

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)**

На правах рукописи
УДК 536.21; 532. 536

КОЛЕСНИК СЕРГЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ



**РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ЧИСЛЕННО-
АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ
ЗАДАЧ СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА МЕЖДУ
ВЯЗКИМИ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИМИ ТЕЧЕНИЯМИ И
АНИЗОТРОПНЫМИ ТЕЛАМИ**

Специальность 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ»

ДИССЕРТАЦИЯ
**на соискание ученой степени доктора физико-
математических наук**

Научный консультант:
Заслуженный деятель науки РФ,
доктор физико-математических наук,
профессор Формалев В.Ф.

Москва 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	7
1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА МЕЖДУ ВЯЗКИМИ ТЕПЛОГАЗОДИНАМИЧЕСКИМИ ТЕЧЕНИЯМИ И АНИЗОТРОПНЫМИ ЗАТУПЛЕННЫМИ ТЕЛАМИ . . .	28
1.1. Уравнения вязкой теплогазодинамики на затупленных телах	31
1.2. Уравнения вязких пристенных теплогазодинамических течений	38
1.3. Моделирование турбулентных пристенных газодинамических течений	46
1.4. Моделирование нестационарного теплопереноса в затупленных анизотропных телах в условиях сопряженного теплообмена	54
1.4.1. Комбинированные системы координат для затупленных тел	54
1.4.2. Уравнения теплопереноса в анизотропных телах в различных системах координат	58
1.4.3. Изменение компонентов тензора теплопроводности при переходе от декартовых координат к криволинейным	67
1.4.4. Краевые условия на границах анизотропных тел	74
2. НОВЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОГАЗОДИНАМИКИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛАХ НА ОСНОВЕ РАСЩЕПЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ	82
2.1. Комплексная физико-математическая модель сопряженного теплообмена между вязкими теплогазодинамическими течениями и телами с анизотропией свойств.	83
2.2. Метод расщепления с экстраполяцией по пространственным переменным численного решения задач вязкой теплогазодинамики в ударном слое	88
2.2.1. Определение теплогазодинамических характеристик в окрестности критической точки и на линии полного торможения	90

2.2.2. Конечно-разностная схема метода расщепления с экстраполяцией по пространственным переменным с использованием процедуры «предиктор-корректор»	97
2.2.3. Порядок аппроксимации метода МРЭП	107
2.3. Метод расщепления с экстраполяцией по времени численного решения задач анизотропной теплопроводности	115
2.3.1. Конечно-разностная схема метода МРЭВ	116
2.3.2. Анализ порядка аппроксимации конечно-разностной схемы метода МРЭВ	120
2.3.3. Исследование устойчивости конечно-разностной схемы метода МРЭВ по начальным условиям	123
2.3.4. Анализ устойчивости конечно-разностной схемы метода МРЭВ по правым частям	125
2.4. Высокоточный метод определения температуры границы сопряжения на основе новых численных методов МРЭП газе и МРЭВ в анизотропном теле	128
2.4.1. Высокоточный алгоритм численного решения задачи об определении температуры границы сопряжения	128
2.4.2. Ликвидация неустойчивости, возникающей при явной аппроксимации лучистого теплового потока	133
3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ОБТЕКАНИИ ЗАТУПЛЕННЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ ВЯЗКИМИ ПРИСТЕННЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ	138
3.1. Постановка задачи сопряженного теплообмена при обтекании затупленных анизотропных тел вязкими пристенными течениями	139
3.2. Формирование краевых условий для задачи теплогазодинамики в пристенных высокоскоростных течениях на затупленных телах	147
3.2.1. Определение теплогазодинамических характеристик на границе вязкого течения	147

3.2.2. Распределение давления вдоль внешней границы пристенного течения	152
3.2.3. Определение теплогазодинамических характеристик в пристенном течении за прямой частью ударной волны в окрестности критической точки и на линии полного торможения	154
3.3. Численное решение задачи сопряженного теплопереноса с учетом продольной неизотермичности	158
3.4. Теплоперенос в анизотропных областях с разрывными характеристиками (сопряженный теплоперенос между гомогенными средами)	166
3.4.1. Моделирование сопряженного теплопереноса в многослойных анизотропных областях.	166
3.4.2. Схема метода МРЭВ численного решения задач анизотропной теплопроводности в многослойных телах.	172
3.5. Сопряженный теплоперенос между пристенными теплогазодинамическими течениями и анизотропными составными телами	181
3.5.1. Метод численного решения сопряженных задач с высокой точностью	182
3.5.2. Анализ результатов численного решения сопряженных задач вязкой теплогазодинамики и теплопроводности в составных анизотропных телах.	188
4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА В АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НОВЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ.	202
4.1. Аналитические решения задач анизотропной теплопроводности в полупространстве при условии теплообмена на границе	203
4.1.1. Аналитическое решение задачи анизотропной теплопроводности в полупространстве при задании тепловых потоков на границе	203
4.1.2. Теплоперенос в анизотропном полупространстве в условиях теплообмена с окружающей средой, имеющей заданную температуру ...	212

4.2. Аналитические решения задач теплопереноса в условиях теплообмена на границах анизотропной пластины	219
4.2.1. Случай кусочно-постоянных тепловых потоков на границах анизотропной пластины	219
4.2.2. Случай задания тепловых потоков на границах анизотропной пластины в виде произвольных симметричных относительно вертикальной оси функций	229
4.2.3. Аналитическое исследование теплопереноса в теплозащитных анизотропных материалах при произвольном тепловом нагружении	232
4.2.4. Анизотропная пластина в условиях произвольного нестационарного теплообмена на границах	245
4.3. Сопряженный теплоперенос между газодинамическими вязкими течениями и анизотропными телами на основе аналитических решений .	248
4.3.1. Сопряженный теплообмен между теплогазодинамическим пограничным слоем и анизотропными телами	249
4.3.2. Сопряженный теплообмен между вязким ударным газодинамическим слоем и поперечно обтекаемым анизотропным полупространством	257
5. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБРАТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ И ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛООБМЕНА МЕЖДУ АНИЗОТРОПНЫМИ ТЕЛАМИ И ВЯЗКИМИ ТЕПЛОГАЗОДИНАМИЧЕСКИМИ ТЕЧЕНИЯМИ	267
5.1. Разработка методологии численного решения задач идентификации компонентов тензора теплопроводности анизотропных материалов с учетом регуляризирующего функционала	269
5.1.1. Постановка задачи	269
5.1.2. Общий метод решения	270
5.1.3. Построение регуляризирующего функционала	277
5.1.4. Результаты численных экспериментов по восстановлению нелинейных компонентов тензора теплопроводности без использования регуляризирующего функционала	280

5.1.5. Результаты численных экспериментов по восстановлению нелинейных компонентов тензора теплопроводности с использованием регуляризирующего функционала	290
5.2. Математическое моделирование обратных граничных задач сопряженного теплообмена между анизотропными телами и вязкими теплогазодинамическими течениями с учетом регуляризирующего функционала	299
5.2.1 Метод решения обратной граничной задачи сопряженного теплопереноса с использованием аналитического решения второй начально-краевой задачи анизотропной теплопроводности	300
5.2.2. Метод решения обратной граничной задачи сопряженного теплопереноса на основе численного решения второй начально-краевой задачи нелинейной теплопроводности в анизотропных телах	308
5.3. Необходимые и достаточные условия сходимости неявных итерационных методов в обратных нелинейных задачах сопряженного теплопереноса в анизотропных телах	321
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	327
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	331
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ОПИСАНИЕ ОБЩЕГО АЛГОРИТМА И ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ	349
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ОПИСАНИЕ ОБЩЕГО АЛГОРИТМА И ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ	353

ВВЕДЕНИЕ

При высоких скоростях полета (числа Маха набегающего потока $M_n \geq 5$) летательных аппаратов (ЛА) элементы конструкций (в основном носовые части) подвергаются интенсивному аэродинамическому нагреву. Источниками аэродинамического тепла в основном являются адиабатическое сжатие газа в ударном слое между ударной волной и телом и трение в пристенных течениях (в частности, в пограничном слое). Аналогично, элементы конструкций газотурбинных двигателей ЛА, в основном лопатки газовых турбин, функционируют в тяжелых условиях теплового и механического нагружения, когда температура газодинамического потока достигает 2500 К и выше.

В этих условиях необходимы эффективные способы тепловой защиты элементов конструкций ЛА, позволяющие преодолеть, так называемый, «тепловой барьер», заключающийся в том, что при возрастании скорости ЛА температура газа возрастает примерно пропорционально квадрату скорости, причем теоретически установлено (и экспериментально подтверждено), что «тепловой барьер» можно преодолеть только при активных способах тепловой защиты, а именно путем создания системы автоматического регулирования подачи в высокотемпературные пограничные слои жидких и газообразных охладителей [1, 26, 84–87, 108, 130].

В настоящее время в качестве тепловой защиты высокоскоростных ЛА активно используются композиционные материалы, графиты и графитосодержащие материалы (например, углерод-углеродные композиты), которые все являются анизотропными со степенью анизотропии от единицы (изотропные материалы) до 200 (например, пиролитический графит). В таких материалах теплопроводность описывается не постоянной величиной, а тензором второго ранга, компоненты которого зависят от температуры.

При анализе теплового состояния элементов конструкций ЛА в условиях аэрогазодинамического нагрева основными являются проблемы определения тепловых потоков от газодинамического течения к телу и распределения этих тепловых потоков в теле с дальнейшим определением в нем температурных полей, от которых в существенной степени зависит живучесть всего ЛА.

В связи с бурным развитием авиационной и ракетно-космической техники в пятидесятые годы прошлого столетия были разработаны экспериментально-теоретические методы определения тепловых потоков от газодинамических течений к телам [1, 26, 27, 84, 87, 96, 146, 148], позволившие с удовлетворительной точностью на то время (с точностью до ~ 50%) определять тепловые потоки к телу и соответствующие температурные поля в теле.

Основным недостатком тех методик был тот факт, что параметры теплообмена – коэффициент теплоотдачи α_w и эффективная температура (или энтальпия) газа T_e (или I_e) определялись при некоторой осредненной температуре границы тела, принятой a'priori, а не рассчитанной из теплового состояния тела, что в итоге вносило значительные погрешности в определение теплового состояния обтекаемых тел.

В качестве такой температуры стенки при определении параметров теплообмена в различных методиках принимались или адиабатическая температура, когда на стенке отсутствовал теплообмен, или равновесная температура при равновесии между конвективным и лучистым от стенки тепловыми потоками, или температура восстановления [1].

$$T_e = T_n \left(1 + r \frac{k-1}{2} M_n^2 \right), \quad (\text{B.1})$$

где T_n , M_n – температура и число Маха набегающего потока, $k = c_p / c_v$ – постоянная адиабаты, а c_p , c_v – изобарная и изохорная теплоемкости; r – коэффициент восстановления ($r_n = 0,845$ для ламинарного и $r_T = 0,895$ – для турбулентного течений).

Ясно, что в многообразных условиях аэрогазодинамического нагрева тел такой подход неприемлем, поскольку не учитывает теплового состояния тела, которое, в первую очередь, зависит именно от тепловых потоков от газодинамического течения, а также от множества других факторов.

В этих условиях возникает необходимость совместного решения задач теплогазодинамики и теплопроводности в теле, сопряженных на границе тела, соприкасающейся с газодинамическим потоком.

Возникает проблема постановки и решения задач сопряженного теплообмена между газодинамическими течениями и обтекаемыми телами, причем в качестве условий сопряжения на общей границе естественно задать непрерывность температур и тепловых потоков.

Такие краевые условия, встречающиеся не только в теории теплообмена, но и в других областях естествознания, например, в теории упругости, акад. Лыков А.В. назвал *краевыми условиями четвертого рода* в дополнение к граничным условиям первого рода, когда на границе заданы значения искомой функции, в данном случае температуры, граничным условием второго рода, когда на границе заданы потоки, в данном случае тепловые, и граничные условия третьего рода, когда на границе заданы линейные комбинации искомой функции и соответствующего потока, в данном случае конвективно-кондуктивный теплообмен.

В условиях аэрогазодинамического нагрева предполагается, что граничные условия четвертого рода ставятся на границах сопряжения гетерогенных сред (газа и твердого тела).

Простота постановки краевых условий IV-го рода наталкивается, порой, на непреодолимые трудности по определению этих условий, то есть температур и тепловых потоков на границах сопряжения, поскольку эти условия должны быть определены из решения соответствующих задач в различных средах, каждая из которых имеет самостоятельное значение.

Поэтому традиционно тепловое состояние тел при аэрогазодинамическом нагреве определялось по тепловому потоку от газа к телу в форме закона Ньютона.

$$q_w = \alpha_w (T_e - T_w), \quad (\text{B.2})$$

где q_w – плотность (на единицу площади) теплового потока к телу с температурой границы, равной T_w , а α_w – коэффициент теплоотдачи, зависящий от многочисленных теплогазодинамических характеристик и температуры тела и определяемый, в основном, по полуэмпирическим зависимостям с использованием температуры T_w поверхности, отличной от той, которая должна определиться в расчетах, что ставит под вопрос использование рекомендуемого коэффициента теплоотдачи α_w в серийных расчетах [84].

Для устранения значительных погрешностей в определении коэффициента теплоотдачи (погрешность в 20% считается удовлетворительной) из-за рассогласования температур стенки в опытах и расчетах необходимо ставить и решать сопряженные задачи теплообмена с использованием граничных условий четвертого рода

$$-\lambda_T \text{grad} T_e \Big|_w = -\lambda_T \text{grad} T_T \Big|_w + q_{\phi-x} \quad (\text{B.3})$$

$$T_e \Big|_w = T_T \Big|_w = T_w, \quad (\text{B.4})$$

где λ_T , λ_T , T_e , T_T – соответственно теплопроводности и температуры газа и тела на границе w сопряжения, а $q_{\phi-x}$ – теплота различных физико-химических превращений, которые могут иметь место на границе сопряжения.

При этом тело может быть анизотропным, тогда вместо скалярной величины теплопроводности λ_T в выражении (B.3) необходимо использовать тензор теплопроводности Λ_T .

Таким образом, математическое моделирование и решение сопряженных задач теплопереноса между вязкими газодинамическими

течениями и телами (в том числе анизотропными) является **актуальной проблемой**, поскольку позволяет устранить значительные погрешности при тепловом проектировании высокоскоростных ЛА.

При постановке и решении сопряженных задач теплообмена следует иметь в виду тот факт, что задачи вязкой и теплопроводной теплогазодинамики являются существенно нелинейными и для их решения используются только численные методы, и что для их решения необходимо знание температуры границы обтекаемого тела, что эту температуру необходимо определять из решения задачи теории теплопроводности в теле со всеми вытекающими отсюда сложностями и с граничными условиями, определяемыми из решения задачи теплогазодинамики.

Таким образом, задачи сопряженного теплообмена решаются в различных средах, а тепловое состояние в них описывается уравнениями различных типов, причем распространение тепловых потоков и температур в различных средах имеет существенно различные скорости. Так, например, скорость распространения изотерм в теле имеет порядок мм/с, в то время как за одну секунду характеристики газодинамического течения около тела полностью изменяются (при скорости набегающего потока в 2000 м/с и характерном размере тела примерно в 1м такое изменение происходит в течение $(0,5 \cdot 10^{-3})$ секунды). Поэтому газодинамическое течение можно рассматривать *квазистационарным* (стационарным в каждый момент времени), а распределение температур в теле – нестационарным.

Отсюда уравнения вязкой газодинамики являются уравнениями либо эллиптического типа, если учитываются дивергентные члены газодинамических функций по продольной переменной, либо уравнениями параболического типа, если уравнения содержат вторые производные от газодинамических функций только по нормальной к поверхности тела независимой переменной (например, уравнения пограничного слоя, в которых параболической переменной является пространственная переменная вдоль обтекаемого тела). Уравнения теплопереноса в теле являются

уравнениями параболического типа, причем параболической переменной в них является время.

Одними из первых работ по сопряженному теплопереносу были работы Чепмена Д.Р. и Рубезина М.У. [157], Шлихтинга Г. [146], Бакстера Д.С. и Рейнольдса У.С. [154], где рассматривался теплообмен между гидродинамическими течениями в трубах или простейшие ламинарные течения воздуха на пластинах. Наибольший вклад в исследования сопряженного теплообмена внес акад. Лыков А.В. и его школа [85–87]. В справочнике [87] дан подробный анализ условий использования формулы Ньютона (В. 2) на основе введения числа Брюна

$$Br_x = \frac{\lambda_T \delta}{\lambda_{Tx}} Pr^m \cdot Re_x^n, \quad (B.5)$$

характеризующего отношение перепада температур в теле к перепаду температур в пограничном слое. В выражении (В 5) введены следующие обозначения: λ_T , λ_{Tx} – теплопроводности газа и тела соответственно, δ – толщина тела, x – продольная переменная вдоль тела, Pr и Re_x – соответственно число Прандтля и Рейнольдса: $Pr = \frac{\mu_T c_p}{\lambda_T}$, $Re_x = \frac{\rho_T \cdot v_T \cdot x}{\mu_T}$; μ_T – динамическая вязкость, ρ_T – плотность, c_p – теплоемкость при постоянном давлении, v_T – характерная скорость газа (например, скорость на внешней границе пограничного слоя).

Чем меньше число Br_x (т.е. чем больше теплопроводность тела), тем более надежно можно решать задачи теплообмена традиционным путем без учета сопряжения с температурным полем внутри обтекаемого тела. Если в качестве отношения перепадов температур в теле и газе приближенно принять число Br_x , то устанавливая упомянутое отношение температур в качестве минимального числа Br_x , приходим к тому, что при превышении этого числа необходимо учитывать сопряженность (влияние температурного поля в теле на температурное поле в газе), а ниже этого числа – вести расчет

теплообмена традиционным образом с погрешностью, равной минимальному числу Br_x .

В условиях аэрогазодинамического нагрева затупленных анизотропных тел анализ сопряженности теплообмена по числу Br_x по сложности сопоставим с решением самой задачи сопряженного теплообмена, поскольку необходимо учитывать наличие следующих факторов: градиента давления, сжимаемости газа, диссипативной функции, диссоциации, различной теплопроводности в теле в различных направлениях, большой степени анизотропии в продольном направлении обтекаемого тела. В последнем случае теплопроводность в продольном направлении настолько велика по сравнению с теплопроводностью в нормальном к телу направлении, что тепловые потоки внутри тела канализируются вдоль тела, в результате чего температура вдали от критической точки возрастает до значений, когда происходит охлаждение боковой поверхности. В этом случае в газе, соблюдая условия сопряжения, необходимо учитывать изменение вторых производных газодинамических характеристик по продольной переменной, в результате чего уравнения теплового пограничного слоя перестают быть таковыми, т.е. меняется тип уравнений с параболического на эллиптический.

В этих условиях бессмысленно проводить анализ сопряженности по числу Br_x , а сразу разрабатывать методы решения подобных сопряженных задач.

В работах автора (в соавторстве) [50–55, 66–71, 124, 131, 132, 134] разработаны комплексные методы решения сопряженных задач теплопереноса между вязкими газодинамическими течениями и анизотропными затупленными телами в условиях аэрогазодинамического нагрева с учетом высокой степени анизотропии.

В связи с тем, что задачи теплогазодинамики являются многомерными по пространственным переменным, то сопрягаемые задачи теплопроводности должны рассматриваться в многомерной постановке. Поэтому перед тем как формулировать сопряженные задачи теплообмена необходимо

сформулировать отдельно задачи теплогазодинамики и отдельно задачи анизотропной теплопроводности, а затем состыковать их с помощью граничных условий IV-го рода на границе “газ – твердое тело”.

Поскольку уравнения теплогазодинамики и теории теплопроводности при высоких температурах являются нелинейными, а сопряженные задачи – существенно нелинейными, то для их решения в основном используются численные методы. Для этого необходимо разработать новые и модифицировать существующие численные методы вязкой теплогазодинамики между ударной волной и телом, экономичные абсолютно устойчивые численные методы решения задач теплопереноса, содержащих смешанные производные (анизотропные среды), а также численные методы решения сопряженных задач теплогазодинамики и теплопроводности.

Численные методы в газовой динамике активно разрабатывались в работах Яненко Н.Н. [151], Рождественского Б.Л. и Яненко Н.Н. [104], Самарского А.А., Попова Ю.П. [107], Самарского А.А., Вабищевича П.Н. [108, 109], однако замкнутые алгоритмы численного решения задач теплогазодинамики на основе уравнений Навье-Стокса между ударной волной и анизотропным телом автору не известны.

Все существующие численные методы решения задач анизотропной теплопроводности, аппроксимируют смешанные дифференциальные операторы на предыдущих временных слоях (т.е. явным образом), что при определенных значениях сеточных характеристик приводит к неустойчивости решения. К таким методам можно отнести методы дробных шагов Яненко Н.Н. [151], центрально-симметричный метод Самарского А.А. [105], метод переменных направлений Писмена-Рэчфорда [169], методы стабилизирующей поправки и предиктор-корректор Дугласа и Гана [151] и др. Ряд экономичных абсолютно устойчивых численных методов решения задач со смешанными дифференциальными операторами разработан в монографии Формалева В.Ф. [122], в книге Формалева В.Ф., Ревизникова Д.Л. [120], а также в работе автора с соавторами [49, 62].

Методы численного решения сопряженных задач теплогазодинамики и анизотропной теплопроводности отсутствуют за исключением работ автора с соавторами [67, 69, 70, 124, 131, 132, 139].

Таким образом, разработка экономичных абсолютно устойчивых численных методов решения не только сопряженных задач вязкой газодинамики и анизотропной теплопроводности, но и отдельно задач вязкой теплогазодинамики и задач теплопроводности в анизотропных телах, является актуальной проблемой.

Многие теплогазодинамические параметры и теплофизические характеристики (ТФХ) сопряженного теплопереноса, такие как компоненты тензоров теплопроводности анизотропных тел, тепловые потоки от газодинамического течения к телу, динамическая вязкость и теплопроводность газа, температура границы сопряжения, невозможно определить в стендовых или натуральных экспериментах в силу конечных размеров датчиков. Однако их можно определить по измерениям других величин, например, по распределению температур в теле путем математического моделирования обратных задач (задач идентификации).

Математическое моделирование задач идентификации вообще и задач теплопереноса, в частности, является **актуальной** и, в то же время, одной из самых сложных проблем естествознания, поскольку такие задачи в большинстве своем являются некорректными.

По обратным задачам существуют прекрасные монографии Алифанова О.М., Артюхина Е.А. и Румянцева С.В. [2], Алифанова О.М. [3], Самарского А.А. и Вабищевича П.Н. [109], Тихонова А.Н. и Арсенина В.Н. [117], Бэка Д.В. [155] и др., в которых рассматривались одномерные обратные задачи теплопроводности по восстановлению постоянных и нелинейных коэффициентов теплопроводности в изотропных средах.

Обратные граничные и коэффициентные задачи теплопроводности в анизотропных телах рассматривались автором в соавторстве с Формалевым В.Ф. и Кузнецовой Е.Л. в работах [48–51, 64, 68, 76]. Однако обратные задачи

сопряженного теплообмена между вязкими газодинамическими течениями и изотропными и анизотропными телами вообще не рассматривались.

В соответствии с изложенным формулируется **цель диссертационной работы:**

Разработка математического аппарата численного и аналитического решения прямых и обратных задач сопряженного теплообмена между вязкими газодинамическими течениями и анизотропными телами и применение его в задачах аэрогазодинамического нагрева высокоскоростных летательных аппаратов (ЛА).

Диссертация состоит из введения и пяти глав, заключения, списка литературы и двух приложений с описанием программных комплексов.

В первой главе впервые сформулирована комплексная (обобщенная) физико-математическая модель сопряженного теплообмена между вязкими теплогазодинамическими течениями на основе уравнений Навье-Стокса между головной ударной волной и поверхностью тела и затупленными носовыми частями ЛА с тепловой защитой, состоящей из анизотропных материалов (композиционных материалов, графитов и графитосодержащих материалов, некоторых редкоземельных элементов). Математические модели теплогазодинамики и теплопереноса в затупленных телах стыкуются (сопрягаются) на поверхности тела с использованием краевых условий IV-го рода – непрерывности тепловых потоков и температур на границе «газ – твердое тело». В качестве граничных условий для газодинамического течения рассматриваются условия прилипания на поверхности тела и отношения газодинамических характеристик на ударной волне. Рассмотрены различные модели турбулентности – конечные алгебраические модели, в том числе, модель полной вязкости [19] и двух-параметрические дифференциальные модели Джонса-Лаундера ($k-\varepsilon$ модели) [177] и модель Саффмена [19], их достоинства и недостатки.

Уравнения теплопереноса в затупленном анизотропном теле рассматриваются в различных криволинейных системах координат: для тел с

осевой ориентацией носовая часть рассматривается в сферической системе координат, а хвостовая коническая часть – в произвольной системе координат; для плоских тел носовое затупление рассматривается в цилиндрической системе координат, а хвостовая (клиновидная) часть – в декартовой системе координат. На границах этих частей задаются непрерывными тепловые потоки и температуры в различных системах координат.

При выводе уравнений теплопереноса в криволинейных системах координат для различных частей тела изменяются не только дифференциальные операторы, как в изотропных телах, но и компоненты тензоров теплопроводности.

Постановка комплексной физико-математической модели газовой динамики и анизотропной теплопроводности предполагает тот факт, что при степени анизотропии выше 10–15 (отношение максимального главного коэффициента теплопроводности к минимальному) тепловые потоки в теле в продольном направлении могут быть настолько значительными, что хвостовая часть затупленного тела существенно прогревается, с ней значительно прогревается граница «газ – твердое тело», что влечет за собой уменьшение тепловых потоков от газа к телу в соответствии со следующими факторами, действующими в одном направлении: уменьшения градиента температур на границе сопряжения, увеличения динамической вязкости и уменьшения плотности газа, уменьшающие местные числа Рейнольдса, то есть происходит естественная ламинаризация вязкого газодинамического течения.

При этом естественно меняется тип дифференциальных уравнений вязкого газодинамического течения (например, с параболического на эллиптический).

Вторая глава посвящена разработке новых и модификации существующих методов численного решения вязкой теплогазодинамики между ударными волнами и затупленными анизотропными телами, а также

разработке численных методов решения многомерных нестационарных задач теплопроводности в анизотропных телах и численных методов сопряжения задач теплогазодинамики и анизотропной теплопроводности.

Для задач вязкой газодинамики разработан новый метод расщепления с экстраполяцией по пространственным переменным, а для задач теплопроводности, содержащих смешанные дифференциальные операторы, метод расщепления с экстраполяцией по времени применительно к сопряжению теплопереноса между газодинамическими течениями и анизотропными телами. Доказаны теоремы об аппроксимации и абсолютной устойчивости всех разработанных методов. Предложен высокоточный алгоритм аппроксимации граничных условий сопряжения на границе «газ – твердое тело» с неявной аппроксимацией существенно нелинейного лучистого потока.

Разработанные новые численные методы аппроксимации граничных условий сопряжения на границе «газ – твердое тело» обладают теми же порядками аппроксимации (а, следовательно, и точности), что и порядки аппроксимации уравнений теплогазодинамики и анизотропной теплопроводности внутри сопрягаемых областей.

В третьей главе впервые разработана комплексная физико-математическая модель сопряженного теплопереноса между вязкими пристенными теплогазодинамическими течениями и составными анизотропными телами, разработаны методы численного решения задачи о пристенном газодинамическом течении и задачи анизотропной теплопроводности в затупленном теле, а также численные методы сопряженного теплопереноса на границе «газ – твердое тело». Разработанные комплексы программ позволили получить многочисленные результаты по теплогазодинамическим характеристикам вязких пристенных течений, распределение температур и тепловых потоков вдоль поверхности анизотропного затупленного тела, нестационарные температурные поля. Получен новый результат, в соответствии с которым при больших степенях

анизотропии затупленного тела, когда отношение максимального главного коэффициента теплопроводности и минимальному превышает 10–15, в теле (а за счет сопряжения и в газе) возникают значительные продольные составляющие тепловых потоков, в результате чего боковая поверхность тела настолько нагревается, что тепловые потоки от газодинамического течения существенно уменьшаются и могут даже становиться отрицательными, то есть боковая поверхность отдает теплоту. Это явление можно использовать как новый способ тепловой защиты носовых частей высокоскоростных летательных аппаратов только путем нанесения тепловой защиты с высокой степенью анизотропии (например, пиролитические графиты имеют степень анизотропии ~ 100 и более).

В главе смоделирована и численно решена задача о сопряженном теплопереносе между двумя твердыми анизотропными телами с идеальным контактом, имеющими различную ориентацию главных осей и различные главные компоненты тензоров теплопроводности. Получен, на первый взгляд неожиданный результат о непрерывности на границе сопряжения нормальных составляющих векторов плотности тепловых потоков и о наличии разрывов первого рода касательных составляющих, плотностей тепловых потоков. Однако дальнейший анализ показал сохранение первого начала термодинамики для теплового потока на всей поверхности разрыва ТФХ, а не для плотности теплового потока.

Четвертая глава посвящена аналитическим методам решения задач теплопроводности в различных анизотропных телах с граничными условиями второго и третьего родов и на их основе методам решения сопряженных задач теплопереноса между линеаризованными уравнениями пристенных течений и этими анизотропными телами. Решения получены на основе интегральных методов с использованием преобразований Фурье и Лапласа.

Впервые получены аналитические решения сопряженных задач теплопереноса между вязкими несжимаемыми течениями и поперечно

обтекаемой анизотропной пластиной с анизотропией общего вида относительно распределений температуры и тепловых потоков на границе «газ – твердое тело». При симметричном обтекании симметричного анизотропного тела получены несимметричные относительно оси тела распределения температур и тепловых потоков. Аналогичные решения получены для боковых поверхностей. Решения для температур границы сопряжения и во всей области найдены в явном виде.

Полученные аналитические решения с успехом могут использоваться для идентификации не только тепловых потоков к телу и компонентов тензора теплопроводности материала тела, но и для восстановления теплофизических характеристик совершенного газа – зависимостей от температуры теплопроводности и динамической вязкости.

Кроме этого, полученные аналитические решения с успехом используются для тестирования новых численных методов решения как задач теплопроводности анизотропных тел, так и сопряженных задач теплопереноса между вязкими газодинамическими течениями и анизотропными телами.

В пятой главе впервые разработана замкнутая методология численного решения обратных граничных, коэффициентных и сопряженных задач теплопереноса по восстановлению тепловых потоков от газодинамических течений, постоянных и переменных от температуры компонентов тензоров теплопроводности анизотропных тел, а также теплофизических характеристик газодинамических течений при сопряженном теплообмене, прежде всего, зависимостей от температуры динамической вязкости и теплопроводности газа. Методология основана на минимизации функционала квадратичной невязки между экспериментальными и расчетными значениями температур в заданных пространственно-временных узлах с использованием *неявного* метода градиентного спуска, что является регуляризацией функционала, так как усиливает устойчивость итерационного метода. Доказаны теоремы об

условиях сходимости итерационного процесса к стационарному значению функционала с использованием метода сжимающих отображений в отсутствие и при наличии погрешностей в экспериментальных значениях температур. При этом матрица коэффициентов чувствительности получена дифференцированием по искомым параметрам аналитического решения задачи анизотропной теплопроводности, если это решение известно, либо непосредственным дифференцированием по искомым параметрам исходной начально-краевой задачи анизотропной теплопроводности с дальнейшим численным решением полученных сопряженных (в математическом смысле) задач прямыми методами относительно коэффициентов чувствительности. При этом разработан алгоритм метода параметрической идентификации искомых параметров, зависящих от температуры на основе кусочно-постоянных и линейно-непрерывных базисных функций, аппроксимирующих температурные зависимости искомых параметров.

Получены многочисленные результаты коэффициентных и граничных задач анизотропной теплопроводности по идентификации тепловых потоков к анизотропным телам, а также линейных и нелинейных компонентов тензоров теплопроводности материалов и углов, ориентирующих их главные оси. Кроме этого, по экспериментальным данным температур в теле восстанавливаются зависимости динамической вязкости и теплопроводности в газе в сопряженном теплообмене. Многочисленные эксперименты показали существенное увеличение в обратных задачах погрешностей искомых параметров по сравнению с погрешностями экспериментальных данных. Для исправления такой ситуации разработан метод регуляризации функционала квадратичной невязки добавлением к нему регуляризирующего функционала на основе идей акад. Тихонова А.Н. В результате получена возможность увеличивать относительную погрешность экспериментальных данных до 10–12%; при этом относительная погрешность искомых параметров остается на том же уровне.

В приложениях приведены описания программных комплексов: по решению задач сопряженного теплопереноса между вязкими газодинамическими течениями и составными анизотропными телами, а также по решению граничных и коэффициентных обратных задач анизотропной теплопроводности, как в линейной, так и нелинейной постановках.

В соответствии с изложенным в диссертации можно сформулировать **следующие новые результаты**:

1. Разработана новая комплексная физико-математическая модель совместного (сопряженного) теплопереноса между вязкими теплогазодинамическими течениями в ударном слое и анизотропными телами, теплопроводность теплозащитных материалов которых характеризуется тензором второго ранга. Отличительной особенностью математической модели является формирование многомерных условий сопряжения на границе «газ – твердое тело» между изотропным газом и анизотропным телом, теплоперенос в которых описывается уравнениями различных типов с сильной продольной неизотермичностью, причем в зависимости от степени анизотропии материала тела тип уравнений вязкой газовой динамики может изменяться.

2. На основе идеологии расщепляющихся операторов построены следующие новые методы численного решения задач вязкой теплогазодинамики, теплопроводности в анизотропных телах и сопряженного теплообмена между теплогазодинамическими течениями и телами с анизотропией свойств:

– метод переменных направлений с экстраполяцией по пространственным переменным численного решения системы нелинейных уравнений вязкой теплогазодинамики между ударной волной и телом;

– абсолютно устойчивый, экономичный метод расщепления с экстраполяцией по времени численного решения задач, содержащих смешанные производные, в том числе, применительно к граничным условиям сопряжения на границе «газ – твердое тело»;

– абсолютно устойчивый, экономичный метод полного расщепления смешанных дифференциальных операторов с модификацией применительно к граничным условиям сопряжения на границе «газ – твердое тело».

Во всех методах экономичность достигается использованием методов скалярных прогонок по координатным направлениям, а устойчивость – использованием неявных конечно-разностных операторов. Для всех методов доказаны теоремы об аппроксимации и абсолютной устойчивости.

3. Физико-математическая модель сопряженного теплообмена между вязкими пристенными теплогазодинамическими течениями и затупленными анизотропными телами и новые результаты численного моделирования. В частности, обнаружено изменение типа уравнений вязкой теплогазодинамики при значительной степени анизотропии обтекаемого тела, что приводит к значительному уменьшению тепловых потоков от газа к боковой поверхности тела и даже к его охлаждению. Обнаружено также наличие разрывов первого рода продольных составляющих векторов плотности тепловых потоков на границах разрыва теплофизических характеристик двух анизотропных тел.

4. Новые аналитические решения задач теплопроводности в анизотропных телах с граничными условиями второго и третьего родов и использование их для приближенно-аналитического решения сопряженных задач теплогазодинамического пограничного слоя и анизотропной теплопроводности.

5. Разработана методология и численные методы решения граничных, коэффициентных и сопряженных обратных задач теплопереноса. Решены задачи по восстановлению линейных и нелинейных компонентов тензора теплопроводности анизотропных тел, постоянных и переменных тепловых потоков к анизотропным телам при совместном (сопряженном) теплообмене. Методология основана на минимизации функционала квадратичной невязки между экспериментальными значениями температур в фиксированных пространственно-временных узлах и расчетными значениями в тех же узлах,

использовании методов параметрической идентификации с введением различных базисных функций, решении сопряженных (в математическом смысле) задач для получения матрицы чувствительности и на методах регуляризации, одним из которых является *неявный* метод градиентного спуска, а другой – модификация метода регуляризации Тихонова А.Н. применительно к задачам, содержащим смешанные дифференциальные операторы. Получены многочисленные результаты по восстановлению тепловых потоков и нелинейных компонентов тензора теплопроводности как без учета, так и с учетом погрешностей в экспериментальных данных.

6. Семейство программных комплексов, основными среди которых является программный комплекс по решению задач сопряженного теплообмена между вязкими пристенными теплогазодинамическими течениями и составными анизотропными телами, и программный комплекс по численному решению обратных граничных и коэффициентных задач теплопереноса в анизотропных телах, обтекаемых высокоскоростным газодинамическим потоком.

Таким образом, **на защиту выносятся следующие положения:**

1. Математические модели сопряженного теплообмена между вязкими теплогазодинамическими течениями на основе уравнений Навье-Стокса, пристенных течений и пограничного слоя с одной стороны и составными анизотропными телами, теплопроводность в которых описывается многомерными нестационарными уравнениями, содержащими смешанные производные – с другой.

2. Класс методов численного решения задач вязкой теплогазодинамики в ударных слоях, теплопроводности в составных анизотропных телах и сопряженного теплообмена между вязкими теплогазодинамическими течениями и затупленными анизотропными телами.

3. Новые результаты численного моделирования сопряженных задач вязкой теплогазодинамики и анизотропной теплопроводности,

принципиально отличающие результаты решения от решения сопряженных задач для изотропных тел.

4. Новые аналитические решения задач теплопроводности в анизотропных телах с граничными условиями второго, третьего и четвертого родов и использование их для приближенно-аналитического решения сопряженных задач теплопереноса между пограничными слоями и анизотропными телами.

5. Методы численного решения задач идентификации по восстановлению распределения по границе сопряжения «газ – твердое тело» тепловых потоков от газодинамического течения и линейных и нелинейных компонентов теноров теплопроводности анизотропных тел с введением регуляризирующих функционалов и использованием методов параметрической идентификации.

6. Программные комплексы, реализующие численное решение сопряженных задач теплогазодинамики и анизотропной теплопроводности и численное решение обратных граничных и коэффициентных задач теплопереноса в анизотропных телах.

По тематике диссертационной работы опубликованы 1 монография Формалев В.Ф., Колесник С.А. «Математическое моделирование аэрогазодинамического нагрева затупленных анизотропных тел». – М.: Изд-во МАИ, 2016, 22 работы в изданиях, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования (в том числе 15 Web of Science и Scopus), 4 работы в изданиях, входящих в перечень ВАК и не входящих в международные базы цитирования, 8 авторских свидетельств, 28 публикаций в других изданиях.

Результаты работы докладывались на следующих всероссийских и международных научных конференциях:

1. На 16-м, 17-м, 18-м, 19-м, 20-м, 21-м, 22-м Международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы конструкций и

механики сплошных сред” им. А.Г.Горшкова. Ярополец, Вятчи, Моск. обл., 2010–2016 гг.

2. На 11-й, 12-й, 13-й, 14-й, 17-й, 18-й Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС), г. Алушта, Крым, 2001–2013гг.

3. На 4-й, 6-й, 8-й, 9-й, 10-й Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ), г.Алушта, Крым, 2002–2014 гг.

4. 4–th International Conference «Inverse Problems: Identification, Design and Control», 2-6 July, 2003, Moscow, Russia.

5. На 9-й Международной конференции «Математические модели физических процессов», 27-28 июня 2003 г, Таганрог, Россия.

6. На 1-й Международной научно-технической конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика В.Н.Челомея. Москва – Реутов, 24–25 мая 2004 г.

7. На 12-й Международной конференции «Математические модели физических процессов», 14–15 сентября 2007 г, Таганрог, Россия.

8. На Международной научно-технической конференции «Модели и алгоритмы для имитации физико-химических процессов» Таганрог, Россия, 8–12 сентября 2008 г.

9. На 5-й Российской национальной конференции по теплообмену (РНКТ-5), Москва. 7–14 октября 2011 г.

10. На 11-й Всероссийской школе-конференции молодых ученых «Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики», Новосибирск, 13–16 июня 2012.

11. На 1-м, 2-м, 3-м, 4-м Международном научном семинаре «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы», Москва, Вятчи, 2014–2016 гг.

Результаты диссертации использованы в научно-исследовательских работах по грантам Российского фонда фундаментальных исследований, в двух из которых автор был научным руководителем (№12-01-31231, 14-01-00488), в трех грантах Минобрнауки РФ «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России 2009–2013 гг.», в двух грантах Российского научного фонда, в НИР в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки РФ (проект №118, 2014–2016 гг.).

В 2008–2014 гг. автор трижды стал победителем конкурса на право получения гранта Президента РФ по господдержке молодых ученых кандидатов наук (МК-1669.2009.8, МК-164.2011.8, МК-299.2013.8). Дважды лауреат конкурса «Грант Москвы в области наук и технологий в сфере образования 2004, 2005 гг.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА МЕЖДУ ВЯЗКИМИ ТЕПЛОГАЗОДИНАМИЧЕСКИМИ ТЕЧЕНИЯМИ И АНИЗОТРОПНЫМИ ЗАТУПЛЕННЫМИ ТЕЛАМИ

В данной главе разработана математическая модель сопряженного (совместного) теплообмена между вязкими теплогазодинамическими течениями при высокоскоростном обтекании затупленных анизотропных тел с целью определения тепловых потоков от газа к телу, многомерных нестационарных температурных полей в анизотропных телах в условиях непрерывности тепловых потоков и температур на границе сопряжения «газ – твердое анизотропное тело» и исследование взаимного влияния теплового состояния тела на характеристики газодинамического течения и наоборот – влияние теплогазодинамических характеристик на тепловое состояние тела.

Для этого необходимо поставить и решить задачу об определении тепловых и газодинамических характеристик между ударной волной и анизотропным телом с граничными условиями в виде непрерывности тепловых потоков и температур на границе сопряжения «газ – твердое тело», для чего необходимо полностью решить задачу о распределении тепловых потоков и температур в анизотропном затупленном теле с теми же граничными условиями на границе сопряжения. Таким образом, граничные условия сопряжения могут быть определены только после решения задачи теплогазодинамики и многомерной теплопроводности в анизотропном теле. Ясно, что для решения этих двух довольно сложных задач на границе «газ – твердое тело» параметрически задается или распределение по поверхности тела температур, или тепловых потоков, то есть решение в обеих средах зависит от этих параметров, которые определяются из условия непрерывности тепловых потоков и температур. Найденные таким образом характеристики на границе сопряжения подставляются в полученные ранее решения, что завершает решение сопряженной задачи.

Для уменьшения тепловых потоков к боковым поверхностям при высоких скоростях полета ЛА носовые части последних (фюзеляжи, передние кромки несущих и управляющих поверхностей) необходимо изготавливать притупленными, поскольку в окрестности притупления возникает прямой фронт ударной волны, при прохождении через который возникают невозвратные потери полной энергии газодинамического потока с образованием высокоэнтропийного слоя, распространяющегося вниз по потоку.

Этот слой имеет значительно меньшую энергетику, чем пристенные течения, сформированные около острых тел при прохождении газа через наклонные скачки уплотнения малой интенсивности (малые углы наклона скачков по сравнению с прямым скачком уплотнения).

Поэтому ниже рассматривается вязкое теплогазодинамическое обтекание затупленных анизотропных тел (рис. 1.1), поскольку носовые части многих современных высокоскоростных ЛА имеют тепловую защиту из анизотропных материалов (различные композиционные материалы, графиты и графитосодержащие материалы и др.). Переменная x направлена по образующей тела вниз по потоку, а переменная y – нормально к наружной границе w в сторону потока. Так что газодинамическое течение рассматривается в связанной с поверхностью *локальной* системе координат с осями Ox , O_2y , а тело – в локальной системе координат с осями Ox , O_2y_T . Оси $O_2\xi$ и $O_2\eta$ – главные оси тензора теплопроводности обтекаемого тела, причем ось $O_2\xi$ находится под углом φ и наружной границе w .

Скорость V_n , давление p_n , плотность ρ_n , температура T_n , скорость звука a_n , динамическая вязкость μ_n набегающего потока считаются известными.

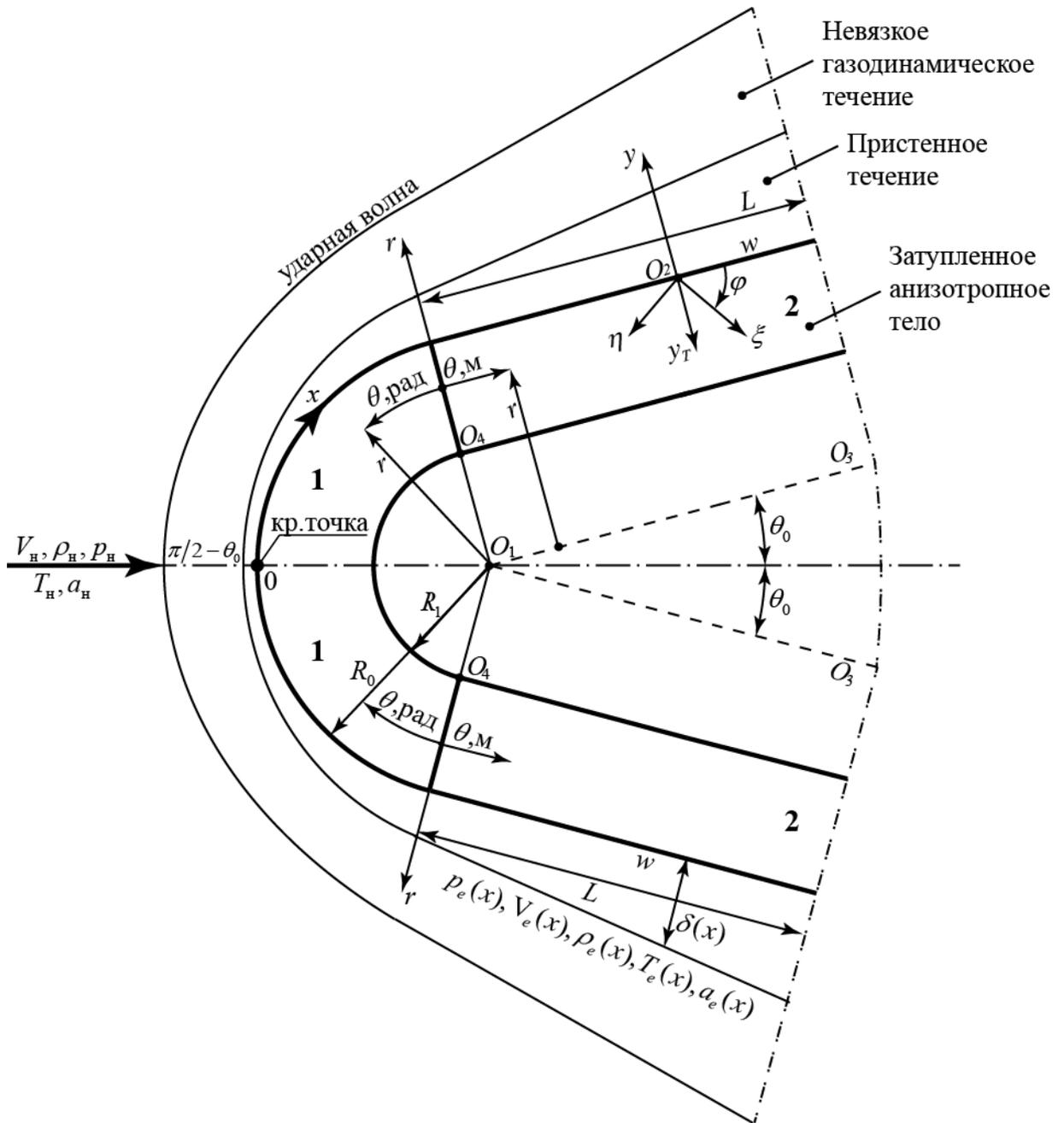


Рис. 1.1. Затупленное тело в высокоскоростном потоке.

1.1. Уравнения вязкой теплогазодинамики на затупленных телах

Полагая течение газа между ударной волной и телом плоским или осесимметричным в двумерном случае уравнения стационарной теплогазодинамики запишутся следующим образом (в отсутствии массовых сил).

Квазистационарные (стационарные в каждый момент времени) уравнения сохранения импульса в проекциях на оси Ox и Oy (уравнения Навье-Стокса) [1, 26, 46, 146]

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \right\} + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left[r^\nu \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]; \quad (1.1.1)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ r^\nu \mu \left[2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]. \quad (1.1.2)$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial(\rho u r^\nu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v r^\nu)}{\partial y} = 0. \quad (1.1.3)$$

В уравнениях (1.1.1)–(1.1.3) $\nu = 0$ для плоских двумерных течений, $\nu = 1$ для осесимметричных, $r(x)$ – расстояние от оси симметрии тела OO_1 до точки в газодинамическом потоке.

Полагая газовую смесь бинарной (состоящей из двух компонентов по массе – тяжелой и легкой, например, из молекул и атомов), можно записать уравнение неразрывности для отдельных компонентов (в предположении отсутствия термо- и барродиффузии, поскольку они значительно меньше массовой диффузии [26])

$$\rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D_{12} \frac{\partial c_i}{\partial x} \right) + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^\nu \rho D_{12} \frac{\partial c_i}{\partial y} \right) + \dot{w}_i, \quad i = 1, 2, \quad (1.1.4)$$

где D_{12} – коэффициент массовой диффузии; \dot{w}_i – массовая скорость образования i -го компонента; c_i – концентрация i -го компонента, $c_i = \rho_i / \rho$.

Уравнение (1.1.4) выводится на основе закона Фика о пропорциональности скорости массовой диффузии i -го компонента антиградиенту концентрации

$$c_i \mathbf{V}_i = -D_{12} \text{grad} c_i, \quad (1.1.5)$$

$$\mathbf{V}_i = -\frac{D_{12}}{c_i} \left(\frac{\partial c_i}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial c_i}{\partial y} \mathbf{j} \right). \quad (1.1.6)$$

Полагая, что каждый компонент газовой смеси ведет себя как совершенный газ, т.е. удовлетворяет уравнению Клапейрона – Менделеева, можно записать уравнение состояния i -го компонента в форме

$$p_i = \rho_i R_i T, \quad i = 1, 2, \quad (1.1.7)$$

где R_i – газовая постоянная i -го компонента, T – температура газовой смеси.

В соответствии с законом Дальтона о равенстве давления p смеси сумме парциальных давлений, уравнение состояния для газовой смеси можно записать в форме

$$p = \sum_i p_i = T \cdot \sum_i \rho_i R_i = \rho \bar{R} T, \quad (1.1.8)$$

где \bar{R} – газовая постоянная для смеси газовых компонентов определяется выражением

$$\bar{R} = \sum_i c_i R_i, \quad c_i = \frac{\rho_i}{\rho}. \quad (1.1.9)$$

Уравнение сохранения энергии с учетом переноса энергии за счет диффузии [146]

$$\begin{aligned} \rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^\nu \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \\ &+ \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D_{12} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^\nu \rho D_{12} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

в котором энтальпия (теплосодержание) i -го компонента h_i определяется выражением

$$h_i = \int_0^T c_{pi} dT + h_i^o \quad (1.1.11)$$

(h_i^o – теплота образования i -го компонента).

Теплосодержание смеси равно сумме по количеству компонентов выражений (1.1.11), домноженных на концентрации c_i

$$h = \sum_i c_i h_i \quad (1.1.12)$$

В отличие от энтальпии смеси полное теплосодержание (полная энтальпия) складывается из энтальпии смеси и кинетической энергии, отнесенной к единице массы

$$I = h + \frac{|V|^2}{2} \quad (1.1.13)$$

где $V = ui + vj$ – скорость газа.

В уравнении энергии (1.1.10) первые два слагаемые в правой части описывают перенос энергии теплопроводностью, следующие два слагаемые обозначают перенос энергии за счет сил давления, слагаемое в фигурных скобках, помноженное на динамическую вязкость μ , описывает перенос энергии за счет сил вязкости (диссипативная функция), и наконец последние два слагаемые описывают энергию, переносимую диффузией. В левой части уравнения энергии (1.1.10) находятся конвективные члены.

Таким образом, определяющими уравнениями для неизвестных $\rho(x, y)$, $u(x, y)$, $v(x, y)$, $T(x, y)$, $p(x, y)$, $c_i(x, y)$ являются уравнения (1.1.1)–(1.1.4), (1.1.8), (1.1.10). Для решения этих уравнений необходимо задать краевые условия на границе тела w и на ударной волне.

На границе тела часть граничных условий задается, а часть – определяется из решения задачи теплопереноса в обтекаемом теле.

Компоненты u , v скорости течения определяются на границе w из условия прилипания

$$u(x,0) = 0, \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) R_0 + L, \quad y = 0, \quad (1.1.14)$$

$$v(x,0) = 0, \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) R_0 + L, \quad y = 0, \quad (1.1.15)$$

где L – длина хвостовой части затупленного тела.

Температура газа $T(x,0)$ на границе тела должна быть определена из совместного решения задачи теплогазодинамики и теплопроводности в анизотропном теле с использованием граничных условий IV-го рода

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0+0} = \lambda_n \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{y_T=0+0} + q_{\phi-x}, \quad T(x,0) = T_w(x),$$

$$|x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) R_0 + L, \quad y = 0, \quad (1.1.16)$$

где λ_n – теплопроводность анизотропного тела на границе $y_T = 0$ тела в нормальном к границе направлении, $q_{\phi-x}$ – теплота физико-химических превращений, включая лучистые тепловые потоки от стенки.

Плотность $\rho(x,0)$ на границе w может быть определена из уравнения состояния (1.1.8) по известным давлению

$$p(x,0) = p_w(x), \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) R_0 + L, \quad y = 0 \quad (1.1.17)$$

и температуре (1.1.16), то есть в виде

$$\rho(x,0) = p(x,0) / \bar{R} \cdot T(x,0) = \rho_w(x), \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) R_0 + L, \quad y = 0. \quad (1.1.18)$$

Концентрация i -го компонента на стенке w может быть определена из уравнения состояния (1.1.7) для i -го компонента и уравнения состояния (1.1.8) для смеси газов

$$c_{iw}(x) = \frac{\rho_{iw}(x)}{\rho_w(x)} = \frac{p_{iw}(x) \bar{R}}{p_w(x) R_i}, \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) R_0 + L, \quad y = 0; \quad (1.1.19)$$

Краевые условия на ударной волне определяются по отношениям газодинамических характеристик непосредственно за ударной волной и перед ней в зависимости от чисел Маха M_n набегающего потока. Для

совершенного газа, параметры состояния для которого описываются уравнением (1.1.8), отношение газодинамических характеристик после ударной волны к характеристикам до ударной волны (рис. 1.2) можно определить из следующих соотношений [1, 6, 46]:

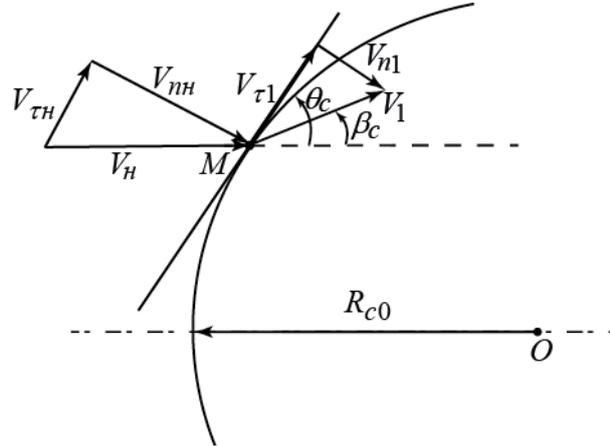


Рис. 1.2. Треугольники скоростей на ударной волне.

отношение плотностей

$$\frac{\rho_1}{\rho_n} = \frac{M_n^2 \sin^2 \theta_c}{(1 - \delta) + \delta M_n^2 \sin^2 \theta_c}; \quad (1.1.20)$$

отношение давлений

$$\frac{p_1}{p_n} = (1 + \delta) M_n^2 \sin^2 \theta_c - \delta; \quad (1.1.21)$$

отношение температур в соответствии с уравнением состояния (1.1.8)

$$\frac{T_1}{T_n} = \frac{p_1}{p_n} \cdot \frac{\rho_n}{\rho_1} = \frac{[(1 - \delta) + \delta M_n^2 \sin^2 \theta_c] \cdot [(1 + \delta) M_n^2 \sin^2 \theta_c - \delta]}{M_n^2 \sin^2 \theta_c}; \quad (1.1.22)$$

этому отношению температур соответствуют отношение энтальпий

$$\frac{h_1}{h_n} = \frac{T_1}{T_n}; \quad (1.1.23)$$

отношение квадратов скоростей звука

$$\frac{a_1^2}{a_n^2} = \frac{T_1}{T_n} \quad (1.1.24)$$

и отношение скоростей

$$\frac{V_1}{V_n} = \frac{1}{\rho_1 / \rho_n} = \frac{(1-\delta) + \delta M_n^2 \sin^2 \theta_c}{M_n^2 \sin^2 \theta_c}; \quad (1.1.25)$$

число Маха за ударной волной

$$\frac{M_1^2}{M_n^2} = \frac{1}{\rho_1 / \rho_n} \cdot \frac{1}{p_1 / p_n} = \frac{(1-\delta) + \delta M_n^2 \sin^2 \theta_c}{M_n^2 \sin^2 \theta_c [(1+\delta) M_n^2 \sin^2 \theta_c - \delta]}. \quad (1.1.26)$$

Здесь $\delta = (k-1)/(k+1)$, $k = c_p / c_v$; θ_c – местный угол наклона ударной волны – угол между касательной в произвольной точке M ударной волны и линией, параллельной продольной оси обтекаемого тела (рис. 1.2); β_c – угол отклонения потока – угол между вектором скорости непосредственно за ударной волной и продольной осью обтекаемого тела.

Связь между местным углом θ_c наклона ударной волны и углом β_c отклонения вектора скорости за ударной волной определяется из условия разрыва нормальных составляющих скоростей V_{nn} и V_{n1} до и после ударной волны и непрерывности касательных составляющих $V_{\tau n}$, $V_{\tau 1}$ (см. треугольники скоростей на рис. 1.2 до и после ударной волны)

$$\operatorname{tg} \beta_c = \operatorname{ctg} \theta_c \frac{M_n^2 \sin^2 \theta_c - 1}{1 + M_n^2 \left(\frac{k+1}{2} \sin^2 \theta_c \right)}. \quad (1.1.27)$$

При переходе через ударную волну происходят невозвратные потери энергии за счет излучения, возбуждения внутренних степеней свободы молекул, в результате чего давление торможения p_{on} до ударной волны выше давления торможения p_{o1} за ударной волной. Поэтому отношение этих давлений можно определить из условия возрастания энтропии при переходе через ударную волну для адиабатического течения, определяемого из отношения давлений торможения до и после ударной волны:

$$\frac{p_{01}}{p_{0n}} = \delta \left[\frac{1}{\delta(1-\delta)} \right]^{\frac{1+\delta}{2\delta}} \frac{(M_n^2 \cdot \sin^2 \theta_c)^{\frac{1+\delta}{\delta}}}{\left(\frac{1+\delta}{\delta} M_n^2 \sin^2 \theta_c - 1 \right)^{\frac{1-\delta}{2\delta}} \left(1 + \frac{\delta}{1-\delta} M_n^2 \sin^2 \theta_c \right)^{\frac{1+\delta}{2\delta}}}, \quad (1.1.28)$$

где давление торможения p_{0n} до ударной волны определяется из соотношений для изэнтропического течения

$$\frac{p_{0n}}{p_n} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_n^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Для решения задачи тепломассопереноса в ударном слое между телом и ударной волной необходимо знать геометрию ударной волны.

Точка пересечения ударной волны с линией полного торможения $x = 0$ лежит на прямой части ударной волны $\left(\theta_c = \frac{\pi}{2} \right)$, где давление и плотность достигают максимальной величины. В хвостовой части ударной волны $x \rightarrow \infty$, где угол β_c отклонения вектора скорости равен нулю, угол наклона θ_c ударной волны совпадает с углом слабой волны возмущения $\theta_c = \arcsin(1/M_n)$. Таким образом, угол наклона ударной волны изменяется в пределах

$$\arcsin(1/M_n) \leq \theta_c \leq \frac{\pi}{2}. \quad (1.1.29)$$

Для сферического затупления тела радиуса R_0 расстояние S_0 отхода ударной волны от критической точки (рис. 1.1) можно принять из приближенного решения уравнений сохранения импульса и неразрывности (1.1.1)–(1.1.3) в предположении о несжимаемости газа за прямой частью ударной волны, линейной зависимости продольного компонента скорости $u(x, y)$ и введения функции тока [26, 146]

$$S_0 = \frac{(1 - \sqrt{1 - \Delta^2}) \bar{\rho} R_0}{\Delta^2 - (1 - \sqrt{1 - \Delta^2}) \bar{\rho}}, \quad (1.1.30)$$

где $\bar{\rho} = \rho_n / \rho_1$ из (1.1.20), $\Delta = 1 - \bar{\rho}$.

Зная величину отхода S_0 ударной волны можно переднюю ее часть считать сферической с радиусом $R_0 + S_0$ до значения продольной переменной x , соответствующего линейной зависимости продольного компонента $u(x)$ вектора скорости.

Исследования (в том числе и экспериментальные) показывают, что с достаточным приближением образующая формы волны перед сферическим затуплением может быть описана параболой

$$x_1 = -S_0 + \frac{r^2}{2(R_0 + S_0)}, \quad (1.1.31)$$

где x_1 измеряется вдоль оси тела, начиная от критической точки $x = 0$, ($x_1 = 0$), r – расстояние от оси тела до ударной волны, а S_0 – отход ударной волны на линии полного торможения из (1.1.30).

1.2. Уравнения вязких пристенных теплогазодинамических течений

В соответствии с гипотезой Прандтля гидрогазодинамическое течение около тела можно разделить на две области, не имеющими четкой границы, а именно: область, в которой отсутствует сколько-нибудь заметная вязкость и теплопроводность и тонкая приграничная область около тела, в которой происходит теплообмен и трение между наружной стенкой тела и газом. Течение в этой пристенной области назовем *пристенным*, если учитываются вторые производные тепловых и газодинамических характеристик по продольной переменной, и *пограничным слоем*, если эти производные не учитываются. Вначале приведем *системы уравнений различных пограничных слоев* для различных теплогазодинамических характеристик.

При высокотемпературном газодинамическом течении различают следующие толщины пограничных слоев: толщину пограничного слоя $\delta(x)$ профиля скорости, называемую толщиной динамического пограничного слоя; толщину $\delta_T(x)$ теплового пограничного слоя и толщину пограничного

слоя для концентраций компонентов δ_c (диффузионного пограничного слоя). Эти толщины определяются следующими критериями подобия соответственно: числом Рейнольдса $Re = \rho u x / \mu$, характеризующим отношение массовых сил к силам вязкости; числом Прандтля $Pr = c_p \cdot \mu / \lambda$, характеризующим отношение теплоты, возникшей в результате трения к теплоте, отводимой за счет теплопроводности и числом Шмидта $Sm = \mu / \rho D_{12}$, характеризующим отношение теплоты, возникающей за счет трения к теплоте, переносимой диффузией компонентов с разными плотностями.

Для газов и газовых смесей числа Pr и Sm меньше единицы. В этом случае толщины δ_T , δ_c теплового и диффузионного пограничных слоев меньше динамического. При обтекании пластины (продольная составляющая градиента давления равна нулю) числа Pr и Sm равны единице, что влечет за собой равенство всех толщин $\delta = \delta_T = \delta_c$.

Поскольку толщины δ , δ_T , δ_c различных пограничных слоев размыты (переход от вязкого течения к невязкому происходит асимптотически), то в качестве упомянутых толщин принимаются расстояния по нормали от стенки, где относительная разность между газодинамическими характеристиками в невязком потоке и соответствующими характеристиками в пограничном слое не превышает 1%, т.е.

$$(u_e - u) / u_e \leq 0,01; \quad (T_e - T) / T_e \leq 0,01; \quad (c_{ie} - c_i) / c_{ie} \leq 0,01,$$

где индексом «e» помечены газодинамические характеристики невязкого потока. Здесь u_e – продольная составляющая вектора скорости \mathbf{V} ($|\mathbf{V}| = \sqrt{u_e^2 + v_e^2}$).

Вывод уравнений теплогазодинамического пограничного слоя из уравнений теплогазодинамики (1.1.1)–(1.1.19) активно использует прандтлеву концепцию пограничного слоя, которая приводит к оценке $\delta(x) \ll x$ или

$$\left(\frac{\delta}{x}\right)^2 = O\left(\frac{1}{\text{Re}_x}\right), \quad (1.2.1)$$

где местное число $\text{Re}_x = \rho_e u_e x / \mu_e$ определено по характеристикам на внешней границе пограничного слоя [19, 146]. Кроме того, вывод использует следующие предположения:

все компоненты ведут себя как совершенные газы (удовлетворяют уравнению состояния Клапейрона–Менделеева);

течение является двумерным плоским или осесимметричным;

излучением от газа к телу можно пренебречь.

Тогда уравнение (1.1.1) сохранения количества движения в проекции на ось Ox приобретет вид

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (1.2.2)$$

а в проекции на локальную ось $O_2 y < O_2 y$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{или} \quad p = p_e(x). \quad (1.2.3)$$

Уравнение неразрывности (1.1.3) сохраняется

$$\frac{\partial(\rho u r_0^\nu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v r_0^\nu)}{\partial y} = 0, \quad (1.2.4)$$

где $\nu = 0$ для плоских течений, $\nu = 1$ – для осесимметричных течений.

Уравнение неразрывности (1.1.4) для отдельных компонентов сохраняется

$$\rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} = \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^\nu \rho D_{12} \frac{\partial c_i}{\partial y} \right) + \dot{w}_i, \quad i=1,2. \quad (1.2.5)$$

Уравнение сохранения энергии для пограничного слоя выводится из уравнения (1.1.10) удалением в правой части дивергентного слагаемого по переменной x , поперечной составляющей градиента давления, сохранением в

диссипативном члене (выражение в фигурных скобках) слагаемого $\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$ и

учетом диффузионного члена; получим

$$\rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} = u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^\nu \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^\nu \rho D_{12} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial y} \right). \quad (1.2.6)$$

Умножая уравнение сохранения импульса (1.2.2) на продольную составляющую u вектора скорости, складывая с выражением (1.2.6) и учитывая равенства (1.1.11)–(1.1.13), получим

$$\rho u \frac{\partial I}{\partial x} + \rho v \frac{\partial I}{\partial y} = \frac{u}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^\nu \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^\nu \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^\nu \rho D_{12} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial y} \right). \quad (1.2.7)$$

В этом выражении правую часть можно трансформировать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{u}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^\nu \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^\nu \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^\nu \rho D_{12} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial y} \right) = \\ & = \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^\nu \mu \frac{\partial u^2}{2 \partial y} \right) + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left[r^\nu \left(\frac{\lambda}{c_{p_{cp}}} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\lambda}{c_{p_{cp}}} (h_A - h_M) \frac{\partial c_A}{\partial y} \right) \right] + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^\nu \rho D_{12} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial y} \right) = \\ & = \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^\nu \mu \frac{\partial u^2}{2 \partial y} \right) + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^\nu \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left[r^\nu \rho D_{12} (h_A - h_M) \frac{\partial c_A}{\partial y} \left(1 - \frac{\lambda}{c_{p_{cp}} (\rho D_{12})} \right) \right] = \\ & = \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left[r^\nu \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left(h + \frac{u^2}{2} \right) + \mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial u^2}{2} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left[r^\nu \left(1 - \frac{1}{Le} \right) (h_A - h_M (\rho D_{12})) \frac{\partial c_A}{\partial y} \right], \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

поскольку для бинарной смеси газов, состоящей из атомов с концентрацией $c_A = \rho_A / \rho$ и энтальпией h_A и молекул с концентрацией $c_M = \rho_M / \rho$ ($c_M = 1 - c_A$) и энтальпией h_M имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} h &= \sum_i h_i c_i; \\ dh &= \sum_i d(h_i) c_i + \sum_i h_i d(c_i) = \sum_i (c_{pi} dT) c_i + \sum_i h_i d c_i = \sum_i (c_{pi} c_i) dT + \sum_i h_i d c_i = \\ &= c_{p_{cp}} dT + (h_A d c_A + h_M d c_M) = c_{p_{cp}} dT + [h_A d c_A + h_M d (1 - c_A)], \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} dh &= c_{p_{cp}} dT + (h_A - h_M) d c_A; \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= c_{p_{cp}} \frac{\partial T}{\partial y} + (h_A - h_M) \frac{\partial c_A}{\partial y}; \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{c_{p_{cp}}} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\lambda}{c_{p_{cp}}} (h_A - h_M) \frac{\partial c_A}{\partial y}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho D_{12} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial y} &= \rho D_{12} \left(h_A \frac{\partial c_A}{\partial y} + h_M \frac{\partial c_M}{\partial y} \right) = \\
&= \rho D_{12} \left[h_A \frac{\partial c_A}{\partial y} + h_M \frac{\partial (1-c_A)}{\partial y} \right] = \rho D_{12} (h_A - h_M) \frac{\partial c_A}{\partial y}; \\
\frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D_{12} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\lambda}{c_{p_{cp}}} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\lambda}{c_{p_{cp}}} (h_A - h_M) \frac{\partial c_A}{\partial y} \right] + \\
+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho D_{12} (h_A - h_M) \frac{\partial c_A}{\partial y} \right] &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho D_{12} (h_A - h_M) \frac{\partial c_A}{\partial y} \left(1 - \frac{\lambda}{c_{p_{cp}} (\rho D_{12})} \right) \right] = \\
= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 - \frac{1}{Le} \right) (h_A - h_M) \frac{\partial c_A}{\partial y} \right].
\end{aligned}$$

Подставляя (1.2.8) в правую часть (1.2.7), получим уравнение энергии для химически реагирующей бинарной смеси газов

$$\begin{aligned}
\rho u \frac{\partial I}{\partial x} + \rho v \frac{\partial I}{\partial y} &= \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial y} \left[r^v \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial I}{\partial y} + \mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial u^2}{2 \partial y} \right) \right] + \\
+ \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial y} \left[r^v \left(1 - \frac{1}{Le} \right) (h_A - h_M) \rho D_{12} \frac{\partial c_A}{\partial y} \right].
\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

Здесь Le – число Льюиса, определяемое соотношением $Le = Pr / Sm = \rho D_{12} c_p / \lambda$ и характеризующее отношение энергии, переносимой за счет диффузии к энергии, отводимой теплопроводностью. Полная энтальпия I газодинамического потока, энтальпия смеси h и энтальпия отдельного компонента смеси h_i определяются соотношениями (1.1.11)–(1.1.13).

Уравнение состояния (1.1.8), связывающее газодинамические характеристики ρ , p , T для совершенного газа, сохраняет свой вид

$$p = \rho \cdot \bar{R} T, \tag{1.2.10}$$

где \bar{R} определяется соотношением (1.1.9).

Граничные условия для решения уравнений должны быть заданы на стенке w , на внешней границе e , определены на линии полного торможения (левая граница) и на правой границе для искомым функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, $\rho(x, y)$, $T(x, y)$, $c_i(x, y)$, причем давление $p_e(x)$ на внешней границе

пограничного слоя должно быть задано и, в соответствии с уравнением сохранения импульса (1.2.3), в проекции на ось Oy , оно постоянно по толщине пограничного слоя и равно значению давления $p_e(x)$ на внешней границе пограничного слоя.

При $y=0$:

$$\begin{aligned} u(x, 0) = 0; \quad v(x, 0) = 0; \quad T(x, 0) = T_w(x); \quad \rho(x, 0) = p_e(x) / \bar{R} \cdot T_w(x); \\ c_i(x, 0) = c_{wi}(x). \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

При $y = \delta, \delta_T, \delta_c$:

$$\begin{aligned} u(x, \delta) = u_e; \quad v(x, \delta) = v_e; \quad T(x, \delta_T) = T_e(x); \quad \rho(x, \delta_T) = p_e(x) / \bar{R} \cdot T_e(x); \\ c_i(x, \delta_c) = c_{ei}(x). \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Связь между распределением давления и скоростью на внешней границе определяется из уравнения Бернулли

$$p_e + \rho |\mathbf{V}_e|^2 / 2 = \text{const}, \quad (1.2.13)$$

где $|\mathbf{V}| = (u_e^2 + v_e^2)^{1/2}$, причем если на внешней границе пренебречь вертикальной компонентой v_e вектора скорости \mathbf{V}_e , то в дифференциальной форме уравнение Бернулли будет иметь вид

$$\frac{du_e}{dx} = \frac{-1}{\rho_e u_e(x)} \frac{dp_e}{dx}. \quad (1.2.14)$$

Температура $T_w(x)$ на границе «газ – твердое тело» в (1.2.11) должна быть определена из решения сопряженной задачи теплогазодинамики и теплопроводности, а распределение температур $T_e(x)$ на внешней границе пограничного слоя – из решения задачи для уравнения энергии (1.2.9) в невязком газодинамическом потоке.

На левой границе (на линии полного торможения) $x = 0$ газодинамические характеристики должны быть определены из решения уравнений газодинамики (1.1.1)–(1.1.19) при упрощающем условии

$$u(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq S_0, \quad (1.2.15)$$

где S_0 – расстояние отхода ударной волны на линии полного торможения, а также из условия несжимаемости течения в окрестности критической точки.

На правой границе теплогазодинамические характеристики могут быть определены из условия

$$\frac{dp_e(x, y)}{dx} = 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad 0 \leq y \leq \delta. \quad (1.2.16)$$

Таким образом, большинство краевых условий может быть определено только в процессе решения всей комплексной проблемы теплогазодинамики и теплопроводности в теле и, поскольку комплекс задач – существенно нелинеен, то эти краевые условия могут быть определены численно во вложенных итерационных процедурах.

Для анизотропных тел степень анизотропии – отношение продольного компонента тензора теплопроводности к поперечному – может составлять десятки, а то и сотни единиц. В этих условиях в теле формируются значительные продольные составляющие градиента температур и, за счет сопряжения с газодинамическим потоком, эти продольные составляющие градиента температур передаются газодинамическому потоку, что неизбежно влечет за собой необходимость учета в уравнениях теплогазодинамики вторых производных от газодинамических функций по продольной переменной, не учтенных в уравнениях пограничного слоя (1.2.2–1.2.9).

Такие течения, для которых сохраняются общие уравнения теплогазодинамики, но используется условие (1.2.3), назовем *пристенными*.

В этом случае уравнение (1.1.1) сохранения импульса в проекции на ось Ox примет вид (отброшены смешанные дифференциальные операторы)

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^v \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (1.2.17)$$

а уравнение (1.1.10) сохранения энергии сохранит и члены $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$

$$\rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^v \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) +$$

$$+u \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{4}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^v \rho D_{12} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial y} \right). \quad (1.2.18)$$

Для замыкания системы теплогазодинамики необходимо определить динамическую вязкость μ и теплопроводность, которые существенно зависят от температуры, причем динамическая вязкость для газов существенно повышается с увеличением температуры. Для несжимаемого течения воздуха такая зависимость выражается интерполяционной формулой Сазерленда [1, 146]

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + 110}{T + 110}, \quad (1.2.19)$$

где μ_0 – коэффициент вязкости при начальной абсолютной температуре T_0 . Формула (1.2.19) дает хорошее совпадение с экспериментальными данными. При этом ею можно пользоваться и для относительной теплопроводности λ / λ_0 газа в неизменном виде.

Приведенные уравнения теплогазодинамики описывают ламинарные течения вязкого газа, в которых используются коэффициенты молекулярной вязкости и теплопроводности. Для описания течения и теплообмена в вязком турбулентном газодинамическом потоке используются различные гипотезы турбулентности, изложенные в следующем параграфе.

Определенные с помощью этих гипотез коэффициенты турбулентной вязкости μ_T и теплопроводности λ_T добавляются к соответствующим молекулярным коэффициентам вязкости и теплопроводности

$$\mu_\Sigma = \mu + \mu_T; \quad \lambda_\Sigma = \lambda + \lambda_T, \quad (1.2.20)$$

сохраняя вид уравнений теплогазодинамики, сформулированных для ламинарного течения.

При этом коэффициенты турбулентной вязкости и теплопроводности могут на порядок превосходить соответствующие значения коэффициентов молекулярной вязкости и теплопроводности.

1.3. Моделирование турбулентных пристенных газодинамических течений

До настоящего времени не разработана рациональная теория турбулентного вида движения, которая позволила бы получить уравнения, описывающие процессы турбулентного переноса. При турбулентном движении на основное течение накладывается достаточно интенсивное дополнительное течение, характеризующееся сильной нестационарностью.

Это дополнительное течение существенно (порой на порядок) увеличивает трение и теплообмен, то есть к молекулярным вязкости μ , теплопроводности λ и диффузии D_T , не являющиеся свойствами газа, но характеризующие режимы течения. Получается, что система уравнений теплогазодинамики при больших числах Re , когда возникают турбулентные пульсации, незамкнута, поскольку для определения μ_T , λ_T , D_T необходимо привлекать дополнительные соотношения.

В теоретическом плане представляется естественным использовать для описания турбулентных движений уравнения Навье – Стокса, решения которых весьма хорошо соответствуют реальным течениям при достаточно малых числах Re в случае ламинарного режима.

Для теоретического описания турбулентных движений обычно используется процедура осреднения уравнений Навье – Стокса с получением системы уравнений Рейнольдса, описывающей осредненное турбулентное движение [19, 146], в которых пульсационные характеристики, в соответствии с гипотезой Буссинеска, включены в μ_T , λ_T , D_T .

В соответствии с этой гипотезой система уравнений многокомпонентного турбулентного сжимаемого пограничного слоя в случае установившегося осредненного пространственного движения представляется в виде:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_T) \frac{\partial u}{\partial y} \right], & \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\
\rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_T) \frac{\partial w}{\partial y} \right], \\
\rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} + \rho w \frac{\partial c_i}{\partial z} &= \dot{w}_i + \frac{\partial}{\partial y} \left[-J_i + \frac{\mu_T}{Sc_T} \frac{\partial c_i}{\partial y} \right], & (1.3.1) \\
\rho u \frac{\partial I}{\partial x} + \rho v \frac{\partial I}{\partial y} + \rho w \frac{\partial I}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_T}{Pr_T} \right) \frac{\partial I}{\partial y} \right] - \\
-\frac{\partial}{\partial y} \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial c_i}{\partial y} + J_i \right) h_i \right] &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu_T}{Pr_T} (Le_T - 1) \sum_{i=1}^N \frac{\partial c_i}{\partial y} h_i \right] + \\
+\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[\mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) + \mu_T \left(1 - \frac{1}{Pr_T} \right) \right] \frac{\partial}{\partial y} \frac{u^2 + w^2}{2} \right\},
\end{aligned}$$

называемая системой уравнений Рейнольдса.

Здесь c_i , J_i – массовая концентрация и диффузионный поток i -го компонента; \dot{w}_i – плотность источника массы i -го компонента; I – полная энтальпия смеси; h_i – теплосодержание i -го компонента; $Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}$; $Pr_T = \frac{\mu_T c_p}{\lambda_T}$;

$$Sc_T = \frac{\mu_T}{\rho D_T}; \quad Le_T = \frac{Pr_T}{Sc_T}.$$

В системе (1.3.1) неизвестны коэффициенты турбулентного переноса μ_T , D_T , λ_T . В настоящее время разработано большое количество моделей турбулентности для замыкания системы (1.3.1), то есть для определения коэффициентов μ_T , λ_T , D_T .

Среди большого количества моделей турбулентности можно выделить две наиболее характерные группы. К первой группе отнесем модели, устанавливающие конечные связи между различными характеристиками турбулентности (так называемые алгебраические модели турбулентности). Вторая группа включает более сложные модели турбулентности, использующие дифференциальные уравнения для различных характеристик турбулентности.

К первой группе относится широко известная гипотеза Прандтля [19, 146] (1925г.), согласно которой устанавливаются следующие формулы для турбулентной вязкости и трения в пристеночной области:

$$\mu_T = \rho l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \quad \tau_T = \mu_T \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1.3.2)$$

где l – масштаб турбулентности, называемый длиной пути перемешивания, определяется соотношением

$$l = ky, \quad (1.3.3)$$

где k – константа турбулентности Кармана ($k = 0,4$). Если использовать гипотезу Прандтля для расчета течения в пристеночной области у пластины, то получается логарифмический профиль скорости

$$u / v^* = A \ln \eta + B, \quad (1.3.4)$$

где $\eta = \frac{yv^*}{\nu}$; $v^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ (v^* – динамическая скорость, ν – коэффициент кинематической вязкости). Поскольку полученный профиль скорости (1.3.4) не удовлетворяет условию прилипания на стенке, то возникает необходимость рассмотрения ламинарного подслоя (тонкого слоя у стенки, где течение ламинарное), для которого из уравнения движения следует

$$\mu \frac{du}{dy} = \tau_w \quad \text{и} \quad \frac{u}{v^*} = \eta. \quad (1.3.5)$$

Таким образом, в пристеночной области может рассматриваться двухслойная схема: ламинарный подслой – турбулентное ядро. Профиль скорости в этом случае получается составным (1.3.4), (1.3.5). Переход от ламинарного подслоя к турбулентному ядру в этой схеме осуществляется скачком на границе ламинарного подслоя, которой соответствует $\eta = \eta_k$ (из опытов $\eta_k \approx 10+12$). Нетрудно видеть, что $\eta_k = \frac{y^* v^*}{\nu}$ является некоторым критическим числом Рейнольдса, определенным на границе ламинарного подслоя. *Это значение η_k относят к константам турбулентности.*

В рамках двухслойной схемы могут рассматриваться также процессы теплообмена, диффузии.

Другой алгебраической моделью, уточняющей гипотезу Прандтля, является гипотеза Ван-Дрифта [19]. В ней длина пути перемешивания задается формулой

$$l = ky \left[1 - \exp(-\eta / A^*) \right], \quad A^* = 26, \quad \eta = \frac{y}{\nu} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}. \quad (1.3.6)$$

При этом трение определяется выражением

$$\tau = (\mu + \mu_T) \frac{\partial u}{\partial y},$$

где μ_T вычисляется по формулам (1.3.2) и (1.3.6).

Гипотеза Ван-Дрифта нашла весьма широкое применение. Согласно этой гипотезе суммарная вязкость $\mu + \mu_T$ зависит от трения τ трансцендентным образом, поскольку оно содержится в показателе экспоненты формулы (1.3.6), что позволяет разрешить равенство (1.3.6) итерационным образом.

Очередной моделью, устанавливающей алгебраические связи между характеристиками турбулентности, является *модель коэффициента полной вязкости* [19] (модель Совершенного В.Д.). Согласно этой модели полная вязкость турбулентного потока представляется в виде линейной комбинации молекулярной (ламинарной) и молярной (турбулентной) вязкостей

$$\mu_\Sigma = \mu k_1 + \mu_T k_2, \quad (1.3.7)$$

где коэффициенты k_1 и k_2 должны удовлетворять условиям

$$y \rightarrow 0: \quad k_1=1, \quad k_2=0; \quad (1.3.8)$$

$$y \rightarrow \infty: \quad k_1=0, \quad k_2=1,$$

то есть, у стенки полная вязкость должна переходить в молекулярную μ , а вдали от стенки – в турбулентную вязкость μ_T .

При этом турбулентная вязкость μ_T в формуле (1.3.7) определяется, в частности, по формуле Прандтля. Условия (1.3.8) удовлетворяются, если принять

$$k_1 = \left[1 + \beta \left(\frac{\eta}{\eta_k} \right)^m \right]^{-1}, \quad k_2 = \beta \left(\frac{\eta}{\eta_k} \right)^m \left[1 + \beta \left(\frac{\eta}{\eta_k} \right)^m \right]^{-1}, \quad (1.3.9)$$

причем без потери точности можно принять $k_1 = 1$.

Здесь $\eta = \frac{yv^*}{\nu}$; $v^* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$; η_k – критическое число Рейнольдса на границе

ламинарного подслоя. Свободные параметры m и β следует рассматривать как *константы турбулентности*, которые могут быть определены из опытных данных.

В [19] представлены результаты сравнения расчетов с использованием коэффициента полной вязкости с экспериментальными данными. Полученное удовлетворительное согласование расчетных и экспериментальных данных в случае различных течений в широком диапазоне изменения параметров, свидетельствует о достаточной универсальности принятой модели коэффициента полной вязкости и констант турбулентности $m=2$ и $\beta=k^2$. Это дает основание использовать данную модель и для расчета более сложных задач, в частности турбулентного пограничного слоя с учетом тепловых и диффузионных процессов.

По аналогии с коэффициентом полной вязкости можно ввести также коэффициенты полной теплопроводности и полной диффузии:

$$\lambda_\Sigma = \lambda k_1 + \lambda_T k_2, \quad D_\Sigma = D k_1 + D_T k_2, \quad (1.3.10)$$

где λ, D – коэффициенты молекулярной теплопроводности и диффузии; λ_T, D_T – коэффициенты молярной (турбулентной) теплопроводности и диффузии. Коэффициенты k_1 и k_2 здесь определим так же, как это было сделано в формуле для μ_T , т.е. по формулам (1.3.9) или с учетом $k_1 = 1$.

Формулы (1.3.10) удобно записать в виде

$$\lambda_\Sigma = c_p \left(\frac{\mu}{Pr} k_1 + \frac{\mu_T}{Pr_T} k_2 \right), \quad \rho D_\Sigma = \frac{\mu}{Sc} k_1 + \frac{\mu_T}{Sc_T} k_2. \quad (1.3.11)$$

Здесь Pr , Pr_T – числа Прандтля, определенные по коэффициентам молекулярного и молярного переносов; Sc , Sc_T , – числа Шмидта, также определенные по коэффициентам молекулярного и молярного переноса. Формулы (1.3.11) имеют преимущество по сравнению с формулами (1.3.10), состоящее в том, что в (1.3.11) в явном виде не содержатся неизвестные величины λ_r и D_T . Числа же Pr , Pr_T , Sc , Sc_T , как правило, изменяются мало, поэтому в расчетах обычно принимаются константами (например, для воздуха $Pr = 0,72$, $Pr_T = 0,9$).

Представленная модель коэффициентов полного переноса позволяет сформулировать замкнутую задачу расчета многокомпонентного турбулентного пограничного слоя.

