



Научная статья

УДК 517.977.55

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=187465>

EDN: <https://www.elibrary.ru/HCYGDR>

ОЦЕНКА ПРЕДЕЛЬНОГО МНОЖЕСТВА 0-УПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ СПУТНИКА

А.В. Симкина ✉

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),

г. Москва, Россия

✉ abv1998@yandex.ru

Цитирование: Симкина А.В. Оценка предельного множества 0-управляемости системы управления движением спутника // Труды МАИ. 2026. № 146.
URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=187465>

Аннотация. В статье решается задача построения оценки предельного множества 0-управляемости системы управления движением спутника. Предельное множество 0-управляемости является множеством тех начальных состояний, из которых систему можно перевести в начало координат за любое конечное число шагов. Построение предельного множества 0-управляемости для спутника в задаче коррекции орбиты отвечает на вопрос, возможно ли проведение коррекции орбиты спутника из заданного начального состояния. Исходная непрерывная модель движения спутника была дискретизирована и при помощи увеличения шага квантования сведена к линейной дискретной системе с геометрическими ограничениями на управление. Получены необходимые и достаточные условия ограниченности предельных множеств 0-управляемости и достижимости в случае, когда 0 является относительно внутренней точкой множества допустимых значений управления. Приведены условия, при которых данная задача может быть сведена к частному случаю – когда 0 является внутренней точкой множества допустимых значений управления.

Ключевые слова: предельное множество 0-управляемости, выпуклое множество, линейные системы управления, дискретная система управления, коррекция орбиты спутника

LIMIT 0-CONTROLLABLE SET FOR SATELLITE CONTROL SYSTEM

A.V. Simkina ✉

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

✉ abv1998@yandex.ru

Citation: Simkina A.V. Limit 0-controllable set for satellite control system // Trudy MAI. 2026. No. 146. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=187465>

Abstract. The paper considers a linear n -dimensional discrete-time controlling system with bounded control, the control set has a dimension lower than the state space. It is required to construct the limit null-controllable set, that is, the set of those initial states from which it is possible to transfer the system to the origin in a finite number of steps by choosing an admissible control. Constructing this set for a satellite in an orbit correction problem answers the question of whether orbit correction is feasible from a given initial state. The continuous satellite dynamics are discretized and, by increasing the quantization step, transformed into a linear discrete-time system with geometric control constraints. Necessary and sufficient conditions for the boundedness of the limit null-controllability and reachability sets are derived for the case where 0 is a relative interior point of the set of admissible controls. The boundedness criteria are formulated in terms of the Jordan structure of the system: the limit reachable set is bounded if and only if all controls lie in the subspace corresponding to the contracting part of the system (eigenvalues with modulus less than one), while the null-controllability set is bounded if and only if the system matrix is invertible and all controls belong to the subspace corresponding to the expanding part of the system (eigenvalues with modulus greater than one). Lemma 1 states that the limit reachable and limit null-controllable sets remain unchanged when transitioning from the original system to a system with the matrix raised to the power M and a correspondingly extended control set. Lemma 2 establishes a profound connection between the algebraic condition of complete controllability and the geometric property of the limit reachable set.

Введение

Проблема построения множеств достижимости и 0-управляемости для дискретных систем активно развивается в последнее время. Классические исследования данных множеств связаны с системами с геометрическими ограничениями, которые требуют, чтобы управляющий сигнал в любой момент времени не выходил за границы допустимой области. С помощью них учитываются конструктивные возможности управляемого устройства (нельзя отклонять рули более чем на определенный угол, двигатель имеет ограниченную тягу и так далее). Для дискретных систем, как и для непрерывных, используется подход к построению множеств достижимости с помощью эллипсоидальных аппроксимаций [11, 12]. В работе [4] исследуется связь множеств достижимости и 0-управляемости для линейных дискретных переключаемых систем. В статьях [13, 14] приведены оценки множеств 0-управляемости линейных дискретных систем с насыщением. Также известны аналитические представления множеств достижимости и 0-управляемости для линейных систем с дискретным временем и ограничениями на функцию управления в смысле l_∞ -нормы. Для предельных аналогов тематика оценивания представляет собой относительно новое направление исследований, что подтверждается ограниченным количеством публикаций в данной области. Несмотря на растущий интерес к проблеме, многие аспекты остаются недостаточно изученными, что определяет актуальность настоящего исследования. Для предельных множеств сформулированы необходимые и достаточные условия ограниченности [3, 8, 15]. Однако большинство работ либо сосредоточены на исследовании общих свойств предельных множеств достижимости и 0-управляемости [3-6, 8], либо рассматривают системы с неограниченным управлением [4-7, 17]. В ряде частных случаев предложены конструктивные методы формирования внешних оценок на основе аппарата опорных полупространств [16] или принципа максимума [10].

Данная работа является продолжением исследований, начатым в статьях [18-20 и 27]. Она расширяет и обобщает полученные ранее результаты. Представленные методы могут быть использованы в авиационной и ракетно-космической отрасли, где они применяются для анализа различных систем на управляемость и достижимость. Например, для построения множества управляемости системой управления ориентацией аэростата или для проверки, возможно ли проведение коррекции орбиты спутника из заданного начального состояния. Последний пример подробно рассмотрен в статье. Задача коррекции орбиты космических аппаратов является актуальной задачей, что отражено во многих статьях [21-23]. Существуют различные подходы к построению математической модели движения спутника на круговой орбите, которые в конечном счете определяют оптимизационную задачу. В [24-26] изложен стохастический подход, при котором все возмущающие факторы рассматриваются в виде случайных процессов. В рамках данной работы обсуждается постановка из [18], в рамках которой для данной системы решается задача построения предельного множества 0-управляемости.

Постановка задачи

Рассматривается линейная стационарная система с дискретным временем и геометрическими ограничениями на управление $(A, \mathcal{U})$:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + u(k), \\ x(0) &= x_0, u(k) \in \mathcal{U}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $u(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор управления, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица системы, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое и компактное множество допустимых значений управлений. Предполагается, что $0 \in \text{ri } \mathcal{U}$. Под $\text{ri } \mathcal{U}$ понимается относительная внутренность множества $\mathcal{U}$ – множество внутренних точек $\mathcal{U}$, если рассматривать данное множество как подмножество его аффинной оболочки [29, 6, гл. II].

Определим для системы (1) предельное множество достижимости $\mathcal{Y}_\infty$ как множество всех тех состояний, в которые систему (1) можно перевести из начала координат за конечное число шагов:

$$\mathcal{Y}_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n: \exists N \in \mathbb{N}, u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U}: x_0 = 0, x(N) = x\}. \quad (2)$$

Аналогично определим для системы (1) предельное множество 0-управляемости $\mathcal{X}_\infty$ как множество всех тех состояний, из которых систему (1) можно перевести в начало координат за конечное число шагов:

$$\mathcal{X}_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n: \exists N \in \mathbb{N}, u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U}: x_0 = x, x(N) = 0\}. \quad (3)$$

Целью работы является исследование свойств множеств (2) и (3) и методов их построения. В частности, интерес представляют необходимые и достаточные условия ограниченности предельных множеств достижимости и 0-управляемости.

