

На правах рукописи

Кондратьева Людмила Александровна

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ
ПОДВОДНЫХ И ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Специальность 01.02.01 – Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена на кафедре «Математическая кибернетика» в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, профессор Галиуллин Ильяс Абдэльхакович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Гребеников Евгений Александрович
	доктор физико-математических наук, профессор Мухарлямов Роберт Гарабшевич
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»

Защита состоится «27» апреля 2012 г. в 12 ч. 00 мин. на заседании Диссертационного совета Д 212.125.14 Московского авиационного института (национального исследовательского университета) по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, Ученый совет МАИ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета).

Отзыв на автореферат, заверенный гербовой печатью организации, просьба направлять по указанному адресу в двух экземплярах.

Автореферат разослан «__» _____ 2012 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета Д 212.125.14
кандидат физико-математических наук,
доцент

_____ Гидаспов В.Ю.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы.

Обратные задачи занимают важное место в исследовании теоретико-механических моделей. Математически строгая формулировка понятия обратных задач динамики была дана А.С. Галиуллиным. Соответствующая тематика получила интенсивное развитие в работах его последователей, прежде всего, И.А. Мухаметзянова и Р.Г. Мухарлямова, причем, начиная с работы И.А. Галиуллина, стало возможным исследовать подобные задачи не только в евклидовых пространствах, но и на произвольных дифференцируемых многообразиях.

Многие обратные задачи динамики связаны с условиями программного движения аэрогидродинамических или космических аппаратов, т.е. с выбором функций управления или параметров аппарата, обеспечивающих его движение по траектории с заданными свойствами. Типичным примером такого рода является решённая В.Т. Грумондзом задача о движении по винтовой линии центра динамически симметричного подводного аппарата.

Важной проблемой является устойчивость соответствующего программного движения относительно параметров процесса. Разные классы подобного рода обратных задач механики рассматривались в работах А.С. Галиуллина, Р.Г. Мухарлямова, О.М. Алифанова, Е.А. Гребеникова и Ю.А. Митропольского. В частности, задача о движении геостационарного спутника решена Е.А. Гребениковым, Ю.А. Митропольским и Ю.А. Рябовым. Общим вопросам динамики космических аппаратов посвящены работы В.В. Белецкого. Устойчивость движения спутников изучалась А.П. Маркеевым и О.В. Холостовой. В монографии Ю.А. Митропольского, О.Б. Лыковой определяется эволюция свободных (при отсутствии всех возмущений кроме влияния силы тяжести) орбит спутников и исследуется устойчивость этих орбит. Перспективное направление, связанное с малыми космическими аппаратами как эволюционной ступенью перехода к микро и наноспутникам в последнее время развивается О.М. Алифановым.

В работах И.А. Мухаметзянова рассматривался вопрос о приближённом программном движении в механических системах и об оценке его отклонения от точного движения. Фактически, задачи определения управляющих элементов, обеспечивающих наиболее точное приближенное движение по заданному дискретному набору характеристик программного движения, являются как обратными, так и аппроксимационными.

Большое значение имеет задача аналитического приближения программного движения и оценки его погрешности, решаемая с помощью тех или иных методов анализа обыкновенных дифференциальных уравнений. Одной из наиболее эффективных процедур для решения подобных задач является версия метода гармонического баланса, описанная в работах Б. Деламотта и Д. Поланда. Весьма важной является задача выбора управления, обеспечивающего устойчивое периодическое движение механического объекта в том или ином фазовом пространстве, что в математической формулировке означает существование устойчивого предельного цикла для соответствующей системы дифференциальных уравнений. Методы решения данной задачи на плоскости хорошо известны, однако

уже в размерности 3 возникают существенные трудности. С этой точки зрения весьма полезен восходящий к Н.М. Крылову, Н.Н. Боголюбову метод интегральных многообразий и, как его обобщение, развитый Р. Смитом, М. Миклавичем, А.В. Романовым метод инерциальных многообразий, позволяющий в ряде случаев сводить изучение стационарных режимов исходной n -мерной динамической системы к аналогичной двумерной задаче. Упомянутый выше метод гармонического баланса обычно применяется к дифференциальным уравнениям второго порядка, и представляет интерес его обобщение на уравнения более высоких порядков.

Ряд обратных задач аэродинамики сводится к интегральным или интегро-дифференциальным уравнениям. Эффективным инструментом решения таких уравнений, служит, как отмечено в работах А.И. Задорина, метод сплайн-коллокации.

Таким образом, получение условий, обеспечивающих движение подводного аппарата по желаемой траектории, космического аппарата по замкнутой орбите, определение аэродинамических характеристик крыла при сверхзвуковом обтекании методами обратных задач динамики с применением методов инерциальных многообразий, гармонического баланса, сплайн-функций является актуальным с точки зрения теории и практики.

Целью работы является развитие и исследование применимости методов теории обратных задач в моделировании некоторых стационарных процессов динамики:

- 1) применительно к движению подводных аппаратов по заданной траектории;
- 2) в исследовании движения космического аппарата при облете материального или геометрического центра по траектории, асимптотически приближающейся к замкнутой орбите, причём в этой связи развивается и теория дифференциальных уравнений в той ее области, которая изучает предельные циклы и их устойчивость в фазовом пространстве;
- 3) при определении аэродинамических характеристик прямоугольного крыла летательного аппарата в сверхзвуковом потоке.

Методы исследования. В работе используются: методы построения уравнений программного движения; методы качественного исследования систем дифференциальных уравнений, в том числе метод инерциальных многообразий; аппроксимационные методы решения систем дифференциальных уравнений; аппроксимационные методы решения интегро-дифференциальных уравнений на основе теории сплайн-функций.

Научная новизна. В диссертации представлены следующие основные результаты, имеющие научное и прикладное значение.

1. На основе методов обратных задач динамики получены условия в форме системы алгебраических уравнений, при которых центр величины подводного аппарата со смещенным центром масс движется по винтовой линии; показано, что заданного движения можно достичь, варьируя лишь углы отклонения элеронов.
2. На основе понятия инерциального многообразия решена обратная задача выбора функций управления спутником (представляемым материальной точкой),

обеспечивающих его полёт вокруг небесного объекта в заданной плоскости с полярными координатами (r, φ) по замкнутой устойчивой (в обобщённых координатах $(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$) траектории. Показано, что в реальных пространственных координатах соответствующее движение будет периодическим или условно-периодическим в зависимости от соотношений между параметрами системы.

3. На основе одной из версий метода гармонического баланса найдены аналитические приближения для замкнутых устойчивых орбит космического аппарата в фазовых координатах $(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$, а также оценки периода обращения. Показано, что геометрическая форма соответствующих приближённых орбит близка к эллипсу. Получены уравнения данных орбит в исходных полярных координатах (r, φ) .
4. Решена обратная задача определения динамических характеристик прямоугольного крыла летательного аппарата при сверхзвуковом обтекании по исходной кинематической характеристике, а именно, потенциалу скоростей, который строится с использованием сплайн-функций.

Практическая ценность. Результаты работы имеют теоретический характер и, вместе с тем, могут представлять интерес для оборонной и космической промышленности:

- при проектировании подводных аппаратов;
- при создании систем управления космическим аппаратом на различных участках полета;
- при создании систем слежения и выбора устойчивых траекторий облета космического объекта, например, управление спутником-инспектором для диагностики и устранения причин выхода из строя других космических аппаратов;
- при выборе элементов аэродинамической компоновки летательных аппаратов на стадии предварительного проектирования;
- при изучении вопросов допустимой аппроксимации программного движения, а также вопросов его устойчивости.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и симпозиумах:

- Sixth International Symposium on Classical and Celestial Mechanics, Moscow – Velikie Luki, 2007;
- XI, XII, XIV-XVI Международный научно-технический семинар «Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации», Алушта: 2002, 2003, 2005-2007.