Значительное развитие получило моделирование характеристик турбулентности, связанное с введением дополнительных дифференциальных уравнений, описывающих изменение тех или иных характеристик турбулентности. *Такие модели называют дифференциальными моделями турбулентности.* Структура этих уравнений «аналогична» обычно употребляемым уравнениям переноса. Они содержат конвективные, диффузионные, диссипативные, порождающие члены. Эти уравнения с самого начала являются приближенными (это следует из их вывода). Кроме того, такие уравнения так же, как и рассмотренные выше модели, содержат константы турбулентности, которые могут быть определены только из эксперимента.

С возрастанием сложности модели количество констант турбулентности увеличивается. Кроме этого, наряду с константами могут появиться также функции, определяемые из опыта. Феноменологический подход с использованием дополнительных дифференциальных уравнений берет начало от работ А.Н. Колмогорова [19] (1942 г.), Прандтля, Вигхардта [19] (1945 г.). Однако широкий интерес к работам данного направления был

проявлен несколько позже, что вероятно связано с развитием вычислительных возможностей.

Одной из первых работ, которая была доведена до численной реализации, по-видимому, является работа Г.С. Глушко [19], в которой содержится одно дополнительное дифференциальное уравнение (однопараметрическая модель) для кинетической энергии пульсационного движения. В дальнейшем эта модель была дополнена уравнением для масштаба турбулентности.

Широко распространена двухпараметрическая модель Джонса–Лаундера [177], использующая уравнения энергии турбулентности e и скорости диссипации энергии турбулентности ε в виде

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial e}{\partial x} + \rho v \frac{\partial e}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu + \frac{\rho v_T}{\sigma_e} \frac{\partial e}{\partial y} \right) + \rho v_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \rho \varepsilon - 2\mu \left(\frac{\partial e^{1/2}}{\partial y} \right)^2 \\ \rho u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu + \frac{\rho v_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + c_1 \frac{\varepsilon}{e} \rho v_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - c_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{e} + 2\mu v_T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1.3.12) \\ v_T &= c_\mu \frac{e^2}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

где принят набор констант: $\sigma_e = 1$; $\sigma_\Sigma = 1,3$; $c_1 = 1,45$; $c_2 = 2$; $c_\mu = 0,09$.

В применении к различным течениям эта модель подвергалась модификациям. Так, для течений с низкими числами Рейнольдса было предложено

$$c_\mu = 0,09 \exp \left[-2,5 / (1 + R_T / 50) \right], \quad c_2 = 2 \left[1 - 0,3 \exp(-R_T^2) \right], \quad R_T = \frac{\rho e^2}{\varepsilon \mu}.$$

С использованием данной модели (1.3.12), часто называемой « $k - \varepsilon$ » моделью и различных ее модификаций рассчитаны разнообразные течения и получено согласование расчетов с опытами.

Широкое применение имеет модель, предложенная Саффменом [19]. В этой модели используются два уравнения: для энергии турбулентности e и дополнительной завихренности ω («псевдозавихренности») в виде

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + \sigma_1 D_T) \frac{\partial e}{\partial y} \right] + \left[\alpha_1 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| - \beta_1 \omega \right] e; \\
u \frac{\partial \omega^2}{\partial x} + v \frac{\partial \omega^2}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + \sigma_2 D_T) \frac{\partial \omega^2}{\partial y} \right] + \alpha_2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| - \\
&- \left\{ \left[\beta_2 + 2\sigma_2 \left(\frac{\partial l}{\partial y} \right)^2 \right] \omega \right\} \omega^2;
\end{aligned} \tag{1.3.13}$$

$$D_T = e / \omega, \quad l = e^{1/2} \omega.$$

Здесь D_T – коэффициент турбулентной диффузии, l – масштаб турбулентности.

Значения коэффициентов задаются в виде

$$\beta_1 = 0,09; \quad \beta_2 = 0,15; \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0,5;$$

$$\alpha_1 = 0,3 \left[1 - \frac{10}{11} \exp(-R_T / 2) \right]; \quad \alpha_2 = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{10}{11} \exp(-2R_T) \right]; \quad R_T = \frac{e^{1/2} l}{\nu}.$$

Для течений в пограничном слое функции e и ω означают

$$e = \frac{9}{4} \frac{\overline{v'^2}}{\nu^2}, \quad \omega = \frac{3\nu}{\beta_1} \frac{\left(\overline{\partial v' / \partial y} \right)^2}{\overline{v'^2}}.$$

Следует заметить, что модель Саффмена весьма близка к модели, предложенной ранее в работе Колмогорова (1942 г.).

Существующие в настоящее время разнообразные модели турбулентности имеют ограниченную универсальность и обеспечивают достаточно низкую точность (точность в пределах 20% считается хорошей). Трудность применения моделей турбулентности связана с исследованием течений с малыми числами Рейнольдса.

Наиболее кардинальным способом определения турбулентных коэффициентов переноса – динамической вязкости, теплопроводности и диффузии газа – является постановка и решение обратных задач сопряженного теплообмена, когда по экспериментальным распределениям температур в теле восстанавливаются указанные характеристики в газе, используя математические модели сопряженного теплообмена.

1.4. Моделирование нестационарного теплопереноса в затупленных анизотропных телах в условиях сопряженного теплообмена

В данном параграфе вводятся комбинированные системы криволинейных координат, используемые для описания процесса теплопереноса в затупленных анизотропных телах, приводятся уравнения теплопроводности в этих телах в различных системах координат с изменением компонентов тензора теплопроводности при переходе от декартовых к криволинейным системам координат, формируются краевые условия на криволинейных границах анизотропного тела при постановке и решении задач сопряженного теплопереноса.

1.4.1. Комбинированные системы координат для затупленных тел

При постановке и решении задач теплопереноса в затупленных телах очень важно использовать системы координат, связанные с какой-либо базовой поверхностью затупленного тела, то есть рассматривать затупленные тела в одной или нескольких локальных системах координат, *поскольку, при наложении конечно-разностной сетки в декартовой системе координат на тонкостенные затупленные тела в расчетную область не попадет достаточное количество узлов разностной сетки, что приводит к существенным погрешностям в конечно-разностной аппроксимации как дифференциальных уравнений, так и краевых условий.*

На рис. 1.1 затупленное полое тело разбито на две подобласти – непосредственно затупление (подобласть 1) и хвостовая часть (подобласть 2).

Газодинамическое течение около тела удобно рассматривать в связанной с наружной поверхностью w тела системе координат Ox , O_2y , где переменная x отсчитывается от критической точки O вниз по потоку как в

верхней, так и в нижней полуплоскости от осевой линии, а переменная y – от точек на границе w в направлении внешней нормали к этой границе.

Будем называть тело *осесимметричным*, если оно обладает осевой симметрией как относительно геометрических, так и теплофизических характеристик и телом *с осевой ориентацией*, если оно не обладает осевой симметрией либо по геометрическим, либо по теплофизическим, либо по тем и другим характеристикам. Например, для осесимметричного по геометрическим характеристикам анизотропного тела с постоянной ориентацией главных осей $O_2\xi$, $O_2\eta$ тензора теплопроводности характеристики тензора теплопроводности на оси OO_1 тела разрываются, в результате чего тело перестает быть осесимметричным.

В этой связи для процесса теплопереноса затупленное тело удобно разбить на подобласти, каждая из которых рассматривается в своей локальной системе координат, причем на поверхностях (плоскостях) раздела могут разрываться как геометрические, так и теплофизические характеристики. Таким образом, систему координат, введенную для газодинамического течения трудно использовать при моделировании теплопереноса в затупленном теле.

Поэтому для тела с осевой ориентацией вводятся следующие системы координат. Непосредственно для затупления (область 1) для тела *с осевой ориентацией* вводится сферическая система координат r, θ , где r отсчитывается от полюса O_1 , а угол θ в радианах – от линии O_1O_4 в направлении к критической точке так, что $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \theta_0$, а $0 \leq r \leq R_0$.

Для хвостовой части тела (область 2) вводится согласованная с областью 1 система координат r, θ , причем линейная переменная θ отсчитывается от линии O_1O_4 вниз по направлению течения газодинамического потока, а локальная переменная r – от базовой поверхности O_1O_3 так же как и в области 1, причем $0 \leq \theta \leq L$, а $0 \leq r \leq R_0$. Для

плоского тела область 1 рассматривается в полярной системе координат r, θ , а область 2 в той же, что и для тела с осевой ориентацией системе координат r, θ , только плоского (клиновидного) тела.

Пространственная система координат r, θ, ψ для области 2 в случае тела с осевой ориентацией получится, если образующие полого цилиндра с осью OO_1 развернуть наружу на угол θ_0 , а для плоского тела таким же поворотом получить клиновидное тело. Тогда, если декартова система координат для области 2 организована таким образом, что ось Ox направлена вправо от точки O_1 вдоль оси OO_1 , ось O_1y перпендикулярно оси O_1x вверх, а ось O_1z перпендикулярно плоскости осей O_1x и O_1y за чертеж, то переменные x, y, z выразятся через переменные r, θ, ψ следующим образом:

$$\begin{aligned}x &= \theta \cos \theta_0 - r \sin \theta_0 \\y &= (\theta \sin \theta_0 + r \cos \theta_0) \sin \psi \\z &= (\theta \sin \theta_0 + r \cos \theta_0) \cos \psi,\end{aligned}\tag{1.4.1}$$

а поскольку якобиан преобразования (1.4.1)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \psi)} = 1 \neq 0,\tag{1.4.2}$$

то существует обратное преобразование.

Таким образом, введенные системы координат учитывают кривизну тела, как для газодинамического течения, так и для теплопереноса в затупленном теле.

При высокотемпературном газодинамическом обтекании затупленных тел температура в отдельных точках поверхности w тела может превысить температуру фазовых превращений, в результате чего возникает унос массы в упомянутых точках поверхности, что приводит к искажению наружной границы w тела из-за неравномерного уноса массы (или наличия уноса массы в одних точках поверхности w и отсутствия уноса массы в других ее точках).

Например, для острых тел $\left(\bar{L} = (R_0 + L)/R_0 \geq 10\right)$, характерных для высокоскоростных ЛА «земля – воздух», может возникнуть ситуация, когда тепловые потоки, а следовательно и унос массы, в окрестности звуковой линии на затуплении превышают тепловые потоки и унос массы в окрестности критической точки, в результате чего продольные координатные линии $r = \text{const}$ фиксированной сетки могут выходить из расчетной области, а затем снова входить в расчетную область.

В этих условиях наружная граница искажается и ее невозможно рассматривать в виде канонической поверхности второго порядка, т.е. ее можно формировать в виде функции, зависящей от времени, например, в двумерном случае в виде функции

$$r_w = F(\theta, t). \quad (1.4.3)$$

Возникновение такой ситуации позволяет описывать первоначальную (не подвергавшуюся уносу массы) наружную границу для тел, неканонической (и канонической) формы в виде дискретной функции

$$r_{wi} = f(\theta_i, 0), \quad i = \overline{0, 2n}, \quad (1.4.4)$$

где n – число шагов дискретизации в одной из полуплоскостей относительно оси OO_1 , что позволяет для процесса теплопереноса использовать *метод погружения* [81] тела неканонической формы внутрь тела канонической формы с наружной границей R_0 , определяемой из равенства

$$R_0 = \max_i f(\theta_i, t), \quad 0 \leq t \leq t_{\text{кон.}}. \quad (1.4.5)$$

Тогда методология численного решения задачи теплопереноса, разработанная для условий, когда продольные координатные линии $r = \text{const}$ могут выходить из расчетной области, а затем входить в нее, может использоваться, начиная с начального момента времени, когда уноса массы не было, т.е. использование метода погружения, с одной стороны, позволяет разработать однородные численные процедуры, а с другой – применять численные методы практически для произвольных тел.

1.4.2. Уравнения теплопереноса в анизотропных телах в различных системах координат

Уравнение теплопроводности в твердых телах выводится на основе первого закона термодинамики и приемлемой гипотезы о законе теплопроводности. Если в качестве такового принять гипотезу Фурье о пропорциональности вектора $q\{q_x, q_y, q_z\}$ плотности теплового потока антиградиенту температуры

$$q = -\lambda \text{grad}T \quad (1.4.6)$$

для изотропных тел и

$$q = -\Lambda \text{grad}T, \quad (1.4.7)$$

для анизотропных тел, где Λ – симметрическая матрица (тензор) теплопроводности

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix}, \quad (1.4.8)$$

то на основе первого закона термодинамики поток вектора плотности теплового потока через область, ограниченную замкнутой поверхностью (поверхностный интеграл от векторной функции), равен объемному интегралу по упомянутой области от скорости изменения температуры в этой области, что, после применения к поверхностному интегралу второго рода формулы Остроградского–Гаусса, приводит к уравнению

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}q + Q, \quad (1.4.9)$$

где Q – объемная плотность мощности, выделяемой ($Q > 0$) или поглощаемой ($Q < 0$) за счет физико-химических превращений внутри области.

Поскольку вектор градиента в координатной форме имеет вид

$$\text{grad}T = \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (1.4.10)$$

то закон (1.4.7) в координатной форме записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} -q_x &= \lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \\ -q_y &= \lambda_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{yz} \frac{\partial T}{\partial z} \\ -q_z &= \lambda_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

а уравнение (1.4.9) в координатной форме примет классическую форму (с учетом того, что оператор дивергенции при охлаждении замкнутого тела отрицателен)

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + Q$$

или

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{yz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q. \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

Если компоненты тензора теплопроводности зависят от пространственных переменных, то смешанные производные зависят от порядка дифференцирования и их нельзя объединять. Если компоненты тензора теплопроводности зависят только от температуры, то в декартовой системе координат смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования.

Переход от прямоугольных декартовых координат к криволинейным в анизотропных телах имеет специфику по сравнению с изотропными, связанную с тем, что *в уравнении теплопроводности изменяются не только дифференциальные операторы, но и компоненты тензора теплопроводности.*

Будем рассматривать переход от декартовых координат к ортогональным криволинейным координатам, характеризующимся тем, что в

точке пересечения криволинейных координатных линий касательные векторы к этим линиям ортогональны и, следовательно, образуют *локальный ортогональный базис*, изменяющийся от точки к точке.

Рассмотрим криволинейную систему координат p_1, p_2, p_3 , для чего зададим радиус-вектор $\mathbf{r}(M)$ точки M

$$\mathbf{r}(M) = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}, \quad (1.4.13)$$

где

$$\begin{aligned} x &= x(p_1, p_2, p_3) \\ y &= y(p_1, p_2, p_3) \\ z &= z(p_1, p_2, p_3) \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

– дифференцируемые функции, причем векторы $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p_i}$, $i=1,2,3$ являются векторами, касательными к координатным линиям p_i . Смешанное произведение этих векторов не равно нулю (векторы некопланарны, поскольку они ортогональны)

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p_1}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p_2}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p_3} \right) \neq 0,$$

или, что тоже, якобиан преобразования (1.4.14) не равен нулю

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial p_1} & \frac{\partial x}{\partial p_2} & \frac{\partial x}{\partial p_3} \\ \frac{\partial y}{\partial p_1} & \frac{\partial y}{\partial p_2} & \frac{\partial y}{\partial p_3} \\ \frac{\partial z}{\partial p_1} & \frac{\partial z}{\partial p_2} & \frac{\partial z}{\partial p_3} \end{bmatrix} \neq 0. \quad (1.4.15)$$

Поэтому существует обратное единственное преобразование

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1(x, y, z) \\ p_2 &= p_2(x, y, z) \\ p_3 &= p_3(x, y, z). \end{aligned} \quad (1.4.16)$$

Для перехода в уравнении (1.4.12) к криволинейным координатам (1.4.14) определим квадрат дифференциала расстояния между двумя точками в прямоугольной декартовой и криволинейной ортогональной системах координат

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial x}{\partial p_2} dp_2 + \frac{\partial x}{\partial p_3} dp_3 \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial y}{\partial p_2} dp_2 + \frac{\partial y}{\partial p_3} dp_3 \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial z}{\partial p_2} dp_2 + \frac{\partial z}{\partial p_3} dp_3 \right)^2.$$

В силу ортогональности криволинейной системы координат столбцы в матрице выражения (1.4.15) ортогональны, т.е. $\frac{\partial x}{\partial p_i} \frac{\partial x}{\partial p_j} + \frac{\partial y}{\partial p_i} \frac{\partial y}{\partial p_j} + \frac{\partial z}{\partial p_i} \frac{\partial z}{\partial p_j} = 0$ для

$i \neq j, i, j = 1, 2, 3$, следовательно квадрат дифференциала дуги сохранит только квадратные слагаемые т.е.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial p_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p_1} \right)^2 \right] dp_1^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial p_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p_2} \right)^2 \right] dp_2^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial p_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p_3} \right)^2 \right] dp_3^2 = \quad (1.4.17)$$

$$= H_1^2 dp_1^2 + H_2^2 dp_2^2 + H_3^2 dp_3^2,$$

где $H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial p_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p_i} \right)^2}$, $i = 1, 2, 3$ – метрические коэффициенты, или коэффициенты Ламэ, а $dx = H_1 dp_1$, $dy = H_2 dp_2$, $dz = H_3 dp_3$.

Рассмотрим элемент объема, ограниченный криволинейными поверхностями $p_1 \pm dp_1$, $p_2 \pm dp_2$, $p_3 \pm dp_3$ в центре которого взята точка $M(p_1, p_2, p_3)$ и для которого выражение (1.4.17) определяет квадрат элемента дуги, соединяющей точки $M(p_1, p_2, p_3)$ и $M_1(p_1 + dp_1, p_2 + dp_2, p_3 + dp_3)$. Тогда площадь участка поверхности $p_1(M) = const$, вырезаемого поверхностями $p_2 \pm dp_2$, $p_3 \pm dp_3$ равна

$$S_{p_1} = 2H_2 dp_2 \cdot 2H_3 dp_3 = 4H_2 H_3 dp_2 dp_3,$$

а количество тепла, протекающее через эту площадку равно

$$Q_{p_1} = 4H_2 H_3 dp_2 dp_3 \cdot q_{p_1},$$

где q_{p_1} – плотность теплового потока в направлении переменной p_1 в точке $M(p_1, p_2, p_3)$.

Следовательно, количество тепла, вытекающее в элемент объема через поверхность $p_1 - dp_1$, равно

$$dQ^- = 4 \left[H_2 H_3 q_{p_1} + \frac{\partial}{\partial p_1} (H_2 H_3 q_{p_1}) (-dp_1) \right] dp_2 dp_3,$$

а количество тепла, вытекающее из элемента объема через поверхность $p_1 + dp_1$, равно

$$dQ^+ = 4 \left[H_2 H_3 q_{p_1} + \frac{\partial}{\partial p_1} (H_2 H_3 q_{p_1}) (+dp_1) \right] dp_2 dp_3.$$

Полный прирост количества тепла в элементарном объеме равен разности вытекающего и вытекающего количеств тепла, т.е.

$$dQ_{p_1} = dQ^- - dQ^+ = -8 \frac{\partial}{\partial p_1} (H_2 H_3 q_{p_1}) dp_1 dp_2 dp_3.$$

Для поверхностей $p_2(M) = const$ и $p_3(M) = const$ получим соответственно

$$dQ_{p_2} = -8 \frac{\partial}{\partial p_2} (H_1 H_3 q_{p_2}) dp_1 dp_2 dp_3$$

$$dQ_{p_3} = -8 \frac{\partial}{\partial p_3} (H_1 H_2 q_{p_3}) dp_1 dp_2 dp_3.$$

В соответствии с (1.4.11) имеем

$$q_{p_1} = - \left(\lambda_{p_1 p_1} \frac{\partial T}{H_1 \partial p_1} + \lambda_{p_1 p_2} \frac{\partial T}{H_2 \partial p_2} + \lambda_{p_1 p_3} \frac{\partial T}{H_3 \partial p_3} \right)$$

$$q_{p_2} = - \left(\lambda_{p_2 p_1} \frac{\partial T}{H_1 \partial p_1} + \lambda_{p_2 p_2} \frac{\partial T}{H_2 \partial p_2} + \lambda_{p_2 p_3} \frac{\partial T}{H_3 \partial p_3} \right)$$

$$q_{p_3} = - \left(\lambda_{p_3 p_1} \frac{\partial T}{H_1 \partial p_1} + \lambda_{p_3 p_2} \frac{\partial T}{H_2 \partial p_2} + \lambda_{p_3 p_3} \frac{\partial T}{H_3 \partial p_3} \right).$$

Приравнивая сумму $dQ_{p_1} + dQ_{p_2} + dQ_{p_3}$ величине повышения температуры по времени во всем элементарном объеме, т.е. величине

$2H_1 \cdot 2H_2 \cdot 2H_3 \cdot dp_1 dp_2 dp_3 \cdot c \rho \frac{\partial T}{\partial t}$ и используя последние соотношения, получим

$$\begin{aligned}
H_1 H_2 H_3 c \rho \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial p_1} \left[H_2 H_3 \left(\lambda_{p_1 p_1} \frac{\partial T}{H_1 \partial p_1} + \lambda_{p_1 p_2} \frac{\partial T}{H_2 \partial p_2} + \lambda_{p_1 p_3} \frac{\partial T}{H_3 \partial p_3} \right) \right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial p_2} \left[H_1 H_3 \left(\lambda_{p_2 p_1} \frac{\partial T}{H_1 \partial p_1} + \lambda_{p_2 p_2} \frac{\partial T}{H_2 \partial p_2} + \lambda_{p_2 p_3} \frac{\partial T}{H_3 \partial p_3} \right) \right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial p_3} \left[H_1 H_2 \left(\lambda_{p_3 p_1} \frac{\partial T}{H_1 \partial p_1} + \lambda_{p_3 p_2} \frac{\partial T}{H_2 \partial p_2} + \lambda_{p_3 p_3} \frac{\partial T}{H_3 \partial p_3} \right) \right],
\end{aligned} \tag{1.4.18}$$

где компоненты тензора теплопроводности должны быть уже переведены из декартовой в криволинейную систему координат.

Наиболее употребительными системами криволинейных координат являются системы цилиндрических и сферических координат. Рассмотрим уравнение теплопроводности (1.4.18) в анизотропных телах в этих системах координат с учетом изменения компонентов тензора теплопроводности в этих координатах.

Цилиндрическая система координат. Цилиндрические координаты $p_1 = r$, $p_2 = \theta$, $p_3 = z$ связаны с декартовыми соотношениями

$$\begin{aligned}
x &= r \cos \theta, \\
y &= r \sin \theta, \\
z &= z, \\
0 < r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.
\end{aligned} \tag{1.4.19}$$

Поскольку якобиан (1.4.15) преобразования (1.4.19) равен $r \neq 0$ (за исключением начала координат), то существует обратное невырожденное преобразование

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
\theta &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \\
z &= z.
\end{aligned} \tag{1.4.20}$$

Метрические коэффициенты преобразования (1.4.19) вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
H_1 &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 \right]^{1/2} = (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^{1/2} = 1; \\
H_2 &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{1/2} = [(-r \sin \theta)^2 + (r \cos \theta)^2]^{1/2} = r;
\end{aligned}$$

$$H_3 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} = 1.$$

Тогда уравнение теплопроводности (1.4.18) в цилиндрической системе координат приобретает вид:

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_{r\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_{rz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta z} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zr} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{z\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.4.21)$$

Интересно отметить, что не для всех смешанных дифференциальных операторов можно менять порядок дифференцирования, если компоненты симметрического тензора теплопроводности зависят от температуры. Действительно, рассмотрим вначале операторы по переменным r и θ , затем – по переменным θ и z , и, наконец – по переменным r и z

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda_{\theta r}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial T}{\partial r} + \lambda_{\theta r} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial r};$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_{r\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda_{r\theta}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \lambda_{r\theta} \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta};$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta z} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda_{\theta z}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial T}{\partial z} + \lambda_{\theta z} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial z};$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{z\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda_{z\theta}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \lambda_{z\theta} \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial \theta};$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_{rz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda_{rz} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial \lambda_{rz}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} + \lambda_{rz} \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial z};$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zr} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial \lambda_{zr}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial r} + \lambda_{zr} \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial r}.$$

Таким образом, смешанные дифференциальные операторы по переменным r, z с одной стороны и по переменным z, r – с другой, не равны друг другу.

Отсюда следует, что поскольку симметричный тензор теплопроводности остается симметричным и при ортогональных преобразованиях (т.е. $\lambda_{r\theta} = \lambda_{\theta r}$, $\lambda_{\theta z} = \lambda_{z\theta}$, $\lambda_{rz} = \lambda_{zr}$), а также тот факт, что смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования (при условии непрерывности смешанных производных), то уравнение теплопроводности (1.4.21) будет иметь вид

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_{r\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta z} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_{rz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zr} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.4.22)$$

Сферическая система координат. Сферические координаты

$p_1 = r$, $p_2 = \psi$, $p_3 = \theta$ связаны с декартовыми соотношениями

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos \psi \\ y &= r \cos \theta \sin \psi \\ z &= r \sin \theta, \end{aligned} \quad (1.4.23)$$

$$0 < r < \infty, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}.$$

Якобиан (1.4.15) преобразования (1.4.23) равен $r^2 \cos \theta \neq 0$ (за исключением случаев $r = 0$ и $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$); в этом случае существует невырожденное обратное преобразование

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \psi &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \\ \theta &= \operatorname{arcsin} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned} \quad (1.4.24)$$

Метрические коэффициенты равны

$$\begin{aligned} H_1 &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 \right]^{1/2} = \\ &= \left[\cos^2 \theta \cos^2 \psi + \cos^2 \theta \sin^2 \psi + \sin^2 \theta \right]^{1/2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_2 &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi} \right)^2 \right]^{1/2} = \\
&= \left[r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \psi + r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \psi + 0 \right]^{1/2} = r \cos \theta \\
H_3 &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{1/2} = \\
&= \left[r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi + r^2 \cos^2 \theta \right]^{1/2} = r.
\end{aligned}$$

Тогда уравнение теплопроводности (1.4.18) в сферической системе координат будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
c\rho \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_{r\psi} \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + \\
&+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_{r\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\lambda_{\psi r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \\
&+ \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\lambda_{\psi\psi} \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\lambda_{\psi\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \\
&+ \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \lambda_{\theta r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta\psi} \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \lambda_{\theta\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right),
\end{aligned}$$

из которого видно, что среди смешанных дифференциальных операторов только два – по переменным ψ, θ и θ, ψ равны друг другу. Остальные дифференциальные операторы не равны друг другу.

Таким образом, уравнение анизотропной теории теплопроводности в сферической системе координат примет вид

$$\begin{aligned}
c\rho \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_{r\psi} \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + \\
&+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_{r\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\lambda_{\psi r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \\
&+ \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\lambda_{\psi\psi} \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + \frac{2}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\lambda_{\psi\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \\
&+ \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \cdot \lambda_{\theta r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \cdot \lambda_{\theta\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right).
\end{aligned} \tag{1.4.25}$$

Из выражения (1.4.18) можно получить уравнение анизотропной теплопроводности в любых криволинейных системах координат с ортонормированным базисом.

1.4.3. Изменение компонентов тензора теплопроводности при переходе от декартовых координат к криволинейным

Поскольку такие геометрические объекты как скаляры, векторы и тензоры являются *инвариантами* при преобразовании координат, то при изменении базиса тензор теплопроводности не изменяется, а изменяются его компоненты.

Действительно, трудно предположить, чтобы геометрический объект, например, вектор или тензор изменялся при изменении системы координат. Однако компоненты этого объекта подвержены изменению при изменении базиса.

Пусть в базисе e_1, e_2, e_3 тензор теплопроводности имеет компоненты:

$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$, $i, j = \overline{1,3}$. Здесь введены обозначения

$$\lambda_{11} \equiv \lambda_{xx}, \lambda_{12} \equiv \lambda_{xy}, \lambda_{13} \equiv \lambda_{xz}, \lambda_{22} \equiv \lambda_{yy}, \lambda_{23} \equiv \lambda_{yz}, \lambda_{33} \equiv \lambda_{zz}. \quad (1.4.26)$$

Векторы нового ортонормированного базиса e'_1, e'_2, e'_3 в старом базисе e_1, e_2, e_3 имеют следующие направляющие косинусы (координаты):

$$e'_1(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}), e'_2(\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}), e'_3(\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}).$$

Тогда при переходе к новому (штрихованному) базису e'_1, e'_2, e'_3 компоненты (1.4.26) тензора теплопроводности изменяются по закону [36]

$$\lambda'_{kl} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_{ik} \alpha_{jl} \lambda_{ij}, \quad k, l = 1, 2, 3. \quad (1.4.27)$$

При обратном переходе от базиса e'_1, e'_2, e'_3 к базису e_1, e_2, e_3 компоненты λ_{ij} преобразуются через компоненты λ'_{kl} следующим образом:

$$\lambda_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \alpha_{ik} \alpha_{jl} \lambda'_{kl}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.4.28)$$

В соответствии с (1.4.27) при переходе от ортонормированного базиса, связанного с главными осями тензора теплопроводности, к новому штрихованному базису компоненты тензора теплопроводности изменяются следующим образом:

$$\lambda'_{kl} = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ik} \alpha_{il} \lambda_i, \quad k, l = 1, 2, 3, \quad (1.4.29)$$

где

$$\lambda_1 \equiv \lambda_\xi, \quad \lambda_2 \equiv \lambda_\eta, \quad \lambda_3 \equiv \lambda_\zeta \quad (1.4.30)$$

– главные компоненты тензора теплопроводности.

В двумерном случае компоненты (1.4.29) имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_{xx} &= \lambda_\xi \cos^2 \varphi + \lambda_\eta \sin^2 \varphi \\ \lambda_{xy} &= \lambda_{yx} = (\lambda_\xi - \lambda_\eta) \sin \varphi \cos \varphi \\ \lambda_{yy} &= \lambda_\xi \sin^2 \varphi + \lambda_\eta \cos^2 \varphi, \end{aligned} \quad (1.4.31)$$

где φ - угол между главной осью $O\xi$ и декартовой осью Ox .

Более очевидным и строгим является изменение компонентов тензора теплопроводности при переходе от декартовых координат к криволинейным путем использования матриц перехода от одних координат к другим [103].

Пусть криволинейная система координат p_1, p_2, p_3 определена как дифференцируемая вектор-функция $\mathbf{r}(M)$ (1.4.13) или (1.4.14) точки M , а $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – ортонормированный базис, с которым связана декартова прямоугольная система координат x, y, z .

Частные производные вектор-функции (1.4.13) по переменным p_1, p_2, p_3 в точке M определяют тройку векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, касательных к координатным линиям p_1, p_2, p_3 , которые, в силу ортогональности криволинейных координат, ортогональны $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2 \perp \mathbf{e}_3$ и их можно принять в качестве *локального базиса* (базиса, привязанного к каждой точке M пространства). Таким образом,

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p_1}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p_2}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p_3}. \quad (1.4.32)$$

Ортогональность этих векторов выполнена, если их смешанное произведение $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ не равно нулю

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p_1}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p_2}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p_3} \right) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial p_1} & \frac{\partial x}{\partial p_2} & \frac{\partial x}{\partial p_3} \\ \frac{\partial y}{\partial p_1} & \frac{\partial y}{\partial p_2} & \frac{\partial y}{\partial p_3} \\ \frac{\partial z}{\partial p_1} & \frac{\partial z}{\partial p_2} & \frac{\partial z}{\partial p_3} \end{pmatrix} \neq 0. \quad (1.4.33)$$

В этом случае существует обратное преобразование (1.4.16) такое, что для матрицы Якоби S (матрицы перехода) преобразования (1.4.14)

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial p_1} & \frac{\partial x}{\partial p_2} & \frac{\partial x}{\partial p_3} \\ \frac{\partial y}{\partial p_1} & \frac{\partial y}{\partial p_2} & \frac{\partial y}{\partial p_3} \\ \frac{\partial z}{\partial p_1} & \frac{\partial z}{\partial p_2} & \frac{\partial z}{\partial p_3} \end{pmatrix} \quad (1.4.34)$$

существует матрица Якоби S^{-1} обратного преобразования (1.4.16), которая, в силу ортогональности системы координат ортогональна, т.е. $S^{-1} = S^T$ и невырожденна ($\det S^{-1} \neq 0$):

$$S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial p_1} & \frac{\partial y}{\partial p_1} & \frac{\partial z}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x}{\partial p_2} & \frac{\partial y}{\partial p_2} & \frac{\partial z}{\partial p_2} \\ \frac{\partial x}{\partial p_3} & \frac{\partial y}{\partial p_3} & \frac{\partial z}{\partial p_3} \end{pmatrix}. \quad (1.4.35)$$

Из (1.4.13) и (1.4.32) следует разложение векторов локального базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ по базису $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{\partial x}{\partial p_1} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial p_1} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial p_1} \mathbf{k}, \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{\partial x}{\partial p_2} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial p_2} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial p_2} \mathbf{k}, \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{\partial x}{\partial p_3} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial p_3} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial p_3} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.4.36)$$

Направляющими косинусами вектора \mathbf{e}_1 относительно базиса $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, а следовательно и координатами орта \mathbf{e}_1^o ($\mathbf{e}_1^o = \mathbf{e}_1 / |\mathbf{e}_1|$, $|\mathbf{e}_1^o| = 1$) будут

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{i}) &= \frac{\partial x / \partial p_1}{|\mathbf{e}_1|} = \frac{\partial x / \partial p_1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial p_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p_1}\right)^2}} = \frac{\partial x}{H_1 \partial p_1}; \\ \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{j}) &= \frac{\partial y}{H_1 \partial p_1}; \quad \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{k}) = \frac{\partial z}{H_1 \partial p_1}. \end{aligned} \quad (1.4.37)$$

Аналогично

$$\cos(\mathbf{e}_2, \mathbf{i}) = \frac{\partial x}{H_2 \partial p_2}, \quad \cos(\mathbf{e}_2, \mathbf{j}) = \frac{\partial y}{H_2 \partial p_2}, \quad \cos(\mathbf{e}_2, \mathbf{k}) = \frac{\partial z}{H_2 \partial p_2}; \quad (1.4.38)$$

$$\cos(\mathbf{e}_3, \mathbf{i}) = \frac{\partial x}{H_3 \partial p_3}, \quad \cos(\mathbf{e}_3, \mathbf{j}) = \frac{\partial y}{H_3 \partial p_3}, \quad \cos(\mathbf{e}_3, \mathbf{k}) = \frac{\partial z}{H_3 \partial p_3}, \quad (1.4.39)$$

где

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial p_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p_2}\right)^2}, \quad H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial p_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p_3}\right)^2}.$$

Из общей теории линейной алгебры известно, что переход от матрицы A' к матрице A при изменении базиса происходит по формуле $A' = S^{-1}AS$ [120], то есть имеем равенство

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda_{p_1, p_1} & \lambda_{p_1, p_2} & \lambda_{p_1, p_3} \\ \lambda_{p_2, p_1} & \lambda_{p_2, p_2} & \lambda_{p_2, p_3} \\ \lambda_{p_3, p_1} & \lambda_{p_3, p_2} & \lambda_{p_3, p_3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{H_1 \partial p_1} & \frac{\partial y}{H_1 \partial p_1} & \frac{\partial z}{H_1 \partial p_1} \\ \frac{\partial x}{H_2 \partial p_2} & \frac{\partial y}{H_2 \partial p_2} & \frac{\partial z}{H_2 \partial p_2} \\ \frac{\partial x}{H_3 \partial p_3} & \frac{\partial y}{H_3 \partial p_3} & \frac{\partial z}{H_3 \partial p_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{H_1 \partial p_1} & \frac{\partial x}{H_2 \partial p_2} & \frac{\partial x}{H_3 \partial p_3} \\ \frac{\partial y}{H_1 \partial p_1} & \frac{\partial y}{H_2 \partial p_2} & \frac{\partial y}{H_3 \partial p_3} \\ \frac{\partial z}{H_1 \partial p_1} & \frac{\partial z}{H_2 \partial p_2} & \frac{\partial z}{H_3 \partial p_3} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.4.40)$$

Формулы (1.4.40) и (1.4.27) идентичны, но по формулам (1.4.40) очень легко определить направляющие косинусы локального базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ относительно ортонормированного $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ путем частного

дифференцирования преобразований (1.4.14) по переменным p_1, p_2, p_3 .
Полученный тензор (1.4.40) необходимо подставить в уравнение (1.4.18).

Компоненты тензора теплопроводности в декартовой прямоугольной системе координат выражаются через главные компоненты $\lambda_\xi, \lambda_\eta, \lambda_\zeta$ тензора теплопроводности с помощью той же формулы (1.4.27) или (1.4.40), в которой $p_1 = x, p_2 = y, p_3 = z$, а направляющие косинусы декартовой прямоугольной системы координат x, y, z относительно главных осей ξ, η, ζ тензора теплопроводности определяются с помощью соотношений [34]:

$$\begin{aligned} x &= \cos(x, \xi) \cdot \xi + \cos(x, \eta) \cdot \eta + \cos(x, \zeta) \cdot \zeta \\ y &= \cos(y, \xi) \cdot \xi + \cos(y, \eta) \cdot \eta + \cos(y, \zeta) \cdot \zeta \\ z &= \cos(z, \xi) \cdot \xi + \cos(z, \eta) \cdot \eta + \cos(z, \zeta) \cdot \zeta. \end{aligned} \quad (1.4.41)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(x, \xi) & \cos(y, \xi) & \cos(z, \xi) \\ \cos(x, \eta) & \cos(y, \eta) & \cos(z, \eta) \\ \cos(x, \zeta) & \cos(y, \zeta) & \cos(z, \zeta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_\zeta \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \cos(x, \xi) & \cos(x, \eta) & \cos(x, \zeta) \\ \cos(y, \xi) & \cos(y, \eta) & \cos(y, \zeta) \\ \cos(z, \xi) & \cos(z, \eta) & \cos(z, \zeta) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.4.42)$$

откуда

$$\begin{aligned} \lambda_{xx} &= \lambda_\xi \cos^2(x, \xi) + \lambda_\eta \cos^2(x, \eta) + \lambda_\zeta \cos^2(x, \zeta) \\ \lambda_{xy} &= \lambda_{yx} = \lambda_\xi \cos(x, \xi) \cos(y, \xi) + \lambda_\eta \cos(x, \eta) \cos(y, \eta) + \lambda_\zeta \cos(x, \zeta) \cos(y, \zeta) \\ \lambda_{xz} &= \lambda_{zx} = \lambda_\xi \cos(x, \xi) \cos(z, \xi) + \lambda_\eta \cos(x, \eta) \cos(z, \eta) + \lambda_\zeta \cos(x, \zeta) \cos(z, \zeta) \\ \lambda_{yy} &= \lambda_\xi \cos^2(y, \xi) + \lambda_\eta \cos^2(y, \eta) + \lambda_\zeta \cos^2(y, \zeta) \\ \lambda_{yz} &= \lambda_{zy} = \lambda_\xi \cos(y, \xi) \cos(z, \xi) + \lambda_\eta \cos(y, \eta) \cos(z, \eta) + \lambda_\zeta \cos(y, \zeta) \cos(z, \zeta) \\ \lambda_{zz} &= \lambda_\xi \cos^2(z, \xi) + \lambda_\eta \cos^2(z, \eta) + \lambda_\zeta \cos^2(z, \zeta). \end{aligned} \quad (1.4.43)$$

Компоненты тензора теплопроводности **в цилиндрической системе координат** с использованием соотношений (1.4.40), (1.4.17) и (1.4.19) будут получены следующим образом:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \lambda_{rr} & \lambda_{r\theta} & \lambda_{rz} \\ \lambda_{\theta r} & \lambda_{\theta\theta} & \lambda_{\theta z} \\ \lambda_{zr} & \lambda_{z\theta} & \lambda_{zz} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{H_1 \partial r} & \frac{\partial y}{H_1 \partial r} & \frac{\partial z}{H_1 \partial r} \\ \frac{\partial x}{H_2 \partial \theta} & \frac{\partial y}{H_2 \partial \theta} & \frac{\partial z}{H_2 \partial \theta} \\ \frac{\partial x}{H_3 \partial z} & \frac{\partial y}{H_3 \partial z} & \frac{\partial z}{H_3 \partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{H_1 \partial r} & \frac{\partial x}{H_2 \partial \theta} & \frac{\partial x}{H_3 \partial z} \\ \frac{\partial y}{H_1 \partial r} & \frac{\partial y}{H_2 \partial \theta} & \frac{\partial y}{H_3 \partial z} \\ \frac{\partial z}{H_1 \partial r} & \frac{\partial z}{H_2 \partial \theta} & \frac{\partial z}{H_3 \partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.4.44)
\end{aligned}$$

Перемножая матрицы в (1.4.44), получим

$$\begin{aligned}
\lambda_{rr} &= \lambda_{xx} \cos^2 \theta + 2\lambda_{xy} \sin \theta \cos \theta + \lambda_{yy} \sin^2 \theta, \\
\lambda_{r\theta} &= \lambda_{\theta r} = (\lambda_{yy} - \lambda_{xx}) \sin \theta \cos \theta + \lambda_{xy} \cdot \cos 2\theta, \\
\lambda_{rz} &= \lambda_{zr} = \lambda_{xz} \cos \theta + \lambda_{yz} \sin \theta, \\
\lambda_{\theta\theta} &= \lambda_{xx} \sin^2 \theta - 2\lambda_{xy} \sin \theta \cdot \cos \theta + \lambda_{yy} \cos^2 \theta, \\
\lambda_{\theta z} &= \lambda_{z\theta} = -\lambda_{xz} \sin \theta + \lambda_{yz} \cos \theta, \\
\lambda_{zz} &= \lambda_{zz}.
\end{aligned} \quad (1.4.45)$$

Аналогично, в сферической системе координат компоненты тензора теплопроводности вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \lambda_{rr} & \lambda_{r\theta} & \lambda_{r\psi} \\ \lambda_{\theta r} & \lambda_{\theta\theta} & \lambda_{\theta\psi} \\ \lambda_{\psi r} & \lambda_{\psi\theta} & \lambda_{\psi\psi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{H_1 \partial r} & \frac{\partial y}{H_1 \partial r} & \frac{\partial z}{H_1 \partial r} \\ \frac{\partial x}{H_2 \partial \theta} & \frac{\partial y}{H_2 \partial \theta} & \frac{\partial z}{H_2 \partial \theta} \\ \frac{\partial x}{H_3 \partial \psi} & \frac{\partial y}{H_3 \partial \psi} & \frac{\partial z}{H_3 \partial \psi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{H_1 \partial r} & \frac{\partial x}{H_2 \partial \theta} & \frac{\partial x}{H_3 \partial \psi} \\ \frac{\partial y}{H_1 \partial r} & \frac{\partial y}{H_2 \partial \theta} & \frac{\partial y}{H_3 \partial \psi} \\ \frac{\partial z}{H_1 \partial r} & \frac{\partial z}{H_2 \partial \theta} & \frac{\partial z}{H_3 \partial \psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix} \times \\
& \times \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \sin \psi & \cos \psi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.4.46}
\end{aligned}$$

После перемножения матриц в (1.4.46) и некоторого упрощения получим

$$\begin{aligned}
\lambda_{rr} &= \lambda_{xx} \sin^2 \theta \cos^2 \psi + \lambda_{xy} \sin^2 \theta \sin(2\psi) + \lambda_{xz} \sin(2\theta) \cos \psi + \\
&+ \lambda_{yy} \sin^2 \theta \sin^2 \psi + \lambda_{yz} \sin(2\theta) \sin \psi + \lambda_{zz} \cos^2 \theta; \\
\lambda_{r\theta} &= \lambda_{\theta r} = \lambda_{xx} (\sin \theta \cos \theta \cos^2 \psi) + \lambda_{xy} (\sin \theta \cdot \cos \theta \sin 2\psi) + \lambda_{xz} \cdot \cos \psi \cos(2\theta) + \\
&+ \lambda_{yy} (\sin \theta \cos \theta \sin^2 \psi) + \lambda_{yz} \cdot \sin \psi \cos(2\theta) - \lambda_{zz} \sin \theta \cos \theta; \\
\lambda_{r\psi} &= \lambda_{\psi r} = \lambda_{xx} (-\sin \theta \sin \psi \cos \psi) + \lambda_{xy} (\sin \theta \cos 2\psi) + \lambda_{xz} (-\cos \theta \sin \psi) + \\
&+ \lambda_{yy} (\sin \theta \sin \psi \cos \psi) + \lambda_{yz} (\cos \theta \cos \psi); \tag{1.4.47} \\
\lambda_{\theta\theta} &= \lambda_{xx} \cos^2 \theta \cos^2 \psi + \lambda_{xy} \cos^2 \theta \cdot \sin(2\psi) + \lambda_{xz} (-\sin(2\theta) \cos \psi) + \\
&+ \lambda_{yy} \cos^2 \theta \cdot \sin 2\psi + \lambda_{yz} (-\sin(2\theta) \sin \psi) + \lambda_{zz} \sin^2 \theta \\
\lambda_{\theta\psi} &= \lambda_{\psi\theta} = \lambda_{xx} (-\cos \theta \sin \psi \cos \psi) + \lambda_{xy} (\cos \theta \cos 2\psi) + \lambda_{xz} (\sin \theta \sin \psi) + \\
&+ \lambda_{yy} (\cos \theta \sin \psi \cos \psi) + \lambda_{yz} (-\sin \theta \cos \psi); \\
\lambda_{\psi\psi} &= \lambda_{xx} \sin^2 \psi + \lambda_{xy} (-\sin(2\psi)) + \lambda_{yy} (\cos^2 \psi),
\end{aligned}$$

причем проверкой правильности вычисления компонентов тензора теплопроводности в сферической системе координат в соотношениях (1.4.47) можно использовать их симметричность.

Во всех системах координат компоненты тензора теплопроводности, находящиеся на главной диагонали, должны быть положительными, а внедиагональные могут иметь произвольные знаки, при этом сама матрица теплопроводности должна быть положительно определенной.

1.4.4. Краевые условия на границах анизотропных тел

При решении задач теории теплопроводности в анизотропных телах, ограниченных гладкими границами, для выделения единственного решения необходимо на этих границах задать дополнительные условия в виде граничных (краевых) условий. Кроме этого, для нестационарных задач теплопроводности необходимо задать начальное условие в виде распределения температур в начальный момент времени во всем теле, включая границы.

В теории теплопередачи вообще и теплопроводности, в частности, различают краевые условия четырех родов и, кроме этого, краевые условия при сложном теплообмене.

Если на границе тела Γ , ограничивающей область Ω , заданы значения температуры в виде

$$T|_{\Gamma} = f(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \Gamma, \quad (1.4.48)$$

то такие граничные условия называют *граничными условиями первого рода*, а соответствующую задачу нестационарной теплопроводности – *первой начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности*.

Если на границе тела Γ задана плотность теплового потока в виде соотношения

$$-\mathbf{q}|_{\Gamma} = \Lambda \text{grad}T(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \Gamma, \quad (1.4.49)$$

где Λ – тензор теплопроводности, а $\mathbf{q}|_{\Gamma}$ – известный вектор плотности теплового потока, такие граничные условия называют *граничными условиями второго рода*, а соответствующую задачу – *второй начально-краевой задачей анизотропной теплопроводности*.

Проектируя тепловые потоки, входящие в (1.4.49) на направление внешней нормали к границе Γ , получим величину теплового потока в направлении нормали к этой границе

$$-\mathbf{q}\Big|_{\Gamma} = \lambda_n \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial n}, \quad (x, y, z) \in \Gamma, \quad (1.4.50)$$

где теплопроводность λ_n в направлении нормали к границе Γ определяется ниже.

Если на границе Γ задана линейная комбинация теплового потока и температуры в виде

$$\alpha \cdot (T_e(x, y, z, t) - T)\Big|_{\Gamma} \mathbf{n}^0 - \Lambda \text{grad}T\Big|_{\Gamma} = 0, \quad (x, y, z) \in \Gamma, \quad (1.4.51)$$

где \mathbf{n}^0 – орт вектора нормали, α – коэффициент теплоотдачи к границе тела от окружающей среды с температурой T_e , то в этом случае (1.4.51) называют *граничными условиями третьего рода, а соответствующую задачу – третьей начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности*. Конвективный тепловой поток $\alpha(T_e - T)\Big|_{\Gamma}$, входящий в (1.4.51), называют тепловым потоком в форме Ньютона.

Проекция выражения (1.4.51) на направление внешней нормали к границе Γ приводит к соотношению

$$\alpha \cdot (T_e(x, y, z, t) - T)\Big|_{\Gamma} - \lambda_n \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0, \quad (x, y, z) \in \Gamma. \quad (1.4.52)$$

Краевое условие в форме (1.4.52) чаще всего используется на практике *при традиционном решении совместных задач газовой динамики и теплопроводности*.

При постановке и решении задач теплообмена в различных средах, разделенных границами (их называют *границами сопряжения*, а соответствующие задачи – *сопряженными*), используется на таких границах непрерывность в направлении нормали тепловых потоков и температур, если, конечно, между средами имеется идеальный контакт, то есть если граница Γ разделяет среды 1 и 2, то на этой границе, в случае отсутствия физико-химических превращений, непрерывны температура и нормальные составляющие плотности теплового потока

$$(\Lambda^{(1)} \text{grad}T^{(1)}, \mathbf{n}^0)\Big|_{\Gamma} = (\Lambda^{(2)} \text{grad}T^{(2)}, \mathbf{n}^0)\Big|_{\Gamma}, \quad (1.4.53)$$

$$T^{(1)}\Big|_{\Gamma} = T^{(2)}\Big|_{\Gamma} = T\Big|_{\Gamma}, \quad (1.4.54)$$

где круглыми скобками обозначено скалярное произведение, а $\Lambda^{(1)}$, $\Lambda^{(2)}$ – тензоры теплопроводности в сопрягаемых средах.

Акад. Лыков А.В. [87] условия (1.4.53), (1.4.54) назвал *граничными условиями четвертого рода*, а соответствующие задачи – *сопряженными начально-краевыми задачами*.

При этом касательные составляющие вектора плотности теплового потока, оставаясь на границе Γ непрерывными со стороны различных сред, претерпевают разрывы первого рода при переходе через границу Γ [119]. *Создается впечатление, что не соблюдается первое начало термодинамики. Однако здесь нет никакого противоречия, поскольку речь идет о плотности теплового потока в точке на границе Γ , а не о всем тепловом потоке, который равен поверхностному интегралу от плотности теплового потока по поверхности Γ и который конечно же сохраняется при переходе через границу Γ .*

Если в двумерном случае граница Γ раздела сред задана функцией $y = f(x)$, то раскрывая скалярные произведения в (1.4.53), получим

$$\begin{aligned} & \left(\lambda_{11}^{(1)} \cdot f'(x) + \lambda_{21}^{(1)} \right) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial x} + \left(\lambda_{12}^{(1)} \cdot f'(x) + \lambda_{22}^{(1)} \right) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial y} = \\ & = \left(\lambda_{11}^{(2)} \cdot f'(x) + \lambda_{21}^{(2)} \right) \frac{\partial T^{(2)}}{\partial x} + \left(\lambda_{12}^{(2)} f'(x) + \lambda_{22}^{(2)} \right) \frac{\partial T^{(2)}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.4.55)$$

В трехмерном случае, когда граница Γ задана неявной функцией $F(x, y, z) = 0$, равенство (1.4.53) после раскрытия скалярного произведения примет вид

$$\begin{aligned} & \left(\lambda_{11}^{(1)} F'_x + \lambda_{21}^{(1)} F'_y + \lambda_{31}^{(1)} F'_z \right) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial x} + \left(\lambda_{12}^{(1)} F'_x + \lambda_{22}^{(1)} F'_y + \lambda_{32}^{(1)} F'_z \right) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial y} + \\ & \left(\lambda_{13}^{(1)} F'_x + \lambda_{23}^{(1)} F'_y + \lambda_{33}^{(1)} F'_z \right) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} = \left(\lambda_{11}^{(2)} F'_x + \lambda_{21}^{(2)} F'_y + \lambda_{31}^{(2)} F'_z \right) \frac{\partial T^{(2)}}{\partial x} + \\ & \left(\lambda_{12}^{(2)} F'_x + \lambda_{22}^{(2)} F'_y + \lambda_{32}^{(2)} F'_z \right) \frac{\partial T^{(2)}}{\partial y} + \left(\lambda_{13}^{(2)} F'_x + \lambda_{23}^{(2)} F'_y + \lambda_{33}^{(2)} F'_z \right) \frac{\partial T^{(2)}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.4.56)$$

В случае, если на границе Γ раздела сред происходят физико-химические превращения (фазовые превращения) с тепловым эффектом Q^* , в результате чего граница Γ становится подвижной с массовой скоростью $\dot{m} = \rho \frac{dn}{dt}$, где ρ – плотность материала исходной фазы, то граничное условие четвертого рода (1.4.53) приобретает форму граничного условия Стефана

$$(\Lambda^{(2)} \text{grad} T^{(2)}, \mathbf{n}^0) - (\Lambda^{(1)} \text{grad} T^{(1)}, \mathbf{n}^0) = \dot{m} \cdot Q^*, \quad (1.4.57)$$

из которого можно определить массовую \dot{m} и линейную dn/dt скорости движения границы Γ , если известны нормальные составляющие векторов плотности теплового потока на подвижной границе.

В задачах аэрогазодинамического нагрева на границах обтекаемых тел одновременно могут действовать тепловые потоки различной физической природы (случай сопряженного теплообмена между газодинамическими течениями и анизотропными телами). В этом случае на границах тел задаются граничные условия в виде балансов различных видов тепловых потоков, называемых *сложным теплообменом*. Так, например, если граница обтекается высокотемпературным газодинамическим потоком, то на этой границе необходимо учитывать баланс следующих видов тепловой энергии: конвективного, кондуктивного, лучистого, а также энергию, выделяемую или поглощаемую при физико-химических превращениях материала стенки, и энергию, выделяемую или поглощаемую при химических реакциях в самом газе. Следовательно, такое краевое условие имеет вид

$$\lambda_e \text{grad} T_e|_{\Gamma} \mathbf{n}^0 - \Lambda \text{grad} T|_{\Gamma} - \sigma [\varepsilon_{\Gamma} T_{\Gamma}^4 - \varepsilon_e T_e^4] \mathbf{n}^0 = \dot{m} \cdot Q^* \mathbf{n}^0, \quad (1.4.58)$$

где $\lambda_e \text{grad} T|_{\Gamma} \mathbf{n}^0$ – тепловой поток от газа в форме Фурье; $\Lambda \text{grad} T|_{\Gamma}$ – кондуктивный тепловой поток в форме закона Фурье; $[\varepsilon_{\Gamma} T_{\Gamma}^4 - \varepsilon_e T_e^4] \mathbf{n}^0$ – лучистый тепловой поток в форме закона Стефана–Больцмана, в котором $\sigma = 5,67032 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$ – постоянная Стефана–Больцмана, ε_{Γ} , ε_e – степень черноты границы Γ тела и газа соответственно.

Для сопряженных задач газодинамики и теплопроводности с учетом химических реакций в газе вместо теплового потока от газа в форме Фурье в условии (1.4.58) используется тепловой поток в форме $\lambda_e \text{grad} T_i|_r - q_{\phi-x}|_r$ где, λ_e, T_e – соответственно теплопроводность и температура газа на границе Γ , а $q_{\phi-x}$ – тепловой эффект физико-химических превращений в газе (диссоциации, ионизации, рекомбинации и т.п.).

Если сумму векторов (1.4.58) спроектировать на направление внешней нормали к границе Γ , то получим выражение

$$\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial n} \Big|_r - \lambda_n \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_r - \sigma (\varepsilon_r T_r^4 - \varepsilon_e T_e^4) = \dot{m} \cdot Q^*, \quad (1.4.59)$$

которое в такой форме чаще всего используется при решении сопряженных задач теплопроводности.

При постановке граничных условий в задачах анизотропной теории теплопроводности необходимо знать проекцию плотности теплового потока на направление единичной нормали \mathbf{n}^0 к произвольной поверхности, задаваемой уравнением $F(x, y, z) = 0$, т.е. нормальную составляющую $\lambda_n \frac{\partial T}{\partial n}$ теплового потока

$$\begin{aligned} \lambda_n \frac{\partial T}{\partial n} &= (\Lambda \text{grad} T, \mathbf{n}^0) = \\ &= \left(\lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{12} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{13} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \cos(\mathbf{i}, \mathbf{n}^0) + \\ &+ \left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{23} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \cos(\mathbf{j}, \mathbf{n}^0) + \\ &+ \left(\lambda_{31} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{32} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{33} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \cos(\mathbf{k}, \mathbf{n}^0). \end{aligned} \quad (1.4.60)$$

Поскольку компоненты орта \mathbf{n}^0 вектора нормали к поверхности $F(x, y, z) = 0$ являются направляющими косинусами этого вектора в ортонормированной системе координат $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, то они определяются следующим образом:

$$\mathbf{n}^0 = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{k} \right) \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1/2} =$$

$$= \cos(\mathbf{i}, \mathbf{n}^0) \mathbf{i} + \cos(\mathbf{j}, \mathbf{n}^0) \mathbf{j} + \cos(\mathbf{k}, \mathbf{n}^0) \mathbf{k},$$

откуда

$$\cos(\mathbf{i}, \mathbf{n}^0) = \frac{\partial F}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

$$\cos(\mathbf{j}, \mathbf{n}^0) = \frac{\partial F}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (1.4.61)$$

$$\cos(\mathbf{k}, \mathbf{n}^0) = \frac{\partial F}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

С другой стороны, те же компоненты определяются соотношениями

$$\cos(\mathbf{i}, \mathbf{n}^0) = \frac{\partial T}{\partial x} / \frac{\partial T}{\partial n}, \quad \cos(\mathbf{j}, \mathbf{n}^0) = \frac{\partial T}{\partial y} / \frac{\partial T}{\partial n}, \quad \cos(\mathbf{k}, \mathbf{n}^0) = \frac{\partial T}{\partial z} / \frac{\partial T}{\partial n}, \quad (1.4.62)$$

и в соответствии с этими соотношениями из равенства (1.4.60) определяется значение теплопроводности λ_n в нормальном к поверхности $F(x, y, z) = 0$ направлении (достаточно выражение (1.4.60) разделить на $\partial T / \partial n$)

$$\lambda_n = \lambda_{11} \cos^2(\mathbf{i}, \mathbf{n}^0) + \lambda_{22} \cos^2(\mathbf{j}, \mathbf{n}^0) + \lambda_{33} \cos^2(\mathbf{k}, \mathbf{n}^0) +$$

$$+ 2\lambda_{12} \cos(\mathbf{i}, \mathbf{n}^0) \cos(\mathbf{j}, \mathbf{n}^0) + 2\lambda_{13} \cos(\mathbf{i}, \mathbf{n}^0) \cos(\mathbf{k}, \mathbf{n}^0) +$$

$$+ 2\lambda_{23} \cos(\mathbf{j}, \mathbf{n}^0) \cos(\mathbf{k}, \mathbf{n}^0). \quad (1.4.63)$$

Заменяя в равенстве (1.4.63) направляющие косинусы нормали к поверхности анизотропного тела их выражениями из (1.4.61), получим

$$\lambda_n = \left[\lambda_{11} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \lambda_{22} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \lambda_{33} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\lambda_{12} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} + 2\lambda_{13} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z} + 2\lambda_{23} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z} \right] \times$$

$$\times \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (1.4.64)$$

Таким образом, значение теплопроводности в нормальном к поверхности анизотропного тела направлении полностью определяется

компонентами тензора теплопроводности материала, из которого изготовлено это тело, и функцией $F(x, y, z)$, описывающей границу тела.

В двумерном случае, когда граница тела задана уравнением $y = f(x)$ в ортонормированной системе координат \mathbf{i}, \mathbf{j} выражение (1.4.64) существенно упрощается

$$\lambda_n = (\lambda_{11} \cdot f'^2(x) + 2\lambda_{12}f'(x) + \lambda_{22})(1 + f'^2(x))^{-1}, \quad (1.4.65)$$

поскольку имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \cos^2(\mathbf{i}, \mathbf{n}^0) &= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\mathbf{i}, \mathbf{n}^0)} = \frac{1}{1 + f'^2(x)} \\ \sin^2(\mathbf{i}, \mathbf{n}^0) &= \frac{\operatorname{tg}^2(\mathbf{i}, \mathbf{n}^0)}{1 + \operatorname{tg}^2(\mathbf{i}, \mathbf{n}^0)} = \frac{f'^2(x)}{1 + f'^2(x)}. \end{aligned} \quad (1.4.66)$$

Выводы по первой главе

1. Впервые сформулирована замкнутая физико-математическая модель сопряженного теплообмена между вязкими диссоциирующими теплогазодинамическими течениями на основе уравнений Навье-Стокса между головной ударной волной и поверхностью тела и затупленными носовыми частями ЛА с тепловой защитой, изготовленной из анизотропных материалов, (композиционных материалов, графитов и графитосодержащих материалов, сплавов некоторых редкоземельных элементов).

2. Проведен обзор различных моделей турбулентной вязкости, теплопроводности и диффузии – алгебраических (модели Прандтля Л., Ван-Дрийдта, полной вязкости Совершенного В.Д.) и дифференциальных (однопараметрическая модель Глушко Г.С., двухпараметрические модели Джонса-Лаундера и Саффмена), их достоинства и недостатки.

3. Моделирование нестационарного теплопереноса в затупленных анизотропных телах рассматривается в комбинированных криволинейных системах координат, причем при переходе к криволинейным координатам изменяются не только дифференциальные операторы, но и компоненты тензора теплопроводности. Предложен эффективный алгебраический метод одновременного изменения дифференциальных операторов и компонентов тензора теплопроводности при переходе от декартовых координат к различным криволинейным координатам.

4. Поставлены граничные условия сопряжения тепловых потоков и температур на границах «газ – твердое тело», приспособленные к использованию эффективных численных методов расщепления по координатным направлениям.

2. НОВЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОГАЗОДИНАМИКИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛАХ НА ОСНОВЕ РАСЩЕПЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Наиболее эффективными методами численного решения многомерных по пространственным переменным задач механики сплошных сред (МСС) вообще и задач теплогазодинамики и теплопроводности, в частности, являются методы расщепления дифференциальных операторов по физическим процессам и координатным направлениям. Их достоинством является, прежде всего, простота алгоритмизации и экономичность в смысле пропорциональности числа алгебраических операций числу узлов пространственно-временной сетки. Однако у них имеется и серьезный недостаток, заключающийся в том, что может не выполняться суммарная аппроксимация. Поэтому при использовании различных методов расщепления необходимо, наряду с аппроксимацией и устойчивостью, доказывать аппроксимацию в суммарном смысле.

В главе разработаны и обоснованы по аппроксимации и устойчивости новые экономичные, абсолютно устойчивые методы расщепления численного решения задач вязкой теплогазодинамики, нестационарных задач теплопроводности, содержащих смешанные дифференциальные операторы, сопряженных задач вязкой теплогазодинамики и анизотропной теплопроводности. *Эти методы, кроме идеологии расщепления по координатным направлениям, активно используют информацию о сеточной функции, полученную на расчетных временных слоях, в левых от расчетного сечениях и на нижних временных слоях.*

Такой подход позволяет получить существенные преимущества по сравнению с существующими методами, поскольку **экономичность достигается использованием только одномерных прогонок вдоль координатных направлений, а абсолютная устойчивость –**

использованием сеточных функций на верхних временных слоях с сильным диагональным преобладанием в результирующих системах линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

2.1. Комплексная физико-математическая модель сопряженного теплообмена между вязкими теплогазодинамическими течениями и телами с анизотропией свойств

На основе результатов главы 1 формируется следующая комплексная математическая модель сопряженного теплообмена между вязкими теплогазодинамическими течениями и составными анизотропными телами.

Уравнения вязкой теплогазодинамики:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \right\} + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left[r^\nu \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right];$$

$$|x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad 0 < y < y_{y0.6.}; \quad (2.1.1)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ r^\nu \mu \left[2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right],$$

$$|x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad 0 < y < y_{y0.6.}; \quad (2.1.2)$$

$$\frac{\partial(\rho u r^\nu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v r^\nu)}{\partial y} = 0, \quad |x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad 0 < y < y_{y0.6.}; \quad (2.1.3)$$

$$\rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D_{12} \frac{\partial c_i}{\partial x} \right) + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^\nu \rho D_{12} \frac{\partial c_i}{\partial y} \right) + \dot{w}_i,$$

$$|x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad 0 < y < y_{y0.6.}, \quad i = 1, 2; \quad (2.1.4)$$

$$p = T \sum_i p_i R_i = \rho \bar{R} T, \quad |x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad 0 < y < y_{y0.6.}, \quad i = 1, 2; \quad (2.1.5)$$

$$\rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^\nu \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} +$$

$$\begin{aligned}
& +\mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D_{12} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial x} \right) + \\
& + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^\nu \rho D_{12} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial y} \right), \quad |x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad 0 < y < y_{y \partial \theta}, \\
& h_i = \int_0^T c_p dT + h_i^0, \quad i = 1, 2,
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

где $\nu = 0$ для плоского тела; $\nu = 1$ для тела с осевой ориентацией, индекс «уд.в.» относится к ударной волне.

Граничные условия:

$$u(x, 0) = 0, \quad |x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad y = 0; \tag{2.1.7}$$

$$v(x, 0) = 0, \quad |x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad y = 0; \tag{2.1.8}$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0+0} = \lambda_n \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{y_T=0+0} + q_{\phi-x}, \quad T(x, y) \Big|_{y=0+0} = T(x, y_T) \Big|_{y_T=0+0} = T_w(x),$$

$$|x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad y = y_T = 0; \tag{2.1.9}$$

$$c_i(x, 0) = c_{iw}(x) = \frac{\rho_{iw}(x)}{\rho_w(x)} = \frac{p_{iw}(x)R}{p_w(x)R_i}, \quad |x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L,$$

$$y = 0, \quad i = 1, 2. \tag{2.1.10}$$

Давление p_w и плотность ρ_w газа на границе $y = 0$ вычисляются с помощью уравнений (2.1.1)–(2.1.6) и известных граничных условий (2.1.7)–(2.1.10).

Газодинамические характеристики на ударной волне вычисляются по числу M_n набегающего потока и известной геометрии ударной волны (1.1.30), (1.1.31) из соотношений (1.1.20)–(1.1.29).

Уравнения теплопроводности в составных затупленных анизотропных телах в системах координат r, θ (рис. 1.1):

Область 1 (непосредственно затупление)

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^{\nu+1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{\nu+1} \lambda_{rr}(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^{\nu+1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{\nu} \lambda_{\theta r}(T) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r \cdot \sin^{\nu} \theta'} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^{\nu} \theta' \cdot \lambda_{\theta r}(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^{\nu} \theta'} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^{\nu} \theta' \cdot \lambda_{\theta \theta}(T) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right), \quad (2.1.11)$$

$R_1 < r < R_0$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \theta_0$, $\nu = 0$ для цилиндрической системы координат, $\nu = 1$ –

для сферической системы координат, $\theta' = \theta + \theta_0$;

$$\begin{aligned} \lambda_{rr}(T) &= \lambda_{\xi}(T) \sin^2(\theta + \theta_0 - \varphi) + \lambda_{\eta}(T) \cos^2(\theta + \theta_0 - \varphi), \\ \lambda_{\theta \theta}(T) &= \lambda_{\xi}(T) \cos^2(\theta + \theta_0 - \varphi) + \lambda_{\eta}(T) \cdot \sin^2(\theta + \theta_0 - \varphi), \\ \lambda_{r\theta}(T) &= \lambda_{\theta r}(T) = [\lambda_{\xi}(T) - \lambda_{\eta}(T)] \sin(\theta + \theta_0 - \varphi) \cos(\theta + \theta_0 - \varphi). \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Область 2 (хвостовая часть)

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_{rr}(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_{r\theta}(T) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta r}(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta \theta}(T) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + p \frac{\partial T}{\partial r} + p_1 \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad R_1 < r < R_0, \quad 0 < \theta < L, \\ p &= \frac{\lambda_{rr} + \lambda_{\theta r} \operatorname{tg} \theta_0}{r + \theta \cdot \operatorname{tg} \theta_0}, \quad p_1 = \frac{\lambda_{r\theta} + \lambda_{\theta \theta} \operatorname{tg} \theta_0}{r + \theta \cdot \operatorname{tg} \theta_0}, \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{rr}(T) &= \lambda_{\xi}(T) \sin^2(\theta_0 - \varphi) + \lambda_{\eta}(T) \cos^2(\theta_0 - \varphi), \\ \lambda_{\theta \theta}(T) &= \lambda_{\xi}(T) \cos^2(\theta_0 - \varphi) + \lambda_{\eta}(T) \sin^2(\theta_0 - \varphi), \\ \lambda_{r\theta}(T) &= \lambda_{\theta r}(T) = [\lambda_{\xi}(T) - \lambda_{\eta}(T)] \cdot \sin(\theta_0 - \varphi) \cos(\theta_0 - \varphi). \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

На границах разрыва геометрических и теплофизических характеристик (ТФХ) (линии O_1O_4 , OO_1 , границы между слоями из различных анизотропных материалов) задаются граничные условия IV-го рода в виде непрерывности температур и нормальных к границам составляющих тепловых потоков

$$\lambda_n^{(1)} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial n} \Big|^- = \lambda_n^{(2)} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial n} \Big|^+, \quad T^{(1)} \Big|^- = T^{(2)} \Big|^+, \quad (2.1.15)$$

где цифрами (1), (2) обозначены контактируемые среды, $\lambda_n^{(1)}$, $\lambda_n^{(2)}$ – коэффициенты теплопроводности в нормальных к границам направлениях,

определяются через компоненты тензора теплопроводности по формулам (1.4.63), (1.4.65).

На границе сопряжения «газ – твердое тело» задаются непрерывность температур и нормальных составляющих тепловых потоков

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0+0} + h_{Aw} \rho_w D_{12} \left. \frac{\partial c_A}{\partial y} \right|_{y=0+0} = \lambda_n \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{y_T=0+0} - \varepsilon_w \sigma T_w^4,$$

$$y = 0, \quad y_T = 0, \quad |x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L; \quad (2.1.16)$$

$$T(x, y)_{y=0+0} = T(x, y)_{y_T=0+0} = T_w(x), \quad y = 0, \quad y_T = 0,$$

$$|x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad (2.1.17)$$

где h_A , c_A – энтальпия и концентрация атомарной компоненты бинарной смеси газа.

Краевые условия (2.1.16), (2.1.17) для обтекаемого тела совпадают с краевыми условиями (2.1.9).

Для замыкания системы (2.1.11)–(2.1.17) необходимо задать начальное распределение температур в затупленном теле в виде

$$T(r, \theta, 0) = f(r, \theta), \quad R_1 < r < R_0, \quad 0 \leq \theta \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L. \quad (2.1.18)$$

Система уравнений теплогазодинамики (2.1.1)–(2.1.10) малоприспособна для применения к ней эффективных численных методов, каковыми являются методы расщепления по координатным направлениям. Наиболее удобна для этого система координат, связанная с поверхностью обтекаемого тела, причем поперечные координатные линии проводятся в нормальном к поверхности тела направлении до пересечения с ударной волной, а продольные – кривые, эквидистантные обтекаемой поверхности и отсчитываются от линии полного торможения OO_1 (рис. 2.1). Такую систему координат, кроме всего прочего, очень легко совместить с системами координат в теле для описания задач анизотропной теплопроводности.

В этой системе координат задача (2.1.1)–(2.1.18) будет описываться следующей системой уравнений.

$$\begin{aligned} & \frac{\rho u}{1+y/R_0} \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho \frac{uv}{R_0+y} = -\frac{1}{1+y/R_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \\ & + \frac{1}{1+y/R_0} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v(1+y/R_0)}{\partial y} \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left[R_0 \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \\ & |x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad 0 < y < y_{y\partial.s.}; \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho u}{1+y/R_0} \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} - \rho \frac{v^2}{R_0+y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ R_0 \mu \left[2 \frac{\partial v(1+y/R_0)}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v(1+y/R_0)}{\partial y} \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{1+y/R_0} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \quad |x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad 0 < y < y_{y\partial.s.}; \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

$$\frac{\partial(\rho ru)}{\partial x} + \frac{\partial[\rho r(1+y/R_0)v]}{\partial y} = 0, \quad |x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad 0 < y < y_{y\partial.s.}; \quad (2.1.21)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho u}{1+y/R_0} \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D_{12} \frac{\partial c_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((1+y/R_0) \rho D_{12} \frac{\partial c_i}{\partial y} \right) + \dot{w}_i, \\ & |x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad 0 < y < y_{y\partial.s.}; \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

$$p = T \sum_i \rho_i R_i = \rho \bar{R} T, \quad |x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad 0 < y < y_{y\partial.s.}; \quad (2.1.23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho u c_p}{1+y/R_0} \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{1+y/R_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((1+y/R_0) \cdot \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{u}{1+y/R_0} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} + \\ & + \frac{1}{1+y/R_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D_{12} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((1+y/R_0) \rho D_{12} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial y} \right), \quad h_i = \int_0^T c_{pi} dT + h_i^0, \quad i=1,2, \\ & |x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad 0 < y < y_{y\partial.s.} \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

Граничные условия (2.1.7)–(2.1.10) сохраняются.

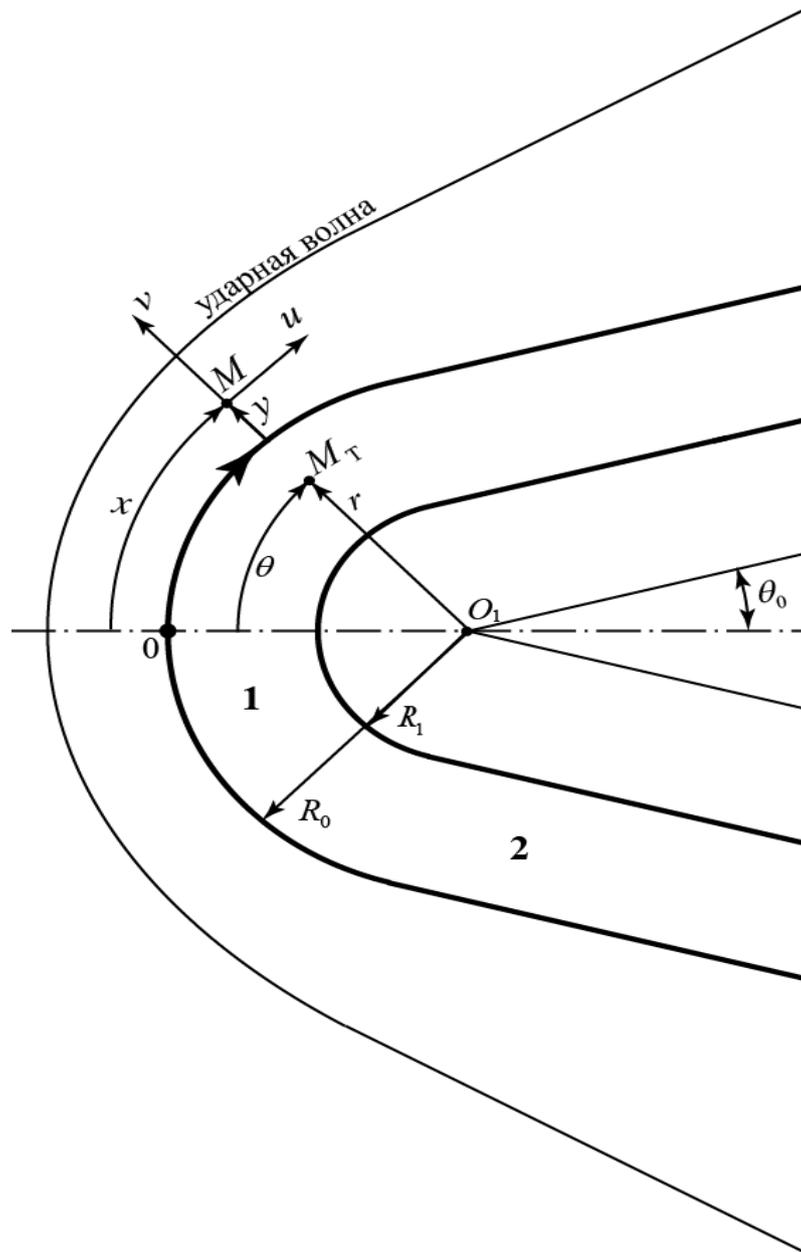


Рис. 2.1. Координатные линии конечно-разностной сетки для задач теплогазодинамики и анизотропной теплопроводности

2.2. Метод расщепления с экстраполяцией по пространственным переменным численного решения задач вязкой теплогазодинамики в ударном слое

В данном параграфе описан новый экономичный метод расщепления с экстраполяцией по пространственным переменным (МРЭП) численного решения задач вязкой теплогазодинамики (2.1.19)–(2.1.23) между

затупленными анизотропными телами и ударными волнами. В соответствии с этим методом на область газодинамического течения между телом и ударной волной (ударный слой) наносится криволинейная координатная сетка с поперечными координатными линиями в нормальном к границе тела направлении до пересечения с ударной волной, и продольными координатными линиями вдоль обтекаемого тела, причем эти координатные линии в вертикальном направлении отстают друг от друга с переменным шагом. В пристенном течении вертикальный шаг формируется как частное от деления отхода S_0 прямой части ударной волны на число шагов N_{y1} , то есть $\Delta y_1 \equiv h_1 = S_0 / N_{y1}$, а вне пристенного течения шаг $\Delta y_2 = h_2$ – произвольный. В продольном направлении шаг Δx также переменный: в окрестности затупления шаг $\Delta x_1 \equiv h_1 = \frac{\theta_{n4} R_0}{N_1}$, где θ_{n4} – отсчитываемый от критической точки вниз по потоку, ограниченный прямой частью ударной волны, а ниже по потоку шаг $\Delta x_2 \equiv h_2$ – произвольный.

Таким образом, конечно-разностная сетка имеет вид

$$\omega_{i,j} = \left\{ x_i = i \cdot \Delta x_i, i = \overline{0, I}; y_j = j \cdot \Delta y_j, j = \overline{0, J_{\text{уд.с.}}} \right\}, \quad (2.2.1)$$

На этой сетке система уравнений (2.1.19)–(2.1.23) аппроксимируется с помощью отношения конечных разностей. Поскольку эта система существенно нелинейна и содержит смешанные производные, то в каждом сечении используется процедура «предиктор – корректор» с использованием апостериорной информации о газодинамических характеристиках, полученных в сечениях, расположенных слева от расчетного сечения. Предполагая, что на этапе «предиктор» вторые производные по пространственным переменным непрерывны, что позволяет использовать линеаризацию нелинейных членов путем экстраполяции газодинамических характеристик по вторым производным вдоль продольных координатных линий на расчетное и правое от расчетного сечения. На этапе «корректор» происходит уточнение нелинейных членов. На обоих этапах используются

скалярные прогонки по координатным направлениям, что доставляет конечно-разностному методу экономичность и высокую точность.

Для использования процедуры экстраполяции необходимо определить все газодинамические характеристики между телом и ударной волной в окрестности критической точки, где течение дозвуковое и следовательно несжимаемое, а затем применить маршевые процедуры в направлении газодинамического течения на верхней и нижней образующих тела.

2.2.1. Определение теплогазодинамических характеристик в окрестности критической точки и на линии полного торможения

Окрестность критической точки на затуплении ограничена прямой частью ударной волны и звуковыми линиями, при переходе через которые поток становится сверхзвуковым. Таким образом, в этой области газодинамическое течение дозвуковое и, следовательно несжимаемое, что, с одной стороны, существенно упрощает моделирование течения, а с другой – в этой области необходимо рассматривать полные уравнения теплогазодинамики на основе уравнений Навье-Стокса (2.1.19)–(2.1.24).

Используя прандтлеву концепцию о разделении течения на потенциальное (невязкое) и вязкое в пристенной области, будем полагать, что в невязкой области компоненты скорости U_e и V_e линейны по переменным x и y с одинаковым коэффициентом пропорциональности β

$$U_e = \beta x; \quad V_e = -\beta y, \quad (2.2.2)$$

т.е. автоматически удовлетворяют уравнению неразрывности несжимаемого течения ($\rho = const$)

$$\frac{\partial U_e}{\partial x} + \frac{\partial V_e}{\partial y} = 0. \quad (2.2.3)$$

Тогда уравнение сохранения импульса (2.1.1) и (2.1.2) в невязкой области примут вид ($\mu = 0$):

$$\rho U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \rho V_e \frac{\partial U_e}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x};$$

$$\rho U_e \frac{\partial V_e}{\partial x} + \rho V_e \frac{\partial V_e}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y}. \quad (2.2.4)$$

Подставляя (2.2.2) в (2.2.4), а затем, умножая первое уравнение в (2.2.4) на dx , а второе – на dy и складывая, получим

$$-dp = \rho\beta^2 (x dx + y dy),$$

откуда

$$p(x, y) = -\frac{\rho\beta^2}{2}(x^2 + y^2) + C.$$

Постоянную интегрирования в этом уравнении определим из условия того, что давление и плотность за прямой частью ударной волны известны и равны ρ_1 , p_1 при $\theta_c = \pi/2$ и определяются из соотношений (1.1.20), (1.1.21) ($\delta = (k-1)/(k+1)$)

$$\rho_1 = \rho_n \frac{M_n^2}{(1-\delta) + \delta \cdot M_n^2}; \quad (2.2.5)$$

$$p_1 = p_n [(1+\delta)M_n^2 - \delta]. \quad (2.2.6)$$

Тогда при $x=0$, $y=S_0$: $\rho = \rho_1$, $p = p_1$

$$p_1 = -\frac{\rho_1\beta^2}{2} \cdot S_0^2 + C,$$

$$C = p_1 + \frac{\rho_1\beta^2}{2} \cdot S_0^2$$

$$p(x, y) - p_1(x) = -\frac{\rho_1\beta^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\rho_1\beta^2}{2} S_0^2. \quad (2.2.7)$$

Здесь, S_0 – расстояние между критической точкой на теле и ударной волной на линии полного торможения определяется соотношением (1.1.30).

В выражении (2.2.7) для давления $p(x, y)$ величину β можно определить из второго соотношения выражений (2.2.2) при $y=S_0$ $V_e = V_1$ $V_1 = -\beta S_0$:

$$\beta = -V_1 / S_0; \quad V = -\frac{V_1}{S_0} y$$

и выражение (2.2.7) примет вид

$$p(x, y) - p_1(x) = -\frac{\rho_1 V_1^2}{2S_0^2} (x^2 + y^2) + \frac{\rho_1 V_1^2}{2}. \quad (2.2.8)$$

С помощью выражения (2.2.8) можно определить распределение давления по переменным x и y в окрестности осевой линии затупленного тела за прямой частью ударной волны.

Из (2.2.8) следует известное выражение для давления торможения (или давления в критической точке) за прямой частью ударной волны при $x = 0$ и $y = 0$

$$p_0 = p(0; 0) = p_1 + \frac{\rho_1 V_1^2}{2}, \quad (2.2.9)$$

где ρ_1 , p_1 , $V_1 = V_n (\rho_n / \rho_1)^2$ – плотность, давление и скорость непосредственно за прямой частью ударной волны, определяются выражениями (1.1.20), (1.1.21), (1.1.25) соответственно при $\theta_c = \pi / 2$.

Для определения компонентов вектора скорости u , v и давления в окрестности критической точки вязкого течения вводится относительная функция тока $f(y)$ и относительное давление $F(y)$, с помощью которых компоненты скорости и давление представляются в виде [146]:

$$u(x, y) = x \cdot f'(y), \quad v(y) = -f(y), \quad (2.2.10)$$

$$p_0 - p(x, y) = \frac{\rho}{2} \beta^2 [x^2 + F(y)], \quad (2.2.11)$$

где p_0 – давление торможения (давление в критической точке).

Подставляя (2.2.10), (2.2.11) в уравнения Навье-Стокса (2.1.1), (2.1.2), получим два следующих обыкновенных дифференциальных уравнения

$$f'^2 - f \cdot f'' = \beta^2 + \nu \cdot f''', \quad (2.2.12)$$

$$ff' = \frac{\beta^2}{2} F' - \nu f'', \quad (2.2.13)$$

где $\nu = \mu / \rho$ – кинематическая вязкость, с граничными условиями

$$\begin{aligned} f = 0, \quad f' = 0, \quad F = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \\ f' = \beta \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Для численного решения задач (2.2.12)–(2.2.14) вводятся следующие переменные

$$\eta = \sqrt{\frac{\beta}{\nu}} y; \quad f(y) = \sqrt{\beta \nu} \cdot \varphi(\eta), \quad (2.2.15)$$

в результате чего уравнение (2.2.12) упрощается и преобразуется к виду

$$\varphi''' + \varphi \cdot \varphi'' - \varphi'^2 + 1 = 0. \quad (2.2.16)$$

Таким образом, численно решив уравнение (2.2.16), получим из (2.2.10) и (2.2.15)

$$v(y) = -\sqrt{\beta \nu} \cdot \varphi(\eta), \quad \frac{u}{U_e} = \frac{f'(y)}{\beta} = \frac{\sqrt{\beta \nu}}{\beta} \varphi'(\eta) \sqrt{\frac{\beta}{\nu}} = \varphi'(\eta), \quad (2.2.17)$$

т.е. $v(y)$ и u/U_e в окрестности критической точки не зависят от переменной x .

Приняв за толщину динамического пристенного течения толщину η , при которой скорость $u/U_e = 0,99$, ($\eta = 2,4$), то есть на один процент отличается от скорости потенциального течения, получим толщину динамического пристенного течения.

$$\delta = 2,4 \sqrt{\frac{\nu}{\beta}}. \quad (2.2.18)$$

Ниже в таблице 2.1 приводятся результаты численного решения уравнения (2.2.16) для плоского течения, заимствованные из [146].

