

Научная статья
УДК 629.785
URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=187584>
EDN: <https://www.elibrary.ru/NDRUIS>



Оптимизация межпланетной траектории космического аппарата с использованием последовательности гравитационных манёвров у Земли и Венеры

Виктория Витальевна Шевченко

Корпорация «Московский институт теплотехники», Москва, Российская Федерация
vv.shevchenko5894@gmail.com

Аннотация. Рассмотрена задача сквозной оптимизации траектории выведения космического аппарата (КА), оснащенного комбинированной двигательной установкой, на целевую гелиоцентрическую орбиту с большим наклоном (30°) к плоскости экватора Солнца для проведения исследования околосолнечного пространства. Требуемые характеристики целевой гелиоцентрической орбиты формируются за счет одного нерезонансного гравитационного манёвра (ГМ) у Земли и некоторой последовательности околорезонансных ГМ у Венеры. Анализируется транспортная космическая система на базе химического разгонного блока (ХРБ) «Фрегат», обеспечивающего старт КА с круговой околоземной орбиты, и маршевой электроракетной двигательной установки (ЭРДУ) на базе одного стационарного плазменного двигателя СПД-140Д. Приведены соотношения, позволяющие анализировать оптимальное движение транспортной космической системы при старте с опорной околоземной орбиты. Задача сквозной оптимизации траектории выведения КА на целевую гелиоцентрическую орбиту сформулирована с применением принципа максимума Л.С. Понтрягина. Критерием оптимизации рассматривается масса КА на целевой гелиоцентрической орбите. Решение поставленной оптимизационной задачи сведено к семиточечной краевой задаче. В работе приведены численные результаты анализа двух наиболее интересных последовательностей порядков резонансов у Венеры:

- $1 : 1 \Rightarrow 4 : 3 \Rightarrow 3 : 2$ – ГМ выполнялись в одной и той же точке орбиты планеты, угловая дальность от дальнего гелиоцентрического перелета Венера–Венера составляет $2\pi k$, где $k = 1, 2, \dots, K$; $K \in \mathbb{R}$;
- $1 : 1 \Rightarrow 1,5 : 1,5 \Rightarrow 1 : 1$ – ГМ выполнялись в противоположных точках орбиты планеты.

Ключевые слова: космический аппарат, комбинированная двигательная установка, гравитационный манёвр, принцип максимума

Для цитирования: Шевченко В.В. Оптимизация межпланетной траектории космического аппарата с использованием последовательности гравитационных манёвров у Земли и Венеры // Вестник Московского авиационного института. 2026. Т. 33. № 1. С. 130-140. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=187584>

Original article

A Spacecraft Interplanetary Trajectory Optimizing with the Sequence of Gravity-Assist Maneuvers near the Earth and Venus

Victoria Vitalievna Shevchenko

Corporation Moscow Institute for Heat Technology, Moscow, Russian Federation
vv.shevchenko5894@gmail.com

© Шевченко В.В., 2026

Abstract

Potential of scientific space exploration is increased significantly by the gravity-assist maneuvers application. This method, which was successfully tested on the “Pioneer-11”, “Voyager-1,2”, “Vega-1,2” and “Galileo” missions, has consistently led to the key flight parameters improvement. It allowed achieving either significant energy costs reduction, or duration shortening of the transport mission, or simultaneous improvements in both indicators compared to the flights along the direct interplanetary trajectories.

This article solves the problem of designing optimal interplanetary trajectories of a spacecraft (SC) with a combined propulsion system (chemical propulsion system and electrojet propulsion system) for studying the inner heliosphere of the Sun from non-ecliptic positions. The SC flight patterns are being analyzed herewith, in which it is able to perform a sequence of gravity-assist maneuvers at the same point or at the opposite points of the planet orbit. The angular range between two consecutive resonant gravity-assist maneuvers herewith can be either $2\pi k$ or $\pi(2k - 1)$, where $k = 1, 2, \dots, K$; $K \in \mathbb{R}$. In the first case, the heliocentric orbit is called a resonant one with a whole resonance order, while in the second case it is a π -resonant orbit.

It is assumed that the first impulse, which ensures the movement along the hyperbola of departure from the Earth, is given by the chemical upper stage “Fregat”. The SC is equipped with an electric jet propulsion system with the single “SPE-140D” stationary plasma engine. The interplanetary SC flight scheme characteristics were derived from the solution of the boundary value problem of the Pontryagin maximum principle. Mass of the SC placed into the target heliocentric orbit was being considered as optimality criterion. The SC heliocentric orbit with 30° inclination to the Sun equator plane was assumed as a target heliocentric orbit.

The optimized characteristics of the seven-point boundary value problem are:

- The launch date of the SC from the low-earth orbit (LEO);
- The “Frigate” upper stage running time;
- The hyperbolic excess velocity vector magnitude and direction during the launch from the Earth;
- The electric jet propulsion system “on/off” program on all heliocentric sections of the flight;
- The thrust vector orientation program in the SC active flight sections;
- The dates of gravity-assist maneuvers near Earth and Venus, as well as the gravity-assist maneuvers parameters being selected. The results of the design-and-ballistic analysis of the end-to-end optimization problem under consideration are the two SC trajectories for the SC putting on the target heliocentric orbit, including a single non-resonant gravity-assisted maneuver near the Earth and a sequence of resonant gravity-assisted maneuvers near Venus:
 - $1 : 1 \Rightarrow 4 : 3 \Rightarrow 3 : 2$ – the gravity-assist maneuvers were performed at the same point of the planet orbit, the angular range of a separate heliocentric Venus–Venus flight is $2\pi k$, where $k = 1, 2, \dots, K$; $K \in \mathbb{R}$ (the first flight pattern).
 - $1 : 1 \Rightarrow 1,5 : 1,5 \Rightarrow 1 : 1$ – the gravity-assist maneuvers are performed at the opposite points of the planet orbit (the second flight pattern).

