \left(\int_0^h Y_s^{(2)} Y_n^{(2)} dy + \int_h^H Y_s^{(3)} Y_n^{(3)} dy \right);$$

$$r_{N+s+2} = -\frac{1}{E_1 \delta_1} \int_0^h P(y) Y_s^{(1)} dy; s = 1, 2, \dots, N; n = 1, 2, \dots, N.$$

Функции $Y_n^{(m)}$ представляют собой линейные комбинации тригонометрических функций, коэффициенты при которых являются ограниченными вследствие введенного выше условия нормировки. Аргументами тригонометрических функций являются выражения вида $k_{m,n} y$, где $k_{m,n}$ при достаточно больших значениях пропорциональны n . Следовательно, внедиагональные элементы матрицы системы (20), которые достаточно удалены от диагонали, пропорциональны $(ns)^{-1}$. Это позволяет сделать вывод о том, что ряд, составленный из квадратов внедиагональных коэффициентов, сходится, т.е. решение бесконечной системы линейных уравнений (20) можно получить с помощью метода редукции.

Численный пример

В качестве примера рассмотрим соединение, имеющее следующие параметры: $\delta_1 = \delta_2 = 2$ мм, $E_1 = E_2 = 70$ ГПа (алюминий), $G_1 = G_2 = 25$ ГПа, $\delta_0 = 0,3$ мм, $G_0 = 0,5$ ГПа, $L = 50$ мм, $h = 30$ мм,

$H = 100$ мм. Нагрузку будем считать равномерно распределенной по торцу верхней пластинки и равной единице $P = 1$ Н/м. Противоположная сторона второго слоя жестко закреплена.

На рис. 2 показан график распределения касательных напряжений в клее в области $(0; L) \times (0; h)$ (половина области склейки).

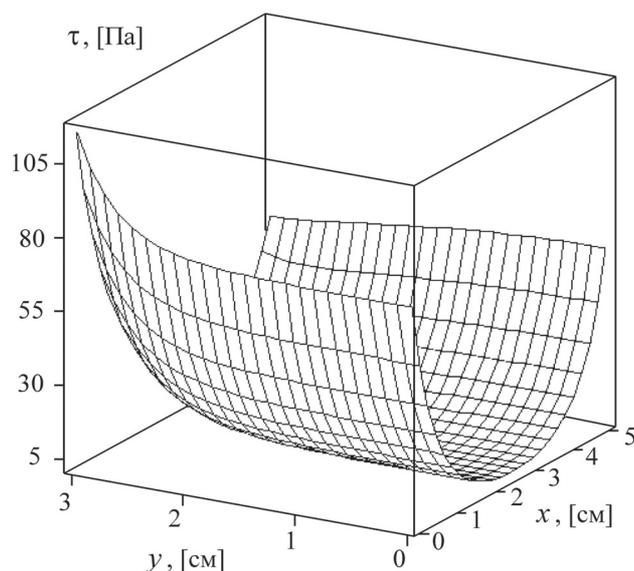


Рис. 2. Напряжения в клеевом слое

Напряжения неравномерны по ширине соединения, и напряжения вдоль боковой кромки превышают напряжения в глубине шва. Для верификации предложенной методики сравним результаты счета с расчетами, выполненными при помощи метода конечных элементов (МКЭ). Расчет напряженного состояния соединения при помощи МКЭ проводился в пакете ANSYS 14.0. Для расчета использована трехмерная модель, генерация сетки автоматическая в пластинах, в клее сетка регулярная. Характерный размер трехмерных элементов в клее 0,15 мм. В зонах контакта пластин с клеевым слоем использовано «улучшение» (Refinement) конечно-элементной сетки (стандартными средствами Ansys Workbench). Перемещения в вертикальной плоскости внешних сторон несущих слоев равны нулю. На торце узкой пластинки заданы нормальные напряжения $\sigma_x = P / \delta_1$. На рис. 3 показаны графики касательных напряжений шва в продольном направлении в срединной плоскости клеевого слоя на границе области $y = \pm h$.