По найденным значениям $f(y) = \varphi(\eta) \sqrt{\beta \nu}$, $f'(y) = \beta \varphi'(\eta)$, $f''(y) = \beta \varphi''(\eta) \sqrt{\frac{\beta}{\nu}}$ определяются компоненты скорости u и v

$$u(x, y) = x \cdot \beta \cdot \varphi'(\eta); \quad v = \sqrt{\beta \nu} \cdot \varphi(\eta). \quad (2.2.19)$$

Функция $F(y)$ определяется из решения следующей задачи Коши с использованием уравнения (2.2.13):

$$F'(y) = \frac{2}{\beta^2} (f \cdot f' + \nu f''), \quad F(0) = 0. \quad (2.2.20)$$

Эта задача решается численно, например, с помощью простейшей процедуры Эйлера численного интегрирования

$$F(y_{i+1}) = F(y_i) + \frac{2\Delta y_i}{\beta^2} [f(y_i) \cdot f'(y_i) + v \cdot f''(y_i)], \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.21)$$

Температуру наружной границы вязкого течения на осевой линии можно определить из уравнения сохранения энергии (1.1.10), в котором нужно положить равным нулю продольный компонент u вектора скорости, вязкие и диффузионные члены, а также слагаемое $v \frac{\partial p}{\partial y}$, поскольку давление по толщине пристенного течения считается постоянным. В результате приходим к уравнению (при $r^v = 1$):

$$\rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad x = 0, \quad 0 < y < S_0; \quad (2.2.22)$$

с граничными условиями

$$T(0) = T_w, \quad x = 0, \quad y = 0; \quad (2.2.23)$$

$$T(S_0) = T_1, \quad x = 0, \quad y = S_0, \quad (2.2.24)$$

где T_1 – температура за прямой частью ударной волны определяется выражением (1.1.22) при $\theta_c = \pi/2$.

Решением задачи (2.2.22)–(2.2.24) будет функция (при $v = -\frac{V_1}{S_0} y$,

$\lambda_0 = \lambda(T_r)$, $c_{p0} = c_p(T_r)$, $\rho_0 = \rho(p_0, T_r)$):

$$T(0, y) = T_w - (T_w - T_1) \cdot \frac{\operatorname{erf} \left[\sqrt{\frac{\rho_0 V_1 c_{p0}}{2\lambda_0 S_0}} y \right]}{\operatorname{erf} \left[\sqrt{\frac{\rho_0 V_1 c_{p0}}{2\lambda_0 S_0}} S_0 \right]}, \quad (2.2.25)$$

где в качестве температуры стенки T_w для вычисления теплофизических характеристик в первом приближении можно взять температуру восстановления T_r из (В.1).

Таблица 2.1. Значения функции φ , φ' , φ'' для плоского течения

$\eta = \sqrt{\frac{\beta}{\nu}} y$	$\varphi(\eta)$	$\varphi'(\eta) = \frac{u}{U}$	$\varphi''(\eta)$
0	0	0	1,2326
0,2	0,0233	0,2266	1,0345
0,4	0,0881	0,4145	0,8463
0,6	0,1867	0,5663	0,6752
0,8	0,3124	0,6859	0,5251
1,0	0,4592	0,7779	0,3980
1,2	0,6220	0,8467	0,2938
1,4	0,7967	0,8968	0,2110
1,6	0,9798	0,9323	0,1474
1,8	1,1689	0,9568	0,1000
2,0	1,3620	0,9732	0,0658
2,2	1,5578	0,9839	0,0420
2,4	1,7553	0,9905	0,0260
2,6	1,9538	0,9946	0,0156
2,8	2,1530	0,9970	0,0090
3,0	2,3526	0,9984	0,0051
3,2	2,5523	0,9992	0,0028
3,4	2,7532	0,9996	0,0014
3,6	2,9521	0,9998	0,0007
3,8	3,1521	0,9999	0,0004
4,0	3,3521	1,0000	0,0002
4,2	3,5521	1,0000	0,0001
4,4	3,7521	1,0000	0,0000
4,6	3,9521	1,0000	0,0000

Все ранее полученные теплогазодинамические характеристики в окрестности критической точки зависят от плотности газа $\rho(x, y)$, которую можно определить из уравнения состояния (2.1.5), используя распределения давления (2.2.8) и температуру (2.2.25), полагая при этом $T(x, y) \approx T(0, y)$, получим

$$\rho(x, y) = \frac{p(x, y)}{\bar{R} \cdot T(x, y)} = \frac{\frac{\rho_1 V_1^2}{2} \left[1 - (x^2 + y^2) / S_0^2 \right] + p_1(x)}{\bar{R} \cdot \left[T_w - (T_w - T_1) \cdot \frac{\operatorname{erf} \left[\sqrt{V_1 / 2 a_0 S_0} \cdot y \right]}{\operatorname{erf} \left[\sqrt{V_1 / 2 a_0 S_0} \cdot S_0 \right]} \right]}, \quad (2.2.26)$$

где $a_0 = \lambda_0 / \rho_0 c_{p0} \approx \lambda_1 / \rho_1 c_{p1}$, S_0 определяется через $\rho(x, y)$ соотношением (1.1.30). Трансцендентное уравнение (2.2.26) решается численно относительно $\rho(x, y)$.

Для определения концентрации c_A на внешней границе диффузионного пристенного течения сделаем следующие допущения:

газ является воздухом, состоящим из 23,5% кислорода и 76,5% азота, диссоциирующим, замороженным, т.е. реакция диссоциации протекает настолько медленно, что скорость $\dot{w}_A = 0$;

число $Sm = \frac{\mu}{\rho D_{12}} \sim 1$, так что коэффициент диффузии, домноженный на

плотность примерно равен динамической вязкости $\rho D_{12} \approx \mu$;

отношение $D = \frac{\rho_e(x) u_e(x)}{(\rho D_{12})_e}$ принято среднеинтегральным, то есть

$$D = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\rho_e(\xi) u_e(\xi)}{(\rho D_{12})_e} d\xi = \frac{\rho_e(\xi) u_e(\xi)}{(\rho D_{12}(\xi))_e}, \text{ где } \xi \in (0, x).$$

При этих допущениях уравнение диффузии (2.1.4) на внешней границе диффузионного пристенного течения примет вид ($c_{Ae}(x, \delta) \equiv \alpha_e(x)$):

$$\rho_e u_e \frac{d\alpha_e}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\rho D_{12} \frac{d\alpha_e}{dx} \right), \quad x > 0; \quad (2.2.27)$$

с начальными условиями на линии полного торможения

$$\alpha_e(0) = \alpha_{e0}, \quad x = 0; \quad (2.2.28)$$

$$\frac{d\alpha_e(0)}{dx} = \frac{d\alpha_{e0}}{dx}, \quad x = 0. \quad (2.2.29)$$

Интегрируя задачу Коши (2.2.27)–(2.2.29), приходим к выражению

$$\alpha_e(x) = \alpha_{e0} + \frac{1}{D} \frac{d\alpha_{e0}}{dx} (\exp(Dx) - 1),$$

в котором разлагая экспоненту в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$ с сохранением слагаемых до второго включительно, получим

$$\alpha_e(x) = \alpha_{e0} + \frac{d\alpha_{e0}}{dx} \left(x + D \frac{x^2}{2} \right). \quad (2.2.30)$$

Для определения степени диссоциации α_{e0} и производной $\frac{d\alpha_{e0}}{dx}$ на линии полного торможения можно воспользоваться следующими полуэмпирическими соотношениями для воздуха, как смеси молекул кислорода и азота [46]

$$\alpha = 0,235\alpha_{O_2} \quad \text{для } T < 3500\text{K};$$

$$\frac{\alpha_{O_2}^2}{1 - \alpha_{O_2}} = \frac{(\rho_d)_{O_2}}{\rho} \exp\left(- (T_d)_{O_2} / T\right),$$

$$(\rho_d)_{O_2} = 130000 \text{ кг/м}^3; \quad (T_d)_{O_2} = 59000 \text{ K};$$

$$\alpha = 0,235 + 0,765\alpha_{N_2} \quad \text{для } T \geq 3500 \text{ K}; \quad (2.2.31)$$

$$\frac{\alpha_{N_2}^2}{1 - \alpha_{N_2}} = \frac{(\rho_d)_{N_2}}{\rho} \exp\left(- (T_d)_{N_2} / T\right),$$

$$(\rho_d)_{N_2} = 130000 \text{ кг/м}^3; \quad (T_d)_{N_2} = 113000 \text{ K},$$

где ρ_d , T_d – характеристические плотности и температуры конкретного диссоциирующего газа.

2.2.2. Конечно-разностная схема метода расщепления с экстраполяцией по пространственным переменным с использованием процедуры «предиктор-корректор»

На рисунках 2.2 и 2.3 представлены шаблоны конечно-разностной схемы метода МРЭП для поперечных и продольных координатных линий соответственно. Рассмотрим вначале конечно-разностную аппроксимацию системы (2.1.19)–(2.1.24) по шаблону на рис. 2.2 в поперечном направлении ($\Delta x \equiv h_1$, $\Delta y \equiv h_2$).

Поскольку система (2.1.19)–(2.1.24) существенно нелинейна (нелинейны не только коэффициенты, но и первые производные

газодинамических функций), то на этапе «предиктор» с погрешностью $O(|h|^2)$, где $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$, все газодинамические характеристики u , v , ρ , p , c_1 , T определяются по шаблону рисунка 2.2а экстраполяцией в узлы i, s и $i+1, s$, $s = j-1, j, j+1$ по второй производной по переменной x с использованием сеточных функций в узлах $i-1, s$, $i-2, s$, $s = j-1, j, j+1$, где они уже определены (обведены жирными линиями).

В первых трех сечениях, не считая нулевого на линии полного торможения, все газодинамические характеристики определены в соответствии с методикой, изложенной в разделе 2.2.1.

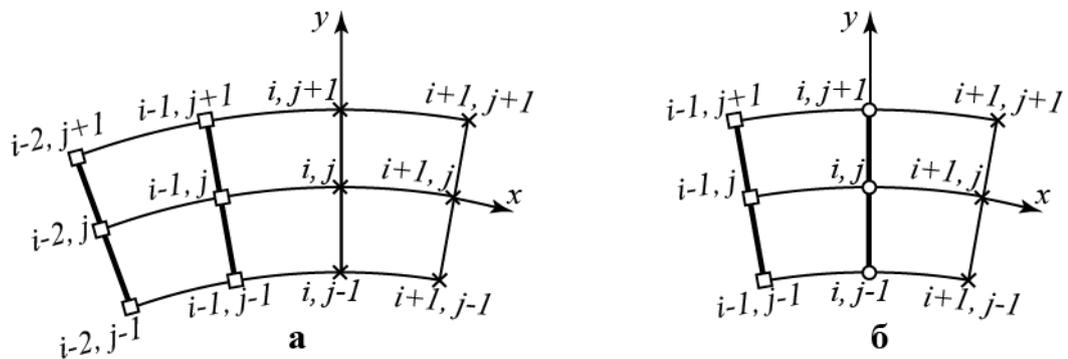


Рис. 2.2. Шаблоны схемы метода МРЭП для радиальных координатных линий: а – шаг предиктор; б – шаг корректор; □, ○, × – узлы с известными, искомыми и экстраполяционными значениями сеточных функций соответственно.

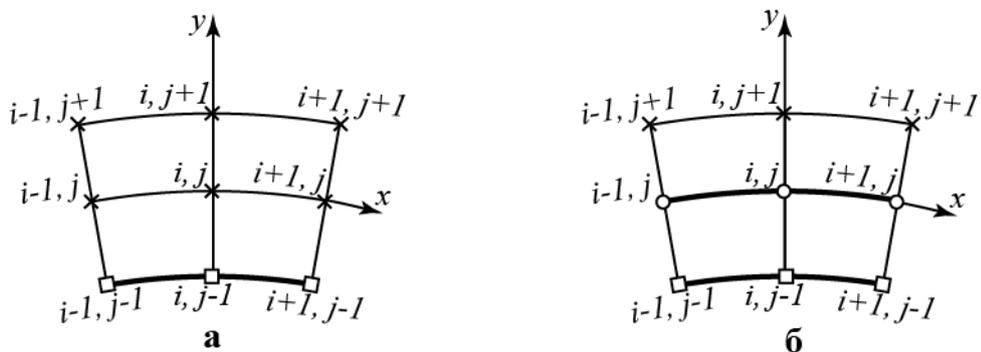


Рис. 2.3 Шаблоны схемы метода МРЭП для продольных координатных линий: а – шаг предиктор, б – шаг корректор; □, ○, × – узлы с известными, искомыми и вычисленными в поперечном направлении значениями сеточных функций соответственно.

Поперечное направление

Обозначим вектор искомых газодинамических функций через $\mathbf{f} = (f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6)^T \equiv (u v \rho p c_i T)^T$. На этапе «корректор» в соответствии с шаблоном рисунка 2.2б требуется знание нелинейных коэффициентов в виде искомых значений сеточных функций f_k , $k = \overline{1,6}$ в узлах i, s , $s = j-1, j, j+1$. Эти значения определяются на этапе «предиктор» путем разложения на точном решении сеточного значения $f_{i,s}$ в ряд Тейлора в окрестности узла $i-1, s$ до второго порядка включительно

$$f_{i,s} = f_{i-1,s} + \frac{\partial f_{i-1,s}}{\partial x} h_1 + O(h_1^2),$$

откуда следует экстраполяционное значение $(\bar{f}_k)_{i,s}$ со вторым порядком точности

$$(\bar{f}_k)_{i,s} = 2(f_k)_{i-1,s} - (f_k)_{i-2,s}, \quad s = j-1, j, j+1, \quad k = \overline{1,6}, \quad (2.2.32)$$

в котором $f_{i-1,s}$, $f_{i-2,s}$ уже известны.

На этапе «предиктор» в поперечном направлении необходимо знание значений сеточных функций в сечении x_{i+1} для вычисления производных первого и второго порядков по продольной переменной x . Эти значения на этапе «предиктор» также можно определить экстраполяцией сеточных функций в узлы $i+1, s$, $s = j-1, j, j+1$, используя известные значения сеточных функций в узлах $i-2, s$; $i-1, s$; i, s , $s = j-1, j, j+1$.

Однако ниже предложен *метод неопределенных коэффициентов* вычисления производных первого и второго порядков по продольной переменной со вторым порядком точности, в которых уже заложены экстраполяционные значения $(\bar{f}_k)_{i+1,s}$ и которые определяются из условия

второго порядка точности для $\left(\frac{\partial f_k}{\partial x}\right)_{i,s}$ и $\left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2}\right)_{i,s}$, $s = j-1, j, j+1$.

Аппроксимация первой производной с $O(h_1^2)$.

Пусть

$$\left(\frac{\partial f_k}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{(\bar{f}_k)_{i+1,j} - (f_k)_{i-1,j}}{2h_1} + O(h_1^m), \quad (2.2.33)$$

где

$(\bar{f}_k)_{i+1,j}$ – экстраполяционное значение в узле $i+1, j$, определяемое из условия $m = 2$.

Пусть

$$(\bar{f}_k)_{i+1,j} = \alpha(f_k)_{i,j} + \beta(f_k)_{i-1,j} + \gamma(f_k)_{i-2,j}, \quad (2.2.34)$$

где α, β, λ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Подставляя (2.2.34) в (2.2.33) и разлагая сеточные функции $(f_k)_{i-1,j}$, $(f_k)_{i-2,j}$ на точном решении в ряды Тейлора в окрестности узла i, j до третьего порядка включительно, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h_1} \left[\left(\alpha(f_k)_{i,j} + \beta(f_k)_{i-1,j} + \lambda(f_k)_{i-2,j} \right) - (f_k)_{i-1,j} \right] = \\ & \frac{1}{2h_1} \left[\alpha(f_k)_{i,j} + (\beta-1) \left((f_k)_{i,j} - \frac{\partial(f_k)_{i,j}}{\partial x} h_1 + \frac{\partial^2(f_k)_{i,j}}{\partial x^2} \frac{h_1^2}{2} + O(h_1^3) \right) + \right. \\ & \left. + \gamma \left((f_k)_{i,j} - \frac{\partial(f_k)_{i,j}}{\partial x} 2h_1 + \frac{\partial^2(f_k)_{i,j}}{\partial x^2} \frac{4h_1^2}{2} + O(h_1^3) \right) \right]. \end{aligned}$$

Чтобы получить второй порядок точности необходимо, чтобы сумма коэффициентов при $(f_k)_{i,j}$ была равна нулю, при $\frac{\partial(f_k)_{i,j}}{\partial x}$ – коэффициенту 2, при $\frac{\partial^2(f_k)_{i,j}}{\partial x^2}$ – нулю, приходим к системе алгебраических уравнений относительно α, β, λ :

$$\alpha + (\beta - 1) + \gamma = 0$$

$$-(\beta - 1) - 2\gamma = 2$$

$$\frac{\beta - 1}{2} + 2\gamma = 0,$$

откуда $\alpha = 3, \beta = -3, \gamma = 1$ и следовательно

$$\frac{\partial(f_k)_{i,j}}{\partial x} = \frac{3(f_k)_{i,j} - 4(f_k)_{i-1,j} + (f_k)_{i-2,j}}{2h_1} + O(h_1^2). \quad (2.2.35)$$

Из выражения (2.2.35) значение $(f_k)_{i,j}$ является искомым в операторе прогонки на этапе «корректор» в поперечном направлении.

Аппроксимация производной второго порядка с $O(h_1^2)$.

Аппроксимация второй производной $\frac{\partial^2(f_k)_{i,j}}{\partial x^2}$ со вторым порядком точности в узле i, j с использованием экстраполяционного значения $(\bar{f}_k)_{i+1,j}$ и значений $(f_k)_{i,j}$, $(f_k)_{i-1,j}$, $(f_k)_{i-2,j}$ сеточной функции не может быть получена, поскольку для этого необходимо привлекать значение $(\bar{f}_k)_{i+2,j}$, что существенно усложняет метод. Чтобы не привлекать $(\bar{f}_k)_{i+2,j}$, сделаем предположение о том, что вторые производные $\frac{\partial^2(f_k)_{i,j}}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2(f_k)_{i-1,j}}{\partial x^2}$ отличаются друг от друга погрешностью, пропорциональной h_1^n , где n подлежит определению из требования второго порядка аппроксимации второй производной по продольной переменной x . Тогда

$$\frac{\partial^2(f_k)_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{(\bar{f}_k)_{i+1,j} - 2(f_k)_{i,j} + (f_k)_{i-1,j}}{h_1^2} + O(h_1^n). \quad (2.2.36)$$

Поступая так же, как и при аппроксимации первой производной, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_1^2} \left[(\bar{f}_k)_{i+1,j} - 2(f_k)_{i,j} + (f_k)_{i-1,j} \right] = \\ & = \frac{1}{h_1^2} \left[\left(\alpha(f_k)_{i,j} + \beta(f_k)_{i-1,j} + \gamma(f_k)_{i-2,j} \right) - 2(f_k)_{i,j} + (f_k)_{i-1,j} \right] = \\ & = \frac{1}{h_1^2} \left[\left(\alpha - 2 \right) \left((f_k)_{i-1,j} + \frac{\partial(f_k)_{i-1,j}}{\partial x} h_1 + \frac{\partial^2(f_k)_{i-1,j}}{\partial x^2} \frac{h_1^2}{2} + \frac{\partial^3(f_k)_{i-1,j}}{\partial x^3} \frac{h_1^3}{6} + O(h_1^4) \right) + \right. \\ & \left. + (\beta + 1)(f_k)_{i-1,j} + \gamma \left((f_k)_{i-1,j} - \frac{\partial(f_k)_{i-1,j}}{\partial x} h_1 + \frac{\partial^2(f_k)_{i-1,j}}{\partial x^2} \frac{h_1^2}{2} - \frac{\partial^3(f_k)_{i-1,j}}{\partial x^3} \frac{h_1^3}{6} + O(h_1^4) \right) \right], \end{aligned}$$

откуда следует, что коэффициент при $(f_k)_{i-1,j}$ должен быть равен нулю, при первой производной – нулю, коэффициент при второй производной – единице и при третьей производной – нулю:

$$(\alpha - 2) + (\beta + 1) + \gamma = 0$$

$$(\alpha - 2) - \gamma = 0$$

$$\frac{\alpha - 2}{2} + \frac{\gamma}{2} = 1$$

$$\frac{\alpha - 2}{6} - \frac{\gamma}{6} = 0.$$

Второе и четвертое уравнения одинаковы. Исключая одно из них и решая полученную систему, находим $\alpha = 3$; $\beta = -3$, $\lambda = 1$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (f_k)_{i,j}}{\partial x^2} &= \frac{(\alpha - 2)(f_k)_{i,j} + (\beta + 1)(f_k)_{i-1,j} + \gamma(f_k)_{i-2,j}}{h_1^2} = \frac{(f_k)_{i,j} - 2(f_k)_{i-1,j} + (f_k)_{i-2,j}}{h_1^2} = \\ &= \frac{\partial^2 (f_k)_{i-1,j}}{\partial x^2} + O(h_1^2), \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

то есть вторая производная в узле i, j заменяется второй производной в узле $i-1, j$, разность которых по модулю пропорциональна $O(h^1)$.

Во всех уравнениях (кроме уравнения состояния) все *конвективные члены* с точностью до линейных коэффициентов имеют одинаковую форму

$$f_1 \frac{\partial f_k}{\partial x} + f_2 \frac{\partial f_k}{\partial y}, \quad k = 1, 2, 3, 5, 6.$$

Ее конечно-разностная аппроксимация со вторым порядком точности имеет вид:

$$\begin{aligned} f_1 \frac{\partial f_k}{\partial x} + f_2 \frac{\partial f_k}{\partial y} &= (\bar{f}_1)_{i,j} \frac{(\bar{f}_k)_{i+1,j} - (f_k)_{i-1,j}}{2h_1} + O(h_1^2) + (\bar{f}_2)_{i,j} \frac{(f_k)_{i,j+1} - (f_k)_{i,j-1}}{2h_2} + O(h_2^2), \\ k &= 1, 2, 3, 5, 6 \end{aligned} \quad (2.2.38)$$

с тремя неизвестными значениями $(f_k)_{i,s}$, $s = j-1, j, j+1$; экстраполяционные значения $(\bar{f}_1)_{i,j}$ и $(\bar{f}_2)_{i+1,j}$ определяются из (2.2.32), а производные первого порядка – из (2.2.35).

Дивергентные члены, содержащие вторые производные газодинамических характеристик имеют вид $\frac{1}{f_3} \frac{\partial}{\partial x} \left(c_1 \frac{\partial f_k}{\partial x} \right)$, $\frac{1}{f_3} \frac{\partial}{\partial x} \left(c_2 \frac{\partial f_k}{\partial y} \right)$,

$\frac{1}{f_3} \frac{\partial}{\partial y} \left(c_3 \frac{\partial f_k}{\partial y} \right)$, $\frac{1}{f_3} \frac{\partial}{\partial y} \left(c_4 \frac{\partial f_k}{\partial x} \right)$, где c – разнообразные линейные коэффициенты.

Определение соответствующих значений сеточных функций на этапе «предиктор» осуществляется по экстраполяционным формулам, аналогичным (2.2.32), а конечно-разностная аппроксимация дифференциальных операторов второго порядка по переменной x на этапе «корректор» со вторым порядком, осуществляется по формулам, аналогичным формуле (2.2.37). Таким образом, для перечисленных операторов второго порядка на этапе «корректор» конечно-разностные аппроксимации имеют вид:

$$\frac{1}{f_3} \frac{\partial}{\partial x} \left(c_1 \frac{\partial f_k}{\partial x} \right) = \frac{1}{(\bar{f}_3)_{i,j}} \frac{1}{h_1} \left[\frac{(c_1)_{i+1,j} + (c_1)_{i,j}}{2} \frac{(\bar{f}_k)_{i+1,j} - (f_k)_{i,j}}{h_1} - \frac{(c_1)_{i,j} + (c_1)_{i-1,j}}{2} \frac{(f_k)_{i,j} - (f_k)_{i-1,j}}{h_1} \right] +$$

$$+ O(h_1^2), \quad k=1,2,5,6; \quad (2.2.39)$$

$$\frac{1}{f_3} \frac{\partial}{\partial x} \left(c_2 \frac{\partial f_k}{\partial y} \right) = \frac{1}{(\bar{f}_3)_{i,j}} \frac{1}{2h_1} \left[\frac{(c_2)_{i+1,j+1} + (c_2)_{i+1,j-1}}{2} \frac{(\bar{f}_k)_{i+1,j+1} - (\bar{f}_k)_{i+1,j-1}}{2h_2} - \right.$$

$$\left. - \frac{(c_2)_{i-1,j+1} + (c_2)_{i-1,j-1}}{2} \frac{(f_k)_{i-1,j+1} - (f_k)_{i-1,j-1}}{2h_2} \right] + O[(h_1 + h_2)^2], \quad k=1,2,5,6; \quad (2.2.40)$$

$$\frac{1}{f_3} \frac{\partial}{\partial y} \left(c_3 \frac{\partial f_k}{\partial y} \right) = \frac{1}{(\bar{f}_3)_{i,j}} \frac{1}{h_2} \left[\frac{(c_3)_{i,j+1} + (c_3)_{i,j}}{2} \frac{(f_k)_{i,j+1} - (f_k)_{i,j}}{h_2} - \frac{(c_3)_{i,j} + (c_3)_{i,j-1}}{2} \frac{(f_k)_{i,j} - (f_k)_{i,j-1}}{h_2} \right]$$

$$+ O(h_2^2), \quad k=1,2,5,6; \quad (2.2.41)$$

$$\frac{1}{f_3} \frac{\partial}{\partial y} \left(c_4 \frac{\partial f_k}{\partial x} \right) = \frac{1}{(\bar{f}_3)_{i,j}} \frac{1}{2h_2} \left[\frac{(c_4)_{i+1,j+1} - (c_4)_{i-1,j+1}}{2} \frac{(\bar{f}_k)_{i+1,j+1} - (f_k)_{i-1,j+1}}{2h_1} - \right.$$

$$\left. - \frac{(c_4)_{i+1,j-1} + (c_4)_{i-1,j-1}}{2} \frac{(\bar{f}_k)_{i+1,j-1} - (f_k)_{i-1,j-1}}{2h_1} \right] + O[(h_1 + h_2)^2], \quad k=1,2,5,6; \quad (2.2.42)$$

$$c_5 f_1 f_2 = c_5 (f_1)_{i,j} \cdot (\bar{f}_2)_{i,j}; \quad (2.2.43)$$

$$c_6 f_2^2 = c_6 \cdot (\bar{f}_2)_{i,j} \cdot (f_2)_{i,j}; \quad (2.2.44)$$

Конечно-разностная аппроксимация диссипативного члена в уравнении энергии (2.1.24) на этапе «корректор» имеет вид (считается, что в расчетном сечении функции $u \equiv f_1$ и $v \equiv f_2$ уже определены):

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{c_5}{f_3} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right)^2 \right\} = \frac{(c_5)_{i,j}}{(\bar{f}_3)_{i,j}} \times \\ & \times \left\{ \frac{4}{3} \left[\left(\frac{(\bar{f}_1)_{i+1,j} - (f_1)_{i-1,j}}{2h_1} \right)^2 + \left(\frac{(f_2)_{i,j+1} - (f_2)_{i,j-1}}{2h_2} \right)^2 \right] + \left(\frac{(\bar{f}_2)_{i+1,j} - (f_2)_{i-1,j}}{2h_1} + \frac{(f_1)_{i,j+1} - (f_1)_{i,j-1}}{2h_2} \right)^2 - \right. \\ & \left. - \frac{4}{3} \frac{(\bar{f}_1)_{i+1,j} - (f_1)_{i-1,j}}{2h_1} \frac{(f_2)_{i,j+1} - (f_2)_{i,j-1}}{2h_2} \right\} + O(|h|^2). \end{aligned} \quad (2.2.45)$$

Аппроксимация уравнения неразрывности относительно плотности $\rho \equiv f_3$ осуществляется с помощью отношения конечных разностей (считается, что $u \equiv f_1$ и $v \equiv f_2$ уже определены в расчетном сечении)

$$\begin{aligned} & \frac{(\bar{f}_1)_{i+1,j} (\bar{f}_3)_{i+1,j} - (f_1)_{i-1,j} (f_3)_{i-1,j}}{2h_1} + \frac{(c_6 f_2)_{i,j+1} \cdot (f_3)_{i,j+1} - (c_7 f_2)_{i,j-1} (f_3)_{i,j-1}}{2h_2} = O(|h|^2), \\ & c_6 = \frac{r_{j+1}}{r_j} \left(1 + \frac{y_{j+1}}{R_0} \right), \quad c_7 = \frac{r_{j-1}}{r_j} \left(1 + \frac{y_{j-1}}{R_0} \right). \end{aligned} \quad (2.2.46)$$

Конечно-разностные аппроксимации (2.2.32)–(2.2.46), будучи подставлены в уравнения (2.1.19)–(2.1.24), преобразуют их в системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональными матрицами, которые решаются методом прогонки, вдоль поперечных координатных линий и которые изменяются вдоль продольных координатных линий в промежутке $|x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L$.

Продольное направление.

Конечно-разностная аппроксимация в продольном направлении несколько отличается от аппроксимации в поперечном направлении тем, что значения сеточных функций во всех узлах шаблона (рис. 2.3) известны из скалярных прогонок в радиальном направлении, а расчетные значения для продольного направления известны только вдоль координатной линии $y = y_{j-1}$, начиная с координатной линии вдоль тела из граничных условий при $y = 0$.

В этих условиях для линеаризации нелинейных членов используются значения сеточных функций, полученных в скалярных прогонках вдоль поперечных координатных линий (этап «предиктор» на рис. 2.3а), а затем на этапе «корректор» осуществляются скалярные прогонки вдоль продольных координатных линий (шаблон на рис. 2.3б).

Если обозначить через \bar{f}_k вычисленные в поперечном направлении значения сеточных функций, то во всех узлах шаблона на *этапе «предиктор»* имеем

$$(f_k)_{i,j} = (\bar{f}_k)_{i,j}. \quad (2.2.47)$$

На *этапе «корректор»* в продольном направлении дифференциальные операторы, входящие в уравнения (2.1.19)–(2.1.24), аппроксимируются в соответствии с шаблоном рис. 2.3б следующим образом:

$$f_1 \frac{\partial f_k}{\partial x} + f_2 \frac{\partial f_k}{\partial y} = (\bar{f}_1)_{i,j} \frac{(f_k)_{i+1,j} - (f_k)_{i-1,j}}{2h_1} + O(h_1^2) + (\bar{f}_2)_{i,j} \frac{(\bar{f}_k)_{i,j+1} - (f_k)_{i,j-1}}{2h_2} + O(h_2^2),$$

$$k = 1, 2, 5, 6. \quad (2.2.48)$$

Дивергентные слагаемые аппроксимируются следующим образом

$$\frac{1}{f_3} \frac{\partial}{\partial x} \left(c_1 \frac{\partial f_k}{\partial x} \right) = \frac{1}{(\bar{f}_3)_{i,j}} \frac{1}{h_1} \left[\frac{(c_1)_{i+1,j} + (c_1)_{i,j}}{2} \frac{(f_k)_{i+1,j} - (f_k)_{i,j}}{h_1} - \frac{(c_1)_{i,j} + (c_1)_{i-1,j}}{2} \frac{(f_k)_{i,j} - (f_k)_{i-1,j}}{h_1} \right] + O(h_1^2), \quad k = 1, 2, 5, 6; \quad (2.2.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_3} \frac{\partial}{\partial x} \left(c_2 \frac{\partial f_k}{\partial y} \right) &= \frac{1}{(\bar{f}_3)_{i,j}} \frac{1}{2h_1} \left[\frac{(c_2)_{i+1,j+1} + (c_2)_{i+1,j-1}}{2} \frac{(\bar{f}_k)_{i+1,j+1} - (f_k)_{i+1,j-1}}{2h_2} - \right. \\ &\left. - \frac{(c_2)_{i-1,j+1} + (c_2)_{i-1,j-1}}{2} \frac{(\bar{f}_k)_{i-1,j+1} - (f_k)_{i-1,j-1}}{2h_2} \right] + O[(h_1 + h_2)^2], \quad k=1,2,5,6; \end{aligned} \quad (2.2.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_3} \frac{\partial}{\partial y} \left(c_3 \frac{\partial f_k}{\partial y} \right) &= \frac{1}{(\bar{f}_3)_{i,j}} \frac{1}{h_2} \left[\frac{(c_3)_{i,j+1} + (c_3)_{i,j}}{2} \frac{(\bar{f}_k)_{i,j+1} - (f_k)_{i,j}}{h_2} - \right. \\ &\left. - \frac{(c_3)_{i,j} + (c_3)_{i,j-1}}{2} \frac{(f_k)_{i,j} - (f_k)_{i,j-1}}{h_2} \right] + O(h_2^2), \quad k=1,2,5,6; \end{aligned} \quad (2.2.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_3} \frac{\partial}{\partial y} \left(c_4 \frac{\partial f_k}{\partial x} \right) &= \frac{1}{(\bar{f}_3)_{i,j}} \frac{1}{2h_2} \left[\frac{(c_4)_{i+1,j+1} + (c_4)_{i-1,j+1}}{2} \frac{(\bar{f}_k)_{i+1,j+1} - (\bar{f}_k)_{i-1,j+1}}{2h_1} - \right. \\ &\left. - \frac{(c_4)_{i+1,j-1} + (c_4)_{i-1,j-1}}{2} \frac{(f_k)_{i+1,j-1} - (f_k)_{i-1,j-1}}{2h_1} \right] + O[(h_1 + h_2)^2], \quad k=1,2,5,6; \end{aligned} \quad (2.2.52)$$

Аппроксимация кориолисовых ускорений сохраняется такой же, как в (2.2.43), (2.2.44). Аппроксимация диссипативного члена в уравнении энергии (2.1.24) с уже определенными $u \equiv f_1$, $v \equiv f_2$ в расчетном продольном сечении имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{c_5}{f_3} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right)^2 \right\} = \frac{(c_5)_{i,j}}{(\bar{f}_3)_{i,j}} \times \\ &\times \left\{ \frac{4}{3} \left[\left(\frac{(f_1)_{i+1,j} - (f_1)_{i-1,j}}{2h_1} \right)^2 + \left(\frac{(\bar{f}_2)_{i,j+1} - (f_2)_{i,j-1}}{2h_2} \right)^2 \right] + \left(\frac{(f_2)_{i+1,j} - (f_2)_{i-1,j}}{2h_1} + \frac{(\bar{f}_1)_{i,j+1} - (f_1)_{i,j-1}}{2h_2} \right)^2 - \right. \\ &\left. - \frac{4}{3} \left(\frac{(f_1)_{i+1,j} - (f_1)_{i-1,j}}{2h_1} \frac{(\bar{f}_2)_{i,j+1} - (f_2)_{i,j-1}}{2h_2} \right) \right\} + O(|h|^2). \end{aligned} \quad (2.2.53)$$

Подставляя конечно-разностные аппроксимации (2.2.47)–(2.2.53) в систему уравнений (2.1.19)–(2.1.24), получим системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами, которые решаются методом скалярных прогонок в продольном координатном

направлении, то есть уточняются газодинамические функции, найденные при решении системы (2.1.19)–(2.1.24) в поперечном направлении.

2.2.3. Порядок аппроксимации метода МРЭП

Порядок аппроксимации схемой метода МРЭП рассмотрим на примере конечно-разностной схемы для уравнения энергии (2.1.24). Анализ порядка аппроксимации для остальных уравнений вязкой газодинамики аналогичен. Подставим конечно-разностные операторы (2.2.32)–(2.2.46) для поперечного направления в уравнение (2.1.24), а затем разностные операторы (2.2.47)–(2.2.53) для продольного в то же уравнение, получим для поперечного направления

$$\begin{aligned}
& \frac{(\bar{\rho} \bar{c}_p)_{i,j}}{1+y_j/R_0} \frac{\bar{T}_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2h_1} + (\bar{\rho} \bar{v} \bar{c}_p)_{i,j} \cdot \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2h_2} = \frac{1}{1+y_j/R_0} \cdot \frac{1}{h_1} \left[\lambda_{i+1/2,j} \frac{\bar{T}_{i+1,j} - T_{i,j}}{h_1} - \lambda_{i-1/2,j} \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{h_1} \right] + \\
& + v_{i,j} \frac{\bar{p}_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2h_2} + \Phi_{i,j} + \frac{1}{h_2} \left[(\lambda_y)_{i,j+1/2} \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{h_2} - (\lambda_y)_{i,j-1/2} \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{h_2} \right] + \frac{u_{i,j}}{1+y_j/R_0} \frac{\bar{p}_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2h_1} + \\
& + \frac{1}{1+y_j/R_0} \frac{1}{h_1} \left[(\bar{\rho} \bar{D}_{12})_{i+1/2,j} \frac{(c_{pA} \bar{c}_A \bar{T})_{i+1,j} - (c_{pA} c_A T)_{i,j}}{h_1} - \right. \\
& \left. - (\bar{\rho} \bar{D}_{12})_{i-1/2,j} \frac{(c_{pA} c_A T)_{i,j} - (c_{pA} c_A T)_{i-1,j}}{h_1} \right] + \frac{1}{h_2} \left[(\rho D_{12})_{yi,j+1/2} \frac{(c_{pA} c_A T)_{i,j+1} - (c_{pA} c_A T)_{i,j}}{h_2} - \right. \\
& \left. - (\rho D_{12})_{yi,j-1/2} \frac{(c_{pA} c_A T)_{i,j} - (c_{pA} c_A T)_{i,j-1}}{h_2} \right], \quad |i| < I, \quad 0 < y < J_{y \text{ д. в.}}, \quad (2.2.54)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
h_A &= c_{pA} \cdot T, \quad \lambda_{i \pm 1/2, j} = \frac{\lambda_{i,j} + \lambda_{i \pm 1, j}}{2}, \\
(\lambda_y)_{i, j \pm 1/2} &= \frac{\lambda_{i,j} (1+y_j/R_0) + \lambda_{i, j \pm 1} (1+y_{j \pm 1}/R_0)}{2}, \\
(\bar{\rho} \bar{D}_{12})_{i \pm 1/2, j} &= \frac{(\bar{\rho} \bar{D}_{12})_{i,j} + (\bar{\rho} \bar{D}_{12})_{i \pm 1, j}}{2},
\end{aligned}$$

$$(\rho D_{12})_{yi,j\pm 1/2} = \frac{(\rho D_{12})_{i,j}(1+y_j/R_0) + (\bar{\rho}\bar{D}_{12})_{i,j\pm 1}(1+y_{j\pm 1}/R_0)}{2}.$$

Компоненты вектора скорости $u_{i,j}$, $v_{i,j}$ и атомарной концентрации $c_{Ai,j}$ должны быть уже определены из решения конечно-разностных уравнений для уравнений сохранения импульса (2.1.19), (2.1.20) и диффузии (2.1.23). Конечно-разностные производные первого и второго порядков по переменной x , в которые входят значения сеточной функции $\bar{T}_{i+1,j}$, аппроксимируются выражениями (2.2.35), (2.2.37) соответственно, то есть

$$\frac{\partial T_{i,j}}{\partial x} = \frac{3T_{i,j} - 4T_{i-1,j} + T_{i-2,j}}{2h_1} + O(h_1^2), \quad (2.2.55)$$

$$\frac{\partial^2 T_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{T_{i,j} - 2T_{i-1,j} + T_{i-2,j}}{h_1^2} + O(h_1^2), \quad (2.2.56)$$

в которых значения сеточной функции $T_{i,j}$ являются искомыми, а $T_{i-1,j}$, $T_{i-2,j}$ — уже известны из поперечных скалярных прогонок вдоль координатных линий x_{i-1} , x_{i-2} .

Представим систему уравнений (2.2.54) в виде СЛАУ с трехдиагональной матрицей относительно сеточной функции $T_{i,j}$, перенеся в правые части все известные слагаемые и уже известные решения $T_{i-1,j}$ и $T_{i-2,j}$ и оставив в левой части искомые значения $T_{i,j-1}$, $T_{i,j}$, $T_{i,j+1}$ сеточной функции $T_{i,j}$, получим

$$a_{i,j}T_{i,j-1} - b_{i,j}T_{i,j} + c_{i,j}T_{i,j+1} = d_{i,j}, \quad (2.2.57)$$

где

$$a_{i,j} = \frac{(\bar{\rho}v\bar{c}_p)_{i,j}}{2h_2} + \frac{(\lambda_y)_{i,j-1/2}}{h_2^2} + \frac{(\bar{\rho}\bar{D}_{12}c_p c_A)_{yi,j-1/2}}{h_2^2}; \quad (2.2.58)$$

$$c_{i,j} = -\frac{(\bar{\rho}v\bar{c}_p)_{i,j}}{2h_2} + \frac{(\lambda_y)_{i,j+1/2}}{h_2^2} + \frac{(\rho D_{12})_{yi,j+1/2}(c_p c_A)_{i,j+1/2}}{h_2^2}; \quad (2.2.59)$$

$$b_{i,j} = \left[\frac{3(\bar{\rho}v\bar{c}_p)_{i,j}}{(1+y_j/R_0)2h_1} \right] + \frac{\lambda_{i,j}}{(1+y_j/R_0)h_1^2} + \frac{(\bar{\rho}\bar{D}_{12}c_p c_A)_{i,j}}{(1+y_j/R_0)h_1^2} + \frac{(\lambda_y)_{i,j+1/2} + (\lambda_y)_{i,j-1/2}}{h_2^2} +$$

$$+ \frac{\left[(\rho D_{12})_{y_{i,j+1/2}} + (\rho D_{12})_{y_{i,j-1/2}} \right] (c_p c_A)_{i,j}}{h_2^2}; \quad (2.2.60)$$

$$d_{i,j} = \frac{(\bar{\rho} u \bar{c}_p)_{i,j}}{(1 + y_j / R_0) 2h_1} (-4T_{i-1,j} + T_{i-2,j}) - \frac{\lambda_{i,j} + (\bar{\rho} \bar{D}_{12} c_p c_A)_{i,j}}{(1 + y_j / R_0) h_1^2} (-2T_{i-1,j} + T_{i-2,j}) -$$

$$- \frac{(\bar{\rho} v \bar{c}_p)_{i,j}}{2h_2} T_{i,j-1} - \frac{u_{i,j}}{1 + y_j / R_0} \frac{3p_{i,j} - 4p_{i-1,j} + p_{i-2,j}}{2h_1} - v_{i,j} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2h_2} - \Phi_{i,j}.$$

(2.2.61)

СЛАУ (2.2.57) с коэффициентами и правыми частями (2.2.58)–(2.2.61) имеет сильное диагональное преобладание, так как

$$|a_{i,j}| + |c_{i,j}| \ll |b_{i,j}| \quad (2.2.62)$$

и следует ожидать, что ее решение будет устойчивым (устойчивым по граничным условиям).

Таким образом, имеет место следующая лемма:

Л е м м а 2.1. Коэффициенты $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, $c_{i,j}$ систем конечно-разностных уравнений (2.2.57) обладают свойством $a_{i,j} + c_{i,j} > 0$ и $b_{i,j} > 0$ и удовлетворяет условию (2.2.62) диагонального преобладания

Д о к а з а т е л ь с т в о . Действительно, очевидно, что коэффициенты $a_{i,j} > 0$ и $b_{i,j} > 0$. Однако коэффициенты $c_{i,j}$ могут быть как отрицательными, так и положительными. В обоих случаях $|c_{i,j}| < |a_{i,j}|$ и, поскольку сумма коэффициентов $c_{i,j} + a_{i,j}$ входит в положительный коэффициент $b_{i,j}$ (2.2.60), то выполняется условие (2.2.62), что доказывает лемму.

Этот факт является прямым следствием предлагаемого метода расщепления с экстраполяцией по пространственным переменным – МРЭП.

А п п р о к с и м а ц и я

Проанализируем теперь порядок аппроксимации конечно-разностной схемы (2.2.54) или (2.2.57)–(2.2.61). Будем считать, что уравнение энергии (2.1.24) с граничными условиями первого рода на ударной волне и

четвертого рода на границе тела имеет единственное решение, причем входящие в конечно-разностную аппроксимацию (2.2.54) сеточные функции $u_{i,j}$, $v_{i,j}$, $(c_A)_{i,j}$, $\rho_{i,j}$, $p_{i,j}$ уже определены из конечно-разностных решений уравнений сохранения импульса, неразрывности, состояния и диффузии (2.1.19)–(2.1.23), что определяет автоматически компоненты градиента давления $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$ и диссипативную функцию $\Phi_{i,j}$ в расчетном сечении (неявно), и их можно перенести в правые части системы (2.2.54) или (2.2.57)–(2.2.61).

Тогда выполняется следующая теорема:

Т е р е м а 2.1. Пусть функция $T(x, y) \in C_4$ в области $|x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right)R_0 + L$, $0 < y < y_{\text{до.в.}}$. Тогда схема (2.2.54) или (2.2.57)–(2.2.61) обладает вторым порядком аппроксимации $O(h_1^2 + h_2^2)$ на точном решении $\tilde{T}(x, y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Действительно, поскольку функция $T(x, y)$ принадлежит классу функций, обладающих свойством непрерывности производных до четвертого порядка включительно, то для анализа порядка аппроксимации можно воспользоваться аппаратом разложения на точном решении сеточных функций, в данном случае сеточной функции $T_{i,j}$, в ряд Тейлора по степеням h_1 , h_2 до четвертой производной, включительно.

В соответствии с общей теорией разностных схем конечно-разностная схема $L_h \tilde{T} = 0$ на точном решении \tilde{T} в узлах конечно-разностной сетки аппроксимирует дифференциальное уравнение $LT = 0$ с порядком m по переменной x и n по y , если какая-либо норма разности $\|LT - L_h \tilde{T}\|$ пропорциональна сумме $h_1^m + h_2^n$, то есть

$$\|LT - L_h \tilde{T}\| = O(h_1^m + h_2^n), \quad (2.2.63)$$

где LT – дифференциальный оператор, $L_h \tilde{T}$ – конечно-разностный оператор на точном решении \tilde{T} в узлах сетки, а $\|\cdot\|$ – норма в классе непрерывно дифференцируемых функций до четвертого порядка включительно.

Полагая ограниченность и положительность коэффициентов при дифференциальных операторах в уравнении (2.1.24), то есть

$$\frac{\rho c_p}{1+y/R_0} \leq c_1 > 0; \quad \rho v c_p \leq c_2 > 0; \quad \frac{\lambda}{1+y/R_0} \leq c_3 > 0; \quad \lambda_y \leq c_4 > 0; \quad \frac{\rho D_{12} c_p c_A}{1+y/R_0} \leq c_5 > 0; \\ (1+y/R_0) \rho D_{12} c_p c_A \leq c_6 > 0, \quad (2.2.64)$$

разложим значения сеточной функции $\tilde{T}_{i,j-1}$, $\tilde{T}_{i,j+1}$ на точном решении в окрестности центрального узла i, j шаблона (рис. 2.2б) в ряды Тейлора и подставим эти разложения в конечно-разностный оператор второго порядка по переменной y системы (2.2.54), получим с учетом (2.2.64)

$$L_{2h_2} \tilde{T} = \frac{c_4}{h_2^2} \left[\left(\tilde{T}_{i,j} + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \Big|_{i,j} h_2 + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^2} \Big|_{i,j} \frac{h_2^2}{2} + \frac{\partial^3 \tilde{T}}{\partial y^3} \Big|_{i,j} \frac{h_2^3}{2} + \frac{\partial^3 \tilde{T}}{\partial y^3} \Big|_{i,j} \frac{h_2^3}{6} + O(h_2^4) \right) \right] = \\ = \frac{c_4}{h_2^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^2} \Big|_{i,j} h_2^2 + O(h_2^4) \right) = c_4 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} \Big|_{i,j} + O(h_2^2),$$

то есть

$$\|L_{2y} T - L_{2h_2} \tilde{T}\| = O(h_2^2). \quad (2.2.65)$$

Экстраполяционный конечно-разностный оператор первого порядка по переменной x (первое слагаемое в левой части системы (2.2.54)) в соответствии с (2.2.55) аппроксимирует соответствующий дифференциальный оператор уравнения (2.1.24) в узле i, j со вторым порядком $O(h_1^2)$, то есть

$$\|L_{1x} T - L_{1h_1} \tilde{T}\| = O(h_1^2). \quad (2.2.66)$$

Конечно-разностный оператор первого порядка по переменной y (второе слагаемое в левой части системы (2.2.54)), полученный с помощью отношения центральных разностей, также имеет второй порядок $O(h_2^2)$,

$$c_2 \frac{\tilde{T}_{i,j+1} - \tilde{T}_{i,j-1}}{2h_2} = c_2 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \Big|_{i,j} + O(h_2^2), \quad (2.2.67)$$

так как достаточно разложить в ряды Тейлора $\tilde{T}_{i,j+1}$, $\tilde{T}_{i,j-1}$, как это сделано в (2.2.65), и подставить эти разложения (2.2.67).

Остальные конечно-разностные операторы первого порядка по переменным x и y и второго порядка по переменной y в системе (2.2.54) имеют второй порядок $O(h_1^2 + h_2^2)$ по переменным x и y .

Осталось исследовать порядок аппроксимации экстраполяционного конечно-разностного оператора второго порядка по переменной x (первое слагаемое в правой части системы (2.2.54)).

В соответствии с (2.2.37) и (2.2.56) имеем

$$\frac{c_3}{h_1^2} (\tilde{T}_{i+1,j} - 2\tilde{T}_{i,j} + \tilde{T}_{i-1,j}) = c_3 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_{i,j-1} + O(h_1^2), \quad (2.2.68)$$

то есть экстраполяционные конечно-разностные операторы второго порядка по переменной x в узле i, j аппроксимируют дифференциальные операторы второго порядка по переменной x со вторым порядком $O(h_1^2)$ в узле $i, j-1$ в соответствии с предположением о равенстве вторых производных в узлах i, j и $i, j-1$ для получения экстраполяционного значения $\tilde{T}_{i+1,j}$ в узле $i+1, j$.

В следующем поперечном сечении это значение уточняется из решения системы (2.2.54).

Таким образом, теорема доказана.

У с т о й ч и в о с т ь

Устойчивость квазистационарных задач (стационарных задач в каждый фиксированный момент времени) следует понимать, как устойчивость решения результирующей СЛАУ относительно погрешностей вычисления элементов матрицы и правых частей СЛАУ.

Пусть конечно-разностная схема (2.2.54) записана в операторном виде

$$L_h T_h = f_h, \quad (2.2.69)$$

где f_h – все входные данные – граничные условия, теплофизические и геометрические характеристики и т.п. – и пусть $\bar{\bar{f}}_h$ – возмущенные входные данные. Тогда в соответствии с операторным уравнением (2.2.69) сеточная функция получит возмущения. Возмущенную сеточную функцию обозначим через $\bar{\bar{T}}$.

Конечно-разностная схема считается устойчивой по входным данным, если малым возмущениям входных данных соответствуют малые возмущения сеточной функции

$$\|T_h - \bar{\bar{T}}_h\| \leq M(f_h - \bar{\bar{f}}_h). \quad (2.2.70)$$

где M не зависит от сеточных характеристик и входных данных.

Для результирующей СЛАУ (2.2.54) выражение (2.2.70) будет иметь место, если выполняются условия леммы 2.1, то есть для СЛАУ с трехдиагональной матрицей имеется диагональное преобладание.

Назовем запасом устойчивости конечно-разностной схемы с результирующей СЛАУ, имеющей трехдиагональную матрицу, разность

$$\delta_{з.у.} = |b_{i,j}| - (|a_{i,j}| + |c_{i,j}|). \quad (2.2.71)$$

Конечно-разностные схемы абсолютно устойчивы если имеется сильное диагональное преобладание

$$|b_{i,j}| \gg |a_{i,j}| + |c_{i,j}|, \quad (2.2.72)$$

неустойчивы в случае $\delta_{з.у.} \leq 0$ и условно устойчивы (устойчивы при ограничениях, накладываемых на сеточные характеристики h_1, h_2), если

$$\delta_{з.у.} = O(h_1^m + h_2^n).$$

Т е р е м а 2.2. Результирующая СЛАУ конечно-разностной схемы (2.2.54) или (2.2.57)–(2.2.61) имеет сильное диагональное преобладание и, следовательно, абсолютно устойчива при возмущении входных данных.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Поскольку имеет место лемма 2.1, составим разность (2.2.71), получим

$$\begin{aligned}
\delta_{3,y} = |b_{i,j}| - (|a_{i,j}| + |c_{i,j}|) = & \left(\frac{3(\bar{\rho}i\bar{c}_p)_{i,j}}{(1+y_j/R_0)2h_1} + \frac{\lambda_{i,j}}{(1+y_j/R_0)h_1^2} + \frac{(\rho D_{12}c_p c_A)_{i,j}}{(1+y_j/R_0)h_1^2} + \right. \\
& \left. + \frac{(\lambda_y)_{i,j+1/2} + (\lambda_y)_{i,j-1/2}}{h_2^2} + \frac{[(\rho D_{12})_{yi,j+1/2} + (\rho D_{12})_{yi,j-1/2}](c_p c_A)_{i,j}}{h_2^2} \right) - \\
& - \left[\frac{(\bar{\rho}v\bar{c}_p)_{i,j}}{2h_2} + \frac{(\lambda_y)_{i,j-1/2}}{h_2^2} + \frac{(\bar{\rho}\bar{D}_{12}c_p c_A)_{yi,j-1/2}}{h_2^2} \right] - \\
& - \left| \frac{(\bar{\rho}v\bar{c}_p)_{i,j}}{2h_2} + \frac{(\lambda_y)_{i,j+1/2}}{h_2^2} + \frac{(\rho D_{12})_{yi,j+1/2}(c_p c_A)_{i,j+1/2}}{h_2^2} \right|. \tag{2.2.73}
\end{aligned}$$

Коэффициенты $b_{i,j}$ и $a_{i,j}$ в (2.2.73) приведены без знаков модуля, поскольку входящие в них слагаемые все положительны. Коэффициенты $c_{i,j}$ могут быть как положительными, так и отрицательными, но в любом случае $|c_{i,j}| < a_{i,j}$, а поскольку коэффициенты $a_{i,j}$ и $c_{i,j}$ входят в коэффициенты $b_{i,j}$, то разность (2.2.73) равна

$$\delta_{3,y} = |b_{i,j}| - (|a_{i,j}| + |c_{i,j}|) = \frac{3(\bar{\rho}i\bar{c}_p)_{i,j}}{(1+y_j/R_0)2h_1} + \frac{\lambda_{i,j}}{(1+y_j/R_0)h_1^2} + \frac{(\rho D_{12}c_p c_A)_{i,j}}{(1+y_j/R_0)h_1^2} \gg 0, \tag{2.2.74}$$

откуда следует абсолютная устойчивость схемы метода МРЭП, что доказывает теорему.

Ясно, что такое значительное диагональное преобладание результирующей СЛАУ с трехдиагональной матрицей является следствием метода, поскольку при экстраполяции через центральный узел шаблона (2.2б) искомое значение сеточной функции $T_{i,j}$ в этом узле увеличивает коэффициенты $b_{i,j}$.

Конечно-разностная схема метода МРЭП для продольных координатных линий строится по шаблону (2.3а) – предиктор, где значения сеточных функций на линиях $y = y_j$ и $y = y_{j+1}$ принимаются из уже найденных значений сеточной функции в поперечном направлении, и по

шаблону (2.3б) – корректор в узлах на координатной линии $y = y_j$ сеточные функции $T_{i,j}$ являются из решения задачи в поперечном направлении. И в случае предактор, и в случае корректор значения сеточной функции на линии $y = y_{j-1}$ уже определены.

Изложенная конечно-разностная схема метода МРЭП практически без изменения используется для остальных уравнений вязкой газовой динамики между ударной волной и анизотропным телом, то есть для уравнений (2.1.19)–(2.1.22).

2.3. Метод расщепления с экстраполяцией по времени численного решения задач анизотропной теплопроводности

Достоинством методов расщепления по координатным направлениям численного решения задач механики сплошных сред является их экономичность вследствие покоординатного применения простейших численных процедур, в частности, методов скалярной (одномерной) прогонки для многомерных уравнений в частных производных второго порядка по пространственным переменным. Однако наличие смешанных производных в задачах для анизотропных сред затрудняет такое расщепление. Поэтому во всех существующих до настоящего времени численных методах смешанные дифференциальные операторы без расщепления аппроксимируются на нижних временных слоях (явно) и включаются в правые части результирующей СЛАУ, уменьшая диагональные элементы ее матрицы и тем самым существенно ослабляя устойчивость конечно-разностных схем.

В этом параграфе предложен и обоснован по аппроксимации и устойчивости экономичный абсолютно устойчивый метод расщепления с экстраполяцией по времени (МРЭВ) численного решения многомерных нестационарных задач анизотропной теплопроводности, содержащих смешанные производные, который по степени диагонального преобладания

результатирующей СЛАУ превосходит все известные численные методы расщепления с неограниченным количеством независимых переменных эвклидова пространства.

Для определенности будем рассматривать область затупления (область 1 на рисунке 1.1) в полярной системе координат

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta, \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

для которой коэффициенты Ламэ равны $H_1 = 1$, $H_2 = r$.

Тогда уравнение анизотропной теплопроводности (2.1.11) трансформируется в уравнение

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_{r\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + F(r, \theta, t), \\ R_1 < r < R_0, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} - \theta_0, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

в котором компоненты тензора теплопроводности в криволинейных координатах (2.3.1) определяются соотношениями (1.4.45), а $F(r, \theta, t)$ – известная функция.

2.3.1. Конечно-разностная схема метода МРЭВ

На расчетную пространственно-временную область нанесем конечно-разностную сетку

$$\omega_{\Delta r, \Delta \theta, \tau} = \{ \theta_i = i \cdot \Delta \theta, \quad i = \overline{0, I}; \quad r_j = j \Delta r, \quad j = \overline{0, J}, \quad t^k = k \cdot \tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots \}, \quad (2.3.3)$$

на которой будем аппроксимировать дифференциальное уравнение (2.3.2) по шаблону рисунка 2.4.

В соответствии с методом расщепления шаг по времени делится на количество независимых переменных эвклидова пространства, в данном случае на два, и на каждом дробном временном шаге уравнение (2.3.2) аппроксимируется следующим образом:

$$\begin{aligned}
c\rho \frac{T_{i,j}^{k+1/2} - T_{i,j}^k}{\tau/2} &= \left((\lambda_{rr})_{i,j+1/2}^{k+1/2} \frac{\tilde{T}_{i,j+1}^{k+1/2} - T_{i,j}^{k+1/2}}{\Delta r^2} - (\lambda_{rr})_{i,j-1/2}^{k+1/2} \frac{T_{i,j}^{k+1/2} - T_{i,j-1}^{k+1/2}}{\Delta r^2} \right) + \\
&+ \left((\lambda_{r\theta})_{i,j+1}^{k+1/2} \frac{\tilde{T}_{i+1,j+1}^{k+1/2} - \tilde{T}_{i-1,j+1}^{k+1/2}}{4\Delta r \cdot r_j \cdot \Delta\theta} - (\lambda_{r\theta})_{i,j-1}^{k+1/2} \frac{T_{i+1,j-1}^{k+1/2} - T_{i-1,j-1}^{k+1/2}}{4\Delta r \cdot r_j \cdot \Delta\theta} \right) + \\
&+ \left((\lambda_{\theta r})_{i+1,j}^{k+1/2} \frac{\tilde{T}_{i+1,j+1}^{k+1/2} - T_{i+1,j-1}^{k+1/2}}{4\Delta r \cdot r_j \cdot \Delta\theta} - (\lambda_{\theta r})_{i-1,j}^{k+1/2} \frac{\tilde{T}_{i-1,j+1}^{k+1/2} - T_{i-1,j-1}^{k+1/2}}{4\Delta r \cdot r_j \cdot \Delta\theta} \right) + \\
&+ \left((\lambda_{\theta\theta})_{i+1/2,j}^{k+1/2} \frac{T_{i+1,j}^{k+1/2} - T_{i,j}^{k+1/2}}{(r_j \Delta\theta)^2} - (\lambda_{\theta\theta})_{i-1/2,j}^{k+1/2} \frac{T_{i,j}^{k+1/2} - T_{i-1,j}^{k+1/2}}{(r_j \Delta\theta)^2} \right), \\
i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

где

$$\tilde{T}_{s,j+1}^{k+1/2} = 2T_{s,j+1}^k - T_{s,j+1}^{k-1/2} + O(\tau^2), \quad s = i-1, i, i+1; \tag{2.3.5}$$

$$\begin{aligned}
c\rho \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^{k+1/2}}{\tau/2} &= \left((\lambda_{rr})_{i,j+1/2}^{k+1} \frac{T_{i,j+1}^{k+1} - T_{i,j}^{k+1}}{\Delta r^2} - (\lambda_{rr})_{i,j-1/2}^{k+1} \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta r^2} \right) + \\
&+ \left((\lambda_{r\theta})_{i,j+1}^{k+1} \frac{\tilde{T}_{i+1,j+1}^{k+1} - T_{i-1,j+1}^{k+1}}{\Delta r^2} - (\lambda_{r\theta})_{i,j-1}^{k+1} \frac{\tilde{T}_{i+1,j-1}^{k+1} - T_{i-1,j-1}^{k+1}}{\Delta r^2} \right) + \\
&+ \left((\lambda_{\theta r})_{i+1,j}^{k+1} \frac{\tilde{T}_{i+1,j+1}^{k+1} - \tilde{T}_{i+1,j-1}^{k+1}}{4\Delta r \cdot r_j \cdot \Delta\theta} - (\lambda_{\theta r})_{i-1,j}^{k+1} \frac{T_{i-1,j+1}^{k+1} - T_{i-1,j-1}^{k+1}}{4\Delta r \cdot r_j \cdot \Delta\theta} \right) + \\
&+ \left((\lambda_{\theta\theta})_{i+1/2,j}^{k+1/2} \frac{\tilde{T}_{i+1,j}^{k+1} - T_{i,j}^{k+1}}{(r_j \Delta\theta)^2} - (\lambda_{\theta\theta})_{i-1/2,j}^{k+1/2} \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i-1,j}^{k+1}}{(r_j \Delta\theta)^2} \right), \\
i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

где

$$\tilde{T}_{i+1,s}^{k+1} = 2T_{i+1,s}^{k+1/2} - T_{i+1,s}^k + O(\tau^2), \quad s = j-1, j, j+1. \tag{2.3.7}$$

В выражениях (2.3.4), (2.3.6) нелинейные компоненты тензора теплопроводности вычисляются следующим образом:

$$(\lambda_{rr})_{i,j\pm 1}^{k+(n+1)/2} = \frac{(\lambda_{rr})_{i,j}^{k+(n+1)/2} + (\lambda_{rr})_{i,j\pm 1}^{k+(n+1)/2} \left(\frac{r_{j\pm 1}}{r_j} \right)}{2},$$

$$\begin{aligned}
(\lambda_{r\theta})_{i,j\pm 1}^{k+(n+1)/2} &= \frac{(\lambda_{r\theta})_{i,j\pm 1}^{k+(n+1)/2} + (\lambda_{r\theta})_{i,j\pm 1}^{k+(n+1)/2} \left(\frac{r_{j\pm 1}}{r_j} \right)}{2}, \\
(\lambda_{\theta r})_{i\pm 1,j}^{k+(n+1)/2} &= \frac{(\lambda_{\theta r})_{i\pm 1,j}^{k+(n+1)/2} + (\lambda_{\theta r})_{i\pm 1,j}^{k+(n+1)/2}}{2}, \\
(\lambda_{\theta\theta})_{i\pm 1/2,j}^{k+(n+1)/2} &= \frac{(\lambda_{\theta\theta})_{i,j}^{k+(n+1)/2} + (\lambda_{\theta\theta})_{i\pm 1/2,j}^{k+(n+1)/2}}{2},
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

где

$n = 0$ для подсхемы (2.3.4) и $n = 1$ для подсхемы (2.3.6).

В подсхеме (2.3.4) на верхнем временном полуосле значения сеточной функции $T_{s,j-1}^{k+1/2}$, $s = i-1, i, i+1$ уже известны из скалярной прогонки в направлении координатной линии $r = r_{j-1} = const$, значения $\tilde{T}_{s,j+1}^{k+1/2}$, $s = i-1, i, i+1$, определяются соотношениями (2.3.5) линейной экстраполяцией с использованием сеточных функций на двух предыдущих временных слоях, с порядком $O(\tau^2)$. Значения $T_{s,j}^{k+1/2}$, $s = i-1, i, i+1$, являются искомыми, определяемыми из скалярной прогонки вдоль координатной линии $r_j = const$. Таким образом, кроме значений $T_{i-1,j}^{k+1/2}$, $T_{i,j}^{k+1/2}$ и $T_{i+1,j}^{k+1/2}$ сеточной функции все остальные шесть значений (см. шаблон на рис. 2.4а) переводятся в правые части, как известные, несмотря на то, что все они определены на верхнем полуосле.

Таким образом на временном слое $t^{k+1/2} = t^k + \tau/2$ определено распределение температур во всей расчетной области.

В подсхеме (2.3.6) на верхнем временном слое $t^{k+1} = t^k + \tau$ значения сеточной функции $T_{i-1,s}^{k+1}$, $s = j-1, j, j+1$, уже определены из скалярной прогонки в левом сечении (см. шаблон на рис. 2.4б) вдоль координатной линии $\theta = \theta_{i-1} = const$, значения $\tilde{T}_{i+1,s}^{k+1}$, $s = j-1, j, j+1$, с порядком $O(\tau^2)$ определяются линейной экстраполяцией по времени по двум предыдущим временным полуслоям $t = t^k$ и $t = t^{k+1/2}$ с помощью выражения (2.3.6), а

значения $T_{i,s}^{k+1}$, $s = j-1, j, j+1$, являются искомыми, определяемыми скалярными прогонками вдоль координатной линии $\theta = \theta_i = const$. При этом все значения сеточной функции, кроме трех искомых переносятся в правые части СЛАУ, несмотря на то, что они определены на верхнем временном слое.

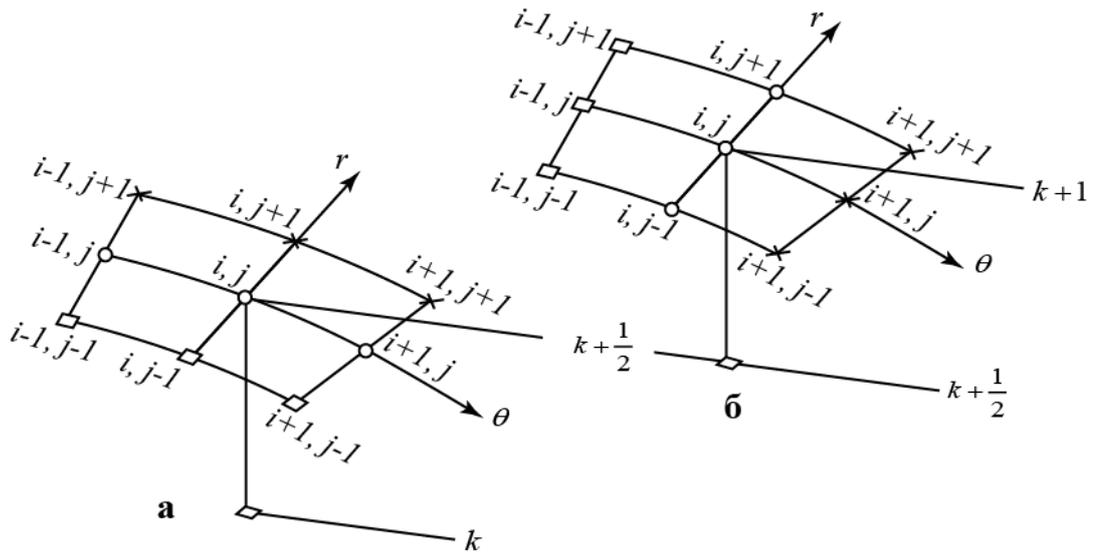


Рис. 2.4. Шаблоны схемы метода МРЭВ: а – подсхема (2.3.4), б – подсхема (2.3.6); \square , \circ , \times – узлы с известными, искомыми и экстраполяционными значениями сеточной функции $T_{i,j}$.

Анализируя схемы (2.3.4), (2.3.6) можно сделать вывод, что она обладает *полной аппроксимацией* на каждом дробном временном полуслое, является экономичной, так как использует только скалярные прогонки, и обладает сильным диагональным преобладанием, поскольку на каждом дробном временном полуслое аппроксимация осуществляется неявно.

При практическом применении схемы метода МРЭВ необходимо знание распределения искомой функции на первых двух дробных полушагах. Это можно сделать с помощью родственной схемы метода переменных направлений (МПН) Писмена-Рэчфорда, которая неустойчива уже для двумерных задач теплопереноса, содержащих смешанные производные, но которая на первых двух полуслоях не успеет раскачать решение.

2.3.2. Анализ порядка аппроксимации конечно-разностной схемы метода МРЭВ

Для исследования порядка аппроксимации докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 2.3. Пусть решение уравнения (2.3.2) принадлежит классу функций, дважды непрерывно дифференцируемых по времени и четырежды – по пространственным переменным, $T(r, \theta) \in C_4^2$. Тогда конечно-разностная схема (2.3.4), (2.3.6) метода МРЭВ аппроксимирует дифференциальное уравнение (2.3.2) с порядком $O(\tau + \Delta r^2 + (r\Delta\theta)^2 + \tau(\Delta r + r\Delta\theta))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Действительно, полагая равными второй и третий конечно-разностные операторы в правой части подсхемы (2.3.4),

прибавим и вычтем в ней выражения $\frac{(\lambda_{rr})_{i,j+1/2}^{k+1/2}}{\Delta r^2} T_{i,j+1}^{k+1/2}$ и $\frac{2(\lambda_{r\theta})_{i,j+1}^{k+1/2}}{4\Delta r \cdot r_j \Delta\theta} (T_{i+1,j+1}^{k+1/2} - T_{i-1,j+1}^{k+1/2})$, а

в подсхеме (2.3.6) – выражение $\frac{(\lambda_{\theta\theta})_{i+1/2,j}^{k+1}}{(r_j \Delta\theta)^2} T_{i+1,j}^{k+1}$ и $\frac{2(\lambda_{r\theta})_{i+1,j}^{k+1}}{4\Delta r \cdot r_j \Delta\theta} (T_{i+1,j+1}^{k+1} - T_{i+1,j-1}^{k+1})$,

получим эквивалентную схему

$$\frac{T^{k+1/2} - T^k}{\tau/2} = \Lambda T^{k+1/2} + (\Gamma_{22}^I + 2\Gamma_{12}^I) \tilde{T}^{k+1/2}, \quad \frac{T^{k+1} - T^{k+1/2}}{\tau/2} = \Lambda T^{k+1} + (\Gamma_{11} + 2\Gamma_{12}^II) \tilde{T}^{k+1}, \quad (2.3.9)$$

где

$$\Lambda = \Lambda_{11} + 2\Lambda_{12} + \Lambda_{22}; \quad \Lambda_{11} T = \frac{c_{\theta\theta}}{(r_j \cdot \Delta\theta)^2} (T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j});$$

$$2\Lambda_{12} T = \frac{2 \cdot c_{r\theta}}{4\Delta r \cdot r_j \cdot \Delta\theta} (T_{i+1,j+1} - T_{i+1,j-1} - T_{i-1,j+1} + T_{i-1,j-1});$$

$$\Lambda_{22} = \frac{c_{rr}}{\Delta r^2} (T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}); \quad \Gamma_{22} \tilde{T}^{k+1/2} = -\frac{c_{rr}}{\Delta r^2} (T_{i,j+1}^{k+1/2} - \tilde{T}_{i,j+1}^{k+1/2});$$

$$\Gamma_{12}^I \tilde{T}^{k+1/2} = -\frac{2c_{r\theta}}{4\Delta r \cdot r_j \cdot \Delta\theta} \left[(T_{i+1,j+1}^{k+1/2} - \tilde{T}_{i+1,j+1}^{k+1/2}) - (T_{i-1,j+1}^{k+1/2} - \tilde{T}_{i-1,j+1}^{k+1/2}) \right];$$

$$\Gamma_{11} \tilde{T}^{k+1/2} = -\frac{c_{\theta\theta}}{(r_j \Delta\theta)^2} (T_{i+1,j}^{k+1} - \tilde{T}_{i+1,j}^{k+1});$$

$$\Gamma_{12} \tilde{T}^{k+1} = -\frac{2c_{r\theta}}{4\Delta r \cdot r_j \cdot \Delta\theta} \left[(T_{i+1,j+1}^{k+1} - \tilde{T}_{i+1,j+1}^{k+1}) - (T_{i+1,j-1}^{k+1} - \tilde{T}_{i+1,j-1}^{k+1}) \right].$$

Коэффициенты c_{rr} , $c_{r\theta}$, $c_{\theta\theta}$ – усредненные по центральному узлу i , j шаблона, причем это усреднение никак не влияет на оценку порядка аппроксимации.

Далее, справедливы следующие тождества:

$$T_{i,j+1}^k - T_{i,j+1}^{k-1/2} = (T_{i,j}^k - T_{i,j}^{k-1/2}) + \frac{T_{i,j+1}^k - T_{i,j}^k}{\Delta r} \Delta r - \frac{T_{i,j+1}^{k-1/2} - T_{i,j}^{k-1/2}}{\Delta r} \Delta r;$$

$$T_{i,j+1}^{k+1/2} - T_{i,j+1}^k = (T_{i,j}^{k+1/2} - T_{i,j}^k) + \frac{T_{i,j+1}^{k+1/2} - T_{i,j}^{k+1/2}}{\Delta r} \Delta r - \frac{T_{i,j+1}^k - T_{i,j}^k}{\Delta r} \Delta r;$$

$$T_{i+1,j}^{k+1} - T_{i+1,j}^k = (T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^{k+1/2}) + \frac{T_{i+1,j}^{k+1} - T_{i,j}^{k+1}}{r_j \Delta\theta} r_j \Delta\theta - \frac{T_{i+1,j}^{k+1/2} - T_{i,j}^{k+1/2}}{r_j \Delta\theta} r_j \Delta\theta;$$

$$T_{i+1,j}^{k+1/2} - T_{i+1,j}^k = (T_{i,j}^{k+1/2} - T_{i,j}^k) + \frac{T_{i+1,j}^{k+1/2} - T_{i,j}^{k+1/2}}{r_j \Delta\theta} r_j \Delta\theta - \frac{T_{i+1,j}^k - T_{i,j}^k}{r_j \Delta\theta} r_j \Delta\theta;$$

$$\frac{T^{k+1/2} - T^k}{\tau/2} = \Lambda T^{k+1/2}; \quad \frac{T^{k+1} - T^{k+1/2}}{\tau/2} = \Lambda T^{k+1}; \quad T_r = \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta r}; \quad T_\theta = \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{r_j \Delta\theta};$$

$$T_{\bar{r}} = \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta r}; \quad T_{\bar{\theta}} = \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{r_j \cdot \Delta\theta}; \quad T_{tt} = \frac{T_{i,j}^{k+1/2} - 2T_{i,j}^k + T_{i,j}^{k-1/2}}{\tau^2/4}; \quad \sigma_{11} = \frac{c_{\theta\theta}\tau}{2(r_j \cdot \Delta\theta)}; \quad \sigma_{22} = \frac{c_{rr}\tau}{2\Delta r^2};$$

$$\sigma_{12} = \frac{c_{r\theta}\tau}{\Delta r \cdot r_j \Delta\theta}.$$

На основе этих тождеств, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\Gamma_{22} \tilde{T}^{k+1/2} = -\frac{c_{rr}}{\Delta r^2} (T_{i,j+1}^{k+1/2} - 2T_{i,j+1}^k + T_{i,j+1}^{k-1/2}) = -\frac{c_{rr}}{\Delta r^2} \left[(T_{i,j+1}^{k+1/2} - T_{i,j+1}^k) - (T_{i,j+1}^k - T_{i,j+1}^{k-1/2}) \right] =$$

$$= -\frac{c_{rr}}{\Delta r^2} \left[(T_{i,j}^{k+1/2} - T_{i,j}^k) - (T_{i,j}^k - T_{i,j}^{k-1/2}) + (T_r^{k+1/2} - 2T_r^k + T_r^{k-1/2}) \Delta r \right] =$$

$$= -\frac{c_{rr}}{\Delta r^2} \left[\frac{\tau}{2} \Lambda T^{k+1/2} - \frac{\tau}{2} \Lambda T^k + T_{tr}^k \frac{\tau^2 \cdot \Delta r}{4} \right] = -\frac{c_{rr}}{\Delta r^2} \left[\frac{\tau}{2} \Lambda (T^{k+1/2} - T^k) + T_{tr}^k \frac{\tau^2 \Delta r}{4} \right] =$$

$$= -\frac{c_{rr}}{\Delta r^2} \left[\frac{\tau^2}{4} \Lambda \left(\frac{T^{k+1/2} - T^k}{\tau/2} \right) + T_{tr}^k \frac{\tau^2 \Delta r}{4} \right] = -\frac{c_{rr}\tau^2}{4\Delta r^2} \Lambda^2 T^{k+1/2} - \sigma_{22} T_{tr}^k \frac{\tau}{2} \Delta r =$$

$$= -\frac{c_{rr}\tau^2}{4\Delta r^2}\Lambda^2 T^{k+1/2} + O(\tau\Delta r).$$

Таким образом,

$$\Gamma_{22}\tilde{T}^{k+1/2} = -\frac{\sigma_{22}\tau}{2}\Lambda^2 T^{k+1/2} + O(\tau\Delta r). \quad (2.3.10)$$

По аналогии

$$\Gamma_{11}\tilde{T}^{k+1} = -\frac{\sigma_{11}\tau}{2}\Lambda^2 T^{k+1} + O(r_j\Delta\theta). \quad (2.3.11)$$

Далее

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^I\tilde{T}^{k+1/2} &= -\frac{2c_{r\theta}}{4\Delta r \cdot r_j \cdot \Delta\theta} \left[(T_{i+1,j+1}^{k+1/2} - 2T_{i+1,j+1}^k + T_{i+1,j+1}^{k-1/2}) - (T_{i-1,j+1}^{k+1/2} - 2T_{i-1,j+1}^k + T_{i-1,j+1}^{k-1/2}) \right] = \\ &= -\frac{2c_{r\theta}}{4\Delta r \cdot r_j \cdot \Delta\theta} \left[(T_{u\theta}^k + T_{u\bar{\theta}}^k) \frac{\tau^2 r_j \Delta\theta}{4} + (T_{u\theta r}^k + T_{u\bar{\theta}r}^k) \frac{\tau^2 \Delta r}{4} (r_j \Delta\theta) \right] = \\ &= -2\sigma_{12} \frac{\tau(r_j \Delta\theta)}{2} (T_{u\theta}^k + T_{u\bar{\theta}}^k) - 2\sigma_{12} \frac{\tau \Delta r (r_j \Delta\theta)}{2} (T_{u\theta r}^k + T_{u\bar{\theta}r}^k) = O(\tau(r_j \Delta\theta)); \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

$$\Gamma_{12}^{II}\tilde{T}^{k+1} = O(\tau(r_j \Delta\theta)). \quad (2.3.13)$$

Подставляя выражения (2.3.10)–(2.3.13) в эквивалентную конечно-разностную схему (2.3.9), получим

$$\frac{T^{k+1/2} - T^k}{\tau/2} = \Lambda T^{k+1/2} - \frac{\sigma_{22}\tau}{2}\Lambda^2 T^{k+1/2} + O\left(\tau + \Delta r^2 + (r_j \Delta\theta)^2 + \tau(\Delta r + r_j \Delta\theta)\right); \quad (2.3.14)$$

$$\frac{T^{k+1} - T^{k+1/2}}{\tau/2} = \Lambda T^{k+1} - \frac{\sigma_{11}\tau}{2}\Lambda^2 T^{k+1} + O\left(\tau + \Delta r^2 + (r_j \Delta\theta)^2 + \tau(\Delta r + r_j \Delta\theta)\right). \quad (2.3.15)$$

Из равенств (2.3.14), (2.3.15) исключим сеточную функцию $T^{k+1/2}$ на промежуточном временном слое, получим следующую двухслойную схему:

$$\begin{aligned} \frac{T^{k+1} - T^k}{\tau} &= \Lambda \left[E - (1+a) \frac{\tau}{4} \Lambda + a \frac{\tau^2}{8} \Lambda^2 - b \frac{\tau^3}{16} \Lambda^3 \right] T^{k+1} + \\ &+ O\left(\tau + \Delta r^2 + (r_j \Delta\theta)^2 + \tau(\Delta r + r_j \Delta\theta)\right), \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

где $a = \sigma_{11} + \sigma_{22} > 0$, $b = \sigma_{11}\sigma_{22} > 0$.

Из (2.3.16) следует аппроксимация с порядком $O\left(\tau + \Delta r^2 + (r_j \Delta\theta)^2 + \tau(\Delta r + r_j \Delta\theta)\right)$, так как в квадратных скобках выражение (2.3.16) можно записать как $E + O(\tau)$. Теорема доказана.

2.3.3. Исследование устойчивости конечно-разностной схемы метода МРЭВ по начальным условиям

Сформулируем начально-краевую задачу для уравнение (2.3.2), добавив к нему начальное условие и однородное граничное условие первого рода

$$T(r, \theta, 0) = T_0(r, \theta), \quad R_1 \leq r \leq R_0, \quad 0 \leq \theta \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right), \quad t = 0; \quad (2.3.17)$$

$$T(r, \theta, t) = 0, \quad r = R_0, \quad 0 \leq \theta \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right), \quad t > 0. \quad (2.3.18)$$

Исследование устойчивости конечно-разностной схемы (2.3.4), (2.3.6) метода расщепления с экстраполяцией по времени можно провести методом гармонического анализа, однако он дает необходимые условия устойчивости. Поэтому данную конечно-разностную схему будем исследовать на устойчивость методом энергетических неравенств [123].

Т е о р е м а 2.4. Пусть компоненты тензора теплопроводности $\lambda_{\alpha, \beta}$ в уравнении (2.3.2) удовлетворяют условию сильной эллиптичности

$$c_1 \sum_{\alpha=1}^2 \gamma_\alpha^2 \leq \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \lambda_{\alpha, \beta} \gamma_\alpha \gamma_\beta \leq c_2 \sum_{\alpha=1}^2 \gamma_\alpha^2, \quad \gamma \in R^2, \quad (2.3.19)$$

где γ – произвольный вектор, и главные миноры матрицы теплопроводности положительны

$$\lambda_{11} > 0, \quad \lambda_{22} > 0, \quad \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2 > 0. \quad (2.3.20)$$

Тогда схема (2.3.4), (2.3.6) абсолютно устойчива по начальным условиям.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для доказательства заметим, что условия сильной эллиптичности (2.3.19) уже использованы при выводе двухслойной эквивалентной схемы (2.3.16). Для использования метода энергетических неравенств докажем следующую лемму:

Л е м м а 2.2. Оператор

$$C = \left[-(1 + \sigma_{11} + \sigma_{22}) \frac{\tau}{4} \Lambda + (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \frac{\tau^2}{8} \Lambda^2 - \sigma_{11} \sigma_{22} \frac{\tau^3}{16} \Lambda^3 \right] \quad (2.3.21)$$

в схеме (2.3.16) является самосопряженным и положительно определенным в пространстве сеточных функций T^k с гильбертовой нормой.

Д о к а з а т е л ь с т в о .

Оператор (2.3.21) преобразуем следующим образом:

$$C = (1+a) \frac{\tau}{4} A + a \frac{\tau^2}{8} A^2 + b \frac{\tau^3}{16} A^3, \quad (2.3.22)$$

в котором все три слагаемые являются самосопряженными и положительно определенными, так как в соответствии с условиями (2.3.20) конечно-разностный оператор $-\Lambda = A$ является самосопряженным и положительно определенным [105].

Таким образом, оператор C (2.3.22) удовлетворяет условию $(Cy, z) = (y, Cz)$, что доказывает лемму.

В соответствии с этим конечно-разностная схема (2.3.16) может быть представлена в виде:

$$\frac{T^{k+1} - T^k}{\tau} = -A(E + C)T^{k+1}. \quad (2.3.23)$$

Если (2.3.23) скалярно умножить на $T_t = (T^{k+1} - T^k) / \tau$ и использовать тождество

$$T^{k+1} = \frac{T^{k+1} + T^k}{2} + \frac{T^{k+1} - T^k}{2} = \frac{T^{k+1} + T^k}{2} + \frac{1}{2} \tau \cdot T_t,$$

то приходим к энергетическому тождеству:

$$\left(\left[E + \frac{\tau}{2} (A + AC) \right] T_t, T_t \right) + \frac{1}{2\tau} \left[((A + AC)T^{k+1}, T^{k+1}) - ((A + AC)T^k, T^k) \right] = 0, \quad (2.3.24)$$

причем при его выводе использованы результаты леммы 2.2. относительно оператора:

$$D = A(E + C). \quad (2.3.25)$$

Если ввести энергетическое пространство H_D сеточных функций $T^0, T^1, T^2, \dots \in H_D$, со скалярным произведением $(T^k, T^{k+1})_D = (DT^k, T^{k+1})$ и квадратом нормы $\|T^k\|_D^2 = (DT^k, T^k)$, то поскольку оператор $E + \frac{\tau}{2}(A + AC) > 0$, в (2.3.24), приходим к следующему энергетическому неравенству:

$$(DT^{k+1}, T^{k+1}) \leq (DT^k, T^k), \quad (2.3.26)$$

из которого следует принцип максимума

$$\|T^{k+1}\|_D \leq \|T^k\|_D \leq \dots \leq \|T^0\|_D = \|T_0(r, \theta)\|. \quad (2.3.27)$$

Выражения (2.3.27), в котором $T_0(r, \theta)$ – начальное условие, является достаточным условием устойчивости схемы (2.3.4), (2.3.6).

Так как на сеточные характеристики $\tau, \Delta r, r_j \Delta \theta$ не накладывались ограничения, то схема (2.3.4), (2.3.6) **абсолютно устойчива по начальным данным**. Теорема доказана.

Схема МРЭВ по запасу устойчивости не имеет аналогов среди схем методов расщепления для уравнений со смешанными производными.

Запас устойчивости определяется степенью диагонального преобладания в полученных системах линейных алгебраических уравнений.

Таким образом, конечно-разностная схема МРЭВ является *абсолютно-устойчивой с уникальным запасом устойчивости, экономичной, обладает полной аппроксимацией и применима к задачам с произвольной размерностью фазового пространства*.