The results of the numerical analysis were as follows. With the same launch date of the SC from the reference low-Earth orbit, the sections of optimal trajectories before the first gravity-assist maneuver near Venus of the analyzed flight patterns were rather similar in all characteristics. The SC mass at the first approach to Venus differs by only 4.1 kg (0.26%). The magnitude of the hyperbolic excess velocity during a gravity-assist maneuver near the Earth differs slightly more (though slightly as well): by 61.5 m/s (about 0.82%). The magnitude of the hyperbolic velocity excess during the first gravity-assist maneuver near Venus differs by 83.9 m/s (about 0.54%). The optimal trajectories characteristics of the flight schemes being considered differ significantly, beginning from the second gravity-assist maneuver near Venus. Application of the π -resonant heliocentric orbit allowed reducing the resonance order on the last heliocentric flight to Venus, and selecting it equal to 1:1. Due to this, duration of the SC staying in resonant heliocentric orbits for the trajectory of the second flight pattern appeared two times less than that of the first flight pattern trajectory without significant SC mass decrease (decreased by 4 kg) in the target heliocentric orbit.

Keywords: spacecraft, combined propulsion system, gravity-assist maneuver, maximum principle

For citation: Shevchenko V.V. A Spacecraft Interplanetary Trajectory Optimizing with the Sequence of Gravity-Assist Maneuvers near the Earth and Venus. *Aerospace MAI Journal*. 2026;33(1):130–140. (In Russ.). URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=187584>

List of Figures

Fig. 1. The graph of the dependence of the spacecraft initial mass after separation of the “Fregat” on the magnitude of the hyperbolic excess velocity

Fig. 2. The first spacecraft launch trajectory xOy plane (a) and xOy plane (b) projections in the heliocentric ecliptic coordinate system

Fig. 3. The second spacecraft launch trajectory xOy plane (a) and xOy plane (b) projections in the heliocentric ecliptic coordinate system

List of Tables

Table 1. Input data and limitations for the design and ballistic analysis

Table 2. Characteristics of the optimal Earth–Earth–Venus trajectories for the two flight patterns

Table 3. Parameters of the spacecraft resonant orbits with Venus for the two obtained flight patterns

Table 4. Characteristics of the heliocentric spacecraft orbits for the first flight pattern

Table 5. Characteristics of the heliocentric spacecraft orbits for the second flight pattern

Введение

В связи с возрастающим числом космических миссий, требующих значительного увеличения наклонения гелиоцентрической орбиты КА при помощи ГМ у небесных тел [1], ведущие отечественные и зарубежные специалисты в области механики космического полета активно занимаются составлением алгоритмов определения параметров этих манёвров, а также разработкой методики построения траектории с промежуточными резонансными ГМ у планет [2–6]. Эти исследования необходимы для создания межпланетных траекторий КА, позволяющих изучать внутреннюю гелиосферу Солнечной системы с внеэллиптических положений [7] (например, в рамках российского проекта «Интергелиозонд» [8, 9] и европейской миссии “Solar Orbiter”). Однако не так много исследований посвящено критически важному вопросу – задаче сквозной оптимизации всей траектории межпланетного перелета, что является неотъемлемой частью комплексного баллистического проектирования. В данной статье приведено решение задачи сквозной оптимизации траектории выведения КА на целевую гелиоцентрическую орбиту, имеющую фиксированное наклонение к плоскости экватора Солнца.

В статье анализируются сложные схемы полета для исследования Солнца из внеэллиптических положений с относительно низких гелиоцентрических орбит для ближайших окон запуска с использованием последовательности ГМ у Земли и Венеры. Такие траектории представляют практический интерес, поскольку они могут обеспечить большее наклонение орбиты КА к плоскости экватора Солнца за счет использования малозатратных ГМ около планет земной группы [10].

Использование ГМ около естественных небесных тел позволяет значительно расширить область освоения Солнечной системы при имеющемся уровне развития космической техники. Дополнительное приращение скорости КА за счет орбитальной энергии планет при ГМ предоставляет возможность изменить наклонение орбиты при существенной экономии энергетических затрат на перелет [11]. С целью увеличения наклонения целевой гелиоцентрической орбиты КА предлагается включать в схему перелета последовательность ре-

зонансных с орбитой планеты гелиоцентрических орбит КА. Традиционное понятие «резонансные гелиоцентрические орбиты» предполагает, что удовлетворяется следующее соотношение:

$$n_i T_{sc} - m_i T_{celestial_body} = 0, \quad (1)$$

где T_{sc} – период орбиты КА; $T_{celestial_body}$ – сидерический период планеты; n_i, m_i – количество целых витков КА и планеты вокруг Солнца соответственно; $i = 1, 2, \dots$ – порядковый номер ГМ с выходом на резонансную гелиоцентрическую орбиту.

В настоящей работе анализируются схемы полетов КА, при которых КА может совершать последовательность ГМ в одной и той же точке или в противоположных точках орбиты планеты. При этом угловая дальность между двумя последовательными резонансными ГМ может быть $2\pi k$ или $\pi(2k - 1)$ соответственно, где $k = 1, 2, \dots, K$; $K \in \mathbb{R}$. В первом случае гелиоцентрическую орбиту будем называть резонансной с целым порядком резонанса, во втором – π –резонансной гелиоцентрической орбитой.

Это исследование посвящено проектно-баллистическому анализу сложных межпланетных траекторий КА с использованием эфемеридного движения планет [12], при учете их гравитационных возмущений. Важно отметить, что последовательные ГМ не происходят в одной и той же точке. В связи с этим рассматривается возможность использования орбит, близких к резонансным, где угловая дальность между последовательными ГМ почти кратна π (т. е. близка к $2\pi k$ или $\pi(2k - 1)$). Такие гелиоцентрические орбиты будут называть околорезонансными гелиоцентрическими орбитами, а манёвры, выводящие на них, – околорезонансными.

Исходные данные и ограничения анализируемой задачи

Исходными данными (табл. 1) для проведения проектно-баллистического анализа являются параметры ракеты-носителя (РН) «Союз-2.1б» и ХРБ «Фрегат», которые зарекомендовали себя как наиболее эффективные транспортные средства выведения межпланетных КА, отличающиеся высокой степенью надежности и отработанностью технических систем. К перелетной траектории и целевой

Таблица 1. Исходные данные и ограничения для проектно-баллистического анализа

Эпоха запуска	2027 г
Минимальная высота пролета КА при проведении гравитационных манёвров у планет (ограничена высотой атмосферы планет)	400 км
Параметры опорной околоземной орбиты:	
– высота орбиты	200 км
– эксцентриситет	0
– наклонение	51,6°
Масса транспортной космической системы (КА и ХРБ) на опорной околоземной орбите	8200 кг
Максимальный рабочий запас топлива ХРБ	5 350 кг
Конечная масса конструкции ХРБ, включая невыработанные остатки топлива	970 кг
Удельный импульс двигательной установки ХРБ	333,1 с
Тяга ХРБ «Фрегат»	19,6133 кН
Тяга ЭРДУ КА	290 мН
Удельный импульс ЭРДУ КА	1 670 с

гелиоцентрической орбите КА предъявляются требования, также указанные в табл. 1.