Достоверность результатов обеспечивается: строгостью постановок задач и утверждений; корректным использованием математических моделей современной теории обыкновенных дифференциальных уравнений; рассмотрением численных примеров, демонстрирующих адекватность полученных теоретических выводов.

Публикации Основные результаты работы опубликованы в статьях [1-4] в журналах, входящих в Перечень ВАК, в других изданиях [5, 6], а также в материалах научных конференций [7-12].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы (78 источников), 12 рисунков и 1 таблицы. Объем диссертации – 108 м.п.с.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении даётся обзор различных направлений развития обратных задач динамики. Данная теория имеет свою историю, восходящую к работам Ньютона, Гельмгольца и Биркгофа, российских ученых Сулова, Горячева и Жуковского, французских ученых Пуанкаре и Картана.

В формулировке А.С. Галиуллина обратные задачи динамики – это задачи по определению приложенных к механической системе активных сил и моментов, а также параметров данной системы и наложенных на неё связей, при которых становится возможным одно из движений с заданными свойствами.

Классическая постановка обратной задачи связана с определением параметров механической системы, обеспечивающих движение с заданными свойствами. На этой основе в диссертации рассматривается винтовое движение подводного аппарата.

Другой подход, реализованный в работе, связан с нахождением функций управления космическим объектом, гарантирующих существование для него замкнутой устойчивой орбиты в соответствующем фазовом пространстве. В этой связи успешно используется адаптированная к конечномерному случаю теория инерциальных многообразий. Для соответствующего устойчивого периодического движения удаётся с хорошей точностью получить приближённые аналитические выражения, а также значение периода.

Решена также обратная задача определения динамических характеристик (распределение давлений и коэффициент давления) крыла летательного аппарата при сверхзвуковом обтекании по исходной кинематической характеристике, а именно, потенциалу скоростей. В качестве эффективного инструмента при этом используется метод сплайн-функций. Приведен пример расчета аэродинамических характеристик прямоугольного крыла.

Первая глава использует ставшие уже классическими методы решения обратных задач динамики в евклидовых фазовых пространствах. При этом заданной полагается интегральная кривая, которую можно воспринимать как траекторию в реальном пространстве. На этой основе решена важная техническая задача о движении центра подводного аппарата по винтовой линии. Для определенных целей такое поведения аппарата является весьма желательным. Впервые его обнаружил и описал В.Т. Грумондз для динамически симметричного твердого тела в жидкости. В настоящей работе доказана возможность подобного движения для тела со смещенным центром масс, что весьма существенно для практики конструирования подводных аппаратов.

В разделе 1.1 описывается модель движения твердого тела в жидкости¹ при отсутствии сил вязкости. Рассматриваются следующие векторные уравнения движения аппарата в предположении, что его моделью служит твердое тело, а формой и движением Земли можно пренебречь:

$$\begin{aligned} \frac{d \bar{Q}}{d t} + \bar{\omega} \times \bar{Q} &= \bar{G} + \bar{A} + \bar{T} \quad , \\ \frac{d \bar{L}_O}{d t} + \bar{\omega} \times \bar{L}_O + \bar{V}_O \times \bar{Q} &= \bar{M}^G + \bar{M}^A + \bar{M}^T. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь: \bar{Q} , \bar{L}_O – соответственно количество движения и кинетический момент тела и идеальной жидкости. В правой части первого уравнения учитываются внешние силы, а именно (см. рис.1): сила тяжести \bar{G} с координатами точки приложения x_c, y_c, z_c ; гидродинамическая архимедова сила \bar{A} ; сила тяги \bar{T} . Векторные величины в правой части второго уравнения представляют собой моменты сил относительно центра величины O .

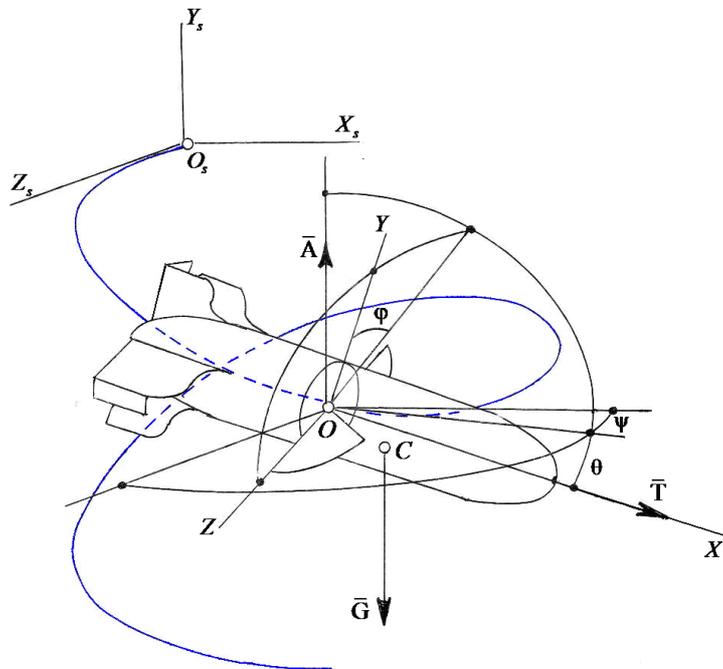


Рис.1

Проецируя векторные уравнения (1.1) на связанные оси координат, имеем шесть соотношений, содержащих следующие величины:

u, v, w – компоненты вектора скорости \bar{V}_O точки O ;

p, q, r – компоненты угловой скорости тела $\bar{\omega}$;

K_{ij} – безразмерные коэффициенты, которые вычисляются через симметричную (6×6) -матрицу присоединенных масс $\{\lambda_{ij}\}$, характеризующих инерционность и форму аппарата;

$c_x, c_y, c_z, m_x, m_y, m_z$ – аэрогидродинамические характеристики.

В свою очередь, аэрогидродинамические характеристики представляют собой полуэмпирические зависимости от следующих величин:

¹ Грумондз В.Т., Яковлев Г.А. Алгоритмы аэрогидробаллистического проектирования. М.: Изд-во МАИ, 1994.

коэффициентов вращательных производных компонент
аэрогидродинамической силы $c_y^\alpha, c_y^\delta, c_y^r, c_z^\beta, c_z^\delta, c_z^q$;
коэффициентов вращательных производных аэрогидродинамических моментов
 $m_z^\alpha, m_z^\delta, m_z^r, m_y^\beta, m_y^\delta, m_y^q$;
углов отклонения рулей $\delta_\Gamma, \delta_B, \delta_\Delta$, соответственно, горизонтальных,
вертикальных и элеронов.

Кроме того, в проекции уравнений (1.1) входят углы φ, ψ, θ , определяющие положение связанных осей относительно земных (см. рис.1), так что

$$\begin{aligned} p &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \sin \theta, \\ q &= \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r &= -\dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi. \end{aligned}$$

В разделе 1.2 дана постановка задачи определения стационарного движения подводного аппарата со смещенным центром масс, обладающего тем свойством, что траекторией его геометрического центра служит винтовая линия с вертикальной осью.