Кроме этого, в схеме МРЭВ отсутствуют ограничения на величину коэффициентов, не считая ограничений вида (2.3.19), (2.3.21).

2.3.4. Анализ устойчивости конечно-разностной схемы метода МРЭВ по правым частям

В задаче (2.3.2), (2.3.17), (2.3.18) рассмотрим уравнение (2.3.2), в котором добавлена правая часть $F(r, \theta, t)$.

Применяя к этой задаче схему метода расщепления с экстраполяцией по времени, получим вместо эквивалентной конечно-разностной схемы (2.3.23) следующую эквивалентную конечно-разностную схему с правой частью F^k :

$$\frac{T^{k+1} - T^k}{\tau} + A(E + C)T^{k+1} = F^k; \quad (2.3.28)$$

$$T(r, \theta, 0) = T_0(r, \theta). \quad (2.3.29)$$

Используя тождество

$$\frac{T^{k+1} - T^k}{\tau} = T_t, \quad T^{k+1} = T^k + T_t \cdot \tau, \quad (2.3.30)$$

получим из (2.3.28), (2.3.29) задачу

$$BT_t + MT^k = F^k, \quad T(r, \theta, 0) = T_0(r, \theta), \quad (2.3.31)$$

в которой

$$B = E + \tau A(E + C), \quad M = A(E + C).$$

В [105] приводится теорема о связи устойчивости схемы

$$BT_t + MT^k = 0, \quad T(r, \theta, 0) = T_0(r, \theta) \quad (2.3.32)$$

по начальным данным с использованием некоторой нормы $\|\cdot\|_D$ с устойчивостью по правой части в норме $\|B^{-1}T^k\|_D$.

по начальным данным в некоторой норме $\|\cdot\|_D$ следует устойчивость схемы (2.3.31) по правой части, взятой в норме $\|B^{-1}T^k\|_D$. Следовательно, можно сформулировать и доказать теорему об устойчивости метода МРЭВ по правой части.

Т е о р е м а 2.5. Пусть коэффициенты уравнения (2.3.2) удовлетворяют условию сильной эллиптичности и диагональные миноры матрицы теплопроводности положительны. Тогда имеет место устойчивость схемы (2.3.31) по правой части с оценкой

$$\|T^{k+1}\| \leq \|T_0\| + \sum_{n=0}^k \tau \|B^{-1}F^n\|. \quad (2.3.33)$$

2.4. Высокоточный метод определения температуры границы сопряжения на основе новых численных методов МРЭП в газе и МРЭВ в анизотропном теле

В данном параграфе разработан численный метод определения температуры границы сопряжения, сохраняющий высокий порядок точности и устойчивости, присущий методу МРЭП в ударном газодинамическом слое и МРЭВ в анизотропном теле. Кроме этого, предложен алгоритм, исключающий возникновение неустойчивости в случаях явной аппроксимации существенно нелинейных лучистых тепловых потоков от границы сопряжения.

Найденные распределения температур границы сопряжения позволяют по заранее определенным прогоночным коэффициентам определить распределения температур в газе и в теле и тем самым завершить решение сопряженной задачи вязкой теплогазодинамики и анизотропной теплопроводности в теле.

2.4.1. Высокоточный алгоритм численного решения задачи об определении температуры границы сопряжения

Основой для определения температуры границы сопряжения являются граничные условия сопряжения (2.1.16), (2.1.17), уравнения вязкой теплогазодинамики в окрестности границы $y=0$ и уравнение анизотропной теплопроводности в окрестности границы $r=R_0$.

Для аппроксимации граничных условий IV-го рода на границе сопряжения $y=0$, $r=R_0$

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0+0} + q_{\text{дифф}} \Big|_{y=0+0} = \lambda_n \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{r=R_0} - \varepsilon_w \sigma T_w^4, \quad y=0, \quad r=R_0,$$

$$|x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L; \tag{2.4.1}$$

$$T(x, 0)|_{y=0+0} = T_w(x)|_{r=R_0}, \quad y=0, \quad r=R_0,$$

$$|x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) R_0 + L \quad (2.4.2)$$

рассмотрим шаблоны методов МРЭП и МРЭВ в окрестности границы сопряжения для поперечного и продольного направлений (рис. 2.5) и уравнения энергии (2.1.24) на границе w сопряжения при $y=0+0$, $u=0$, $v=0$ и уравнение теплопроводности (2.3.2) при $r=R_0-0$ полагая на границе сопряжения функцию температуры дважды дифференцируемой по x, y, r и θ , получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D_{12} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D_{12} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial y} \right) = 0,$$

$$y=0+0, |x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) R_0 + L; \quad (2.4.3)$$

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_{r\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) +$$

$$+ \frac{1}{R_0^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right), \quad r=R_0-0, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} - \theta_0, \quad t > 0. \quad (2.4.4)$$

Поперечное направление. Конечно-разностную СЛАУ для ударного газодинамического слоя будем решать методом прогонки с прямым ходом по определению прогоночных коэффициентов $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ в направлении от узла $j = J_{y\partial.с.}$ на ударной волне к узлу $j = 0$ на границе сопряжения. Одновременно для тела конечно-разностная СЛАУ в прямом ходе метода прогонки по определению прогоночных коэффициентов A_{i,j_T} , B_{i,j_T} осуществляется в направлении от границы $r = R_1 (j_T = J_T)$ к границе сопряжения $r = R_0 (j_T = 0)$.

Таким образом, в газе решение СЛАУ находятся по формулам ($i - fix$)

$$T_{i,j} = A_{i,j} T_{i,j-1} + B_{i,j}, \quad j = 1, 2, \dots, J_{y\partial.с.} - 1, \quad (2.4.5)$$

где

$$A_{i,j} = \frac{-a_{i,j}}{b_{i,j} + c_{i,j} A_{i,j+1}}, \quad B_{i,j} = \frac{d_{i,j} - c_{i,j} B_{i,j+1}}{b_{i,j} + c_{i,j} A_{i,j+1}}, \quad j = J_{y\partial.с.} - 1, J_{y\partial.с.} - 2, \dots, 2, 1, 0, \quad (2.4.6)$$

а в теле – по формулам

$$T_{i,j_T} = A_{i,j_T} T_{i,(j-1)_T} + B_{i,j_T}, \quad j_T = 1, 2, \dots, J_T, \quad (2.4.7)$$

где

$$A_{i,j_T} = \frac{-a_{i,j_T}}{b_{i,j_T} + c_{i,j_T} A_{i,(j+1)_T}}, \quad B_{i,j_T} = \frac{d_{i,j_T} - c_{i,j_T} B_{i,(j+1)_T}}{b_{i,j_T} + c_{i,j_T} A_{i,(j+1)_T}}, \quad j_T = J_T, J_T - 1, \dots, 2, 1. \quad (2.4.8)$$

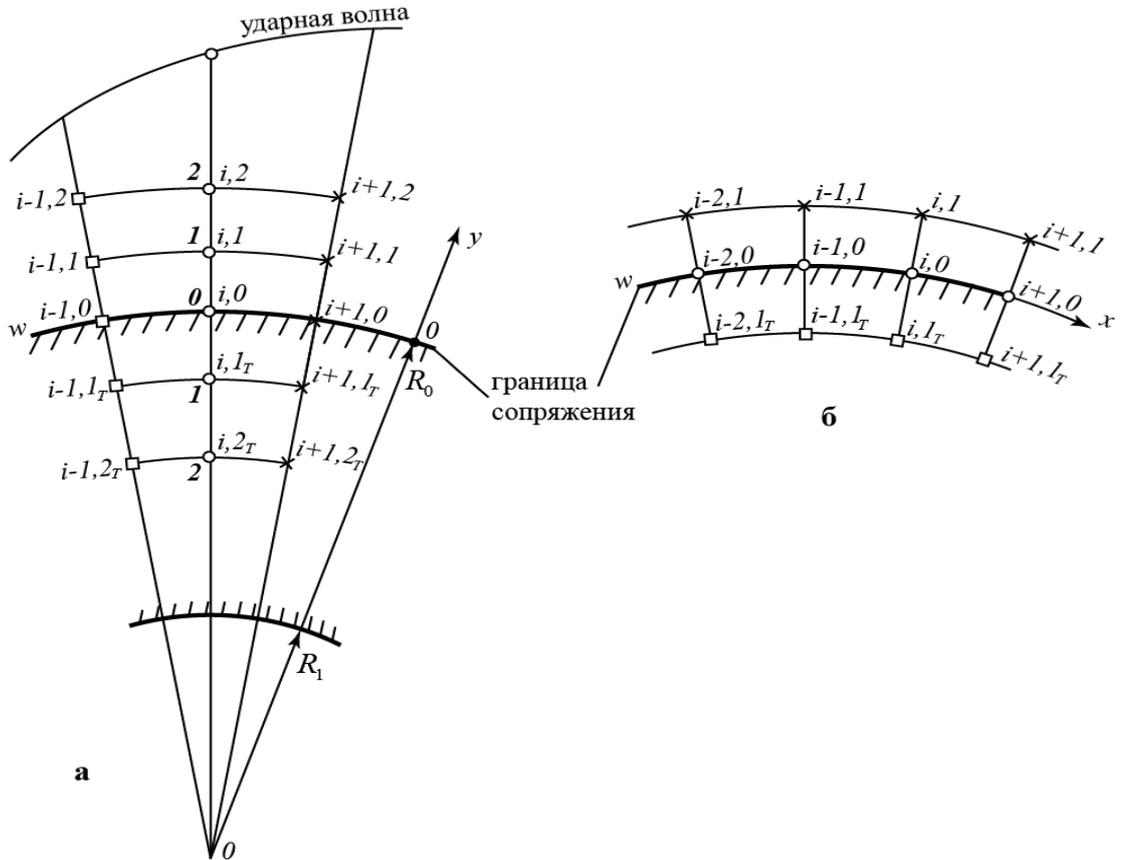


Рис. 2.5. Шаблоны конечно-разностных схем в окрестности границы сопряжения: а – поперечное, б – продольное направление; □, ○, × – узлы с известными, искомыми и экстраполяционными значениями сеточной функции.

В соответствии с формулами (2.4.5)–(2.4.8) приграничные значения температур $T_{i,1}$, $T_{i,2}$, $T_{i,1_T}$, $T_{i,2_T}$, выраженные через температуру границы сопряжения и соответствующие прогоночные коэффициенты

$$T_{i,0} = T_{i,0_T} \equiv T_{iw}, \quad (2.4.9)$$

определяются следующим образом:

$$T_{i,1} = A_{i,1} T_{i,0} + B_{i,1}; \quad (2.4.10)$$

$$T_{i,2} = A_{i,2}T_{i,1} + B_{i,2} = (A_{i,2}A_{i,1})T_{i,0} + (A_{i,2}B_{i,1} + B_{i,2}); \quad (2.4.11)$$

$$T_{i,1\Gamma} = A_{i,1\Gamma}T_{i,0} + B_{i,1\Gamma}; \quad (2.4.12)$$

$$T_{i,2\Gamma} = A_{i,2\Gamma}T_{i,1\Gamma} + B_{i,2\Gamma} = (A_{i,2\Gamma}A_{i,1\Gamma})T_{i,0} + (A_{i,2\Gamma}B_{i,1\Gamma} + B_{i,2\Gamma}). \quad (2.4.13)$$

Для аппроксимации краевых условий IV-го рода (2.4.1), (2.4.2) на границе сопряжения разложим *на точном решении* по степеням h_2 и Δr соответственно приграничные значения температур $T_{i,1}$, $T_{i,1\Gamma}$ в окрестности узла $y=0$, $r=R_0$ на границе в ряд Тейлора до третьих производных включительно:

$$T_{i,1} = T_{i,0} + \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i,0} h_2 + \left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{i,0} \frac{h_2^2}{2} + O(h_2^3), \quad (2.4.14)$$

$$T_{i,1\Gamma} = T_{i,0\Gamma} + \left. \frac{\partial T_{\Gamma}}{\partial r} \right|_{i,0\Gamma} \Delta r + \left. \frac{\partial^2 T_{\Gamma}}{\partial r^2} \right|_{i,0\Gamma} \frac{\Delta r^2}{2} + O(\Delta r^3), \quad (2.4.15)$$

откуда со вторым порядком определяем производные в граничном узле со вторым порядком

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i,0} = \frac{T_{i,1} - T_{i,0}}{h_2} - \left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{i,0} \frac{h_2}{2} + O(h_2^2), \quad (2.4.16)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{i,0\Gamma} = \frac{T_{i,1\Gamma} - T_{i,0\Gamma}}{\Delta r} - \left. \frac{\partial^2 T_{\Gamma}}{\partial r^2} \right|_{i,0\Gamma} \frac{\Delta r}{2} + O(\Delta r^2). \quad (2.4.17)$$

Вторые производные, входящие в (2.4.16), (2.4.17), определим из уравнений (2.4.3), (2.4.4) соответственно полагая, что смешанные дифференциальные операторы в (2.4.4) равны, а теплофизические характеристики и диффузионные члены вычислены по экстраполяционной температуре границы сопряжения $\tilde{T}_{i,0\Gamma}$, то есть $\lambda \approx \tilde{\lambda}$, $\rho D_{12} \approx \tilde{\rho} \tilde{D}_{12}$, $\tilde{\lambda}_{rr}$, $\tilde{\lambda}_{r\theta}$, $\tilde{\lambda}_{\theta\theta}$ определены с порядком $O(h_2^2)$ и $O(\Delta r^2)$ и поэтому они выносятся за знаки производных. Тогда

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{i,0} \cdot \frac{h_2}{2} = -\frac{h_2}{2} \left[\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{i,0} + \frac{1}{\tilde{\lambda}} q_{\text{diff.}} \right] = -\frac{h_2}{2} \left[\frac{\tilde{T}_{i+1,0} - 2T_{i,0} + T_{i-1,0}}{h_1^2} + \frac{1}{\tilde{\lambda}} q_{\text{diff.}} \right] + O(h_1^2); \quad (2.4.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta r}{2} \frac{\partial^2 T_{\Gamma}}{\partial r^2} \Big|_{i,0_{\Gamma}}^{k+1/2} &= \frac{\Delta r}{2} \left[\frac{c\rho}{\tilde{\lambda}_{rr}} \frac{T_{i,0_{\Gamma}}^{k+1/2} - T_{i,0_{\Gamma}}^k}{\tau} - \frac{2\tilde{\lambda}_{r\theta}}{2\Delta r \tilde{\lambda}_{rr}} \left(\frac{\tilde{T}_{i+1,0_{\Gamma}}^{k+1/2} - T_{i-1,0_{\Gamma}}^{k+1/2}}{2(R_0\Delta\theta)} - \frac{\tilde{T}_{i+1,1_{\Gamma}}^{k+1/2} - T_{i-1,1_{\Gamma}}^{k+1/2}}{2(R_0\Delta\theta)} \right) - \right. \\ &\left. - \frac{\tilde{\lambda}_{\theta\theta}}{\tilde{\lambda}_{rr}} \frac{\tilde{T}_{i+1,0_{\Gamma}}^{k+1/2} - 2T_{i,0_{\Gamma}}^{k+1/2} + T_{i-1,0_{\Gamma}}^{k+1/2}}{(R_0\Delta\theta)^2} \right] + O\left(\tau + (\Delta r + R_0\Delta\theta)^2\right). \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

Подставляя выражения (2.4.18), (2.4.19) в разложения (2.4.16), (2.4.17) соответственно, получим

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{i,0} = \frac{T_{i,1} - T_{i,0}}{h_2} + \frac{h_2}{2} \left(\frac{\tilde{T}_{i+1,0} - 2T_{i,0} + T_{i-1,0}}{h_1^2} + \frac{1}{\tilde{\lambda}} q_{\text{диф.}} \right) + O(h_1^2 + h_2^2); \quad (2.4.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{\Gamma}}{\partial r} \Big|_{i,0_{\Gamma}}^{k+1/2} &= \frac{T_{i,1_{\Gamma}}^{k+1/2} - T_{i,0_{\Gamma}}^{k+1/2}}{\Delta r} - \frac{\Delta r}{2} \left[\frac{c\rho}{\tilde{\lambda}_{rr}} \frac{T_{i,0_{\Gamma}}^{k+1/2} - T_{i,0_{\Gamma}}^k}{\tau} - \frac{2\tilde{\lambda}_{r\theta}}{2\Delta r \tilde{\lambda}_{rr}} \left(\frac{\tilde{T}_{i+1,0_{\Gamma}}^{k+1/2} - T_{i-1,0_{\Gamma}}^{k+1/2}}{2(R_0\Delta\theta)} \times \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{\tilde{T}_{i+1,1_{\Gamma}}^{k+1/2} - T_{i-1,1_{\Gamma}}^{k+1/2}}{2(R_0\Delta\theta)} \right) - \frac{\tilde{\lambda}_{\theta\theta}}{\tilde{\lambda}_{rr}} \frac{\tilde{T}_{i+1,0_{\Gamma}}^{k+1/2} - 2T_{i,0_{\Gamma}}^{k+1/2} + T_{i-1,0_{\Gamma}}^{k+1/2}}{(R_0\Delta\theta)^2} \right] + O\left(\tau + (\Delta r + r\Delta\theta)^2\right), \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

где $k+1/2$ – верхний временной полуслой, $q_{\text{диф.}}$ – известные диффузионные слагаемые, а $\tilde{\lambda}_n$ – теплопроводность тела в нормальном к границе сопряжения направлении, определяется формулой (1.4.65).

Осталось подставить производные (2.4.20), (2.4.21) в граничное условие сопряжения (2.4.1), воспользоваться равенством (2.4.2), тождеством (2.4.9), а также равенствами (2.4.10)–(2.4.13). Получим

$$\left(T_{i,w}^{k+1/2}\right)^4 + bT_{i,w}^{k+1/2} = d, \quad (2.4.22)$$

$$\begin{aligned} \text{где } b &= \frac{1}{\varepsilon_w \sigma} \left\{ \left(\frac{\tilde{\lambda}}{h_2} A_{i,1} - \frac{\tilde{\lambda}}{h_2} \right) - \frac{\tilde{\lambda} h_2}{h_1^2} A_{i,1} + \left(\frac{\tilde{\lambda}_n}{\Delta r} - \frac{\tilde{\lambda}_n}{\Delta r} A_{i,1_{\Gamma}} \right) + \frac{c\rho\Delta r}{2\tau\tilde{\lambda}_{rr}} + \frac{\tilde{\lambda}_{\theta\theta}\Delta r}{\tilde{\lambda}_{rr}(R_0\Delta\theta)} \right\}; \\ d &= \frac{1}{\varepsilon_w \sigma} \left\{ -\frac{\tilde{\lambda}}{h_2} B_{i,1} - \frac{\tilde{\lambda} h_2}{2h_1^2} (\tilde{T}_{i+1,w}^{k+1/2} - T_{i-1,w}^{k+1/2}) + \frac{\tilde{\lambda} h_2}{h_1^2} B_{i,1} + \left(\frac{\tilde{\lambda}_n}{\Delta r} B_{i,1_{\Gamma}} - \frac{\tilde{\lambda}_n}{\Delta r} \right) + \frac{c\rho \cdot \tilde{\lambda}_n \Delta r}{2\tau\tilde{\lambda}_{rr}} T_{i,w}^k - \right. \\ &\left. - \frac{\tilde{\lambda}_{r\theta}\tilde{\lambda}_n}{2\tilde{\lambda}_{rr}} \left(\frac{T_{i+1,w}^{k+1/2} - T_{i-1,w}^{k+1/2}}{2(R_0\Delta\theta)} - \frac{\tilde{T}_{i+1,1_{\Gamma}}^{k+1/2} - T_{i-1,1_{\Gamma}}^{k+1/2}}{2(R_0\Delta\theta)} \right) - \frac{\tilde{\lambda}_{\theta\theta}\tilde{\lambda}_n\Delta r}{2\tilde{\lambda}_{rr}(R_0\Delta\theta)} (\tilde{T}_{i+1,w}^{k+1/2} - T_{i-1,w}^{k+1/2}) \right\}. \end{aligned}$$

Решая уравнение (2.4.22) относительно $T_{i,w}^{k+1/2}$ и используя это значение $T_{i,0}^{k+1/2} \equiv T_{i,w}^{k+1/2}$ в методах прогонки (2.4.5)–(2.4.8), получим распределение температур в поперечном направлении в газе и в теле.

Продольное направление. Для продольного направления (верхний временной слой $k+1$) численный алгоритм по шаблону рисунка 2.5б сохраняется таким же, как и для поперечного направления с той лишь разницей, что там где не определены значения сеточной функции, их можно позаимствовать из значений, определенных для верхнего временного полуслоя в поперечном направлении.

2.4.2. Ликвидация неустойчивости, возникающей при явной аппроксимации лучистого теплового потока

Известно, что явные конечно-разностные схемы на возрастающем решении дают приближение снизу по отношению к точному решению, а неявное – сверху. Для убывающего решения явная конечно-разностная схема дает приближение к точному сверху, а неявная снизу [120].

В данном случае при явной (на нижнем временном слое) аппроксимации существенно нелинейного лучистого теплового потока на возрастающем решении вычисление этого потока по заниженной температуре $T_{i,w}^k$ завышает значение $T_{i,w}^{k+1/2}$, на следующем временном полуслое – занижает, затем завышает и т.д. (см. уравнение (2.4.22)). Налицо раскачка решения, приводящая не только к неустойчивости, но и к значительному отклонению от точного решения.

Для ликвидации этого явления имеется возможность лучистый тепловой поток аппроксимировать неявно (на верхнем временном полуслое, или слое), сформулировать уравнение четвертой степени на верхнем полуслое (2.4.22) или верхнем слое и решить это уравнение точно в радикалах (уравнение четвертой степени является уравнением последней степени, которое можно решить в радикалах).

Такое уравнение имеет четыре корня, два из них вещественные (одно положительное, а второе – отрицательное), а остальные два решения – комплексные. Действительно, парабола четвертой степени и линейная

функция на вещественной плоскости пересекаются в двух точках, дающих два вещественных корня уравнения (2.4.22).

Решениями уравнения (2.4.22) будут корни [121]

$$(T_{i,w}^{k+1/2})_{1,2} = 10^3 \left[-\sqrt{\frac{u-v}{2}} \pm \sqrt{-\frac{u-v}{2} + \frac{10b}{\sqrt{8(u-v)}}} \right], \quad (2.4.23)$$

$$(T_{i,w}^{k+1/2})_{3,4} = 10^3 \left[\sqrt{\frac{u-v}{2}} \pm \sqrt{-\frac{u-v}{2} - \frac{10b}{\sqrt{8(u-v)}}} \right], \quad (2.4.24)$$

где

$$u = \sqrt[3]{(2,5b)^2 + \sqrt{(2,5b)^2 + (d/300)^3}},$$

$$v = \sqrt[3]{-(2,5b)^2 + \sqrt{(2,5b)^2 + (d/300)^3}},$$

откуда следует, что

$$u > 0, \quad v > 0, \quad u - v > 0. \quad (2.4.25)$$

Корни $(T_{0,w}^{k+1/2})_{3,4}$ в выражении (2.4.24) являются комплексно-сопряженными, а $(T_{i,w}^{k+1/2})_{1,2}$ в (2.4.23) вещественные корни имеют разные знаки.

Для выделения положительного корня в (2.4.23) докажем неравенство:

$$-\frac{u-v}{2} + \frac{10b}{\sqrt{8(u-v)}} > \frac{u-v}{2}$$

или

$$\frac{10b}{\sqrt{8(u-v)}} > u-v. \quad (2.4.26)$$

Поскольку в (2.4.26) обе части неравенства положительны имеем $12,5b^2 > (u-v)^3 = u^3 - v^3 - 3u^2v + 3uv^2 = 12,5b^2 - 3uv(u-v)$.

В силу положительности выражений (2.4.25) неравенство

$$12,5b^2 > 12,5b^2 - 3uv(u-v) \quad (2.4.27)$$

выполнено всегда.

Таким образом, показано, что выражение по корнем второго слагаемого больше выражения под корнем первого слагаемого в (2.4.23), откуда следует, что первый корень положителен, а второй отрицателен.

Итак, корень

$$\left(T_{i,w}^{k+1/2}\right)_1 = 10^3 \left[-\sqrt{\frac{u-v}{2}} + \sqrt{-\frac{u-v}{2} + \frac{10b}{\sqrt{8(u-v)}}} \right] \quad (2.4.28)$$

является искомым положительным для уравнения (2.4.22).

Выводы по второй главе

1. Сформулирована математическая модель сопряженного теплообмена между вязкими теплогазодинамическими течениями и затупленными анизотропными телами в связанной с поверхностью тела криволинейной системе координат, приспособленной к использованию высокоэффективных методов расщепления численного решения задач механики сплошных сред.

2. Разработан новый абсолютно устойчивый, экономичный метод расщепления с экстраполяцией по пространственным переменным (МРЭП) с использованием апостериорной информации и процедуры «предиктор-корректор» численного решения задач теплогазодинамики между ударной волной и анизотропным телом. Доказаны теоремы об аппроксимации со вторым порядком и об устойчивости. При этом экономичность достигается применением только скалярных прогонок вдоль координатных направлений, а устойчивость – применением процедуры экстраполяции с получением сильного диагонального преобладания в разностных системах уравнений.

3. Разработан и обоснован по аппроксимации и устойчивости новый экономичный, абсолютно устойчивый метод расщепления с экстраполяцией по времени (МРЭВ) численного решения задач для уравнений анизотропной теплопроводности, содержащих смешанные производные. Доказаны теоремы об аппроксимации по начальным условиям и правым частям и устойчивости методом энергетических неравенств в норме энергетических операторов в гильбертовых пространствах сеточных функций. При этом экономичность также достигается использованием только скалярных прогонок вдоль координатных направлений.

4. Предложен новый численный метод сопряжения задачи для газодинамического уравнения энергии и задачи для уравнения анизотропной теплопроводности на границе «газ – твердое тело», сохраняющий порядки конечно-разностной аппроксимации, имеющие место в газодинамическом

потоке и в анизотропном теле. С помощью этого метода определяется параметр сопряжения – распределение температур по поверхности «газ – твердое тело», причем устойчивость достигается неявной аппроксимацией существенно нелинейного лучистого теплового потока, встроенной в линейные операторы скалярных прогонок по координатным направлениям.

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ОБТЕКАНИИ ЗАТУПЛЕННЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ ВЯЗКИМИ ПРИСТЕННЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ

В данной главе моделируется и численно решается задача о теплогазодинамическом течении с учетом неизотермичности стенки, ограничивающей затупленное тело, в условиях высокоскоростного обтекания. Одновременно с этой задачей ставится и решается задача теплопереноса в обтекаемом анизотропном теле, сопряженная на границе «газ-твердое тело» с задачей газодинамики. *Моделируемое течение отличается от пограничного слоя наличием дивергентных членов по продольной переменной газодинамических характеристик в уравнениях сохранения импульса, энергии и диффузии.* Таким образом, если уравнения пограничного слоя являются уравнениями параболического типа, то стационарные уравнения пристенного вязкого течения являются уравнениями эллиптического типа.

Необходимость постановки и решения подобных задач связана с тем, что, во-первых тепловое состояние тела может значительно влиять на тепловое состояние пристенного газодинамического течения и практически не влияет на невязкое (потенциальное) течение, и, во-вторых, анизотропное тело может иметь значительную степень анизотропии (отношение максимального главного компонента тензора теплопроводности к минимальному), которая может достигать 100 и более, что сопровождается значительной продольной неизотермичностью в анизотропном теле, а вследствие сопряженности, приводит к значительной неизотермичности в газодинамическом пристенном течении с резким уменьшением теплообмена от газа к анизотропному телу.

Рассматривается методология численного решения не только уравнений пристенного газодинамического течения, но и численное решение задач теплопереноса в составных анизотропных телах, имеющих идеальные

контакты, а также сопряженного теплообмена. Анализируются многочисленные результаты компьютерных экспериментов.

3.1. Постановка задачи сопряженного теплообмена при обтекании затупленных анизотропных тел вязкими пристенными течениями

Рассматривается вязкое пристенное газодинамическое течение около затупленного анизотропного тела (рис. 1.1) в локальной связанной системе координат Ox , Oy , где переменная x отсчитывается вдоль границы w сопряжения от критической точки $x=0$, а переменная y изменяется нормально к точкам границы сопряжения w в сторону газодинамического течения. Затупленное тело для задачи теплопроводности рассматривается в различных криволинейных координатах $O\theta$, O_1r , где переменная θ отсчитывается от линии O_1O в угловой (непосредственно на затуплении) или в линейной (хвостовой части) мерах, а переменная r отсчитывается от полюса O_1 непосредственно для затупления и от базовой поверхности проходящей через O_1 под углом θ_0 к оси тела, в сторону газодинамического потока.

При постановке двумерных задач сопряженного тепломассопереноса на затупленных телах делаются следующие предположения:

значения газодинамических характеристик в крайних сечениях $x = \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L \right]$, где L – длина хвостовой части затупленного тела, формируются из условий равенства нулю производных по пространственной переменной функций давления и температуры;

газ является двухкомпонентным, диссоциирующим, замороженным $\left(\dot{w}_A = 0 \right)$;

для учета турбулентной вязкости и теплопроводности, к молекулярной вязкости и теплопроводности добавляются слагаемые, которые получены в главе 1;

$$y \ll R_0, \text{ так что } y/R_0 \approx 0;$$

давление в поперечном направлении для пристенного течения принимается постоянным, так что уравнение сохранения импульса в проекции на ось Ox принимается без изменения из уравнений Навье-Стокса, а в проекции на ось Oy принимается таким же, как в пограничном слое, за исключением непосредственно затупления, где уравнения Навье-Стокса сохраняются;

затупленное тело является двухслойным анизотропным с идеальными контактами между слоями;

задача теплопроводности в анизотропном теле – нестационарна, а задача вязкой теплогазодинамики – квазистационарна, так как время установления характеристик газодинамического течения на несколько порядков меньше времени установления температурного поля.

С учетом этих допущений математическая модель сопряженного теплообмена на затупленных анизотропных телах включает в себя следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \right\} + \\ + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu r^\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad 0 < y < \delta(x); \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{или} \quad p = p_e(x), \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L; \quad (3.1.2)$$

$$\frac{\partial(\rho u r^\nu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v r^\nu)}{\partial y} = 0, \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad 0 < y < \delta(x); \quad (3.1.3)$$

$$\rho u \frac{\partial c_A}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_A}{\partial y} = \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^\nu \rho D_{12} \frac{\partial c_A}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D_{12} \frac{\partial c_A}{\partial x} \right) + \dot{w}_A,$$

$$|x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad 0 < y < \delta_c. \quad (3.1.4)$$

Уравнение состояния для бинарной диссоциирующей смеси газов в соответствии с (1.1.8) будет иметь вид

$$p = (1 + \alpha) \rho T, \quad (3.1.5)$$

где α – степень диссоциации, для бинарной смеси атомов и молекул с концентрациями $c_A = \rho_A / \rho$ и $c_M = \rho_M / \rho$ ($c_A + c_M = 1$, $c_M = 1 - c_A$) и молярными массами M_A и $M_M = 2M_A$; $\alpha = c_A$, а $1 + \alpha = \frac{R_*}{M_{cp}}$, где R_* – универсальная газовая

постоянная ($R_* = 8,314 \text{ кДж} / (\text{кмоль} \cdot \text{К})$), а $M_{cp} = c_A \cdot M_A + (1 - c_A) \cdot M_M$. В этом случае уравнение состояния (3.1.5) примет вид

$$p = \frac{R_*}{M_{cp}} \rho T, \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L; \quad 0 \leq y \leq \delta_T. \quad (3.1.6)$$

Уравнение энергии (2.1.6) сохраняется

$$\begin{aligned} \rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^\nu \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D_{12} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial x} \right) + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^\nu \rho D_{12} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial y} \right) + \mu \cdot \Phi, \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \\ 0 \leq y \leq \delta_T, \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

где диссипативная функция Φ определяется выражением

$$\Phi = 2 \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2.$$

$$\nu = \begin{cases} 1 & \text{– для тела с осевой ориентацией;} \\ 0 & \text{– для плоского тела.} \end{cases}$$

В соотношениях (3.1.1), (3.1.7) $\delta(x)$, $\delta_c(x)$, $\delta_T(x)$ соответственно толщины динамического, диффузионного и теплового пристенных течений соответственно.

Краевые условия для функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, $\rho(x, y)$, $T(x, y)$, $c_A(x, y)$:

$$u(x, 0) = 0, \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L; \quad (3.1.8)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) R_0 + L; \quad (3.1.9)$$

$$\rho(x, 0) = p_e / \left((1 + \alpha_w(x)) \cdot T_w(x) \right), \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) R_0 + L; \quad (3.1.10)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0+0} + q_{\text{diff}} \Big|_{y=0+0} = \lambda_n \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{r=R_0} - \varepsilon_w \sigma T_w^4,$$

$$T(x, 0) = T_w(x), \quad y = 0, \quad r = R_0, \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) R_0 + L; \quad (3.1.11)$$

$$c_A(x, 0) = c_{Aw}(x), \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) R_0 + L; \quad (3.1.12)$$

$$u(x, \delta) = u_e(x), \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) R_0 + L; \quad (3.1.13)$$

$$v(x, \delta) = v_e(x), \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) R_0 + L; \quad (3.1.14)$$

$$\rho(x, \delta) = \rho_e(x), \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) R_0 + L; \quad (3.1.15)$$

$$T(x, \delta_T) = T_e(x), \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) R_0 + L; \quad (3.1.16)$$

$$c_A(x, \delta_c) = c_{Ae}(x), \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) R_0 + L. \quad (3.1.17)$$

На линии полного торможения полная скорость газодинамического потока $V = |V| = \sqrt{u^2 + v^2}$ совпадает с компонентой v

$$u(0, y) = 0; \quad v(0, y) = v(y), \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq \delta(0). \quad (3.1.18)$$

На границах $x = \pm \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) R_0 + L \right]$ задаются граничные условия

$$\frac{dp_e}{dx} = 0, \quad \frac{dT_e}{dx} = 0, \quad x = \pm \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) R_0 + L \right]. \quad (3.1.19)$$

Большинство условий (3.1.8)–(3.1.17) определяются из решения задачи теплогазодинамики, то есть должны удовлетворять уравнениям (3.1.1)–(3.1.7).

Для определения температуры границы w сопряжения, входящей в краевое условие (3.1.11) и выражение (3.1.10) необходимо решить следующую

начально-краевую задачу теории теплопроводности непосредственно на затуплении (область 1 рис. 1.1) анизотропного тела:

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = & \frac{1}{r^{\nu+1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{\nu+1} \lambda_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^{\nu+1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{\nu} \lambda_{r\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{1}{r \cos^{\nu} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos^{\nu} \theta \lambda_{\theta r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^{\nu} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos^{\nu} \theta \lambda_{\theta\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right), \\ R_1 < r < R_0, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} - \theta_0, \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

где

$$\nu = \begin{cases} 0, & \text{для полярной системы координат,} \\ 1, & \text{для сферической системы координат,} \end{cases}$$

а угол θ отсчитывается в радианах от линии O_1O_4 против часовой стрелки до линии полного торможения.

Для вывода уравнения анизотропной теплопроводности в области 2 (рис. 1.1) вводится система координат (r, θ, ψ) , где переменная r отсчитывается от базовых линий O_1O_3 согласованно с областью 1, линейная переменная θ от линий O_1O_4 вниз по потоку в пределах $0 < \theta < L$, а угловая переменная ψ – такая же, как в цилиндрической системе координат.

Пусть декартова система координат O_1x , O_1y , O_1z для области 2 организована так, что ось O_1x направлена вправо от полюса O_1 по линии OO_1 , а оси O_1y , O_1z образуют правую систему координат. Тогда введенная криволинейная система координат будет определяться выражениями (1.4.1), для которых коэффициенты Ламэ в равенстве (1.4.17) примут вид $(p_1 = r$, $p_2 = \theta$, $p_3 = \psi)$:

$$H_1 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[(-\sin \theta_0)^2 + (\cos \theta_0 \sin \psi)^2 + (\cos \theta_0 \cos \psi)^2 \right]^{1/2} = 1,$$

$$H_2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[(\cos \theta_0)^2 + (\sin \theta_0 \sin \psi)^2 + (\sin \theta_0 \cos \psi)^2 \right]^{1/2} = 1,$$

$$H_3 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi} \right)^2 \right]^{1/2} =$$

$$= \left[(r \cos \theta_0 + \theta \sin \theta_0)^2 \cos^2 \psi + (r \cos \theta_0 + \theta \sin \theta_0)^2 (-\sin \psi)^2 \right]^{1/2} = r \cos \theta_0 + \theta \sin \theta_0.$$

Подставляя эти коэффициенты в уравнение (1.4.12), получим

$$(r \cos \theta_0 + \theta \sin \theta_0) \cdot 1 \cdot 1 \cdot c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left[1 \cdot (r \cos \theta_0 + \theta \sin \theta_0) \cdot \right.$$

$$\left. \left(\lambda_{rr} \frac{\partial T}{1 \cdot \partial r} + \lambda_{r\theta} \frac{\partial T}{1 \cdot \partial \theta} + \frac{\lambda_{r\psi}}{r \cos \theta_0 + \theta \sin \theta_0} \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[1 \cdot (r \cos \theta_0 + \theta \sin \theta_0) \left(\lambda_{\theta r} \frac{\partial T}{1 \cdot \partial r} + \lambda_{\theta\theta} \frac{\partial T}{1 \cdot \partial \theta} + \frac{\lambda_{\theta\psi}}{r \cos \theta_0 + \theta \sin \theta_0} \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \psi} \left[1 \cdot 1 \left(\lambda_{\psi r} \frac{\partial T}{1 \cdot \partial r} + \lambda_{\psi\theta} \frac{\partial T}{1 \cdot \partial \theta} + \frac{\lambda_{\psi\psi}}{r \cos \theta_0 + \theta \sin \theta_0} \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) \right],$$

откуда для двумерного случая после упрощения получим:

$$c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_{r\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) +$$

$$+ p \frac{\partial T}{\partial r} + p_1 \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad R_1 < r < R_0, \quad 0 < \theta < L, \quad (3.1.21)$$

где

$$p = \frac{\lambda_{rr} + \lambda_{\theta r} \operatorname{tg} \theta_0}{r + \theta \operatorname{tg} \theta_0}, \quad p_1 = \frac{\lambda_{r\theta} + \lambda_{\theta\theta} \operatorname{tg} \theta_0}{r + \theta \operatorname{tg} \theta_0},$$

для тела с осевой симметрией, а для плоского тела $p = 0$, $p_1 = 0$.

Компоненты тензора теплопроводности для области 1 в соответствии с (1.4.45), (1.4.47) имеют вид

$$\lambda_{rr}(T) = \lambda_{\xi}(T) \sin^2(\theta + \theta_0 - \varphi) + \lambda_{\eta}(T) \cos^2(\theta + \theta_0 - \varphi),$$

$$\lambda_{\theta\theta}(T) = \lambda_{\xi}(T) \cos^2(\theta + \theta_0 - \varphi) + \lambda_{\eta}(T) \sin^2(\theta + \theta_0 - \varphi), \quad (3.1.22)$$

$$\lambda_{r\theta}(T) = \lambda_{\theta r}(T) = [\lambda_{\xi}(T) - \lambda_{\eta}(T)] \sin(\theta + \theta_0 - \varphi) \cos(\theta + \theta_0 - \varphi),$$

а для области 2

$$\lambda_{rr}(T) = \lambda_{\xi}(T) \sin^2(\theta_0 - \varphi) + \lambda_{\eta}(T) \cos^2(\theta_0 - \varphi),$$

$$\lambda_{\theta\theta}(T) = \lambda_{\xi}(T) \cos^2(\theta_0 - \varphi) + \lambda_{\eta}(T) \sin^2(\theta_0 - \varphi), \quad (3.1.23)$$

$$\lambda_{r\theta}(T) = \lambda_{\theta r}(T) = [\lambda_{\xi}(T) - \lambda_{\eta}(T)] \sin(\theta_0 - \varphi) \cos(\theta_0 - \varphi),$$

где $\lambda_{\xi}(T)$, $\lambda_{\eta}(T)$, φ – главные компоненты, зависящие от температуры, и угол ориентации главных осей тензора теплопроводности. В случае если $\lambda_{\xi}(T) = \lambda_{\eta}(T) = \lambda(T)$, тело становится изотропным ($\lambda_{r\theta} = 0$, $\lambda_{rr} = \lambda_{\theta\theta} = \lambda$), а при $\theta + \theta_0 - \varphi = 0$ или $\theta + \theta_0 - \varphi = \pi/2$ – тело является ортотропным; в этом случае $\lambda_{rr} = \lambda_{\eta}$, $\lambda_{\theta\theta} = \lambda_{\xi}$ или $\lambda_{rr} = \lambda_{\xi}$, $\lambda_{\theta\theta} = \lambda_{\eta}$.

На границах разрыва геометрических и теплофизических характеристик (линии O_1O_4 , OO_1 , границы между слоями из различных анизотропных материалов) задаются граничные условия IV-го рода [84] в виде непрерывности нормальных к границе составляющих плотности теплового потока и температур

$$\lambda_n^{(1)} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial n} \Big|^- = \lambda_n^{(2)} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial n} \Big|^+, \quad T^{(1)} \Big|^- = T^{(2)} \Big|^+, \quad (3.1.24)$$

где индексами (1), (2) обозначены контактирующие среды, $\lambda_n^{(1)}$, $\lambda_n^{(2)}$ – коэффициенты теплопроводности в нормальном к границе направлении, определяются соотношениями (1.4.64), (1.4.65).

На границе w сопряжения тела и газодинамического потока также задаются непрерывность температур и нормальных составляющих плотности теплового потока

$$T_{we}(x) = T_{wT}(x), \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) R_0 + L, \quad y = 0, \quad r = R_0, \quad (3.1.25)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{we} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0+0} + h_{Aw} \rho_{we} D_{12} \frac{\partial c_A}{\partial y} \Big|_{y=0+0} = \\ & = \lambda_n \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{r=R_0} - \varepsilon_w \sigma T_w^4 \Big|_{r=R_0}, \quad |x| < \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) R_0 + L, \quad y = 0, \quad r = R_0. \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

где индекс «e» относится к газу.

Граничные условия (3.1.25), (3.1.26) совпадают с условиями (3.1.11).

Чтобы сформировать условия сопряжения (3.1.25), (3.1.26), необходимо решить задачу теплогазодинамики (3.1.1)–(3.1.19), в которой температура сопряжения T_{we} является неизвестным параметром; затем решить задачу теории теплопроводности (3.1.20)–(3.1.25) с граничным условием (3.1.25), в которой температура сопряжения $T_{wT}(x) = T_{we}(x)$ также является неизвестным параметром; продифференцировать по переменной y распределение температур в газодинамическом потоке при $y = 0$ и распределение температур в теле по переменной r при $r = R_0$; полученные производные, зависящие от температуры сопряжения $T_{we}(x) = T_{wT}(x)$, подставить в условие (3.1.26), из которого найти температуру сопряжения; подставить эту температуру сопряжения в выражения для распределения температур в газе и в теле и найти их.

Таким образом, методология решения поставленной задачи теплогазодинамики и анизотропной теплопроводности в затупленных телах (3.1.1)–(3.1.26) предполагает решение следующих задач, каждая из которых имеет самостоятельное значение:

1) Определение теплогазодинамических характеристик $u(x, y)$, $v(x, y)$, $T(x, y)$, $\rho(x, y)$, $c_A(x, y)$ во всех областях пристенного течения, начиная от критического сечения вниз по потоку, когда известно распределение давления $p_e(x)$, а температура стенки является неизвестным параметром.

2) Решение двумерной нестационарной задачи анизотропной теплопроводности во всех подобластях затупленного тела, когда температура $T_{wT}(x)$ границы тела является неизвестным параметром.

3) Решение задачи по определению температуры сопряжения и с ее помощью нахождение всех теплогазодинамических характеристик течения и температурных полей в теле.

Этот общий алгоритм присущ практически всем задачам сопряженного теплообмена, в которых параметром сопряжения является температура границы «газ – твердое тело»

Поскольку вся комплексная модель существенно нелинейна, то реализация, как отдельных частей ее, так и всей проблемы, возможна только численно, если не использовать линеаризацию и существенные упрощения.

3.2. Формирование краевых условий для задачи теплогазодинамики в пристенных высокоскоростных течениях на затупленных телах

3.2.1. Определение теплогазодинамических характеристик на границе вязкого течения

Тепловые и газодинамические характеристики на внешней границе вязкого пристенного течения можно определить по вычисленному распределению давления $p_e(x)$ вдоль переменной x исходя из упрощенных уравнений (3.1.1)–(3.1.7), в которых опущены вязкие и теплопроводностные члены. Тогда соответствующие уравнения примут следующий вид ($\partial u_e / \partial y \approx 0$, $\partial p_e / \partial y \approx 0$, $\frac{\partial c_{Ae}}{\partial y} \approx 0$):

уравнение сохранения импульса

$$\rho_e u_e \frac{du_e}{dx} = -\frac{dp_e}{dx}, \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) R_0 + L; \quad (3.2.1)$$

уравнение сохранения энергии

$$\rho_e c_p \frac{dT_e}{dx} = \frac{dp_e}{dx}, \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) R_0 + L; \quad (3.2.2)$$

уравнение неразрывности для сжимаемого газа

$$\frac{\partial(\rho_e u_e r^v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_e v_e r^v)}{\partial y} = 0, \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) R_0 + L; \quad (3.2.3)$$

уравнение сохранения атомарной компоненты для замороженного диссоциирующего течения

$$\rho_e u_e \frac{dc_{Ae}}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\rho D_{12} \frac{dc_{Ae}}{dx} \right), \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L; \quad (3.2.4)$$

уравнение состояния

$$p_e = \frac{R_*}{(M_{cp})_e} \rho_e T_e, \quad |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L. \quad (3.2.5)$$

Используя уравнения (3.2.1)–(3.2.5), выразим все газодинамические характеристики в невязком потоке через распределение давления $p_e(x)$ в невязком течении на стенке. Для этого продифференцируем уравнение состояния (3.2.5) по переменной x и в полученное выражение подставим производную dp_e/dx из выражения (3.2.2), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\rho_e c_p \frac{dT_e}{dx} = \frac{d\rho_e}{dx} T_e + \frac{dT_e}{dx} R_* \rho_e. \quad (3.2.6)$$

Из уравнения (3.2.6) и уравнения состояния можно выразить $T_e(x)$ и $\rho_e(x)$ в виде функций от давления $p_e(x)$. Для этого проинтегрируем уравнение (3.2.6) как уравнение с разделяющимися переменными, выразив газовую постоянную по формуле Майера [6].

$$\frac{R_*}{(M_{cp})_e} = c_p - c_v = c_v (k-1), \quad (3.2.7)$$

получим

$$\frac{dT_e}{(k-1)T_e} = \frac{d\rho_e}{\rho_e},$$

откуда

$$\frac{1}{k-1} \ln T_e = \ln \rho_e + \ln C_1$$

или

$$T_e^{\frac{1}{k-1}} = C_1 \cdot \rho_e. \quad (3.2.8)$$

Подставляя в (3.2.8) плотность ρ_e из уравнения состояния (3.2.5), находим

$$T_e(x) = \left(C_1 \cdot \frac{p_e(x)}{R_*} \right)^{\frac{k-1}{k}}. \quad (3.2.9)$$

Далее, подставляя в (3.2.8) температуру T_e из уравнения состояния (3.2.5), получим

$$\rho_e(x) = C_1^{\frac{k}{k-1}} \cdot \left(\frac{p_e(x)}{R_*} \right)^{1/k}. \quad (3.2.10)$$

Постоянную C_1 можно определить, например, из выражения (3.2.9) при $x = 0$ через температуру T_{e0} и давление p_{e0} на линии полного торможения

$$C_1 = \frac{R_*}{p_{e0}} \cdot (T_{e0})^{\frac{k}{k-1}}, \quad (3.2.11)$$

подставив которую в (3.2.9), получим

$$\frac{T_e(x)}{T_{e0}} = \left[\frac{p_e(x)}{p_{e0}} \right]^{\frac{k-1}{k}}. \quad (3.2.12)$$

Определим теперь постоянную C_1 из выражения (3.2.10) при $x = 0$ и подставим полученное выражение в (3.2.10), находим

$$\frac{\rho_e(x)}{\rho_{e0}} = \left(\frac{p_e(x)}{p_{e0}} \right)^{\frac{1}{k}}. \quad (3.2.13)$$

Выражения (3.2.12), (3.2.13) являются выражениями изоэнтропы. С помощью них можно определить температуру $T_e(x)$ и плотность $\rho_e(x)$ на внешней границе пристенного течения через температуру T_{e0} и плотность ρ_{e0} в точке пересечения линии полного торможения с внешней границей пристенного течения.

На внешней границе пристенного течения зависимость скорости $u_e(x)$ от давления можно получить путем интегрирования уравнения Бернулли (3.2.1) по

переменной x , получим (используется равенство нулю продольной составляющей скорости невязкого течения на линии полного торможения $u_e(0) = 0$)

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{du_e^2(x)}{dx} dx &= -2 \int_0^x \frac{1}{\rho_e(x)} \frac{dp_e}{dx} dx = -2 \int_0^x \frac{1}{\rho_{e0} \left(\frac{p_e(x)}{p_{e0}} \right)^{1/k}} \frac{dp_e}{dx} dx = \\ &= \frac{-2(p_{e0})^{1/k}}{\rho_{e0}} \int_0^x \frac{1}{(p_e(x))^{1/k}} dp_e = -\frac{k}{k-1} \frac{2(p_{e0})^{1/k}}{\rho_{e0}} \left[(p_e(x))^{\frac{k-1}{k}} - p_{e0}^{\frac{k-1}{k}} \right], \end{aligned}$$

откуда

$$u_e(x) = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{(p_{e0})^{1/k}}{\rho_{e0}} \left[(p_{e0})^{\frac{k-1}{k}} - (p_e(x))^{\frac{k-1}{k}} \right]}. \quad (3.2.14)$$

Поперечный компонент $v_e(x)$ вектора скорости на внешней границе пристенного течения определим интегрированием уравнения сохранения импульса в приближении пограничного слоя (см. ниже приближенно-аналитическую формулу (4.3.20))

$$v(x, y) = -\frac{1}{2\mu_w} \frac{d^2 p_e}{dx^2} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{\delta}{2} y^2 \right) + \frac{1}{\sqrt{2\rho_e(p_0 - p_e)}} \frac{dp_e}{dx} \frac{y^2}{2\delta}, \quad (3.2.15)$$

где полагая $p_0 = p_{e0}$, $y = \delta$ и отбрасывая первое слагаемое, пропорциональное δ^3 , получим

$$v_e(x) = v(x, \delta) = \frac{1}{\sqrt{2\rho_e(p_{e0} - p_e(x))}} \frac{dp_e}{dx} \frac{\delta}{2},$$

подставив в которое выражение (3.2.13) для плотности $\rho_e(x)$, получим окончательно

$$v_e(x) = \frac{\delta}{2\sqrt{2\rho_{e0} (p_e(x)/p_{e0})^{1/k} (p_{e0} - p_e(x))}} \frac{dp_e}{dx}. \quad (3.2.16)$$

Следует заметить, что в силу того, что $\frac{dp_e}{dx} < 0$, величина поперечного компонента $v_e(x)$ скорости на внешней границе пристенного течения (так же как и в самом пристенном течении) является величиной отрицательной, т.е.

поперечная составляющая скорости направлена от внешней границы пристенного течения к стенке.

Для определения концентрации c_A на внешней границе диффузионного пристенного течения сделаем следующие допущения:

газ является воздухом, состоящим из 23,5% кислорода и 76,5% азота, диссоциирующим, замороженным, т.е. реакция диссоциации протекает настолько медленно, что скорость $\dot{w}_A = 0$;

число $Sm = \frac{\mu}{\rho D_{12}} \sim 1$, так что коэффициент диффузии, умноженный на

плотность примерно равен динамической вязкости $\rho D_{12} \approx \mu$;

отношение $D = \frac{\rho_e(x)u_e(x)}{(\rho D_{12})_e}$ принято среднеинтегральным, то есть

$$D = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\rho_e(x)u_e(x)}{(\rho D_{12})_e} dx = \frac{\rho_e(\xi)u_e(\xi)}{(\rho D_{12}(\xi))_e}, \text{ где } \xi \in (0, x).$$

При этих допущениях уравнение диффузии (3.1.4) на внешней границе диффузионного пристенного течения примет вид ($c_{Ae}(x, \delta) \equiv \alpha_e(x)$):

$$\rho_e u_e \frac{d\alpha_e}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\rho D_{12} \frac{d\alpha_e}{dx} \right), \quad x > 0; \quad (3.2.17)$$

с начальными условиями на линии полного торможения

$$\alpha_e(0) = \alpha_{e0}, \quad x = 0; \quad (3.2.18)$$

$$\frac{d\alpha_e(0)}{dx} = \frac{d\alpha_{e0}}{dx}, \quad x = 0. \quad (3.2.19)$$

Интегрируя задачу Коши (3.2.17)–(3.2.19), приходим к выражению

$$\alpha_e(x) = \alpha_{e0} + \frac{1}{D} \frac{d\alpha_{e0}}{dx} (\exp(Dx) - 1),$$

в котором разлагая экспоненту в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$ с сохранением слагаемых до второго включительно, получим

$$\alpha_e(x) = \alpha_{e0} + \frac{d\alpha_{e0}}{dx} \left(x + D \frac{x^2}{2} \right). \quad (3.2.20)$$

Для определения степени диссоциации α_{e0} и производной $\frac{d\alpha_{e0}}{dx}$ на линии полного торможения можно воспользоваться следующими полуэмпирическими соотношениями для воздуха, как смеси молекул кислорода и азота [46]

$$\alpha = 0,235\alpha_{O_2} \quad \text{для } T < 3500\text{K};$$

$$\frac{\alpha_{O_2}^2}{1-\alpha_{O_2}} = \frac{(\rho_d)_{O_2}}{\rho} \exp\left(-\frac{(T_d)_{O_2}}{T}\right),$$

$$(\rho_d)_{O_2} = 130000 \text{ кг/м}^3; \quad (T_d)_{O_2} = 59000 \text{ K};$$

$$\alpha = 0,235 + 0,765\alpha_{N_2} \quad \text{для } T \geq 3500 \text{ K}; \quad (3.2.21)$$

$$\frac{\alpha_{N_2}^2}{1-\alpha_{N_2}} = \frac{(\rho_d)_{N_2}}{\rho} \exp\left(-\frac{(T_d)_{N_2}}{T}\right),$$

$$(\rho_d)_{N_2} = 130000 \text{ кг/м}^3; \quad (T_d)_{N_2} = 113000 \text{ K},$$

где ρ_d , T_d – характеристические плотности и температуры конкретного диссоциирующего газа.

Таким образом, на внешних границах динамического, теплового и диффузионного пристенных течений теплогазодинамические характеристики по заданному давлению $p_e(x)$ определяются соотношениями (3.2.12), (3.2.13), (3.2.14), (3.2.16), (3.2.20), которые можно использовать для решения уравнений теплогазодинамики в качестве краевых условий на внешних границах пристенных течений.

3.2.2. Распределение давления вдоль внешней границы пристенного течения

Для формирования распределения давления $p_e(x)$ около затупленных конусов или затупленных клиньев нет необходимости решать задачу в невязкой области, поскольку для таких тел высокоскоростные течения хорошо изучены [83, 88]. Поэтому для решения задач о тепломассопереносе в вязких

пристенных течениях целесообразно воспользоваться теоретическими и экспериментальными результатами, полученными ранее.

Кроме этого, для больших чисел M_n набегающего потока ($M_n \geq 10$) ударная волна так близко подходит к обтекаемому телу, что давление за ударной волной практически без изменения передается по нормали к поверхности тела. Зная местный угол θ_e наклона ударной волны относительно оси тела (и геометрию ударной волны), можно по формулам (1.1.21), (1.1.30), (1.1.31) определить давление непосредственно за ударной волной.

Ниже приведена хорошо зарекомендовавшая себя интерполяционная формула Лунева В.В. [83] для определения давления $p_e(x)$ непосредственно на затуплении

$$p_e(\theta) = p_0(1 - 1,17 \sin^2 \theta + 0,225 \sin^6 \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \theta_0, \quad (3.2.22)$$

где $\theta = x/R_0$ – угол, отсчитываемый от критической точки $x=0$ вниз по потоку, θ_0 – угол полуконусности тела, p_0 – давление торможения в критической точке, определяемое по формуле (1.1.28)

$$\frac{p_0}{p_n} = \frac{\delta \left[\frac{1}{\delta(1-\delta)} \right]^{\frac{1+\delta}{2\delta}} (M_n^2)^{\frac{1+\delta}{\delta}}}{\left(\frac{1+\delta}{\delta} M_n^2 - 1 \right)^{\frac{1-\delta}{2\delta}} \cdot \left(1 + \frac{\delta}{1-\delta} M_n^2 \right)^{\frac{1+\delta}{2\delta}}}, \quad (3.2.23)$$

где p_n – давление набегающего потока, $\delta = \frac{k-1}{k+1}$.

Ниже по потоку за точкой $x = \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0$ давление $p_e(x)$ хорошо согласуется с логарифмической формулой:

$$p_e(x) = p_0(A \cdot \ln(x+B) + C), \quad \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 \leq x \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L, \quad (3.2.24)$$

где коэффициенты A , B и C – получены из условия непрерывности функций (3.2.23) и (3.2.24), а так же их производных в точке $x = \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0$:

$$A = -0.01227; B = -1.350273; C = 0.03403. \quad (3.2.25)$$

На рис. 3.1. представлено распределение безразмерного давления, принимаемого на наружной границе пристенного течения, вычисленного по формулам (3.2.22)–(3.2.25) (кривая 1), в сравнении с результатами из работ [15, 178] (кривая 2). Характеристики набегающего потока: $M_n = 25$, $p_n = 53,85$ Па, $c_p = 1,06 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), $T_n = 265,86$ К, и геометрические характеристики: $R_0 = 0,0381$ м, $\theta_0 = 6^\circ$.

Из рисунка видно, что давление на наружной границе пристенного течения хорошо согласуется с результатами, представленными в [15,178].

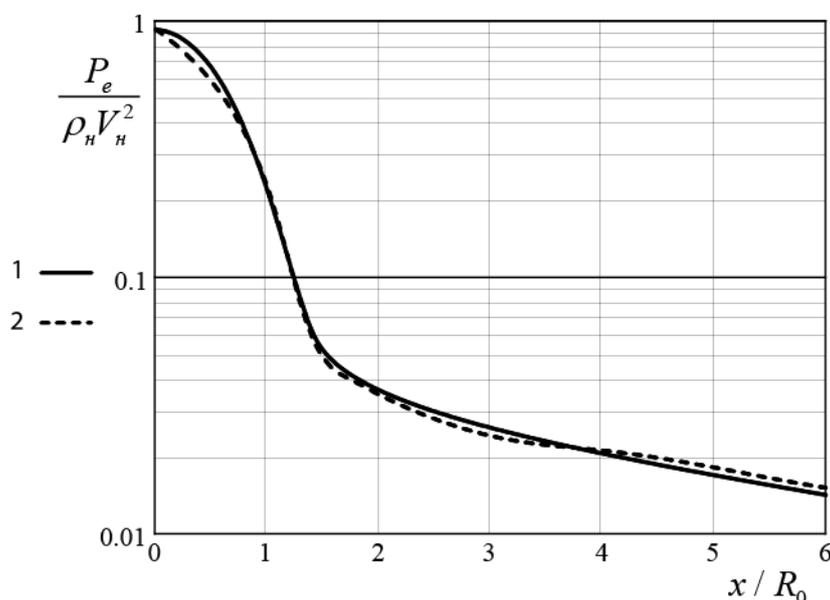


Рис. 3.1. Распределение безразмерного давления на наружной границе пристенного течения:
1 – формулы (3.2.22)–(3.2.25), 2 – [15,178].

3.2.3. Определение теплогазодинамических характеристик в пристенном течении за прямой частью ударной волны в окрестности критической точки и на линии полного торможения

За прямой частью ударной волны течение сжатого газа дозвуковое и поэтому несжимаемое ($\rho = \text{const}$), что, с одной стороны, существенно упрощает уравнения теплогазодинамики (2.1.19)–(2.1.24), а с другой – в окрестности

критической точки давление вдоль переменной y между ударной волной и телом не является постоянной величиной, вследствие чего необходимо рассматривать, хотя и упрощенные, но все уравнения теплогазодинамики (2.1.19)–(2.1.24) на основе полных уравнений Навье-Стокса.

В этой связи тепломассоперенос за прямой частью ударной волны $\left(R_0 \rightarrow \infty, |\theta_c| \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{20}\right)$ осуществляется в соответствии с методологией, изложенной в разделе 2.2.1. Так что при реализации конечно-разностной схемы метода расщепления с экстраполяцией по пространственным переменным (МРЭП), по крайней мере, в четырех сечениях с каждой стороны от линии полного торможения такие газодинамические характеристики, как компоненты скорости $u(x, y)$, $v(x, y)$, давление $p(x, y)$ не только пристенного, но и потенциального течения считаются известными, что позволяет дальше использовать метод МРЭП вниз по потоку. За прямой частью ударной волны остается определить распределения температур $T(x, y)$, концентраций атомарной компоненты $c_A \equiv \alpha(x, y)$ и плотностей $\rho(x, y)$, то есть решить уравнение концентраций (3.1.4) относительно $c_A(x, y)$ с граничными условиями на ударной волне $(c_A)_{уд.в.}$ и c_{Aw} , определяемыми из соотношений (3.2.21), например, по температуре на ударной волне и температуре восстановления соответственно, а также уравнение энергии (3.1.7) с краевыми условиями на ударной волне и температуре восстановления. После решения сопряженной задачи и определения температуры $T_w(x)$ границы «газ – твердое тело» эти краевые условия можно уточнить и уточнить распределения $T(x, y)$ и $c_A(x, y)$. Известные распределения давления $p(x, y)$ и температуры $T(x, y)$ определяют распределение плотности $\rho(x, y)$ за прямой частью ударной волны.

На линии полного торможения ($u = 0, \partial u / \partial y = 0$) аппроксимации уравнений диффузии и энергии имеют вид ($c_A \equiv \alpha$ $i = 0$):

$$\begin{aligned}
(\rho v)_{0,j} \frac{\alpha_{0,j+1} - \alpha_{0,j-1}}{2h_2} &= (\rho D_{12})_{0,j+1/2} \left(\frac{\alpha_{0,j+1} - \alpha_{0,j}}{h_2^2} \right) - (\rho D_{12})_{0,j-1/2} \left(\frac{\alpha_{0,j} - \alpha_{0,j-1}}{h_2^2} \right) + \\
&+ (\rho D_{12})_{0+1/2,j} \left(\frac{\alpha_{1,j} - \alpha_{0,j}}{h_1^2} \right) - (\rho D_{12})_{0-1/2,j} \left(\frac{\alpha_{0,j} - \alpha_{-1,j}}{h_1^2} \right) + O(h_1^2 + h_2^2), \\
i = 0, \quad j = \overline{0, N_2},
\end{aligned} \tag{3.2.26}$$

где

$$\begin{aligned}
(\rho D_{12})_{0,j\pm 1/2} &= \left[(\rho D_{12})_{0,j} + (\rho D_{12})_{0,j\pm 1} \left(\frac{r_{j\pm 1}}{r_j} \right)^v \right] / 2, \\
(\rho D_{12})_{0\pm 1/2,j} &= \left[(\rho D_{12})_{0,j} + (\rho D_{12})_{\pm 1,j} \right] / 2,
\end{aligned}$$

причем $\alpha_{1,j} = \alpha_{-1,j}$

$$\begin{aligned}
(\rho v c_p)_{0,j} \frac{T_{0,j+1} - T_{0,j-1}}{2h_2} &= \lambda_{0,j+1/2} \left(\frac{T_{0,j+1} - T_{0,j}}{h_2^2} \right) - \lambda_{0,j-1/2} \left(\frac{T_{0,j} - T_{0,j-1}}{h_2^2} \right) + \lambda_{0+1/2,j} \left(\frac{T_{1,j} - T_{0,j}}{h_1^2} \right) - \\
&- \lambda_{0-1/2,j} \left(\frac{T_{0,j} - T_{-1,j}}{h_1^2} \right) + (\rho D_{12} c_p T)_{0,j+1/2} \left(\frac{\alpha_{0,j+1} - \alpha_{0,j}}{h_2^2} \right) - (\rho D_{12} c_p T)_{0,j-1/2} \times \\
&\times \left(\frac{\alpha_{0,j} - \alpha_{0,j-1}}{h_2^2} \right) + (\rho D_{12} c_p T)_{0+1/2,j} \left(\frac{\alpha_{1,j} - \alpha_{0,j}}{h_1^2} \right) - (\rho D_{12} c_p T)_{0-1/2,j} \left(\frac{\alpha_{0,j} - \alpha_{-1,j}}{h_1^2} \right) + \\
&+ O(h_1^2 + h_2^2), \quad i = 0, \quad j = \overline{0, N_2},
\end{aligned} \tag{3.2.27}$$

где

$$\begin{aligned}
\lambda_{0,j\pm 1/2} &= \left[\lambda_{0,j} + \lambda_{0,j\pm 1} \left(\frac{r_{j\pm 1}}{r_j} \right)^v \right] / 2; \quad \lambda_{0\pm 1/2,j} = [\lambda_{0,j} + \lambda_{\pm 1,j}] / 2, \\
(\rho D_{12} c_p T)_{0,j\pm 1/2} &= \left[(\rho D_{12} c_p T)_{0,j} + (\rho D_{12} c_p T)_{0,j\pm 1} \left(\frac{r_{j\pm 1}}{r_j} \right)^v \right] / 2, \\
(\rho D_{12} c_p T)_{0\pm 1/2,j} &= \left[(\rho D_{12} c_p T)_{0,j} + (\rho D_{12} c_p T)_{\pm 1,j} \right] / 2.
\end{aligned}$$

В (3.2.23) также $T_{1,j} \approx T_{-1,j}$.

В остальных сечениях x_i , $|i| \leq 4$, $i \neq 0$ конечно-разностные аппроксимации уравнений (3.1.4), (3.1.7) с известными $u_{i,j}$, $v_{i,j}$, $p_{i,j}$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
& (\tilde{\rho}u)_{i,j} \left(\frac{\tilde{\alpha}_{i+1,j} - \alpha_{i-1,j}}{2h} \right) + (\tilde{\rho}v)_{i,j} \left(\frac{\alpha_{i,j+1} - \alpha_{i,j-1}}{2h_2} \right) = (\tilde{\rho}D_{12})_{i,j+1/2} \left(\frac{\alpha_{i,j+1} - \alpha_{i,j}}{h_2^2} \right) - \\
& - (\tilde{\rho}D_{12})_{i,j-1/2} \left(\frac{\alpha_{i,j} - \alpha_{i,j-1}}{h_2^2} \right) + (\rho D_{12})_{i+1/2,j} \left(\frac{\alpha_{i+1,j} - \alpha_{i,j}}{h_1^2} \right) - (\rho D_{12})_{i-1/2,j} \left(\frac{\alpha_{i,j} - \alpha_{i-1,j}}{h_1^2} \right) + \\
& + O(h_1^2 + h_2^2), \quad |i| \leq 4, \quad i \neq 0, \quad j = \overline{0, N_2}, \quad (3.2.28)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
(\rho D_{12})_{i,j\pm 1/2} &= \left[(\rho D_{12})_{i,j} + (\rho D_{12})_{i,j\pm 1} \left(\frac{r_{j\pm 1}}{r_j} \right)^v \right] / 2; \\
(\rho D_{12})_{i\pm 1/2,j} &= \left[(\rho D_{12})_{i,j} + (\rho D_{12})_{i\pm 1/2,j} \right] / 2; \\
(\tilde{\rho}uc_p)_{i,j} \frac{\tilde{T}_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2h_1} + (\tilde{\rho}vc_p)_{i,j} \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2h_2} &= \lambda_{i+1/2,j} \left(\frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{h_1^2} \right) - \\
&- \lambda_{i-1/2,j} \left(\frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{h_1^2} \right) + \lambda_{i,j+1/2} \left(\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{h_2^2} \right) - \lambda_{i,j-1/2} \left(\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{h_2^2} \right) + \\
&+ \left(u_{i,j} \frac{\tilde{p}_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2h_1} + v_{i,j} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2h_2} \right) + (\rho D_{12}c_p T)_{i+1/2,j} \left(\frac{\alpha_{i+1,j} - \alpha_{i,j}}{h_1^2} \right) - \\
&- (\rho D_{12}c_p T)_{i-1/2,j} \left(\frac{\alpha_{i,j} - \alpha_{i-1,j}}{h_1^2} \right) + (\rho D_{12}c_p T)_{i,j+1/2} \left(\frac{\alpha_{i,j+1} - \alpha_{i,j}}{h_2^2} \right) - \\
&- (\rho D_{12}c_p T)_{i,j-1/2} \left(\frac{\alpha_{i,j} - \alpha_{i,j-1}}{h_2^2} \right) + (\mu\Phi)_{i,j} + O(h_1^2 + h_2^2), \quad |i| \leq 4, \quad i \neq 0, \quad j = \overline{0, N_2}, \quad (3.2.29)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\lambda_{i\pm 1/2,j} &= (\lambda_{i\pm 1,j} + \lambda_{i,j}) / 2; \quad \lambda_{i,j\pm 1/2} = \left[\lambda_{i,j} + \lambda_{i,j\pm 1} \left(\frac{r_{j\pm 1}}{r_j} \right)^v \right] / 2; \\
(\rho D_{12}c_p T)_{i\pm 1/2,j} &= \left[(\rho D_{12}c_p T)_{i,j} + (\rho D_{12}c_p T)_{i\pm 1,j} \right] / 2; \\
(\rho D_{12}c_p T)_{i,j\pm 1/2} &= \left[(\rho D_{12}c_p T)_{i,j} + (\rho D_{12}c_p T)_{i,j\pm 1} \left(\frac{r_{j\pm 1}}{r_j} \right)^v \right] / 2.
\end{aligned}$$

После нахождения $\alpha_{i,j}$, $T_{i,j}$ из уравнения состояния для бинарной диссоциирующей смеси газов (3.1.5) можно определить распределение

плотностей в окрестности линии полного торможения за прямой частью ударной волны

$$\rho_{i,j} = \frac{P_{i,j}}{(1 + \alpha_{i,j})T_{i,j}}, \quad |i| \leq 4, \quad i \neq 0, \quad j = \overline{0, N_2} \quad (3.2.30)$$

3.3. Численное решение задачи сопряженного теплопереноса с учетом продольной неизотермичности

Поскольку в анизотропном теле тензор теплопроводности может иметь высокую степень анизотропии, то есть продольный главный коэффициент теплопроводности может в десятки (и даже в сотни) раз превышать поперечный главный коэффициент теплопроводности, то в анизотропном теле наблюдается значительная продольная неизотермичность, передающаяся границе тела, а в силу сопряженности эта неизотермичность передается пристенному газодинамическому течению, в котором теперь вторые производные газодинамических функций по продольной переменной и поперечной переменной одного порядка.

В этой связи уравнения сохранения импульса, диффузии и энергии являются уравнениями эллиптического типа.

Для численного решения вне зоны прямой части ударной волны ($|i| > 4$) все пристенное течение погружается в расширенную область длиной $\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) + L$ и толщиной заведомо большей, чем толщина динамического δ , теплового δ_T или диффузионного δ_c пристенного течений с обеих сторон от осевой линии тела и на эти две области в верхней и нижней сторонах наносится следующая ортогональная сетка:

$$\omega_{h_1, h_2} = \{x_i = ih_1, i = 0, \dots, N_1; y_j = jh_2, j = 0, \dots, N_2\}. \quad (3.3.1)$$

На сетке (3.3.1) запишем конечно-разностную аппроксимацию задачи (3.1.1)–(3.1.17) по схеме метода МРЭП, подробно изложенного в разделе 2.2.2 с шаблонами, приведенными на рисунках 2.2, 2.3.

Этот метод реализуется для пристенных течений сначала вдоль поперечного, а затем продольного направления. При этом нелинейные коэффициенты и неизвестные значения газодинамических характеристик, необходимые для нахождения решения в конкретном сечении, определяются с помощью линейной экстраполяции по второй производной с использованием уже известных значений сеточной функции.

Поперечное направление

Для нахождения газодинамических характеристик в расчетном узле i, j вдоль поперечных координатных линий $x_i = const$ необходимо знать характеристики в узлах $i-1, j$ и $i+1, j$. В узлах $i-1, j$ они уже известны, а для получения характеристик в узле $i+1, j$ в первом приближении с порядком $O(h_1^2)$, используется экстраполяция газодинамических характеристик в узлы $i+1, j$ по третьей производной, равной нулю (по второй производной) вычисленной по сеточной функции в узлах $i-2, j$; $i-1, j$; i, j ; $i+1, j$, причем в узлах $i-2, j$; $i-1, j$ характеристики известны, в узле i, j они являются искомыми, а в узле $i+1, j$ – экстраполяционными (шаблон на рис. 2.2а).

Конечно-разностная аппроксимация уравнений (3.1.1), (3.1.3), (3.1.4), (3.1.7) в узле i, j вдоль координатной линии $x_i = const$ осуществляется по шаблону на рис. 2.2б.

уравнение сохранения импульса (3.1.1):

$$(\bar{\rho u})_{i,j} \frac{\bar{u}_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_1} + (\bar{\rho v})_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_2} = -\frac{dp_{e,i}}{dx} +$$

$$+ \left(\bar{\mu}_{i,j+1/2} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_2^2} - \bar{\mu}_{i,j-1/2} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_2^2} \right) + \left(\bar{\mu}_{i,j+1} \frac{\bar{v}_{i+1,j+1} - v_{i-1,j+1}}{4h_1 h_2} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{\mu}_{i,j-1} \frac{\bar{v}_{i+1,j-1} - v_{i-1,j-1}}{4h_1h_2} \Big) + \frac{4}{3} \left(\bar{\mu}_{i+1/2,j} \frac{\bar{u}_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_1^2} - \bar{\mu}_{i-1/2,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_1^2} \right) - \\
& -\frac{2}{3} \left(\bar{\mu}_{i+1,j} \frac{\bar{v}_{i+1,j+1} - \bar{v}_{i+1,j-1}}{4h_1h_2} - \bar{\mu}_{i-1,j} \frac{v_{i-1,j+1} - v_{i-1,j-1}}{4h_1h_2} \right) + O((h_1 + h_2)^2), \\
& i \in (-N_1; -4) \cup (4; N_1), \quad j = \overline{1, N_2 - 1}, \tag{3.3.2}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}_{i,j\pm 1/2} &= \left[\mu(\bar{T}_{i,j}) + \mu(\bar{T}_{i,j\pm 1}) \left(\frac{r_{j\pm 1}}{r_j} \right)^v \right] / 2, \quad \bar{\mu}_{i,j\pm 1} = [\mu(\bar{T}_{i,j+1}) + \mu(\bar{T}_{i,j-1})] / 2, \\
\bar{\mu}_{i,\pm 1/2,j} &= [\mu(\bar{T}_{i,j}) + \mu(\bar{T}_{i\pm 1,j})] / 2, \quad \bar{\mu}_{i\pm 1,j} = [\mu(\bar{T}_{i+1,j}) + \mu(\bar{T}_{i-1,j})] / 2.
\end{aligned}$$

СЛАУ (3.3.1) относительно $u_{i,j}$ с трехдиагональной матрицей решается методом скалярной прогонки вдоль координатной линии $x_i = const$, поскольку в ней три неизвестных $u_{i,j-1}$, $u_{i,j}$, $u_{i,j+1}$, значения $u_{i-1,j}$ и $v_{i-1,j}$ уже известны в предыдущем сечении $x_{i-1} = const$, а значения $\bar{u}_{i+1,j}$ и $\bar{v}_{i+1,j}$ являются экстраполяционными. Граничными условиями являются $u_{i,0} = 0$, $u_{i,N_2} \rightarrow u_{ie}$.

Уравнение неразрывности (3.1.3) относительно $v(x, y)$:

$$\begin{aligned}
& \frac{(\bar{\rho}u)_{i+1,j} - (\bar{\rho}u)_{i-1,j}}{2h_1} + \frac{-\bar{\rho}_{i,j+2} v_{i,j+2} \left(\frac{r_{j+2}}{r_j} \right)^v + 4\bar{\rho}_{i,j+1} v_{i,j+1} \left(\frac{r_{j+1}}{r_j} \right)^v - 3\bar{\rho}_{i,j} v_{i,j}}{2h_2} = O(|h_1|^2), \\
& i \in (-N_1; -4) \cup (4; N_1), \quad j = \overline{1, N_2 - 2}, \tag{3.3.3}
\end{aligned}$$

с граничными условиями $v_{i,0} = 0$, $v_{i,N_2-2} \rightarrow v_e$ из (3.2.16).

Поскольку $u_{i,j}$ уже известны из решения СЛАУ (3.3.2), то в СЛАУ (3.3.3) первые слагаемые переносятся в правые части. В каждом уравнении остаются три неизвестные $v_{i,j}$, $v_{i,j+1}$, $v_{i,j+2}$, определяемые скалярными прогонками вдоль поперечной координатной линии $x_i = const$. Таким образом, распределение сеточных функций $v_{i,j}$ определены.

Уравнение диффузии атомарной компоненты $c_A \equiv \alpha$ (3.1.4):

$$\begin{aligned}
& (\bar{\rho}u)_{i,j} \frac{\bar{\alpha}_{i+1,j} - \alpha_{i-1,j}}{2h_1} + (\bar{\rho}v)_{i,j} \frac{\alpha_{i,j+1} - \alpha_{i,j-1}}{2h_2} = \\
& = \left((\bar{\rho}\bar{D}_{12})_{i,j+1/2} \frac{\alpha_{i,j+1} - \alpha_{i,j}}{h_2^2} - (\bar{\rho}\bar{D}_{12})_{i,j-1/2} \frac{\alpha_{i,j} - \alpha_{i,j-1}}{h_2^2} \right) + \\
& + \left((\bar{\rho}\bar{D}_{12})_{i+1/2,j} \frac{\bar{\alpha}_{i+1,j} - \alpha_{i,j}}{h_1^2} - (\bar{\rho}\bar{D}_{12})_{i-1/2,j} \frac{\alpha_{i,j} - \alpha_{i,j-1}}{h_1^2} - (\bar{\rho}\bar{D}_{12})_{i-1/2,j} \frac{\alpha_{i,j} - \alpha_{i,j-1}}{h_1^2} \right) + \\
& + O(h_1^2 + h_2^2), \quad i \in (-N_1; -4) \cup (4; N_1), \quad j = \overline{1, N_2 - 1}, \quad (3.3.4)
\end{aligned}$$

где

$$(\rho D_{12})_{i,j \pm 1/2} = \left[(\rho D_{12})_{i,j} + (\rho D_{12})_{i,j \pm 1} \left(\frac{r_{j \pm 1}}{r_j} \right)^v \right] / 2; \quad (\rho D_{12})_{i \pm 1/2, j} = \left[(\rho D_{12})_{i,j} + (\rho D_{12})_{i \pm 1, j} \right] / 2.$$

СЛАУ (3.3.4) относительно концентраций атомарной компоненты также имеет трехдиагональную матрицу коэффициентов, причем каждое уравнение содержит три неизвестных $\alpha_{i,j-1}$, $\alpha_{i,j}$, $\alpha_{i,j+1}$ и поэтому она решается методом скалярной прогонки вдоль координатной линии $x_i = \text{const}$ с использованием граничных условий $\alpha_{i,w}$ и $\alpha_{i,e}$, определяемых по формулам (3.2.21) в разделе 3.2.1.

Уравнение энергии (3.1.7):

При аппроксимации уравнения энергии следует учесть, что распределения $u_{i,j}$, $v_{i,j}$, $c_{i,j}$ уже известны и соответствующие конечно-разностные слагаемые переносятся в правые части.

$$\begin{aligned}
& (\bar{\rho}u\bar{c})_{i,j} \frac{\bar{T}_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2h_1} + (\bar{\rho}v\bar{c})_{i,j} \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2h_2} = \left(\bar{\lambda}_{i+1/2,j} \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{h_1^2} - \bar{\lambda}_{i-1/2,j} \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{h_1^2} \right) + \\
& + \left(\bar{\lambda}_{i,j+1/2} \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{h_2^2} - \bar{\lambda}_{i,j-1/2} \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{h_2^2} \right) + u_{i,j} \frac{p_{e,i+1} - p_{e,i-1}}{2h_1} + \bar{\mu}_{i,j} \Phi_{i,j} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left((\bar{\rho} \bar{D}_{12} \bar{h}_A)_{i,j+1/2} \frac{\alpha_{i,j+1} - \alpha_{i,j}}{h_2^2} - (\bar{\rho} \bar{D}_{12} \bar{h}_A)_{i,j-1/2} \frac{\alpha_{i,j} - \alpha_{i,j-1}}{h_2^2} \right) + \\
& + \left((\bar{\rho} \bar{D}_{12} \bar{h}_A)_{i+1/2,j} \frac{\alpha_{i+1,j} - \alpha_{i,j}}{h_1^2} - (\bar{\rho} \bar{D}_{12} \bar{h}_A)_{i-1/2,j} \frac{\alpha_{i,j} - \alpha_{i-1,j}}{h_1^2} \right) + O(h_1^2 + h_2^2), \\
& i \in (-N_1; -4) \cup (4; N_1), \quad j = \overline{1, N_2 - 1}, \tag{3.3.5}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\lambda_{i\pm 1/2,j} &= [\lambda(T_{i,j}) + \lambda(T_{i\pm 1,j})] / 2; \quad \lambda_{i,j\pm 1/2} = \left[\lambda(T_{i,j}) + \lambda(T_{i,j\pm 1}) \left(\frac{r_{j\pm 1}}{r_j} \right)^v \right] / 2; \\
(\rho D_{12} h_A)_{i\pm 1/2,j} &= [(\rho D_{12} c_{pA} T)_{i,j} + (\rho D_{12} c_{pA} T)_{i\pm 1,j}] / 2; \\
(\rho D_{12} h_A)_{i,j\pm 1/2} &= \left[(\rho D_{12} c_{pA} T)_{i,j} + (\rho D_{12} c_{pA} T)_{i,j\pm 1} \left(\frac{r_{j\pm 1}}{r_j} \right)^v \right] / 2.
\end{aligned}$$

СЛАУ (3.3.5) также имеет трехдиагональную матрицу коэффициентов и ее можно решить методом прогонки относительно $T_{i,j}$, причем каждое уравнение в (3.3.5) содержит три неизвестные $T_{i,j-1}$, $T_{i,j}$, $T_{i,j+1}$.

Уравнение состояния (3.1.5):

Для известных распределений функций $T_{i,j}$, $\alpha_{i,j}$ и $p_{e,i}$ из уравнения состояния (3.1.5) можно определить распределение плотностей вдоль координатной линии $x_i = \text{const}$.

$$\rho_{i,j} = \frac{p_{e,i}}{(1 + \alpha_{i,j}) \cdot T_{i,j}}, \quad i \in (-N_1; -4) \cup (4; N_1), \quad j = \overline{0, N_2}. \tag{3.3.6}$$

Таким образом, все газодинамические функции $u_{i,j}$, $v_{i,j}$, $\alpha_{i,j}$, $\rho_{i,j}$, $T_{i,j}$ в пристенном газодинамическом течении определены с использованием метода МРЭП вдоль поперечных координатных линий, нормальных к поверхности затупленного тела.

Продольное направление

В соответствии с методом МРЭП после определения газодинамических функций $u_{i,j}$, $v_{i,j}$, $\alpha_{i,j}$, $\rho_{i,j}$, $T_{i,j}$ в пристенном течении вдоль поперечных координатных линий необходимо определить те же газодинамические функции в продольном направлении, аппроксимируя уравнения (3.1.1)–(3.1.7) в узлах сетки (3.3.1) с перебором узлов $|i| \leq N_1$, $j = \overline{0, N_2}$. В общем виде конечно-разностные аппроксимации этих уравнений аналогичны конечно-разностным аппроксимациям (3.3.2)–(3.3.6) с той лишь разницей, что значения нелинейных коэффициентов и значения сеточных функций в узлах шаблона рисунка 2.3а, где они не являются искомыми, определяются по значениям сеточных функций, найденных из решения уравнений вдоль поперечных координатных линий.

Уравнение сохранения импульса (3.1.1):

$$\begin{aligned}
 & (\bar{\rho}u)_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_1} + (\bar{\rho}v)_{i,j} \frac{\bar{u}_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_2} = -\frac{dp_{e,i}}{dx} + \\
 & + \left(\bar{\mu}_{i,j+1/2} \frac{\bar{u}_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_2^2} - \bar{\mu}_{i,j-1/2} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_2^2} \right) + \left(\bar{\mu}_{i,j+1} \frac{\bar{v}_{i+1,j+1} - \bar{v}_{i-1,j+1}}{4h_1h_2} - \right. \\
 & \left. - \bar{\mu}_{i,j-1} \frac{v_{i+1,j-1} - v_{i-1,j-1}}{4h_1h_2} \right) + \frac{4}{3} \left(\bar{\mu}_{i+1/2,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_1^2} - \bar{\mu}_{i-1/2,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_1^2} \right) - \\
 & - \frac{2}{3} \left(\bar{\mu}_{i+1,j} \frac{\bar{v}_{i+1,j+1} - v_{i+1,j-1}}{4h_1h_2} - \bar{\mu}_{i-1,j} \frac{v_{i-1,j+1} - v_{i-1,j-1}}{4h_1h_2} \right) + O((h_1 + h_2)^2), \\
 & |i| \leq N_1, \quad j = \overline{0, N_2};
 \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Уравнение неразрывности (3.1.3) относительно $v_{i,j}$:

$$\frac{(\bar{\rho}u)_{i+1,j} - (\bar{\rho}u)_{i-1,j}}{2h_1} + \frac{3 \cdot \bar{\rho}_{i,j} v_{i,j} - 4 \rho_{i,j-1} v_{i,j-1} \left(\frac{r_{j-1}}{r_j} \right)^v + \bar{\rho}_{i,j-2} v_{i,j-2} \left(\frac{r_{j-2}}{r_j} \right)^v}{2h_2} = O(|h_1|^2),$$

$$|i| \leq N_1, \quad j = \overline{2, N_2}. \quad (3.3.8)$$

где $v_{i,j-1}$, $v_{i,j-2}$ уже известны.