В статье анализируется задача сквозной оптимизации траектории межпланетного КА, оснащенного комбинированной двигательной установкой, для исследования Солнца с фиксированным наклонением целевой гелиоцентрической орбиты КА к плоскости солнечного экватора, т.е. на момент перехода КА на целевую гелиоцентрическую орбиту должно быть выполнено следующее граничное условие:

$$i_{sc}(t_f) - i_{fixed} = 0, \quad (2)$$

где $i_{sc}(t_f)$ – наклонение орбиты КА в момент времени t_f (после последнего ГМ у Венеры); $i_{fixed} = 30^\circ$ – граничное условие транспортной задачи.

Схема выведения КА на целевую гелиоцентрическую орбиту

Схема выведения транспортной космической системы (КА и ХРБ) на целевую орбиту с фиксированным наклонением состоит из следующих участков траектории:

1. РН «Союз-2.1б» выводит транспортную космическую систему (КА и ХРБ) на опорную околоземную орбиту.
2. ХРБ обеспечивает старт КА с опорной околоземной орбиты и увод его из окрестности Земли, после чего «Фрегат» отделяется от КА.
3. Участок гелиоцентрического перелета Земля–Земля.
4. Пассивный ГМ у Земли.
5. Гелиоцентрическая траектория Земля–Венера.
6. Последовательность пассивных ГМ у Венеры с выведением КА на околорезонансные (с орбитой Венеры) гелиоцентрические орбиты с постепенным

увеличением наклонения этих гелиоцентрических орбит. Допускается включение в схему полета гелиоцентрических орбит, имеющих угловую дальность, почти кратную $\pi(2k - 1)$.

7. Последний ГМ у Венеры переводит КА на нерезонансную гелиоцентрическую траекторию. Параметры ГМ выбираются из условия обеспечения заданного ограничения по наклонению целевой гелиоцентрической орбиты к плоскости экватора Солнца (2).

На всех гелиоцентрических участках Земля–Земля, Земля–Венера и Венера–Венера допускается включение ЭРДУ КА.

Порядок резонанса $n : m$ будем определять как отношение числа витков траектории КА к числу витков планеты за время движения КА по резонансной гелиоцентрической орбите. При этом n и m могут быть не только целыми числами, но и отличаться от целых чисел на 0,5 единицы (π -резонансная гелиоцентрическая орбита).

Постановка задачи сквозной оптимизации схемы выведения КА на целевую гелиоцентрическую орбиту

Для анализируемой траектории выведения КА, оснащенного комбинированной двигательной установкой, на целевую гелиоцентрическую орбиту в качестве параметров выбирались следующие характеристики на различных участках:

1. *Геоцентрический участок старта с опорной орбиты Земли:*

- дата старта с Земли t_0 ;
- длительность участка разгона при старте транспортной космической системы с опорной околоземной орбиты t_{01} ;
- программа угла тангажа (угла между вектором тяги ракетного двигателя и плоскостью

местного горизонта) на участке работы двигателя ХРБ «Фрегат»;

– вектор гиперболического избытка скорости при старте с Земли $V_{\infty}(t_{01})$.

2. Гелиоцентрические участки полета планета-планета:

– даты проведения ГМ у планет t_i , где $i = 1, \dots, N$; N – количество ГМ;

– количество ГМ N , а также параметры этих манёвров;

– порядок резонансов гелиоцентрических орбит после ГМ у Венеры;

– программа управления движением КА на гелиоцентрических участках перелета: количество активных и пассивных участков, даты начала и конца этих участков;

– направление вектора тяги ЭРДУ на активных участках перелета планета–планета.

С целью уменьшения длительности выведения КА в рамках данной работы предлагается ограничиться резонансами малого порядка (резонансы с малым числом m , использовалось ограничение $m \leq 3,5$, где m – количество витков Венеры вокруг Солнца).

При анализе траектории перелета используется метод грависфер нулевой протяженности. Движение планет рассматривается как возмущенное (некеплеровское). На околорезонансных гелиоцентрических орбитах предполагается возможность включения маршевой ЭРДУ КА. Это дает возможность учесть возмущенное движение планеты.

Критерием оптимизации рассматривается масса КА, выведенного на целевую гелиоцентрическую орбиту:

$$J(\mathbf{a}, \mathbf{u}(t)) = -m(t_f), \tag{3}$$

где $\mathbf{u}(t)$ – вектор выбираемых законов управления движением КА; \mathbf{a} – вектор выбираемых параметров схемы полета КА и его выбираемых параметров; t_f – дата последнего ГМ.

С использованием полного набора условий оптимальности принципа максимума [13–15] рассматриваемой сложной схемы перелета задача сквозной оптимизации сводится к семиточечной краевой задаче (в выбранном случае использования одного нерезонансного ГМ у Земли и последовательности четырех околорезонансных ГМ у Венеры).

Математическая модель для описания анализируемой траектории выведения

Математическая модель движения транспортной космической системы при старте с опорной околоземной орбиты. Движение транспортной космической системы (ХРБ и КА) начинается с опорной круго-

вой орбиты Земли. Гиперболический избыток скорости КА на траектории отлета от Земли напрямую зависит от массы топлива, истраченного ХРБ. Эта величина определяет начальную массу КА на гелиоцентрической траектории. Зависимость начальной массы КА от гиперболического избытка скорости при старте с околоземной орбиты представляет собой монотонно убывающую функцию (рис. 1).