При этом предполагается, что:

- 1) угол атаки α и угол скольжения β , определяющие вектор скорости в связанных осях, равны нулю;
- 2) шаг винтовой линии постоянный, т.е. $\theta = \theta_0 = \text{const}$;
- 3) угол крена аппарата постоянный, т.е. $\varphi = \varphi_0$;
- 4) угловая скорость прецессии аппарата постоянна, т.е. $\dot{\psi} = \omega_e = \text{const}$;
- 5) углы отклонения рулей $\delta_\Gamma, \delta_B, \delta_\Delta$ постоянны;
- 6) моменты инерции вдоль осей Y и Z полагаются равными и в силу динамической симметрии аппарата имеют место соотношения

$$\begin{aligned} m_z^\alpha &= m_y^\beta, & m_z^\delta &= m_y^\delta, & m_z^r &= m_y^q, \\ c_y^\alpha &= -c_z^\beta, & c_y^\delta &= -c_z^\delta, & c_y^r &= -c_z^q. \end{aligned}$$

В этой постановке обратной задачи задана траектория движения аппарата, требуется найти соотношения, определяющие такое движение.

В разделе 1.4 решена задача определения стационарного движения аппарата со смещенным центром масс при допущениях 1) – 6). В принятых допущениях компоненты p_0, q_0, r_0 угловой скорости и $\omega_0 = |\bar{\omega}| = \sqrt{p_0^2 + q_0^2 + r_0^2}$ постоянны.

В этом случае проецирование уравнений (1.1) на связанные оси даёт систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $p_0, q_0, r_0, V_{OB}, \delta_\Gamma, \delta_B, \delta_\Delta$. Пусть выполняются следующие условия:

- 1) $\text{tg } \varphi_0 = y_c / z_c$;
- 2) $c_x = m_x b$, что достигается подбором угла δ_Δ , от которого зависят величины c_x и m_x .

Тогда можно найти величину V_0 и значение $\sin \theta_0$ ($\theta_0 < 0$) через компоненты угловой скорости p_0, q_0, r_0 при некотором фиксированном значении δ_3 . С учетом динамической симметрии аппарата находится, также, постоянная угловая скорость ω_0 . По условию $\dot{\phi} = \omega_r = 0$, следовательно, центр аппарата будет обращаться вокруг вертикальной оси цилиндра, на котором расположена винтовая линия, с угловой скоростью $\dot{\psi} = \omega_e = \omega_0$. При этом радиус и шаг пространственной спирали определяются соотношениями:

$$R = V_0 \cos \theta_0 \sqrt{\frac{l}{n \sin |\theta_0|}}, \quad h = V_0 \sin |\theta_0| \sqrt{\frac{l}{n \sin |\theta_0|}},$$

где постоянная величина n зависит от параметров механической системы.

Таким образом, в первой главе получено развитие методики решения обратной задачи о движении подводного динамически симметричного аппарата со смещенным центром масс по винтовой линии. Определены необходимые для этого значения угловой скорости и скорости геометрического центра аппарата, а также шаг и радиус пространственной спирали. Найдены условия, при которых заданного движения можно достичь, варьируя лишь углы отклонения элеронов, что позволяет конструировать подобные аппараты, не ограничиваясь необходимостью обеспечения полной симметрии.

Во второй главе объектом исследования служит летательный аппарат, совершающий облет космического тела по плоской орбите и моделируемый материальной точкой. Как известно, интеграл кинетического момента определяет особенность траекторий материальной точки в каком-либо центральном (в том числе гравитационном) поле, состоящую в том, что они необходимо являются плоскими кривыми. Предполагается, что сам объект, вокруг которого совершает облёт летательный аппарат, имеет пренебрежимо малую массу. Это может быть другой летательный аппарат или небесное тело небольших размеров, например, недавно открытые спутники Урана. Заметим, что своего рода «центр орбиты» может вообще не представлять собой материальный объект, а быть фиксированной геометрической точкой в пространстве, некоторым навигационным центром.

В данной работе рассматривается класс систем трёх обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка, для которых удаётся установить существование устойчивого предельного цикла. Показано, что при подходящем выборе управляющих сил уравнения такого типа описывают плоское движение летательного аппарата и, таким образом, позволяют установить наличие устойчивой периодической орбиты в фазовых переменных $(r, \dot{r}, \dot{\phi})$, где (r, φ) – исходная полярная система координат в фиксированной плоскости обращения спутника.

Существование устойчивого предельного цикла для рассмотренного класса систем дифференциальных уравнений доказывается с помощью адаптированной к конечномерному случаю техники, основанной на понятии инерциального многообразия. В общем случае инерциальное многообразие (ИМ)² гладкого

² Miklavcic M. A sharp condition for existence of an inertial manifold // J. Dyn. Differ. Eq. 1991. V.3, №3. P.437-456.

диссипативного полупотока в (конечномерном или бесконечномерном) евклидовом фазовом пространстве X – это гладкая или липшицева инвариантная (интегральная) конечномерная поверхность $H \subset X$, экспоненциально и равномерно притягивающее при большом времени каждое ограниченное множество $D \subset X$. Данное многообразие содержит в себе глобальный аттрактор, т.е. совокупность всех ограниченных целых (существующих при любом времени $t \in (-\infty, +\infty)$) траекторий соответствующей динамической системы. В частности, ИМ содержит все точки покоя и замкнутые траектории данной системы.

Показано, что в реальных пространственных координатах $(r, \dot{r}, \dot{\phi})$ -устойчивое периодическое движение летательного аппарата оказывается периодическим или условно-периодическим в зависимости от определённых соотношений между параметрами механической системы.

В данной главе особенно подчёркивается актуальная связь обратных задач с задачами теории управления; для соответствующих функций управления получены явные формулы, а дальнейшая инженерная задача состоит в том, чтобы построить необходимые элементы двигателей, позволяющих реализовать желаемое движение.

В разделе 2.2 применен метод инерциальных многообразий для трёхмерных систем дифференциальных уравнений с выделенной симметричной линейной частью.

Обычно, инерциальные многообразия рассматривались в связи с изучением финальной динамики нелинейных параболических уравнений в частных производных. Между тем, это понятие оказалось полезным и при изучении систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, так как позволяет сводить задачу описания финальной динамики системы с n степенями свободы к соответствующей задаче для индуцированной системы с m степенями свободы ($m < n$, где m – размерность ИМ). Долгое время единственной работой, в которой рассматривался подобный подход, была статья Р. Смита³. В данной работе теория инерциальных многообразий была использована для сведения изучаемой там трёхмерной динамической системы на двумерное инерциальное многообразие, что дало возможность использовать теорию Пуанкаре–Бендиксона для обнаружения устойчивых предельных циклов. Технику инерциальных многообразий в конечномерных задачах динамики можно рассматривать как плодотворное развитие хорошо известных методов теории интегральных многообразий⁴.

Для класса рассматриваемых в данном разделе систем ОДУ в случае нечётного векторного поля доказана центральная симметричность периодических орбит (лемма 2.1).

В разделе 2.3 принимаются следующие исходные предпосылки относительно рассматриваемой динамической системы спутник – центр обращения.

1. Согласно интегралу кинетического момента материальная точка в центральном (в том числе, гравитационном) поле движется по плоской кривой.

³ Smith R.A. Poincare index theorem concerning periodic orbits of differential equations // Proc. London Math. Soc., (3). 1984. V.48, №2. P.341-362.

⁴ Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973.