При $j=1$ второе слагаемое имеет вид $(\bar{\rho}_{i,1}v_{i,1} - 0)/h_2$.

Уравнение диффузии (3.1.4):

$$\begin{aligned} & (\bar{\rho}u)_{i,j} \frac{\alpha_{i+1,j} - \alpha_{i-1,j}}{2h_1} + (\bar{\rho}v)_{i,j} \frac{\bar{\alpha}_{i,j+1} - \alpha_{i,j-1}}{2h_2} = \\ & = \left((\bar{\rho}\bar{D}_{12})_{i,j+1/2} \frac{\bar{\alpha}_{i,j+1} - \alpha_{i,j}}{h_2^2} - (\bar{\rho}\bar{D}_{12})_{i,j-1/2} \frac{\alpha_{i,j} - \alpha_{i,j-1}}{h_2^2} \right) + \\ & + \left((\rho D_{12})_{i+1/2,j} \frac{\alpha_{i+1,j} - \alpha_{i,j}}{h_1^2} - (\bar{\rho}\bar{D}_{12})_{i-1/2,j} \frac{\alpha_{i,j} - \alpha_{i,j-1}}{h_1^2} - (\bar{\rho}\bar{D}_{12})_{i-1/2,j} \frac{\alpha_{i,j} - \alpha_{i,j-1}}{h_1^2} \right) + \\ & + O(|h|^2), \quad |i| \leq N_1, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Уравнение энергии (3.1.7):

$$\begin{aligned} & (\bar{\rho}u\bar{c})_{i,j} \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2h_1} + (\bar{\rho}v\bar{c})_{i,j} \frac{\bar{T}_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2h_2} = \left(\bar{\lambda}_{i+1/2,j} \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{h_1^2} - \bar{\lambda}_{i-1/2,j} \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{h_1^2} \right) + \\ & + \left(\bar{\lambda}_{i,j+1/2} \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{h_2^2} - \lambda_{i,j-1/2} \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{h_2^2} \right) + u_{i,j} \frac{p_{e,i+1} - p_{e,i-1}}{2h_1} + \bar{\mu}_{i,j} \Phi_{i,j} + \\ & + \left((\bar{\rho}\bar{D}_{12}\bar{h}_A)_{i,j+1/2} \frac{\alpha_{i,j+1} - \alpha_{i,j}}{h_2^2} - (\bar{\rho}\bar{D}_{12}\bar{h}_A)_{i,j-1/2} \frac{\alpha_{i,j} - \alpha_{i,j-1}}{h_2^2} \right) + \\ & + \left((\bar{\rho}\bar{D}_{12}\bar{h}_A)_{i+1/2,j} \frac{\alpha_{i+1,j} - \alpha_{i,j}}{h_1^2} - (\bar{\rho}\bar{D}_{12}\bar{h}_A)_{i-1/2,j} \frac{\alpha_{i,j} - \alpha_{i-1,j}}{h_1^2} \right) + O(|h|^2), \\ & |i| \leq N_1 - 1, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Уравнение состояния (3.1.5):

$$\rho_{i,j} = \frac{p_{e,i}}{(1 + \alpha_{i,j})T_{i,j}}, \quad |i| \leq N_1, \quad j = \overline{1, N_2}. \quad (3.3.11)$$

Коэффициенты в СЛАУ (3.3.7)–(3.3.11) вычисляются так же, как в системах (3.3.2)–(3.3.6).

Для апробации метода МРЭП численного решения задачи о пристенном течении проведено сравнение с результатами, полученными в работах [15,178] при численном решении задачи обтекания затупленного конуса на изотермической стенке.

Характеристики набегающего потока: $M_\infty = 25$, $p_\infty = 53,85$ Па, $c_p = 1,06 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), $T_\infty = 265,86$ К, геометрические характеристики: $R_0 = 0,0381$ м, $\theta_0 = 6^\circ$. Температура границы тела $T_w = 1260$ К. Поверхность тела считалась некаталитической, с коэффициентом черноты $\varepsilon = 1$.

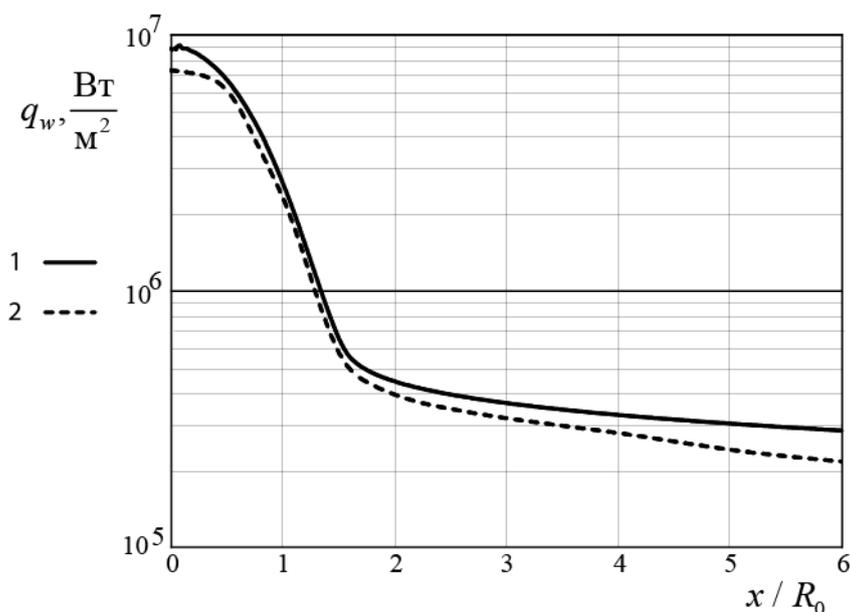


Рис. 3.2. Распределение теплового потока на изотермической границе:

1 – МРЭП, 2 – [15,178].

На рис. 3.2 представлено распределение функции плотности теплового потока на изотермической границе затупленного тела, полученного с помощью метода МРЭП (кривая 1) в сравнении с результатами из работ [15, 178] (кривая 2). Из рисунка видно, что полученный тепловой поток хорошо согласуется с результатами работ [15, 178], при этом тепловой поток по методу МРЭП несколько выше за счет неполного учета всех физико-химических реакций.

3.4. Теплоперенос в анизотропных областях с разрывными характеристиками (сопряженный теплоперенос между гомогенными средами)

В данном параграфе разработана математическая модель теплопереноса в многослойных анизотропных областях, при этом теплопроводность в каждом слое задается тензором теплопроводности второго ранга, компоненты которого зависят от температуры. На границах сопряжения между гомогенными средами разрываются не только компоненты тензора теплопроводности, но и углы ориентации главных осей. *Показано, что на границах сопряжения с идеальными контактами непрерывны вместе с температурой и проекция вектора плотности теплового потока на направление нормали, при этом касательная составляющая вектора, может претерпевать разрыв, то есть вектор плотности тепловых потоков разрывается при переходе границы разрыва теплофизических характеристик. Этот вывод необходим для корректной постановки краевых условий на границах сопряжения.* Получено выражение для проекции вектора плотности теплового потока на направление нормали для произвольной криволинейной границы анизотропной области, которое пригодно для использования в численных методах расщепления, например, для метода расщепления с экстраполяцией по времени, МРЭВ, который описан и обоснован в главе 2

3.4.1. Моделирование сопряженного теплопереноса в многослойных анизотропных областях

Математическое моделирование задач сопряженного теплопереноса в многослойных анизотропных областях, а также на внутренних и наружных границах, которые могут соприкасаться с различными высокотемпературными средами, вызывает существенные трудности, основными среди которых являются следующие:

- необходимость формулировки подобных задач только в многомерной постановке;
- теплопроводность в анизотропных телах описывается тензорами второго ранга, а не скалярными величинами как в изотропных телах;
- необходимость определения на границе анизотропного тела нормальных составляющих тензора теплопроводности.

В анизотропном пространстве вектор плотности теплового потока направлен под некоторым углом к изотерме [122], а не по нормали как в изотропных телах. Следовательно, на изотермах существуют нормальные и касательные составляющие вектора плотности теплового потока.

Для упрощения выкладок будем рассматривать полое затупленное тело (рис. 1.1), у которого толщина $R_0 - R_1 \ll R_0$, и у которого одна горизонтальная граница разрыва теплофизических характеристик, что позволяет ввести декартовы координаты (рис. 3.3). При этом вся методология численного решения задачи (3.1.20)–(3.1.26), приведенная в параграфах 2.3, 2.4 по методу МРЭВ, сохраняется.

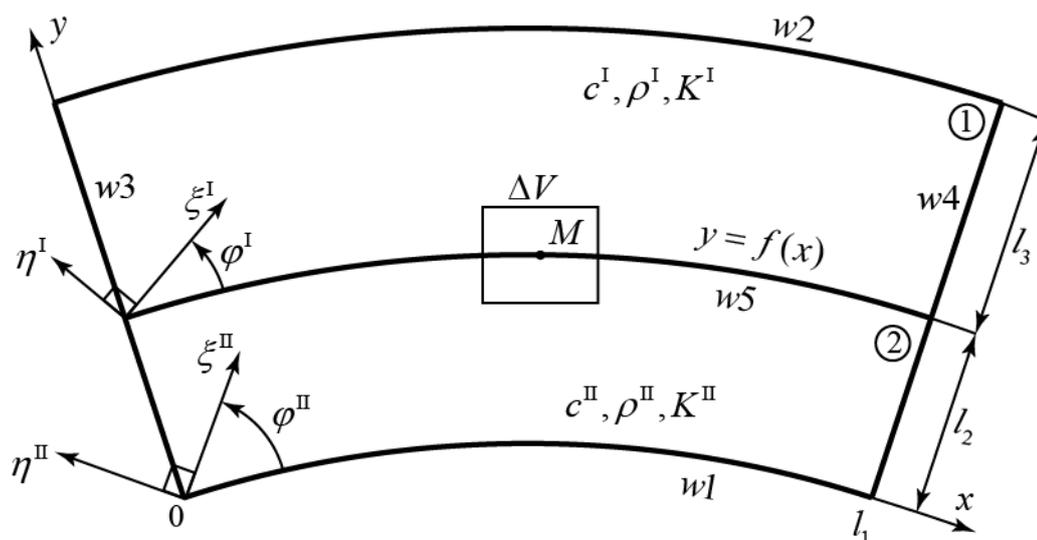


Рис. 3.3. Граница сопряжения w_5 между двумя анизотропными средами с различными теплофизическими характеристиками.

Таким образом, двухслойная криволинейная пластина, фрагмент которой представлен на рис. 3.3, имеет границу w_5 разрыва анизотропных теплофизических характеристик (ТФХ) (границу сопряжения между двумя гомогенными средами 1 и 2, имеющими теплоемкость, плотность и тензор теплопроводности c^I, ρ^I, K^I и $c^{II}, \rho^{II}, K^{II}$ соответственно).

Возьмем произвольную точку на границе w_5 сопряжения слоев с различными теплофизическими характеристиками (ТФХ) и поместим ее в элементарный объем ΔV . Тепловой поток через замкнутую поверхность, ограничивающую элементарный объем ΔV , в соответствии с первым началом термодинамики, расходуется на повышение температуры тела внутри объема с течением времени. При предельном переходе $\Delta V \rightarrow 0$ получим выражение

$$(K^I \text{grad} T^I, \mathbf{n}^0) = (K^{II} \text{grad} T^{II}, \mathbf{n}^0) \quad (3.4.1)$$

где \mathbf{n}^0 – единичный вектор нормали к границе разрыва теплофизических характеристик.

Пусть граница разрыва ТФХ описывается функцией $y = f(x)$, тогда раскрывая в (3.4.1) скалярные произведения, получим

$$\begin{aligned} & (\lambda_{11}^I f'(x) + \lambda_{21}^I) \frac{\partial T^I}{\partial x} + (\lambda_{12}^I f'(x) + \lambda_{22}^I) \frac{\partial T^I}{\partial y} = \\ & = (\lambda_{11}^{II} f'(x) + \lambda_{21}^{II}) \frac{\partial T^{II}}{\partial x} + (\lambda_{12}^{II} f'(x) + \lambda_{22}^{II}) \frac{\partial T^{II}}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

где $\lambda_{11}^I, \lambda_{12}^I = \lambda_{21}^I, \lambda_{22}^I$ и $\lambda_{11}^{II}, \lambda_{12}^{II} = \lambda_{21}^{II}, \lambda_{22}^{II}$ – компоненты тензоров теплопроводности K^I и K^{II} соответственно, $f'(x) = \text{tg} \alpha$, где α – угол между вектором \mathbf{n}^0 и локальной осью Oy .

Пусть λ_n – теплопроводность в нормальном направлении к криволинейной границе. Тогда из равенств (3.4.1), (3.4.2) следует

$$\lambda_n^s \frac{\partial T^s}{\partial n} = \left\{ \left[\lambda_{11}^s f'(x) + \lambda_{21}^s \right] \frac{\partial T^s}{\partial x} + \left[\lambda_{12}^s f'(x) + \lambda_{22}^s \right] \frac{\partial T^s}{\partial y} \right\} \cos \alpha, \quad s = I, 2. \quad (3.4.3)$$

Разделив это равенство на $\partial T^s / \partial n$, и учитывая, что $\frac{\partial T^s}{\partial x} / \frac{\partial T^s}{\partial n} = \sin \alpha$,

$\frac{\partial T^s}{\partial y} / \frac{\partial T^s}{\partial n} = \cos \alpha$, получим равенство

$$\lambda_n^s = [\lambda_{11}^s f'^2(x) + 2\lambda_{12}^s f'(x) + \lambda_{22}^s] [1 + f'^2(x)]^{-1}, \quad s = 1, 2,$$

которое учитывает компоненты тензоров теплопроводности, и поведение границы $y = f(x)$. Для прямоугольной пластины $y = \text{const} (y'(x) = \text{tg} \alpha = 0)$ $\lambda_n^s = \lambda_{22}^s$, $s = 1, 2$, тогда нормальная составляющая плотности теплового потока примет вид

$$\lambda_n^s \frac{\partial T^s}{\partial n} = \lambda_{21}^s \frac{\partial T^s}{\partial x} + \lambda_{22}^s \frac{\partial T^s}{\partial y}, \quad s = 1, 2,$$

то есть содержит все компоненты градиента температур, а не только один компонент, как в изотропной пластине.

Соотношения (3.4.1) и (3.4.2) определяют непрерывность компонентов вектора плотности теплового потока в нормальном направлении на границе разрыва теплофизических характеристик. Аналогичный анализ показывает, что касательные компоненты векторов плотности тепловых потоков, могут претерпевать разрывы на границе сопряжения различных сред, при этом оставаясь непрерывными со стороны сред 1 и 2. Таким образом,

$$(K^I \text{grad} T^I, \boldsymbol{\tau}^0) \neq (K^{II} \text{grad} T^{II}, \boldsymbol{\tau}^0),$$

где $\boldsymbol{\tau}^0$ – единичный касательный вектор на границе разрыва теплофизических характеристик.

Казалось бы, возникает парадоксальный вывод о том, что на границе разрыва теплофизических характеристик анизотропного тела, полный вектор плотности теплового потока претерпевает разрыв первого рода, что противоречит первому началу термодинамики. При этом, если рассмотреть

тепловой поток, подводимый ко всей границе разрыва ТФХ и отводимый от нее, то непрерывность теплового потока обеспечена.

Для двумерной области в виде двухслойного криволинейного тела, представленного на рис. 3.3, с границей w_5 разрыва ТФХ рассматривается следующая задача:

$$\begin{aligned} c^{\text{II}}(T)\rho^{\text{II}}(T)\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_{11}^{\text{II}}(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_{12}^{\text{II}}(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_{22}^{\text{II}}(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right), \quad 0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2, \quad t > 0; \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

$$\begin{aligned} c^{\text{I}}(T)\rho^{\text{I}}(T)\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_{11}^{\text{I}}(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_{12}^{\text{I}}(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_{22}^{\text{I}}(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right), \quad 0 < x < l_1, \quad l_2 < y < l_2 + l_3, \quad t > 0; \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

$$\begin{aligned} -\left(\lambda_{12}^{\text{II}}(T)\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22}^{\text{II}}(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right)\Bigg|_{w_1} + \alpha_1(x,t)(T_{e1}(x,t) - T|_{w_1}) &= \\ = f_1(x,t), \quad 0 < x < l_1, \quad y = 0, \quad t > 0; \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

$$\begin{aligned} \left(\lambda_{12}^{\text{I}}(T)\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22}^{\text{I}}(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right)\Bigg|_{w_2} + \alpha_2(x,t)(T_{e2}(x,t) - T|_{w_2}) &= \\ = f_2(x,t), \quad 0 < x < l_1, \quad y = l_2 + l_3, \quad t > 0; \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

$$\begin{aligned} -\left(\lambda_{11}^{\text{II}}(T)\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{12}^{\text{II}}(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right)\Bigg|_{w_3} + \alpha_3(y,t)(T_{e3}(y,t) - T|_{w_3}) &= \\ = f_3(y,t), \quad x = 0, \quad 0 < y < l_2, \quad t > 0; \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

$$\begin{aligned} -\left(\lambda_{11}^{\text{I}}(T)\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{12}^{\text{I}}(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right)\Bigg|_{w_3} + \alpha_3(y,t)(T_{e3}(y,t) - T|_{w_3}) &= \\ = f_3(y,t), \quad x = 0, \quad l_2 < y < l_2 + l_3, \quad t > 0; \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

$$\begin{aligned} \left(\lambda_{11}^{\text{II}}(T)\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{12}^{\text{II}}(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right)\Bigg|_{w_4} + \alpha_4(y,t)(T_{e4}(y,t) - T|_{w_4}) &= \\ = f_3(y,t), \quad x = l_1, \quad 0 < y < l_2, \quad t > 0; \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

$$\left(\lambda_{11}^I(T) \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{12}^I(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{w4} + \alpha_4(y,t) (T_{e4}(y,t) - T|_{w4}) =$$

$$= f_4(y,t), \quad x = l_1, \quad l_2 < y < l_2 + l_3, \quad t > 0; \quad (3.4.11)$$

$$\left(\lambda_{12}^{II}(T) \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22}^{II}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=l_2-0} = \left(\lambda_{12}^I(T) \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22}^I(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=l_2+0},$$

$$0 < x < l_1, \quad y = l_2, \quad t > 0; \quad (3.4.12)$$

$$T|_{y=l_2-0} = T|_{y=l_2+0}, \quad 0 < x < l_1, \quad y = l_2, \quad t > 0; \quad (3.4.13)$$

$$T(x, y, 0) = T_0(x, y), \quad 0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2 + l_3, \quad t = 0. \quad (3.4.14)$$

Компоненты тензоров теплопроводности K^I, K^{II} определяются по следующим формулам [122]:

$$\lambda_{11}^s = \lambda_{\xi^s}^s \cos^2 \varphi^s + \lambda_{\eta^s}^s \sin^2 \varphi^s, \quad \lambda_{12}^s = \lambda_{21}^s = (\lambda_{\xi^s}^s - \lambda_{\eta^s}^s) \sin \varphi^s \cos \varphi^s,$$

$$\lambda_{22}^s = \lambda_{\xi^s}^s \sin^2 \varphi^s + \lambda_{\eta^s}^s \cos^2 \varphi^s, \quad s = 1, 2, \quad (3.4.15)$$

где $\lambda_{\xi^s}^s, \lambda_{\eta^s}^s$ – главные компоненты тензоров K^I, K^{II} , а φ^s – углы ориентации главных осей $O\xi^I, O\xi^{II}$ относительно оси Ox . Компоненты (3.4.15) характеризуют и различную ориентацию главных осей тензоров теплопроводности на границах разрыва ТФХ.

Из краевых условий (3.4.4)–(3.4.12) видно, что кондуктивные тепловые потоки на границах включают все компоненты градиента температур, несмотря на то, что границы являются плоскими. Из соотношений (3.4.12) и (3.4.15) следует, что если даже главные компоненты тензоров K^I, K^{II} равны, то есть $\lambda_{\xi^I}^I = \lambda_{\xi^{II}}^{II}$ и $\lambda_{\eta^I}^I = \lambda_{\eta^{II}}^{II}$, а углы ориентации главных осей φ^I и φ^{II} не совпадают, то и в этом случае тензоры K^I, K^{II} а, следовательно, и касательные составляющие плотности тепловых потоков, терпят разрывы на границе $w5$.

3.4.2. Схема метода МРЭВ численного решения задач анизотропной теплопроводности в многослойных телах

На сетке

$$\omega_{h_1, h_2^1, h_2^1, \tau} = \left\{ x_i = ih_1, i = \overline{0, I}; y_j = jh_2^1, j = \overline{0, J_1}; y_j = jh_2^1, \right. \\ \left. j = \overline{J_1 + 1, J_2}; t^n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots \right\} \quad (3.4.16)$$

задача (3.4.4)–(3.4.15) численно решается методом расщепления с экстраполяцией по времени (МРЭВ), который подробно рассмотрен в главе 2 (шаблон схемы МРЭВ представлен на рис. 2.4). Для граничных узлов. С целью сохранения второго порядка применяется интегро-интерполяционный метод [121].

На сетке (3.4.16) для регулярных узлов схема метода МРЭВ примет вид

$$c\rho \frac{T^{n+1/2} - T^n}{\tau/2} = \Lambda_{11} T^{n+1/2} + 2\Lambda_{12} \tilde{T}^{n+1/2} + \Lambda_{22} \tilde{T}^{n+1/2}, \quad (3.4.17)$$

где

$$\Lambda_{11} T^{n+1/2} = \frac{\lambda_{11}}{h_1^2} (T_{i+1,j}^{n+1/2} - 2T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i-1,j}^{n+1/2}), \\ \Lambda_{12} \tilde{T}^{n+1/2} = \frac{\lambda_{12}}{4h_1 h_2} (\tilde{T}_{i+1,j+1}^{n+1/2} - T_{i+1,j-1}^{n+1/2} - \tilde{T}_{i-1,j+1}^{n+1/2} + T_{i-1,j-1}^{n+1/2}), \\ \Lambda_{22} \tilde{T}^{n+1/2} = \frac{\lambda_{22}}{h_2^2} (\tilde{T}_{i,j+1}^{n+1/2} - 2T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i,j-1}^{n+1/2}), \\ \tilde{T}_{m,j+1}^{n+1/2} = 2T_{m,j+1}^n - T_{m,j+1}^{n-1/2}, \quad m = i-1, i, i+1;$$

$$\frac{T^{n+1} - T^{n+1/2}}{\tau/2} = \Lambda_{11} \tilde{T}^{n+1} + 2\Lambda_{12} \tilde{T}^{n+1} + \Lambda_{22} T^{n+1}, \quad (3.4.18)$$

где

$$\Lambda_{11} \tilde{T}^{n+1} = \frac{\lambda_{11}}{h_1^2} (\tilde{T}_{i+1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1}), \\ \Lambda_{12} \tilde{T}^{n+1} = \frac{\lambda_{12}}{4h_1 h_2} (\tilde{T}_{i+1,j+1}^{n+1} - \tilde{T}_{i+1,j-1}^{n+1} - T_{i-1,j+1}^{n+1} + T_{i-1,j-1}^{n+1}),$$

$$\Lambda_{22} T^{n+1} = \frac{\lambda_{22}}{h_2^2} (T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}),$$

$$\tilde{T}_{i+1,m}^{n+1} = 2T_{i+1,m}^{n+1/2} - T_{i+1,m}^n, \quad m = j-1, j, j+1.$$

Схема (3.4.17), (3.4.18) полностью аппроксимирует дифференциальные уравнения (3.4.4), (3.4.5) в случае постоянных компонентов тензора теплопроводности, с порядком $O(\tau + |h|^2 + \tau(h_1 + h_2))$, где $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, и является абсолютно устойчивой (см. параграфы 2.3, 2.4). В выражениях (3.4.17), (3.4.18) $h_2 = \{h_2^I, h_2^{II}\}$, $t^n = n\tau$, $t^{n+1/2} = t^n + \tau/2$, $t^{n+1} = t^n + \tau$; $y_{i,j}^n$, $y_{i,j}^{n+1/2}$, $y_{i,j}^{n+1}$ – сеточные функции на соответствующих временных слоях t^n , $t^{n+1/2}$, t^{n+1} . Схема (3.4.17), (3.4.18) является экономичной, так как реализуется только скалярными прогонками в направлении координатных осей Ox и Oy .

Для сохранения порядка аппроксимации, имеющего место для регулярных узлов, рассмотрим аппроксимацию граничных условий, содержащих производные, с помощью *интегро-интерполяционного* метода. Рассмотрим этот метод для узлов на границе сопряжения слоев (подход для остальных нерегулярных узлов – аналогичен).

Для этого, уравнения (3.4.4), (3.4.5) запишем в виде

$$c^s(T) \rho^s(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial q_x^s}{\partial x} + \frac{\partial q_y^s}{\partial y}, \quad s = I, 2, \quad (3.4.19)$$

где q_x^s , q_y^s – компоненты вектора плотности теплового потока имеют вид

$$q_x^s = \lambda_{11}^s(T) \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{12}^s(T) \frac{\partial T}{\partial y}, \quad s = I, 2, \quad (3.4.20)$$

$$q_y^s = \lambda_{21}^s(T) \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22}^s(T) \frac{\partial T}{\partial y}, \quad s = I, 2, \quad (3.4.21)$$

в результате чего краевое условие сопряжения (3.4.12) на границе разрыва ТФХ записывается в форме

$$q_y^I \Big|_{y=l_2-0} = q_y^{II} \Big|_{y=l_2+0}. \quad (3.4.22)$$

Возьмем произвольный узел $(x_i, y_j = l_2)$ на границе w_5 и проинтегрируем выражения (3.4.19) на отрезке $x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ по переменной x , а после проинтегрируем по переменной y , причем в первой области на отрезке $y \in [y_{j-1/2}, y_j]$, а во второй – на отрезке $y \in [y_j, y_{j+1/2}]$, а затем применим квадратурные формулы прямоугольников, имеющих второй порядок точности на шагах h_1, h_2 , получим

$$\begin{aligned} c^s(T) \rho^s(T) \frac{\partial T}{\partial t} h_1 \frac{h_2^s}{2} &= (q_x^s)_{i+1/2, j} \frac{h_2^s}{2} - (q_x^s)_{i-1/2, j} \frac{h_2^s}{2} + \\ &+ (q_y^s)_{i, j-\frac{1-s}{2}} h_1 - (q_y^s)_{i, j-\frac{2-s}{2}} h_1 + O(h_1^2 + h_2^2), \quad s=1, 2, \quad i = \overline{0, I}. \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

Складывая уравнения (3.4.23) для $s=1$ и $s=2$, и используя равенства (3.4.19), получим выражения, которые аппроксимируют исходную задачу в узлах на границе сопряжения w_5 , через компоненты вектора плотности теплового потока q_x^s, q_y^s со вторым порядком.

$$\begin{aligned} \left[c^I(T) \rho^I(T) h_2^I + c^{II}(T) \rho^{II}(T) h_2^{II} \right] \frac{h_1}{2} \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{i, j} &= \\ &= \left[(q_x^{II})_{i+1/2, j} - (q_x^{II})_{i-1/2, j} \right] \frac{h_2^{II}}{2} + \left[(q_y^I)_{i, j+1/2} - (q_y^{II})_{i, j-1/2} \right] h_1 + \\ &+ \left[(q_x^I)_{i+1/2, j} - (q_x^I)_{i-1/2, j} \right] \frac{h_2^I}{2} + O(h_1^2 + (h_2^I)^2 + (h_2^{II})^2), \quad i = \overline{0, I}. \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

В равенстве (3.4.24), в силу (3.4.22), слагаемые $(q_y^I)_{i, j} h_1$ и $(q_y^{II})_{i, j} h_1$ сокращены, т.е. условия сопряжения выполнены автоматически.

Применим схему (3.4.17) метода МРЭВ, аппроксимируя производные в выражениях (3.4.24) с использованием (3.4.20), (3.4.21) в направлении оси x на $n+1/2$ -м временном полуслое в узлах $y = l_2, x = x_i, i = \overline{1, I-1}$, получим:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{T}_{i, j}^{n+1/2} - T_{i, j}^n}{\tau/2}; \quad (3.4.25)$$

$$\begin{aligned}
(q_x^s)_{i+1/2,j} &= \left(\lambda_{11}^s(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+1/2,j} + \left(\lambda_{12}^s(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{i+1/2,j} \approx \\
&\approx \left(\tilde{\lambda}_{11}^s \right)_{i+1/2,j}^{n+1/2} \frac{\mathbf{T}_{i+1,j}^{n+1/2} - \mathbf{T}_{i,j}^{n+1/2}}{h_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\tilde{\lambda}_{12}^s \right)_{i+1/2,j}^{n+1/2} + \left(\tilde{\lambda}_{12}^s \right)_{i+1/2,j+2s-3}^{n+1/2} \right] \times \\
&\times \frac{1}{h_2^s} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{T}_{i+1,j}^{n+1/2} + \mathbf{T}_{i,j}^{n+1/2}) - \frac{1}{2} (\mathbf{T}_{i,j-1}^{n+1/2} + \mathbf{T}_{i+1,j-1}^{n+1/2}) \right], \quad s = \text{I}, 2; \tag{3.4.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(q_x^s)_{i-1/2,j} &= \left(\lambda_{11}^s(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-1/2,j} + \left(\lambda_{12}^s(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{i-1/2,j} \approx \\
&\approx \left(\tilde{\lambda}_{11}^s \right)_{i-1/2,j}^{n+1/2} \frac{\mathbf{T}_{i,j}^{n+1/2} - \mathbf{T}_{i-1,j}^{n+1/2}}{h_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\tilde{\lambda}_{12}^s \right)_{i-1/2,j+2s-3}^{n+1/2} + \left(\tilde{\lambda}_{12}^s \right)_{i-1/2,j}^{n+1/2} \right] \times \\
&\times \frac{1}{h_2^s} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{T}_{i-1,j}^{n+1/2} + \mathbf{T}_{i,j}^{n+1/2}) - \frac{1}{2} (\mathbf{T}_{i-1,j-1}^{n+1/2} + \mathbf{T}_{i,j-1}^{n+1/2}) \right], \quad s = \text{I}, 2; \tag{3.4.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(q_y^{\text{I}})_{i,j-1/2} &= \left(\lambda_{12}^{\text{I}}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i,j-1/2} + \left(\lambda_{22}^{\text{I}}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{i,j-1/2} \approx \\
&\approx \frac{1}{2} \left[\left(\tilde{\lambda}_{12}^{\text{I}} \right)_{i+1,j-1/2}^{n+1/2} + \left(\tilde{\lambda}_{12}^{\text{I}} \right)_{i-1,j-1/2}^{n+1/2} \right] \frac{1}{2h_1} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{T}_{i+1,j}^{n+1/2} + \mathbf{T}_{i+1,j-1}^{n+1/2}) - \right. \\
&\left. - \frac{1}{2} (\mathbf{T}_{i-1,j}^{n+1/2} + \mathbf{T}_{i-1,j-1}^{n+1/2}) \right] + \left(\tilde{\lambda}_{22}^{\text{I}} \right)_{i,j-1/2}^{n+1/2} \frac{\mathbf{T}_{i,j}^{n+1/2} - \mathbf{T}_{i,j-1}^{n+1/2}}{h_2^{\text{I}}}; \tag{3.4.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(q_y^{\text{II}})_{i,j+1/2} &= \left(\lambda_{12}^{\text{II}}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i,j+1/2} + \left(\lambda_{22}^{\text{II}}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{i,j+1/2} \approx \\
&\approx \frac{1}{2} \left[\left(\tilde{\lambda}_{12}^{\text{II}} \right)_{i+1,j+1/2}^{n+1/2} + \left(\tilde{\lambda}_{12}^{\text{II}} \right)_{i-1,j+1/2}^{n+1/2} \right] \frac{1}{2h_1} \left[\frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{T}}_{i+1,j+1}^{n+1/2} + \mathbf{T}_{i+1,j}^{n+1/2}) - \right. \\
&\left. - \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{T}}_{i-1,j+1}^{n+1/2} + \mathbf{T}_{i-1,j}^{n+1/2}) \right] + \left(\tilde{\lambda}_{22}^{\text{II}} \right)_{i,j+1/2}^{n+1/2} \frac{\tilde{\mathbf{T}}_{i,j+1}^{n+1/2} - \mathbf{T}_{i,j}^{n+1/2}}{h_2^{\text{II}}}; \tag{3.4.29}
\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{T}}_{m,j+1}^{n+1/2} = 2\mathbf{T}_{m,j+1}^n - \mathbf{T}_{m,j+1}^{n-1/2}, \quad m = i-1, i, i+1. \tag{3.4.30}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{\lambda}_{11}^s \right)_{i\pm 1/2,j}^{n+1/2} &= \frac{1}{2} \left[\lambda_{11}^s(\tilde{\mathbf{T}}_{i\pm 1,j}^{n+1/2}) + \lambda_{11}^s(\tilde{\mathbf{T}}_{i,j}^{n+1/2}) \right], \quad \left(\tilde{\lambda}_{22}^s \right)_{i,j\mp 1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left[\lambda_{22}^s(\tilde{\mathbf{T}}_{i,j\mp 1}^{n+1/2}) + \lambda_{22}^s(\tilde{\mathbf{T}}_{i,j}^{n+1/2}) \right], \\
\left(\tilde{\lambda}_{12}^s \right)_{i\pm 1/2,j}^{n+1/2} &= \lambda_{12}^s \left(\frac{\tilde{\mathbf{T}}_{i\pm 1,j}^{n+1/2} + \tilde{\mathbf{T}}_{i,j}^{n+1/2}}{2} \right), \quad \left(\tilde{\lambda}_{12}^s \right)_{i\pm 1/2,j+2s-3}^{n+1/2} = \lambda_{12}^s \left(\frac{\tilde{\mathbf{T}}_{i,j+2s-3}^{n+1/2} + \tilde{\mathbf{T}}_{i\pm 1,j+2s-3}^{n+1/2}}{2} \right),
\end{aligned}$$

$$\left(\tilde{\lambda}_{12}^s\right)_{i\pm 1, j-1/2}^{n+1/2} = \lambda_{12}^s \left(\frac{\tilde{T}_{i\pm 1, j-1}^{n+1/2} + \tilde{T}_{i\pm 1, j}^{n+1/2}}{2} \right), \quad \left(\tilde{\lambda}_{12}^s\right)_{i\pm 1, j+1/2}^{n+1/2} = \lambda_{12}^s \left(\frac{\tilde{T}_{i\pm 1, j+1}^{n+1/2} + \tilde{T}_{i\pm 1, j}^{n+1/2}}{2} \right).$$

После подстановки выражений (3.4.25)–(3.4.30) в (3.4.24) получим СЛАУ с трехдиагональной матрицей относительно $T_{i-1, j}^{n+1/2}$, $T_{i, j}^{n+1/2}$, $T_{i+1, j}^{n+1/2}$, $i = \overline{1, I-1}$, имеющей порядок аппроксимации $O\left(h_1^2 + (h_2^I)^2 + (h_2^{II})^2\right)$. Для замыкания системы, в узлах при $i=0$ и $i=I$ применяется отдельно процедура интегро-интерполяционного метода с использованием граничных условий (3.4.8)–(3.4.11).

После решения СЛАУ методом скалярных прогонок, получим распределение температур $T_{i, j}^{n+1/2}$ на границе $y=l_2$. Аналогично получаются системы алгебраических уравнений с использованием подсхемы (3.4.18) относительно $T_{i, j}^{n+1}$.

С помощью описанных выше численных методов разработан программный комплекс, который реализует математическую модель (3.4.4)–(3.4.15). Программный комплекс позволяет производить расчет температурных полей и компонентов вектора плотности теплового потока, в том числе и на границе разрыва ТФХ.

На рис. 3.4 показаны температурные поля для момента времени $t = 200$ с в двухслойной анизотропной пластине с размерами $l_1 = 0,05$ м, $l_2 = 0,02$ м, $l_3 = 0,02$ м.

Главные компоненты и углы ориентации главных осей тензоров теплопроводности K^I и K^{II} принимали следующие значения:

- а) $\lambda_{\xi}^I = \lambda_{\xi}^{II} = 100$ Вт/(м·К), $\lambda_{\eta}^I = \lambda_{\eta}^{II} = 10$ Вт/(м·К), $\varphi^I = -45^\circ$, $\varphi^{II} = 45^\circ$;
- б) $\lambda_{\xi}^I = \lambda_{\eta}^I = 30$ Вт/(м·К), $\lambda_{\xi}^{II} = 100$ Вт/(м·К), $\lambda_{\eta}^{II} = 10$ Вт/(м·К) $\varphi^I = 0^\circ$, $\varphi^{II} = 45^\circ$;
- в) $\lambda_{\xi}^I = \lambda_{\eta}^{II} = 10$ Вт/(м·К), $\lambda_{\eta}^I = \lambda_{\xi}^{II} = 100$ Вт/(м·К), $\varphi^I = 0^\circ$, $\varphi^{II} = 45^\circ$;
- г) $\lambda_{\xi}^I = \lambda_{\eta}^{II} = 10$ Вт/(м·К), $\lambda_{\eta}^I = \lambda_{\xi}^{II} = 100$ Вт/(м·К), $\varphi^I = \varphi^{II} = 0^\circ$.

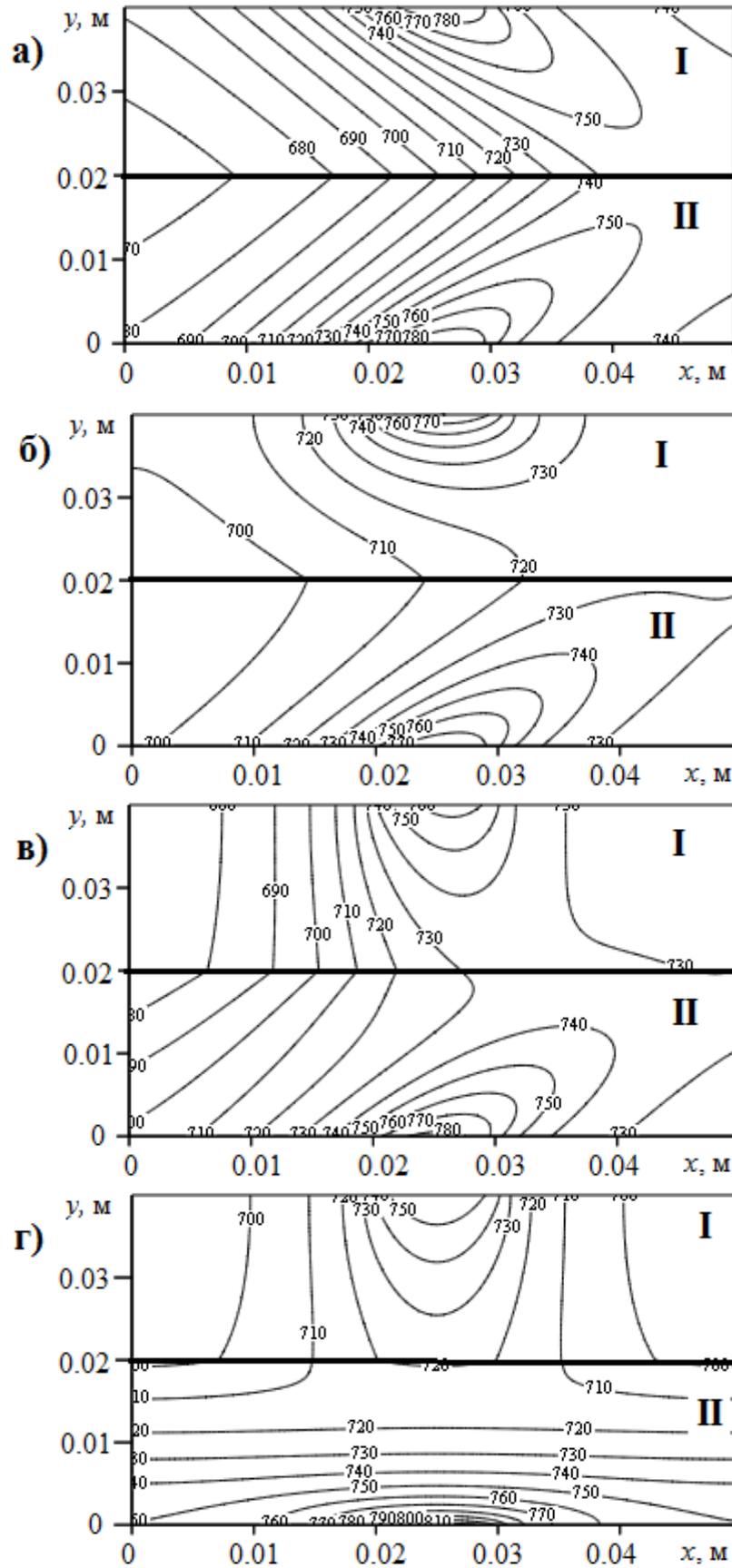


Рис. 3.4. Распределение температуры в двухслойном анизотропном теле с разрывными характеристиками переноса тепла.

Ненулевые тепловые потоки на наружных границах задавались следующим образом: $f_1(x) = f_2(x) = 3 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2$, на отрезке $x \in [0.02; 0.03]$ и нулевые вне этого отрезка. Другие входные данные имели следующие значения: $c^I = c^{II} = 1000 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$; $\rho^I = \rho^{II} = 1500 \text{ кг/м}^3$; $T_0 = 300 \text{ К}$; $\alpha_i(x, t) = 0$, $Te_i(x, t) = 0$, $i = \overline{1, 4}$.

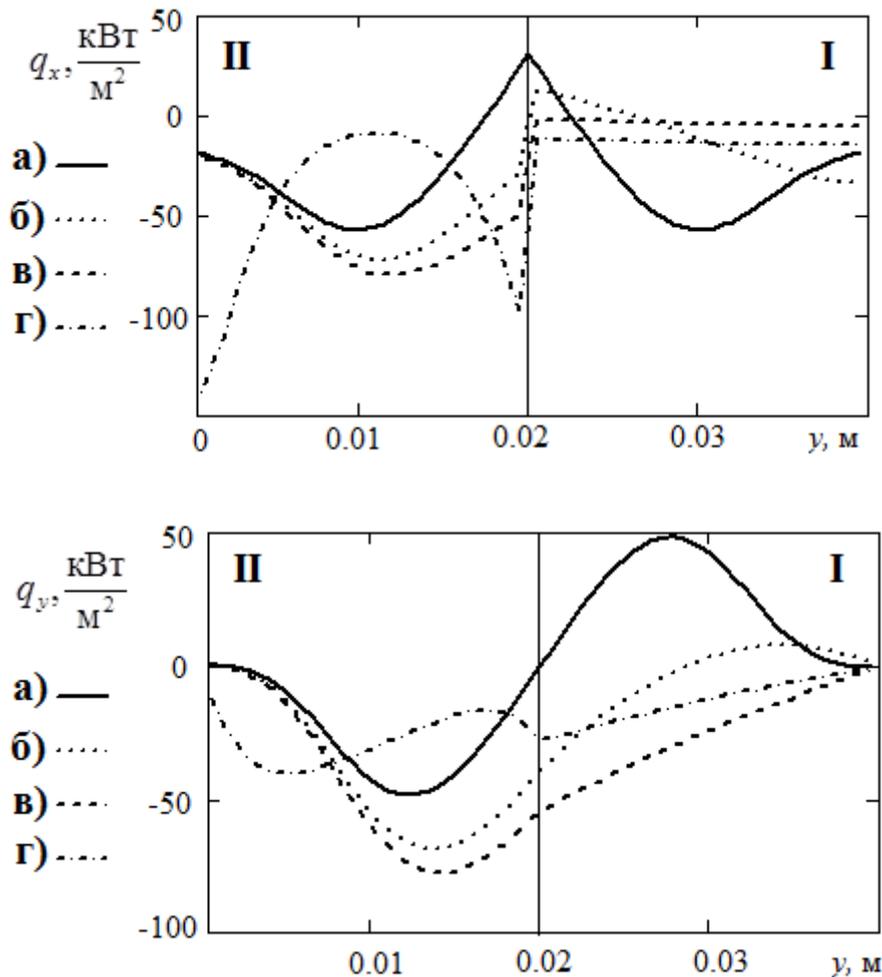
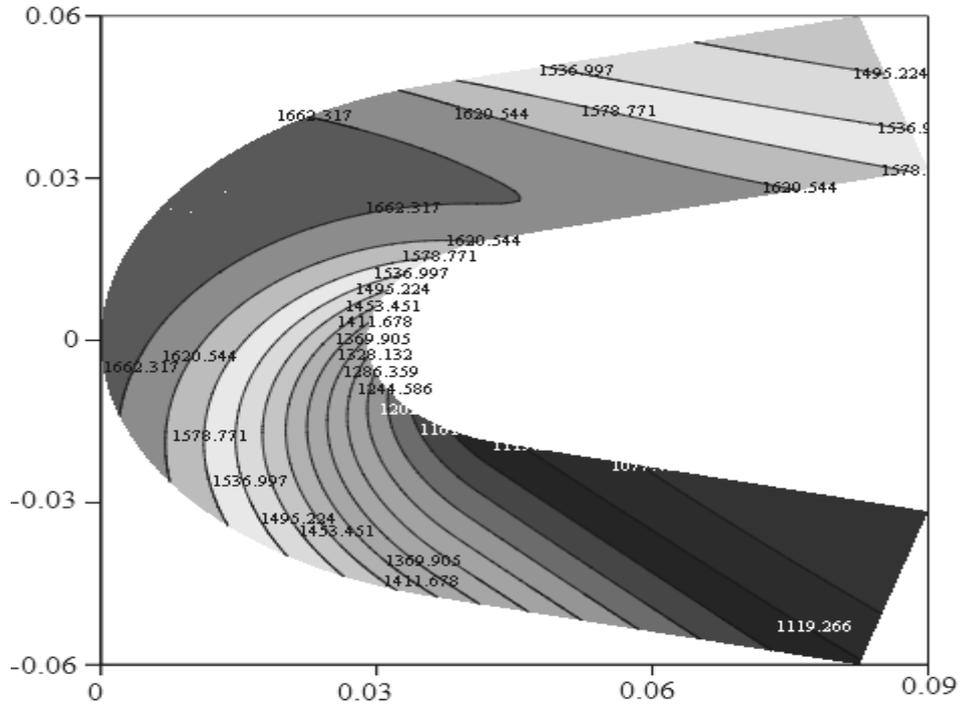


Рис. 3.5 . Поведение составляющих плотностей тепловых потоков q_x и q_y на границе сопряжения анизотропных тел.

Из рисунка видно, что температурное поле в теле, остается непрерывным на границе сопряжения, но производные температуры и касательные составляющие плотности тепловых потоков на этих границах имеют разрывы первого рода. Более наглядно это видно на рис. 3.5, где для тех же входных данных представлены распределения нормальных q_y и касательных q_x

составляющих вектора плотности теплового потока вдоль переменной y , при фиксированном $x = 0.04$.

а)



б)

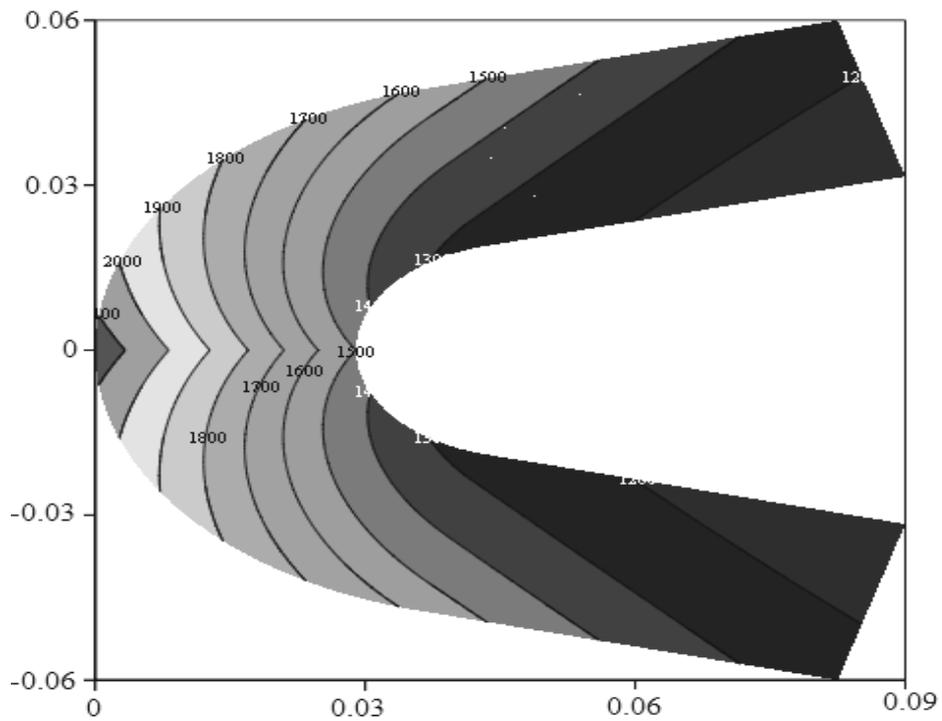


Рис. 3.6 . Температурные поля в затупленном теле а) сплошное; б) с разрывом ТФХ.

На рисунке отчетливо видно, что нормальная составляющая q_y плотности теплового потока вдоль оси y сохраняет непрерывность, при этом касательная составляющая q_x на границе разрыва ТФХ имеет разрывы первого рода.

На рисунках 3.6 представлены температурные поля в затупленном теле, рассчитанные по схеме метода МРЭП. Входные данные принимали следующие значения: а) $\lambda_\xi = 800 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $\varphi = 30^\circ$; б) $\lambda_\xi = 800 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $\varphi = 30^\circ$ в верхней части и $\varphi = -30^\circ$ в нижней части затупленного тела с границей разрыва ТФХ по линии полного торможения, $\lambda_\eta = 20 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $c\rho = 1000 \text{ кДж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$, $T_0 = 0$. Толщина $d = 0.03 \text{ м}$, радиус затупления $R_0 = 0.05 \text{ м}$, $t = 50 \text{ с}$. Тепловой поток задавался непосредственно на затуплении $q = 300 \text{ кВт}/\text{м}^2$, в хвостовой части тепловой поток равен нулю.

На рисунке видно, что температурное поле в анизотропном случае является существенно несимметричным рис. 3.6а, при этом в случае разделения составного тела рис. 3.6б с границей разрыва ТФХ (разрывается угол ориентации главных осей тензора теплопроводности) симметрия сохраняется, при этом на границе разрыва ТФХ, как было показано выше, разрываются касательные составляющие плотности теплового потока..

Для экспериментальной апробации численного метода МРЭВ проведены сравнения численных решений второй начально-краевой задачи в анизотропной пластине с аналитическими решениями аналогичных задач, полученных в параграфе 4.2 на основе построения граничных функций влияния и интегральных преобразований. На рис. 3.7. приведены распределения относительной погрешности $\delta = |T_{\text{числ}} - T_{\text{анал}}| \cdot 100\% / T_{\text{анал}}$ в различных сечениях расчетной области.

Входные данные принимали следующие значения: $\lambda_\xi = 100 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $\lambda_\eta = 10 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $\varphi = 30^\circ$, $c\rho = 1500 \text{ кДж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$, $T_0 = 0$. Толщина пластины $d = 0.04 \text{ м}$, длина $l = 0.4 \text{ м}$, время $t = 50 \text{ с}$. Тепловые потоки задавались на внешней границе в

виде кусочно-постоянных функций $f_1(x) = f_2(x) = 3 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2$, на отрезке $x \in [0.02; 0.03]$ и нулевые вне этого отрезка.

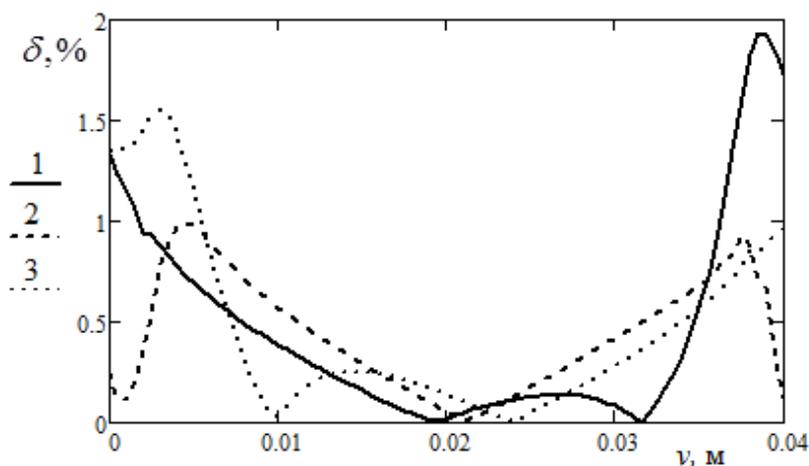


Рис. 3.7. Распределение относительной погрешности вдоль переменной y ,

1 – $x = 0$; 2 – $x = 0.01$; 3 – $x = -0.01$.

Результаты показывают, что относительная погрешность метода МРЭВ не превышает 2%. С другой стороны, результаты подтверждают правильность найденного аналитического решения.

3.5. Сопряженный теплоперенос между пристенными теплогазодинамическими течениями и анизотропными составными телами

При моделировании сопряженного теплопереноса между пристенными теплогазодинамическими течениями и анизотропными телами оказалось, что в нормальной составляющей вектора плотности теплового потока учитываются все компоненты вектора градиента температуры с соответствующими коэффициентами теплопроводности, даже если граница тела является плоскостью, что не имеет места для изотропных тел.

В многомерных задачах сопряженного теплообмена между газодинамическими течениями и многомерными телами наблюдается неизотермичность границы сопряжения в силу наличия продольных составляющих векторов плотности тепловых потоков, как в теле, так и в газе. В

сопряженных задачах теплогазодинамики и анизотропной теплопроводности неизотермичность в продольном направлении на границе сопряжения усиливается, поскольку в нормальных к границе «газ – анизотропное тело», и касательных компонентах вектора плотности теплового потока, всегда учитываются все составляющие градиента температур, в том числе и продольные, *причем величины касательных составляющих того же порядка, что и нормальных [122]. В этих условиях в уравнении энергии в пристенном газодинамическом течении необходимо учитывать все производные первого и второго порядков температуры по продольной пространственной переменной.*

Продольная неизотермичность существенно возрастает при обтекании тел с большой степенью продольной анизотропии ($\lambda_{\xi} / \lambda_{\eta} = 10 \dots 200$), так как существуют материалы, например пиролитические графиты, с продольной степенью анизотропии до 100–200. При этом, как показано выше, продольные составляющие плотности тепловых потоков на границе сопряжения могут претерпевать разрывы первого рода.

Значительная продольная неизотермичность может приводить к существенному снижению тепловых потоков к телу от газодинамического течения и даже к отрицательным тепловым потокам, то есть к охлаждению боковых поверхностей затупленных анизотропных тел.

3.5.1. Метод численного решения сопряженных задач с высокой точностью

При решении сопряженных задач возникает основная сложность, которая заключается в том, что для определения теплового потока к телу от теплогазодинамического течения необходимо решить задачу о пристенном течении (3.1.1)–(3.1.19), при этом температура $T_w(x)$ границы сопряжения, используемая в качестве краевого условия в задаче теплогазодинамики, должна

быть определена из решения задачи теплопроводности (3.1.20)–(3.1.26) (или (3.4.4)–(3.4.15)) по тепловым потокам от пристенного течения.

Решение сопряженной задачи возможно с использованием локальных или глобальных итерационных процедур, однако их применение *требует значительного времени даже на современных ЭВМ, что может быть недопустимо при проектировании тепловой защиты элементов конструкций авиационной и ракетно-космической техники.*

В данном параграфе при решении сопряженной задачи анизотропной теплопроводности и пристенного течения использован метод с поиском неизвестного параметра, которым является температура границы сопряжения w . Суть метода была предложена А.В. Лыковым [87], но для многомерных задач тепломассопереноса она не была практически осуществлена, поскольку ее реализация сопряжена со значительными трудностями, так как все вычислительные процедуры в пристенном течении и в теле содержат этот параметр.

В предлагаемом методе, разработанном с помощью методов МРЭП и МРЭВ, прямой ход метода скалярной прогонки одновременно выполняется в направлении от внешней границы e в пристенном течении или ударной волны к границе сопряжения w и от внутренней границы тела к границе сопряжения w . В этом случае условия сопряжения (3.1.26) будут, помимо температуры границы сопряжения $T_w(x)$, зависеть и от прогоночных коэффициентов в трех узлах, которые непосредственно примыкают к границе $w5$, со стороны тела и со стороны пристенного течения (см. параграф 2.4).

Для изложения численного метода рассматривается система уравнений (3.1.1)–(3.1.19) вязкого пристенного течения и теплопроводности в составном анизотропном теле (3.4.4)–(3.4.15), для которых конечно-разностные схемы на основе методов МРЭП и МРЭВ изложены в параграфах 3.3 и 3.4 соответственно.

Вводятся следующие конечно-разностные сетки:

$$\omega_{h_1, h_2} = \{x_i = ih_1^T, i = 0, \dots, I; y_j = jh_2^T, j = 0, \dots, J^T\} \quad (3.5.1)$$

для пристенного течения и

$$\omega_{h_1, h_2^I, h_2^{II}, \tau} = \{x_i = ih_1^T, i = 0, \dots, I; y_j = jh_2^I, j = 0, \dots, J_1^T; y_j = jh_2^{II}, j = J_1^T, \dots, (J_1^T + J_2^T); t^n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots\}. \quad (3.5.2)$$

для составного тела, где индекс «Г» относится к газу, а индекс «Т» – к телу, причем $h_1^G = h_1^T = h$ и $I^G = I^T = I$, т.е. сетки по продольной переменной в газе и в теле согласованы на границе сопряжения.

Поскольку на общей границе w сопряжения непрерывны нормальные составляющие плотности теплового потока и температура, то ниже излагаемый метод относится к уравнению энергии (3.1.7) в пристенном вязком течении и к уравнениям теплопроводности (3.4.4), (3.4.5) в составном анизотропном теле. Эти уравнения на сетках (3.5.1), (3.5.2) аппроксимируются по схемам (3.3.2)–(3.3.6), (3.3.7)–(3.3.11) и (3.4.17), (3.4.18) соответственно.

В прямом ходе метода прогонки вдоль оси O_2y пристенного течения (рис. 1.1) определяются прогоночные коэффициенты в направлении к границе w сопряжения от наружной границы «е» течения (или от ударной волны).

Системы конечно-разностных уравнений для уравнения энергии пристенного течения вдоль поперечного направления запишутся следующим образом (индекс j для границы w сопряжения считается равным нулю $i, 0 \equiv i, w$):

$$a_{ij}T_{i,j-1}^G + b_{ij}T_{i,j}^G + c_{ij}T_{i,j+1}^G = d_{i,j}, \quad j = 1, \dots, J^T - 1, \quad i = -I, \dots, I; \quad (3.5.3)$$

$$T_{i,0}^G = T_{i,w}^G, \quad j = 0, \quad i = -I, \dots, I; \quad (3.5.4)$$

$$T_{i,J}^G = T_{i,e}^G, \quad j = J^T, \quad i = -I, \dots, I. \quad (3.5.5)$$

Ее решение методом скалярной прогонки определяется следующим образом:

$$T_{i,j}^G = A_{i,j}^G T_{i,j-1}^G + B_{i,j}^G, \quad j = 1, \dots, J^T - 1, \quad i = -I, \dots, I; \quad (3.5.6)$$

$$A_{i,j}^{\Gamma} = \frac{-a_{i,j}}{b_{i,j} + c_{i,j}A_{i,j+1}^{\Gamma}}, \quad B_{i,j}^{\Gamma} = \frac{d_{i,j} - c_{i,j}B_{i,j+1}^{\Gamma}}{b_{i,j} + c_{i,j}A_{i,j+1}^{\Gamma}},$$

$$j = J^{\Gamma}, \dots, 1; \quad i = -I, \dots, I. \quad (3.5.7)$$

После прямого хода (3.5.7) в котором определяются прогоночные коэффициенты $A_{i,j}^{\Gamma}$, $B_{i,j}^{\Gamma}$ в узлах $i,1$ получим выражения для температуры

$$T_{i,1}^{\Gamma} = \frac{-a_{i,1}}{b_{i,1} + c_{i,1}A_{i,2}^{\Gamma}} T_{i,w}^{\Gamma} + \frac{d_{i,1} - c_{i,1}B_{i,2}^{\Gamma}}{b_{i,1} + c_{i,1}A_{i,2}^{\Gamma}} = A_{i,1}^{\Gamma} T_{i,w}^{\Gamma} + B_{i,1}^{\Gamma}, \quad (3.5.8)$$

где все значения, кроме $T_{i,w}^{\Gamma}$, уже известны.

Для того чтобы определить тепловой поток на границе сопряжения от пристенного течения, который входит в левую часть соотношения (3.1.26), необходимо определить значения $T_{i,2}^{\Gamma}$, через $T_{i,w}^{\Gamma}$ с помощью соотношений (3.5.6)–(3.5.8):

$$T_{i,2}^{\Gamma} = A_{i,1}^{\Gamma} A_{i,2}^{\Gamma} T_{i,w}^{\Gamma} + A_{i,2}^{\Gamma} B_{i,1}^{\Gamma} + B_{i,2}^{\Gamma}. \quad (3.5.9)$$

Определить тепловой поток от газа к телу с использованием температур $T_{i,2}^{\Gamma}$, $T_{i,1}^{\Gamma}$, $T_{i,w}^{\Gamma}$, сохраняя *второй порядок*, можно следующим образом.

Разложим $T_{i,2}^{\Gamma}$ на *точном решении* распределение температур в газе в ряд Тейлора в окрестности границы $y=0$ до третьей производной включительно, получим

$$T_{i,2}^{\Gamma} = T_{i,w}^{\Gamma} + \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i,w} 2h_2^{\Gamma} + \left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{i,w} \frac{(2h_2^{\Gamma})^2}{2} + O\left((h_2^{\Gamma})^3\right),$$

откуда производная по переменной y со вторым порядком определяется следующим образом:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i,w} = \frac{T_{i,2}^{\Gamma} - T_{i,w}^{\Gamma}}{2h_2^{\Gamma}} - \left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{i,w} h_2^{\Gamma} + O\left((h_2^{\Gamma})^2\right) \quad (3.5.10)$$

Аппроксимируя вторую производную

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{i,w} = \frac{1}{(h_2^{\Gamma})^2} (T_{i,2}^{\Gamma} - 2T_{i,1}^{\Gamma} + T_{i,w}^{\Gamma}) + O\left((h_2^{\Gamma})^2\right)$$

и подставляя ее в (3.5.10), получим

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i,w} = \frac{1}{2h_2^r} (-T_{i,2}^r + 4T_{i,1}^r - 3T_{i,w}^r) + O\left((h_2^r)^2\right).$$

Таким образом, тепловой поток от газа к телу определяется выражением (достаточно подставить в последнее выражение формулы (3.5.8), (3.5.9)):

$$\begin{aligned} \lambda^r \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i,0}^r &= \frac{\lambda^r}{2h_2^r} (-T_{i,2}^r + 4T_{i,1}^r - 3T_{i,w}^r) + O\left((h_2^r)^2\right) = \\ &= \frac{\lambda^r}{2h_2^r} (\alpha^r T_{i,w}^r + \beta^r) + O\left((h_2^r)^2\right), \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

где $\alpha^r = -3 + 4A_{i,1}^r - A_{i,1}^r A_{i,2}^r$, $\beta^r = 4B_{i,1}^r - A_{i,2}^r B_{i,1}^r - B_{i,2}^r$.

Значения $T_{i,1}^T$ и $T_{i,2}^T$ в теле определяются аналогично через прогоночные коэффициенты:

$$T_{i,1}^T = \frac{-a_{i,1}}{b_{i,1} + c_{i,1} A_{i,2}^T} T_{i,w}^T + \frac{d_{i,1} - c_{i,1} B_{i,2}^T}{b_{i,1} + c_{i,1} A_{i,2}^T} = A_{i,1}^T T_{i,w}^T + B_{i,1}^T, \quad (3.5.12)$$

$$T_{i,2}^T = A_{i,1}^T A_{i,2}^T T_{i,w}^T + A_{i,2}^T B_{i,1}^T + B_{i,2}^T. \quad (3.5.13)$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \lambda_{22}^T \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i,0}^T &= \frac{\lambda_{22}^T}{2h_2^T} (-T_{i,2}^T + 4T_{i,1}^T - 3T_{i,w}^T) + O\left((h_2^T)^2\right) = \\ &= \frac{\lambda^T}{2h_2^T} (\alpha^T T_{i,w}^T + \beta^T) + O\left((h_2^T)^2\right), \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

где $\alpha^T = -3 + 4A_{i,1}^T - A_{i,1}^T A_{i,2}^T$, $\beta^T = 4B_{i,1}^T - A_{i,2}^T B_{i,1}^T - B_{i,2}^T$.

Подставим выражения (3.5.11), (3.5.14) в равенство (3.1.26), учитывая выражение (3.4.3) для нормальной составляющей вектора плотности теплового потока на границе сопряжения от тела, и опуская диффузионные и лучистые тепловые потоки, считая их известными, получим

$$\left[(\lambda_{11} \cdot f'(x) + \lambda_{21}) \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i,0}^T + (\lambda_{21} \cdot f'(x) + \lambda_{22}) \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i,0}^T \right] \cdot [1 + f'^2(x)]^{-1/2} = \lambda^r \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i,0}^r, \quad (3.5.15)$$

где

$$(1 + f'^2(x))^{-1/2} = (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1/2} = \cos \alpha,$$

из которого приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка относительно температуры $T_{i,w}$ границы сопряжения

$$\frac{dT_{i,w}}{dx} + p_i T_{i,w} = q_i, \quad i = -I, \dots, I \quad (3.5.16)$$

$$T_w(x_{i-1}) = T_{i-1,w}, \quad i = -I, \dots, I, \quad (3.5.17)$$

где

$$p_i = \frac{\alpha_i^T (\lambda_{22}^T f'(x_i) + \lambda_{22}^T)}{2h_2^T (\lambda_{11}^T f'(x_i) + \lambda_{21}^T)} - \frac{\alpha_i^T \lambda^T \sqrt{1+f'^2(x_i)}}{2h_2^T (\lambda_{11}^T f'(x_i) + \lambda_{21}^T)}$$

$$q_i = \frac{\beta_i^T \lambda^T \sqrt{1+f'^2(x_i)}}{2h_2^T (\lambda_{11}^T f'(x_i) + \lambda_{21}^T)} - \frac{\beta_i^T (\lambda_{21}^T f'(x_i) + \lambda_{22}^T)}{2h_2^T (\lambda_{11}^T f'(x_i) + \lambda_{21}^T)}$$

Температура $T_{i,w}$ непрерывно дифференцируема по переменной x , на интервалах $x \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = -I, \dots, I$ а по всей границе сопряжения является непрерывной.

Решения задач Коши (3.5.16), (3.5.17) имеют следующий вид:

$$T_{i,w}(x) = T_{i-1,w} \exp(-p_i(x - x_{i-1})) + \frac{p_i}{q_i} [1 - \exp(-p_i(x - x_{i-1}))], \quad x \in (x_{i-1}, x_i), \quad i = -I, \dots, I. \quad (3.5.18)$$

Найденная температура границы сопряжения $T_{i,w}(x)$, $i = -I, \dots, I$ дает возможность осуществлять обратные прогонки в анизотропном теле и в пристенном течении для определения температурного распределения в газе и в теле, для чего необходимо было сохранить все прогоночные коэффициенты в газе и в теле.

Подсхемы (3.3.16) в пристенном течении и (3.4.18) в теле реализуются скалярными прогонками вдоль переменной x , перераспределяющими температурные поля, полученные при реализации скалярных прогонок вдоль переменной y по схемам (3.3.5) и (3.4.17). Перераспределяются и другие газодинамические функции в пристенном течении, поскольку все они связаны с температурным полем.

3.5.2 Анализ результатов численного решения сопряженных задач вязкой теплогазодинамики и теплопроводности в составных анизотропных телах

Ниже анализируются результаты численных экспериментов по решению сопряженных задач теплопереноса между пристенными течениями и составными анизотропными телами.

Давление $p_e(x)$ на внешней границе пристенного течения определяется по формулам (3.2.22)–(3.2.25) для затупленного конуса.

Остальные входные данные принимали следующие значения:

$$M_n = 6, \quad p_n = 26500 \text{ Па}, \quad R_0 = 0.05 \text{ м}, \quad c_p = 1.06 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \quad \lambda_n = 0.037 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \quad \mu_n = 0.246 \cdot 10^{-4} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}},$$

$$T_n = 223.3 \text{ К}, \quad \theta_0 = 10^\circ, \quad \rho_n = 0.4135 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Законы теплопроводности и вязкости газа определяются формулами (1.3.7)–(1.3.11) коэффициентов полной вязкости и теплопроводности.

Теплофизические характеристики тела (рис. 3.3) имели следующие значения: $\lambda_\xi^I = 2 \div 400 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \quad \lambda_\eta^I = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \quad \lambda_\xi^{II} = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \quad \lambda_\eta^{II} = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \quad c^I \rho^I = 1500 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}},$

$c^{II} \rho^{II} = 1500 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}}, \quad T_0 = 223,3 \text{ К}, \quad \varphi^I = \varphi^{II} = 0.$ Таким образом, составное тело при

$\lambda_\xi^I = \lambda_\eta^I = \lambda_\eta^{II} = \lambda_\xi^{II} = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ является изотропным и однородным. При изменении λ_ξ

и сохранении значений всех остальных главных коэффициентов тензора теплопроводности тело становится анизотропным. При $\lambda_\xi^I = 400 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ степень анизотропии $\lambda_\xi^I / \lambda_\eta^I = 200$, то есть является очень большой величиной.

Геометрические размеры принимали следующие значения:

$$l_1 = \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L = 5R_0, \quad l_3 = 4 \text{ мм}, \quad l_2 = 8 \text{ мм}.$$

Расчеты проводились для конечного времени $t = 25, 100, 250 \text{ с}.$

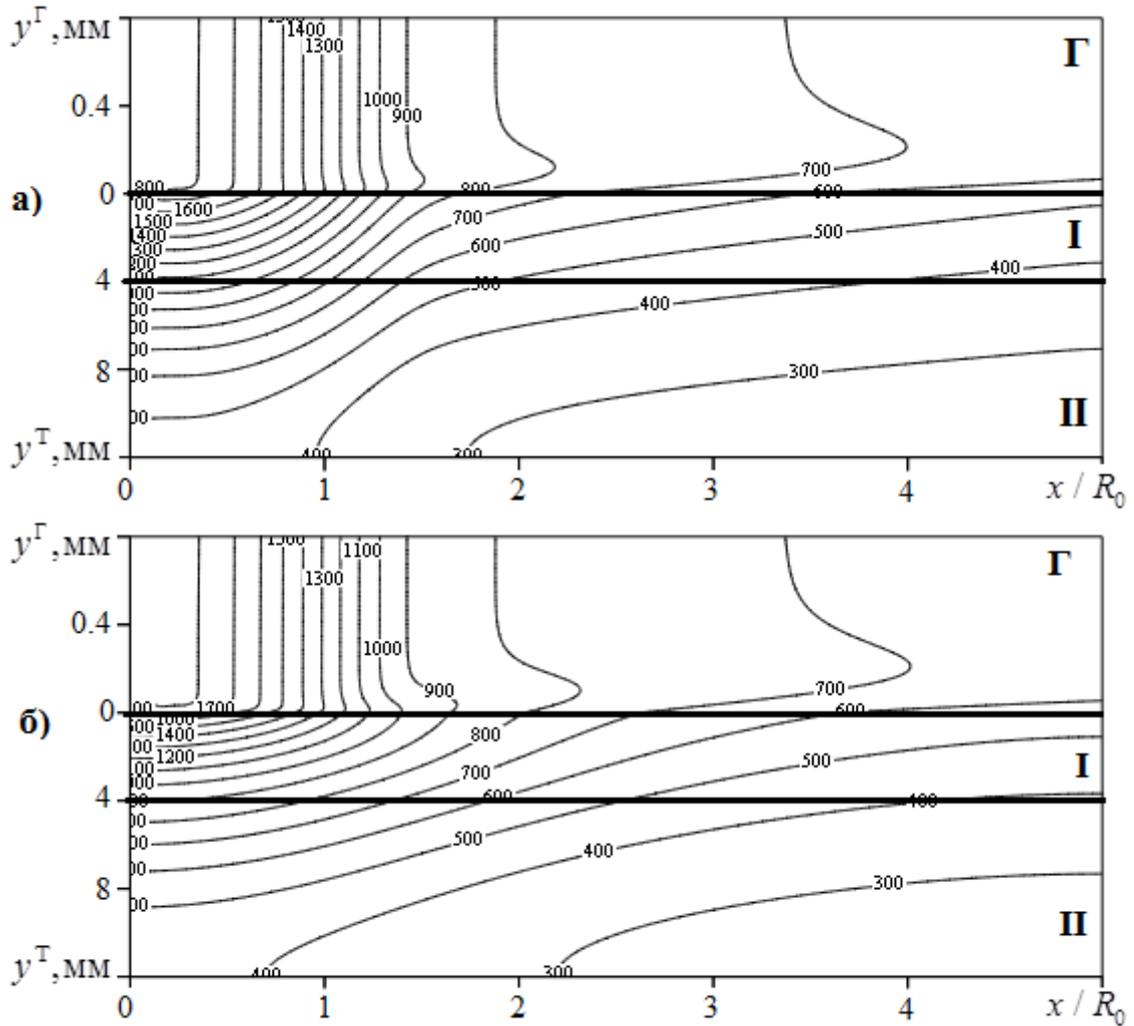


Рис 3.8. Распределение температур в газе и в теле при $t = 25$ с для $\lambda_{\eta}^I = \lambda_{\xi}^{II} = \lambda_{\eta}^{II} = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$:

$$\text{а) } \lambda_{\xi}^I = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}; \text{ б) } \lambda_{\xi}^I = 400 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

На рис. 3.8 показано распределение температуры в газе и теле в момент времени $t = 25$ с. Из рисунка видно, что уровень температур в теле значительно меньше уровня температур воздуха в пристенном течении. На рис. 3.8а материал наружного слоя (I) является изотропным $\left(\lambda_{\xi}^I = \lambda_{\eta}^I = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right)$, а на рис. 3.8б – ортотропным $\left(\lambda_{\xi}^I = 400 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \lambda_{\eta}^I = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right)$. При этом в обоих случаях материал внутреннего слоя (II) является изотропным. Сравнив ортотропный и изотропный случай, можно заметить, что в ортотропном случае тело прогрелось сильнее в направлении оси x чем в изотропном.

При этом можно отметить, существенное изменение направления касательных к изотермам в теле и в газе для ортотропного наружного слоя.

На рис. 3.9 представлена разница температуры границы сопряжения между изотропным и ортотропными случаями в момент времени $t = 25\text{с}$ при различных степенях анизотропии. Рисунок показывает, что на боковой поверхности температура границы увеличивается, а в окрестности затупления уменьшается с увеличением степени анизотропии наружного материала.

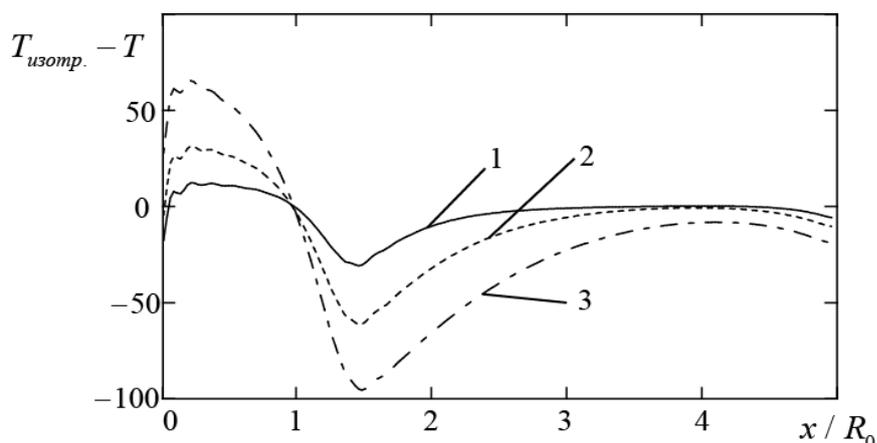


Рис.3.9. Разница температуры границы сопряжения между изотропными и ортотропными

случаями при $t = 25\text{с}$ для $\lambda_\eta^I = \lambda_\xi^{II} = \lambda_\eta^{II} = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$

1) $\lambda_\xi^I = 50 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$; 2) $\lambda_\xi^I = 150 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$; 3) $\lambda_\xi^I = 400 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$.

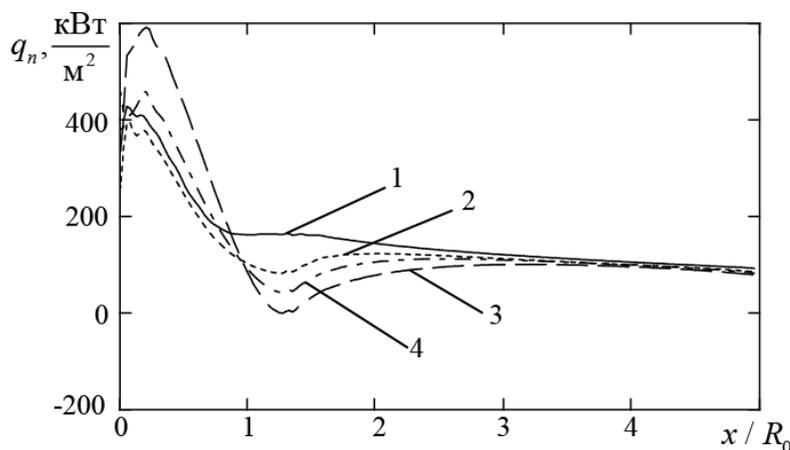


Рис. 3.10. Тепловые потоки к телу при $t = 25\text{с}$ для $\lambda_\eta^I = \lambda_\xi^{II} = \lambda_\eta^{II} = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$

1) $\lambda_\xi^I = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$; 2) $\lambda_\xi^I = 50 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$; 3) $\lambda_\xi^I = 150 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$; 4) $\lambda_\xi^I = 400 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$.

На рис. 3.10 показаны *тепловые потоки* от теплогазодинамического течения к телу при разных степенях анизотропии тела в момент времени $t = 25$ с. Результаты показывают обратное изменение тепловых потоков по отношению к температурам границы сопряжения при изменении степени анизотропии $\lambda_{\xi}^I / \lambda_{\eta}^I$.

С ростом степени анизотропии увеличивается отток теплоты от области затупления, в результате чего температура границы сопряжения на затуплении падает, а тепловые потоки, растут за счет роста перепада температур. При этом в хвостовой части тела тепловые потоки из-за малого промежутка времени практически не изменяются.

С увеличением времени сопряженный теплообмен существенно изменяется.

На рис. 3.11 представлены температурные поля в анизотропном теле и в газе в момент времени $t = 50$ с. Сравнивая изотропный случай для наружного слоя, представленного на рис. 3.11а $\left(\lambda_{\xi}^I = \lambda_{\eta}^I = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м К}} \right)$, и ортотропный $\left(\lambda_{\xi}^I = 400 \frac{\text{Вт}}{\text{м К}}, \quad \lambda_{\eta}^I = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м К}} \right)$ на рис. 3.11б, можно отметить, что благодаря высоким значениям компонента λ_{ξ}^I и времени, в ортотропном случае тело быстрее прогревается в направлении оси Ox благодаря оттоку теплоты из области затупления в хвостовую часть, вследствие чего с ростом степени анизотропии температура в области критической точки падает, а тепловые потоки вследствие этого растут за счет роста перепада температур. В хвостовой части тела, наоборот, с ростом степени анизотропии температура растет, а тепловые потоки падают (рисунки 3.12, 3.13).

Можно отметить, что увеличивая продольную степень анизотропии в 200 раз тепловые потоки выше примерно в 2 раза в области затупления и меньше примерно на 50-70% в области непосредственно за затуплением. По сравнению с вариантом для $t = 25$ с тепловые потоки в хвостовой части уменьшаются в два и более раз.

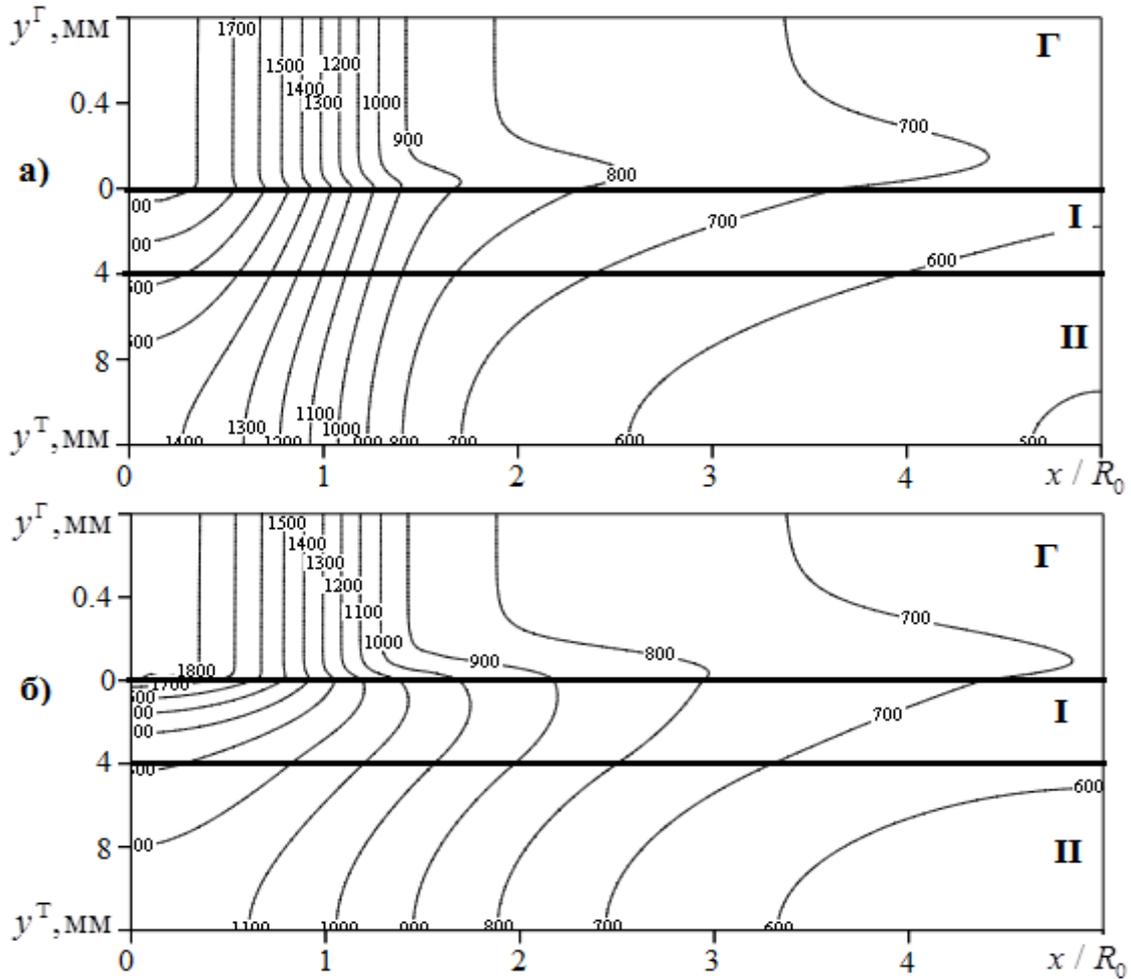


Рис 3.11. Распределение температур в газе и в теле при $t = 100$ с для $\lambda_{\eta}^I = \lambda_{\xi}^{II} = \lambda_{\eta}^{II} = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$:

а) $\lambda_{\xi}^I = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$; б) $\lambda_{\xi}^I = 400 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$.

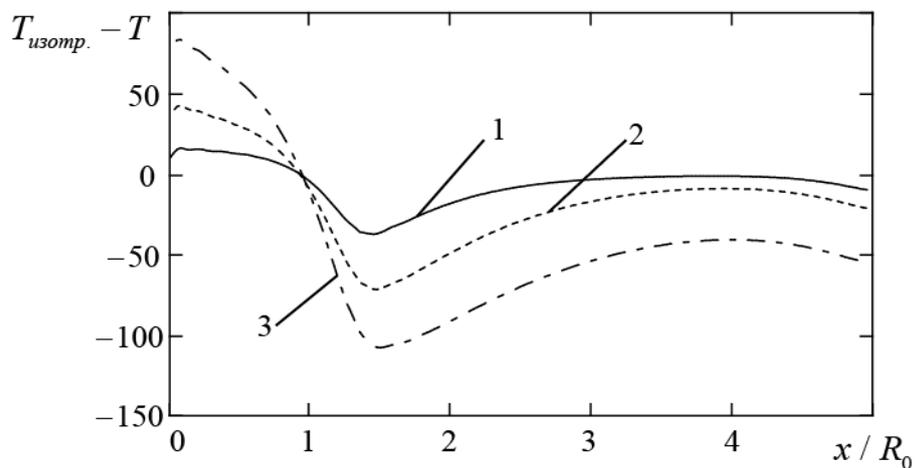


Рис. 3.12. Разница температуры границы сопряжения между изотропными и ортотропными

случаями при $t = 100$ с для $\lambda_{\eta}^I = \lambda_{\xi}^{II} = \lambda_{\eta}^{II} = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$

1) $\lambda_{\xi}^I = 50 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$; 2) $\lambda_{\xi}^I = 150 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$; 3) $\lambda_{\xi}^I = 400 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$.