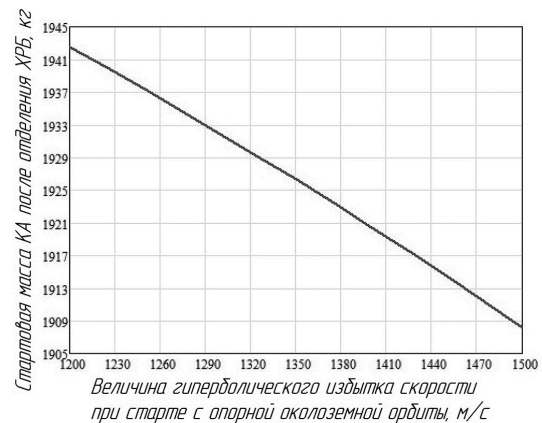


Рис. 1. График зависимости начальной массы КА после отделения ХРБ «Фрегат» от гиперболического избытка скорости

Отметим тот факт, что на этапе старта транспортной космической системы с околоземной опорной орбиты траектория движения является плоской с одним активным участком. Это обстоятельство дает возможность исследовать геоцентрический участок как классическую задачу на быстродействие.

В качестве минимизируемого функционала на данном участке выведения КА рассматривается

$$J(\mathbf{a}, \mathbf{u}(t)) = t_{01}, \tag{4}$$

где t_{01} – время работы двигателя ХРБ.

Время включения двигателя ХРБ принимается нулевым.

Фазовый вектор $\mathbf{X}(t)$ содержит пять компонент:

$$\mathbf{X}(t) = (V_r(t) \ V_n(t) \ r(t) \ \beta(t) \ m(t))^T, \tag{5}$$

где V_r, V_n – радиальная и трансверсальная компоненты скорости транспортной системы; r – радиус-вектор транспортной системы; β – полярный угол; m – масса транспортной системы.

Уравнения, описывающие управляемое движение центра масс транспортной космической системы в рамках принятой модели, могут быть представлены в безразмерном виде следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dV_r}{dt} &= \frac{P_{cus}}{m} \cdot \frac{\psi_{Vr}}{\psi_V} - \frac{1}{r^2} + \frac{V_n^2}{r}; \\ \frac{dV_n}{dt} &= \frac{P_{cus}}{m} \cdot \frac{\psi_{Vn}}{\psi_V} - \frac{V_r V_n}{r}; \\ \frac{dr}{dt} &= V_r; \\ \frac{d\beta}{dt} &= \frac{V_n}{r}; \\ \frac{dm}{dt} &= -\frac{P_{cus}}{w_{cus}}; \\ \frac{d\psi_{Vr}}{dt} &= \psi_{Vn} \frac{V_n}{r} - \psi_r; \\ \frac{d\psi_{Vn}}{dt} &= -2\psi_{Vr} \frac{V_n}{r} + \psi_{Vn} \frac{V_r}{r}; \\ \frac{d\psi_r}{dt} &= \psi_{Vr} \left(\frac{V_n^2}{r^2} - \frac{2}{r^3} \right) - \psi_{Vn} \frac{V_r V_n}{r^2}; \\ \frac{d\psi_\beta}{dt} &= 0; \\ \frac{d\psi_m}{dt} &= \frac{P_{cus}}{m^2} \psi_V, \end{aligned} \right. \quad (6)$$

где P_{cus} , w_{cus} – тяга и скорость истечения двигателя ХРБ «Фрегат»; ψ_{Vn} , ψ_r , ψ_β и ψ_m – непрерывные кусочно-гладкие функции (сопряженные переменные к радиальной скорости, трансверсальной скорости, радиус-вектору, полярному углу, массе соответственно).

В системе уравнений (6) за единицу расстояния принят радиус-вектор транспортной космической системы на опорной околоземной орбите (6571 км); за единицу массы принята масса транспортной системы на опорной круговой орбите (8200 кг). Единица скорости принята равной местной круговой скорости на высоте 200 км над поверхностью Земли. Единица ускорения вычисляется как отношение гравитационного параметра Земли к квадрату единицы расстояния. Единица тяги определена как произведение единичной массы на единичное ускорение.

Приведем соотношения, которым должна удовлетворять система дифференциальных уравнений (6) при старте с опорной околоземной орбиты:

$$\begin{pmatrix} V_r(0) \\ V_n(0) - 1 \\ r(0) - 1 \\ \beta(0) \\ m(0) - 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (7)$$

На правом конце геоцентрического участка уравнения оптимального движения транспортной

космической системы должны удовлетворять граничным условиям:

$$\begin{pmatrix} V_r(t_{01})^2 + V_n(t_{01})^2 - \frac{2}{r(t_{01})} - V_\infty(t_{01})^2 \\ \psi_{Vr}(t_{01}) - \psi_r(t_{01})V_r(t_{01})r(t_{01})^2 \\ \psi_{Vn}(t_{01}) - \psi_r(t_{01})V_r(t_{01})r(t_{01})^2 \\ \psi_m(t_{01}) - 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (8)$$

где $V_\infty(t_{01})$ – гиперболический избыток скорости КА после окончания работы двигателя ХРБ «Фрегат»; $V_r(t_{01})$, $V_n(t_{01})$ – радиальная и трансверсальная компоненты скорости транспортной космической системы в момент выключения двигателя ХРБ; $r(t_{01})$ – значение радиус-вектора в конечной точке геоцентрической траектории; $\psi_{Vr}(t_{01})$, $\psi_{Vn}(t_{01})$, $\psi_r(t_{01})$, $\psi_m(t_{01})$ – сопряженные переменные к фазовым характеристикам в конечной точке траектории.

Движение транспортной космической системы при старте с опорной околоземной орбиты можно рассматривать как самостоятельную двухточечную краевую задачу. Ее решение предполагает для конкретного значения гиперболического избытка скорости найти неизвестные параметры краевой задачи ($\psi_m(0)$, ϑ_0 , $\psi_r(0)$, t_{01}), при которых выполняются краевые условия (8).

Математическая модель движения КА на гелиоцентрических участках планета–планета. В работах [10, 16–20] приведены соотношения, позволяющие анализировать оптимального движения КА на гелиоцентрической траектории.

Пассивный ГМ. Описание алгоритмов определения параметров пассивных ГМ, обеспечивающих резонансные гелиоцентрические перелеты планета–планета с угловыми дальностями перелета, содержится в следующих источниках:

- $2\pi k$ (целочисленные резонансные перелеты) – в [10];
- $\pi(2k - 1)$ (π -резонансные перелеты) – в [19].