Из приведенных графиков видно, что результаты вычислений практически совпадают на большей части длины соединения и различаются, как и следовало ожидать, лишь у краев клеевого шва. Обус-

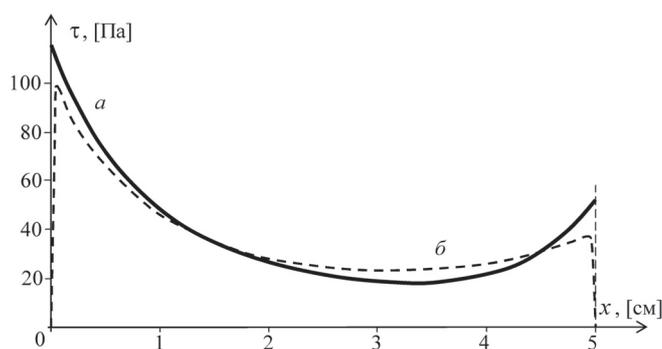


Рис. 3. Напряжения вдоль боковой стороны, рассчитанные с помощью предложенного подхода (а) и МКЭ (б)

ловлено это тем, что внешние края клеевого слоя свободны от нагрузки и касательные напряжения в клее на концах соединения равны нулю вследствие закона парности касательных напряжений. Напряжения достигают максимума на расстоянии порядка толщины клеевого шва от края соединения и близки к значениям, полученным в результате расчета по предложенной методике. Касательные напряжения в клее в поперечном направлении, обусловленные эффектом Пуассона и в предложенной модели не учитываемые, не превосходят 10% от напряжений в продольном направлении. Следовательно, полные касательные напряжения в клеевом шве, определяемые с помощью МКЭ, не превосходят максимальных касательных напряжений, которые находятся по предложенной методике.

Для построения приведенных выше графиков вычислялось 80 первых значений λ_n . Расчеты показали, что величина N оказывает влияние только на коэффициенты A_n и B_n с номерами, близкими к N . Коэффициенты A_n и B_n убывают немонотонно с ростом n . Численные эксперименты показали, что абсолютные значения коэффициентов A_n и B_n можно мажорировать числовым рядом, коэффициенты которого пропорциональны n^{-2} . Это говорит об устойчивости счета и о хорошей сходимости решения. Следовательно, ряды (15) и (18) сходятся равномерно, а перемещения (15) допускают двукратное дифференцирование и удовлетворяют уравнениям (3).

Выводы

Решена задача о напряженном состоянии клеевого соединения пластинок разной ширины. Решение получено в рамках упрощенной модели, в которой не учитываются деформации, обусловленные коэффициентами Пуассона. Расчеты показывают, что точность предложенной приближенной методики достаточна для решения инженерных

задач. Данный подход может быть использован для построения аналитических решений задач о напряженном состоянии клеевых соединений силовых элементов конструкции с обшивкой; соединений, имеющих дефекты в клеевом слое; соединений ремонтных накладок с обшивкой и других типов задач, где требуется знать двумерное напряженное состояние клеевого соединения.

Библиографический список

1. *Артюхин Ю.П.* Напряжения в клеевых соединениях // Исследования по теории пластин и оболочек. — Киев: Изд-во КГУ, 1973. Вып. 10. С. 3-27.
2. *Рябенков Н.Г., Артюхин Ю.П.* Определение напряжений клея в соединении двух полубесконечных пластин // Исследования по теории пластин и оболочек. 1981. №16. С. 82-90.
3. *Карпов Я.С.* Соединения деталей и агрегатов из композиционных материалов. — Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2006. — 359 с.
4. *Adams R.D., Peppiatt N.A.* Effect of Poisson's ratio strains in adherends on stresses of an idealized lap joint // *Journal of Strain Analysis*, 1973, vol. 8 (2), pp. 134-139.
5. *Mathias J.D., Grediac M., Balandraud X.* On the bidirectional stress distribution in rectangular bonded composite patches // *International Journal of Solids and Structures*, 2006, vol. 43, pp. 6921-6947.
6. *Kurennov S.S.* An Approximate Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Analytical Solution // *Mechanics of Composite Materials*, 2014, vol. 50, no. 1, pp. 105-114.
7. *Васильев В.В., Боков Ю.В.* Исследования напряженного состояния клеевого соединения композиционного материала с металлическим листом // Проектирование, расчет и испытания конструкций из композиционных материалов. — М.: ЦАГИ, 1979. Вып. 7. С. 4-10.
8. *Васильев В.В., Лурье С.А.* О сингулярности решения в плоской задаче теории упругости для консольной полосы // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2013. № 4. С. 40-49.
9. *Куреннов С.С.* Упрощенная двумерная модель клеевого соединения. Учет неравномерного приложения загрузки // *Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: Сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»*. 2014. Вып. 2 (78). С. 45-56.
10. *Куреннов С.С.* Динамические напряжения в нахлесточном клеевом соединении // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2014. Т.2. №2. С. 292-303.