2. Спутник массы m моделируется материальной точкой, на которую действуют управляющие силы с радиальной F_r и трансверсальной F_φ компонентами.
3. Объект исследования имеет пренебрежимо малую массу: это может быть другой летательный аппарат, или небесное тело небольших размеров, или просто точка в пространстве.
4. Относительное движение объекта исследования либо криволинейное с малой скоростью и малой кривизной траектории, либо прямолинейно (с постоянной скоростью), так что можно пренебречь переносной и кориолисовой силами инерции.

В предположениях 1-4 динамика летательного аппарата описывается уравнениями

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \quad m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_\varphi. \quad (2.1)$$

При этом ставится обратная задача выбора радиальной и трансверсальной управляющих сил, обеспечивающих устойчивое периодическое движение спутника в фазовых переменных $(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$, где (r, φ) – полярная система координат в плоскости его обращения.

Пусть управляющие силы $F_r(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$ и $F_\varphi(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$ определены соотношениями

$$F_r = m[\mu_2^2 r^2 - r\dot{\varphi}^2 - (\mu_1 + \mu_2)(\dot{r} + \mu_2 r) + g(\dot{\varphi})],$$

$$F_\varphi = m[(2\dot{r} - \mu_3 r)\dot{\varphi} + r^2]$$

с постоянными $\mu_1, \mu_2, \mu_3 > 0$ и некоторой гладкой функцией $g(\dot{\varphi})$. Тогда, произведя линейную замену переменных

$$x_1 = \dot{r} + \mu_2 r, \quad x_2 = r, \quad x_3 = \dot{\varphi}, \quad (2.2)$$

исходные уравнения движения спутника (2.1) можно записать в виде трёхмерной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\mu_1 x_1 + g(x_3), \\ \dot{x}_2 = -\mu_2 x_2 + x_1, \\ \dot{x}_3 = -\mu_3 x_3 + x_2, \end{cases} \quad (2.3)$$

которая является основным объектом исследования во второй и третьей главах работы.

Каждому выбору управляющих параметров μ_1, μ_2, μ_3 и допустимой управляющей функции $g(\dot{\varphi})$ соответствует вариант управления спутником.

В разделе 2.4 сформулирована основная теорема данной главы. В ней получены аналитические условия на управляющую функцию $g(x_3)$ и управляющие параметры μ_1, μ_2, μ_3 , при которых для системы (2.3) существует устойчивый предельный цикл. Тем самым установлена возможность устойчивого периодического движения спутника в координатах $(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть гладкая управляющая функция $g(x_3)$ в системе уравнений (2.3) удовлетворяет условиям:

$$0 < g(x_3) \leq m \quad |g'(x_3)| \leq 1 \text{ для } x_3 \in (-\infty, +\infty);$$

$$\exists v > 0: g'(v) = -h < 0 \quad \frac{g(v)}{v} = \mu_1 \mu_2 \mu_3.$$

Тогда, если для упорядочения $\lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3$ управляющих параметров μ_1, μ_2, μ_3 справедливы оценки

$$h + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3), \quad \lambda_3 - \lambda_2 > 2, \quad (2.4)$$

то система (2.3) обладает устойчивым предельным циклом. Таким образом, соответствующие радиальная и тангенциальная управляющие силы

$$F_r = m \left[\mu_2^2 r^2 - r \dot{\phi}^2 - (\mu_1 + \mu_2)(\dot{r} + \mu_2 r) + g(\dot{\phi}) \right],$$

$$F_\phi = m \left[(2\dot{r} - \mu_3 r) \dot{\phi} + r^2 \right]$$

обеспечивают для спутника с массой m существование устойчивой замкнутой орбиты в фазовом пространстве $(r, \dot{r}, \dot{\phi})$.

При этом последовательно доказывается:

- а) единственность точки покоя $x^* = \left(\frac{g(v)}{\mu_1}, \frac{g(v)}{\mu_1 \mu_2}, v \right)$ системы (2.3);
- б) её неустойчивость (критерий Рауса – Гурвица);
- в) существование двумерного инерциального многообразия в \mathbb{R}^3 с последующим применением теории Пуанкаре – Бендиксона.

На рис.2,3 представлены изображения двух различных приближающихся к устойчивому предельному циклу траекторий движения спутника в центрированных

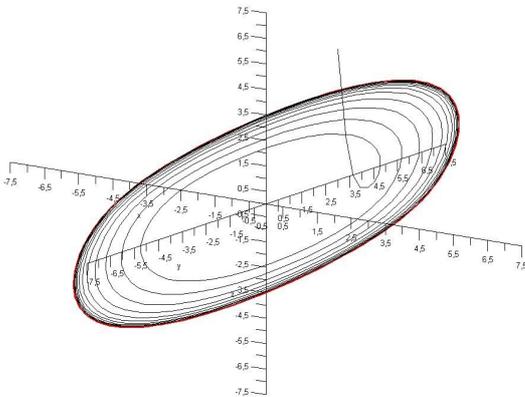


Рис.2

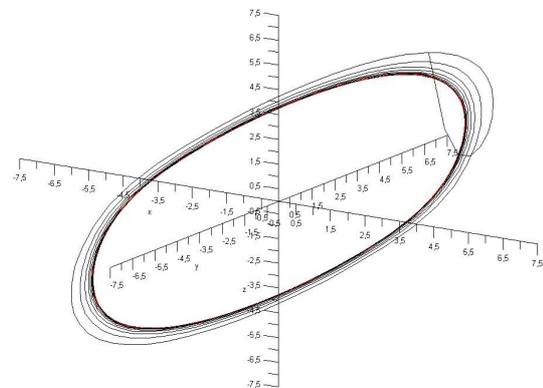


Рис.3

фазовых переменных

$$x_1 = \dot{r} + \mu_2 r - \frac{\pi}{2\mu_1}, \quad x_2 = r - \frac{\pi}{2\mu_1 \mu_2}, \quad x_3 = \dot{\phi} - \frac{\pi}{2\mu_1 \mu_2 \mu_3} \quad (2.5)$$

с управляющей функцией

$$g(\dot{\phi}) = \text{arctg}(\dot{\phi} - v), \quad v = \frac{\pi}{2\mu_1 \mu_2 \mu_3}, \quad (2.6)$$

единственной стационарной точкой $x^* = (0, 0, 0)$ и значениями управляющих параметров $\mu_1, \mu_2 = 0.05, \mu_3 = 2.1$.

Перечислены также возможные альтернативные по сравнению с (2.6) варианты выбора управляющей функции $g(x_3)$ в системе уравнений (2.3).

Движение спутника рассмотрено в трёх различных системах координат, а именно: в физически значимых координатах $(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$, обобщённых координатах (2.2) и (для случая управляющей функции (2.6)) в центрированных координатах (2.5). Данные системы переменных связаны между собой линейными преобразованиями, не нарушающими топологию фазового портрета и свойства устойчивости траекторий, а значит, условия теоремы 2.2 обеспечивают существование замкнутой устойчивой орбиты летательного аппарата в каждом из соответствующих фазовых пространств.