Приведем результаты анализа двух схем выведения КА на целевую гелиоцентрическую орбиту с ее наклоном 30° к плоскости экватора Солнца для эпохи старта в 2027 г. Эти схемы используют различные порядки орбитальных резонансов и представляются интересными по выводимой на целевую орбиту массе КА и по времени выведения.

Анализируемые схемы перелета с указанием в скобках используемого порядка резонанса таковы:

1. Земля – Земля – Венера (1:1) – Венера (4 : 3) – Венера (3 : 2) – Венера (нерезонансная орбита).
2. Земля – Земля – Венера (1 : 1) – Венера (1,5 : 1,5) – Венера (1 : 1) – Венера (нерезонансная орбита).

На траекториях второй схемы благодаря использованию окolorезонансной гелиоцентрической орбиты, почти кратной $\pi(2k - 1)$, после второго ГМ у Венеры удается эффективно увеличить наклонение орбиты, выбирая «малые» порядки резонанса. Максимальное значение числа m в порядке резонансов равно 1,5. Понятно, что это обстоятельство должно привести к уменьшению времени выведения КА на целевую гелиоцентрическую орбиту.

Основные характеристики оптимальных траекторий двух анализируемых схем выведения КА с комбинированной двигательной установкой приведены в табл. 2 и 3.

Анализ характеристик, приведенных в табл. 2, показывает, что участки оптимальных траекторий до первого ГМ у Венеры исследуемых схем перелета очень близки по всем характеристикам. В частности, времена перелета по участкам различаются на несколько десятых долей суток. Масса КА при первом подлете к Венере отличается всего на 4,1 кг (0,26%). Немного больше (однако тоже несильно) отличается величина гиперболического избытка скорости при ГМ у Земли: на 61,5 м/с (порядка 0,82%). Величина гиперболического избытка скорости при первом ГМ у Венеры отличается на 83,9 м/с (порядка 0,54%).

Существенно сильнее разнятся характеристики оптимальных траекторий рассматриваемых схем перелета начиная со второго ГМ у Венеры. Эти характеристики приведены в табл. 3. Сами величины гиперболических избытков скоростей при ГМ у Венеры очень слабо изменяются от первого ГМ до последнего. Это естественно при использовании резонансных орбит. Заметим, что если бы орбита Венеры рассматривалась как невозмущенная, то

при использовании целочисленных резонансов гиперболические избытки скоростей при всех ГМ у Венеры были бы одинаковыми. В этом случае почти таким же гиперболический избыток скорости был бы и для траектории второй схемы перелета. Причина этого обстоятельства в том, что орбита Венеры очень близка к круговой. Так как в настоящей работе рассматривается эфемеридная модель движения Венеры, то величина гиперболического избытка скорости при ГМ у Венеры изменяется. При этом следует учитывать, что последовательные резонансные ГМ осуществляются не в одной и той же точке пространства, т. е. угловая дальность перелета планета–планета почти кратна π . Такие гелиоцентрические орбиты будем называть окolorезонансными орбитами КА, а ГМ, который переводит КА на эту орбиту, – окolorезонансным.

На оптимальной траектории первой схемы перелета величина гиперболического избытка скорости при ГМ у Венеры меняется в диапазоне 15,4265 ... 15,4303 км/с. На оптимальной траектории второй схемы этот диапазон немного шире: 15,5137 ... 15,5680 км/с.

Использование π -резонансной гелиоцентрической орбиты позволило уменьшить порядок резонанса на последнем гелиоцентрическом перелете к Венере и выбрать его равным 1 : 1. Благодаря этому длительность нахождения КА на резонансных гелиоцентрических орбитах для траектории второй схемы оказалось в два раза меньше, чем для траектории первой схемы.

Продолжительность выведения КА на целевую гелиоцентрическую орбиту 1836,939 сут для оптимальной траектории первой схемы. Для оптимальной траектории второй схемы эта про-

Таблица 2. Характеристики оптимальных траекторий Земля–Земля–Венера для рассматриваемых двух схем перелета

Характеристика	Первая схема перелета	Вторая схема перелета
Дата отлета от Земли	27 января 2027 г.	27 января 2027 г.
Затраченная масса топлива ХРБ «Фрегат»	5226,1 кг	5309,4 кг
Продолжительность работы двигательной установки ХРБ «Фрегат»	14,642 мин	14,645 мин
Гиперболический избыток скорости при отлете от Земли	1387,795 м/с	1398,595 м/с
Масса КА после отделения ХРБ	1904,4 кг	1903,09 кг
Длительность гелиоцентрического перелета Земля–Земля	429,586 сут	430,23 сут
Дата гравитационного манёвра у Земли	1 апреля 2028 г.	1 апреля 2028 г.
Гиперболический избыток скорости у Земли при гравитационном манёвре	7459,5 м/с	7521,0 м/с
Требуемая масса ксенона на траектории Земля–Земля	298,3 кг	301,1 кг
Масса КА после гравитационного манёвра у Земли	1606,1 кг	1602,0 кг
Длительность гелиоцентрического перелета Земля–Венера	59,148 сут	58,402 сут
Требуемая масса ксенона на траектории Земля–Венера	0 кг	0 кг

Таблица 3. Характеристики резонансных с Венерой орбит КА для полученных двух схем перелета

Характеристика	Первая схема перелета	Вторая схема перелета
Дата первого гравитационного манёвра у Венеры	30 мая 2030 г.	30 мая 2030 г.
Гиперболический избыток скорости при первом подлете к Венере для гравитационного манёвра у нее	15,4298 км/с	15,5137 км/с
Длительность первого гелиоцентрического перелета Венера–Венера	224,703 сут.	224,698 сут.
Дата второго гравитационного манёвра у Венеры	9 января 2029 г.	9 января 2029 г.
Гиперболический избыток скорости при втором подлете к Венере для гравитационного манёвра у нее	15,4273 км/с	15,5156 км/с
Длительность второго гелиоцентрического перелета Венера–Венера	674,103 сут	337,918 сут
Дата третьего гравитационного манёвра у Венеры	14 ноября 2030 г.	13 декабря 2029 г.
Гиперболический избыток скорости при третьем подлете к Венере для гравитационного манёвра у нее	15,4265 км/с	15,5663 км/с
Длительность третьего гелиоцентрического перелета Венера–Венера	449,399 сут	224,705 сут
Дата четвертого гравитационного манёвра у Венеры	7 февраля 2032 г.	26 июля 2030 г.
Гиперболический избыток скорости при четвертом подлете к Венере для гравитационного манёвра у нее	15,4303 км/с	15,568 км/с
Требуемая масса ксенона на гелиоцентрических участках траектории Венера–Венера	0,22 кг	0,096 кг
Масса КА на целевой гелиоцентрической орбите	1605,9 кг	1601,9 кг
Длительность выведения КА на целевую гелиоцентрическую орбиту	1836,939 сут (5,029 лет)	1275,952 сут (3,493 лет)