CALCULATION OF THE STRESS STATE OF A GLUE JOINT OF RECTANGULAR PLATES WITH DIFFERENT WIDTHS

Kurennov S.S.* , Tanchik E.V.

*National Aerospace University named after N.E. Zhukovsky "Kharkov Aviation Institute",
KhAI, 17, Chkalova str., Kharkov, 61070, Ukraine*

**e-mail: ss_kurennov@mail.ru*

Abstract

The article is devoted to the issue of the dayconcerning calculation of the stress state of the overlapping glue joint in two-dimensional formulation. The purpose of the work is to solve the problem of glue joint stress state of symmetrical rectangular plates with different width under longitudinal load. For the first time we obtained the solution of the problem in analytical form. To build the solution we used simplified Volkersentwo-dimensional model, according to which connecting layers are considered to be rigid in transverse direction. The hypothesis of the plates rigidness in transverse direction was implemented earlier for creation refined theory of beams. The author developed this theory for connection of two plates. The outer layers

work only in tension and compression in the longitudinal direction and shift. The adhesive layer is a shear layer. The stresses assumed to be constant over the thickness of the glued layers. The stresses in the adhesive layer are proportional to the difference between the displacements of the outer layers. Due to joint symmetry and imposed stiffness layers hypothesis, there is no movements of layers in the transverse direction. In the gluing area, the stress state is described by a system of two, second order partial differential equations with respect to the longitudinal movements of the outer layers. Outside the gluing area the movements of a wider layer are described by a second order partial differential equations with respect to the longitudinal displacements. Solution of the equations is build as a series expansion in the eigen

functions. Eigen values are found from homogeneous boundary conditions at the lateral sides of the connection and the conjugation conditions on the limit of the bonding domain and the outer edge of wider plates. The corresponding eigen functions are not orthogonal. Coefficients of the series are found from the orthogonality condition of the residual vector of boundary conditions to the eigenfunctions vectors.

The model problem is solved, and the obtained data was compared with calculations based on implementation of the finite elements method. Calculations have shown that the accuracy of the method is sufficient for designing such connections.

Keywords: glue joint, analytical solution, two-dimensional model.

References

1. Artyukhin Yu.P. *Issledovaniya po teorii plastin i oboloček*, Kiev, KGU, 1973, no. 10, pp. 3-27.
2. Ryabenkov N.G., Artyukhin Yu.P. *Issledovaniya po teorii plastin i oboloček*, 1981, no. 16, pp. 82-90.
3. Karpov Ya.S. *Soedineniya detalei i agregatov iz kompozitsionnykh materialov* (Joints of parts and assemblies made of composite materials), Kharkov, Natsional'nyi aerokosmicheskii universitet "Khar'kovskii aviatsionnyi institut", 2006, 359 p.
4. Adams R.D., Peppiatt N.A. Effect of Poisson's ratio strains in adherends on stresses of an idealized lap joint, *Journal of Strain Analysis*, 1973, vol. 8, no. 2, pp. 134-139.
5. Mathias J.D., Grediac M., Balandraud X. On the bidirectional stress distribution in rectangular bonded composite patches, *International Journal of Solids and Structures*, 2006, vol. 43, pp. 6921-6947.
6. Kurennov S.S. An Approximate Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Analytical Solution, *Mechanics of Composite Materials*, 2014, vol. 50, no. 1, pp. 105-114.
7. Vasil'ev V.V., Bokov Yu.V. *Proektirovanie, raschet i ispytaniya konstruktssii iz kompozitsionnykh materialov*, Moscow, TsAGI, 1979, no.7, pp. 4-10.
8. Vasil'ev V.V., Lur'e S.A. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2013, no. 4. pp. 40-49.
9. Kurennov S.S. *Voprosy proektirovaniya i proizvodstva konstruktssii letatel'nykh apparatov. Sbornik nauchnykh trudov*, Natsional'nyi aerokosmicheskii universitet "Khar'kovskii aviatsionnyi institut", 2014, vol. 78, no. 2, pp. 45-56.
10. Kurennov S.S. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktssii*, 2014, vol. 2, no. 2, pp. 292-303.