Необходимые и достаточные условия ограниченности

Для системы $(A, \mathcal{U})$ известен результат для более частного случая геометрических ограничений, когда $0 \in \text{int } \mathcal{U}$.

Теорема 1 [18, Лемма 4] [20, Теорема 4.1]. Пусть в системе (1) выполнено условие $0 \in \text{int } \mathcal{U}$, множества $\mathcal{Y}_\infty$ и $\mathcal{X}_\infty$ определяются соотношениями (2) и (3) соответственно.

Тогда

1. $\mathcal{Y}_\infty$ ограничено тогда и только тогда, когда все собственные значения A по модулю строго меньше 1;
2. $\mathcal{X}_\infty$ ограничено тогда и только тогда, когда все собственные значения A по модулю строго больше 1.

В общем случае $0 \in \text{ri } \mathcal{U}$ условия, сформулированные в теореме 3 не являются необходимыми. Продемонстрируем это на примерах.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \mathcal{U} = \{0\} \times [-1; 1].$$

Согласно (1)

$$\begin{aligned} x(N) &= A^N x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} A^k u(N-k-1) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \begin{pmatrix} 3^k u_1(N-k-1) \\ \frac{1}{2^k} u_2(N-k-1) \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{N-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2^k} u_2(N-k-1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Докажем, что множество $\mathcal{Y}_\infty$ будет ограничено.

$$\begin{aligned} \|x(N)\| &= \left\| \sum_{k=0}^{N-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2^k} u_2(N-k-1) \end{pmatrix} \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2^k} u_2(N-k-1) \end{pmatrix} \right\| = \sum_{k=0}^{N-1} \left| \frac{1}{2^k} u_2(N-k-1) \right| \leq 2. \end{aligned}$$

Следовательно, по определению (2) множество $\mathcal{Y}_\infty$ ограничено.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \mathcal{U} = [-1; 1] \times \{0\}.$$

Согласно (1)

$$x_0 = -\sum_{k=1}^N A^{-k} u(k-1)$$

Докажем, что множество $\mathcal{X}_\infty$ будет ограничено.

$$\begin{aligned} \|x_0\| &= \left\| -\sum_{k=1}^N A^{-k} u(k-1) \right\| \leq \sum_{k=1}^N \|A^{-k} u(k-1)\| = \\ &= \sum_{k=1}^N \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{3^k} u_1(k-1) \\ \frac{1}{2^k} u_2(k-1) \end{pmatrix} \right\| = \sum_{k=1}^N \frac{1}{3^k} |u_1(k-1)| \leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{3^k} \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, по определению (3) множество $\mathcal{X}_\infty$ ограничено.

Заметим, что условие $0 \in \text{int } \mathcal{U}$ является достаточно жестким, так как предполагает, что верно равенство $\dim \mathcal{U} = n$, т.е. размерность вектора управления фактически совпадает с размерностью вектора состояния. На практике, как правило размерность пространства управлений меньше размерности пространства состояний. В контексте системы (1) это эквивалентно условию $\dim \mathcal{U} < n$. Таким образом, важным является обобщение теоремы 3 на более общий и интересный с точки зрения практики случай $0 \in \text{ri } \mathcal{U}$.

Обозначим через $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ вещественный жорданов базис матрицы A [30, Раздел 3.4]. Введем следующие инвариантные подпространства:

$$\mathbb{L}_{<1} = \text{Lin}\{h_i: h_i \text{ соответствует собственному значению } \lambda, |\lambda| < 1\},$$

$$\mathbb{L}_{>1} = \text{Lin}\{h_i: h_i \text{ соответствует собственному значению } \lambda, |\lambda| > 1\}.$$

Справедлив следующий критерий ограниченности предельных множеств (2) и (3).

Теорема 2. Пусть множества $\mathcal{U}_\infty$ и $\mathcal{X}_\infty$ определяются соотношениями (2) и (3) соответственно.

Тогда

1. $\mathcal{U}_\infty$ ограничено тогда и только тогда, когда $\mathcal{U} \subset \mathbb{L}_{<1}$;
2. $\mathcal{X}_\infty$ ограничено тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$ и $\mathcal{U} \subset \mathbb{L}_{>1}$.

Доказательство. Разобьём элементы вещественного жорданова базиса $h_{1,1}, \dots, h_{1,n_1}, \dots, h_{m,1}, \dots, h_{m,n_m}$, где $h_{i,j} \in \mathbb{R}^n$ – присоединенный вектор матрицы A ранга j , соответствующий значению $\lambda_i \in \mathbb{C}$ матрицы A , или $h_{i,j} = (h_{i,j}^{re}, h_{i,j}^{im}) \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ – действительная и мнимая части присоединенного вектора матрицы A ранга j , соответствующего собственному значению $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Тогда вещественная жорданова форма матрицы A состоит из m клеток, а n_i и $2n_i$ – размерность i -й клетки в зависимости от типа собственного значения. Причем в силу [30, Раздел 3.1] верно представление:

$$A = S\Lambda S^{-1}, \text{ где}$$

$$S = (h_{1,1}, \dots, h_{1,n_1}, \dots, h_{m,1}, \dots, h_{m,n_m}),$$

$$\Lambda = \text{diag}(J_1, \dots, J_m).$$

Для всех $i = \overline{1, m}$ жорданова клетка $J_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ имеет один из следующих двух видов:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, \lambda_i \in \mathbb{R},$$

$$J_i = \begin{pmatrix} r_i A_{\varphi_i} & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_i A_{\varphi_i} & I & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & r_i A_{\varphi_i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_i \times 2n_i},$$

$$\lambda_i = r_i e^{i\varphi_i} \in \mathbb{C}, \quad A_{\varphi_i} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_i) & \sin(\varphi_i) \\ -\sin(\varphi_i) & \cos(\varphi_i) \end{pmatrix}.$$

Для любого $u(k) \in \mathcal{U}$ верно разложение

$$u(k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} h_{i,j} \alpha_{i,j}(k),$$

где $\alpha_{i,j}(k) \in \mathbb{R}$, если $\lambda_i \in \mathbb{R}$ и $\alpha_{i,j}(k) \in \mathbb{R}^2$, если $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Тогда справедливо следующее представление:

$$S^{-1}u(k) = (h_{1,1}, \dots, h_{1,n_1}, \dots, h_{m,1}, \dots, h_{m,n_m})^{-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} h_{i,j} \alpha_{i,j}(k) =$$

$$= S^{-1} \underbrace{(h_{1,1}, \dots, h_{1,n_1}, \dots, h_{m,1}, \dots, h_{m,n_m})}_S \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{m,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{m,n_m}(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{1,n_1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{m,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{m,n_m}(k) \end{pmatrix}.$$

Пусть $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Заметим, что для жордановых клеток J_i справедливо следующее представление:

$$J_i = \lambda_i I + P, \text{ где } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \text{ Тогда } J_i^k = (\lambda_i I + P)^k = \sum_{l=0}^k C_k^l \lambda_i^{k-l} P^l.$$