должительность существенно меньше (только 1275,952 сут). Массы КА, выведенного на целевую гелиоцентрическую орбиту, достаточно близки в рассматриваемых схемах полета. Для первой схемы полета эта масса составляет 1605,9 кг. Для второй схемы эта масса немного меньше – 1601,9 кг.

На рис. 2 показаны две проекции оптимальной траектории первой схемы перелета. Все единицы измерений – астрономические. Положение Солнца обозначено серым кружком. Орбиты Земли и

Венеры показаны тонкими серыми пунктирными линиями. Треугольником обозначено положение Земли в момент старта КА с опорной орбиты, квадратом – положение Земли в момент, когда КА выполняет ГМ у нее, черным ромбом – положение Венеры при первом подлете КА для проведения последующей цепочки ГМ. Пассивные участки полета КА вдоль всего маршрута изображены тонкой черной линией, активные участки – жирной черной. Целевая гелиоцентрическая орбита КА, имеющая

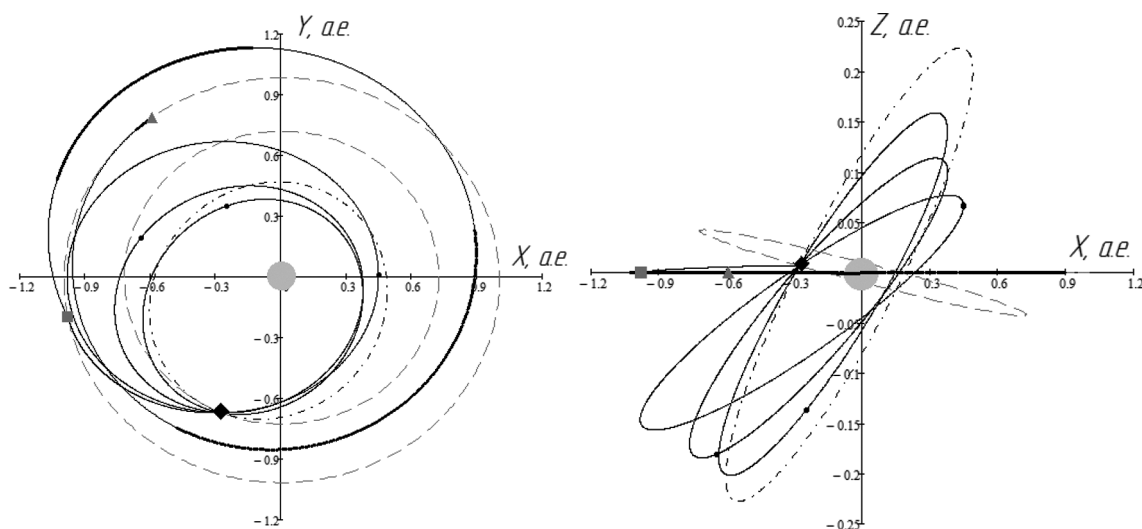


Рис. 2. Проекция первой траектории выведения КА в плоскостях xOy (а) и xOz (б) в гелиоцентрической эллиптической системе координат

наклонение 30° к плоскости экватора Солнца, изображена штрихпунктирной линией.

Характеристики гелиоцентрических орбит после ГМ у Земли и Венеры приведены в табл. 4. Строки таблицы соответствуют последовательности ГМ. Первая строка дает характеристики гелиоцентрической траектории перелета Земля–Венера.

На рис. 3 показаны две проекции второй схемы полета. Символы и линии аналогичны таковым на рис. 2. После третьего ГМ КА переходит на л-резонансную гелиоцентрическую орбиту с по-

рядком резонанса $1,5 : 1,5$. Черным кружком обозначено положение КА, когда он совершает четвертый и пятый ГМ.

Характеристики гелиоцентрических орбит после ГМ у Земли и Венеры для второй схемы перелета приведены в табл. 5.

Выводы

Проанализированы две траектории выведения КА, оснащенного комбинированной двигательной установкой, на целевую гелиоцентрическую орби-

Таблица 4. Характеристики гелиоцентрических орбит КА для первой схемы перелета

№ ГМ	Порядок резонанса	Период орбиты КА, сут	β , градусы*	Радиус перигелия, RSUN	Радиус афелия, а. е.	Наклонение орбиты КА к плоскости солнечного экватора, градусы
1	—	—	61,872	86,9	1,002	7,551
2	1 : 1	224,704	20,107	97,4	0,994	16,582
3	4 : 3	168,526	20,113	79,9	0,822	22,36
4	3 : 2	149,815	20,115	76,2	0,749	27,503
5	—	167,541	20,106	100,0	0,726	30,00

* β – угол между векторами гиперболического избытка скорости подлета к планете и отлета от нее.