В разделе 2.5 рассматривается вопрос о том как выглядит $(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$ -устойчивое T -периодическое движение летательного объекта в реальных полярных координатах (r, φ) , действующих в его плоскости обращения. Поскольку $x_2(t) = r(t)$ в системе уравнений (2.3), то соответствующая радиальная компонента данного движения T -периодична.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть движение спутника в координатах (r, φ) отвечает его устойчивому T -периодическому (с частотой $\omega = \frac{2\pi}{T}$) движению в переменных $(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$, существующему при условиях теоремы 2.2 на управляющие силы

$$F_r = m[\mu_2^2 r^2 - r\dot{\varphi}^2 - (\mu_1 + \mu_2)(\dot{r} + \mu_2 r) + g(\dot{\varphi})], \quad F_\varphi = m[(2\dot{r} - \mu_3 r)\dot{\varphi} + r^2].$$

Если число $\theta = \frac{\omega}{\bar{\omega}}$, где $\bar{\omega} = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\varphi}(t) dt$ – средняя за период угловая скорость

движения спутника, иррационально, то его плоское движение будет условно-периодическим. В случае рационального числа θ данное движение будет периодическим. Если при этом $\theta = \frac{k}{l}$, где k, l – целые положительные взаимно простые числа, то за время lT космический аппарат совершит k оборотов вокруг центра обращения и его плоское движение будет периодическим с периодом lT .

В разделе 2.6 безотносительно к задаче о движении спутника получены представляющие самостоятельный интерес результаты о существовании периодических решений для векторных и скалярных нелинейных дифференциальных уравнений определённого типа.

Условия $g(x_3) > 0$, $\nu > 0$ в условиях основной теоремы 2.2 нужны лишь для того, чтобы обеспечить (необходимое в данной физической задаче, связанной с вращением спутника) сохранение положительности переменных $r(t)$, $\dot{\varphi}(t)$ при возрастании времени. Если же абстрагироваться от этой ситуации и ставить вопрос о существовании устойчивого периодического движения у произвольной трёхмерной системы уравнений вида (2.3), то можно сформулировать следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.5. Предположим, что гладкая функция $g(x_3)$ в системе дифференциальных уравнений (2.3) удовлетворяет условиям:

$$|g(x_3)| \leq m \text{ и } |g'(x_3)| \leq 1 \text{ на } \mathbb{R};$$

$$\exists v \in \mathbb{R}: g'(v) = -h < 0 \text{ и } \mu_1 \mu_2 \mu_3 v = g(v).$$

Тогда, если для упорядочения $\lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3$ величин μ_1, μ_2, μ_3 справедливы оценки (2.4), то система (2.3) обладает устойчивым предельным циклом.

Система уравнений (2.3) сводится к скалярному уравнению третьего порядка

$$y''' + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)y'' + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)y' + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 y = g(y) \quad (2.7)$$

относительно неизвестной $y(t) = x_3(t)$ с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$.

ТЕОРЕМА 2.6. В условиях теоремы 2.5 на положительные параметры $\lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3$ и гладкую функцию $g(x_3)$ уравнение вида (2.7) обладает периодическим решением $y(t)$.

В главе 3 для описанной выше математической модели движения спутника с управляющей функцией вида (2.6) решена задача аналитической аппроксимации его устойчивой замкнутой орбиты в фазовых координатах (r, \dot{r}, φ) и оценки периода обращения. С этой целью использован метод^{5,6} аналитической локализации периодических решений дифференциальных уравнений с полиномиальными нелинейностями, а также систем таких уравнений. Суть метода состоит в замене искомого периодического решения начальным отрезком ряда Фурье с неопределёнными коэффициентами, а также значением периода, и последующим нахождением указанных параметров из соответствующих систем нелинейных алгебраических уравнений. Данная процедура соответствует общей идеологии метода гармонического баланса и даёт хорошие результаты в случаях, когда удаётся сравнить приближённые и точные периодические решения.

Соответствующий подход обладает рядом преимуществ по сравнению с другими возможными: например, с методом Крылова–Боголюбова–Митропольского, вариационными методами, а также различными методами теории возмущений и теории бифуркаций. Во-первых, метод гармонического баланса не связан с наличием в системе малого параметра и позволяет находить периодические решения с большой амплитудой, а во-вторых, оказывается весьма простым в применении, хотя при его реализации возникают достаточно сложные системы нелинейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье и периода приближённого периодического решения.

Показано, что для рассматриваемой модели движения уже на третьем (а в ряде случаев даже на первом) шаге метода удаётся получить (с приемлемой точностью) аналитические приближения для искомого устойчивого периодического решения, а также оценить его период. Точность приближений оценивается величиной относительной невязки. Оказывается, что в центрированных фазовых координатах (2.5) полученные замкнутые орбиты близки к эллиптическим, причём уравнения эллипсов выписываются в явном виде через управляющие параметры рассматриваемой механической системы.

⁵ Delamotte B. Nonperturbative (but approximate) method for solving differential equations and finding limit cycles // Physical Review Letters. 1993. V.70, №22. P.3361-3364.

⁶ Poland D. Loci of limit cycles // Physical Review E. 1994. V.49, №1. P.157-165.

Ранее метод гармонического баланса обычно применялся к нелинейным дифференциальным уравнениям второго порядка. В данной работе исходная система уравнений (2.3) сводится к одному уравнению третьего порядка, которое после дифференцирования превращается в уравнение четвёртого порядка с квадратичной нелинейностью. Такое повышение порядка приводит к существенному усложнению возникающих систем алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье и периода искомого приближения. С другой стороны показано, что в аппроксимативных отрезках ряда Фурье достаточно учитывать лишь нечётные гармоники и, тем самым, ускорить сходимость соответствующей вычислительной процедуры. На третьем шаге метода возникает система из семи алгебраических уравнений шестой степени и полученная аппроксимация при выбранных значениях управляющих параметров движения спутника даёт удовлетворительную точность 3.6%.

Установлено, что для двух альтернативных по сравнению с (2.6) вариантов управления спутником его устойчивая замкнутая орбита также может быть приближённо найдена с помощью метода гармонического баланса.

В разделе 3.3 после перехода к центрированным координатам (2.5) уравнения движения спутника (2.3) с управляющей функцией (2.6) приобретают вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\mu_1 x_1 - \arctg x_3, \\ \dot{x}_2 = -\mu_2 x_2 + x_1, \\ \dot{x}_3 = -\mu_3 x_3 + x_2. \end{cases} \quad (3.1)$$

Данная система сводится к скалярному дифференциальному уравнению третьего порядка, которое после дифференцирования превращается в уравнение четвёртого порядка

$$(1 + y^2)(y^{(4)} + \alpha_1 y''' + \alpha_2 y'' + \alpha_3 y') + y' = 0 \quad (3.2)$$

относительно $y(t) = x_3(t)$ с коэффициентами

$$\alpha_1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \quad \alpha_2 = \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 + \mu_2 \mu_3, \quad \alpha_3 = \mu_1 \mu_2 \mu_3 \quad (3.3)$$

и квадратичной нелинейностью.

В разделе 3.4 описывается применение метода гармонического баланса к уравнению (3.2). Показано, что в данной ситуации можно ограничиться начальными отрезками ряда Фурье с нечётными гармониками. На шаге N приближённое периодическое решение уравнения (3.2) ищется в виде

$$y(t) = \sum_{k=1}^N (b_k \sin(2k-1)\omega t + c_k \cos(2k-1)\omega t).$$

Компоненты $x_1(t), x_2(t)$ приближённого периодического решения $X^{(N)}(t)$ системы (3.1) легко восстанавливаются по третьей компоненте $x_3(t) = y(t)$. В качестве меры правдоподобия данного решения предлагается относительная невязка

$\delta_o = \frac{\|\delta(t)\|}{\|y(t)\|}$, где $\delta(t)$ – невязка $X^{(N)}(t)$ относительно (3.1) и $\|\cdot\|$ – равномерная норма периодических функций. Фактически, $\delta(t)$ – это невязка первого из уравнений (3.1), тогда как два других уравнения удовлетворяются точно.