Введем новое обозначение β_i :

$$\beta_i = \sum_{k=0}^{N-1} J_i^k \begin{pmatrix} \alpha_{i,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(k) \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^k C_k^l \lambda_i^l P^{k-l} \begin{pmatrix} \alpha_{i,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(k) \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$(P^l x)_j = \begin{cases} x_{j+l}, & l \leq n_i - j \\ 0, & j \geq n_i - j. \end{cases}$$

Тогда

$$\beta_{i,j} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{\min\{k, n_i-j\}} C_k^l \lambda_i^{k-l} \alpha_{i,j+l}(k) = \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=l}^{N-1} C_k^l \lambda_i^{k-l} \alpha_{i,j+l}(k) =$$

$$\sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{N-1-l} C_{k+l}^l \lambda_i^k \alpha_{i,j+l}(k+l).$$

Пусть $\mathcal{U} \subset \mathbb{L}_{<1}$, т.е. $\alpha_{i,j} = 0$, если $|\lambda_i| \geq 1$. Получим

$$|\beta_{i,j}| = \left| \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{N-1-l} C_{k+l}^l \lambda_i^k \alpha_{i,j+l}(k+l) \right| \leq \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{N-1-l} C_{k+l}^l |\lambda_i^k| |\alpha_{i,j+l}(k+l)| \leq$$

$$\leq \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+l}^l |\lambda_i^k| |\alpha_{i,j+l}(k+l)| \leq \begin{cases} \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+l}^l \lambda_{\max}^k \alpha_{\max}, & |\lambda_i| < 1, \\ 0, & |\lambda_i| \geq 1 \end{cases} \leq$$

$$\leq \sum_{l=0}^{n_i-j} \frac{\alpha_{\max}}{(1-\lambda_{\max})^{l+1}} \leq \frac{n_i \alpha_{\max}}{(1-\lambda_{\max})^{n_i}} \leq \frac{n \alpha_{\max}}{(1-\lambda_{\max})^n},$$

$$\lambda_{\max} = \max\{|\lambda|: \lambda - \text{собственное значение } A \text{ и } |\lambda| < 1\},$$

$$\alpha_{\max} = \max_{u \in \mathcal{U}} \max_{i=1, \dots, m} \max_{j=1, \dots, n_i} \|\alpha_{i,j}\|.$$

Рассмотрим теперь случай комплексно-сопряженных собственных значений.

В этом случае для жордановой клетки J_i справедливо следующее соотношение:

$$J_i = \text{diag}(r_i A_{\varphi_i}, \dots, r_i A_{\varphi_i}) + P^2.$$

Тогда

$$J_i^k = (\text{diag}(r_i A_{\varphi_i}, \dots, r_i A_{\varphi_i}) + P^2)^k = \sum_{l=0}^k C_k^l \text{diag}(r_i A_{\varphi_i}, \dots, r_i A_{\varphi_i})^l P^{2(k-l)}.$$

Аналогично вещественному случаю для $\lambda_i \in \mathbb{C}$ получим

$$\beta_i = \sum_{k=0}^{N-1} J_i^k \begin{pmatrix} \alpha_{i,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(k) \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^k C_k^l \text{diag}(r_i A_{\varphi_i}, \dots, r_i A_{\varphi_i})^{k-l} P^{2l} \begin{pmatrix} \alpha_{i,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(k) \end{pmatrix}.$$

Учтём, что $\alpha_{i,j}(k) \in \mathbb{R}^2$ и получим

$$\begin{aligned} \beta_{i,j} &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{\min\{k, n_i-j\}} C_k^l (r_i A_{\varphi_i})^{k-l} \alpha_{i,j+l}(k) = \\ &= \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=l}^{N-1} C_k^l (r_i A_{\varphi_i})^{k-l} \alpha_{i,j+l}(k) = \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{N-1-l} C_{k+l}^l r_i^k A_{k\varphi_i} \alpha_{i,j+l}(k+l). \end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{U} \subset \mathbb{L}_{<1}$, т.е. $\alpha_{i,j} = 0$, если $|\lambda_i| \geq 1$. Получим

$$\begin{aligned} \|\beta_{i,j}\| &= \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{N-1-l} C_{k+l}^l \|r_i^k A_{k\varphi_i} \alpha_{i,j+l}(k+l)\| = \\ &= \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{N-1-l} C_{k+l}^l r_i^k \|\alpha_{i,j+l}(k+l)\| \leq \\ &\leq \begin{cases} \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+l}^l \lambda_{\max}^k \alpha_{\max}, & |\lambda_i| < 1, \\ 0, & |\lambda_i| \geq 1. \end{cases} \leq \\ &\leq \sum_{l=0}^{n_i-j} \frac{\alpha_{\max}}{(1-\lambda_{\max})^{l+1}} \leq \frac{n_i \alpha_{\max}}{(1-\lambda_{\max})^{n_i}} \leq \frac{n \alpha_{\max}}{(1-\lambda_{\max})^n}. \end{aligned}$$

Верны соотношения

$$\|x(N)\| = \|S \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda^k S^{-1} u(k)\| \leq \|S\| \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \|\beta_{i,j}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|S\|$$

$$\left(n \frac{n^2 \alpha_{\max}^2}{(1-\lambda_{\max})^{2n}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\|S\| n^{\frac{3}{2}} \alpha_{\max}}{(1-\lambda_{\max})^n}.$$

Следовательно, по определению 2 множество $\mathcal{U}_{\infty}$ ограничено.

Пусть $\mathcal{U} \not\subset \mathbb{L}_{<1}$. Тогда найдется $u \in \mathcal{U}$ такой, что в его разложении по базису $h_1, \dots, h_n$ $\alpha_{i,j} \neq 0$ для $|\lambda_i| \geq 1$, $j = \overline{1, n_i}$. Без ограничения общности будем полагать, что

$$\alpha_{i,j+1} = \dots = \alpha_{i,n_i} = 0 \text{ или } j = n_i.$$

Если $\lambda_i \in \mathbb{R}$, рассмотрим следующее управление

$$u(k) = \begin{cases} u, & k \in \{0, 2, 4, \dots\}, \\ 0, & k \in \{1, 3, 5, \dots\}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda^k S^{-1} u(k) \right\| &= \| S^{-1} x(N) \| \leq \| S^{-1} \| \| x(N) \|, \\ \| x(2N) \| &\geq \frac{1}{\| S^{-1} \|} \cdot \left\| \sum_{k=0}^{2N-1} \Lambda^k S^{-1} u(k) \right\| \geq \frac{1}{\| S^{-1} \|} \| \beta_{i,j} \| = \\ &= \frac{1}{\| S^{-1} \|} \left| \sum_{k=0}^{2N-1} \lambda_i^k \alpha_{i,j}(k) \right| = \frac{1}{\| S^{-1} \|} \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_i^{2k} |\alpha_{i,j}| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

Если $\lambda_i \in \mathbb{C}$ и $\frac{\varphi_i}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, то рассмотрим возрастающую последовательность $\{k_1, k_2, \dots\} \subset \mathbb{N}$ такую, что

$$(\varphi_i k_N + \theta) \bmod 2\pi \in [0; \frac{\pi}{6}), \text{ где } \alpha_{i,j} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Такая последовательность существует, поскольку в силу теоремы Вейля $cl\{\varphi_i k \bmod 2\pi : k \in \mathbb{N}\} = [0; 2\pi]$.