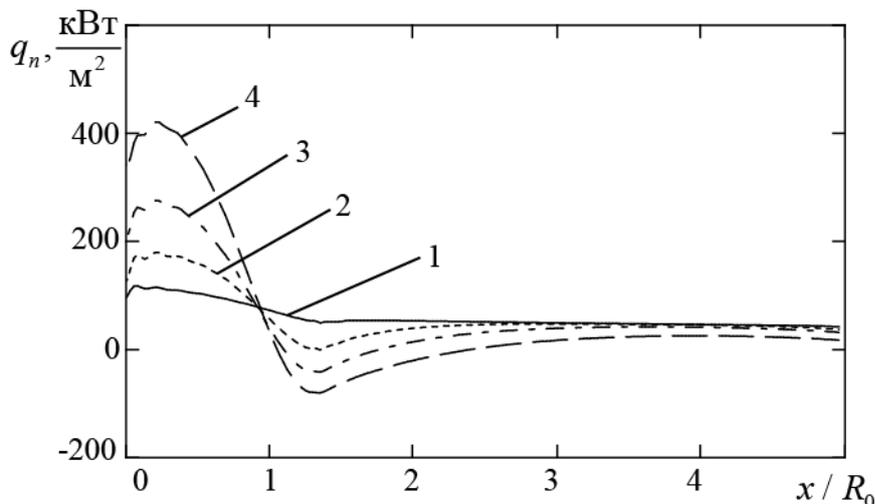


Рис. 3.13. Тепловые потоки к телу при $t = 100$ с для $\lambda_{\eta}^I = \lambda_{\xi}^{II} = \lambda_{\eta}^{II} = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$
 1) $\lambda_{\xi}^I = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$; 2) $\lambda_{\xi}^I = 50 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$; 3) $\lambda_{\xi}^I = 150 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$; 4) $\lambda_{\xi}^I = 400 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$.

На рисунке 3.14 для тех же условий, что и на рисунках 3.8 и 3.11, показано распределение температур в газе и в теле при $t = 250$ с. При таком значении времени температура в обтекаемом теле почти вышла на стационарный режим. Сравнивая изотропный случай на рис. 3.14а ($\lambda_{\xi}^I = \lambda_{\eta}^I = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$), и ортотропный – на рис. 3.14б ($\lambda_{\xi}^I = 400 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, $\lambda_{\eta}^I = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$) можно отметить тот факт, что благодаря высокому значению степени анизотропии $\lambda_{\xi}^I / \lambda_{\eta}^I = 250$ и длительности нагрева, тело вдоль оси Ox прогрелось значительно сильнее, при этом температура в окрестности критической точки ниже из-за оттока теплоты в продольном направлении.

На рисунках 3.15, 3.16 для этого случая $t = 250$ с представлены разница температуры границы сопряжения между изотропным и ортотропным случаями и тепловые потоки от пристенного течения к ортотропному телу соответственно, которые показывают, что в окрестности критической точки температура границы сопряжения незначительно падает с ростом степени

анизотропии, а тепловые потоки, увеличиваясь по абсолютной величине, значительно убывают по сравнению со случаями $t = 25$ с и $t = 100$ с.

При этом тепловой поток в ортотропном случае с большой степенью анизотропии резко падает и даже становится отрицательным вниз по течению. То есть температура газа больше температуры границы сопряжения, а тело отдает тепло в газ.

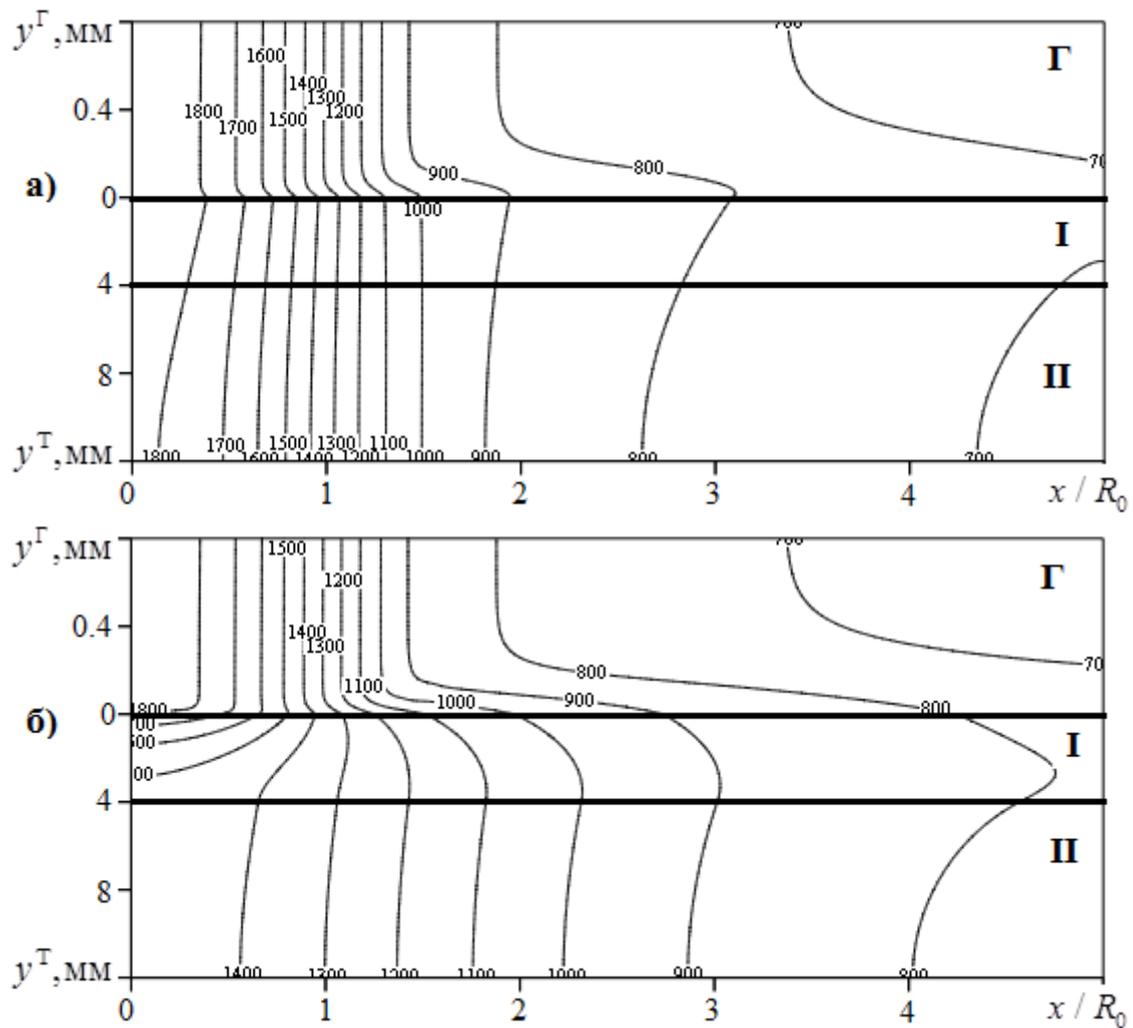


Рис 3.14. Распределение температур в газе и в теле при $t = 250$ с для $\lambda_{\eta}^I = \lambda_{\zeta}^{II} = \lambda_{\eta}^{II} = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$:

$$\text{а) } \lambda_{\zeta}^I = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}; \text{ б) } \lambda_{\zeta}^I = 400 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

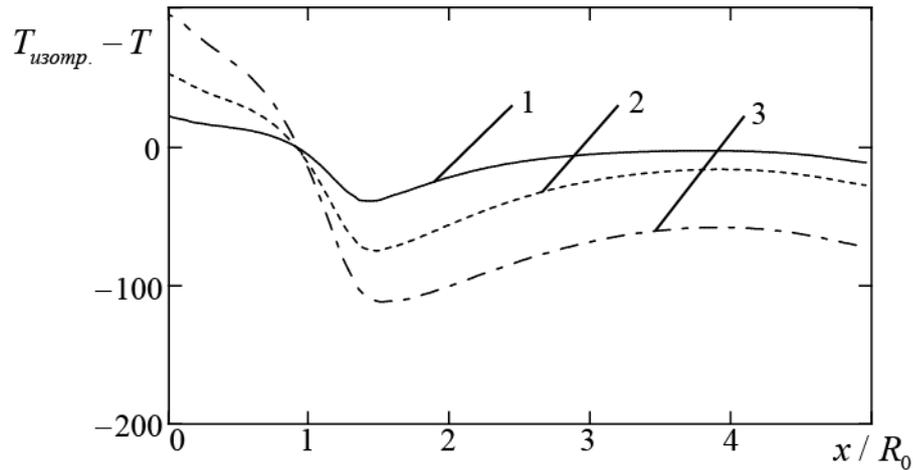


Рис. 3.15. Разница температуры границы сопряжения между изотропными и ортотропными

случаями при $t = 250$ с для $\lambda_{\eta}^I = \lambda_{\xi}^{II} = \lambda_{\eta}^{II} = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$

1) $\lambda_{\xi}^I = 50 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$; 2) $\lambda_{\xi}^I = 150 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$; 3) $\lambda_{\xi}^I = 400 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$.

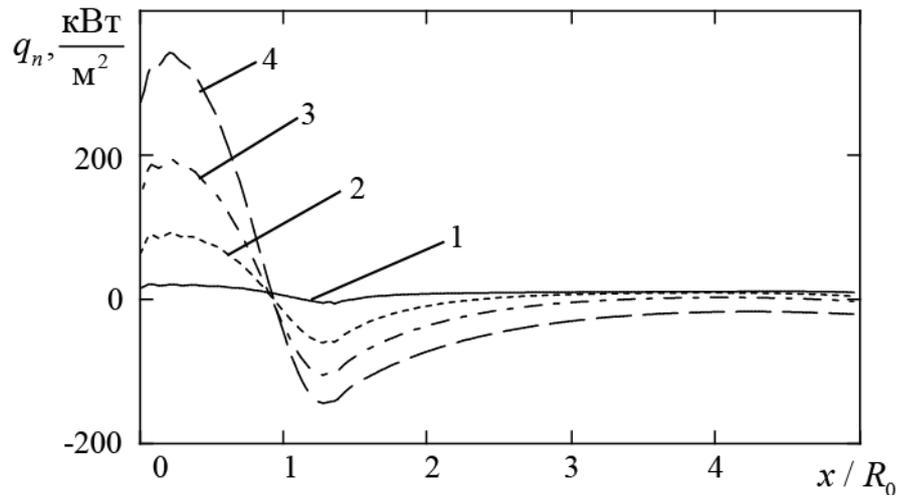


Рис. 3.16. Тепловые потоки к телу при $t = 250$ с для $\lambda_{\eta}^I = \lambda_{\xi}^{II} = \lambda_{\eta}^{II} = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$

1) $\lambda_{\xi}^I = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ 2) $\lambda_{\xi}^I = 50 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$; 3) $\lambda_{\xi}^I = 150 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$; 4) $\lambda_{\xi}^I = 400 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$.

На рис. 3.17 представлено распределение температур в теле и в газе в случае, если наружная пластина является анизотропной, для момента времени $t = 100$ с. На рис. 3.17а угол ориентации главных осей равен $\varphi = 20^\circ$, а на рис.3.17б — $\varphi = 60^\circ$. Результаты указывают на увеличение прогрева в направлении оси Ox при уменьшении угла ориентации главных осей с $\varphi = 60^\circ$ до $\varphi = 15^\circ$, поскольку продольная степень анизотропии $\lambda_{\xi}^I / \lambda_{\eta}^I = 50$.

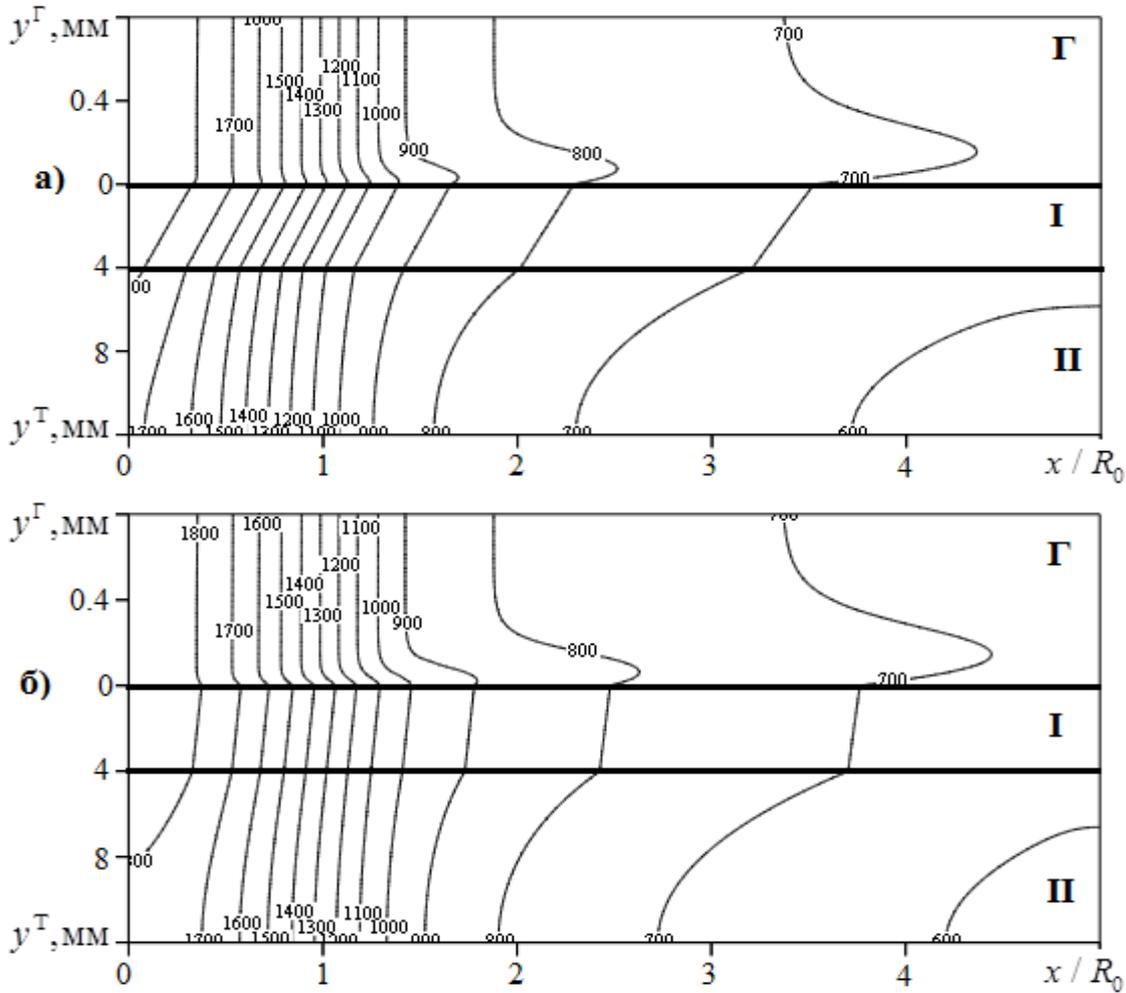


Рис. 3.17. Распределение температур в газе и в теле при $t = 100$ с:

а) $\lambda_{\xi}^I = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, $\varphi = 20^\circ$; б) $\lambda_{\xi}^I = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, $\varphi = 60^\circ$.

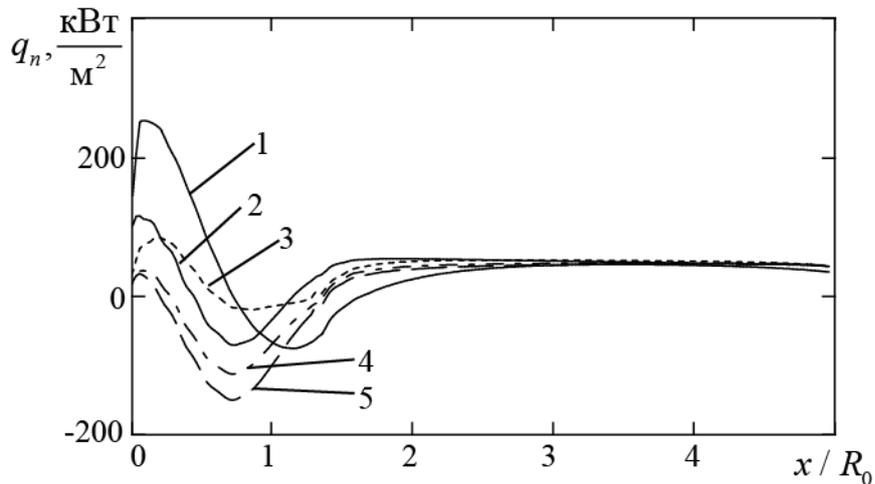


Рис. 3.18. Тепловые потоки к телу при $t = 100$ с:

1) $\lambda_{\xi}^I = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, $\varphi = 0^\circ$; 2) $\lambda_{\xi}^I = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, $\varphi = 0^\circ$; 3) $\lambda_{\xi}^I = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, $\varphi = 15^\circ$;
 4) $\lambda_{\xi}^I = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, $\varphi = 30^\circ$; 5) $\lambda_{\xi}^I = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, $\varphi = 60^\circ$.

Результаты влияния на тепловые потоки к анизотропному телу при $\lambda_{\xi}^1 / \lambda_{\eta}^1 = 50$ и $t = 100$ с углов ориентации главных осей тензора теплопроводности иллюстрирует рисунок 3.18. Из рисунка видно, что на тепловой поток существенно влияет угол ориентации главных осей тензора теплопроводности. При $\varphi = 30^\circ$ тепловой поток уменьшается вдоль боковой поверхности тела в сравнении с изотропным случаем, при этом в окрестности линии полного торможения тепловой поток более чем в два раза больше изотропного случая. При $\varphi = 60^\circ$ тепловой поток в области затупления примерно на 30% выше теплового потока в изотропном случае, а вниз по течению – меньше примерно на 60%.

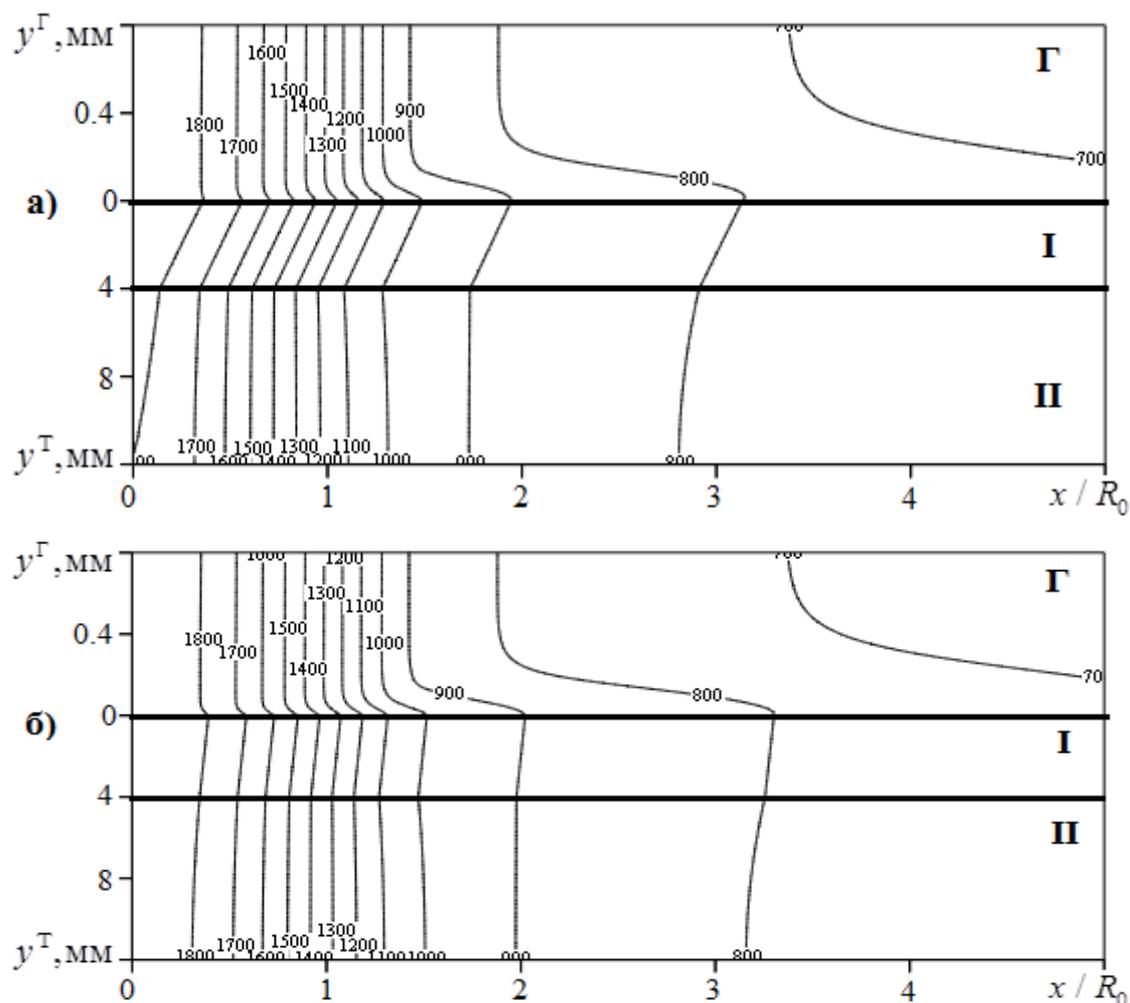


Рис. 3.19. Распределение температур в газе и в теле при $t = 250$ с:

$$\text{а) } \lambda_{\xi}^1 = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \varphi = 20^\circ; \text{ б) } \lambda_{\xi}^1 = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \varphi = 60^\circ.$$

На рис. 3.19 представлено распределение температур в газе и в теле для анизотропного наружного слоя в момент времени $t = 250$ с с различными углами ориентации главных осей тензора теплопроводности. На рис. 3.19а угол ориентации главных осей принят равным $\varphi = 20^\circ$, а на рис. 3.19б — $\varphi = 60^\circ$. Рисунок показывает, что с увеличением времени по сравнению с $t = 50$ с уменьшение угла ориентации главных осей тензора теплопроводности более существенно сказывается на увеличении прогрева вдоль оси Ox .

На рис. 3.20 представлены тепловые потоки на границе сопряжения газа и анизотропного тела с разными углами ориентации главных осей тензора теплопроводности в момент времени $t = 250$ с. Рисунки показывают, существенную зависимость тепловых потоков на границе от угла ориентации главных осей тензора теплопроводности. Причем, для $\varphi = 15^\circ$ тепловой поток существенно уменьшается на боковой поверхности тела по сравнению с изотропным случаем, становясь отрицательным. Можно отметить, что для всех углов $\varphi > 0$ тепловые потоки, за исключением узкой области критической точки, отрицательны на всей образующей затупленного тела.

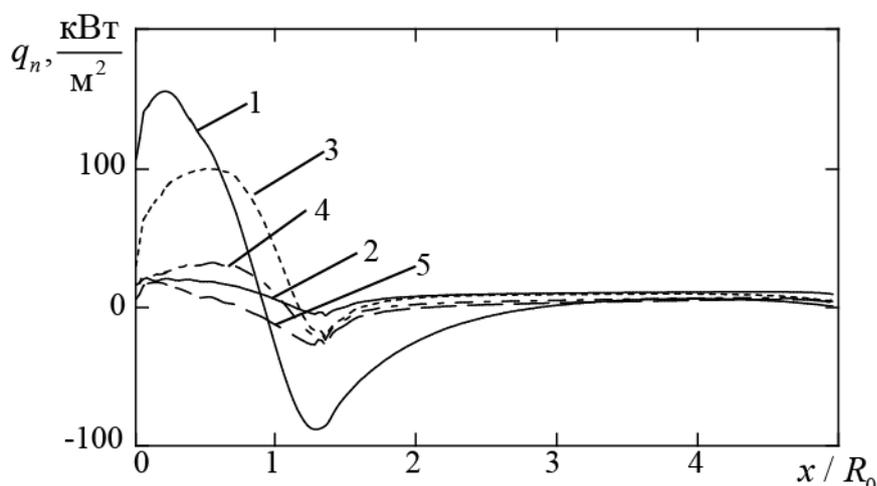


Рис. 3.20. Тепловые потоки к телу при $t = 250$ с:

- 1) $\lambda_\xi^1 = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \varphi = 0^\circ$; 2) $\lambda_\xi^1 = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \varphi = 0^\circ$; 3) $\lambda_\xi^1 = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \varphi = 15^\circ$;
- 4) $\lambda_\xi^1 = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \varphi = 30^\circ$; 5) $\lambda_\xi^1 = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \varphi = 60^\circ$.

Таким образом, изменяя степень анизотропии и ориентацию главных осей тензора теплопроводности можно управлять тепловыми потоками к телу.

Для уменьшения тепловых потоков к боковой поверхности затупленного тела необходимо анизотропный материал наружного слоя, соприкасающийся с газодинамическим потоком, выбирать с как можно большим продольным коэффициентом теплопроводности. В этом случае наблюдается значительный отток теплоты от области затупления вниз по потоку с увеличением там температуры, уменьшением градиента температур на границе «газ – твердое тело», увеличением динамической вязкости газа, уменьшением его плотности и, как следствие, значительным уменьшением тепловых потоков к боковой поверхности даже до случаев отрицательных тепловых потоков.

Выводы по третьей главе

1. В главе разработана физико-математическая модель сопряженного теплообмена между вязкими пристенными теплогазодинамическими течениями и затупленными составными анизотропными телами в связанных системах координат. В газодинамическом течении учтены диффузия двухкомпонентного газа и производные второго порядка газодинамических функций по продольной независимой переменной, поскольку в условиях высокой продольной степени анизотропии наблюдаются значительные перетоки теплоты в продольном направлении анизотропного тела.

2. На основе уравнений невязкой газовой динамики сформулированы краевые условия на внешней границе пристенного течения в зависимости от распределения давления вдоль затупленного анизотропного тела.

3. Проанализирован теплообмен на границах разрыва теплофизических характеристик (ТФХ) двух анизотропных гомогенных сред. Оказалось при этом, что нормальная составляющая вектора плотности теплового потока непрерывна на границах разрыва ТФХ, а касательная составляющая претерпевает разрыв первого рода, что подтверждено экспериментальным путем.

4. Проведена апробация экономичного абсолютно устойчивого метода расщепления с экстраполяцией по времени (МРЭВ) путем сравнения результатов численных решений по этому методу с аналитическими решениями второй начально-краевой задачи теплопроводности в анизотропной пластине. Максимальная относительная погрешность метода составила не более двух процентов. Кроме этого, проведено сравнение результатов численного решения задачи теплогазодинамики по методу МРЭП с результатами других авторов.

5. Проведены широкие вычислительные эксперименты по исследованию влияния на сопряженный теплообмен степени продольной анизотропии, главных компонентов и углов ориентации главных осей тензоров

теплопроводности анизотропных материалов, а также времени, получены количественные характеристики взаимного влияния газодинамических характеристик на тепловые потоки к телу и нестационарных температурных полей в теле на газодинамические характеристики вязкого газа.

6. Установлено, что при высокой продольной степени анизотропии обтекаемого тела (≥ 10) наблюдаются значительные перетоки теплоты в продольном направлении тела, в результате чего граница тела вниз по потоку значительно нагревается и тепловые потоки от газа к телу резко снижаются за счет уменьшения перепада температур, повышения динамической вязкости и снижения теплопроводности газа. Для степеней продольной анизотропии ~ 100 возможны случаи отрицательных тепловых потоков, то есть тело отдает теплоту в газ.

7. На этом принципе предлагается новый способ тепловой защиты носовых частей высокоскоростных ЛА, основанный на использовании теплозащитных анизотропных материалов, соприкасающихся с газодинамическим потоком, с высокой степенью анизотропии, например, из пиролитических графитов.

4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА В АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НОВЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Аналитические решения вообще и задач сопряженного теплообмена, в частности, ценны тем, что возникает возможность эффективно анализировать влияние всех теплогазодинамических, теплофизических и геометрических характеристик на тепловое состояние обтекаемых тел. Однако, получение аналитических решений сопряженного теплопереноса между вязкими газодинамическими течениями и телами с анизотропией свойств наталкивается на непреодолимые трудности в силу существенной нелинейности системы уравнений вязких газодинамических течений, сложности получения аналитических решений задач анизотропной теплопроводности с граничными условиями четвертого рода, а также с разработкой алгоритмов сопряжения на неизотермических границах со значительной неизотермичностью границы сопряжения по продольной переменной.

Поэтому в данной главе, на основе впервые полученных аналитических решений задач анизотропной теплопроводности с граничными условиями второго и третьего родов, а также на основе приближенно-аналитических решений линеаризованных уравнений теплогазодинамического пограничного слоя, впервые поставлены и приближенно-аналитическими методами решены задачи сопряженного теплопереноса между вязкими газодинамическими течениями и телами с анизотропией свойств.

Как и ранее сопряжение реализуется с помощью граничных условий четвертого рода с введением параметра в виде температуры границы сопряжения, которая определяется затем из равенства нормальных к границе сопряжения составляющих тепловых потоков на этой границе со стороны различных сред.

Для сопряженного теплообмена пригодны аналитические решения анизотропной теплопроводности лишь тех задач, на границах которых заданы или определяются тепловые потоки (граничные условия второго и третьего родов). Поэтому вначале излагается методология аналитического решения задач анизотропной теплопроводности с анизотропией общего вида (наличие смешанных дифференциальных операторов) в условиях теплообмена на границах.

Особенностью решения задач для уравнений параболического типа, со смешанными производными, является тот факт, что наличие смешанных производных не позволяет использовать один из основных методов математической физики – метод разделения переменных, поскольку смешанные производные не разделяются. Для решения подобных задач остаются интегральные методы.

4.1. Аналитические решения задач анизотропной теплопроводности в полупространстве при условии теплообмена на границе

В данном параграфе на основе применения интегральных преобразований Фурье и Лапласа получены аналитические решения второй и третьей начально-краевых задач теплопроводности в анизотропном полупространстве с анизотропией общего вида, предполагающей наличие смешанных производных в дифференциальных уравнениях и наличие всех компонентов градиента температур в граничных условиях второго и третьего родов.

4.1.1. Аналитическое решение задачи анизотропной теплопроводности в полупространстве при задании тепловых потоков на границе

Для анизотропного полупространства (рис. 4.1.) рассматривается следующая начально-краевая задача:

$$\lambda_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}, \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad y \in (0; \infty), \quad t > 0; \quad (4.1.1)$$

$$-\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = q \cdot \eta (l - |x|), \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad y = 0, \quad t > 0; \quad (4.1.2)$$

$$T(\pm\infty, y, t) = 0, \quad \frac{\partial T(\pm\infty, y, t)}{\partial x} = 0, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad y \in (0; +\infty), \quad t > 0; \quad (4.1.3)$$

$$T(x, \infty, t) = 0, \quad \frac{\partial T(x, \infty, t)}{\partial y} = 0, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad y \rightarrow \infty, \quad t > 0; \quad (4.1.4)$$

$$T(x, y, 0) = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad y \in (0; +\infty), \quad t = 0. \quad (4.1.5)$$

Компоненты тензора теплопроводности λ_{ij} , $i, j = 1, 2$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= \lambda_{\xi} \cos^2 \varphi + \lambda_{\eta} \cdot \sin^2 \varphi \\ \lambda_{22} &= \lambda_{\xi} \sin^2 \varphi + \lambda_{\eta} \cdot \cos^2 \varphi \\ \lambda_{12} &= \lambda_{21} = (\lambda_{\xi} - \lambda_{\eta}) \cos \varphi \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

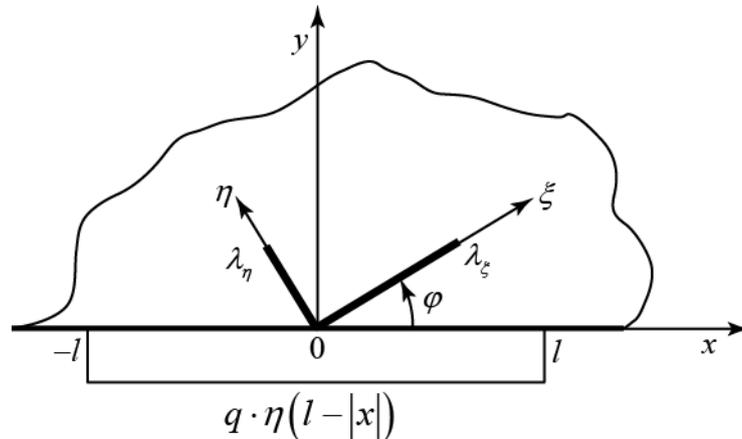


Рис. 4.1. Теплообмен на границе анизотропного пространства.

Единичная функция принимает значения $\eta(l - |x|) = 1$, если $|x| < l$ и $\eta(l - |x|) = 0$, если $|x| > l$.

К задаче (4.1.1)–(4.1.6) применим интегральные преобразования Фурье и Лапласа по переменным x и t соответственно (это можно сделать, так как тепловые потоки на конечном носителе $x \in [-l; l]$ абсолютно интегрируемы):

$$T_{\omega,p}(y) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T(x,y,t) \exp(-i\omega x) \cdot \exp(-pt) dx dt, \quad (4.1.7)$$

получим следующую краевую задачу для трансформанты $T_{\omega,p}$:

$$\lambda_{22} \frac{d^2 T_{\omega,p}}{dy^2} + 2i\omega\lambda_{12} \frac{dT_{\omega,p}}{dy} - \lambda_{11}\omega^2 T_{\omega,p} - c\rho p T_{\omega,p} = 0, \quad 0 < y < \infty; \quad (4.1.8)$$

$$\lambda_{22} \frac{dT_{\omega,p}}{dy} + i\omega\lambda_{12} T_{\omega,p} = -\frac{2q}{\omega p} \sin(\omega l), \quad y = 0; \quad (4.1.9)$$

$$T_{\omega,p} \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty, \quad (4.1.10)$$

решением которой с учетом условий (4.1.4) будет функция $T_{\omega,p}(y)$ (фундаментальное решение с положительной вещественной частью в показателе экспоненты отмечается в силу ограниченности решения на бесконечности).

$$T_{\omega,p}(y) = \frac{2q \sin(\omega l)}{\lambda_{22} \omega p \sqrt{\beta \omega^2 + \gamma p}} \exp\left[-y \left(\sqrt{\beta \omega^2 + \gamma p} + i\omega \alpha\right)\right], \quad (4.1.11)$$

где $\beta = \frac{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2}{\lambda_{22}^2} = \frac{\lambda_{\xi}\lambda_{\eta}}{\lambda_{22}^2}$; $\alpha = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{22}}$; $\gamma = \frac{c\rho}{\lambda_{22}}$.

Обратное преобразование Лапласа осуществим с использованием теоремы умножения, для чего выражение (4.1.11) представим в виде

$$T_{\omega,p}(y) = \frac{2q \cdot \sin(\omega l)}{\lambda_{22} \omega} \cdot \exp(-i\omega y \alpha) \cdot \frac{\exp\left[-y \sqrt{\beta \omega^2 + \gamma p}\right]}{p \sqrt{\beta \omega^2 + \gamma p}}. \quad (4.1.12)$$

Для нахождения оригинала изображения

$$\frac{\exp\left(-y \sqrt{\beta \omega^2 + \gamma p}\right)}{p \sqrt{\beta \omega^2 + \gamma p}} = \frac{1}{p} \cdot \frac{\exp\left(-y \sqrt{\beta \omega^2 + \gamma p}\right)}{\sqrt{\beta \omega^2 + \gamma p}}$$

используем теорему умножения (если $f(t) \div F(p)$ и $g(t) \div G(p)$, то

$$F(p) \cdot G(p) \div f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau.$$

Оригиналом изображения $\frac{1}{p}$ является единица $\frac{1}{p} \div 1$. Для определения оригинала изображения $\exp(-y\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}) / \sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}$ заметим, что []

$$\frac{\exp(-y\sqrt{p})}{\sqrt{p}} \div \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cdot \exp\left(\frac{-y^2}{4t}\right) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-is}^{\sigma+is} \frac{\exp(-y\sqrt{p})}{\sqrt{p}} \cdot \exp(pt) dp, \quad (4.1.13)$$

где σ – вещественная часть параметра p преобразования Лапласа, в левой полуплоскости от которой функция $\frac{\exp(-y\sqrt{p})}{\sqrt{p}} \exp(pt)$ аналитична за исключением особых точек. По аналогии с (4.1.13) для изображения $\exp(-y\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}) / \sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}$ можно записать

$$g(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-is}^{\sigma+is} \frac{\exp(-y\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p})}{\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}} \exp(pt) dp.$$

Сделаем замену переменной интегрирования, положив $p_1 = \beta\omega^2 + \gamma p$;

$$p = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{\beta\omega^2}{\gamma}; \quad dp = dp_1 / \gamma, \quad \text{тогда}$$

$$\begin{aligned} g(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1-is}^{\sigma_1+is} \frac{\exp(-y\sqrt{p_1})}{\sqrt{p_1}} \cdot \exp\left(\frac{p_1}{\gamma} t\right) \cdot \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma} t\right) \cdot d\left(\frac{p_1}{\gamma}\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma} t\right) \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1-is}^{\sigma_1+is} \frac{\exp(-y\sqrt{p_1})}{\sqrt{p_1}} \exp\left(\frac{p_1}{\gamma} t\right) \cdot d\left(\frac{p_1}{\gamma}\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma} t\right) \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\sigma_1-is}^{\sigma_1+is} \frac{\exp(-y\sqrt{\gamma} \cdot \sqrt{p_2})}{\sqrt{\gamma} \cdot \sqrt{p_2}} \exp(p_2 t) \cdot dp_2 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma} t\right) \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\sigma_1-is}^{\sigma_1+is} \frac{\exp(-y\sqrt{\gamma} \cdot \sqrt{p_2})}{\sqrt{p_2}} \exp(p_2 t) dp_2, \end{aligned}$$

где $\sigma_1 = \sigma \cdot \gamma + \beta\omega^2$, $p_2 = p_1 / \gamma$.

Сравнивая последнее выражение с (4.1.13), находим

$$G(p) = \frac{\exp(-y\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p})}{\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}} \div \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}t\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2\gamma}{4t}\right) = g(t). \quad (4.1.14)$$

Таким образом,

$$F(p) = \frac{1}{p} \div 1 = f(t),$$

$$G(p) = \frac{\exp(-y\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p})}{\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}} \div \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma}} \cdot \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}t\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{\gamma y^2}{4t}\right) = g(t)$$

и в соответствии с теоремой умножения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \cdot \frac{\exp(-y\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p})}{\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}} \div 1 * \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma t}} \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}t - \frac{\gamma y^2}{4t}\right) = \\ & = \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma}} \int_0^t 1(\tau) \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}(t-\tau)\right) \exp\left(-\frac{\gamma y^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau. \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Из (4.1.12) и (4.1.15) находим обратное преобразование Лапласа

$$\begin{aligned} T_\omega(y, t) &= \frac{2q \sin(\omega l)}{\lambda_{22}\omega} \exp(-i\omega y \alpha) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma}} \times \\ & \times \int_0^t 1(\tau) \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}(t-\tau)\right) \cdot \exp\left(-\frac{\gamma y^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau. \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

После этого, обратное преобразование Фурье от (4.1.16) имеет вид

$$\begin{aligned} T(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{2q}{\lambda_{22}} \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma}} \int_0^t 1(\tau) \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left(-\frac{\gamma y^2}{4(t-\tau)}\right) \times \\ & \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega l)}{\omega} \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}(t-\tau)\right) \cdot \exp(-i\omega(\alpha y - x)) d\omega \right\} d\tau = \\ & = \frac{q}{\pi^{3/2} \sqrt{\gamma} \cdot \lambda_{22}} \int_0^t 1(\tau) \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left(-\frac{\gamma y^2}{4(t-\tau)}\right) \times \\ & \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega l)}{\omega} \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}(t-\tau)\right) [\cos(\omega(\alpha y - x)) - i \sin(\omega(\alpha y - x))] d\omega \right\} d\tau = \\ & = \frac{2q}{\pi^{3/2} \sqrt{\gamma} \cdot \lambda_{22}} \int_0^t 1(\tau) \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left(-\frac{\gamma y^2}{4(t-\tau)}\right) \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega l)}{\omega} \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}(t-\tau)\right) \cdot \cos(\omega(\alpha y-x)) d\omega \Big\} d\tau = \\
& = \frac{2q}{\pi^{3/2} \cdot \sqrt{\gamma} \cdot \lambda_{22}} \int_0^t 1(\tau) \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left(-\frac{\gamma y^2}{4(t-\tau)}\right) \times \\
& \times \left\{ \int_0^\infty \frac{1}{\omega} \cdot \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}(t-\tau)\right) \cdot \frac{1}{2} [\sin(\omega(l+x-\alpha y)) + \sin(\omega(l-x+\alpha y))] d\omega \right\} d\tau = \\
& = \frac{q}{\pi^{3/2} \sqrt{\gamma} \cdot \lambda_{22}} \int_0^t 1(\tau) \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left(-\frac{\gamma y^2}{4(t-\tau)}\right) \times \\
& \times \left[\frac{\pi}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{l+(x-\alpha y)}{2\sqrt{\beta(t-\tau)/\gamma}}\right) + \frac{\pi}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{l-(x-\alpha y)}{2\sqrt{\beta(t-\tau)/\gamma}}\right) \right] d\tau.
\end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned}
T(x, y, t) &= \frac{q}{2\sqrt{\pi\gamma} \cdot \lambda_{22}} \int_0^t 1(\tau) \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left(-\frac{\gamma y^2}{4(t-\tau)}\right) \times \\
& \times \left[\operatorname{erf}\frac{l+(x-\alpha y)}{2\sqrt{\beta(t-\tau)/\gamma}} + \operatorname{erf}\frac{l-(x-\alpha y)}{2\sqrt{\beta(t-\tau)/\gamma}} \right] d\tau, \tag{4.1.17}
\end{aligned}$$

где

$$\beta = \frac{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2}{\lambda_{22}^2} = \frac{\lambda_\xi\lambda_\eta}{\lambda_{22}^2}; \quad \alpha = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{22}}; \quad \gamma = \frac{c\rho}{\lambda_{22}}.$$

Выражение (4.1.17) есть решение задачи (4.1.1)–(4.1.6). На границе $y=0$ нестационарное распределение температуры вдоль оси Ox будет

$$T(x, 0, t) = \frac{q}{2\sqrt{\pi\gamma} \cdot \lambda_{22}} \int_0^t 1(\tau) \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{l+x}{2\sqrt{\beta(t-\tau)/\gamma}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{l-x}{2\sqrt{\beta(t-\tau)/\gamma}}\right) \right] d\tau. \tag{4.1.18}$$

Ниже проводится анализ результатов расчетов температурных полей в анизотропном полупространстве, полученных с помощью формулы (4.1.17).

На рис. 4.2 приведены такие результаты в изотропном случае (рис. 4.2а), когда $\lambda_\xi = \lambda_\eta$ и в ортотропном случае, когда угол φ ориентации главной оси $O\xi$ относительно декартовой оси Ox равен нулю (рис. 4.2б) или $\frac{\pi}{2}$ (рис. 4.2в) и $\lambda_\xi \neq \lambda_\eta$. Входные данные принимали следующие значения $l=0.015м$,

$q = 100 \text{ кВт/м}^2$; $c\rho = 1000 \text{ кДж/м}^3\text{К}$, конечное время равнялось 10 с. Температурные поля указаны в градусах Цельсия.

В изотропном случае $\lambda_\xi = \lambda_\eta = 0,02 \text{ кВт/м}\cdot\text{К}$, (рис. 4.2а), изотермы в направлении обеих осей Ox и Oy распространяются одинаково, а в ортотропном случае (рис. 4.2б, 4.2в) изотермы вытягиваются в направлении оси тензора теплопроводности с большим значением компонента тензора теплопроводности, причем в этих случаях наблюдается симметрия изотерм относительно оси Oy .

Степень анизотропии $\lambda_\xi / \lambda_\eta = 200$ или $\lambda_\eta / \lambda_\xi = 200$ наблюдается у некоторых сортов пиролитического графита [176]. Такие материалы можно использовать для локализации тепловых потоков или температур в окрестности какой-либо координатной оси или для канализации тепловых потоков в направлении координатной оси с большим коэффициентом теплопроводности.

В анизотропных телах изотермы также ориентированы вдоль главной оси с большим компонентом главного тензора теплопроводности, что иллюстрируется рисунком 4.3, где представлены результаты расчетов с различными степенями анизотропии с углом φ ориентации главных осей тензора теплопроводности, равным $\pi/6$.

Таким образом, появляется возможность ориентировать тепловые потоки и температурные поля вдоль оси с большим коэффициентом теплопроводности и тем сильнее, чем выше степень анизотропии.

Поскольку на границе действуют краевое условие второго рода (4.1.2), то на этой границе в областях с нулевыми тепловыми потоками кондуктивные потоки не равны нулю, в результате чего граница $y=0$ в области $|x|>l$ нагревается и тем интенсивнее, чем больше значение компонента λ_{11} и меньше значение угла φ в соответствии с выражением (4.1.18) (выражение для коэффициента β).

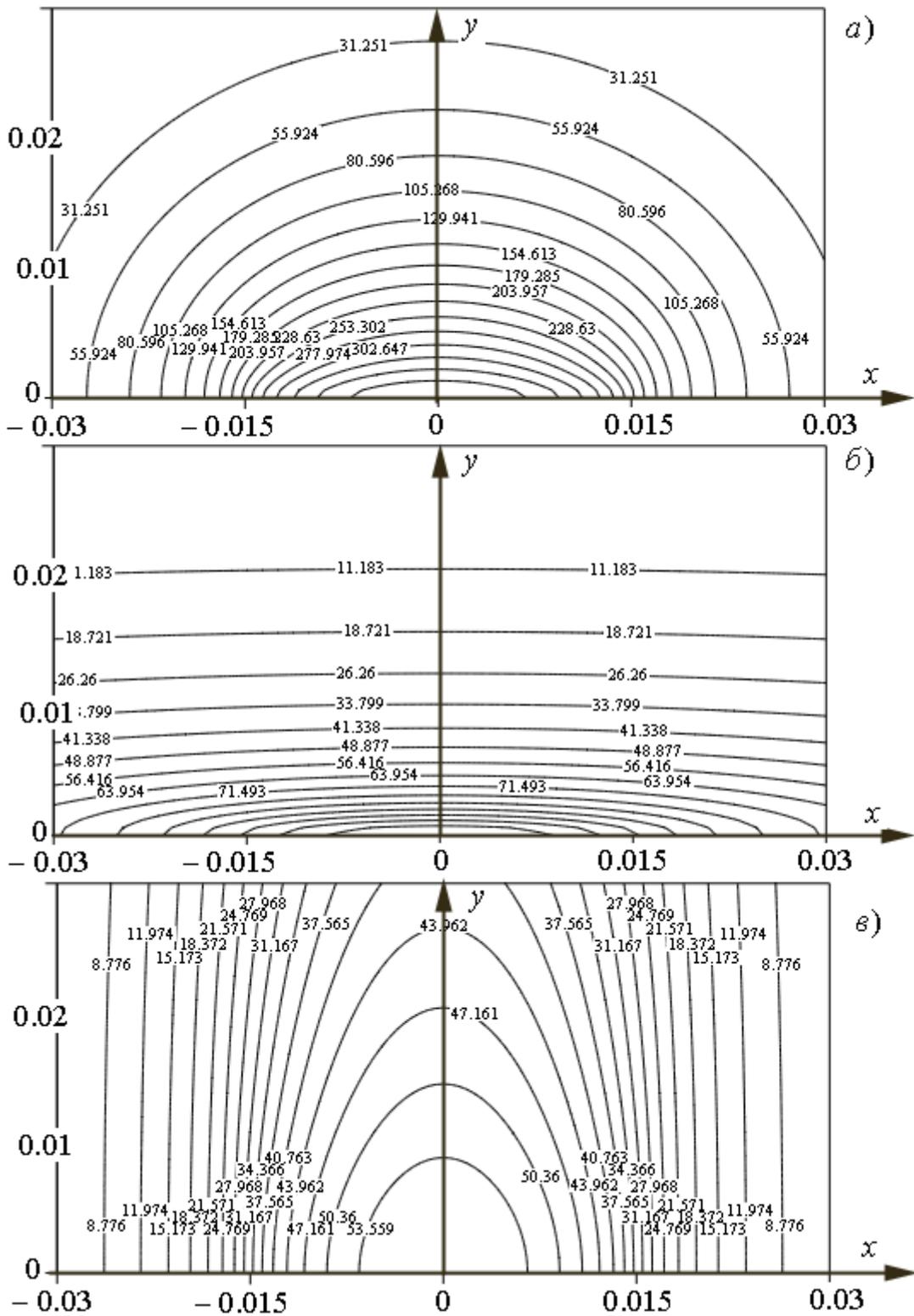


Рис. 4.2. Распределение температур в изотропном и ортотропном телах:

а) $\lambda_{\xi} = 0.02 \frac{\kappa B m}{\text{м} \cdot \text{К}}$, $\lambda_{\eta} = 0.02 \frac{\kappa B m}{\text{м} \cdot \text{К}}$; б) $\lambda_{\xi} = 4 \frac{\kappa B m}{\text{м} \cdot \text{К}}$, $\lambda_{\eta} = 0.02 \frac{\kappa B m}{\text{м} \cdot \text{К}}$;

в) $\lambda_{\xi} = 0.02 \frac{\kappa B m}{\text{м} \cdot \text{К}}$, $\lambda_{\eta} = 4 \frac{\kappa B m}{\text{м} \cdot \text{К}}$.

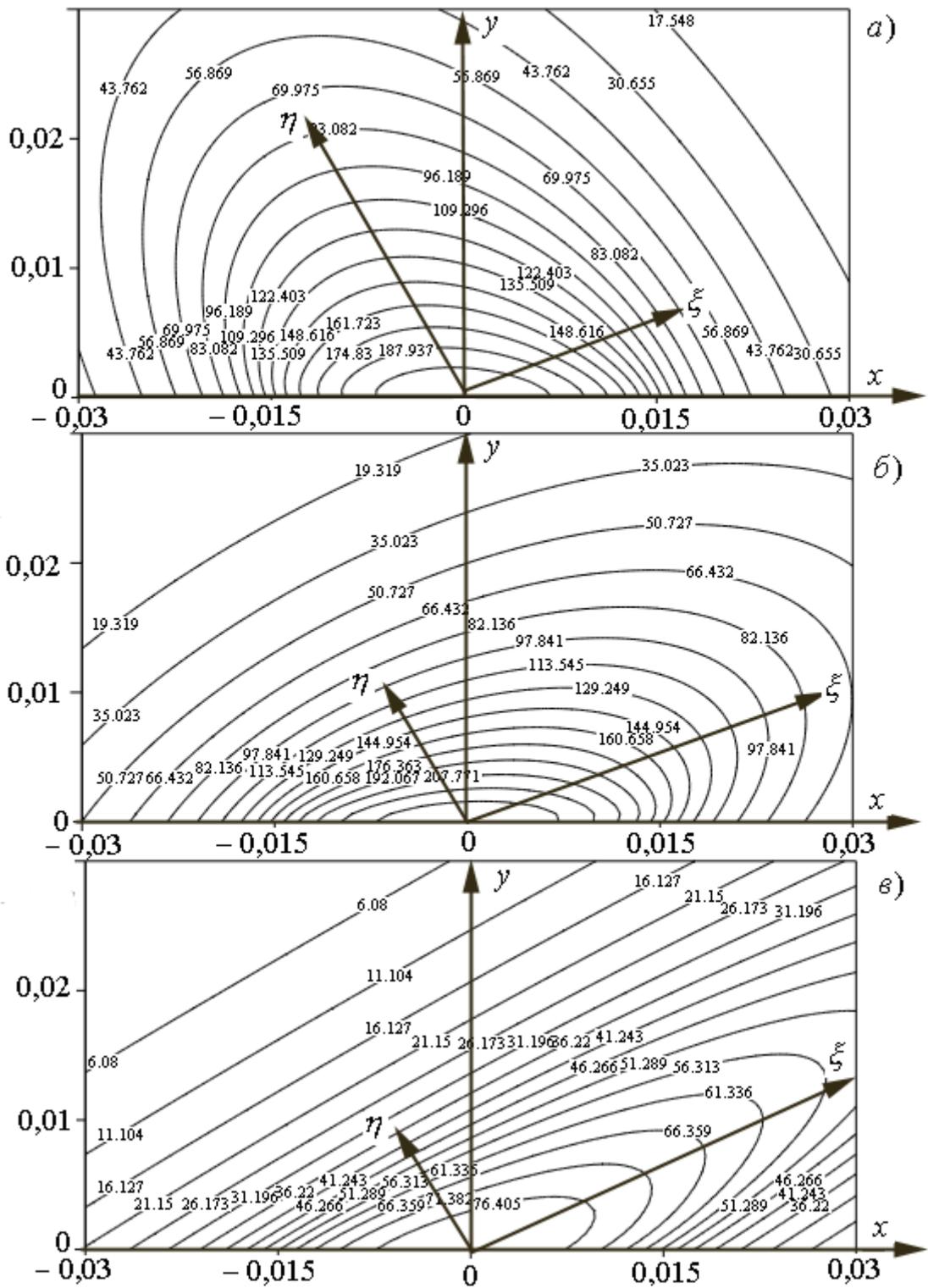


Рис. 4.3. Распределение температур в анизотропном теле:

а) $\lambda_{\xi} = 0.02 \frac{\kappa B m}{m \cdot K}$, $\lambda_{\eta} = 0.08 \frac{\kappa B m}{m \cdot K}$; б) $\lambda_{\xi} = 0.08 \frac{\kappa B m}{m \cdot K}$, $\lambda_{\eta} = 0.02 \frac{\kappa B m}{m \cdot K}$;

в) $\lambda_{\xi} = 4 \frac{\kappa B m}{m \cdot K}$, $\lambda_{\eta} = 0.02 \frac{\kappa B m}{m \cdot K}$.

4.1.2. Теплоперенос в анизотропном полупространстве в условиях теплообмена с окружающей средой, имеющей заданную температуру

В этом разделе рассматривается задача теплопроводности в анизотропном полупространстве в условиях теплообмена с окружающей средой, имеющей заданную температуру (рис. 4.7). Для функции $T(x, y, t)$ формулируется следующая задача анизотропной теплопроводности:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad x \in (-\infty; +\infty),$$

$$y \in (0; \infty), \quad t > 0; \quad (4.1.19)$$

$$-\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} + \alpha_1 T(x, 0, t) = \alpha_2 F_e(x, t) \cdot \eta(l - |x|),$$

$$x \in (-\infty; +\infty), \quad y = 0, \quad t > 0; \quad (4.1.20)$$

где α_1, α_2 – коэффициенты таковы, что при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ имеем коэффициент теплоотдачи α в законе теплообмена в форме Ньютона (обозначим $\alpha \equiv \alpha_1$)

$$-\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \alpha_1 [F_e(x, t) \cdot \eta(l - |x|) - T(x, 0, t)], \quad (4.1.21)$$

$$T(x, \infty, t) = 0, \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad y \rightarrow \infty, \quad t > 0; \quad (4.1.22)$$

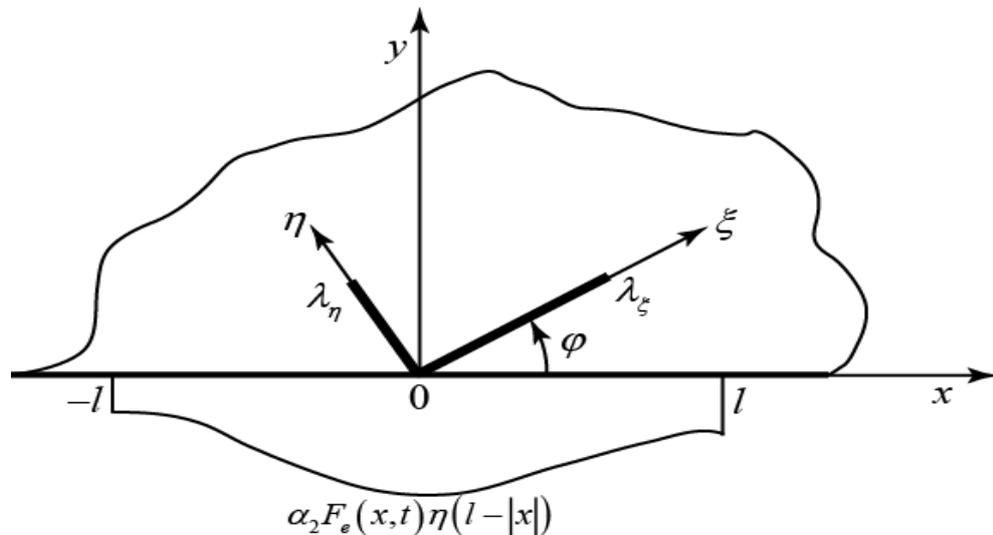


Рис. 4.4. Анизотропное полупространство в условиях теплообмена с окружающей средой с температурой $F_e(x, t) \cdot \eta(l - |x|)$.

$$T(x, y, 0) = 0, \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad y \in [0; \infty), \quad t = 0. \quad (4.1.23)$$

Кроме этого, должны выполняться естественные условия

$$T(\pm\infty, y, t) = 0, \quad \frac{\partial T(\pm\infty, y, t)}{\partial x} = 0, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad y \in [0; \infty), \quad t > 0. \quad (4.1.24)$$

Здесь $\eta(l - |x|) = 1$ для $|x| < l$, $\eta(l - |x|) = 0$ для $|x| > l$.

Построим граничную функцию влияния $G(x, \xi_j, y, t, \tau_k)$ (теорема о существовании граничной функции влияния доказана в параграфе 4.2), разбив носители $l_1 \times t_f$ на $2J \times K$ прямоугольников, в центре каждого из которых возьмем точку с координатами (ξ_j, τ_k) , $-J \leq j \leq J$, $0 \leq k \leq K$ и используя вместо (4.1.20) граничное условие:

$$\begin{aligned} -\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} + \alpha_1 T(x, 0, t) &= \alpha_2 F_e(\xi_j, \tau_k) \cdot \delta(x - \xi_j) \cdot \delta(t - \tau_k), \\ x \in (-\infty; +\infty), \quad y = 0, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

Тогда, в соответствии с принципом суперпозиции, приближенное решение задачи (4.1.19)- (4.1.24) определяется выражением

$$\bar{T}(x, y, t) = \sum_{k=1}^K \sum_{j=-J}^J G(x, \xi_j, y, t, \tau_k) F_e(\xi_j, \tau_k) \Delta \xi \cdot \Delta \tau. \quad (4.1.26)$$

Пределом интегральных сумм (4.1.26) при $J \rightarrow \infty$, $K \rightarrow \infty$ ($\Delta \xi \rightarrow 0, \Delta \tau \rightarrow 0$) будет интеграл

$$T(x, y, t) = \oint_C^t G(x, \xi, y, t, \tau) F_e(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (4.1.27)$$

где C – замкнутый контур, включающий левую, правую и верхние бесконечные границы, а поскольку там теплообмена нет, то

$$T(x, y, t) = \int_0^t \int_{-l_1}^{l_1} G(x, \xi, y, t, \tau) F_e(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (4.1.28)$$

Для нахождения функции источника $G(x, \xi, y, t, \tau)$ к задаче (4.1.19), (4.1.21)-(4.1.25) применим интегральные преобразования Фурье и Лапласа по

переменной x и t соответственно, переходим к третьей краевой задаче для ОДУ относительно функции $T_{\omega,p}(y)$:

$$\lambda_{22} \frac{d^2 T_{\omega,p}}{dy^2} + i \cdot 2\lambda_{12}\omega \frac{dT_{\omega,p}}{dy} - (c\rho p + \lambda_{11}\omega^2) T_{\omega,p} = 0, \quad y \in (0; \infty); \quad (4.1.29)$$

$$\lambda_{22} \frac{dT_{\omega,p}}{dy} \Big|_{y=0} + (i\lambda_{12}\omega - \alpha_1) T_{\omega,p} \Big|_{y=0} = -\alpha_2 F_e(\xi_j, \tau_k) e^{-i\omega\xi_j} \cdot e^{-p\tau_k}, \quad y = 0; \quad (4.1.30)$$

$$T_{\omega,p}(\infty) = 0, \quad y \rightarrow \infty. \quad (4.1.31)$$

Учитывая краевые условия (4.1.30) и (4.1.31), получаем решение задачи (4.1.29)-(4.1.31):

$$T_{\omega,p}(y) = \frac{\alpha_2 F_e(\xi_j, \tau_k)}{\lambda_{22}} \exp(-i\omega\xi_j) \exp(-p\tau_k) \exp(-i\omega\alpha y) \frac{\exp(-y\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p})}{\left(\frac{\alpha_1}{\lambda_{22}} + \sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\right)}, \quad (4.1.32)$$

где

$$a = \lambda_{12} / \lambda_{22}, \quad \beta = (\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2) / \lambda_{22}^2 = \lambda_\xi \cdot \lambda_\eta / \lambda_{22}^2, \quad \gamma = c\rho / \lambda_{22}.$$

Вначале получим обращение по Лапласу изображения $\exp(-y\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}) / \left(\frac{\alpha_1}{\lambda_{22}} + \sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\right)$:

$$f_2(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - is}^{\sigma + is} \frac{\exp(-y\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p})}{\alpha_1 / \lambda_{22} + \sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}} \exp(pt) dp. \quad (4.1.33)$$

Для чего введем следующие преобразования подынтегральных выражений (4.1.33).

$$1) \text{ Пусть } p_1 = \beta\omega^2 + \gamma p, \quad p = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{\beta\omega^2}{\gamma}; \quad dp = \frac{dp_1}{\gamma};$$

$$\text{при } p = \sigma - is: \quad p_1 = (\gamma\sigma + \beta\omega^2) - is = \sigma_1 - is$$

$$\text{при } p = \sigma + is: \quad p_1 = (\gamma\sigma + \beta\omega^2) + is = \sigma_1 + is.$$

В этом случае

$$f_2(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - is}^{\sigma_1 + is} \frac{\exp(-y\sqrt{p_1})}{\alpha_1 / \lambda_{22} + \sqrt{p_1}} \cdot \exp\left(\frac{p_1}{\gamma} - \frac{\beta\omega^2}{\gamma}\right) t \frac{dp_1}{\gamma} =$$

$$= \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}t\right) \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - is}^{\sigma_1 + is} \frac{\exp(-y\sqrt{p_1})}{\alpha_1 / \lambda_{22} + \sqrt{p_1}} \exp\left(\frac{p_1}{\gamma}t\right) \frac{dp_1}{\gamma}.$$

2) Далее, пусть $p_2 = \frac{p_1}{\gamma}$, $p_1 = p_2\gamma$; $dp_2 = \frac{dp_1}{\gamma}$;

при $p_1 = \sigma_1 - is$: $p_2 = \frac{\sigma_1}{\gamma} - i\frac{s}{\gamma} = \left(\sigma + \frac{\beta\omega^2}{\gamma}\right) - i\frac{s}{\gamma} = \sigma_2 - is_1$;

при $p_1 = \sigma_1 + is$: $p_2 = \frac{\sigma_1}{\gamma} + i\frac{s}{\gamma} = \left(\sigma + \frac{\beta\omega^2}{\gamma}\right) + i\frac{s}{\gamma} = \sigma_2 + is_1$.

Тогда

$$f_2(t) = \frac{\exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}t\right)}{\sqrt{\gamma}} \cdot \lim_{s_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_2 - is_1}^{\sigma_2 + is_1} \frac{\exp(-y\sqrt{\gamma}\sqrt{p_2})}{\alpha_1 / (\lambda_{22}\sqrt{\gamma}) + \sqrt{p_2}} \cdot \exp(p_2 t) dp_2.$$

Сделаем обозначения $b = \alpha_1 / (\lambda_{22}\sqrt{\gamma})$, $d = y\sqrt{\gamma}$, получим

$$f_2(t) = \frac{\exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}t\right)}{\sqrt{\gamma}} \cdot \lim_{s_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_2 - is_1}^{\sigma_2 + is_1} \frac{\exp(-d \cdot \sqrt{p_2})}{b + \sqrt{p_2}} \cdot \exp(p_2 t) dp_2.$$

3) Пусть, наконец, $b + \sqrt{p_2} = \sqrt{p_3}$, $p_3 = p_2 + 2b\sqrt{p_2} + b^2$, $\sqrt{p_2} = \sqrt{p_3} - b$,

тогда $p_2 = p_3 - 2b\sqrt{p_3} + b^2$; $dp_2 = \frac{\sqrt{p_3} - b}{\sqrt{p_3}} dp_3$;

при $p_2 = \sigma_2 - is_1$: $p_3 = \sigma_2 + b^2 + 2b\sqrt{\sigma_2 - is_1} - is_1 =$

$$= \sigma_2 + b^2 + 2b \cdot \sqrt{\sigma_2^2 + s_1^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - is_1 \approx (\sigma_2 + b^2 + \sqrt{2}bs_1) - is_1(1 + \sqrt{2}b) = \sigma_3 - is_1;$$

в качестве корня из числа $\sigma_2 - is_1$ принято главное значение аргумента, равное

$$\pi/2, \text{ а } \sqrt{\sigma_2^2 + s_1^2} \approx s_1;$$

аналогично, при $p_2 = \sigma_2 + is_1$: $p_3 = \sigma_2 + b^2 + 2b\sqrt{\sigma_2 + is_1} - is_1 \approx$

$$\approx (\sigma_2 + b^2 + \sqrt{2}bs_1) + is_1(1 + \sqrt{2}b) = \sigma_3 + is_1.$$

Поскольку $\sigma_3 = \sigma_2 + b^2 + \sqrt{2}bs_1$ – бесконечно большое при $s_1 \rightarrow \infty$, и поскольку отсутствуют особые точки, кроме точки ветвления $p_2 = 0$, то в качестве σ_3 выбирается произвольное положительное значение ($\sigma_4 > 0$).

Таким образом,

$$f_2(t) = \frac{\exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}t\right)}{\sqrt{\gamma}} \cdot \lim_{s_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_4 - is_1}^{\sigma_4 + is_1} \frac{\exp\left[-d \cdot (\sqrt{p_3} - b)\right]}{\sqrt{p_3}} \times$$

$$\times \exp\left[\left(p_3 - 2b\sqrt{p_3} + b^2\right)t\right] \cdot \frac{\sqrt{p_3} - b}{\sqrt{p_3}} \cdot dp_3 = \frac{\exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}t\right)}{\sqrt{\gamma}} \cdot \exp(d \cdot b + b^2 t) \cdot \lim_{s_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \times$$

$$\times \int_{\sigma_4 - is_1}^{\sigma_4 + is_1} \left\{ \frac{\exp\left[-(d + 2bt)\sqrt{p_3}\right]}{\sqrt{p_3}} - b \frac{\exp\left[-(d + 2bt)\sqrt{p_3}\right]}{p_3} \exp(p_3 t) \right\} dp_3.$$

Поскольку интегралы являются табличными [122] то,

$$f_2(t) = \frac{\exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}t\right)}{\sqrt{\gamma}} \cdot \exp(d \cdot b + b^2 t) \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cdot \exp\left[-\frac{(d + 2bt)^2}{4t}\right] - b \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{d + 2bt}{2\sqrt{t}}\right) \right\}.$$

Возвращаясь к обозначениям b и d , получим

$$f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}t\right) \cdot \exp\left(\frac{\alpha_1^2}{\gamma_{22}^2}t + \frac{\alpha_1 y}{\lambda_{22}}\right) \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{\left(y\sqrt{\gamma} + \frac{2\alpha_1}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}}t\right)^2}{4t}\right] - \frac{\alpha_1}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}} \operatorname{erfc}\left(\frac{y\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{t}} + \frac{\alpha_1\sqrt{t}}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}}\right) \right\}. \quad (4.1.34)$$

Поскольку $\exp(-p\tau_k) \div \delta(t - \tau_k) = f_1(t)$, то на основе теоремы о свертке двух изображений, из (4.1.34) и (4.1.32) находим

$$T_\omega(y, t) = \frac{\alpha_2 F_e(\xi_j, \tau_k)}{\lambda_{22}} \exp(-i\omega ay) \cdot f_1(t) * f_2(t) =$$

$$= \frac{\alpha_2 F_e(\xi_j, \tau_k)}{\lambda_{22}} \exp(-i\omega ay) \exp(-i\omega \xi_j) \cdot \int_0^t \delta(t - \tau_k) \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \exp\left[-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}(t - \tau)\right] \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp \left[\frac{\alpha_1^2}{\lambda_{22}^2 \gamma} (t - \tau) + \frac{\alpha_1 y}{\lambda_{22}} \right] \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi(t - \tau)}} \exp \left[- \frac{\left(y\sqrt{\gamma} + \frac{2\alpha_1(t - \tau)}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}} \right)^2}{4(t - \tau)} \right] - \right. \\
& \left. - \frac{\alpha_1}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}} \operatorname{erfc} \left[\frac{y\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{t - \tau}} + \frac{\alpha_1\sqrt{t - \tau}}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}} \right] \right\} d\tau = \\
& = \frac{\alpha_2 F_e(\xi_j, \tau_k)}{\lambda_{22}} \exp(-i\omega a y) \exp(-i\omega \xi_j) \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \exp \left[- \frac{\beta \omega^2}{\gamma} (t - \tau_k) \right] \times \\
& \times \exp \left[\frac{\alpha_1^2}{\lambda_{22}^2 \gamma} (t - \tau_k) + \frac{\alpha_1 y}{\lambda_{22}} \right] \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi(t - \tau_k)}} \exp \left[- \frac{\left(y\sqrt{\gamma} + \frac{2\alpha_1(t - \tau_k)}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}} \right)^2}{4(t - \tau_k)} \right] - \right. \\
& \left. - \frac{\alpha_1}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}} \operatorname{erfc} \left[\frac{y\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{t - \tau_k}} + \frac{\alpha_1\sqrt{t - \tau_k}}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}} \right] \right\} \quad (4.1.35)
\end{aligned}$$

Обращение по Фурье от (4.1.35) приводит к соотношению:

$$\begin{aligned}
T(x, y, t) &= \frac{\alpha_2 F_e(\xi_j, \tau_k)}{2\pi \lambda_{22} \sqrt{\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega x) \exp(-i\omega a y) \exp(-i\omega \xi_j) \times \\
& \times \exp \left[- \frac{\beta \omega^2}{\gamma} (t - \tau_k) \right] d\omega \cdot \exp(\varphi_1(\alpha_1, y, t - \tau_k)) \times \\
& \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi(t - \tau)}} \exp(-\varphi_2^2(\alpha_1, y, t - \tau_k)) - \frac{\alpha_1}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}} \operatorname{erfc}(\varphi_2(\alpha_1, y, t - \tau_k)) \right\}. \quad (4.1.36)
\end{aligned}$$

где

$$\varphi_1(\alpha_1, y, t - \tau) = \frac{\alpha_1^2}{\lambda_{22}^2 \gamma} (t - \tau) + \frac{\alpha_1 y}{\lambda_{22}}, \quad \varphi_2(\alpha_1, y, t - \tau) = \frac{y\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{t - \tau}} + \frac{\alpha_1\sqrt{t - \tau}}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}}.$$

Вычислим интеграл по параметру ω преобразования Фурье

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega x) \exp(-i\omega a y) \exp(-i\omega \xi_j) \times \exp \left[- \frac{\beta \omega^2}{\gamma} (t - \tau_k) \right] d\omega = \\
& = \frac{\sqrt{\pi\gamma}}{2\pi\sqrt{\beta(t - \tau_k)}} \exp \left(- \frac{(\alpha y - x + \xi_j)^2}{4\beta(t - \tau_k)/\gamma} \right). \quad (4.1.37)
\end{aligned}$$

Тогда выражение (4.1.37) с учетом (4.1.38) преобразуется следующим образом:

$$T(x, y, t) \equiv G(x, y, t, \xi_j, \tau_k) = \frac{\alpha_2 F_e(\xi_j, \tau_k)}{2\lambda_{22}\sqrt{\pi\beta(t-\tau_k)}} \exp\left(-\frac{(\alpha y - x + \xi_j)^2}{4\beta(t-\tau_k)/\gamma}\right) \exp(\varphi_1(\alpha_1, y, t-\tau_k)) \times$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau_k)}} \exp(-\varphi_2^2(\alpha_1, y, t-\tau_k)) - \frac{\alpha_1}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}} \operatorname{erfc}(\varphi_2(\alpha_1, y, t-\tau_k)) \right\} \quad (4.1.38)$$

Подставляя (4.1.38) в (4.1.28) получим:

$$T(x, y, t) = \frac{\alpha_2}{2\lambda_{22}\sqrt{\pi\beta}} \int_0^l \int_{-l}^l \frac{F_e(\xi, \tau)}{\sqrt{(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(\alpha y - x + \xi)^2}{4\beta(t-\tau)/\gamma}\right) \exp(\varphi_1(\alpha_1, y, t-\tau)) \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp(-\varphi_2^2(\alpha_1, y, t-\tau)) - \frac{\alpha_1}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}} \operatorname{erfc}(\varphi_2(\alpha_1, y, t-\tau)) \right\} d\xi d\tau. \quad (4.1.39)$$

где

$$\varphi_1(\alpha_1, y, t-\tau) = \frac{\alpha_1^2}{\lambda_{22}^2 \gamma} (t-\tau) + \frac{\alpha_1 y}{\lambda_{22}},$$

$$\varphi_2(\alpha_1, y, t-\tau) = \frac{y\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{t-\tau}} + \frac{\alpha_1 \sqrt{t-\tau}}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}},$$

$$a = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{22}}, \quad \beta = (\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2) / \lambda_{22}^2 = \lambda_\xi \cdot \lambda_\eta / \lambda_{22}^2, \quad \gamma = \frac{c\rho}{\lambda_{22}}.$$

Функция (4.1.39) – аналитическое решение задачи (4.1.19)–(4.1.24).

При $F_e(x, t) = F_e = \text{const}$, интеграл в (4.1.39) по пространственной переменной x можно вычислить, после чего получим следующее решение:

$$T(x, y, t) = \frac{\alpha_2 F_e}{2\lambda_{22}\sqrt{\gamma}} \int_0^t 1(\tau) \cdot \exp(\varphi_1, y, t-\tau) \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp(-\varphi_2^2(\alpha_1, y, t-\tau)) - \frac{\alpha_1}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}} \operatorname{erfc}(\varphi_2(\alpha_1, y, t-\tau)) \right\} \times$$

$$\times \left[\operatorname{erf} \frac{l - ay + x}{2\sqrt{\beta(t-\tau)/\gamma}} + \operatorname{erf} \frac{l + ay - x}{2\sqrt{\beta(t-\tau)/\gamma}} \right] d\tau, \quad (4.1.40)$$

Поскольку при $\alpha_1 = 0$ $\varphi_1(0, y, t-\tau) = 0$, $\varphi_2(0, y, t-\tau) = y\sqrt{\gamma}/2\sqrt{t-\tau}$, то функция (4.1.40) определяет решение (4.1.17) задачи (4.1.1)–(4.1.5).

4.2. Аналитические решения задач теплопереноса в условиях теплообмена на границах анизотропной пластины

В данном параграфе впервые выводятся аналитические решения и получены результаты исследования теплопереноса в анизотропных пластинах с анизотропией общего вида, когда на границах пластины действуют тепловые потоки (граничные условия второго рода). Вначале подробно рассматривается вывод аналитического решения для анизотропной полосы в случае кусочно-постоянных тепловых потоков на границах. Затем это решение использовано для случая задания тепловых потоков на границах в виде симметричных относительно вертикальной оси функций и, наконец, рассмотрен случай задания произвольных тепловых потоков с построением граничных функций влияния (функций Грина).

4.2.1. Случай кусочно-постоянных тепловых потоков на границах анизотропной пластины

Для анизотропной полосы (рис. 4.5) ставится следующая начально-краевая задача теплопроводности с заданным ненулевым теплообменом на конечных отрезках $x \in (-l_1, l_1)$ на границе $y = 0$ и $x \in (-l_2, l_2)$ на границе $y = \delta$ и нулевым тепловым потоком вне этих интервалов:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad y \in [0, \delta], \quad t > 0; \quad (4.2.1)$$

$$-\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = q_1 \cdot \eta (l_1 - |x|), \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad y = 0, \quad t > 0; \quad (4.2.2)$$

$$\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = q_2 \cdot \eta (l_2 - |x|), \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad y = \delta, \quad t > 0; \quad (4.2.3)$$

$$T(\pm\infty, y, t) = 0, \quad \frac{\partial T(\pm\infty, y, t)}{\partial x} = 0, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad y \in [0, \delta], \quad t > 0; \quad (4.2.4)$$

$$T(x, y, 0) = 0, \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad y \in [0, \delta], \quad t = 0, \quad (4.2.5)$$

где $\eta(l_i - |x|) = 1$ для $|x| < l_i$ и $\eta(l_i - |x|) = 0$ для $|x| > l_i$, $i = 1, 2$.

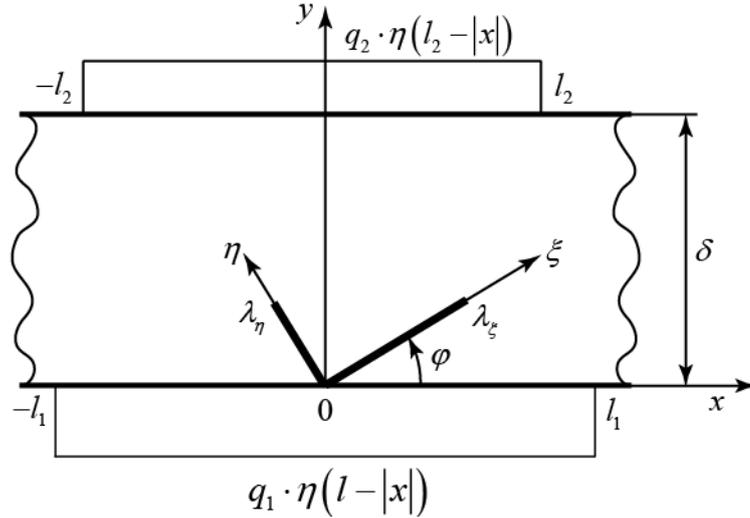


Рис. 4.5. Теплообмен на границах анизотропной пластины с кусочно-постоянными тепловыми потоками

К задаче (4.2.1)–(4.2.5) применим последовательно преобразования Фурье и Лапласа по переменной x и t соответственно, получим следующую задачу для ОДУ относительно функции $T_{\omega, p}(y)$:

$$\lambda_{22} \frac{d^2 T_{\omega, p}}{dy^2} + 2i\omega\lambda_{12} \frac{dT_{\omega, p}}{dy} - (\lambda_{11}\omega^2 + c\rho p)T_{\omega, p} = 0, \quad y \in (0; \delta); \quad (4.2.6)$$

$$\lambda_{22} \frac{dT_{\omega, p}(y)}{dy} + i\lambda_{12}\omega T_{\omega, p}(y) = -\frac{2q_1}{p\omega} \sin(\omega l_1), \quad y = 0; \quad (4.2.7)$$

$$\lambda_{22} \frac{dT_{\omega, p}(y)}{dy} + i\lambda_{12}\omega T_{\omega, p}(y) = \frac{2q_2}{p\omega} \sin(\omega l_2), \quad y = \delta, \quad (4.2.8)$$

где

$$T_{\omega, p}(y) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T(x, y, t) \cdot \exp(-i\omega x) \cdot \exp(-pt) dx dt.$$

Решением задачи (4.2.6)–(4.2.8) будет функция

$$T_{\omega, p}(y) = \frac{2 \exp(-i\omega \alpha y)}{\omega \cdot \lambda_{22}} \cdot \frac{q_2 \sin(\omega l_2)}{\exp(-i\omega \alpha \delta)} \cdot \frac{1}{p} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{\exp\left(y\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\right) + \exp\left(-y\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\right)}{\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p} \left[\exp\left(\delta\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\right) - \exp\left(-\delta\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\right) \right]} + \frac{2 \exp(-i\omega\alpha y)}{\omega\lambda_{22}} \cdot q_1 \cdot \sin(\omega l_1) \cdot \frac{1}{p} \times \\ & \times \frac{\exp\left[(\delta - y)\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\right] + \exp\left[-(\delta - y)\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\right]}{\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p} \left[\exp\left(\delta\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\right) - \exp\left(-\delta\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\right) \right]}, \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Из выражения (4.2.9) выделим следующие две функции, для которых найдем обратные преобразования Лапласа:

$$F(p) = \frac{\exp\left(y\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\right) + \exp\left(-y\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\right)}{\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p} \left[\exp\left(\delta\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\right) - \exp\left(-\delta\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\right) \right]}, \quad (4.2.10)$$

$$\Phi(p) = \frac{\exp\left[(\delta - y)\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\right] + \exp\left[-(\delta - y)\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\right]}{\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p} \left[\exp\left(\delta\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\right) - \exp\left(-\delta\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\right) \right]}. \quad (4.2.11)$$

Будем вначале рассматривать выражение (4.2.10).

Для обращения по Лапласу изображения (4.2.10) убедимся, во-первых, что точка $p = -\frac{\beta\omega^2}{\gamma}$ не является точкой ветвления. Пусть $\beta\omega^2 + \gamma p = p_1$, тогда

$$w_{1,2} = \left| \sqrt{p_1} \right| \cdot \exp\left(\frac{\varphi + 2n\pi}{2}\right), \quad n = 0, 1. \quad \text{При } n = 0: \quad w_1 = \left| \sqrt{p_1} \right| \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right); \quad \text{при } n = 1:$$

$$w_2 = \left| \sqrt{p_1} \right| \left(\cos \left(\pi + \frac{\varphi}{2} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\varphi}{2} \right) \right) = \left| \sqrt{p_1} \right| \left(-\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2} \right) = -w_1. \quad \text{Таким образом, при}$$

первом обходе точки $p = -\frac{\beta\omega^2}{\gamma}$ значение корня уравнения $\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p} = 0$ равно

$$w_1 = \sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}, \quad \text{а при втором обходе значение корня равно } w_2 = -\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}. \quad \text{Если}$$

теперь в выражение (4.2.10) вместо $\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}$ подставить $-\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}$, то

получим, аналогичную функцию, совпадающую с (4.2.10). То есть при двух

значениях корня $\pm\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}$ функция (4.2.10) принимает единственное

значение и, следовательно, $p = -\frac{\beta\omega^2}{\gamma}$ не точка ветвления.

Во-вторых, покажем, что точка $p = -\frac{\beta\omega^2}{\gamma}$ является простым полюсом функции (4.2.10), а не полюсом второго порядка, как это может показаться на первый взгляд, т.е. точка $p = -\frac{\beta\omega^2}{\gamma}$ есть простой нуль функции (4.2.10).

$$f(p) = \sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p} \left[\exp(\delta\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}) - \exp(-\delta\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}) \right], \quad f\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}\right) = 0;$$

$$f'(p) = \frac{\gamma}{2\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}} \left[\exp(\delta\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}) - \exp(-\delta\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}) \right] + \\ + \sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p} \cdot \frac{\gamma \cdot \delta}{2\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}} \left[\exp(\delta\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}) + \exp(-\delta\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}) \right].$$

Разложим экспоненты в первом слагаемом этого выражения в ряды Маклорена в окрестности $\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p} = 0$, получим в квадратных скобках обоих слагаемых при $\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p} = 0$ выражение $\gamma\delta$, вследствие чего

$$f'\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}\right) = 2\gamma \cdot \delta \neq 0,$$

т.е. точка $p = -\frac{\beta\omega^2}{\gamma}$ – простой нуль и, следовательно, простой полюс функции (4.2.10).

Итак, функция (4.2.10) является мероморфной, т.е. имеет только простые полюса

$$f(p) = \left[\exp(\delta\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}) - \exp(-\delta\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}) \right] \sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p} = 0.$$

Из равенства нулю первого сомножителя имеем $\exp(2\delta\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}) = 1 = \exp(2k\pi i)$, $\beta\omega^2 + \gamma p = -\frac{k^2\pi^2}{\delta^2}$; $p_k = -\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2} - \frac{\beta\omega^2}{\gamma}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а так как k^2 – чётно, то

$$p_k = -\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2} - \frac{\beta\omega^2}{\gamma}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.12)$$

Если в функции $f(p)$ приравнять нулю второй сомножитель, то получим простой полюс, уже входящий в (4.2.12).

Поскольку функция (4.2.10) – мероморфна то ее можно разложить в ряд по элементарным дробям, в числителях которых находятся вычеты функций $F(p)$, а в знаменателях – биномы $p - p_k$.

Вычислим вычеты функции $F(p)$ (4.2.10) в простых полюсах p_k .

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(F(p); p_k) &= \frac{\exp\left(y\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\right) + \exp\left(-y\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\right)}{\left[\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p} \exp\left(\delta\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\right) - \exp\left(-\delta\sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}\right)\right]} \Bigg|_{p=p_k} = \\ &= \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{\exp(yz) + \exp(-yz)}{\frac{\gamma}{2z} [\exp(\delta z) - \exp(-\delta z)] + \frac{\gamma\delta z}{2z} [\exp(\delta z) + \exp(-\delta z)]} = \\ &= \frac{\exp\left(i\frac{k\pi y}{\delta}\right) + \exp\left(-i\frac{k\pi y}{\delta}\right)}{\frac{\gamma\delta}{2k\pi i} [\exp(ik\pi) - \exp(-ik\pi)] + \frac{\gamma\delta}{2} [\exp(ik\pi) + \exp(-ik\pi)]} = \\ &= \frac{2\cos(k\pi y / \delta)}{\frac{\gamma\delta}{k\pi} \sin(k\pi) + \gamma\delta \cdot \cos(k\pi)}, \end{aligned}$$

где $z = \sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}$.

Таким образом,

$$\operatorname{Res}(F(p); p_k) = \frac{2}{\gamma\delta} \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{\delta} y\right)}{\frac{\sin(k\pi)}{k\pi} + (-1)^k}$$

или

$$\operatorname{Res}(F(p); p_k) = (-1)^k \frac{2}{\gamma\delta} \cos\left(k\pi \frac{y}{\delta}\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.2.13)$$

Для полюса $p_0 = -\frac{\beta\omega^2}{\gamma}$ при $k = 0$

$$\operatorname{Res}(F(p); p_0) = \frac{1}{\gamma\delta}, \quad k=0, \quad (4.2.14)$$

поскольку $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin(k\pi)}{k\pi} = 1$, $\cos\left(\frac{k\pi y}{\delta}\right)_{k=0} = 1$ и $\cos(k\pi)_{k=0} = 1$.