В разделе 3.5 процедура аналитической аппроксимации искомого периодического движения спутника численно реализована при значениях управляющих параметров $\mu_1, \mu_2 = 0.05$, $\mu_2 = 2.1$, обеспечивающих согласно теореме 2.2 существование устойчивого предельного цикла для системы уравнений (2.3), а значит и для индуцированной системы (3.1). В качестве пороговой точности принимаем $\bar{\delta}_o = 0.05$. В результате трёх шагов метода ($N=1,2,3$) получаем последовательные приближения $X^{(1)}(t)$, $X^{(2)}(t)$, $X^{(3)}(t)$. Заданная точность $\bar{\delta}_o$ удовлетворяется лишь на третьем шаге, а именно: $\delta_o^{(1)} = 0.150$, $\delta_o^{(2)} = 0.068$, $\delta_o^{(3)} = 0.036$. Приближённое T -периодическое решение $X^{(3)}(t)$ системы уравнений (3.1) имеет вид

$$\begin{cases} x_1(t) = -0.352 \sin \omega t + 3.029 \cos \omega t - 0.006 \sin 3\omega t + 0.176 \cos 3\omega t - 0.0005 \sin 5\omega t + 0.027 \cos 5\omega t \\ x_2(t) = 6.471 \sin \omega t + 1.480 \cos \omega t + 0.129 \sin 3\omega t + 0.009 \cos 3\omega t + 0.012 \sin 5\omega t + 0.0005 \cos 5\omega t \\ x_3(t) = 3.089 \sin \omega t + 0.033 \cos \omega t + 0.045 \sin 3\omega t - 0.025 \cos 3\omega t + 0.003 \sin 5\omega t - 0.003 \cos 5\omega t \end{cases}$$

с $\omega = 0.457$ и $T = \frac{2\pi}{\omega} = 13.760$. Периоды приближений $X^{(1)}(t)$, $X^{(2)}(t)$, $X^{(3)}(t)$

практически не зависят от номера шага. Именно: $T_1 = 13.630$, $T_2 = 13.688$, $T_3 = 13.760$, так что значение T_3 можно принять за удовлетворительную оценку периода точного периодического решения $\bar{X}(t)$ системы (3.1).

На рис.4 приведен график невязки $\delta(t)$ приближённого решения $X^{(3)}(t)$.

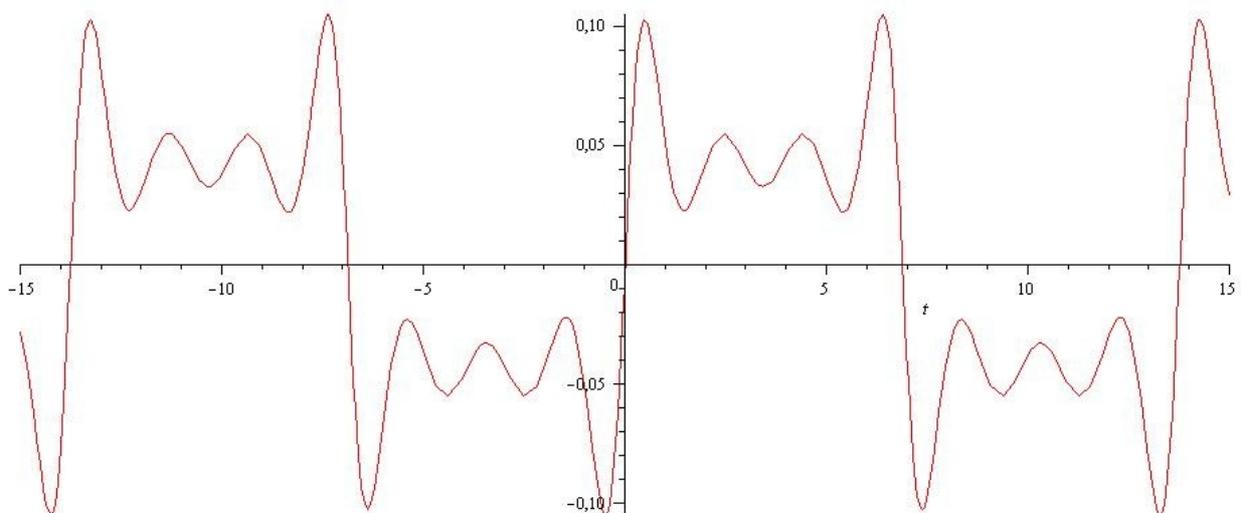


Рис.4

На рис.5 представлены три последовательные аналитические приближения $X^{(1)}(t)$, $X^{(2)}(t)$, $X^{(3)}(t)$, а также предельный цикл $\bar{X}(t)$, построенный численными

методами в пакете MAPLE 11. Видно, что амплитуда аппроксимирующих орбит увеличивается с ростом номера шага.

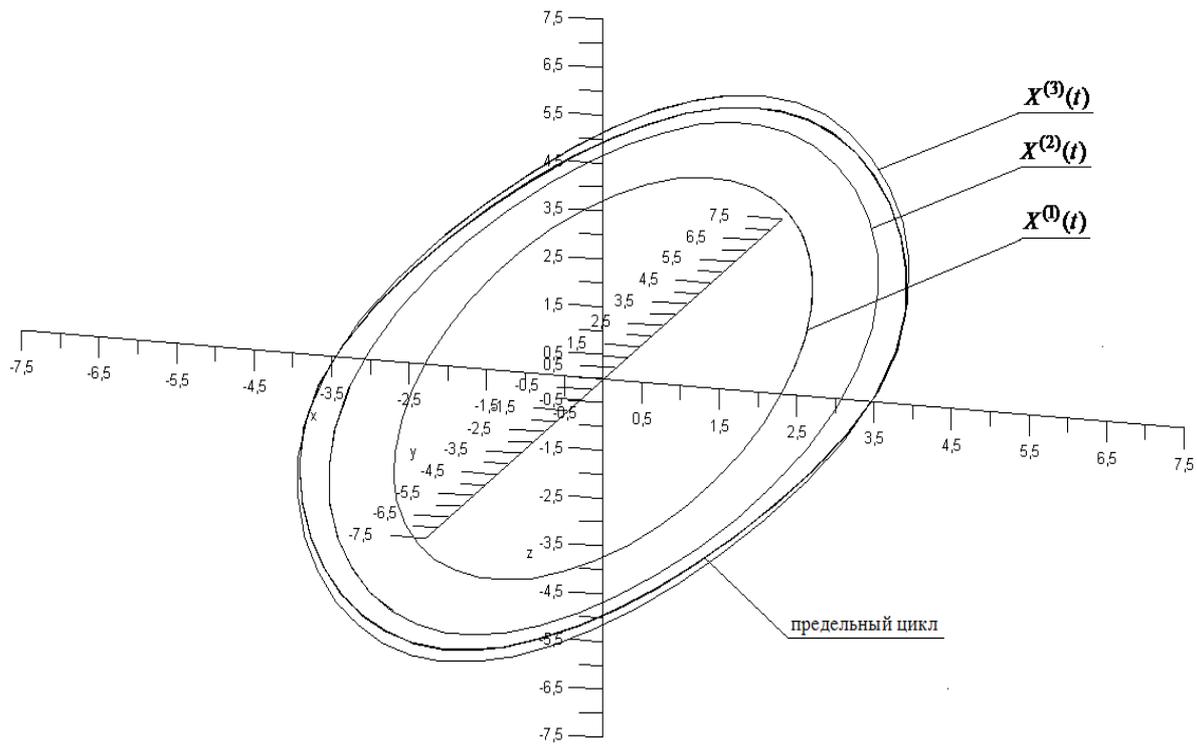


Рис.5. Решения $X^{(1)}(t)$, $X^{(2)}(t)$, $X^{(3)}(t)$ и предельный цикл $\bar{X}(t)$.