Если $\varphi_i = 2\pi \frac{K'}{K''}$, то положим $k_N = NK''$. В обоих случаях выберем управление следующим образом:

$$u(k) = \begin{cases} u, & k \in \{k_1, k_2, k_3, \dots\}, \\ 0, & k \notin \{k_1, k_2, k_3, \dots\}. \end{cases}$$

Тогда для $\varphi_i = 2\pi \frac{K'}{K''}$

$$\begin{aligned} \| x(k_N) \| &\geq \frac{1}{\| S^{-1} \|} \| \beta_{i,j} \| = \frac{1}{\| S^{-1} \|} \left\| \sum_{k=0}^{N-1} r_i^k A_{k\varphi_i} \alpha_{i,j}(k) \right\| = \\ &= \frac{1}{\| S^{-1} \|} \left\| \sum_{k=0}^{[(N-1)/K'']} r_i^{kK''} A_{k2\pi K'} \alpha_{i,j} \right\| = \frac{1}{\| S^{-1} \|} \sum_{k=0}^{[(N-1)/K'']} r_i^{kK''} \| \alpha_{i,j} \| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

Если $\frac{\varphi_i}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, то

$$\begin{aligned} \| x(k_N) \| &\geq \frac{1}{\| S^{-1} \|} \| \beta_{i,j} \| = \frac{1}{\| S^{-1} \|} \left\| \sum_{k=0}^{k_N-1} r_i^k A_{k\varphi_i} \alpha_{i,j}(k) \right\| = \\ &= \frac{1}{\| S^{-1} \|} \left\| \sum_{q=0}^{N-1} r_i^{k_q} A_{k_q \varphi_i} \alpha_{i,j}(k) \right\| \geq \\ &\geq \frac{1}{\| S^{-1} \|} \sum_{q=0}^{N-1} r_i^{k_q} \| \alpha_{i,j} \| \cdot |\cos(k_q \varphi_i + \theta)| \geq \frac{1}{2\| S^{-1} \|} \sum_{q=0}^{N-1} r_i^{k_q} \| \alpha_{i,j} \| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, во всех трёх случаях множество $\mathcal{Y}_\infty$ оказывается неограниченным.

Докажем пункт 2. Если $\det A = 0$, то существует собственный вектор $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, соответствующий собственному значению 0. Тогда по определению (3) верно включение $Lin\{h\} \subset \mathcal{X}_\infty$. Следовательно, множество $\mathcal{X}_\infty$ неограниченное.

Если $\det A \neq 0$, то в силу (2) и (3) предельное множество достижимости системы $(A^{-1}, -A^{-1}\mathcal{U})$ совпадает с предельным множеством 0-управляемости системы $(A, \mathcal{U})$. Тогда пункт 2 оказывается справедливым, так как собственные значения матрицы A^{-1} взаимно обратны собственным значениям матрицы A .

Теорема 2 доказана.

Примеры 1 и 2 согласуются с результатами теоремы 2. В примере 1 множество допустимых управлений $\mathcal{U} \subset \mathbb{L}_{<1}$, и предельное множество достижимости $\mathcal{Y}_\infty$ ограничено. В примере 2 множество допустимых управлений $\mathcal{U} \subset \mathbb{L}_{>1}$, и предельное множество 0-управляемости $\mathcal{X}_\infty$ ограничено.

Методы построения предельных множеств достижимости и 0-управляемости

Для случая линейных систем с дискретным временем продемонстрировало высокую эффективность обобщение метода простой итерации, основанное на аппарате сжимающих отображений [18, 19]. Строго доказано, что предельное множество достижимости [19] и предельное множество 0-управляемости [18] в случае их ограниченности могут быть представлены как неподвижные точки сжимающих отображений в пространстве компактов с метрикой Хаусдорфа. В совокупности со свойствами расстояния Хаусдорфа это позволяет получать внешние оценки искомых множеств с произвольной априорной погрешностью. Приведем соответствующие теоремы для данных методов.

Теорема 3 [18, Теорема 2]. Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго больше 1, отображение T имеет вид (5):

$$T(\mathcal{X}) = A^{-1}\mathcal{X} + (-A^{-1}\mathcal{U}). \quad (4)$$

Тогда

1. существует $M \in \mathbb{N}$ такое, что отображение $T_M = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_M$ является сжимающим с некоторым коэффициентом сжатия $\alpha \in [0; 1)$;
2. $\overline{\mathcal{X}_\infty}$ – единственная неподвижная точка отображения T в пространстве $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$;
3. справедлива оценка погрешности

$$\rho_H(\overline{\mathcal{X}_\infty}, \mathcal{X}(NM)) \leq R_N \stackrel{\Delta}{=} \frac{\alpha^N}{1-\alpha} \rho_H(\mathcal{X}(M), \{0\}),$$

4. справедлива оценка для множества

$$\mathcal{X}_\infty \subset \mathcal{X}(NM) + \mathcal{B}_{R_N}(0).$$

Теорема 4 [19, Теорема 1]. Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго меньше 1, отображение T имеет вид:

$$T(\mathcal{Y}) = A\mathcal{Y} + \mathcal{U}. \quad (5)$$

Тогда

1. существует $M \in \mathbb{N}$ такое, что отображение $T_M = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_M$ является

сжимающим с некоторым коэффициентом сжатия $\alpha \in [0; 1)$;

2. $\overline{\mathcal{Y}_\infty}$ – единственная неподвижная точка отображения T в пространстве $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$;

3. справедлива оценка $\rho_H(\overline{\mathcal{Y}_\infty}, \mathcal{Y}(NM)) \leq R_N \stackrel{\Delta}{=} \frac{\alpha^N}{1-\alpha} \rho_H(\mathcal{Y}(M), \{0\})$.

4. справедлива оценка для множества

$$\mathcal{Y}_\infty \subset \mathcal{Y}(NM) + \mathcal{B}_{R_N}(0).$$

Продемонстрируем метод сведения общей постановки вида (1) к частному случаю $0 \in \text{int } \mathcal{U}$ для класса управляемых систем.

Для произвольного $M \in \mathbb{N}$ введем обозначение

$$\mathcal{U}_M = \mathcal{U} + A\mathcal{U} + \dots + A^{M-1}\mathcal{U}.$$

Лемма 1. Предельные множества достижимости (2) и 0-управляемости (3) систем $(A, \mathcal{U})$ и $(A^M, \mathcal{U}_M)$ совпадают.