Теперь изображение $F(p)$ представим в виде ряда (с учетом четности (4.2.12) относительно k^2)

$$F(p) = \frac{1/\gamma\delta}{p + \frac{\beta\omega^2}{\gamma}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \frac{2}{\gamma\delta} \cos\left(k\pi \frac{y}{\delta}\right)}{p + \left(\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2} + \frac{\beta\omega^2}{\gamma}\right)}. \quad (4.2.15)$$

Для функции (4.2.15) оригиналом является функция $f(t)$:

$$F(p) \div f(t) = \frac{1}{\gamma\delta} \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}t\right) + \frac{2}{\gamma\delta} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\left(\frac{k\pi y}{\delta}\right) \exp\left[-\left(\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2} + \frac{\beta\omega^2}{\gamma}\right)t\right]. \quad (4.2.16)$$

Аналогично осуществляется обратное преобразование по Лапласу от функции (4.2.11), т.к. все ее полюса— простые и определяются выражениями (4.2.12), а вычеты относительно простых полюсов (4.2.12) будут определяться выражениями:

$$\operatorname{Res}(\Phi(p); p_k) = (-1)^k \frac{2}{\gamma\delta} \cos k\pi \frac{(\delta - y)}{\delta}, \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (4.2.17)$$

$$\operatorname{Res}(\Phi(p); p_0) = \frac{1}{\gamma\delta}, \quad k=0. \quad (4.2.18)$$

Изображение $\Phi(p)$ (4.2.11) представится теперь следующим образом:

$$\Phi(p) = \frac{1/\gamma\delta}{p + \frac{\beta\omega^2}{\gamma}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \frac{2}{\gamma\delta} \cos\left(k\pi \frac{\delta - y}{\delta}\right)}{p + \left(\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2} + \frac{\beta\omega^2}{\gamma}\right)}. \quad (4.2.19)$$

Обращением по Лапласу для этой функции будет:

$$\Phi(p) \div \varphi(t) = \frac{1}{\gamma\delta} \cdot \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}t\right) +$$

$$+\frac{2}{\gamma\delta}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot\cos\left(k\pi\frac{\delta-y}{\delta}\right)\cdot\exp\left[-\left(\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2}+\frac{\beta\omega^2}{\gamma}\right)t\right]. \quad (4.2.20)$$

Возвращаясь к выражению (4.2.9) заметим, что изображения $F(p)$ и $\Phi(p)$ умножены на $1/p$, тогда на основе теоремы о свертке двух оригиналов

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p}\frac{\exp\left(y\sqrt{\beta\omega^2+\gamma p}\right)+\exp\left(-y\sqrt{\beta\omega^2+\gamma p}\right)}{\sqrt{\beta\omega^2+\gamma p}\left[\exp\left(\delta\sqrt{\beta\omega^2+\gamma p}\right)-\exp\left(-\delta\sqrt{\beta\omega^2+\gamma p}\right)\right]}\div \\ & \div 1(t)*f(t)=\int_0^t 1(\tau)\left\{\frac{1}{\gamma\delta}\exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}(t-\tau)\right)+\right. \\ & \left.+\frac{2}{\gamma\delta}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cos\left(\frac{k\pi y}{\delta}\right)\exp\left[-\left(\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2}+\frac{\beta\omega^2}{\gamma}\right)(t-\tau)\right]\right\}d\tau, \quad (4.2.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p}\frac{\exp\left((\delta-y)\sqrt{\beta\omega^2+\gamma p}\right)+\exp\left(-(\delta-y)\sqrt{\beta\omega^2+\gamma p}\right)}{\sqrt{\beta\omega^2+\gamma p}\left[\exp\left(\delta\sqrt{\beta\omega^2+\gamma p}\right)-\exp\left(-\delta\sqrt{\beta\omega^2+\gamma p}\right)\right]}\div \\ & \div 1(t)*\varphi(t)=\int_0^t 1(\tau)\cdot\left\{\frac{1}{\gamma\delta}\exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}(t-\tau)\right)+\right. \\ & \left.+\frac{2}{\gamma\delta}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cos\left(k\pi\frac{\delta-y}{\delta}\right)\cdot\exp\left[-\left(\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2}+\frac{\beta\omega^2}{\gamma}\right)(t-\tau)\right]\right\}d\tau. \quad (4.2.22) \end{aligned}$$

Используя эти оригиналы для выражения (4.2.9), находим обратное преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} T(x,y,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\omega x)\frac{2\exp(-i\omega\alpha y)}{\omega\cdot\lambda_{22}}\frac{q_2\sin(\omega l_2)}{\exp(-i\omega\alpha\delta)}\times \\ & \times\left(\int_0^t 1(\tau)\left\{\frac{1}{\gamma\delta}\exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}(t-\tau)\right)+\right.\right. \\ & \left.+\frac{2}{\gamma\delta}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cos\left(\frac{k\pi y}{\delta}\right)\exp\left[-\left(\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2}+\frac{\beta\omega^2}{\gamma}\right)(t-\tau)\right]\right\}d\tau\right)d\omega+ \\ & +\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\omega x)\cdot\frac{2\exp(-i\omega\alpha y)}{\omega\lambda_{22}}q_1\sin(\omega l_1)\times \\ & \times\left(\int_0^t 1(\tau)\left\{\frac{1}{\gamma\delta}\exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}(t-\tau)\right)+\right.\right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{2}{\gamma\delta} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\left(k\pi \frac{\delta-y}{\delta}\right) \exp\left[-\left(\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2} + \frac{\beta\omega^2}{\gamma}\right)(t-\tau)\right] \Big\} d\tau \Big) d\omega. \quad (4.2.23)$$

Рассмотрим первое слагаемое в выражении (4.2.23)

$$\begin{aligned} & \frac{2q_2}{2\pi \cdot \gamma\delta \cdot \lambda_{22}} \int_0^t 1(\tau) [2F_1(k, y, t-\tau) + 1] \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega l_2)}{\omega} \times \right. \\ & \times \exp[i\omega(x - \alpha y + \alpha\delta)] \cdot \exp\left[-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}(t-\tau)\right] d\omega \Big) d\tau = \\ & = \frac{q_2}{\pi\gamma\delta\lambda_{22}} \int_0^t 1(\tau) \left([2F_1(k, y, t-\tau) + 1] \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \{ \sin[\omega(l_2 - x + \alpha y - \alpha\delta)] + \right. \\ & \left. + \sin[\omega(l_2 + x - \alpha y + \alpha\delta)] \} \exp\left[-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}(t-\tau)\right] d\omega \Big) d\tau = \\ & = \frac{q_2}{\pi\gamma\delta \cdot \lambda_{22}} \int_0^t 1(\tau) [2F_1(k, y, t-\tau) + 1] \cdot \frac{\pi}{2} \left(\operatorname{erf} \frac{l_2 - (x + \alpha(\delta - y))}{2\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t-\tau)}} + \operatorname{erf} \frac{l_2 + (x + \alpha(\delta - y))}{2\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t-\tau)}} \right) d\tau. \end{aligned}$$

В этом выражении использована формула Эйлера свойства четных и нечетных функций, а также формула $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$.

Функцией $F_1(k, y, t - \tau)$ обозначим ряд

$$F_1(k, y, t - \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\left(\frac{k\pi y}{\delta}\right) \cdot \exp\left[-\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2}(t - \tau)\right].$$

Аналогично для второго слагаемого выражения (4.2.23):

$$\begin{aligned} & \frac{2q_1}{2\pi\gamma\delta \cdot \lambda_{22}} \int_0^t 1(\tau) [2F_2(k, y, t-\tau) + 1] \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega l_1)}{\omega} \times \right. \\ & \times \exp[i\omega(x - \alpha y)] \cdot \exp\left[-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}(t-\tau)\right] d\omega \Big) d\tau = \\ & = \frac{q_1}{\pi\gamma\delta\lambda_{22}} \int_0^t 1(\tau) \left([2F_2(k, y, t-\tau) + 1] \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \{ \sin[\omega(l_1 - x + \alpha y)] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin[\omega(l_1 + x - \alpha y)] \exp\left[-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}(t - \tau)\right] d\omega \Big) d\tau = \\
& = \frac{q_1}{\pi\gamma\delta \cdot \lambda_{22}} \int_0^t 1(\tau) [2F_2(k, y, t - \tau) + 1] \frac{\pi}{2} \left(\operatorname{erf} \frac{l_1 - (x - \alpha y)}{2\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}(t - \tau)} + \operatorname{erf} \frac{l_1 + (x - \alpha y)}{2\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}(t - \tau)} \right) d\tau,
\end{aligned}$$

где

$$F_2(k, y, t - \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\left(k\pi \frac{\delta - y}{\delta}\right) \cdot \exp\left[-\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2}(t - \tau)\right].$$

Подставляя вычисленные интегралы в (4.2.23), получим решение задачи (4.2.1)–(4.2.5).

$$\begin{aligned}
T(x, y, t) &= \frac{q_2}{2\gamma\delta \cdot \lambda_{22}} \int_0^t 1(\tau) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos \frac{k\pi y}{\delta} \cdot \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2}(t - \tau)\right) \right] \times \\
&\times \left(\operatorname{erf} \frac{l_2 - (x + \alpha(\delta - y))}{2\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}(t - \tau)} + \operatorname{erf} \frac{l_2 + (x + \alpha(\delta - y))}{2\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}(t - \tau)} \right) d\tau + \\
&+ \frac{q_1}{2\gamma\delta\lambda_{22}} \int_0^t 1(\tau) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\left(k\pi \frac{\delta - y}{\delta}\right) \cdot \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2}(t - \tau)\right) \right] \times \\
&\times \left(\operatorname{erf} \frac{l_1 - (x - \alpha y)}{2\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}(t - \tau)} + \operatorname{erf} \frac{l_1 + (x - \alpha y)}{2\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}(t - \tau)} \right) d\tau. \tag{4.2.24}
\end{aligned}$$

Аналогично выражению (4.1.18) из (4.2.24) можно вычислить $T(x, 0, t)$ и $T(x, \delta, t)$ в любых граничных точках $y = 0$ и $y = \delta$.

С помощью формулы (4.2.24) получены некоторые результаты, представленные на рис. 4.6., со следующими входными данными: $l_1 = l_2 = 0,02$ м;

$$\delta = 0,06 \text{ м}; \quad q_1 = 100 \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}; \quad q_2 = 100 \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}; \quad c\rho = 1000 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^3\text{К}}; \quad \lambda_{\xi} = 0,2 \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}; \quad \lambda_{\eta} = 0,01 \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2};$$

$t = 50$ с. Углы φ ориентации главных осей тензора теплопроводности принимали значения 0^0 ; 30^0 ; 60^0 ; 90^0 .

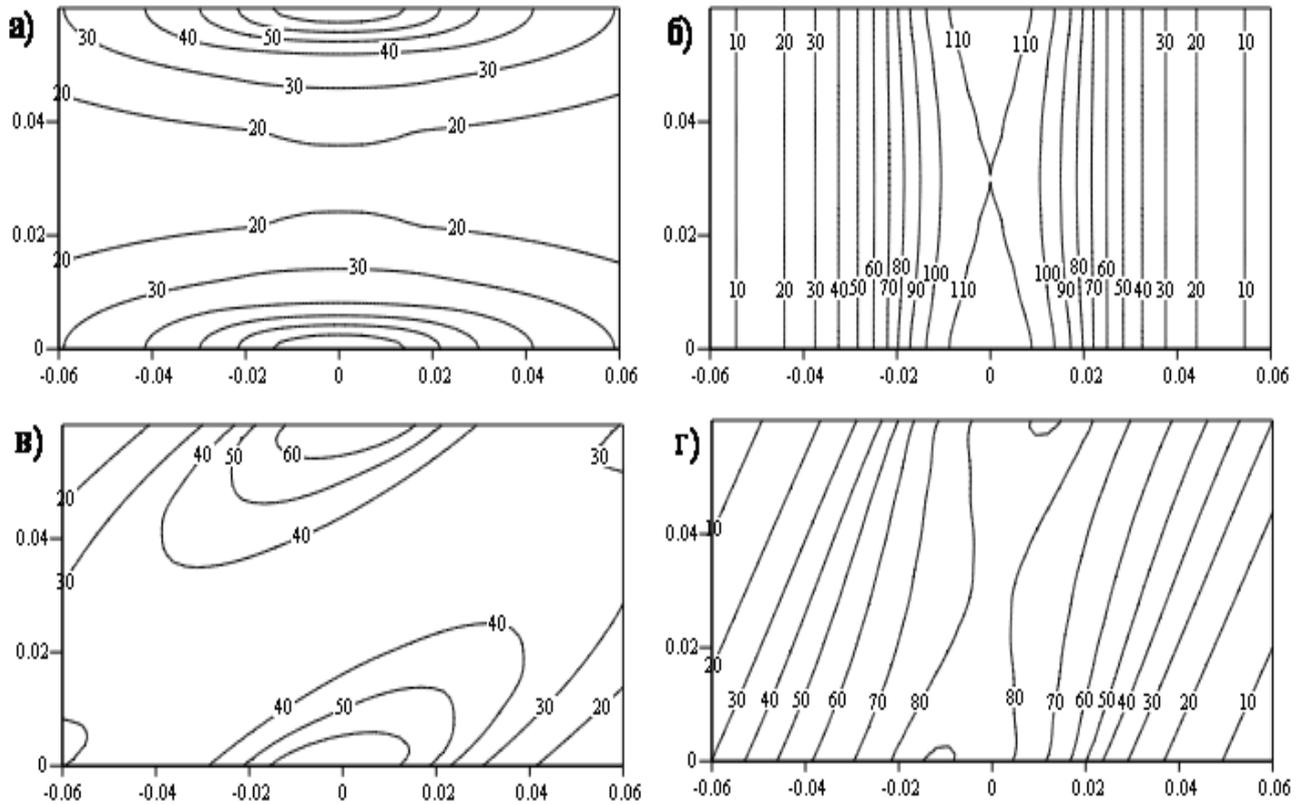


Рис. 4.6. Температурные поля для различных углов φ ориентации главных осей тензора теплопроводности: а) $\varphi = 0^\circ$; б) $\varphi = 90^\circ$; в) $\varphi = 30^\circ$; г) $\varphi = 60^\circ$.

Рисунки демонстрируют симметрию температурных полей относительно главной оси с большим коэффициентом тензора теплопроводности, что используется для тестирования численных методов.

Точки пересечения предельных изотерм со срединной линией пластины, являются седловыми точками.

В случае ортотропных тел все оси, проходящие через центр пластины, являются осями симметрии, что можно использовать для локализации температурного поля в окрестности Oy ($\varphi = 90^\circ$) или в окрестности границ $y = 0$ и $y = \delta$.

Из рисунков видно, что в седловых точках тепловые потоки нулевые, они практически равны нулю внутри пластины при $|x| > l_1$, $|x| > l_2$, однако граница в

этой области нагревается за счет продольного перетока тепла от центральной части пластины к периферии.

4.2.2. Случай задания тепловых потоков на границах анизотропной пластины в виде произвольных симметричных относительно вертикальной оси функций

В случае задания теплообмена на границах анизотропного тела в виде граничных условий второго рода можно воспользоваться результатами, полученными в разделе 4.2.1, используя принцип суперпозиции. Для расчётной схемы, приведенной на рисунке 4.7, формулируется следующая задача теплопереноса в анизотропной полосе:

$$\lambda_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < \delta, \quad t > 0; \quad (4.2.25)$$

$$-\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = q_1(x) \cdot \eta(l_1 - |x|), \quad -\infty < x < +\infty, \quad y = 0, \quad t > 0; \quad (4.2.26)$$

$$\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=\delta} = q_2 \cdot \eta(l_2 - |x|), \quad -\infty < x < +\infty, \quad y = \delta, \quad t > 0; \quad (4.2.27)$$

$$\lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{12} \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad 0 < y < \delta, \quad t > 0; \quad (4.2.28)$$

$$T(x, y, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq y \leq \delta, \quad t = 0, \quad (4.2.29)$$

где $\eta(\psi) = 1$ для $\psi > 0$ и $\eta(\psi) = 0$ для $\psi < 0$.

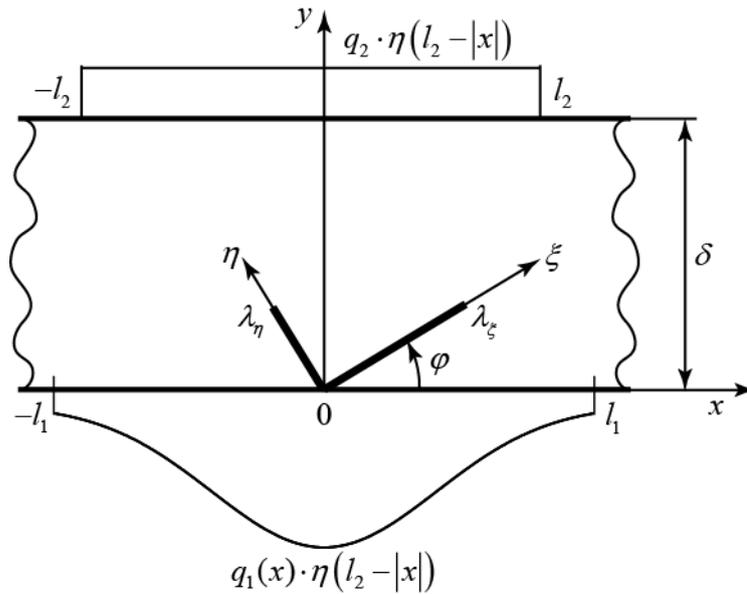


Рис. 4.7. Случай переменных симметричных относительно вертикальной оси тепловых потоков на границах анизотропной пластины.

Для решения исходной задачи (4.2.25)–(4.2.29) используем решение (4.2.24), в котором тепловой поток q_1 на границе $y=0$ задан в виде кусочно-постоянной функции. Для этого интервал $|x| < l_1$ точками x_i , $i = \overline{1, n}$, разбивается на $2n$ симметричных относительно оси Oy интервалов $(-x_{i+1}, -x_i)$ и (x_i, x_{i+1}) . Тогда плотность теплового потока q_{1i} на этих интервалах равна разности постоянных плотностей тепловых потоков, действующих на интервалах $(-x_{i+1}, x_{i+1})$ и $(-x_i, x_i)$, то есть

$$q_{1i} = q_{1i} \cdot \eta(x_{i+1} - |x|) - q_{1i} \eta(x_i - |x|),$$

а вся плотность теплового потока $q_1(x)$ к границе $y=0$ равна сумме

$$q_1(x) = \sum_{i=0}^{n-1} [q_{1i} \cdot \eta(x_{i+1} - |x|) - q_{1i} \cdot \eta(x_i - |x|)]. \quad (4.2.30)$$

Поскольку задача (4.2.25)–(4.2.29) линейна, а также линейны интегральные преобразования Фурье и Лапласа, то решение задачи (4.2.25)–(4.2.29), в которой вместо теплового потока $q_1(x)\eta(l_1 - |x|)$ в граничном условии (4.2.26) подставлен тепловой поток в форме (4.2.30), будет сумма решений (4.2.24) для каждого слагаемого выражения (4.2.30), причем просуммировать

необходимо только вторые слагаемые в (4.2.24), в которых сомножителями будут тепловые потоки $q_1(\xi)$, $\xi \in (x_i, x_{i+1})$, получим

$$\begin{aligned}
T(x, y, t) = & \frac{q_2}{2\gamma\delta\lambda_{22}} \int_0^t 1(\tau) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos \frac{k\pi y}{\delta} \cdot \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2}(t-\tau)\right) \right] \times \\
& \times \left[\operatorname{erf} \frac{l_2 - (x + \alpha(\delta - y))}{2\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t-\tau)}} + \operatorname{erf} \frac{l_2 + (x + \alpha(\delta - y))}{2\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t-\tau)}} \right] d\tau + \\
& + \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \frac{q_1(\xi_i) \cdot \eta(\xi_{i+1} - |x|)}{2\gamma\delta \cdot \lambda_{22}} \int_0^t 1(\tau) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \cos \frac{k\pi(\delta - y)}{\delta} \cdot \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2}(t-\tau)\right) \right] \times \right. \\
& \times \left. \left(\operatorname{erf} \frac{\xi_{i+1} - (x - \alpha y)}{2\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t-\tau)}} + \operatorname{erf} \frac{\xi_{i+1} + (x - \alpha y)}{2\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t-\tau)}} \right) d\tau - \right. \\
& - \frac{q_1(\xi_i) \cdot \eta(\xi_i - |x|)}{2\gamma\delta \cdot \lambda_{22}} \int_0^t 1(\tau) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos \frac{k\pi(\delta - y)}{\delta} \cdot \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2}(t-\tau)\right) \right] \times \\
& \times \left. \left(\operatorname{erf} \frac{\xi_i - (x - \alpha y)}{2\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t-\tau)}} + \operatorname{erf} \frac{\xi_i + (x - \alpha y)}{2\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t-\tau)}} \right) d\tau \right\}. \tag{4.2.31}
\end{aligned}$$

Если разделить и умножить выражения под знаком суммы в (4.2.31) на $\Delta\xi_i$ и перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$ ($\max|\Delta\xi_i| \rightarrow 0$), и учесть, что $\xi_{i+1} = \xi_i + \Delta\xi_i$, окончательно получим решение задачи (4.2.25)–(4.2.29):

$$\begin{aligned}
T(x, y, t) = & \frac{q_2}{2\gamma\delta\lambda_{22}} \int_0^t 1(\tau) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos \frac{k\pi y}{\delta} \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2}(t-\tau)\right) \right] \times \\
& \times \left[\operatorname{erf} \frac{l_2 - (x + \alpha(\delta - y))}{2\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t-\tau)}} + \operatorname{erf} \frac{l_2 + (x + \alpha(\delta - y))}{2\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t-\tau)}} \right] d\tau + \\
& + \frac{1}{2\gamma\delta\lambda_{22}} \left\{ \int_0^t 1(\tau) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos \left(\frac{k\pi(\delta - y)}{\delta} \right) \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2}(t-\tau)\right) \right] \times \right.
\end{aligned}$$

$$\times \int_0^l q_1(\xi) \frac{d}{d\xi} \left[\operatorname{erf} \frac{\xi - (x - \alpha y)}{2\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t - \tau)}} + \operatorname{erf} \frac{\xi + (x - \alpha y)}{\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t - \tau)}} \right] d\xi \Bigg\} d\tau, \quad (4.2.32)$$

где

$$\alpha = \lambda_{12} / \lambda_{22}; \quad \beta = (\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2) / \lambda_{22}^2 = \lambda_{\xi}\lambda_{\eta} / \lambda_{22}^2; \quad \gamma = c\rho / \lambda_{22}.$$

Производная от функций ошибок имеет вид:

$$\frac{d}{d\xi} \left[\operatorname{erf} \frac{\xi - (x - \alpha y)}{2\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t - \tau)}} + \operatorname{erf} \frac{\xi + (x - \alpha y)}{2\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t - \tau)}} \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t - \tau)}} \times$$

$$\times \left\{ \exp \left[- \left(\frac{\xi - (x - \alpha y)}{2\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t - \tau)}} \right)^2 \right] + \exp \left[- \left(\frac{\xi + (x - \alpha y)}{2\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t - \tau)}} \right)^2 \right] \right\}.$$

4.2.3. Аналитическое исследование теплопереноса в теплозащитных композиционных материалах при произвольном тепловом нагружении

В данном разделе впервые получено аналитическое решение задачи в анизотропной полосе при произвольном тепловом нагружении путем построения граничной функции влияния (функции Грина) и аналитического решения, полученного в разделе 4.2.1.

Пусть на границах $y=0$ и $y=\delta$ анизотропной пластины (рис. 4.8) действуют произвольные (не симметричные относительно оси Oy) тепловые потоки $q_1(x)$ и $q_2(x)$ соответственно. При таких воздействиях на анизотропное тело формулируется следующая задача анизотропной теплопроводности:

$$\lambda_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad y \in (0; \delta), \quad t > 0; \quad (4.2.33)$$

$$-\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = q_1(x) \cdot \eta(l_1 - |x|), \quad -\infty < x < \infty, \quad y = 0, \quad t > 0; \quad (4.2.34)$$

$$\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=\delta} = q_2(x) \cdot \eta(l_2 - |x|), \quad -\infty < x < \infty, \quad y = \delta, \quad t > 0; \quad (4.2.35)$$

$$\lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{12} \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad 0 \leq y \leq \delta, \quad t > 0; \quad (4.2.36)$$

$$T(x, y, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq y \leq \delta, \quad t = 0, \quad (4.2.37)$$

где $\eta(\psi)$ – единичная функция ($\eta(\psi) = 1$ при $\psi > 0$ и $\eta(\psi) = 0$ при $\psi < 0$).

Компоненты тензора теплопроводности определяются соотношениями []

$$\lambda_{11} = \lambda_\xi \cos^2 \varphi + \lambda_\eta \sin^2 \varphi,$$

$$\lambda_{12} = \lambda_{21} = (\lambda_\xi - \lambda_\eta) \sin \varphi \cdot \cos \varphi,$$

$$\lambda_{22} = \lambda_\xi \sin^2 \varphi + \lambda_\eta \cos^2 \varphi.$$

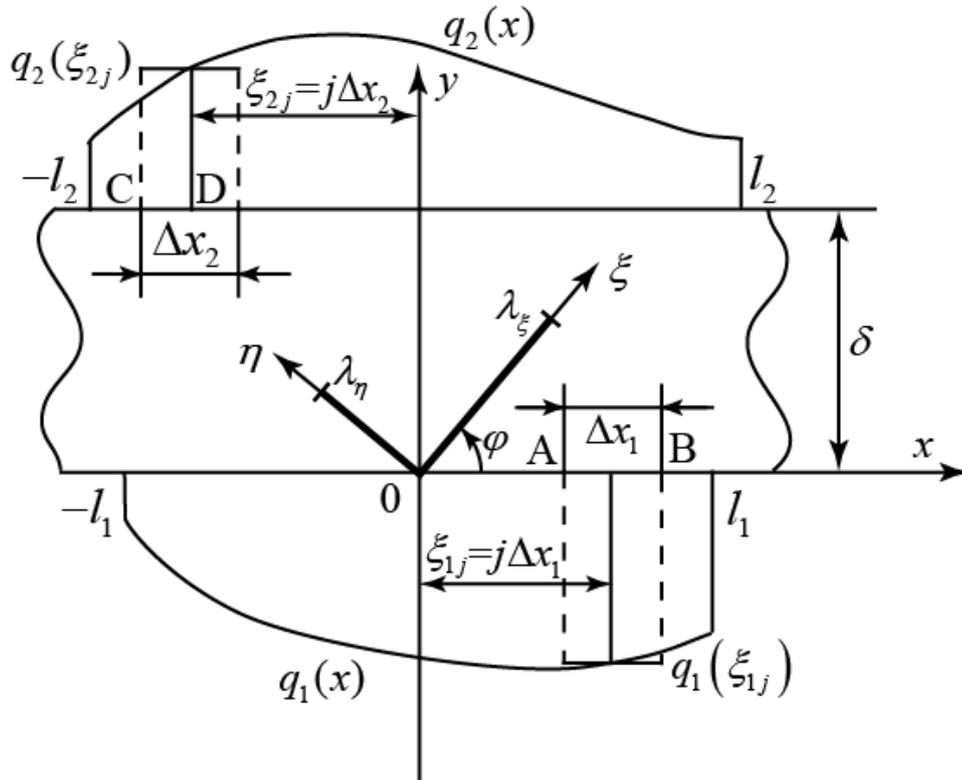


Рис. 4.8. Расчетная схема для задачи теплопереноса в анизотропной пластине при произвольном тепловом нагружении.

В соотношениях (4.2.33)–(4.2.37) введены следующие обозначения: Ox , Oy – декартовы оси координат; $O\xi$, $O\eta$ – главные оси тензора теплопроводности; λ_ξ , λ_η – главные компоненты тензора теплопроводности; t – время; $T(x, y, t)$ – температура; c, ρ – теплоемкость и плотность соответственно; φ – угол, ориентирующий главные оси $O\xi$, $O\eta$ относительно осей Ox , Oy декартовой системы координат; δ – толщина пластины.

В случае, если начальное условие (4.2.37) отлично от нуля и равно некоторому постоянному значению T_0 , то ниже полученное аналитическое решение увеличивается на эту величину.

Символы $\pm\infty$ означают некоторое конечное значение переменной x , для которой распределение температур по переменной y для достаточно большого значения времени равно начальному значению.

Требуется определить распределение температур $T(x, y, t)$ в пластине, включая и границы $y = 0$ и $y = \delta$.

Решение задачи (4.2.33)–(4.2.37) можно получить использованием интегральных преобразований Фурье и Лапласа по переменным x и t соответственно. Однако, поскольку функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$ – произвольные и соответствующие интегралы от них сложно вычислить, то отрезки $[-l_1, l_1]$ и $[-l_2, l_2]$ разбиваются на $2J_1$ и $2J_2$ отрезков Δx_1 и Δx_2 соответственно, центры которых отстают от начала координат на расстояниях $\xi_{1j} = j_1 \Delta x_1$, $j_1 = \overline{-J_1, J_1}$ и $\xi_{2j} = j_2 \Delta x_2$, $j_2 = \overline{-J_2, J_2}$. Без потери общности будем полагать, что $J_1 = J_2 = J$, а $\Delta x_1 = l_1 / J$, $\Delta x_2 = l_2 / J$. На каждом из отрезков $[\xi_{1j} - \Delta x_1 / 2; \xi_{1j} + \Delta x_1 / 2]$ и $[\xi_{2j} - \Delta x_2 / 2; \xi_{2j} + \Delta x_2 / 2]$ значения тепловых потоков $q_1(\xi_{1j})$ и $q_2(\xi_{2j})$ постоянны, что позволяет легко вычислить от них интегралы соответствующих интегральных преобразований, затем решить всю задачу, после чего применить известный принцип суперпозиции.

Теорема 4.1. (о построении граничной функции влияния). Пусть функции $q_1(x)\eta(l_1-|x|)$ при $y=0$ и $x \in (-\infty; \infty)$ и $q_2(x)\eta(l_2-|x|)$ при $y=\delta$ и $x \in (-\infty; \infty)$ имеют конечное число точек разрыва первого рода и пусть при $x \rightarrow \pm\infty$ $q(y)=0$. Тогда можно построить граничную функцию влияния $G(x, \xi, y, t)$ точечного источника теплоты $q(\xi)$ единичной мощности, помещенного в точку ξ на границе замкнутой области, с помощью которой решением задачи (4.2.33)–(4.2.37) будет интеграл

$$T(x, y, t) = \oint_C G(x, \xi, y, t) q(\xi) d\xi.$$

Доказательство.

Для доказательства рассмотрим на промежутке $x \in [\xi_j - \Delta x / 2; \xi_j + \Delta x / 2]$ импульсную функцию $\delta_{\Delta x} = 1 / \Delta x$, интеграл от которой на носителе Δx равен единице $\int_0^{\Delta x} \frac{1}{\Delta x} dx = 1$. Импульсную функцию в окрестности точки ξ_j можно записать с помощью функции Хевисайда

$$\delta_{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left[\eta(x - (\xi_j - \Delta x / 2)) - \eta(x - (\xi_j + \Delta x / 2)) \right],$$

устремляя в которой $\Delta x \rightarrow 0$, получим δ -функцию Дирака

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \delta_{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\eta(x - (\xi_j - \Delta x / 2)) - \eta(x - (\xi_j + \Delta x / 2)) \right] = \\ &= \eta'(x - \xi_j) = \delta(x - \xi_j). \end{aligned}$$

Поэтому в задаче (4.2.33)–(4.2.37) вместо граничных условий (4.2.34), (4.2.35) будем *вначале* использовать граничные условия в виде

$$-\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = q_1(\xi_{1j}) \delta(x - \xi_{1j}), \quad x \in (-\infty; \infty), \quad y = 0, \quad t > 0; \quad (4.2.38)$$

$$\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = q_2(\xi_{2j}) \delta(x - \xi_{2j}), \quad x \in (-\infty; \infty), \quad y = \delta, \quad t > 0, \quad (4.2.39)$$

где $\delta(x - \xi)$ – дельта-функция.

Будем рассматривать расчетную область, ограниченную замкнутой границей $y=0$, $y=\delta$ и $x=-a$ и $x=a$, где a – достаточно большое число, для которого тепловые потоки $q(y)=0$ при $x=-a$ и $q(y)=0$ при $x=a$. На этой замкнутой границе функция $q(x,y)$ – непрерывна, так как вне носителей $x < -l_2$, $x > l_2$ тепловые потоки в соответствии с условиями (4.2.34), (4.2.35) равны нулю. Следовательно, криволинейный интеграл по замкнутому контуру существует.

Пусть решением задачи (4.2.33), (4.2.36)–(4.2.39) для импульсной функции $q(\xi_j)\delta(x-\xi_j)$ будет функция $G(x,\xi_j,y,t)$, которая называется граничной функцией влияния (граничной функцией Грина). Для импульсной функции $q(\xi_j)\Delta\xi$ ($\Delta\xi \equiv \Delta x$) решением будет функция $G(x,\xi_j,y,t)q(\xi_j)\Delta\xi$ и в соответствии с принципом суперпозиции приближенным решением задачи (4.2.33)–(4.2.37) будет сумма

$$\bar{T}(x,y,t) = \sum_{j=-J}^J G(x,\xi_j,y,t)q(\xi_j)\Delta\xi. \quad (4.2.40)$$

Пределом интегральных сумм (4.2.40) при $J \rightarrow \infty$ ($\Delta\xi \rightarrow 0$) будет интеграл

$$T(x,y,t) = \oint_C G(x,\xi,y,t)q(\xi)d\xi, \quad (4.2.41)$$

где C – замкнутый контур, включающий левую и правую бесконечные границы, а поскольку там тепловые потоки равны нулю, то

$$T(x,y,t) = \int_{-l_1}^{l_1} G(x,\xi,y,t)q_1(\xi)d\xi + \int_{-l_2}^{l_2} G(x,\xi,y,t)q_2(\xi)d\xi. \quad (4.2.42)$$

Поскольку функция $G(x,\xi,y,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (4.2.33), то она непрерывна во всей расчетной области, в том числе и на границе области. Кроме этого, $q(\xi)$ кусочно-непрерывна на замкнутой границе C , а следовательно произведение $G(x,\xi,y,t) \cdot q(\xi)$ непрерывна на границе C , вследствие чего интегралы (4.2.41) и (4.2.42) существуют.

Так как функции $q_1(\xi)$, $q_2(\xi)$ ограничены на носителях $[-l_1; l_1]$ и $[-l_2; l_2]$ соответственно, то они абсолютно интегрируемы, и к ним можно применить интегральные преобразования Фурье и Лапласа. Следовательно, функция источника $G(x, \xi, y, t)$ существует. Теорема доказана.

Для нахождения функции источника $G(x, \xi, y, t)$ применим теперь к задаче (4.2.33), (4.2.36)–(4.2.39) преобразования Фурье и Лапласа, приходим к следующей задаче для ОДУ относительно $T_{\omega, p}(y)$:

$$\lambda_{22} \frac{d^2 T_{\omega, p}}{dy^2} + 2i\lambda_{12}\omega \frac{dT_{\omega, p}}{dy} - [\lambda_{11}\omega^2 + c\rho \cdot p] T_{\omega, p} = 0, \quad 0 < y < \delta; \quad (4.2.43)$$

$$\left[\lambda_{22} \frac{dT_{\omega, p}}{dy} + i\lambda_{21} \cdot \omega T_{\omega, p} \right]_{y=0} = -\frac{q_1(\xi_{1j})}{p} \exp(-i\omega \xi_{1j}), \quad y = 0; \quad (4.2.44)$$

$$\left[\lambda_{22} \frac{dT_{\omega, p}}{dy} + i\lambda_{21} \cdot \omega T_{\omega, p} \right]_{y=\delta} = \frac{q_2(\xi_{2j})}{p} \exp(-i\omega \xi_{2j}), \quad y = \delta, \quad (4.2.45)$$

где $i = \sqrt{-1}$, $j = \overline{-J, J}$.

Решением задачи (4.2.43)–(4.2.45) будет функция

$$\begin{aligned} T_{\omega, p}(y) = & \frac{\exp(-i\omega \alpha y)}{p \cdot \lambda_{22}} \left[\frac{q_2(\xi_{2j}) \exp(-i\omega \xi_{2j})}{\exp(-i\omega \alpha \delta)} \times \right. \\ & \times \frac{\exp(y \cdot K_{\omega, p}) + \exp(-y \cdot K_{\omega, p})}{K_{\omega, p} (\exp(\delta \cdot K_{\omega, p}) - \exp(-\delta \cdot K_{\omega, p}))} + q_1(\xi_{1j}) \exp(-i\omega \xi_{1j}) \times \\ & \left. \times \frac{\exp((\delta - y) K_{\omega, p}) + \exp(-(\delta - y) K_{\omega, p})}{K_{\omega, p} (\exp(\delta \cdot K_{\omega, p}) - \exp(-\delta \cdot K_{\omega, p}))} \right], \quad (4.2.46) \end{aligned}$$

где

$$K_{\omega, p} = \sqrt{\beta \omega^2 + \gamma p}; \quad \alpha = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{22}}; \quad \beta = \frac{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2}{\lambda_{22}^2} = \frac{\lambda_{\xi} \lambda_{\eta}}{\lambda_{22}^2}; \quad \gamma = \frac{c\rho}{\lambda_{22}}.$$

Для обращения по Лапласу изображения (4.2.46) рассмотрим вначале обращение функций

$$F(p, y) = \frac{1}{p} \frac{\exp(y \cdot K_{\omega, p}) + \exp(-y \cdot K_{\omega, p})}{K_{\omega, p} [\exp(\delta \cdot K_{\omega, p}) - \exp(-\delta \cdot K_{\omega, p})]}, \quad (4.2.47)$$

$$F(p, \delta - y) = \frac{1}{p} \frac{\exp((\delta - y) \cdot K_{\omega, p}) + \exp(-(\delta - y) \cdot K_{\omega, p})}{K_{\omega, p} [\exp(\delta \cdot K_{\omega, p}) - \exp(-\delta \cdot K_{\omega, p})]}, \quad (4.2.48)$$

входящих в выражение (4.2.46).

В соответствии с выражениями (4.2.21), (4.2.22) оригиналами для изображений (4.2.47), (4.2.48) являются функции

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \cdot F(p, Y) \div 1(t) * f(t, Y) &= \int_0^t 1(\tau) \left\{ \frac{1}{\gamma \delta} \exp\left(-\frac{\beta \omega^2}{\gamma}(t - \tau)\right) + \right. \\ &+ \left. \frac{2}{\gamma \delta} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\left(\frac{k\pi Y}{\delta}\right) \exp\left[-\left(\frac{k^2 \pi^2}{\gamma \delta^2} + \frac{\beta \omega^2}{\gamma}\right)(t - \tau)\right] \right\} d\tau, \end{aligned} \quad (4.2.49)$$

где

$$Y = y \text{ для } f(t, y) \text{ и } Y = \delta - y \text{ для } f(t, \delta - y).$$

Используя (4.2.49) находим обращение по Фурье от выражения (4.2.46)

$$\begin{aligned} T(x, \xi_{1j}, \xi_{2j}, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega x) \frac{\exp(-i\omega \alpha y)}{\lambda_{22}} \frac{q_2(\xi_{2j}) \exp(-i\omega \xi_{2j})}{\exp(-i\omega \alpha \delta)} \times \\ &\times \left(\int_0^t 1(\tau) \left\{ \frac{1}{\gamma \delta} \exp\left(-\frac{\beta \omega^2}{\gamma}(t - \tau)\right) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{2}{\gamma \delta} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\left(\frac{k\pi y}{\delta}\right) \exp\left[-\left(\frac{k^2 \pi^2}{\gamma \delta^2} + \frac{\beta \omega^2}{\gamma}\right)(t - \tau)\right] \right\} d\tau \right) d\omega + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega x) \cdot \frac{\exp(-i\omega \alpha y)}{\lambda_{22}} q_1(\xi_{1j}) \exp(-i\omega \xi_{1j}) \times \\ &\times \left(\int_0^t 1(\tau) \left\{ \frac{1}{\gamma \delta} \exp\left(-\frac{\beta \omega^2}{\gamma}(t - \tau)\right) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{2}{\gamma \delta} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\left(k\pi \frac{\delta - y}{\delta}\right) \exp\left[-\left(\frac{k^2 \pi^2}{\gamma \delta^2} + \frac{\beta \omega^2}{\gamma}\right)(t - \tau)\right] \right\} d\tau \right) d\omega. \end{aligned} \quad (4.2.50)$$

Вычисляя в (4.2.50) интегралы по переменной ω , находим распределение температур в анизотропной полосе с тепловыми потоками на границах в виде импульсных функций $q(\xi) \delta(x - \xi)$:

$$\begin{aligned}
T(x, \xi_{1j}, \xi_{2j}, y, t) &\equiv G(x, \xi_{1j}, \xi_{2j}, t) = \frac{q_1(\xi_{1j})}{2\gamma\delta\lambda_{22}\sqrt{\pi}} \int_0^t 1(\tau) \times \\
&\times \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\left(k\pi \frac{\delta-y}{\delta}\right) \cdot \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2}(t-\tau)\right) \right] \times \\
&\times \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(\xi_{1j} + (\alpha y - x))^2}{4\beta(t-\tau)/\gamma}\right) \right) d\tau + \\
&+ \frac{q_2(\xi_{2j})}{2\gamma\delta \cdot \lambda_{22}\sqrt{\pi}} \int_0^t 1(\tau) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\frac{k\pi y}{\delta} \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2}(t-\tau)\right) \right] \times \\
&\times \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(\xi_{2j} - \alpha(\delta-y) - x)^2}{4\beta(t-\tau)/\gamma}\right) \right) d\tau, \quad j = \overline{-J, J}, \quad (4.2.51)
\end{aligned}$$

Применяя к выражению (4.2.51) принцип суперпозиции с импульсными функциями $q(\xi)\Delta\xi$, получим

$$\begin{aligned}
\bar{T}(x, y, t) &= \sum_{j=-J}^J \left\{ \frac{q_2(\xi_{2j})}{2\gamma\delta \cdot \lambda_{22}\sqrt{\pi}} \int_0^t 1(\tau) \Phi(y, t, \tau) \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(\xi_{2j} - \alpha(\delta-y) - x)^2}{4\beta(t-\tau)/\gamma}\right) \right) d\tau + \right. \\
&+ \left. \frac{q_1(\xi_{1j})}{2\gamma\delta\lambda_{22}\sqrt{\pi}} \int_0^t 1(\tau) \cdot \Phi(\delta-y, t, \tau) \times \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(\xi_{1j} + (\alpha y - x))^2}{4\beta(t-\tau)/\gamma}\right) \right) d\tau \right\} \Delta\xi, \quad (4.2.52)
\end{aligned}$$

где

$$\Phi(Y, t, \tau) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\left(k\pi \frac{Y}{\delta}\right) \cdot \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2}(t-\tau)\right), \quad Y = \{y; \delta-y\}.$$

Окончательно, в соответствии с выражением (4.2.42) получаем

$$T(x, y, t) = \frac{1}{2\gamma\delta\lambda_{22}\sqrt{\pi}} \int_0^t \left\{ 1(\tau) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\frac{k\pi y}{\delta} \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2}(t-\tau)\right) \right] \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{-l_2}^{l_2} \left\{ \frac{q_2(\xi)}{\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(\xi - \alpha(\delta - y) - x)^2}{4\beta(t-\tau)/\gamma}\right) \right\} d\xi d\tau + \\
& + \frac{1}{2\gamma\delta\lambda_{22}\sqrt{\pi}} \int_0^t \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos k\pi \frac{\delta - y}{\delta} \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2}(t-\tau)\right) \right\} \times \\
& \times \int_{-l_1}^{l_1} \left\{ \frac{q_1(\xi)}{\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(\xi + \alpha y - x)^2}{4\beta(t-\tau)/\gamma}\right) \right\} d\xi d\tau. \tag{4.2.53}
\end{aligned}$$

Функция (4.2.53) – точное решение задачи (4.2.33)–(4.2.37) о теплопереносе в анизотропной пластине при произвольном нагружении ее тепловыми потоками на границах $y = 0$ и $y = \delta$.

Решение (4.2.53) в двумерном случае выведено для анизотропии общего вида, однако его можно использовать для расчетов в ортотропном случае, когда угол φ ориентации главных осей тензора теплопроводности равен нулю или значению $\pi/2$, а также в изотропном случае при $\lambda_\xi = \lambda_\eta$.

Отношение максимального главного коэффициента к минимальному (степень анизотропии) изменяется для многих материалов от единицы (изотропные материалы) до нескольких сотен. Например, в [176] приведены теплофизические характеристики графитов и графитосодержащих материалов со степенью анизотропии от нескольких единиц до двухсот.

По формуле (4.2.53) проведены многочисленные расчеты нестационарных температурных полей в анизотропных пластинах и некоторые из них приведены на рисунках 4.9–4.11. Для расчетов принимались следующие исходные данные:

$$\begin{aligned}
c\rho &= 1,5 \cdot 10^6 \text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}); & \delta &= 0,06\text{м}; & \text{предельное время} & t = 400\text{с}; \\
q_1(x) &= 10^6 \cdot x, \quad y = \delta, x \in [-0,04; 0]; & q_2(x) &= 3 \cdot 10^4 \cdot \exp\left[-3,6(x/0,02 - 1)^2\right] & \text{для} & y = 0, \\
x &\in [0; 0,04]; & T(x, y, 0) &= 0.
\end{aligned}$$

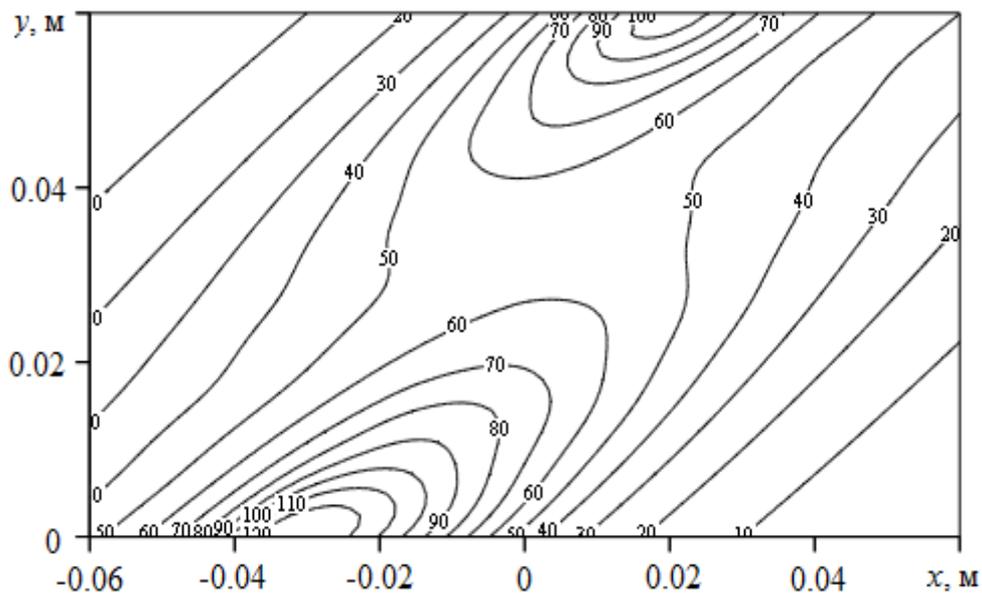
На рис. 4.9 приведены температурные поля в анизотропной пластине в момент времени 400с, где компоненты тензора теплопроводности принимали значения $\lambda_{\xi} = 20 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$, $\lambda_{\eta} = 1 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$, для случаев $\varphi = \pi/6$ (рис. 4.9а) и $\varphi = \pi/3$ (рис. 4.9б).

Рисунок показывает, что изотермы ориентированы в направлении главной оси тензора теплопроводности с большим значением главного коэффициента (в данном случае в направлении главной оси $O\xi$). Возникающая при этом седловая точка является точкой пересечения осей симметрии изотерм, параллельных главным осям. Через эту точку должна проходить изотерма, разделяющая области прогрева под действием тепловых потоков на различных границах (так называемая сепаратриса). При этом границы прогреваются значительно дальше зоны действия ненулевых тепловых потоков.

На рисунке 4.10 приведены температурные поля в ортотропной пластине для случаев $\varphi = 0 (O\xi \equiv Ox, O\eta \equiv Oy)$ (рис. 4.10а) и $\varphi = \pi/2$ (рис. 4.10б). Главные компоненты тензора теплопроводности приняты теми же, что и для рисунка 4.9: $\lambda_{\xi} = 20 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$, $\lambda_{\eta} = 1 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$. В случае $\varphi = 0$ (рис. 4.10а) продольный коэффициент λ_{ξ} теплопроводности в 20 раз выше поперечного $\lambda_{\eta} = 1 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$, что определяет значительный отток теплоты в продольном направлении, причем возникает разделительная кривая (сепаратриса), разделяющая влияние ненулевых тепловых потоков на границах $y = 0$ и $y = \delta$. В случае $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (рис. 4.10б) изотермы локализуются в окрестности границ $y = 0$ и $y = \delta$, что можно использовать для охлаждения центральной части пластины, где в продольном направлении должна проходить сепаратриса с начальным значением температуры. Поскольку на границах заданы тепловые потоки на ограниченных отрезках, то обе границы $y = 0$ и $y = \delta$ прогреваются значительно дальше зоны действия ненулевых тепловых потоков.

На рис. 4.11 приведены температурные поля для анизотропной пластины с $\lambda_\xi = 20 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$, $\lambda_\eta = 1,0 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ и $\varphi = \pi/4$ (рис. 4.11а) и изотропной пластины при $\lambda_\xi = \lambda_\eta = 10 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ и $\varphi = 0$ (рис. 4.11б). В первом случае седловая точка находится на сепаратрисе, параллельной оси $O\xi$, т.е. под углом к оси Ox , равным $\pi/4$ (точнее, в точке пересечения линий, параллельных осям $O\xi$ и $O\eta$).

а)



б)

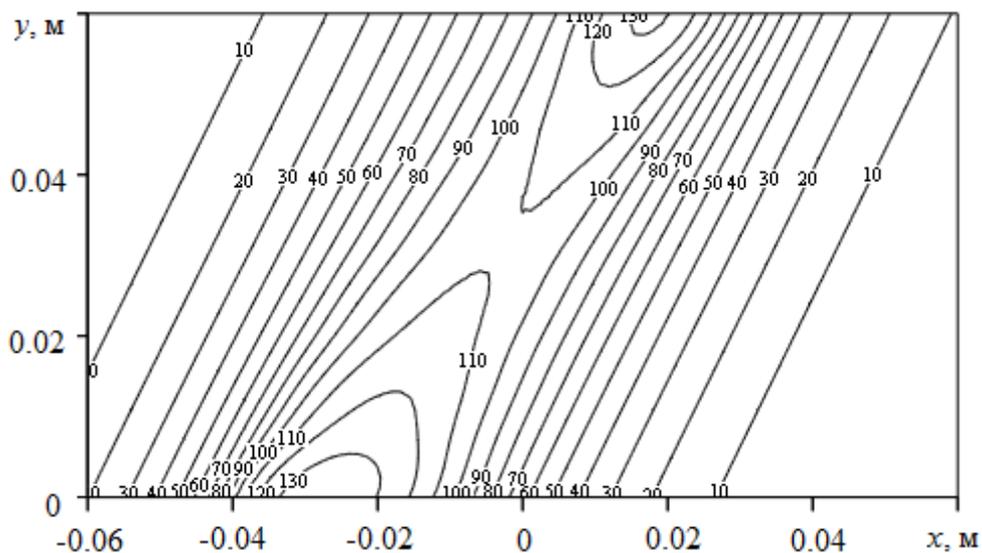
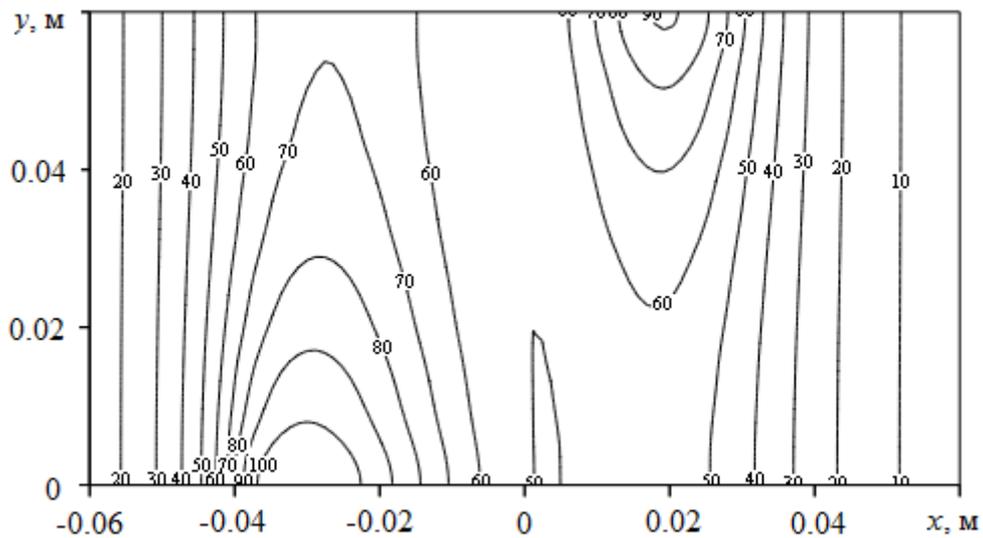


Рис. 4.9. Температурные поля в анизотропной пластине для случая $\lambda_\xi = 20 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$,

$$\lambda_\eta = 1 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К}), \quad \text{а} - \varphi = \pi/6; \quad \text{б} - \varphi = \pi/3.$$

В изотропном случае изотермы симметричны относительно сепаратрисы, проходящей через точки на границах $y=0$ и $y=\delta$ со среднеинтегральными значениями тепловых потоков, а седловая точка находится на этой сепаратрисе. Вдоль оси Ox происходит равномерный прогрев как внутри пластины, так и на ее границах.

а)



б)

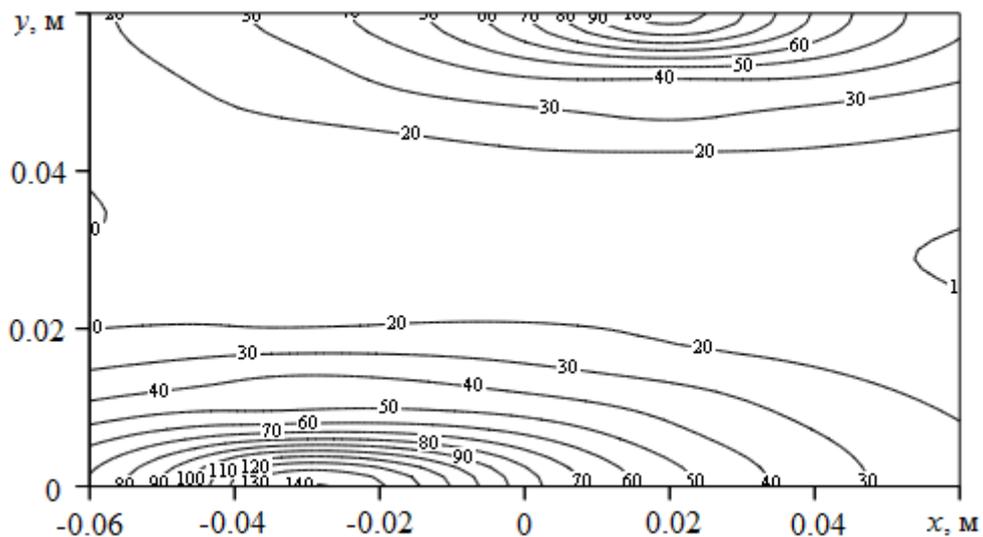
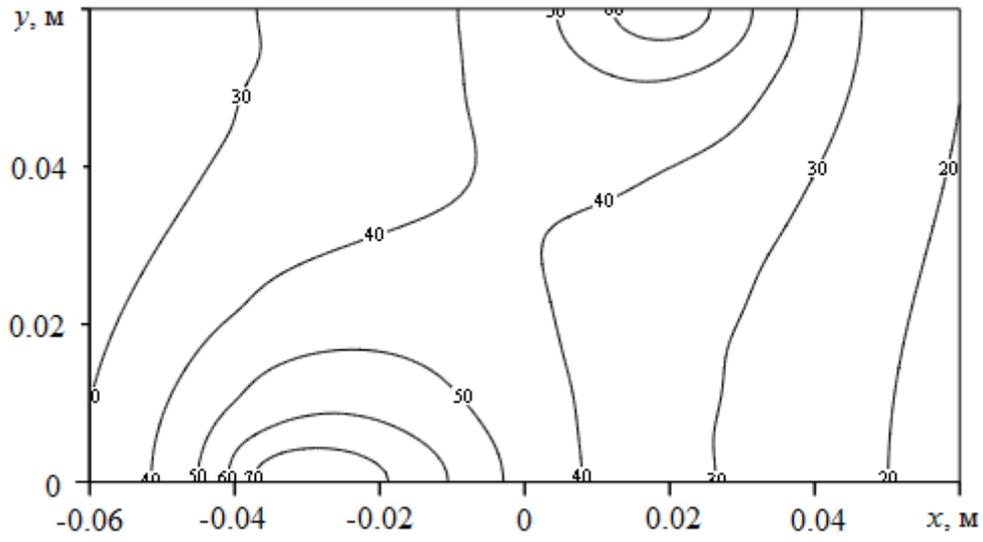


Рис. 4.10. Температурные поля в ортотропной пластине для случая $\lambda_x = 20 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$,

$$\lambda_y = 1 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}), \quad a - \varphi = 0; \quad b - \varphi = \pi / 2.$$

а)



б)

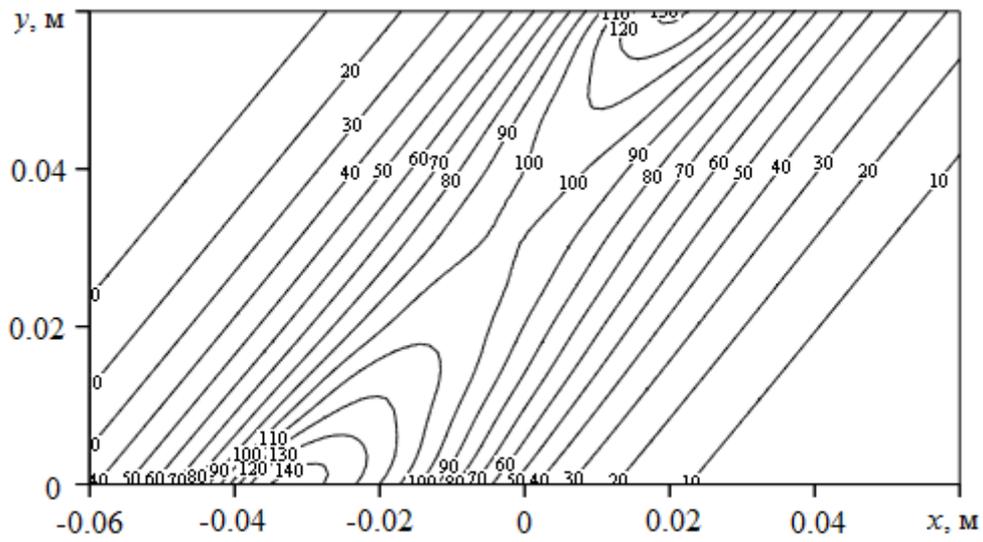


Рис. 4.11. Температурные поля в анизотропной пластине при $\lambda_{\xi} = 20 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $\lambda_{\eta} = 1 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $\varphi = \pi/4$ (а) и изотропной пластине при $\lambda_{\xi} = \lambda_{\eta} = 10 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $\varphi = 0$ (б).

4.2.4. Анизотропная пластина в условиях произвольного нестационарного теплообмена на границах

Рассматривается задача, аналогичная задаче (4.2.33)–(4.2.37), но с тепловыми потоками на границах, зависящими от пространственной переменной x и времени t :

$$\lambda_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad y \in (0; \delta), \quad t > 0; \quad (4.2.54)$$

$$-\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = q_1(x, t) \eta(l_1 - |x|) \cdot \eta(l_3 - t), \quad -\infty < x < \infty, \quad y = 0, \quad t > 0; \quad (4.2.55)$$

$$\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = q_2(x, t) \cdot \eta(l_2 - |x|) \cdot \eta(l_4 - t), \quad -\infty < x < \infty, \quad y = \delta, \quad t > 0; \quad (4.2.56)$$

$$\lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{12} \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad 0 \leq y \leq \delta, \quad t > 0. \quad (4.2.57)$$

Начальное условие задает нулевое распределение температур в пластине в момент $t = 0$.

Следуя разделу 4.2.3, построим граничную функцию влияния $G(x, \xi_j, y, t, \tau_k)$, разбив носители $l_1 \times l_3$ и $l_2 \times l_4$ на $2J \times K$ прямоугольников, в центре каждого из которых возьмем точку с координатами (ξ_j, τ_k) , $-J \leq j \leq J$, $0 \leq k \leq K$ и используя вместо (4.2.55), (4.2.56) граничные условия

$$-\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = q_1(\xi_{1j}, \tau_k) \delta(x - \xi_{1j}) \cdot \delta(t - \tau_k), \quad y = 0, \quad t > 0; \quad (4.2.58)$$

$$\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = q_2(\xi_{2j}, \tau_k) \delta(x - \xi_{2j}) \cdot \delta(t - \tau_k), \quad y = \delta, \quad t > 0. \quad (4.2.59)$$

Тогда, в соответствии с принципом суперпозиции, приближенное решение задачи (4.2.54), (4.2.58), (4.2.59), (4.2.57) определяется выражением

$$\bar{T} = (x, y, t) = \sum_{k=1}^K \sum_{j=-J}^J G(x, \xi_j, y, t, \tau_k) q(\xi_j, \tau_k) \Delta \xi \cdot \Delta \tau. \quad (4.2.60)$$

Пределом интегральных сумм (4.2.60) при $J \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$ ($\Delta \xi \rightarrow 0, \Delta \tau \rightarrow 0$) будет интеграл

$$T(x, y, t) = \int_0^t \oint_C G(x, \xi, y, t, \tau) q(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (4.2.61)$$

где C – замкнутый контур, включающий левую и правую бесконечные границы, а поскольку там тепловые потоки равны нулю, то

$$T(x, y, t) = \int_0^t \int_{-l_1}^{l_1} G(x, \xi, y, t, \tau) q_1(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_0^t \int_{-l_2}^{l_2} G(x, \xi, y, t, \tau) q_2(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (4.2.62)$$

Для нахождения функции источника $G(x, \xi, y, t, \tau)$ применим к задаче (4.2.54), (4.2.58), (4.2.59), (4.2.57) преобразование Фурье и Лапласа по переменным x и t , получим следующую задачу для ОДУ относительно функции $T_{\omega, p}(y)$:

$$\lambda_{22} \frac{d^2 T_{\omega, p}}{dy^2} + 2i\lambda_{12}\omega \frac{dT_{\omega, p}}{dy} - [\lambda_{11}\omega^2 + c\rho p] T_{\omega, p} = 0, \quad 0 < y < \delta; \quad (4.2.63)$$

$$\left[\lambda_{22} \frac{dT_{\omega, p}}{dy} + i\lambda_{21}\omega T_{\omega, p} \right]_{y=0} = -q_1(\xi_{1j}, \tau_k) e^{-i\omega\xi_{1j}} \cdot e^{-p\tau_k}, \quad y = 0; \quad (4.2.64)$$

$$\left[\lambda_{22} \frac{dT_{\omega, p}}{dy} + i\lambda_{21}\omega T_{\omega, p} \right]_{y=\delta} = q_2(\xi_{2j}, \tau_k) \cdot e^{-i\omega\xi_{2j}} \cdot e^{-p\tau_k}, \quad y = \delta. \quad (4.2.65)$$

Решением задачи (4.2.63)–(4.2.65) будет функция

$$\begin{aligned} T_{\omega, p}(y) = \exp(-i\omega\alpha y) & \left[\frac{q_2(\xi_{2j}, \tau_k) \exp(-i\omega\xi_{2j}) \exp(-p\tau_k)}{\exp(-i\omega\alpha\delta)} \times \right. \\ & \times \frac{\exp(y \cdot K_{\omega, p}) + \exp(-y \cdot K_{\omega, p})}{K_{-\omega, p} (\exp(\delta \cdot K_{\omega, p}) - \exp(-\delta \cdot K_{\omega, p}))} + q_1(\xi_{1j}, \tau_k) \exp(-i\omega\xi_{1j}) \exp(-p\tau_k) \times \\ & \left. \times \frac{\exp((\delta - y) \cdot K_{\omega, p}) + \exp(-(\delta - y) \cdot K_{\omega, p})}{K_{\omega, p} (\exp(\delta \cdot K_{\omega, p}) - \exp(-\delta \cdot K_{\omega, p}))} \right], \quad (4.2.66) \end{aligned}$$

где

$$K_{\omega, p} = \sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}; \quad \alpha = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{22}}; \quad \beta = \frac{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2}{\lambda_{22}^2} = \frac{\lambda_\xi \lambda_\eta}{\lambda_{22}^2}; \quad \gamma = \frac{c\rho}{\lambda_{22}}.$$

Для обращения по Лапласу изображения (4.2.66) рассмотрим вначале обращение функций

$$F(p, y) = \exp(-p\tau_k) \frac{\exp(y \cdot K_{\omega, p}) + \exp(-y \cdot K_{\omega, p})}{K_{\omega, p} (\exp(\delta \cdot K_{\omega, p}) - \exp(-\delta \cdot K_{\omega, p}))}, \quad (4.2.67)$$

$$F(p, \delta - y) = \exp(-p\tau_k) \frac{\exp((\delta - y) K_{\omega, p}) + \exp(-(\delta - y) K_{\omega, p})}{K_{\omega, p} (\exp(\delta \cdot K_{\omega, p}) - \exp(-\delta \cdot K_{\omega, p}))}, \quad (4.2.68)$$

входящих в выражение (4.2.66).

В соответствии с выражениями (4.2.21), (4.2.22), оригиналами для выражений (4.2.67), (4.2.68) являются функции $(\exp(-p\tau_k) \div \delta(t - \tau_k))$:

$$\begin{aligned} F(p, y) \div \delta(t - \tau_k) * f(t, Y) &= \int_0^t \delta(\tau - \tau_k) \left\{ \frac{1}{\gamma\delta} \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}(t - \tau)\right) + \right. \\ &+ \left. \frac{2}{\gamma\delta} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi Y}{\delta}\right) \exp\left[-\left(\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2} + \frac{\beta\omega^2}{\gamma}\right)(t - \tau)\right] \right\} = \\ &= \frac{1}{\gamma\delta} \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}(t - \tau_k)\right) + \frac{2}{\gamma\delta} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi Y}{\delta}\right) \exp\left[-\left(\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2} + \frac{\beta\omega^2}{\gamma}\right)(t - \tau_k)\right], \quad (4.2.69) \end{aligned}$$

где

$$Y = y \text{ для } f(t, y) \text{ и } Y = \delta - y \text{ для } f(t, \delta - y).$$

Используя оригинал (4.2.69), обращение по Фурье выражения (4.2.66) имеет вид

$$\begin{aligned} T(x, \xi_{1j}, \xi_{2j}, y, t, \tau_k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega x) \frac{\exp(-i\omega\alpha y) q_2(\xi_{2j}, \tau_k) \exp(-i\omega\xi_{2j})}{\lambda_{22} \exp(-i\omega\alpha\delta)} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{\gamma\delta} \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}(t - \tau_k)\right) + \frac{2}{\gamma\delta} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi y}{\delta}\right) \exp\left[-\left(\frac{n^2\pi^2}{\gamma\delta^2} + \frac{\beta\omega^2}{\gamma}\right)(t - \tau_k)\right] \right\} d\omega + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega x) \frac{\exp(-i\omega\alpha y) q_1(\xi_{1j}, \tau_k) \exp(-i\omega\xi_{1j})}{\lambda_{22}} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{\gamma\delta} \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}(t - \tau_k)\right) + \frac{2}{\gamma\delta} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(n\pi \frac{\delta - y}{\delta}\right) \exp\left[-\left(\frac{n^2\pi^2}{\gamma\delta^2} + \frac{\beta\omega^2}{\gamma}\right)(t - \tau_k)\right] \right\} d\omega. \quad (4.2.70) \end{aligned}$$

Вычисляя в (4.2.70) интегралы по переменной ω , находим распределение температур в анизотропной полосе с тепловыми потоками на границах в виде импульсных функций $q_1(\xi_{1j}, \tau_k) \delta(x - \xi_{1j}) \delta(t - \tau_k)$ и $q_2(\xi_{2j}, \tau_k) \delta(x - \xi_{2j}) \delta(t - \tau_k)$:

$$\begin{aligned}
T(x, \xi_{1j}, \xi_{2j}, y, t, \tau_k) &\equiv G(x, \xi_{1j}, \xi_{2j}, y, t, \tau_k) = \frac{q_1(\xi_{1j}, \tau_k)}{2\gamma\delta\lambda_{22}\sqrt{\pi}} \times \\
&\times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(n\pi \frac{\delta-y}{\delta}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{\gamma\delta^2}(t-\tau_k)\right) \right] \times \\
&\times \left(\frac{1}{\sqrt{\beta(t-\tau_k)/\gamma}} \exp\left(-\frac{(\xi_{1j} + (\alpha y - x))^2}{4\beta(t-\tau_k)/\gamma}\right) \right) + \frac{q_2(\xi_{2j}, \tau_k)}{2\gamma\delta\lambda_{22}\sqrt{\pi}} \times \\
&\times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\frac{n\pi y}{\delta} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{\gamma\delta^2}(t-\tau_k)\right) \right] \times \\
&\times \left(\frac{1}{\sqrt{\beta(t-\tau_k)/\gamma}} \exp\left(-\frac{(\xi_{2j} - \alpha(\delta-y) - x)^2}{4\beta(t-\tau)/\gamma}\right) \right). \tag{4.2.71}
\end{aligned}$$

Подставляя (4.2.71) в (4.2.62), получим

$$\begin{aligned}
T(x, y, t) &= \frac{1}{2\gamma\delta\lambda_{22}\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-l_1}^{l_1} q_1(\xi, \tau) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(n\pi \frac{\delta-y}{\delta}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{\gamma\delta^2}(t-\tau)\right) \right] \times \\
&\times \left[\frac{1}{\sqrt{\beta(t-\tau)/\gamma}} \exp\left(-\frac{(\xi + (\alpha y - x))^2}{4\beta(t-\tau)/\gamma}\right) \right] d\xi d\tau + \frac{1}{2\gamma\delta\lambda_{22}\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-l_2}^{l_2} q_2(\xi, \tau) \times \\
&\times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\frac{n\pi y}{\delta} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{\gamma\delta^2}(t-\tau)\right) \right] \times \\
&\times \left(\frac{1}{\sqrt{\beta(t-\tau)/\gamma}} \exp\left(-\frac{(\xi - \alpha(\delta-y) - x)^2}{4\beta(t-\tau)/\gamma}\right) \right) d\xi d\tau. \tag{4.2.72}
\end{aligned}$$

Функция (4.2.72) – точное решение задачи (4.2.54)–(4.2.57) о теплопереносе в анизотропной полосе в условиях нестационарного теплообмена на границах.

4.3. Сопряженный теплоперенос между газодинамическими вязкими течениями и анизотропными телами на основе аналитических решений

В данном параграфе система уравнений теплогазодинамического пристенного течения аналитически решается путем линеаризации инерционных

членов, результатом чего является функция теплового потока на границе сопряжения, выраженная через температуру этой границы. Эта функция, подставляется в аналитическое решение третьей начально-краевой задачи теплопроводности для анизотропного полупространства (4.1.39), или (4.1.40) при $y=0$, приводит к явному выражению относительно температуры $T_w(x,t)$ границы сопряжения, а через него – к решению задач теплогазодинамики и анизотропной теплопроводности.

4.3.1. Сопряженный теплообмен между теплогазодинамическим пограничным слоем и анизотропными телами

Система уравнений теплогазодинамического пограничного слоя, описывающая поведение функций $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$, $T(x,y,t)$, $\rho(x,y,t)$, рассматривается в квазистационарной постановке, когда от времени зависят характеристики набегающего потока, а характеристики пограничного слоя устанавливаются мгновенно. Таким образом, в фиксированный момент времени t_f газодинамические характеристики описываются стационарными уравнениями (частные производные по времени от них равны нулю). В отличие от пограничного слоя задача теплопроводности всегда является нестационарной.

Поэтому при постановке и решении уравнений пограничного слоя характеристики $u(x,y)$, $v(x,y)$, $T(x,y)$, $\rho(x,y)$ зависят от переменных x и y , а в условиях сопряжения с задачей теплопроводности добавляется параметр t_f , т.е. $u(x,y,t_f)$, $v(x,y,t_f)$, $T(x,y,t_f)$, $\rho(x,y,t_f)$.

Таким образом, сопряженная задача пограничного слоя и анизотропной теплопроводности включает в себя следующие соотношения:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad 0 < y < \delta(x), \quad -l < x < l; \quad (4.3.1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu(T) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad 0 < y < \delta(x), \quad -l < x < l; \quad (4.3.2)$$

$$0 = -\frac{dp}{dy}; \quad p = p_e(x), \quad \frac{dp_e}{dx} = -\rho_e u_e \frac{du_e}{dx}, \quad y = \delta(x), \quad -l < x < l; \quad (4.3.3)$$

$$\rho u \frac{\partial I}{\partial x} + \rho v \frac{\partial I}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu(T)}{\text{Pr}} \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\mu(T)}{2} \left(1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) \frac{\partial u^2}{\partial y} \right],$$

$$0 < y < \delta(x); \quad -l < x < l; \quad (4.3.4)$$

$$p = \rho RT, \quad 0 < y < \delta(x), \quad -l < x < l. \quad (4.3.5)$$

$$\text{При } y = 0: \quad u(x, 0) = 0; \quad v(x, 0) = 0; \quad T(x, 0) = T_w(x);$$

$$\rho(x, 0) = \rho_w = p_e(x) / RT_w(x). \quad (4.3.6)$$

$$\text{При } y = \delta(x): \quad u(x, \delta(x)) = u_e(x); \quad v(x, \delta(x)) = v_e(x);$$

$$T(x, \delta(x)) = T_e(x); \quad \rho(x, \delta(x)) = \rho_e(x). \quad (4.3.7)$$

$$\text{При } x = 0: \quad u(0, y) = 0; \quad p(0, 0) = p_0. \quad (4.3.8)$$

$$\frac{dp_e}{dx} = 0 \quad \text{при } x > l \text{ и } x < -l, \quad (4.3.9)$$

где p_0 – давление торможения.

Для упрощения выкладок будем рассматривать задачу нестационарной теплопроводности в анизотропном полупространстве с граничным условием третьего рода на границе $y_T = 0$ по определению функции $T(x, y, t)$, которая включает в себя следующие соотношения (индекс «Т» относится к телу):

$$\lambda_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y_T} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y_T^2} = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad y_T > 0, \quad t > 0; \quad (4.3.10)$$

$$q_w(x, t_f) \cdot \eta(l - |x|) = -\lambda \left. \frac{\partial T(x, y, t_f)}{\partial y} \right|_{y=0} \cdot \eta(l - |x|) =$$

$$= \left(\lambda_{21} \frac{\partial T(x, y_T, t)}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T(x, y_T, t)}{\partial y} \right)_{y_T=0}, \quad -\infty < x < \infty, \quad y_T = 0, \quad t > 0; \quad (4.3.11)$$

$$T(x, y, t_f)|_{y=0} = T(x, y, t)|_{y_T=0} \equiv T_w(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad y_T = 0, \quad t = t_f > 0; \quad (4.3.12)$$

$$T(x, \infty, t) = 0; \quad \frac{\partial T(\pm\infty, 0, t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial T(\pm\infty, 0, t)}{\partial y_T} = 0;$$

$$\frac{\partial T(x, \infty, t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial T(x, \infty, t)}{\partial y} = 0, \quad t = t_f; \quad (4.3.13)$$

$$T(x, y_T, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y_T \geq 0, \quad t = 0. \quad (4.3.14)$$

В граничных условиях (4.3.6), (4.3.12) температура $T_w(x)$ границы сопряжения должна определиться из решения всей задачи (4.3.1)–(4.3.14), а по ней из уравнения состояния (4.3.5) – плотность $\rho_w(x)$ при этой температуре. Аналогично, в условии сопряжения (4.3.11) тепловой поток от пограничного слоя в левой части должен быть выражен из решения уравнений пограничного слоя через температуру $T_w(x)$, которая является неизвестным параметром.

Для определения температуры $T_w(x)$ границы сопряжения необходимо решить задачу теории пограничного слоя (4.3.1)–(4.3.9), в которой упомянутая температура в краевом условии (4.3.12) является параметром, затем решить задачу анизотропной теплопроводности (4.3.10)–(4.3.14), в которой температура $T_w(x)$ также является параметром, подлежащим определению. Затем по распределениям температур в газе и в теле необходимо определить тепловые потоки в этих средах на границе $y = 0$ и $y_T = 0$, а затем подставить их в условие сопряжения, в котором используется равенство температур на этой границе в различных средах $T_w(x)|_{y=0} = T_w(x)|_{y_T=0} = T_w(x)$, и из полученного соотношения найти этот параметр $T_w(x)$. По температуре $T_w(x)$ определяются все остальные газодинамические и тепловые характеристики в пограничном слое и в теле.

Для решения задачи о теплообмене в пограничном слое сделаем следующие допущения:

газ недиссоциирующий, совершенный, описываемый уравнением состояния в форме Клапейрона-Менделеева (4.3.5), а также несжимаемый

(плотность в уравнении неразрывности (4.3.1) выносится из-под знаков производных);

толщины динамического $\delta(x)$ и теплового $\delta_T(x)$ пограничных слоев равны друг другу, хотя число $Pr = 0,71 < 1$;

энтальпия газа определяется выражением $I = \int_0^T c_p(T) dT + \frac{u^2}{2}$, так что

энтальпия газа при температуре стенки равна $I_w \approx c_{pw} \cdot T_w$;

вязкость и теплопроводность газа определяются по формуле Сезерленда (1.2.19).

Выразим производную $\frac{\partial u}{\partial x}$ в левой части уравнения сохранения импульса (4.3.2) из уравнения неразрывности (4.3.1) для несжимаемого газа, получим уравнение

$$-\rho \frac{\partial(u \cdot v)}{\partial y} + 2\rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

проинтегрировав которое дважды по переменной y при сделанных предположениях и предположении $\mu(T) \approx \mu(T_w) = const$, приходим к выражению (индекс « cp » означает усреднение по толщине пограничного слоя):

$$-(\rho uv)_{cp} y + 2(\rho vu)_{cp} y = -\frac{dp_e}{dx} \frac{y^2}{2} + \mu_w u + C_1(x) y + C_2(x), \quad (4.3.15)$$

в котором $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются из краевых условий.

При $y = 0$: $u(x, 0) = 0$ $C_2(x) = 0$.

При $y = \delta_e$: $u(x, \delta) = u_e(x)$,

$$C_1(x) = (\rho uv)_{cp} + \frac{dp_e}{dx} \frac{\delta}{2} - \mu_w \frac{u_e}{\delta}.$$

Из (4.3.15) определяется продольный компонент $u(x, y)$ скорости

$$u(x, y) = \frac{1}{2\mu_w} \frac{dp_e}{dx} (y^2 - \delta y) + \frac{u_e}{\delta} y. \quad (4.3.16)$$

Поперечный компонент вектора скорости можно найти из уравнения неразрывности (4.3.1) для несжимаемого течения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.3.17)$$

с граничным условием

$$v(x, 0) = 0. \quad (4.3.18)$$

Подставив в (4.3.17) распределение продольной скорости (4.3.16) и проинтегрировав полученное выражение по переменной y с учетом условия (4.3.18), получим

$$v(x, y) = -\frac{1}{2\mu_w} \frac{d^2 p_e}{dx^2} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{\delta}{2} y^2 \right) - \frac{du_e}{dx} \frac{y^2}{2\delta},$$

где производная $\frac{du_e}{dx}$ определяется из уравнения Бернулли в форме (4.3.3) или в форме $p_e + \rho_e u_e^2 / 2 = p_0$:

$$\frac{du_e}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{2\rho_e(p_0 - p_e)}} \frac{dp_e}{dx}, \quad (4.3.19)$$

так что

$$v(x, y) = -\frac{1}{2\mu_w} \frac{d^2 p_e}{dx^2} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{\delta}{2} y^2 \right) + \frac{1}{\sqrt{2\rho_e(p_0 - p_e)}} \frac{dp_e}{dx} \frac{y^2}{2\delta}. \quad (4.3.20)$$

Для уточнения продольного $u(x, y)$ и поперечного $v(x, y)$ компонентов вектора скорости выражения (4.3.16), (4.3.20) можно снова подставить в левую часть уравнения (4.3.2) и в производную $\partial u / \partial x$ уравнения (4.3.1).

При сделанных предположениях проинтегрируем уравнение сохранения энергии (4.3.4) по переменной y , полагая, что производная $\partial I / \partial x$ слабо зависит от переменной y , получим

$$(\rho u)_{cp} \frac{\partial I}{\partial x} y + (\rho v)_{cp} I = \frac{\mu_w}{Pr} \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\mu_w}{2} \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial u^2}{\partial y} + D_1(x).$$

Полученное выражение проинтегрируем еще один раз по переменной y

$$(\rho u)_{cp} \frac{\partial I}{\partial x} \frac{y^2}{2} + (\rho v)_{cp} \int_0^y Idy = \frac{\mu_w}{Pr} I + \frac{\mu_w}{2} \cdot k \cdot u^2 + D_1(x) \cdot y + D_2(x), \quad (4.3.21)$$

где $k = 1 - \frac{1}{Pr} \approx -0,4$ (при числе $Pr = 0,71$).

$$\text{При } y = 0: u = 0, I(x, 0) = I_w(x), D_2(x) = -\frac{\mu_w}{Pr} I_w.$$

$$\text{При } y = \delta: u = u_e, I = I_e,$$

$$D_1(x) = -\frac{\mu_w}{Pr} \frac{I_e - I_w}{\delta} + \frac{\mu_w \cdot 0,4}{2} \frac{u_e^2}{\delta} + \frac{(\rho u)_{cp}}{\delta} \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\delta^2}{2} + \frac{(\rho v)_{cp}}{\delta} \int_0^\delta Idy.$$

Подставляя $D_1(x)$, $D_2(x)$ в (4.3.21), получим

$$\begin{aligned} & -\frac{\mu_w}{Pr} (I - I_w) + \frac{\mu_w}{Pr} \frac{I_e - I_w}{\delta} y - 0,2\mu_w \left(\frac{u_e^2}{\delta} y - u^2 \right) = \\ & = (\rho u)_{cp} \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\delta^2}{2} y - \frac{\partial I}{\partial x} \frac{y^2}{2} \right) + (\rho v)_{cp} \left(\frac{1}{\delta} \int_0^\delta Idy - \int_0^y Idy \right). \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

Оценим в этом выражении члены, стоящие в правой части относительно толщины пограничного слоя δ , для чего вычислим $(\rho u)_{cp}$ и $(\rho v)_{cp}$: используя выражения (4.3.16) и (4.3.20)

$$(\rho u)_{cp} = \rho_{cp} \frac{1}{\delta_e} \int_0^\delta u(y) dy = -\frac{\rho_{cp} \delta^2}{12\mu_w} \frac{dp_e}{dx} + \frac{\rho_{cp} u_e}{2};$$

$$(\rho v)_{cp} = \rho_{cp} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta v(y) dy = \frac{\rho_{cp}}{\delta} \left[-\frac{1}{2\mu_w} \frac{d^2 p_e}{dx^2} \left(-\frac{\delta^4}{12} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\rho_e(p_0 - p_e)}} \frac{dp_e}{dx} \frac{\delta^2}{6} \right] \approx \rho_{cp} \frac{dp_e}{dx} \frac{\delta}{6}.$$

Тогда

$$(\rho u)_{cp} \left[\frac{1}{\delta} \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\delta^2}{2} y - \frac{\partial I}{\partial x} \frac{y^2}{2} \right] = O(\delta^2),$$

$$(\rho v)_{cp} \left[\frac{y}{\delta} \int_0^\delta Idy - \int_0^y Idy \right] = \frac{\rho_{cp} \delta}{6} \frac{dp_e}{dx} \left[\frac{y}{\delta} I_{cp} \delta - I_{cp} y \right] = O(\delta^2).$$

Таким образом, члены в правой части выражения (4.3.22) порядка квадрата толщины пограничного слоя и в первом приближении ими можно пренебречь, то есть

$$\frac{\mu_w}{\text{Pr}}(I(x, y) - I_w(x)) - \frac{\mu_w}{\text{Pr}} \frac{I_e(x) - I_w(x)}{\delta} y +$$

$$+ 0,2\mu_w \left[\frac{u_e^2(x)}{\delta} y - u^2(x, y) \right] = 0,$$

откуда

$$I(x, y) = I_w(x) + \frac{I_e(x) - I_w(x)}{\delta(x)} y - 0,2 \cdot \text{Pr} \left[\frac{u_e^2(x)}{\delta(x)} y - u^2(x, y) \right]. \quad (4.3.23)$$

Продифференцируем выражение (4.3.23) по переменной y , положив затем $y = 0$ ($u(x, y) = 0$) и домножив полученное выражение на теплопроводность газа при температуре стенки λ_w , получим

$$q_w(x) = \lambda_w \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_w = \lambda_w \frac{T_e(x) - T_w(x)}{\delta} - 0,2\mu_w \frac{u_e^2(x)}{\delta}.$$

Поскольку

$$u_e^2(x) = \frac{2}{\rho_e} (p_0 - p_e(x)),$$

то

$$q_w(x) = -\lambda_w \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_w = \lambda_w \frac{T_w(x) - T_e(x)}{\delta(x)} + \frac{0,4\mu_w}{\rho_e(x)\delta(x)} (p_0 - p_e(x)) =$$

$$= T_w(x) \left(\frac{\lambda_w}{\delta_{cp}} \right) + \left(\frac{0,4\mu_w}{\rho_e(x)\delta(x)} (p_0 - p_e(x)) - \frac{\lambda_w T_e(x)}{\delta(x)} \right). \quad (4.3.24)$$

Для решения сопряженных задач необходимо теперь тепловые потоки в форме (4.3.24) подставить в аналитическое решение задачи анизотропной теплопроводности (4.1.39), при этом положим:

$$\alpha_1 = - \left(\frac{\lambda_w}{\delta_{cp}} \right); \quad \alpha_2 F_e(x, t) = \left(\frac{0,4\mu_w}{\rho_e(x)\delta(x)} (p_0 - p_e(x)) - \frac{\lambda_w T_e(x)}{\delta(x)} \right). \quad (4.3.25)$$

Тогда получим решение (4.1.55) с учетом (4.3.25):

$$T(x, y, t) = \frac{1}{2\lambda_{22}\sqrt{\pi\beta}} \int_0^t \int_{-l}^l \frac{1}{\sqrt{(t-\tau)}} \left(\frac{0,4\mu_w}{\rho_e(\xi)\delta(\xi)} (p_0 - p_e(\xi)) - \frac{\lambda_w T_e(\xi)}{\delta(\xi)} \right) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \exp\left(-\frac{(\alpha y - x + \xi)^2}{4\beta(t-\tau)/\gamma}\right) \exp\left(\varphi_1\left(-\frac{\lambda_w}{\delta_{cp}}, y, t-\tau\right)\right) \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\varphi_2^2\left(-\frac{\lambda_w}{\delta_{cp}}, y, t-\tau\right)\right) + \frac{\lambda_w}{\delta_{cp}\lambda_{22}\sqrt{\gamma}} \operatorname{erfc}\left(\varphi_2\left(-\frac{\lambda_w}{\delta_{cp}}, y, t-\tau\right)\right) \right\} d\xi d\tau. \quad (4.3.26) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1\left(-\frac{\lambda_w}{\delta_{cp}}, y, t-\tau\right) &= \frac{\lambda_w^2}{\delta_{cp}^2 \lambda_{22}^2 \gamma} (t-\tau) - \frac{\lambda_w y}{\delta_{cp} \lambda_{22}}, \\ \varphi_2\left(-\frac{\lambda_w}{\delta_{cp}}, y, t-\tau\right) &= \frac{y\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{t-\tau}} - \frac{\lambda_w \sqrt{t-\tau}}{\delta_{cp} \lambda_{22} \sqrt{\gamma}}, \\ a &= \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{22}}, \quad \beta = (\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2) / \lambda_{22}^2 = \lambda_\xi \cdot \lambda_\eta / \lambda_{22}^2, \quad \gamma = \frac{c\rho}{\lambda_{22}}. \end{aligned}$$

При $y=0$ можно получить температуру $T_w(x)$ границы сопряжения. Распределение температур $T_e(x)$ на внешней границе пограничного слоя в (4.3.24) выразим через давление на внешней границе $p_e(x)$ из формулы (3.2.12)

$$T_e(x) = T_{e0} \left(\frac{p_e(x)}{p_{e0}} \right)^{(k-1)/k},$$

в которой температура торможения T_{e0} определяется из отношения $\frac{T_{e0}}{T_1} = \frac{T_1}{T_n}$, а

T_1/T_n находится из выражения (1.1.22)

$$\frac{T_1}{T_n} = \frac{1}{M_n^2} [(1-\delta) + \delta M_n^2] [(1+\delta) M_n^2 - \delta], \quad \delta = \frac{k-1}{k+1}.$$

Отношение T_{e0}/T_1 определяется из выражения

$$\frac{T_{e0}}{T_1} = 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2,$$

где M_1 – число Маха за прямой частью ударной волны, определяется из соотношения (1.1.26) при $\theta_c = \pi/2$. Давление торможения p_{e0} определяется из соотношений (1.1.21) и (1.1.28).