В реальных полярных координатах (r, φ) приближенному решению $X^{(3)}(t)$ системы (3.1) соответствует аппроксимативная траектория летательного аппарата:

$$r(t) = 628.32 + 6.471 \sin \omega t + 1.480 \cos \omega t + 0.129 \sin 3\omega t + 0.009 \cos 3\omega t + 0.012 \sin 5\omega t + 0.0005 \cos 5\omega t,$$

$$\varphi(t) = 6.793 + 299.2 t - 6.759 \cos \omega t + 0.072 \sin \omega t - 0.0328 \cos 3\omega t - 0.0182 \sin 3\omega t - 0.0013 \cos 5\omega t - 0.0013 \sin 5\omega t$$

со значением частоты $\omega = 0.457$ и $\varphi(0) = 0$.

В разделе 3.6 полагаем $\lambda_1 = \lambda_2 = \varepsilon$, $\lambda_3 = 2 + 2\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon} = 0.095$, для упорядочения $\lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3$ управляющих параметров μ_1, μ_2, μ_3 . В этих условиях теорема 2.2 гарантирует существование устойчивого предельного цикла для системы уравнений (3.1). Первый шаг ($N = 1$) метода гармонического баланса для (3.1) приводит к приближенному периодическому решению $X^{(1)}(t)$ вида

$$\begin{cases} x_1(t) = -b\mu_1(\mu_2 + \mu_3) \sin \omega t + b\omega(\mu_2 + \mu_3) \cos \omega t \\ x_2(t) = b\mu_3 \sin \omega t + b\omega \cos \omega t \\ x_3(t) = b \sin \omega t \end{cases} \quad (3.4)$$

с $\omega = \sqrt{\alpha_2}$ и $b = 2\sqrt{\gamma^{-1} - 1}$, где $\gamma = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_3$, коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ определены соотношениями (3.3) и $0 < \gamma < 1$. Кривая (3.4) представляет собой эллипс в

центрированных координатах (2.5). При этом оказывается, что для $X^{(1)}(t)$ относительная невязка $\delta_o \rightarrow 0$ как при $\varepsilon \rightarrow 0$ так и при $\varepsilon \rightarrow \bar{\varepsilon}$. Итак, в данных предположениях на поведение величины ε (а значит, и на параметры μ_1, μ_2, μ_3) уже на первом шаге метода получаем хорошее (эллиптическое) приближение искомого предельного цикла.

В разделе 3.8 показано, что метод гармонического баланса для приближённого аналитического определения устойчивого периодического движения спутника можно применить в случае двух альтернативных по сравнению с (2.6) вариантов выбора управляющей функции $g(x_3)$ в системе уравнений (2.3):

$$1) \quad g(x_3) = c - \sin(x_3 - \nu) \quad c > 1, \quad \nu = \frac{c}{\mu_1 \mu_2 \mu_3};$$

$$2) \quad g(x_3) = \frac{8}{3\sqrt{3}(1 + (x_3 - \nu + \sigma)^2)} \quad c \quad \nu = \frac{2}{\sqrt{3}\mu_1 \mu_2 \mu_3}, \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

В случае 1) функция $g(x_3)$ эффективно приближается многочленами Маклорена, а в случае 2) производная $g'(x_3)$ рациональна. Таким образом, в обеих ситуациях систему (2.3) можно свести к скалярному дифференциальному уравнению с полиномиальной нелинейностью. При выбранных значениях ν, σ устойчивый предельный цикл системы (2.3) существует для наиболее широкого диапазона управляющих параметров $\mu_1, \mu_2, \mu_3 > 0$.

В четвёртой главе решена обратная задача определения динамических характеристик прямоугольного крыла летательного аппарата при сверхзвуковом обтекании по исходной кинематической характеристике, а именно, потенциалу скоростей. Представлена методика расчета процесса обтекания тонкой несущей поверхности стационарным сверхзвуковым потоком сжимаемой идеальной жидкости. В качестве аппарата численного решения данной задачи применяется теория сплайнов. По сравнению с классическим аппаратом приближения многочленами сплайн-функции обладают важными преимуществами: лучшими аппроксимативными свойствами и удобством компьютерной реализации построенных на их основе вычислительных процедур.

В разделе 4.2 рассматривается обратная задача определения значений интенсивности слоя диполей на поверхности крыла $\Delta\varphi$ по заданной нормальной компоненте *резльтирующей скорости потока* на данной поверхности (условие непротекания). Граничное условие на несущей поверхности для *потенциала возмущённых скоростей* $\varphi(x, y, z)$ с учетом постоянной *скорости набегающего потока* V_∞ имеет вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} + V_\infty \sin \alpha = 0 \quad \text{или, для крыла расположенного в плоскости } Oxy:$$

$$-V_{\infty} \sin \alpha = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial}{\partial x} \iint_{\Omega} \frac{z(x-x_1) \Delta\varphi(x_1, y_1) dx_1 dy_1}{[(y-y_1)^2 + z^2] \sqrt{(x-x_1)^2 - \beta^2(y-y_1)^2 - \beta^2 z^2}}, \quad (4.1)$$

где Ω – часть поверхности крыла (рис.6) лежащая внутри обратного конуса Маха с вершиной в точке (x, y, z) , $\beta^2 = M^2 - 1$, M – число Маха набегающего потока.

Таким образом, задача сводится к решению интегро-дифференциального уравнения⁷ (4.1) относительно функции $\Delta\varphi$ распределения интенсивности слоя диполей на поверхности крыла.

Градиент $\nabla\varphi$ потенциала возмущенных скоростей

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \iint_{\Omega} \frac{z(x-x_1) \Delta\varphi(x_1, y_1) dx_1 dy_1}{[(y-y_1)^2 + z^2] \sqrt{(x-x_1)^2 - \beta^2(y-y_1)^2 - \beta^2 z^2}},$$

если найдена функция $\Delta\varphi$, определяет скорость течения газа в каждой точке области возмущенного потока внутри конуса Маха (рис.6), а также на поверхности крыла.

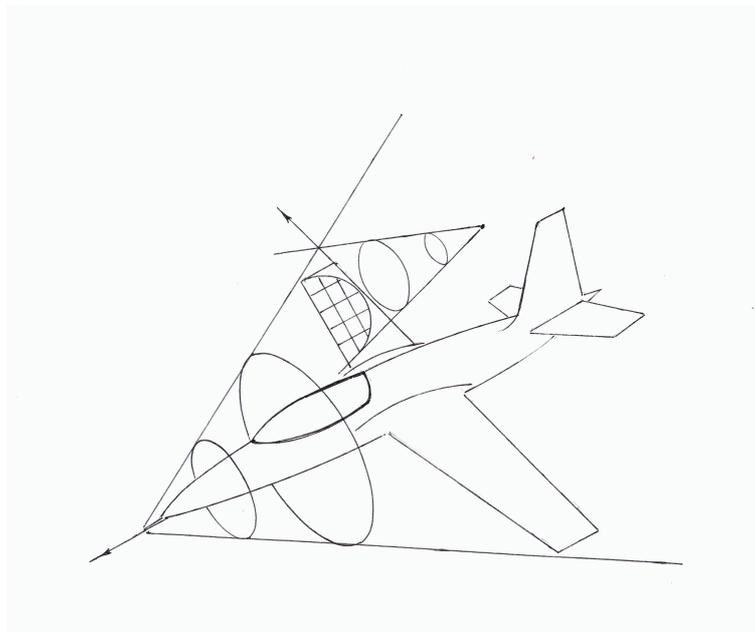


Рис.6

Окончательный шаг в решении обратной задачи состоит в определении распределения давления $p(x, y, z)$ по формуле Бернулли

$$p - p_{\infty} = -\rho V_{\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\rho}{2} \left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 \right),$$

где ρ – плотность газа, p_{∞} – давление в бесконечно удалённой точке.