Доказательство. Согласно (1)

$$x(M(k+1)) = A^M x(Mk) + \sum_{l=0}^{M-1} A^l u(M(k+1) - l - 1). \quad (6)$$

Если ввести обозначения

$$v(k) = \sum_{l=0}^{M-1} A^l u(Mk + M - l - 1) \in \mathcal{U}_M, y(k) = x(Mk),$$

то (6) окажется эквивалентным соотношению

$$y(k+1) = A^M y(k) + v(k).$$

Следовательно, $\{x(k)\}_{k=1}^{NM}$ – траектория $(A, \mathcal{U})$ тогда и только тогда, когда $\{y(k)\}_{k=1}^N$ – траектория $(A^M, \mathcal{U}_M)$. Т.е. предельное множество достижимости системы $(A^M, \mathcal{U}_M)$ по построению вложено в предельное множество достижимости

системы $(A, \mathcal{U})$. С другой стороны, если $x = x(MN + \tilde{k})$, где $0 < \tilde{k} < M$, то построим новое допустимое управление

$$\tilde{u}(k) = \begin{cases} 0, & 0 \leq k < M - \tilde{k} \\ u(k - (M - \tilde{k})), & M - \tilde{k} \leq k < M(N + 1). \end{cases}$$

Тогда $\tilde{y}(N + 1) = \tilde{x}(M(N + 1)) = x(MN + \tilde{k}) = x$. Отсюда следует, что предельное множество достижимости системы $(A, \mathcal{U})$ вложено в предельное множество достижимости системы $(A^M, \mathcal{U}_M)$.

Аналогично доказывается равенство множеств 0-управляемости.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть для системы (1) через $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}^n$ обозначен базис подпространства $\text{Lin } \mathcal{U}$, выполнено условие управляемости

$$\text{rank}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) = n, B = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Тогда $0 \in \text{int } \mathcal{U}_n$.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathcal{U}$. Тогда с учетом определения $\mathcal{U}_n$ будет верно, что

$$b_1, \dots, b_m, Ab_1, \dots, Ab_m, A^2b_1, \dots, A^2b_m, \dots, A^{n-1}b_1, \dots, A^{n-1}b_m \in \mathcal{U}_n. \quad (7)$$

По условию $\text{rank}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) = n$, следовательно, среди векторов (7) найдутся n линейно независимых векторов. Отсюда следует, что $\dim \mathcal{U}_n = n$ и $\text{Lin } \mathcal{U}_n = \mathbb{R}^n$. Тогда из определения относительно внутренней точки и условия $0 \in \mathcal{U}_n$ следует, что $\text{ri } \mathcal{U}_n = \text{int } \mathcal{U}_n$.

Лемма 2 доказана.

Лемма 1 позволяет свести задачу построения предельных множеств достижимости и 0-управляемости для исходной системы $(A, \mathcal{U})$ к системе $(A^n, \mathcal{U}_n)$. Причем в силу леммы 2, если исходная система управляемая, то $0 \in \text{int } \mathcal{U}_n$. Это позволяет использовать методы [18, 19] для построения множеств (2) и (3). Леммы 1 и 2 позволяют применить теоремы 3 и 4 к общей постановке задачи, если система (1) является управляемой. Продемонстрируем это на примере.

Рассмотрим систему с матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 2.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 2.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.500 & -0.866 & 1.000 & 0.000 \\ -1.000 & -1.000 & -0.134 & 0.500 & 0.000 & 1.000 \\ 0.866 & 0.866 & 0.866 & 0.000 & 0.500 & -0.866 \\ 1.500 & 2.500 & 0.000 & -0.866 & 1.866 & 0.500 \end{pmatrix}, \mathcal{U} = [-1,1]^2 \times \{0\}^4.$$

Матрицу исходной системы можно представить в виде:

$$A = S\Lambda S^{-1}, \text{ где } \Lambda = \begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & J_2 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и жордановы клетки J_1 и J_2 имеют следующую структуру:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.866 & 1 & 0 \\ 0.866 & 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.866 \\ 0 & 0 & 0.866 & 0.5 \end{pmatrix},$$

причем $S^{-1}\mathcal{U} = \mathcal{U} = [-1,1]^2 \times \{0\}^4$. У жордановой клетки J_1 единственное собственное значение: $\lambda_1 = 2$ (кратности 2), $|\lambda_1| = 2 > 1$, а J_2 – жорданова клетка для пары комплексно-сопряжённых собственных значений $0.5 \pm 0.866i$ с алгебраической кратностью 2. Несмотря на то, что не все собственные значения по модулю строго больше 1, $\det A \neq 0$ и $\mathcal{U} \subset \mathbb{L}_{>1}$, следовательно, по теореме 2 предельное множество управляемости $\mathcal{X}_\infty$ ограничено. Построим его.

Данную систему в силу [18, Лемма 1] можно разделить на подсистемы:

$$(\Lambda, \mathcal{U}) = (J_1, \mathcal{U}_1) \times (J_2, \mathcal{U}_2),$$

где

$$\mathcal{U}_1 = [-1,1]^2, \quad \mathcal{U}_2 = \{0\}^4.$$

Предельное множество управляемости $\mathcal{X}_\infty$ можно найти как декартово произведение предельных множеств подсистем:

$$\tilde{\mathcal{X}}_\infty = \tilde{\mathcal{X}}_{1,\infty} \times \tilde{\mathcal{X}}_{2,\infty}.$$

Рассмотрим подсистему $(J_2, \mathcal{U}_2)$. У данной подсистемы в силу того, что множество геометрических ограничений состоит только из начала координат,

предельное множество управляемости будет также состоять из нуля. Следовательно,

$$\tilde{\mathcal{X}}_{2,\infty} = \{0\}^4.$$

Рассмотрим подсистему $(J_1, \mathcal{U}_1)$. J_1 — жорданова клетка 2×2 для $\lambda = 2 > 1$, $\mathcal{U}_1 = [-1, 1]^2$. Оценка $\tilde{\mathcal{X}}_{1,\infty}$ методом сжимающих отображений изображена на рисунке 1 синим цветом.

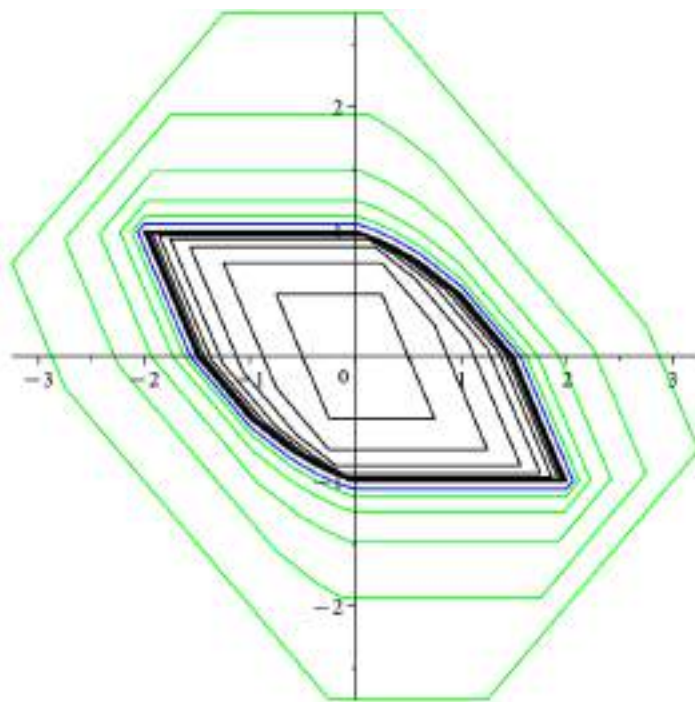


Рисунок 1 - Черным цветом обозначена внутренняя оценка предельного множества управляемости $\mathcal{X}_{1,\infty}$, зелеными и синими (самая точная) линиями обозначены внешняя оценки предельного множества управляемости для $p = 1$