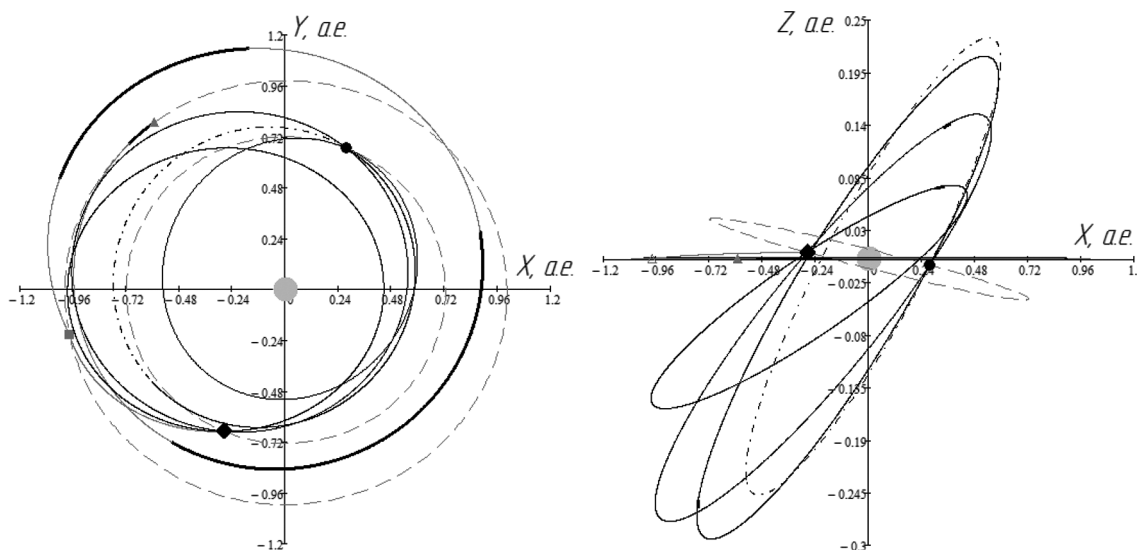


Рис. 3. Проекция второй траектории выведения КА в плоскостях xOy (а) и xOz (б) в гелиоцентрической эллиптической системе координат

Таблица 5. Характеристики гелиоцентрических орбит КА для второй схемы перелета

№ ГМ	Порядок резонанса	Период орбиты КА, сут	β , градусы	Радиус перигелия, RSUN	Радиус афелия, а. е.	Наклонение орбиты КА к плоскости солнечного экватора, градусы
1	—	—	61,872	86,9	1,002	7,551
2	1 : 1	224,704	20,107	97,4	0,994	16,582
3	4 : 3	168,526	20,113	79,9	0,822	22,36
4	3 : 2	149,815	20,115	76,2	0,749	27,503
5	—	167,541	20,106	100,0	0,726	30,00

ту для исследования Солнца. Первая траектория включает окolorезонансные с Венерой орбиты с почти целым числом витков вокруг Солнца. Последовательность резонансов следующая: 1 : 1; 4 : 3; 3 : 2. Требуемая для реализации полученной траектории масса топлива составляет 298,5 кг. Время выведения на целевую гелиоцентрическую орбиту равно 1836,939 сут. Оптимизируемая конечная масса КА составляет 1605,9 кг.

Вторая предложенная схема перелета включает один окolorезонансный ГМ у Венеры, переводящий КА на гелиоцентрическую орбиту, почти кратную $\pi(2k - 1)$. Последовательность резонансов следующая: 1 : 1; 1,5 : 1,5; 1 : 1. КА затрачивает 301,2 кг топлива. Длительность выведения КА составила 1275,952 сут. Конечная масса КА оказалась равной 1601,9 кг. Включение в схему полета орбиты с резонансом 1,5 : 1,5 позволило значительно, на 30,5%, уменьшить время выполнения транспортной миссии по сравнению с первой схемой перелета.

Список источников

1. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Тучин А.Г. Виртуальные гравитационные манёвры при проектировании межпланетных перелетов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2023. № 39. 24 с. DOI: 10.20948/prepr-2023-39
2. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В. и др. Обобщение формулы Резерфорда для синтеза цепочек гравитационных манёвров // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2021. Т. 501. № 1. С. 5–7.
3. Константинов М.С., Петухов В.Г., Тейн М. Оптимизация гелиоцентрических перелетов. М.: Изд-во МАИ, 2015. 259 с.
4. Konstantinov M.S., Shevchenko V.V. Ballistic Design of a Solar Probe into a Heliocentric Orbit with a Large Inclination to the Solar Equator // AIP Conference Proceedings. Vol. 2549. XLV Academic Space Conference (30 March – 2 April 2021; Moscow, Russia). 2023. No. 1: 120004. DOI: 10.1063/5.0107997
5. Ельников Р.В. Гравитационный манёвр у Луны при межпланетных перелетах космического аппарата с малой тягой // Труды МАИ. 2012. № 50. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=27613>
6. Ельников Р.В. Анализ перелета Земля–Марс с гравитационным манёвром у Луны при использовании малой тяги // Вестник Московского авиационного института. 2012. Т. 19. № 5. С. 38–44. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=35694>
7. Леб Х.В., Петухов В.Г., Попов Г.А. Гелиоцентрические траектории космического аппарата с ионными двигателями для исследования Солнца // Труды МАИ. 2011. № 42. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=24275>
8. Кузнецов В.Д. Космические и внеатмосферные исследования Солнца // Успехи физических наук. 2025. Т. 195. № 8. С. 858–874. DOI: 10.3367/UFNe.2025.03.039920
9. Кузнецов В.Д. Научные задачи проекта «Интергелиозонд» // Механика, управление и информатика. 2012. № 6(12). С. 5–14.
10. Константинов М.С., Шевченко В.В. Проектно-баллистический анализ выведения космического аппарата на гелиоцентрическую орбиту с наклоном 30 градусов к плоскости солнечного экватора // Вестник Московского авиационного института. 2024. Т. 31. № 2. С. 144–154. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=180657>
11. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В. и др. Синтез последовательности гравитационных манёвров КА для достижения орбит с высоким наклоном к эклиптике // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 43. 32 с. DOI: 10.20948/prepr-2016-43
12. Константинов М.С., Курасбедиани Р.Г. Анализ характеристик межпланетной траектории, использующей резонансные с орбитой планеты участки траектории, с учетом ее реального движения // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2022. № 2(743). С. 85–93. DOI: 10.18698/0536-1044-2022-2-85-93
13. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. и др. Математическая теория оптимальных процессов. 4-е изд. М.: Наука, 1983. 392 с.
14. Casalino L., Colasurdo G., Pastrone D. Optimization Procedure for Preliminary Design of Opposition-Class Mars Missions // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1998. Vol. 21. No. 1, pp. 134–140. DOI: 10.2514/2.4209
15. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. 2-е изд. М.: Наука, 1988. 552 с.
16. Konstantinov M.S., Thein M. Method of Interplanetary Trajectory Optimization for the Spacecraft with Low Thrust and Swing-bys // Acta Astronautica. 2017. Vol. 136, pp. 297–311. DOI: 10.1016/j.actaastro.2017.02.018
17. Иванюхин А.В. Методы проектирования траекторий КА с электроракетными двигателями на основе анализа области существования решений и исследования задачи о минимальной тяге: Дисс. ... канд. техн. наук. М., 2015. 101 с.
18. Ивашкин В.В., Крылов И.В. Оптимизация траекторий космического аппарата с электроракетным двигателем малой тяги // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 94. 32 с. DOI: 10.20948/prepr-2020-94
19. Konstantinov M.S. Analysis of the viability of using a sequence of gravitational maneuvers at the opposite points of the planet orbit // Advances in the Astronautical Sciences. II IAA/AAS Conference on Space Flight Mechanics and Space Structures and Materials, Scitech Forum (25–27 June 2019; Moscow). 2019. Vol. 174. IAA-AAS-SciTech-035
20. Константинов М.С., Мин Т. Метод оптимизации траектории выведения КА с электроракетной двигательной установкой на ГСО // Вестник Московского авиационного института. 2009. Т. 16. № 5. С. 282–290. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=12386>