Величина коэффициента давления на крыле определяется из линеаризованного уравнения Бернулли $C_p = -\frac{2}{\beta} \frac{\partial\varphi}{\partial x}$.

В разделе 4.3 интегро-дифференциальное уравнение (4.1) решается методом сплайн-коллокации, т.е. аппроксимируется системой линейных алгебраических

⁷ Сирс У.Р. (ред.). Общая теория аэродинамики больших скоростей М.: Воениздат, 1962.

уравнений. Эта система получается разделением поверхности на малые прямоугольные элементы P_{ij} в предположении, что скачок потенциала $\Delta\varphi$ представляется в виде многочлена 2-го порядка на каждом элементе. При этом значения производной потенциала $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ в каждом узле коллокации можно получить в аналитическом виде, суммируя по всем элементам P_{ij} (внутри обратного конуса Маха), на которые разделена несущая поверхность.

Точно удовлетворяя уравнение (4.1) в узлах коллокации, получаем $m \times n$ систему линейных алгебраических уравнений. Условия построения двумерного параболического сплайна класса C^1 дают дополнительные соотношения и замыкают систему.

Матрица полученной системы линейных уравнений обращается аналитически, так что все необходимые для определения аэродинамических характеристик крыла производные получаются в виде аналитических зависимостей без применения численного дифференцирования.

Распределение давления (формула Бернулли), поле скоростей и коэффициент давления могут быть получены через градиент потенциала возмущенных скоростей $\varphi(x, y, z)$ после построения сплайна для функции распределения интенсивности слоя диполей $\Delta\varphi$ на поверхности крыла.

В разделе 4.4 приведен пример расчета аэродинамических характеристик прямоугольного крыла в сверхзвуковом потоке. Приведены сравнительные значения коэффициентов давления, рассчитанные по данной методике и на основе теории конических течений.

Таким образом, задача расчета аэродинамических характеристик при сверхзвуковом обтекании прямоугольного крыла рассмотрена с позиции разновидности обратной задачи. Предложена математическая модель, а также алгоритм ее реализации, основанной на методе сплайн-коллокации. В предложенной методике расчета не используются приемы численного интегрирования и дифференцирования.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

В работе представлены следующие основные результаты, имеющие научное и прикладное значение.

1. С использованием классических методов обратных задач динамики решена задача о движении подводного аппарата по винтовой линии в предположении, что его центр масс смещён относительно оси динамической симметрии. Найдены условия существования желаемой траектории. Показано, что заданное движение достигается при определенных углах отклонения элеронов.
2. С помощью техники инерциальных многообразий установлено существование устойчивого предельного цикла для класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и показано, что при соответствующем выборе функций управления такие системы описывают плоское движение летательного аппарата вокруг некоторого центра вращения. Тем самым установлена возможность облета спутником исследуемого объекта по плоской траектории в реальном трёхмерном пространстве. Данное движение является T -периодическим и устойчивым в переменных $(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$, где (r, φ) – полярная система координат в плоскости вращения летательного аппарата. В исходных пространственных координатах движение спутника оказывается периодическим или условно-периодическим в зависимости от явно выписанных аналитических соотношений между величиной периода T и средней за период угловой скоростью.
3. На примере указанного выше класса систем получил развитие метод гармонического баланса как инструмент приближенного аналитического вычисления периодических траекторий скалярных или векторных дифференциальных уравнений с полиномиальными нелинейностями. Показано, что в рассматриваемом случае периодического движения материальной точки, воспринимаемой как космический аппарат небольшого размера, уже на первых шагах метода удаётся с приемлемой точностью получить аналитические аппроксимации для замкнутой устойчивой (в переменных $(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$) орбиты спутника и оценить величину периода обращения. Показано, что при определенных условиях приближённые орбиты имеют форму эллипса.
4. Решена обратная задача определения динамических характеристик несущей поверхности летательного аппарата при сверхзвуковом обтекании по исходной кинематической характеристике, а именно, потенциалу скоростей. Метод сплайн-функций рассматривается как эффективный инструмент построения численно-аналитических алгоритмов решения таких обратных задач. Приведен пример расчета аэродинамических характеристик прямоугольного крыла.

Публикации в журналах перечня ВАК

1. Галиуллин И.А., Кондратьева Л.А. Движение подводного аппарата по пространственной спирали // Вестник Московского авиационного института. 2007. Т.14, №2. С.41-46.

- 2 Кондратьева Л.А. Обратные краевые задачи на многообразиях // Вестник Российского университета дружбы народов, Серия Математика. Информатика. Физика. 2010. №1. С.34-38.
- 3 Галиуллин И.А., Кондратьева Л.А. Спутниковые инерциальные многообразия и предельные циклы // Космонавтика и ракетостроение. 2011. №3(64). С.73-76.
- 4 Кондратьева Л.А. Приближённое аналитическое вычисление устойчивой периодической орбиты спутника // Вестник Московского авиационного института. 2012. Т.19, №1. С.75-80.

Публикации в других изданиях

- 5 Кондратьева Л.А. Расчёт аэродинамических характеристик при сверхзвуковом обтекании прямоугольного крыла // Сб. научн. трудов: «Экспериментальное и теоретическое исследование аэродинамических характеристик ЛА и его частей». М.: Изд-во МАИ, 1983. С.26-28.
- 6 Кондратьева Л.А. Аппроксимационная обратная задача для предельных циклов // Качественное и численное исследование математических моделей динамических систем. Межвуз. сб. научн. трудов. М.: Изд-во РГОТУПС, 2006. С.72-75.

Доклады на научных конференциях

- 7 Галиуллин И.А., Кондратьева Л.А. Тезисы доклада «К вопросу о программном движении подводного аппарата», Труды XIV международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации». Алушта, 2005 г.
- 8 Кондратьева Л.А. Тезисы доклада «Численные оценки сложности для нелинейных параболических уравнений», Труды XI международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации». Алушта, 2002 г.
- 9 Кондратьева Л.А. Тезисы доклада «Конечномерная динамика эволюционных уравнений и нелинейный метод Галеркина», Труды XII международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации». Алушта, 2003г.
- 10 Кондратьева Л.А. Тезисы доклада «Аппроксимационная обратная задача для предельных циклов», Труды XV международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации». Алушта, 2006 г.
- 11 Кондратьева Л.А. Тезисы доклада «Обратные задачи в теории сплайн-функций», Труды XVI международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации». Алушта, 2007 г.
- 12 Кондратьева Л.А. Тезисы доклада «On the Loci of Limit Cycles for the Spacecraft», Sixth International Symposium on Classical and Celestial Mechanics, Moscow – Velikie Luki, 2007 г.