Таким образом оценка предельного множества управляемости исходной системы $(A, \mathcal{U})$ может быть найдена как:

$$\hat{\mathcal{X}}_\infty = S(\tilde{\mathcal{X}}_{1,\infty} \times \{0\}^4).$$

Оценка предельного множества 0-управляемости системы управления движением спутника

Выберем математическую модель, описанную Красовским Н.Н. в приложении редактора к монографии [28, 108]. Космический аппарат предполагается материальной точкой, находящейся в окрестности круговой орбиты. Рассматривается его движение в плоскости данной орбиты в полярных координатах R, φ и во времени s . Центр системы координат совпадает с центром

масс объекта, создающим гравитационное поле. Движение спутника обуславливается силой тяжести F , реактивной силой U и описывается дифференциальными уравнения второго порядка относительно R и φ :

$$m(\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2) = F + U_R, m \frac{d(R^2\dot{\varphi})}{ds} = U_\varphi,$$

где U_R, U_φ – радиальная и тангенциальная компоненты тяги, m – масса спутника.

Пусть круговая орбита определяется своим радиусом R_0 , тангенциальной скоростью v_{T0} и нулевой радиальной скоростью. Введем отклонения радиуса реальной орбиты, радиальной и тангенциальной компонент скорости спутника от параметров круговой орбиты следующим образом:

$$\begin{aligned}\Delta R(s) &= R(s) - R_0, \\ \Delta v_R(s) &= \dot{R}(s), \\ \Delta v_T(s) &= R(s)\dot{\varphi}(s) - v_{T0}.\end{aligned}$$

Также обозначим через $\tilde{u}_1(s) = \frac{U_R}{m}$ и $\tilde{u}_2(s) = \frac{U_\varphi}{m}$ радиальную и тангенциальную компоненты удельной тяги.

Тогда линеаризованная система дифференциальных уравнений, описывающая движение спутника, согласно [24] примет вид

$$\begin{aligned}\Delta \dot{R}(s) &= \Delta v_R(s), \\ \Delta \dot{v}_R(s) &= \Delta R(s) + 2\Delta v_T(s) + \tilde{u}_1(s), \\ \Delta \dot{v}_T(s) &= -\Delta v_R(s) + \tilde{u}_2(s).\end{aligned}\tag{8}$$

Предполагается, что управление $\tilde{u}(s) = (\tilde{u}_1(s), \tilde{u}_2(s))^T \in \mathbb{R}^2$ осуществляется двигателями малой тяги, и на него накладываются геометрические ограничения, определяемые максимально возможной мощностью двигательной установки.

Будем полагать, что управление является кусочно-постоянным, т.е. фиксированным на временных интервалах длины $\delta > 0$:

$$\tilde{u}(s) = u_k, s \in [k\delta; (k+1)\delta), k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Это позволяет рассмотреть в качестве наблюдаемых параметров системы вектор состояния $x(k) = (\Delta r(k\delta), \Delta v_R(k\delta), \Delta v_T(k\delta))^T$ в моменты времени $k\delta$, т.е. сразу после смены режима управления, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Данное предположение позволяет решить систему линейных дифференциальных уравнений (8) явно и перейти к конечно-разностным соотношениям вида (1):

$$A = \begin{pmatrix} 2 - \cos\delta & \sin\delta & 2 - 2\cos\delta \\ \sin\delta & \cos\delta & 2\sin\delta \\ -1 + \cos\delta & -\sin\delta & -1 + 2\cos\delta \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 - \cos\delta & -2\sin\delta + 2\delta \\ \sin\delta & 2 - 2\cos\delta \\ \cos\delta - 1 & 2\sin\delta - \delta \end{pmatrix}([-1; 1] \times [-1; 1]). \quad (9)$$

Подставим в систему численные значения $\delta = 0.25$ и домножим матрицу A на нормировочный коэффициент 1.95:

$$A = \begin{pmatrix} 2.01063 & 0.48243 & 0.12125 \\ 0.48243 & 1.88937 & 0.96488 \\ -0.06063 & -0.48243 & 1.82875 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U} = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0.03628 \\ 0.30958 \\ 0.21372 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.02590 \\ 0.18523 \\ -0.27590 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.02590 \\ -0.18523 \\ 0.27590 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.03628 \\ -0.30958 \\ -0.21372 \end{pmatrix} \right\}.$$

Согласно лемме 2 проверим условие управляемости. Обозначим векторы:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0.03628 \\ 0.30958 \\ 0.21372 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0.02590 \\ 0.18523 \\ -0.27590 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -0.02590 \\ -0.18523 \\ 0.27590 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} -0.03628 \\ -0.30958 \\ -0.21372 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $b_3 = -b_2$, $b_4 = -b_1$. Из оставшихся векторов b_1, b_2 составим матрицу:

$$B = (b_1 \ b_2) = \begin{pmatrix} 0.03628 & 0.02590 \\ 0.30958 & 0.18523 \\ 0.21372 & -0.27590 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\text{rank}(B) = 2$. Проверим условие управляемости. Для этого вычислим следующую матрицу:

$$C = (B \ AB \ A^2B), \text{ где}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0.24820 & 0.10795 \\ 0.80860 & 0.09627 \\ 0.23945 & -0.59546 \end{pmatrix}, \quad A^2B = \begin{pmatrix} 0.91816 & 0.19129 \\ 1.87826 & -0.34055 \\ 0.03275 & -1.14193 \end{pmatrix}.$$

Условие управляемости выполняется, потому что

$$\text{rank}(C) = 3.$$

Согласно лемме 1 увеличим шаг квантования. Пусть $M = 2$, рассмотрим новую систему $(A^2, \mathcal{U}_2)$, где

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4.32106 & 2.30547 & 1.71951 \\ 2.30547 & 3.93400 & 4.24209 \\ -0.71951 & -2.30547 & 3.34049 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_2 = \mathcal{U} + A\mathcal{U}$$

Построим для новой системы $(A^2, \mathcal{U}_2)$ оценку предельного множества 0-управляемости на основе принципа сжимающих отображений. Результаты вычислений приведены на рисунке 2.