References

1. Golubev YuF, Grushevskii AV, Tuchin AG. Virtual gravity maneuvers in the design of interplanetary flights. *Keldysh Institute Preprints*. 2023(39). 24 p. (In Russ.). DOI: 10.20948/prepr-2023-39
2. Golubev YuF, Grushevskii AV, Koryanova VV, et al. Rutherford's generalized formula for the synthesis of gravity assists chains. *Doklady Rossiiskoi akademii nauk. Fizika, tekhnicheskie nauki*. 2021;501(1):5–7. (In Russ.).
3. Konstantinov MS, Petukhov VG, Tein M. *Optimization of heliocentric flights*. Moscow: MAI; 2015. 259 p. (In Russ.).
4. Konstantinov MS, Shevchenko VV. Ballistic Design of a Solar Probe into a Heliocentric Orbit with a Large Inclination to the Solar Equator. AIP Conference Proceedings. Vol. 2549. *XLV Academic Space Conference (March 30 – April 2, 2021; Moscow, Russia)*. 2023. No. 1: 120004. DOI: 10.1063/5.0107997
5. Elnikov RV. Use of lunar gravity assist maneuver in interplanetary electric propulsion trajectory design. *Trudy MAI*. 2012(50). (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=27613>
6. Elnikov RV. The analysis of a transfer Earth Mars with a lunar gravity assist maneuver and use of a small thrust. *Aerospace MAI Journal*. 2012;19(5):38–44. (In Russ.). URL: <https://vestnikmai.ru/eng/publications.php?ID=35694>
7. Loeb HW, Petukhov VG, Popov GA. Heliocentric Trajectories of Solar Orbiter with Ion Propulsion. *Trudy MAI*. 2011(42). (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=24275>
8. Kuznetsov VD. Space-based and extra-atmospheric studies of the Sun. *Physics-Uspexhi*. 2025;68:807–822. (In Russ.). DOI: 10.3367/UFNe.2025.03.039920
9. Kuznetsov VD. Scientific objectives of the Intergeliosond project. *Mekhanika, Upravlenie i Informatika*. 2012(6):5–14. (In Russ.).
10. Konstantinov MS, Shevchenko VV. Project-and-Ballistic Analysis of a Spacecraft Insertion into the Heliocentric Orbit with Thirty Degrees Inclination to the Solar Equator Plane. *Aerospace MAI Journal*. 2024;31(2):144–154. (In Russ.). URL: <https://vestnikmai.ru/eng/publications.php?ID=180657>
11. Golubev YF, Grushevskii AV, Korianov VV, et al. Synthesis of a sequence of spacecraft gravitational maneuvers to achieve orbits with a high inclination to the ecliptic. *Keldysh Institute Preprints*. 2016(43). 32 p. (In Russ.). DOI: 10.20948/prepr-2016-43
12. Konstantinov MS, Kurasbediani RG. Planet's Real Motion Taken into Consideration in Analysis of an Interplanetary Trajectory Using Resonant with the Planet's Orbit Segments. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 2022(2):85–93. (In Russ.). DOI: 10.18698/0536-1044-2022-2-85-93
13. Pontryagin LS, Boltyanskii VG, Gamkrelidze RV, et al. *Mathematical theory of optimal processes*. 4th ed. Moscow: Nauka; 1983. 392 p. (In Russ.).
14. Casalino L, Colasurdo G, Pastrone D. Optimization Procedure for Preliminary Design of Opposition-Class Mars Missions. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1998;21(1):134–140. DOI: 10.2514/2.4209
15. Vasil'ev FP. *Numerical methods for solving extreme problems*. 2nd ed. Moscow: Nauka; 1988. 552 p. (In Russ.).
16. Konstantinov MS, Thein M. Method of Interplanetary Trajectory Optimization for the Spacecraft with Low Thrust and Swing-bys. *Acta Astronautica*. 2017;136:297–311. DOI: 10.1016/j.actaastro.2017.02.018
17. Ivanyukhin AV. *Methods of designing spacecraft trajectories with electric rocket engines based on the analysis of the field of existence of solutions and the study of the problem of minimum thrust*. PhD thesis. Moscow: MAI; 2015. 101 p. (In Russ.).
18. Ivashkin VV, Krylov IV. Optimization of spacecraft trajectories with a low-thrust electric rocket engine. *Keldysh Institute Preprints*. 2020(94). 32 p. (In Russ.). DOI: 10.20948/prepr-2020-94
19. Konstantinov MS. Analysis of the viability of using a sequence of gravitational maneuvers at the opposite points of the planet. *Advances in the Astronautical Sciences. II IAA/AAS Conference on Space Flight Mechanics and Space Structures and Materials, Scitech Forum (June 25–27, 2019; Moscow)*. 2019. Vol. 174. IAA-AAS-SciTech-035
20. Konstantinov MS, Min T. A trajectory optimization method to solve a problem of spacecraft insertion into geostationary orbit using electric thrusters. *Aerospace MAI Journal*. 2009;16(5):282–290. (In Russ.). URL: <https://vestnikmai.ru/eng/publications.php?ID=12386>

Статья поступила в редакцию / Received 01.02.2026
 Одобрена после рецензирования / Revised 11.02.2026
 Принята к публикации / Accepted 16.02.2026