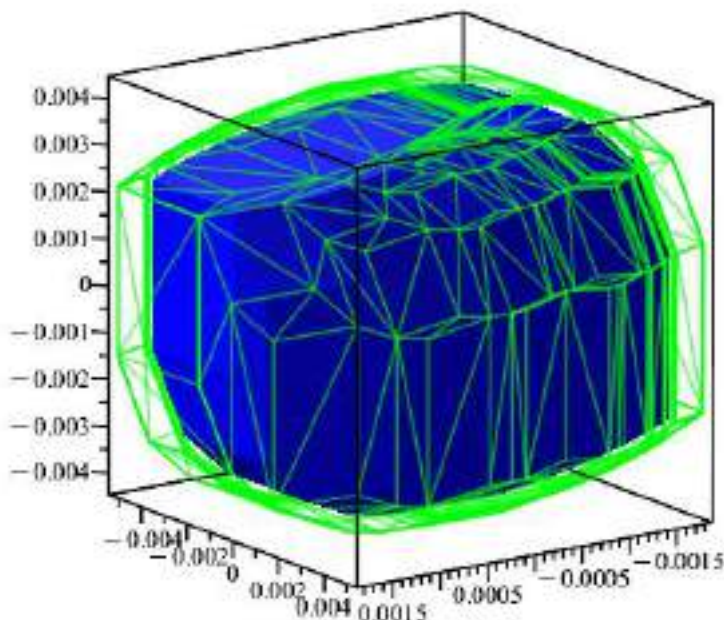


Рисунок 2 - Оценка предельного множества 0-управляемости для системы управления движением спутника

Таким образом, задачу построения предельного множества 0-управляемости для системы управления спутника можно считать решенной.

Заключение

В статье рассмотрена задача построения и оценивания предельного множества 0-управляемости дискретной линейной системы с геометрическим ограничением на управление. Результаты данной статьи расширяют полученные ранее методы на более широкий класс, когда 0 является относительно внутренней точкой множества допустимых значений управления. В теореме 2 сформулированы необходимые и достаточные условия ограниченности предельных множеств 0-управляемости и достижимости для данного класса систем. Также предложен метод сведения исходной задачи к эквивалентной при неизменных предельных множествах. Теоретические результаты были

применены для прикладного примера – задачи коррекции орбиты спутника. Ограниченность предельного множества 0-управляемости системы гарантирует возможность разрешения задачи коррекции орбиты.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The author declares no conflict of interest.

Список источников

1. Desoer C.A., Wing J. The minimal time regulator problem for linear sampled-data systems: general theory // Journal of The Franklin Institute. 1961. Vol. 272, iss. 3. P. 208–228. DOI 10.1016/0016-0032(61)90784-0.
2. Lin W.-S. Time-optimal control strategy for saturating linear discrete systems // International Journal of Control. 1986. Vol. 43, no. 5. P. 1343–1351. DOI 10.1080/00207178608933543
3. Colonius F., Joao Cossich A.N., Santana A.J. Controllability properties and invariance pressure for linear discrete-time systems // Journal of Dynamics and Differential Equations. 2022. No. 34. P. 5–28.
4. Ge S.S., Sun Zh., Lee T.H. Reachability and controllability of switched linear discrete-time systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2001. Vol. 46, iss. 9. P. 1437–1441.
5. Heemels W.P., Camlibel M.K. Null controllability of discrete-time linear systems with input and state constraints // 47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun. 2008. P. 3487–3492.
6. Kaba M.D., Camlibel M.K. A spectral characterization of controllability for linear discrete-time systems with conic constraints // SIAM Journal on Control and Optimization. 2015. Vol. 53, no. 4. P. 2350–2372.
7. Benvenuti L., Farina L. The geometry of the reachability set for linear discrete-time systems with positive controls // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2006. Vol. 28, iss. 2. P. 306–325.

8. Darup M.S., Mönnigmann M. On general relations between nullcontrollable and controlled invariant sets for linear constrained systems // 53rd IEEE Conference on Decision and Control. 2014. P. 6323–6328.
9. Canon M.D., Cullum C.D., Polak E. Theory of optimal control and mathematical programming. New York : McGraw-Hill, 1970.
10. Fisher M.E., Gayek J.E. Estimating reachable sets for two-dimensional linear discrete systems // Journal of Optimization Theory and Applications. 1988. Vol. 56, iss 1. P. 67–88. DOI 10.1007/BF00938527.
11. Kuntsevich V.M., Kurzhanski A.B. Attainability domains for linear and some classes of nonlinear discrete systems and their control // Journal of Automation and Information Sciences. 2010. Vol. 42, iss. 1. P. 1–18. DOI 10.1615/JAutomatInfScien.v42.i1.10.
12. Kurzhanskiy A.F., Varaiya P. Theory and computational techniques for analysis of discrete-time control systems with disturbances // Optimization Methods and Software. 2011. Vol. 26, iss. 4/5. P. 719–746.
13. Estimation of the null-controllable region: discrete-time plants / M.L. Corradini, A. Cristofaro, F. Giannoni, G. Orlando // Control systems with saturating inputs. Lecture notes in control and information sciences. Springer, 2012. Vol. 424. P. 33–52. DOI 10.1007/978-1-4471-2506-8_3.
14. Hu T., Miller D.E., Qiu L. Null controllable region of LTI discrete-time systems with input saturation // Automatica. 2002. Vol. 38, iss. 11. P. 2009–2013. DOI 10.1016/S0005-1098(02)00091-2.
15. Сиротин А.Н., Формальский А.М. Достижимость и управляемость дискретных систем при ограниченных по величине и импульсу управляющих воздействиях // Автоматика и телемеханика. 2003. № 12. С. 17–32.
16. Костоусова Е.К. О внешнем полиэдральном оценивании множеств достижимости в «расширенном» пространстве для линейных многошаговых систем с интегральными ограничениями на управление // Вычислительные технологии. 2004. Т. 9, № 4. С. 54–72. DOI 10.21538/0134-4889-2020-26-1-141-155.

17. Fucheng L., Mengyuan S., Usman Optimal preview control for linear discrete-time periodic systems // Mathematical Problems in Engineering. 2019. P. 1–11. DOI 10.1155/2019/8434293.
18. Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н. О методе построения внешних оценок предельного множества управляемости для линейной дискретной системы с ограниченным управлением // АиТ. 2023. № 2. С. 3–34. DOI 10.31857/S00052310230200100.
19. Simkina A.V., Ibragimov D.N., Kibzun A.I. On the method of numerical simulation of limit reachable sets for linear discrete-time systems with bounded control // Вестник ЮурГУ ММП. 2024. Т. 17, № 3. С. 46–56. DOI 10.14529/mmp240304.
20. Simkina A.V. On the external estimation of the limit reachable set for the linear discrete-time system based on support hyperplanes // Advances in Systems Science and Applications. 2024. Vol. 4. P. 66–81. DOI 10.25728/assa.2024.2024.4.1970.
21. Иванов С.Г., Гришко Д.А., Баранов А.А. Коррекция аргумента перигея средней эллиптической орбиты с постоянной большой полуосью и различным эксцентриситетом // Труды МАИ : электрон. журн. 2024. № 139. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=183447>.
22. Васькова В.С. О перемещении вдоль троса космического аппарата с неидеальным солнечным парусом // Труды МАИ : электрон. журн. 2024. № 139. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=1834499>.
23. Алгоритм определения параметров наклонных проекций точек на поверхности земли для круговых орбит космических аппаратов / Е.П. Минаков, М.А. Александров, А.В. Мищеряков, С.В. Мищеряков // Труды МАИ : электрон. журн. 2024. № 135. URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=179696>.
24. Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Бобронников В.Т. Спутниковые системы мониторинга. М. : Изд-во МАИ, 2000. 568 с.
25. Лебедев А.А, Красильщиков М.Н., Малышев В.В. Оптимальное управление движением космических летательных аппаратов. М. : Машиностроение, 1974. 200 с.
26. Малышев В.В., Кибзун А.И. Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М. : Машиностроение, 1987. 304 с.

27. Ибрагимов Д.Н., Симкина А.В. О методе декомпозиции при построении внешних оценок предельных множеств достижимости и 0-управляемости для линейных почти периодических дискретных систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2025. Т. 26, № 10. С. 515–524. DOI 10.17587/mau.26.515-524.

28. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М. : Наука, 1966. 533 с.

29. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М. : Мир, 1973. 469 с.

30. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М. : Мир, 1989. 667 с.

References

1. Desoer C.A., Wing J. The minimal time regulator problem for linear sampled-data systems: general theory. *Journal Franklin Institute*, 1961, vol. 272, no. 3. pp. 208–228. DOI 10.1016/0016-0032(61)90784-0.

2. Lin W.-S. Time-Optimal Control Strategy for Saturating Linear Discrete Systems. *International Journal of Control*, 1986, vol. 43, no. 5, pp. 1343–1351. DOI 10.1080/00207178608933543.

3. Colonius F., Joao Cossich A.N., Santana A.J. Controllability properties and invariance pressure for linear discrete-time systems. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2022, no. 34, P. 5–28.

4. Ge S.S., Sun Zh., Lee T.H. Reachability and controllability of switched linear discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, vol. 46, no. 9, pp. 1437–1441.

5. Heemels W.P., Camlibel M. K. Null controllability of discrete-time linear systems with input and state constraints. *47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun*, 2008, pp. 3487–3492.

6. Kaba M.D., Camlibel M.K. A spectral characterization of controllability for linear discrete-time systems with conic constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2015, vol. 53, no. 4, pp. 2350–2372.

7. Benvenuti L., Farina L. The geometry of the reachability set for linear discrete-time systems with positive controls. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2006, vol. 28, no. 2, pp. 306–325.

8. Darup M.S., Mönnigmann M. On general relations between nullcontrollable and controlled invariant sets for linear constrained systems. *53rd IEEE Conference on Decision and Control*, 2014, pp. 6323–6328.
9. Canon M.D., Cullum C.D., Polak E. *Theory of optimal control and mathematical programming*, New York, McGraw-Hill, 1970.
10. Fisher M.E., Gayek J.E. Estimating reachable sets for two-dimensional linear discrete systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 1988. V. 56. No. 1. P. 67–88. DOI 10.1007/BF00938527
11. Kuntsevich V.M., Kurzhanski A.B. Attainability domains for linear and some classes of nonlinear discrete systems and their control. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2010, vol. 42, iss. 1, pp. 1–18. DOI 10.1615/JAutomatInfScien.v42.i1.10.
12. Kurzhanskiy A.F., Varaiya P. Theory and computational techniques for analysis of discrete-time control systems with disturbances. *Optimization Methods and Software*, 2011, vol. 26. no. 4–5. pp. 719–746.
13. Corradini M.L., Cristofaro A., Giannoni F., Orlando G. estimation of the null-controllable region: Discrete-time plants. control systems with saturating inputs. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer, 2012, vol. 424. pp. 33–52. DOI 10.1007/978-1-4471-2506-8_3.
- 14 Hu T., Miller D.E., Qiu L. Null controllable region of LTI discrete-time systems with input saturation. *Automatica*, 2002, vol. 38, iss. 11, pp. 2009–2013. DOI 10.1016/S0005-1098(02)00091-2.
15. Sirotin A.N., Formalskii A.M. *Avtomatika i telemekhanika*, 2003, no. 12, pp. 17–32.
16. Kostousova E.K. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2004, vol. 9, no. 4, pp. 54–72. DOI 10.21538/0134-4889-2020-26-1-141-155.
17. Fucheng L., Mengyuan S., Usman optimal preview control for linear discrete-time periodic systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2019, pp. 1–11. DOI 10.1155/2019/8434293.
18. Berendakova A.V., Ibragimov D.N. *Avtomatika i telemekhanika*, 2023, no. 2, pp. 3–34. DOI 10.31857/S00052310230200100.

19. Simkina A.V., Ibragimov D.N., Kibzun A.I. *Vestnik YuUrGU MMP*, 2024, vol. 17, no. 3, pp. 46–56. DOI 10.14529/mmp240304.
20. Simkina A.V. On the external estimation of the limit reachable set for the linear discrete-time system based on support hyperplanes. *Advances in Systems Science and Applications*, 2024, no. 4, pp. 66–81. DOI 10.25728/assa.2024.2024.4.1970.
21. Ivanov S.G., Grishko D.A., Baranov A.A. *Trudy MAI: elektron. zhurn.*, 2024, no. 139. Available at: <https://trudymai.ru/published.php?ID=183447>.
22. Vas'kova V.S. On the movement along the tether of a spacecraft with a non-ideal solar sail. *Trudy MAI: elektron. zhurn.*, 2024, no. 139. Available at: <https://trudymai.ru/published.php?ID=1834499>.
23. Minakov E.P., Aleksandrov M.A., Mishcheryakov A.V., Mishcheryakov S.V. Algorithm for determining parameters of inclined projections of points on the Earth's surface for circular orbits of spacecraft. *Trudy MAI: elektron. zhurn.*, 2024, no. 135. Available at: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=179696>.
24. Malyshev V.V., Krasilshchikov M.N., Bobronnikov V.T. *Sputnikovye sistemy monitoringa* [Satellite monitoring systems], Moscow, MAI Publ., 2000, 568 p.
25. Lebedev A.A., Krasilshchikov M.N., Malyshev V.V. *Optimal'noe upravlenie dvizheniem kosmicheskikh letatel'nykh apparatov* [Satellite monitoring systems. Analysis, synthesis and control], Moscow, MAI Publ., 2000, 568 p.
26. Malyshev V.V., Kibzun A.I. *Analiz i sintez vysokotochnogo upravleniya letatel'nyimi apparatami* [Analysis and synthesis of high-precision control of aircraft], Moscow, Mashinostroenie, 1987, 304 p.
27. Ibragimov D.N., Simkina A.V. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2025, vol. 26, no. 10. pp. 515–524. DOI <https://doi.org/10.17587/mau.26.515-524>.
28. Malkin I.G. *Teoriya ustoichivosti dvizheniya* [Theory of motion stability], Moscow, Nauka, 1966, 533 p.
29. Rokafellar R. *Vypuklyi analiz* [Convex Analysis], Moscow, Mir, 1973, 469 p.
30. Horn R., Johnson C. *Matrichnyy analiz* [Matrix analysis], Moscow, Mir, 1989, 667 p.

Информация об авторах

Анастасия Вячеславовна Симкина, старший преподаватель, Московский авиационный институт, Москва, Россия; e-mail: abv1998@yandex.ru

Information about the authors

Anastasia V. Simkina, Senior Lecturer, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia; e-mail: abv1998@yandex.ru

Получено 4 декабря 2025 • Принято к публикации 30 января 2026 • Опубликовано 27 февраля 2026

Received 4 December 2025 • Accepted 30 January 2026 • Published 27 February 2026