Толщину $\delta(x)$ динамического пограничного слоя можно оценить по формуле [146]

$$\delta(x) = \frac{5}{\sqrt{\text{Re}}} x \quad (4.3.27)$$

для ламинарного и

$$\delta(x) = \frac{0,37}{\text{Re}_x^{0,2}} x \quad (4.3.28)$$

для турбулентного течений.

Полученное выражение (4.3.26) для температуры $T_w(x, t)$ границы сопряжения можно теперь использовать для определения всех теплогазодинамических характеристик пограничного слоя.

4.3.2. Сопряженный теплообмен между вязким ударным газодинамическим слоем и поперечно обтекаемым анизотропным полупространством

В данном разделе, на основе аналитических решений задач теплопроводности в анизотропном полупространстве в условиях нестационарного теплообмена на ее границах и приближенного аналитического решения задачи теплогазодинамики в окрестности критической точки поперечно обтекаемого анизотропного полупространства [146], аналитически решается задача сопряженного теплообмена (рис. 4.12).

Особенность обтекания тела в окрестности критической точки заключается в том, что в этом случае уравнения пограничного слоя не удовлетворяются и приходится решать уравнения Навье-Стокса совместно с уравнениями неразрывности, состояния и энергии, правда, в стационарной постановке несжимаемого течения.

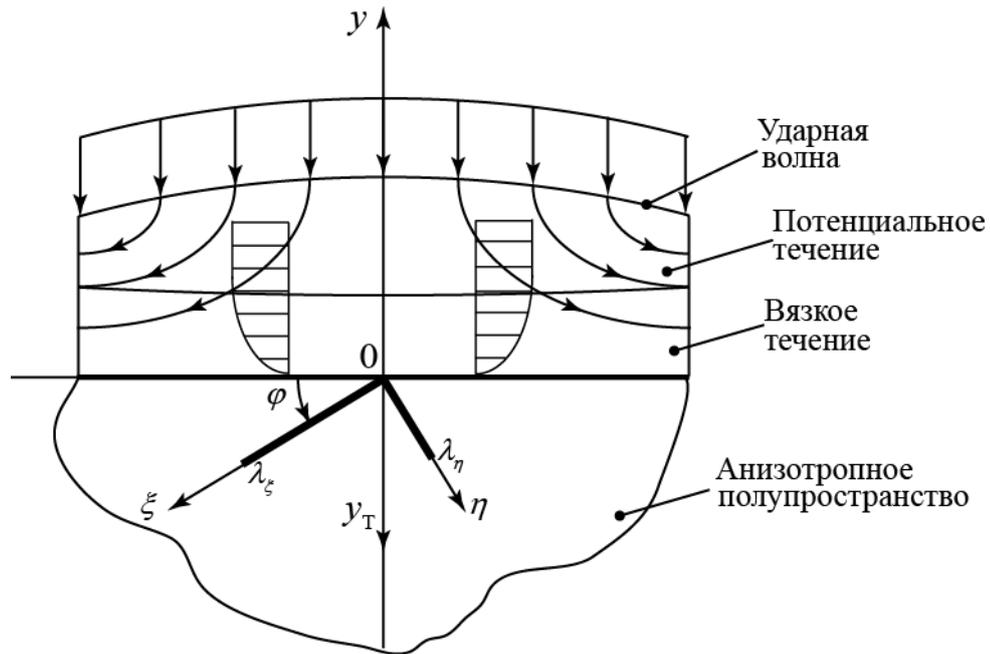


Рис. 4.12. К сопряженному теплообмену между вязким газодинамическим течением и окрестностью критической точки поперечно обтекаемого анизотропного полупространства.

В этом случае уравнения теплогазодинамики имеют вид

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \quad (4.3.33)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right); \quad (4.3.34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (4.3.35)$$

$$p = \rho RT; \quad (4.3.36)$$

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \\ + 2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.3.37)$$

Граничные условия: при $y=0$, $u=0$, $v=0$; на ударной волне выполняются соотношения (1.1.20)–(1.1.31) в зависимости от числа M_u набегающего потока.

Задача теории теплопроводности в анизотропном полупространстве с нестационарными граничными условиями третьего рода имеет вид:

$$\lambda_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y_T} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y_T^2} = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}, \quad x \in (-\infty; \infty), \quad y_T \in (0, \infty), \quad t > 0; \quad (4.3.38)$$

$$-\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y_T=0} = q_w = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad y_T = y = 0, \quad t > 0; \quad (4.3.39)$$

$$T(x, \infty, t) = 0, \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad y \rightarrow \infty, \quad t > 0; \quad (4.3.40)$$

$$T(\pm\infty, y_T, t) = 0, \quad \frac{\partial T(\pm\infty, y_T, t)}{\partial x} = 0, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad y_T \in [0; \delta_T], \quad t > 0; \quad (4.3.41)$$

$$T(x, y, 0) = 0, \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad y \in [0; \infty), \quad t = 0. \quad (4.3.42)$$

Для решения задачи несжимаемой вязкой теплогазодинамики (4.3.33)–(4.3.37) в окрестности критической точки воспользуемся методом, изложенным в разделе 3.2.3.

Пусть компоненты вектора скорости U_e , V_e в потенциальном течении линейны по переменным x и y с одним и тем же коэффициентом пропорциональности β

$$U_e = \beta x; \quad V_e = -\beta y, \quad (4.3.43)$$

которые сразу удовлетворяют уравнению неразрывности (4.3.35) при $\rho = \text{const}$. Тогда уравнения сохранения импульса в *невязкой* области ($\mu = 0$) будут иметь вид:

$$\rho U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \rho V_e \frac{\partial U_e}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}; \quad (4.3.44)$$

$$\rho U_e \frac{\partial V_e}{\partial x} + \rho V_e \frac{\partial V_e}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Подставляя (4.3.43) в (4.3.44), умножая первое уравнение на dx , а второе – на dy и складывая, получим

$$-dp = \rho\beta^2 (x dx + y dy),$$

откуда

$$p(x, y) = -\frac{\rho\beta^2}{2} (x^2 + y^2) + C, \quad (4.3.45)$$

причем постоянная интегрирования C определяется из соотношений (1.1.20), (1.1.21) для ρ_1 , p_1 на ударной волне.

Тогда при $x=0$, $y=S_0$: $\rho = \rho_1$, $p = p_1$, $C = p_1 + \frac{\rho_1 \beta^2}{2} S_0^2$ и давление в невязком потоке выражается формулой

$$p(x, y) - p_1(x) = -\frac{\rho_1 \beta^2}{2} (x^2 + y^2) + \frac{\rho_1 \beta^2}{2} S_0^2, \quad (4.3.46)$$

где S_0 – расстояние от критической точки до ударной волны на линии полного торможения $x=0$. Величину β можно определить из второго соотношения (4.3.43) при $y=S_0$, $V_e = V_1$, $V = -\beta S_0$, то есть

$$\beta = -\frac{V_1}{S_0}, \quad V(y) = -\frac{V_1}{S_0} y,$$

где V_1 – скорость на ударной волне со стороны тела, определяется соотношением (1.1.25), и направлена против оси Oy . В этом случае давление в невязкой области из (4.3.46) определится выражением

$$p(x, y) - p_1(x) = -\frac{\rho_1 V_1^2}{2 S_0^2} (x^2 + y^2) + \frac{\rho_1 V_1^2}{2}. \quad (4.3.47)$$

С помощью выражения (4.3.47) можно определить давление $p(y)$ вдоль линии полного торможения ($x=0$) за ударной волной. Из (4.3.47) следует известное уравнение Бернулли для давления торможения (или давления в критической точке) за прямой частью ударной волны при $x=0$ и $y=0$

$$p_0 = p(0, 0) = p_1 + \frac{\rho_1 V_1^2}{2}. \quad (4.3.48)$$

Здесь ρ_1 , p_1 , $V_1 = V_n (\rho_n / \rho_1)^2$ – давление, плотность и скорость непосредственно за прямой частью ударной волны определяются выражениями (1.1.20), (1.1.21), (1.1.25) соответственно по числу M_n при $\theta_c = \pi / 2$.

Для определения компонентов вектора скорости u , v и давления в окрестности критической точки вязкого течения вводится относительная

функция тока $f(y)$ и относительное давление $F(y)$, с помощью которых компоненты скорости и давление представляются в виде [146]

$$u(x, y) = x \cdot f'(y), \quad v(y) = -f(y), \quad (4.3.49)$$

$$p_0 - p(x, y) = \frac{\rho}{2} \beta^2 [x^2 + F(y)], \quad (4.3.50)$$

причем выражения (4.3.49) удовлетворяют уравнению неразрывности (4.3.35).

Подставляя (4.3.49), (4.3.50) в уравнения Навье–Стокса для несжимаемого течения (4.3.33), (4.3.34), получим два следующих нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$f'^2 - f \cdot f'' = \beta^2 + \nu \cdot f''', \quad (4.3.51)$$

$$f \cdot f' = \frac{\beta^2}{2} F' - \nu \cdot f'', \quad (4.3.52)$$

где $\nu = \mu / \rho$ – кинематическая вязкость, с граничными условиями

$$f = 0, \quad f' = 0, \quad F = 0 \quad \text{при } y = 0,$$

$$f' = \beta \quad \text{при } y \rightarrow \infty. \quad (4.3.53)$$

Для численного решения задачи (4.3.51)–(4.3.53) вводятся следующие переменные

$$\eta = \sqrt{\frac{\beta}{\nu}} \cdot y; \quad f(y) = \sqrt{\beta \nu} \cdot \varphi(\eta), \quad (4.3.54)$$

в результате чего уравнение (4.3.51) упрощается и приводит к задаче:

$$\varphi''' + \varphi \cdot \varphi'' - \varphi'^2 + 1 = 0, \quad \varphi(0) = 0. \quad (4.3.55)$$

Решение задачи (4.3.55) затабулировано в таблице 2.1 [146], а функция $\varphi(\eta)$ аппроксимируется по методу наименьших квадратов многочленом третьей степени

$$\varphi(\eta) = -0,084 \eta^3 + 0,48 \eta^2. \quad (4.3.56)$$

Таким образом, из (4.3.56), (4.3.54) и (4.3.51) находим компоненты u , v вектора скорости в вязком течении

$$v(y) = -\sqrt{\beta \nu} \varphi(\eta); \quad \frac{u(y)}{U_e} = \frac{f'(y)}{\beta} = \frac{\sqrt{\beta \nu}}{\beta} \varphi'(\eta) \cdot \sqrt{\frac{\beta}{\nu}} = \varphi'(\eta), \quad (4.3.57)$$

Из таблицы 2.1 видно, что за значение толщины вязкого течения δ в окрестности критической точки принимается толщина, при которой $u/U_e = 0,99$, то есть $\eta = 2,4$. Тогда из первого соотношения (4.3.54) находим

$$\delta = 2,4 \sqrt{\frac{\nu}{\beta}} = 2,4 \sqrt{\frac{\nu S_0}{V_1}}. \quad (4.3.58)$$

Функцию $F(y)$ относительного давления находим из следующей задачи Коши для уравнения (4.3.52)

$$ff' = \frac{\beta^2}{2} F' - \nu f'', \quad (4.3.59)$$

$$F(0) = 0.$$

Подставляя в (4.3.59) $f(y)$ из (4.3.54) и интегрируя по переменной η , получим распределение относительного давления $F(\eta)$ с учетом начального условия

$$F(\eta) = \frac{2\nu}{\beta} \int_0^{\sqrt{\nu/\beta}\eta} [\varphi(\alpha) \cdot \varphi'(\alpha) + \nu \varphi''(\alpha)] d\alpha, \quad (4.3.60)$$

причем $\varphi(\eta)$ определяется многочленом (4.3.56). Компоненты u , v вектора скорости в вязком течении определяются выражениями (4.3.56) и (4.3.57):

$$u(y) = U_e(x) \varphi'(\eta); \quad v(y) = -\sqrt{\beta\nu} \varphi(\eta). \quad (4.3.61)$$

При решении уравнения энергии (4.3.37) заметим, что поперечное обтекание плоского затупленного тела (например, пластины) несжимаемым вязким потоком не подчиняется приближениям пограничного слоя, так как продольная составляющая вектора скорости намного меньше поперечной составляющей, особенно в окрестности критической точки. При этом ударная волна является почти плоской (рис. 4.9) и следует ожидать, что тепловой поток в окрестности критической точки на изотермической стенке является постоянным в направлении переменной x . Однако, поскольку решается сопряженная задача теплообмена, то за счет изменения температуры границы $y=0$ как по переменной x , так и по времени тепловой поток к стенке так же

будет изменяться по переменной x и по времени, хотя характеристики набегающего потока постоянны.

В этой связи в уравнении энергии (4.3.37) продольным компонентом вектора скорости в окрестности критической точки можно пренебречь, температура газа в продольном направлении линейна и, следовательно, вторая производная температуры по продольной переменной равна нулю. Кроме этого, давление по толщине вязкого пристенного течения постоянно.

Тогда уравнение энергии (4.3.37) примет вид:

$$v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{v}{\rho c_p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{2\mu}{\rho c_p} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu}{\rho c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (4.3.62)$$

Используя переменные (4.3.54), выражения (4.3.57) для компонентов $u(y)$

и $v(y)$, получим из уравнения (4.3.62) ($\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \sqrt{\frac{\beta}{\nu}}$, число $\text{Pr} = 0,71$):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \text{Pr} \varphi(\eta) \frac{\partial T}{\partial \eta} = -\text{Pr} \left[\frac{2\beta\nu}{c_p} (\varphi')^2 + \frac{U_e^2(x)}{c_p} (\varphi'')^2 \right], \quad (4.3.63)$$

в котором $\varphi(\eta)$ можно определить из соотношения (4.3.56). Общим решением уравнения (4.3.63) будет функция

$$T(\eta) = C_1 \int_0^\eta e^{-0,71 \int_0^\xi \varphi(\xi) d\xi} - \int_0^\eta e^{-0,71 \int_0^\xi \varphi(\xi) d\xi} \cdot \left[\int_0^\alpha \Phi(\xi) e^{0,71 \int_0^\xi \varphi(\gamma) d\gamma} d\xi \right] d\alpha + C_2, \quad (4.3.64)$$

где

$$\Phi(\xi) = \left[\frac{1,42\beta\nu}{c_p} (\varphi'(\xi))^2 + \frac{0,71}{c_p} U_e^2 (\varphi''(\xi))^2 \right].$$

Введем обозначения

$$\Psi(\eta) = 0,71 \int_0^\eta \varphi(\xi) d\xi; \quad I_1(\eta) = \int_0^\eta e^{-\Psi(\alpha)} d\alpha$$

$$I_2(\eta) = \int_0^\eta e^{-\Psi(\alpha)} \cdot \left(\int_0^\alpha \Phi(\xi) e^{\Psi(\xi)} d\xi \right) d\alpha.$$

Тогда общее решение примет вид:

$$T(\eta) = C_1 \cdot I_1(\eta) - I_2(\eta) + C_2, \quad (4.3.65)$$

в котором постоянные интегрирования C_1 , C_2 определяются из краевых условий:

$$\eta = 0 (y = 0): T(0) = C_2 = T_w; \quad \eta = \eta_0 = \sqrt{\frac{\beta}{\nu}} S_0 (y = S_0): C_1 = \frac{T_1 - T_w + I_2(\eta_0)}{I_1(\eta_0)}.$$

Подставляя C_1 , C_2 в (4.3.65), находим

$$T(\eta) = T_w \left[1 - \frac{I_1(\eta)}{I_1(\eta_0)} \right] + [T_1 + I_2(\eta_0)] \frac{I_1(\eta)}{I_1(\eta_0)} - I_2(\eta) \quad (4.3.66)$$

Дифференцируя функцию (4.3.66) по переменной η при $\eta = 0$ и умножая эту производную на теплопроводность газа при температуре T_w , получим тепловой поток q_1 на границе, соприкасающейся с газодинамическим потоком.

$$\lambda \left. \frac{\partial T(\eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = q_1 = \lambda \frac{T_1 - T_w + I_2(\eta_0)}{I_1(\eta_0)} = -\frac{\lambda}{I_1(\eta_0)} T_w(x, t) + \frac{T_1 + I_2(\eta_0)}{I_1(\eta_0)}. \quad (4.3.67)$$

Если теперь тепловой поток $q_1(x, t)$ в форме (4.3.67) подставить в решение (4.1.40) задачи (4.1.19)–(4.1.24) теплопроводности в анизотропном полупространстве, приняв при этом:

$$\alpha_1 = \frac{\lambda}{I_1(\eta_0)}; \quad \alpha_2 F_e = \frac{T_1 + I_2(\eta_0)}{I_1(\eta_0)}, \text{ получим}$$

$$\begin{aligned} T(x, y, t) &= \frac{T_1 + I_2(\eta_0)}{2I_1(\eta_0)\lambda_{22}\sqrt{\gamma}} \int_0^t 1(\tau) \cdot \exp\left(\varphi_1\left(\frac{\lambda}{I_1(\eta_0)}, y, t - \tau\right)\right) \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\varphi_2^2\left(\frac{\lambda}{I_1(\eta_0)}, y, t - \tau\right)\right) - \frac{\alpha_1}{\lambda_{22}\sqrt{\gamma}} \operatorname{erfc}\left(\varphi_2\left(\frac{\lambda}{I_1(\eta_0)}, y, t - \tau\right)\right) \right\} \times \\ &\times \left[\operatorname{erf} \frac{l - ay + x}{2\sqrt{\beta(t-\tau)/\gamma}} + \operatorname{erf} \frac{l + ay - x}{2\sqrt{\beta(t-\tau)/\gamma}} \right] d\tau, \end{aligned} \quad (4.3.68)$$

где

$$\varphi_1\left(\frac{\lambda}{I_1(\eta_0)}, y, t - \tau\right) = \frac{\lambda^2}{I_1(\eta_0)^2 \lambda_{22}^2 \gamma} (t - \tau) + \frac{\lambda y}{I_1(\eta_0) \lambda_{22}},$$

$$\varphi_2\left(\frac{\lambda}{I_1(\eta_0)}, y, t - \tau\right) = \frac{y\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{t-\tau}} + \frac{\lambda\sqrt{t-\tau}}{\lambda_{22}I_1(\eta_0)\sqrt{\gamma}},$$

$$a = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{22}}, \quad \beta = (\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2) / \lambda_{22}^2 = \lambda_{\xi} \cdot \lambda_{\eta} / \lambda_{22}^2, \quad \gamma = \frac{c\rho}{\lambda_{22}}.$$

Функция (4.3.68) описывает распределение температуры внутри полубесконечной анизотропной области при сопряженном теплообмене на границе $y=0$, когда тепловой поток $q_1(x,t)$ от вязкого газа в окрестности критической точки зависит от переменных x и t и действует на отрезке $x \in [-l; l]$.

Выводы по четвертой главе

1. Впервые получены аналитические решения класса задач теплопереноса в анизотропных телах с анизотропией общего вида (наличие смешанных дифференциальных операторов) с граничными условиями второго, третьего и четвертого родов (граничные условия на границах раздела газообразных и твердых сред).

2. Доказана теорема о существовании граничной функции влияния для задачи теплопроводности в анизотропной полосе с нестационарным и переменным по границе теплообменом. Эта функция найдена путем использования интегральных преобразований Фурье и Лапласа и применена для решения задачи о нестационарном теплообмене в анизотропных средах.

3. Разработан метод аналитического решения сопряженных задач между теплогазодинамическим пограничным слоем и теплопроводности в анизотропных телах с получением в явном виде температуры границы сопряжения, являющейся параметром сопряжения.

4. Получено аналитическое решение сопряженной задачи теплопереноса между вязким ударным слоем на основе уравнений Навье-Стокса в окрестности критической точки поперечно обтекаемого анизотропного полупространства с анизотропией общего вида.

5. Полученные новые аналитические решения задач теплопроводности в анизотропных средах с анизотропией общего вида и сопряженных задач теплогазодинамики и анизотропной теплопроводности можно не только использовать для тестирования существенно нелинейных задач сопряженного теплопереноса, но и использовать при тепловом проектировании гиперзвуковых летательных аппаратов, о чем подтверждают многочисленные результаты, полученные с помощью аналитических решений.

5. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБРАТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ И ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛООБМЕНА МЕЖДУ АНИЗОТРОПНЫМИ ТЕЛАМИ И ВЯЗКИМИ ТЕПЛОГАЗОДИНАМИЧЕСКИМИ ТЕЧЕНИЯМИ

В прямых задачах механики сплошных сред (МСС) вообще и теплопереноса, в частности, математическая модель описывает связь между причиной (начальные и граничные условия, коэффициенты, алгебраические, дифференциальные или интегральные уравнения) и следствием (в задачах сопряженного теплопереноса – тепловые потоки, температурные поля, газодинамические характеристики и т.п.).

В обратных задачах наоборот – по следствию определяются причины, которые не описываются математическими моделями, вследствие чего обратные задачи чаще всего являются *некорректными, то есть не выполняется одно из следующих условий (или все вместе): решение существует, оно единственно, имеется непрерывная зависимость решения от входных данных (устойчивость)*.

В задачах сопряженного теплопереноса зачастую невозможно определить причинные связи (коэффициенты, граничные условия, начальные условия, вид дифференциальных или интегральных уравнений) из стендовых или натуральных экспериментов.

Однако часто эти причинные характеристики можно определить по экспериментальным данным характеристик, являющихся следствием с использованием прямых математических моделей и разработанной методологии численного решения обратных задач.

В задачах сопряженного теплопереноса невозможно измерить температуру границы сопряжения и следовательно тепловые потоки от газа к телу, так как толщина термопар имеет порядок толщины ламинарного

подслоя вязкого газодинамического течения. Однако сравнительно легко можно измерить временные зависимости температур в ограниченном числе точек внутри тела, близко примыкающих к границе сопряжения.

Если по этим экспериментальным данным – пространственно-временному распределению температур – восстанавливаются различные коэффициенты, в том числе и зависящие от температуры (нелинейные коэффициенты), то обратная задача называется *коэффициентной*. Если по замерам температур определяются краевые условия, то обратная задача называется *граничной*, а если восстанавливаются начальные условия, то обратная задача называется *ретроспективной*.

В данной главе разработана методология численного решения обратных коэффициентных, в том числе нелинейных, и граничных задач сопряженного теплопереноса. Методология включает в себя следующие методы: неявного градиентного спуска, параметрической идентификации, регуляризации квадратичного функционала невязки, методов численного решения прямых и сопряженных (в математическом смысле) задач анизотропной теплопроводности. *Все эти составляющие разработаны впервые.*

По разработанной методологии разработаны программные комплексы, с помощью которых впервые восстановлены компоненты тензора теплопроводности анизотропных материалов, зависящих от температуры, а также тепловые потоки от вязких газодинамических течений к анизотропным материалам. Показано, что разработка и использование регуляризирующих функционалов позволяет использовать экспериментальные данные с гораздо большей погрешностью, чем без регуляризирующих функционалов; при этом погрешности результатов остаются в окрестности погрешности экспериментальных данных.

5.1. Разработка методологии численного решения задач идентификации компонентов тензора теплопроводности анизотропных материалов с учетом регуляризирующего функционала

5.1.1. Постановка задачи

Рассматривается первая начально-краевая задача анизотропной теплопроводности в прямоугольной области $l_1 \times l_2$. Все коэффициенты тензора теплопроводности $\lambda_{11}(T)$, $\lambda_{12}(T)$, $\lambda_{22}(T)$ зависят от температуры, на границах задается постоянная температура T_{\max} , при этом начальная температура $T_{\min} < T_{\max}$. Таким образом, в силу отсутствия дополнительных источников тепла температура внутри области в течение всего нестационарного процесса будет принадлежать интервалу: $T \in [T_{\min}; T_{\max}]$. Область определения коэффициентов так же будет совпадать с интервалом $T \in [T_{\min}; T_{\max}]$.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{11}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{12}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{21}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{22}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) = c\rho(T) \frac{\partial T}{\partial t},$$

$$x \in (0; l_1), \quad y \in (0; l_2), \quad t > 0; \quad (5.1.1)$$

$$T(x, 0, t) = T(0, y, t) = T_{\max}, \quad T(x, l_2, t) = T(l_1, y, t) = T_{\max} \quad (5.1.2)$$

$$T(x, y, 0) = T_{\min}, \quad (5.1.3)$$

Задача (5.1.1)–(5.1.3) решается методом расщепления с экстраполяцией по времени (МРЭВ), изложенный в параграфе 2.3.

Обратная задача формулируется следующим образом:

по экспериментальному распределению температур в пространственно-временных точках

$$T((x, y)_i, t^k) = \tilde{T}_{i,k}, \quad i = \overline{1, I}, \quad k = \overline{1, K} \quad (5.1.4)$$

с использованием математической модели (5.1.1)–(5.1.3) определить функции $\lambda_{11}(T)$, $\lambda_{12}(T)$, $\lambda_{22}(T)$ на интервале $T \in [T_{\min}; T_{\max}]$.

5.1.2. Общий метод решения

Искомые функции $\lambda_{11}(T)$, $\lambda_{12}(T)$, $\lambda_{22}(T)$, будем искать в виде линейной комбинации некоторых базисных функций $N_m(T)$, задаваемых на конечных отрезках ΔT_m , $m = \overline{1, M}$ ($T_{\min} \leq T \leq T_{\max}$), приписанных к каждому узлу T_m , $m = \overline{0, M}$, причем они ортогональны на отрезке $T \in [T_{\min}; T_{\max}]$, поскольку вне носителей ΔT_m , $m = \overline{1, M}$, они равны нулю.

Наиболее распространенными являются линейно-непрерывные и кусочно-постоянные базисные функции [123]. Первые для каждого узла T_m представляются в следующем виде:

$$N_m(T) = \begin{cases} 0, & T < T_{m-1}; \\ \frac{T - T_{m-1}}{T_m - T_{m-1}}, & T_{m-1} \leq T \leq T_m; \\ \frac{T_{m+1} - T}{T_{m+1} - T_m}, & T_m \leq T \leq T_{m+1}; \\ 0, & T > T_{\max}; \end{cases} \quad m = \overline{1, M-1},$$

$$N_0(T) = \begin{cases} \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}, & T_0 \leq T \leq T_1; \\ 0, & T > T_1, T < T_0; \end{cases} \quad m = 0;$$

$$N_M(T) = \begin{cases} \frac{T - T_{M-1}}{T_M - T_{M-1}}, & T_{M-1} \leq T \leq T_M; \\ 0, & T < T_{M-1}, T > T_M; \end{cases} \quad m = M.$$
(5.1.5)

Значение базисной функции в узле $T = T_m$ равно единице, в остальных узлах отрезка $T \in [T_{\min}, T_{\max}]$ они равны нулю.

Функции $\lambda_{i,j}(T)$ $i, j = \overline{1, 2}$ приближенно определяются как линейные комбинации функций (5.1.5), в которых коэффициентами используются значения $\lambda_{i,j}^m$, $i, j = \overline{1, 2}$, $m = \overline{0, M}$ искомых функций в узлах T_m , которые подлежат определению.

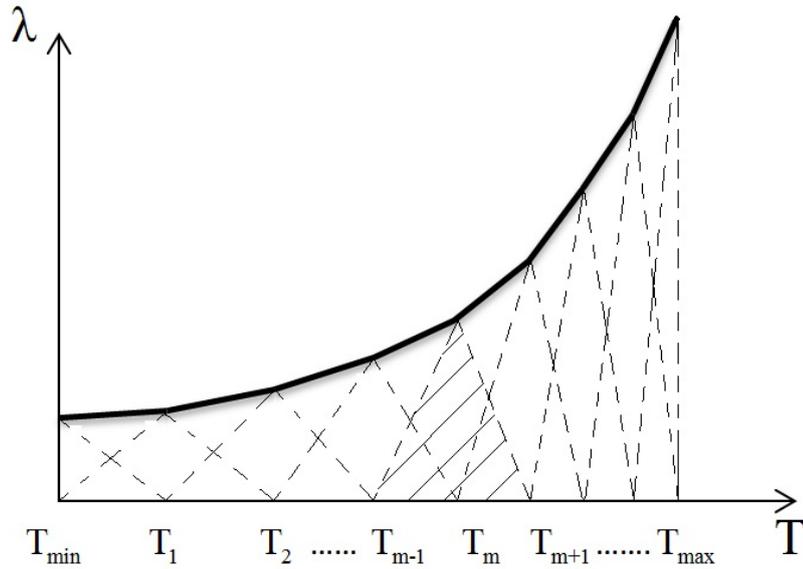


Рис. 5.1. Аппроксимация непрерывных функций $\lambda(T)$ базисными функциями:
линейно-непрерывными.

$$\lambda_{11}(T) \approx \sum_{m=1}^M \lambda_{11}^m \cdot N_m(T), \quad (5.1.6)$$

$$\lambda_{22}(T) \approx \sum_{m=1}^M \lambda_{22}^m \cdot N_m(T), \quad (5.1.7)$$

$$\lambda_{12}(T) \approx \sum_{m=1}^M \lambda_{12}^m \cdot N_m(T), \quad (5.1.8)$$

На рис. 5.1 показана аппроксимация непрерывных функций $\lambda(T)$ базисными функциями (5.1.5).

Коэффициенты линейных комбинаций λ_{11}^m , λ_{22}^m , λ_{12}^m ($m = \overline{0, M}$) для каждого узла являются искомыми величинами.

В отличие от работ [109, 123] все параметры λ_{11}^m , λ_{22}^m , λ_{12}^m определяются одновременно без привязки к временным промежуткам для каждого неизвестного коэффициента, что существенно упрощает алгоритм решения обратной задачи.

На основании принципа максимума, справедливого для задач в отсутствии источников теплоты, можно утверждать, что температура внутри области будет удовлетворять следующему неравенству: $T_{\min} \leq T(x, y, t) \leq T_{\max}$.

Обозначим: $\lambda_{11}^1 = \lambda_{11}(T_{\min})$; $\lambda_{12}^1 = \lambda_{12}(T_{\min})$; $\lambda_{22}^1 = \lambda_{22}(T_{\min})$; ... ; $\lambda_{11}^M = \lambda_{11}(T_{\max})$;
 $\lambda_{12}^M = \lambda_{12}(T_{\max})$; $\lambda_{22}^M = \lambda_{22}(T_{\max})$.

Для определения постоянных компонентов вектора $\lambda = (\lambda_{11}^1, \dots, \lambda_{11}^M, \lambda_{22}^1, \dots, \lambda_{22}^M, \lambda_{12}^1, \dots, \lambda_{12}^M)^T$ в выражениях (5.1.6)–(5.1.8) введем квадратичный функционал:

$$S(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K [T_{i,k}(\lambda) - \tilde{T}_{i,k}]^2 \quad (5.1.9)$$

в виде суммы по пространственно-временным переменным квадратов отклонения экспериментальных значений $\tilde{T}_{i,k}$, в которые заложены неизвестные (искомые) параметры в точках $((x, y)_i, t^k)$, от расчетных $T_{i,k}(\lambda) \equiv T_{i,k}((x, y)_i, t^k, \lambda)$, определяемых по произвольным значениям вектора λ .

В случае отсутствия экспериментальных значений температур в качестве последних принимаются результаты численного решения по приемлемым характеристикам $\lambda_{11}(T)$, $\lambda_{22}(T)$, $\lambda_{12}(T)$, считающихся искомыми. При этом в экспериментальные значения $\tilde{T}_{i,k}$ может входить относительная δ , либо абсолютная Δ погрешность. Предполагается, что при достижении стационарного значения функционала (5.1.9), искомые характеристики, заложенные в экспериментальные значения $\tilde{T}_{i,k}$, приближенно совпадут с характеристиками, по которым получены расчетные значения температур.

Для минимизации функционала используется *неявный* метод градиентного спуска

$$\lambda^{(n+1)} = \lambda^{(n)} - \alpha_n \text{grad} S(\lambda^{(n+1)}). \quad (5.1.10)$$

где n – номер предыдущей итерации, α_n – малые параметрические шаги, подчиняющиеся условию ($\alpha_n > 0$)

$$S(\lambda^{(n+1)}) < S(\lambda^{(n)}). \quad (5.1.11)$$

Значение α_0 выбирается произвольно. Если условие (5.1.10) не выполнилось на следующей итерации, то α_n на текущей итерации уменьшается, после чего расчет повторяется, в противном случае α_n можно увеличить для ускорения сходимости итерационного процесса.

Итерационный процесс заканчивается, когда функционал достигает стационарного значения $\text{grad } S(\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)}) = 0$, то есть при выполнении

$$|\text{grad } S(\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)})| \leq \varepsilon, \quad (5.1.12)$$

где ε – ранее заданная точность итерационного процесса.

Для определения градиента функционала в (5.1.12) функцию $T_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)})$ в окрестности $\boldsymbol{\lambda}^{(n)}$ разложим в ряд Тейлора с удержанием линейных относительно $\Delta\boldsymbol{\lambda}^{(n)}$ членов. Это можно сделать, так как $T_{i,k}(\boldsymbol{\lambda})$ дважды дифференцируема, поскольку удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопроводности. Приходим к выражению:

$$S(\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)}) \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K \left[\left(T_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) + \sum_{l=0}^{3M} \frac{\partial T_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)})}{\partial \lambda_l} \Delta \lambda_l^{(n)} \right) - \tilde{T}_{i,k} \right]^2 + O(\|\Delta\boldsymbol{\lambda}\|^2). \quad (5.1.13)$$

В этом случае составляющие градиента функционала (5.1.13) будут определяться следующим выражением

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)})}{\partial \lambda_l} &= \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K \left[\left(T_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) - \tilde{T}_{i,k} \right) + \sum_{l=0}^{3M} \frac{\partial T_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)})}{\partial \lambda_l} \Delta \lambda_l^{(n)} \right] \times \\ &\times \left[\frac{\partial T_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)})}{\partial \lambda_l} + \frac{\partial}{\partial \lambda_l} \left(\sum_{l=0}^{3M} \frac{\partial T_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)})}{\partial \lambda_l} \Delta \lambda_l^{(n)} \right) \right] \approx \\ &\approx \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K \left[\left(T_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) - \tilde{T}_{i,k} \right) + \sum_{l=0}^{3M} \frac{\partial T_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)})}{\partial \lambda_l} \Delta \lambda_l^{(n)} \right] \frac{\partial T_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)})}{\partial \lambda_l}, \quad l = \overline{0, 3M}, \quad (5.1.14) \end{aligned}$$

где $3 \cdot (M+1)$ – число искоемых параметров.

Представим вектор градиента функционала с компонентами (5.1.14) в следующей векторно-матричной форме:

$$\text{grad } S(\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)}) = Z^T(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) \left(T(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) - \tilde{T} \right) + Z^T(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) Z(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) \Delta \boldsymbol{\lambda}^{(n)}, \quad (5.1.15)$$

где

$$Z(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) = \begin{pmatrix} u^0((x, y)_1, t^1, \boldsymbol{\lambda}^{(n)}) & \dots & v^0((x, y)_1, t^1, \boldsymbol{\lambda}^{(n)}) & \dots & w^0((x, y)_1, t^1, \boldsymbol{\lambda}^{(n)}) & \dots \\ u^0((x, y)_2, t^1, \boldsymbol{\lambda}^{(n)}) & \dots & v^0((x, y)_2, t^1, \boldsymbol{\lambda}^{(n)}) & \dots & w^0((x, y)_2, t^1, \boldsymbol{\lambda}^{(n)}) & \dots \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ u^0((x, y)_I, t^K, \boldsymbol{\lambda}^{(n)}) & \dots & v^0((x, y)_I, t^K, \boldsymbol{\lambda}^{(n)}) & \dots & w^0((x, y)_I, t^K, \boldsymbol{\lambda}^{(n)}) & \dots \end{pmatrix} \quad (5.1.16)$$

Элементы этой матрицы (5.1.16) коэффициентов чувствительности в узлах $((x, y)_i, t^k)$ определяются из решения сопряженных задач относительно производных от прямой задачи (5.1.1)–(5.1.3) по каждому компоненту λ_l , $l = 0, \dots, 3M$ (их называют сопряженными в математическом смысле) и имеют смысл коэффициентов чувствительности температуры при изменении параметров λ_l :

$$u^m((x, y)_i, t^k, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\partial T((x, y)_i, t^k, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_{11}^m}; \quad v^m((x, y)_i, t^k, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\partial T((x, y)_i, t^k, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_{12}^m};$$

$$w^m((x, y)_i, t^k, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\partial T((x, y)_i, t^k, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_{22}^m}, \quad m = \overline{0, M}. \quad (5.1.17)$$

Размеры матрицы (5.1.16) равны $(I \cdot K) \times 3 \cdot (M + 1)$.

Векторы $T(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) - \tilde{T}$ и $\Delta \boldsymbol{\lambda}^{(n)}$ в выражении (5.1.15) имеют вид:

$$T(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) - \tilde{T} = \left(\left(T_{1,1}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) - \tilde{T}_{1,1} \right) \dots \left(T_{I,1}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) - \tilde{T}_{I,1} \right); \left(T_{1,2}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) - \tilde{T}_{1,2} \right) \dots \right. \\ \left. \left(T_{I,2}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) - \tilde{T}_{I,2} \right); \dots; \left(T_{I,K}(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) - \tilde{T}_{I,K} \right) \right)^T; \quad (5.1.18)$$

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}^{(n)} = \left(\Delta \lambda_{11}^{1(n)} \dots \Delta \lambda_{11}^{M(n)}; \Delta \lambda_{22}^{1(n)} \dots \Delta \lambda_{22}^{M(n)}; \Delta \lambda_{12}^{1(n)} \dots \Delta \lambda_{12}^{M(n)} \right)^T. \quad (5.1.19)$$

Подставляя выражение (5.1.15) в (5.1.10), получим

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}^{(n)} = -\alpha_n \left[Z^T(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) \left(T(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) - \tilde{T} \right) + Z^T(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) Z(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) \Delta \boldsymbol{\lambda}^{(n)} \right],$$

откуда

$$\left(E + \alpha_n \cdot Z^T(\lambda^{(n)}) Z(\lambda^{(n)}) \right) \Delta \lambda^{(n)} = -\alpha_n Z^T(\lambda^{(n)}) \left(T(\lambda^{(n)}) - \tilde{T} \right)$$

или

$$\Delta \lambda^{(n)} = -\alpha_n \left(E + \alpha_n Z^T(\lambda^{(n)}) Z(\lambda^{(n)}) \right)^{-1} Z^T(\lambda^{(n)}) \left(T(\lambda^{(n)}) - \tilde{T} \right). \quad (5.1.20)$$

Для определения элементов матрицы коэффициентов чувствительности (5.1.16) необходимо решить $3(M+1)$ независимые начально-краевые задачи относительно функций

$$u^0(x, y, t) = \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^0}, \dots, u^M(x, y, t) = \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^M}; v^0(x, y, t) = \frac{\partial T}{\partial \lambda_{12}^0}, \dots, v^M(x, y, t) = \frac{\partial T}{\partial \lambda_{12}^M};$$

$$w^0(x, y, t) = \frac{\partial T}{\partial \lambda_{22}^0}, \dots, w^M(x, y, t) = \frac{\partial T}{\partial \lambda_{22}^M}, \quad \text{которые можно получить}$$

продифференцировав задачу (5.1.1)–(5.1.3) по соответствующим параметрам $\lambda_{11}^0, \dots, \lambda_{11}^M; \lambda_{22}^0, \dots, \lambda_{22}^M; \lambda_{12}^0, \dots, \lambda_{12}^M$.

Продифференцируем уравнения задачи (5.1.1)–(5.1.3) по параметру λ_{11}^p , $p = \overline{0, M}$, предварительно подставив в нее представления искомых функций в виде (5.1.6)–(5.1.8), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(N_p(T) + \sum_{m=0}^M \lambda_{11}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \left(\sum_{m=0}^M \lambda_{11}^m N_m(T) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\sum_{m=0}^M \lambda_{12}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \left(\sum_{m=0}^M \lambda_{12}^m N_m(T) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\sum_{m=0}^M \lambda_{12}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \left(\sum_{m=0}^M \lambda_{12}^m N_m(T) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\sum_{m=0}^M \lambda_{22}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \left(\sum_{m=0}^M \lambda_{22}^m N_m(T) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \right] = c\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p} \right), \end{aligned}$$

$$x \in [0; l_1], y \in [0; l_2], t > 0, p = \overline{0, M}; \quad (5.1.21)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p}(x, 0, t) = \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p}(x, l_2, t) = \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p}(0, y, t) = \frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p}(l_1, y, t) = 0, p = \overline{0, M}; \quad (5.1.22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p}(x, y, 0) = 0, \quad p = \overline{0, M}. \quad (5.1.23)$$

Вводя в выражениях (5.1.21)–(5.1.23) обозначения $\frac{\partial T}{\partial \lambda_{11}^p} = u^p(x, y, t)$ и

$$\tilde{\lambda}_{11}(T) = \sum_{m=0}^M \lambda_{11}^m N_m(T), \quad \text{получим следующую начально-краевую}$$

дифференциальную задачу, относительно неизвестной функции $u^p(x, y, t)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(N_p(T) + \sum_{m=0}^M \lambda_{11}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \tilde{\lambda}_{11}(T) \left(\frac{\partial u^p}{\partial x} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\sum_{m=0}^M \lambda_{12}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \tilde{\lambda}_{12}(T) \left(\frac{\partial u^p}{\partial y} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\sum_{m=0}^M \lambda_{12}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \tilde{\lambda}_{12}(T) \left(\frac{\partial u^p}{\partial x} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\sum_{m=0}^M \lambda_{22}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{11}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \tilde{\lambda}_{22}(T) \left(\frac{\partial u^p}{\partial y} \right) \right] = c\rho \frac{\partial u^p}{\partial t}, \end{aligned}$$

$$x \in [0; l_1], \quad y \in [0; l_2], \quad t > 0; \quad (5.1.24)$$

$$u^p(x, 0, t) = u^p(x, l_2, t) = u^p(0, y, t) = u^p(l_1, y, t) = 0; \quad (5.1.25)$$

$$u^p(x, y, 0) = 0. \quad (5.1.26)$$

Аналогично продифференцировав задачу (5.1.1)–(5.1.3) по параметрам $\lambda_{12}^p, \lambda_{22}^p$ и сделав обозначения $\partial T / \partial \lambda_{12}^p = v^p(x, y, t)$ и $\partial T / \partial \lambda_{22}^p = w^p(x, y, t)$, получим следующие начально-краевые дифференциальные задачи относительно неизвестных функций $v^p(x, y, t)$ и $w^p(x, y, t)$ соответственно:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\sum_{m=0}^M \lambda_{11}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{12}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \tilde{\lambda}_{11}(T) \left(\frac{\partial v^p}{\partial x} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(N_p(T) + \sum_{m=0}^M \lambda_{12}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{12}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \tilde{\lambda}_{12}(T) \left(\frac{\partial v^p}{\partial y} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(N_p(T) + \sum_{m=0}^M \lambda_{12}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{12}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \tilde{\lambda}_{12}(T) \left(\frac{\partial v^p}{\partial x} \right) \right] + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\sum_{m=0}^M \lambda_{22}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{12}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \tilde{\lambda}_{22}(T) \left(\frac{\partial v^p}{\partial y} \right) \right] = c\rho \frac{\partial v^p}{\partial t},$$

$$x \in [0; l_1], y \in [0; l_2], t > 0; \quad (5.1.27)$$

$$v^p(x, 0, t) = v^p(x, l_2, t) = v^p(0, y, t) = v^p(l_1, y, t) = 0; \quad (5.1.28)$$

$$v^p(x, y, 0) = 0. \quad (5.1.29)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\sum_{m=0}^M \lambda_{11}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{22}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \tilde{\lambda}_{11}(T) \left(\frac{\partial w^p}{\partial x} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\sum_{m=0}^M \lambda_{12}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{22}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \tilde{\lambda}_{12}(T) \left(\frac{\partial w^p}{\partial y} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\sum_{m=0}^M \lambda_{12}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{22}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \tilde{\lambda}_{12}(T) \left(\frac{\partial w^p}{\partial x} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(N_p(T) + \sum_{m=0}^M \lambda_{22}^m \frac{\partial N_m(T)}{\partial \lambda_{22}^p} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \tilde{\lambda}_{22}(T) \left(\frac{\partial w^p}{\partial y} \right) \right] = c\rho \frac{\partial w^p}{\partial t}, \end{aligned}$$

$$x \in [0; l_1], y \in [0; l_2], \quad (5.1.30)$$

$$w^p(x, 0, t) = w^p(x, l_2, t) = w^p(0, y, t) = w^p(l_1, y, t) = 0, \quad (5.1.31)$$

$$w^p(x, y, 0) = 0. \quad (5.1.32)$$

Задачи (5.1.24)–(5.1.26), (5.1.27)–(5.1.29) и (5.1.30)–(5.1.32) решаются совместно с прямой задачей (5.1.1)–(5.1.3) с помощью метода расщепления с экстраполяцией по времени (МРЭВ), причем на каждом временном слое используются значения температур найденных при решении прямой задачи (5.1.1)–(5.1.3). Таким образом, одновременно находятся элементы матрицы (5.1.16) и компоненты вектора (5.1.19) или (5.1.20).

5.1.3. Построение регуляризирующего функционала

Поскольку малым возмущениям экспериментальных значений температур \tilde{T} могут соответствовать значительные возмущения вектора λ , то обратная задача является некорректной. Для получения контролируемой

погрешности в полученном векторе λ , необходимо использовать регуляризирующий функционал $R(\lambda)$ [50, 68], путем добавления его к функционалу невязки (5.1.9):

$$S_a(\lambda) = S(\lambda) + R_a(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^K [T_{i,k}(\lambda) - \tilde{T}_{i,k}]^2 + R_a(\lambda). \quad (5.1.33)$$

Регуляризирующий функционал $R(\lambda)$ формируется на основе дополнительных априорных предположений, накладываемых на искомые функции $\lambda_{11}(T)$, $\lambda_{12}(T)$, $\lambda_{22}(T)$, например, требование принадлежности этих функций классу C_n , использование двустороннего метода, когда искомые функции расположены в ε – полоске, ограниченной сверху и снизу, и т.п.

Регуляризирующий функционал может быть как линейным, так и нелинейным, однако целесообразно использовать линейный функционал, что существенно упрощает алгоритм решения обратной задачи. В линейном случае регуляризирующий функционал может быть записан в векторно-матричном виде:

$$R_a(\lambda) = \frac{a}{2} \|B\lambda\|^2, \quad (5.1.34)$$

где a – параметр регуляризации, подлежащий определению, $\|\cdot\|$ – какая-либо норма вектора $B \cdot \lambda$, тогда

$$\begin{aligned} \text{grad } S_a(\lambda^{(n+1)}) &= \text{grad } S(\lambda^{(n+1)}) + \text{grad } R_a(\lambda^{(n+1)}) = \\ &= \text{grad } S(\lambda^{(n+1)}) + aB^T (B\lambda^{(n+1)}). \end{aligned} \quad (5.1.35)$$

Здесь B – матрица линейного регуляризирующего функционала (размерностью $3M \times 3M$), которая представима в блочном виде из отдельных матриц B_{11}, B_{22}, B_{21} (размерностью $M \times M$) – которые независимо влияют, соответственно, на коэффициенты $\lambda_{11}^m, \lambda_{22}^m, \lambda_{12}^m, m = \overline{1, M}$:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \text{O} & \text{O} \\ \text{O} & B_{22} & \text{O} \\ \text{O} & \text{O} & B_{12} \end{pmatrix}. \quad (5.1.36)$$

Например, матрицы B_{11}, B_{22}, B_{12} могут быть выбраны из условия гладкости (непрерывности первых производных) функций $\lambda_{11}(T)$, $\lambda_{22}(T)$, $\lambda_{12}(T)$ по температуре:

$$B_{11} = B_{22} = B_{12} = \frac{1}{\Delta T} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.1.37)$$

Подставляя выражение (5.1.35) в (5.1.36), получим:

$$\begin{aligned} \text{grad } S_a(\lambda^{(n+1)}) &= Z^T(\lambda^{(n)}) \left(T(\lambda^{(n)}) - \tilde{T} \right) + Z^T(\lambda^{(n)}) Z(\lambda^{(n)}) \Delta \lambda^{(n)} + \\ &+ a B^T B (\lambda^{(n)} + \Delta \lambda^{(n)}), \end{aligned} \quad (5.1.38)$$

Учитывая выражение (5.1.38) в итерационном процессе (5.1.10), получаем равенство

$$\Delta \lambda^{(n)} = -\alpha_n \left[Z^T(\lambda^{(n)}) \left(T(\lambda^{(n)}) - \tilde{T} \right) + Z^T(\lambda^{(n)}) Z(\lambda^{(n)}) \Delta \lambda^{(n)} + a B^T B (\lambda^{(n)} + \Delta \lambda^{(n)}) \right],$$

откуда

$$\begin{aligned} \left(E + \alpha_n \cdot Z^T(\lambda^{(n)}) Z(\lambda^{(n)}) + \alpha_n \cdot a \cdot B^T B \right) \Delta \lambda^{(n)} &= \\ = -\alpha_n Z^T(\lambda^{(n)}) \left(T(\lambda^{(n)}) - \tilde{T} \right) - \alpha_n a \cdot B^T B \cdot \lambda^{(n)} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \Delta \lambda^{(n)} &= -\alpha_n \left(E + \alpha_n \left\{ Z^T(\lambda^{(n)}) Z(\lambda^{(n)}) + a \cdot B^T B \right\} \right)^{-1} \times \\ &\times \left\{ Z^T(\lambda^{(n)}) \left(T(\lambda^{(n)}) - \tilde{T} \right) + a \cdot B^T B \cdot \lambda^{(n)} \right\}. \end{aligned} \quad (5.1.39)$$

5.1.4. Результаты численных экспериментов по восстановлению нелинейных компонентов тензора теплопроводности без использования регуляризирующего функционала

По разработанному программному комплексу проведены массовые расчеты по восстановлению нелинейных компонентов тензора теплопроводности углерод-углеродного композитного материала, армированного нитями под углом $\varphi = 30^\circ$ к одной из границ пластины как с погрешностью в экспериментальных данных, так и без нее.

Экспериментальные значения температур (5.1.4) формировались путем численного решения задачи (5.1.1)–(5.1.3) с использованием следующих зависимостей от температуры главных компонентов тензора теплопроводности, считающихся искомыми:

$$\lambda_{\xi}(T) = 0,46875 \cdot 10^{-5} T^2 - 0,625 \cdot 10^{-2} T + 5,0625; \quad (5.1.40)$$

$$\lambda_{\eta}(T) = -0,625 \cdot 10^{-5} T^2 + 0,0125 T - 4,25.$$

Тогда нелинейные компоненты тензора теплопроводности в декартовой системе координат в соответствии с (1.4.31) определяются функциями:

$$\lambda_{11}(T) = 0,1953125 \cdot 10^{-5} T^2 - 0,15625 \cdot 10^{-2} T + 2,734375;$$

$$\lambda_{22}(T) = -0,3515625 \cdot 10^{-5} T^2 + 0,78125 \cdot 10^{-2} T - 1,921875;$$

$$\lambda_{12}(T) = 0,4736076428 \cdot 10^{-5} T^2 - 0,8118988162 \cdot 10^{-2} T + 4,032430788.$$

Для решения прямой задачи с граничными условиями $T|_{\Gamma} = T_{\max} = 1400K$, $T(x, y, 0) = T_{\min} = 600K$ принимались следующие входные данные: $c\rho = 2,25 \cdot 10^6 \text{ Дж/м}^3 \text{ К}$, $l_1 = 0,1 \text{ м}$; $l_2 = 0,06 \text{ м}$. Экспериментальные значения температур вычислялись по этим входным данным при решении прямой задачи (5.1.1)–(5.1.3) в точках $x_i = \{0,01; 0,05; 0,09\}$, $y_j = \{0,004; 0,012; 0,02\}$ в моменты времени $t^k = 30\text{с}, 40\text{с}, 50\text{с}, 60\text{с}, 70\text{с}, 80\text{с}, 90\text{с}, 100\text{с}$.

Температурный интервал разбивался на три элемента ($M=3$): $T_m = \{600; 900; 1100; 1400\}$, $m = \overline{0, 4}$. Таким образом, определяются 12 искомыми параметрами: λ_{11}^m , λ_{22}^m , λ_{12}^m , $m = \overline{0, 3}$.

В таблице 5.1 приведен итерационный процесс по восстановлению коэффициентов λ_{11}^0 , λ_{22}^0 , λ_{12}^0 , в нулевом узле и λ_{11}^2 , λ_{22}^2 , λ_{12}^2 во втором узле при отсутствии погрешностей в экспериментальных данных $\tilde{T}_{i,k}$, в таблице 5.2 – то же с добавлением абсолютной погрешности из интервала $|\Delta\tilde{T}_{i,k}| \leq 5K$, с равномерным распределением (для первого и четвертого узлов итерационный процесс имеет аналогичную тенденцию).

Таблица 5.1. Итерационный процесс при отсутствии погрешности в $\tilde{T}_{i,k}$

Номер итерации	S	λ_{11}^0	λ_{22}^0	λ_{12}^0	λ_{11}^2	λ_{22}^2	λ_{12}^2	α_n
0	406181	2	2	0	2	2	0	1
1	12342,1	2,84631	1,54525	0,718053	2,98039	2,41681	0,565249	1,2
2	203,876	2,18072	1,55032	0,824741	3,68822	2,44946	0,939521	1,44
3	7,1019	2,42013	1,55114	0,798976	3,44452	2,45603	0,840014	1,728
4	5,96245	2,44688	1,55192	0,802904	3,44453	2,45661	0,850996	2,073
5	5,96186	2,4473	1,55199	0,802965	3,44458	2,45666	0,851008	2,488
6	5,96186	2,4473	1,55199	0,802966	3,44458	2,45666	0,851009	2,985

Таблица 5.2. Итерационный процесс с добавлением погрешности в $\tilde{T}_{i,k}$.

Номер итерации	S	λ_{11}^0	λ_{22}^0	λ_{12}^0	λ_{11}^2	λ_{22}^2	λ_{12}^2	α_n
0	412407	2	2	0	2	2	0	1
1	13107	2,82382	1,38153	0,720785	2,85262	2,38604	0,444623	1,2
2	1144,68	1,98963	1,3996	0,820823	3,70417	2,41087	0,944771	1,44
3	595,848	2,28734	1,39834	0,755414	3,40942	2,41461	0,738225	1,728
4	569,87	2,37226	1,39837	0,781108	3,3967	2,40425	0,816026	2,073
5	569,418	2,36953	1,39864	0,779428	3,38991	2,40567	0,809205	2,488
6	569,489	2,37102	1,39862	0,779979	3,39048	2,40538	0,810346	2,985
7	569,489	2,37066	1,39861	0,779769	3,39037	2,40542	0,810189	3,583

Анализ таблиц 5.1, 5.2 показывает, что функционал стремится в обоих случаях к стационарному значению. Начальные значения искомых параметров значительно (в 2–3 раза) отличаются от искомых, и тем не менее итерационный процесс сходится с приемлемой скоростью (за 6–7 итераций). Причем параметры на нулевой итерации выбраны из предположения, что материал исследуемой пластины является изотропным с теплопроводностью $\lambda = 2 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$.

На рисунках 5.2–5.4 приведены результаты расчетов по восстановлению нелинейных коэффициентов тензора теплопроводности, восстановленные по экспериментальным значениям без погрешности (кривые 2), с добавлением погрешности в экспериментальные значения температур $\tilde{T}_{i,k}$ (кривые 3 - $\Delta\tilde{T}_{i,k} \in [-5 \text{ К}; 5 \text{ К}]$, кривые 4 - $\Delta\tilde{T}_{i,k} \in [-10 \text{ К}; 10 \text{ К}]$), а также коэффициенты, зависящие от температуры, и объективно присутствующие в экспериментальных данных $\tilde{T}_{i,k}$ (кривые 1).

Рисунки 5.2–5.4 показывают хорошее стремление восстанавливаемых нелинейных компонентов тензора теплопроводности к искомым. Однако это, по-видимому, является следствием незначительной величины относительной погрешности экспериментальных значений температур \tilde{T} (~ 2%). При увеличении абсолютной погрешности в два раза (кривая 4 по сравнению с кривой 3) погрешности в определении компонентов тензора теплопроводности стремительно возрастают, что указывает на некорректность (в данном случае на неустойчивость) обратных нелинейных коэффициентных задач анизотропной теплопроводности.

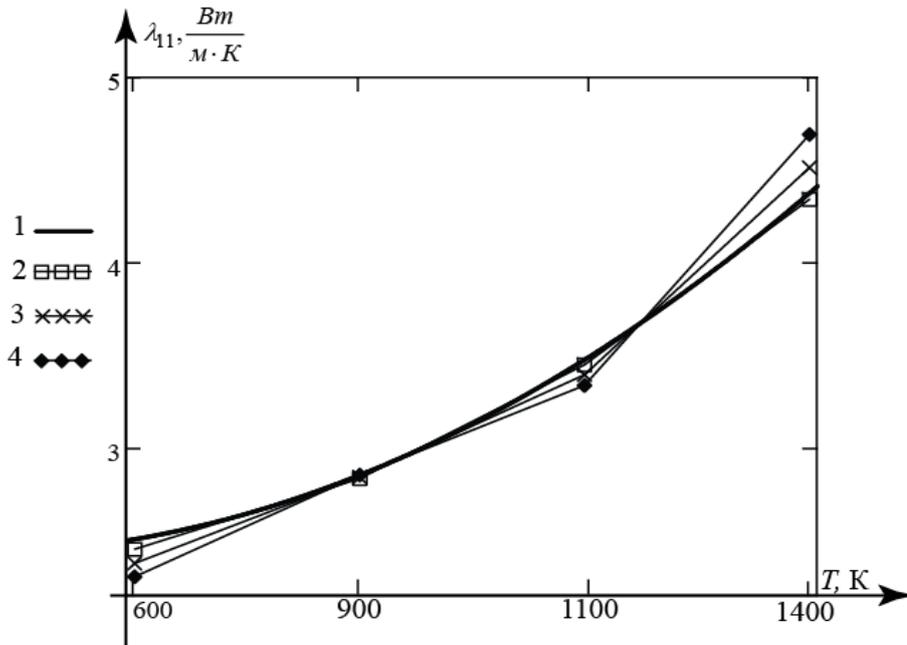


Рис. 5.2. Восстановленный компонент $\lambda_{11}(T)$ при наличии погрешности в экспериментальных значениях $\tilde{T}_{i,k}$.

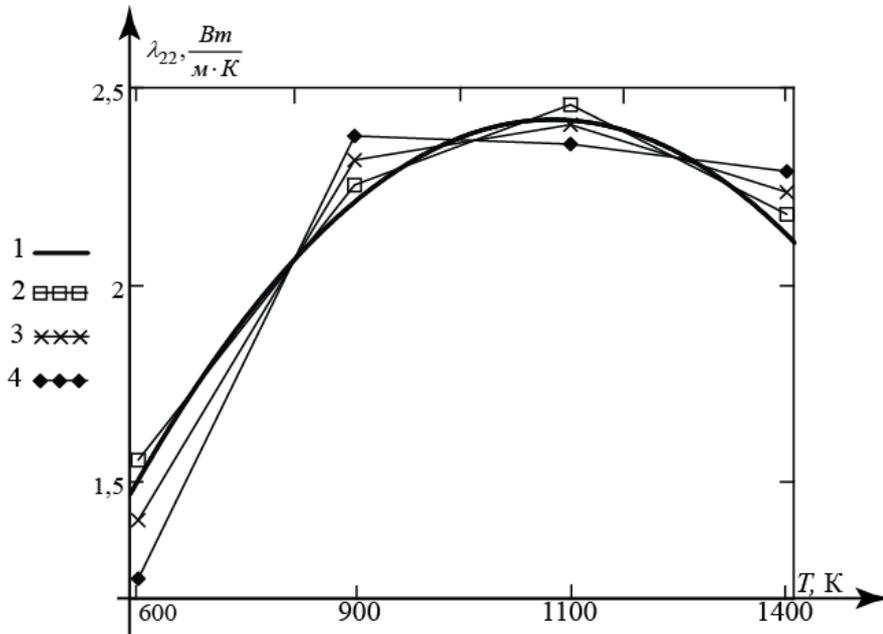


Рис. 5.3. Восстановленный компонент $\lambda_{22}(T)$ при наличии погрешности в экспериментальных значениях $\tilde{T}_{i,k}$.

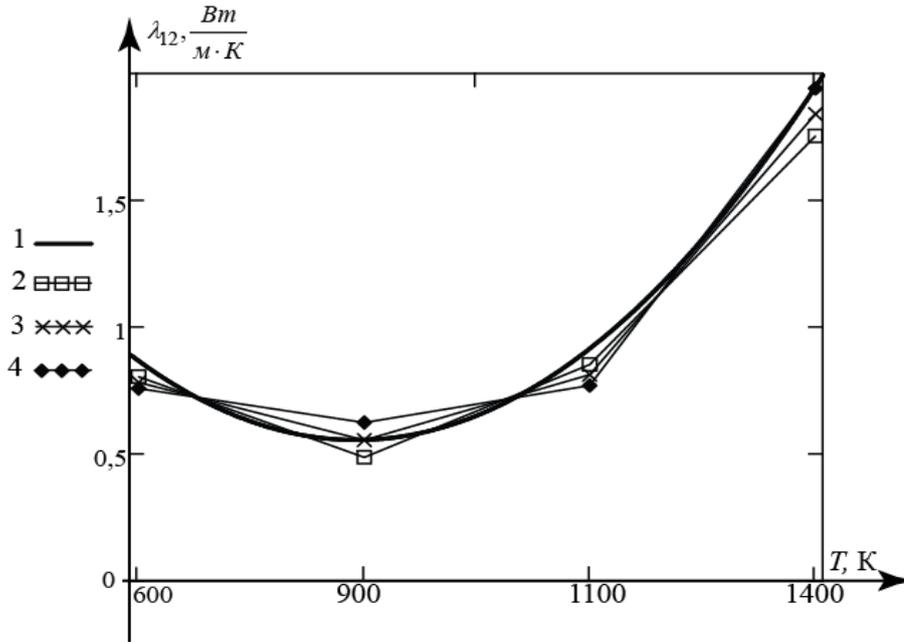


Рис. 5.4. Восстановленный компонент $\lambda_{12}(T)$ при наличии погрешностей в о экспериментальных значениях $\tilde{T}_{i,k}$.

В следующем варианте главные компоненты тензора теплопроводности $\lambda_{\xi}(T)$, $\lambda_{\eta}(T)$ определялись по следующим зависимостям:

$$\begin{aligned} \lambda_{\xi}(T) &= 5 - 3 \cos \left[0.3(T - 450)^{1/2} \right]; \\ \lambda_{\eta}(T) &= 0.005T, \\ \varphi &= \pi / 6. \end{aligned} \tag{5.1.41}$$

Экспериментальные значения температур определялись путем решения прямой задачи (5.1.1)–(5.1.3) по этим входным данным в девяти точках с координатами $x_i = \{0.01, 0.05, 0.09\}$, $y_i = \{0.004, 0.012, 0.02\}$ в моменты времени $t^k = 12.5, 25, 37.5, 50$ с, сведены в табл. 5.3 без учета погрешности и в табл. 5.4 при учете абсолютной погрешности $|\Delta \tilde{T}_i^k| \leq 5$ К с равномерным распределением.

Теоретические значения температур $T_{i,k}(\lambda)$ в тех же пространственно-временных точках, с теми же геометрическими характеристиками, но с совершенно иными компонентами тензора теплопроводности,

принимаемыми на нулевой итерации, определялись из решения той же прямой задачи теплопроводности (5.1.1)–(5.1.3).

Таблица 5.3. Экспериментальные значения температур \tilde{T} при отсутствии погрешности

$(x, y), \text{м}$ $t, \text{с}$	(0.01, 0.004)	(0.01, 0.012)	(0.01, 0.02)	(0.05, 0.004)	(0.05, 0.012)	(0.05, 0.02)	(0.09, 0.004)	(0.09, 0.012)	(0.09, 0.02)
12.5	1195.8	759.81	708.9	1136	675.7	604.25	1175.9	797.04	714.44
25	1290.9	1080.7	903.53	1216.6	811.32	635.49	1278.1	1037.2	912.93
37.5	1325	1187.8	1077.3	1251.6	915.1	684.16	1317.6	1152.8	1053.2
50	1342.7	1238.6	1156.3	1272.2	985	738.66	1338.1	1213.5	1129.35

Расчеты проводились для различных значений $M = 2, 4, 6$ количества конечных элементов по температуре (при этом количество узлов было на единицу больше).

В таблицах 5.5, 5.6 приведены результаты итерационных процессов по расчету восстанавливаемых узловых значений искомых параметров для случая $M = 2 (M + 1 = 3)$, а именно $\lambda_{11}^1, \lambda_{22}^1, \lambda_{12}^1$ в первом узле; $\lambda_{11}^2, \lambda_{22}^2, \lambda_{12}^2$ во втором узле без погрешностей в экспериментальных значениях температур (табл. 5.3) и $\lambda_1^{11}, \lambda_1^{22}, \lambda_1^{12}; \lambda_2^{11}, \lambda_2^{22}, \lambda_2^{22}$ с погрешностью в экспериментальных температурах (табл. 5.4).

Таблица 5.4. Экспериментальные значения температур \tilde{T} с погрешностью

$(x, y), \text{м}$ $t, \text{с}$	(0.01, 0.004)	(0.01, 0.012)	(0.01, 0.02)	(0.05, 0.004)	(0.05, 0.012)	(0.05, 0.02)	(0.09, 0.004)	(0.09, 0.012)	(0.09, 0.02)
12.5	1195.05	764.14	706.92	1140.9	670.74	609.24	1178.1	793.32	710.9
25	1288.3	1077.6	905.2	1212.6	810.2	634.46	1277	1035.6	917.29
37.5	1325.4	1185.9	1074.4	1255	916.95	683.6	1316.8	1153.1	1057
50	1340	1240.3	1155.9	1267.5	989.13	739.24	1338.4	1212.7	1128.6

Таблица 5.5. Итерационный процесс при отсутствии погрешности в $\tilde{T}_{i,k}$

Номер итерации	S	λ_{11}^1	λ_{22}^1	λ_{12}^1	λ_{11}^2	λ_{22}^2	λ_{12}^2	α_n
0	21494.05	2	2	0	2	2	0	0.1
1	10747	3.35744	4.45248	-0.94833	7.71439	7.23813	0.412452	0.11
2	1875.83	3.03025	4.36048	-1.19653	8.36941	7.50938	1.44877	0.121
3	281.653	2.99031	4.3048	-1.31265	8.45684	7.49301	1.64914	0.1331
4	188.989	2.99985	4.3124	-1.32806	8.50498	7.48289	1.69654	0.146
5	188.276	3.00061	4.31284	-1.32934	8.51	7.48382	1.70139	0.161
6	188.276	3.00062	4.31287	-1.32941	8.51	7.48402	1.70183	0.177

Из таблиц видна быстрая сходимость итерационного процесса (не более семи итераций), несмотря на то, что первоначальные значения параметров в несколько раз отличаются от истинных, достигаемых на последней итерации. При этом стационарное значение функционала S с учетом погрешности значительно превышает стационарное значение без погрешности, что указывает на сильную зависимость решения обратных задач от погрешности в экспериментальных значениях температур. Начальные значения принимались для изотропного материала.

Таблица 5.6. Итерационный процесс с добавленной погрешностью в $\tilde{T}_{i,k}$

Номер итерации	S	λ_{11}^0	λ_{22}^0	λ_{12}^0	λ_{11}^1	λ_{22}^1	λ_{12}^1	α_n
0	22151.6	2	2	0	2	2	0	0.1
1	11075.8	6.4383	4.1461	1.98511	3.35744	4.45248	0.94833	0.11
2	3028.28	0.864674	3.00476	0.733759	3.09708	4.39661	-1.09599	0.121
3	555.682	1.97972	3.06227	0.94156	3.06123	4.33605	-1.17551	0.1331
4	359.59	2.42609	3.04104	0.99252	3.07768	4.3451	-1.19718	0.146
5	357.316	2.47769	3.04198	0.99923	3.08039	4.34661	-1.20038	0.161
6	357.311	2.47959	3.04244	0.999851	3.0805	4.34669	-1.20069	0.177
7	357.311	2.47964	3.04248	0.999893	3.0805	4.34669	-1.20071	0.194

На рисунках 5.5–5.10 приведены результаты восстановления компонентов $\lambda_{11}(T)$, $\lambda_{22}(T)$, $\lambda_{12}(T)$ тензора теплопроводности выбранного материала при различных значениях $M = 2, 4, 6$ в виде кусочно-линейных функций на каждом конечном элементе без погрешностей (рис. 5.5–5.7) и с погрешностями (рис. 5.8–5.10). Там же жирными линиями нанесены графики искомым функций.

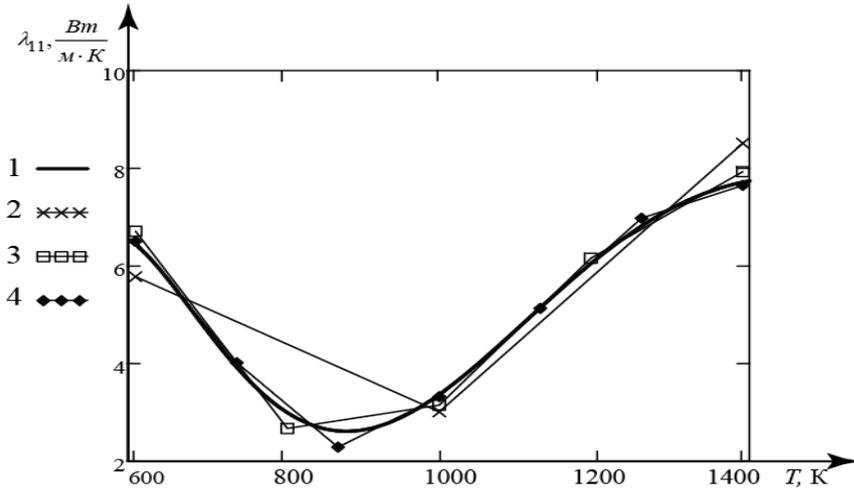


Рис. 5.5. Восстановленный компонент $\lambda_{11}(T)$ тензора теплопроводности без погрешностей в экспериментальных значениях температур $\tilde{T}_{i,k}$ в зависимости от количества конечных элементов: 1 – искомая кривая; 2 – $M=2$; 3 – $M=4$; 4 – $M=6$.

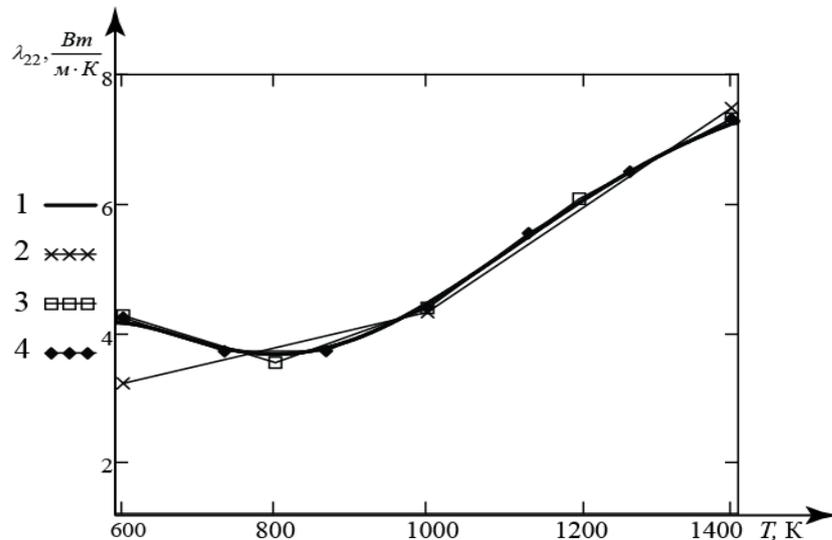


Рис. 5.6. Восстановленный компонент $\lambda_{22}(T)$ тензора теплопроводности без погрешностей в экспериментальных значениях температур $\tilde{T}_{i,k}$ в зависимости от количества конечных элементов: 1 – искомая кривая; 2 – $M=2$; 3 – $M=4$; 4 – $M=6$.

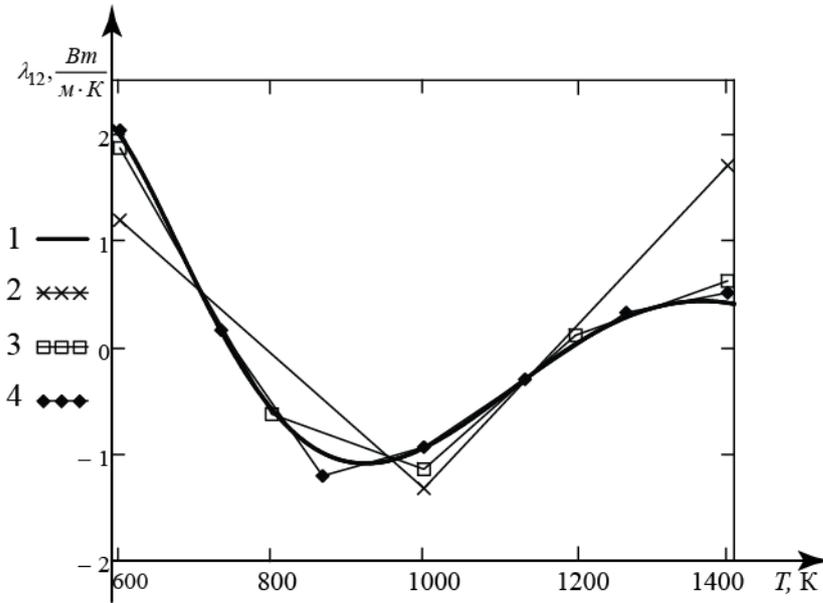


Рис. 5.7. Восстановленные компонент $\lambda_{12}(T)$ тензора теплопроводности без погрешностей в экспериментальных значениях температур $\tilde{T}_{i,k}$ в зависимости от количества конечных элементов: 1 – искомая кривая; 2 – $M=2$; 3 – $M=4$; 4 – $M=6$.

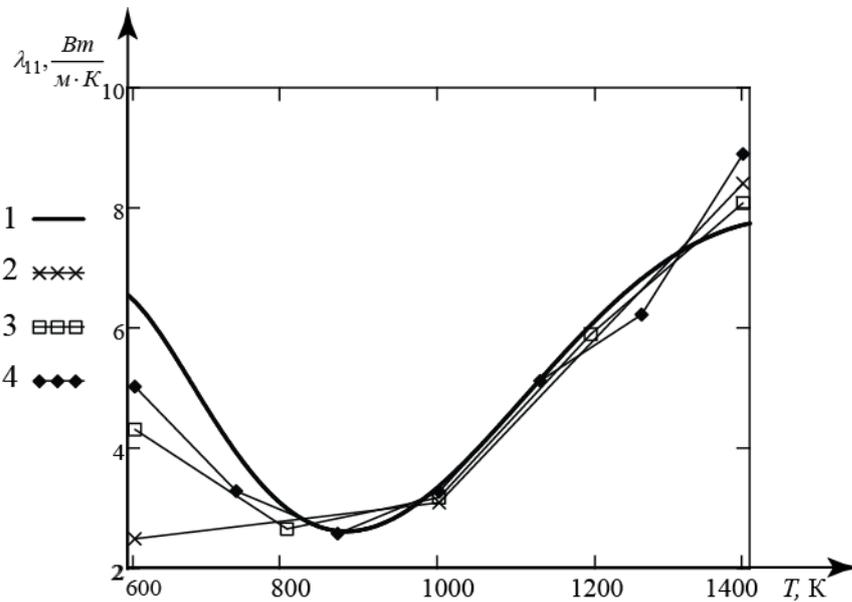


Рис. 5.8. Восстановленный компонент $\lambda_{11}(T)$ тензора теплопроводности при наличии погрешности в экспериментальных значениях температур $\tilde{T}_{i,k}$: 1 – искомая кривая; 2 – $M=2$; 3 – $M=4$; 4 – $M=6$.

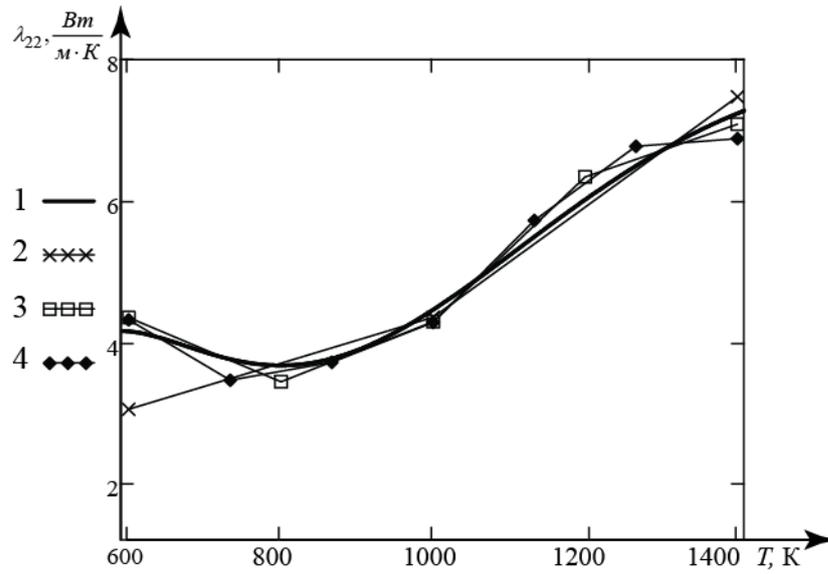


Рис. 5.9. Восстановленный компонент $\lambda_{22}(T)$ тензора теплопроводности при наличии погрешности в экспериментальных значениях температур $\tilde{T}_{i,k}$: 1 – искомая кривая; 2 – $M=2$; 3 – $M=4$; 4 – $M=6$.

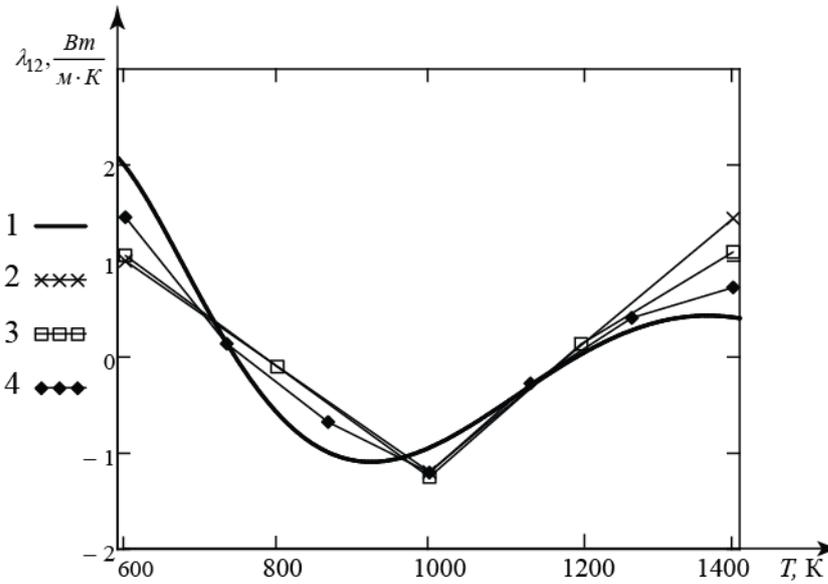


Рис. 5.10. Восстановленный компонент $\lambda_{12}(T)$ тензора теплопроводности при наличии погрешности в экспериментальных значениях температур $\tilde{T}_{i,k}$: 1 – искомая кривая; 2 – $M=2$; 3 – $M=4$; 4 – $M=6$.

5.1.5. Результаты численных экспериментов по восстановлению нелинейных компонентов тензора теплопроводности с использованием регуляризирующего функционала

При увеличении погрешностей в экспериментальных данных и увеличении количества конечных элементов существенно возрастает неконтролируемая погрешность в определении результирующих функций без применения регуляризирующего функционала. На рисунках 5.11–5.13 представлены результаты восстановления компонентов тензора теплопроводности для различных параметров регуляризации.

Для формирования экспериментальных значений температур $\tilde{T}_{i,k}$ в пространственно-временных узлах используется математическая модель (5.1.1)–(5.1.3) прямой задачи с использованием зависимостей (5.1.40) для главных компонентов $\lambda_{\xi}(T)$, $\lambda_{\eta}(T)$ тензора теплопроводности, по которым с помощью (1.4.31) определяются нелинейные компоненты тензора теплопроводности $\lambda_{11}(T)$, $\lambda_{22}(T)$, $\lambda_{12}(T)$ в декартовой системе координат. Таким образом, эти компоненты являются искомыми. Для определения теоретических значений температур по той же математической модели (5.1.1)–(5.1.3) используются совершенно другие компоненты тензора теплопроводности.

Для численных экспериментов с учетом регуляризирующего функционала используется количество узлов M , равное восьми. Абсолютная погрешность экспериментальных значений температур принималась в промежутке $|\tilde{T}_{i,k}| \leq 15K$ с равномерным распределением. На рисунках 5.11–5.13 кривая 1 соответствует искомому компоненту тензора теплопроводности, 3– восстановленный компонент без регуляризации ($a = 0$), 2– восстановленный компонент с регуляризацией ($a = 10^5$), 4– восстановленный компонент с регуляризацией ($a = 10^7$). Матрица регуляризирующего оператора B выбрана

из условия непрерывности первых производных искомым функций в соответствии с выражениями (5.1.36),(5.1.37).

Из рисунков видно, что кривая 3 (без регуляризации)– сильно отличается от исходной, при этом погрешность достигает 200-300% , при слишком большом коэффициенте регуляризации (кривая 4) – кривые наоборот стремятся к прямым, как к кривым с наименьшей энергией колебательного процесса. Поэтому возникает проблема подбора коэффициента регуляризации. В данном варианте при $a = 10^5$ (кривая 2) зависимости восстановленных коэффициентов наиболее близко подходят к исходным, при этом погрешность не превышает 8%. Таким образом, увеличение параметра регуляризации a уменьшает колебательный процесс в результирующей зависимости.

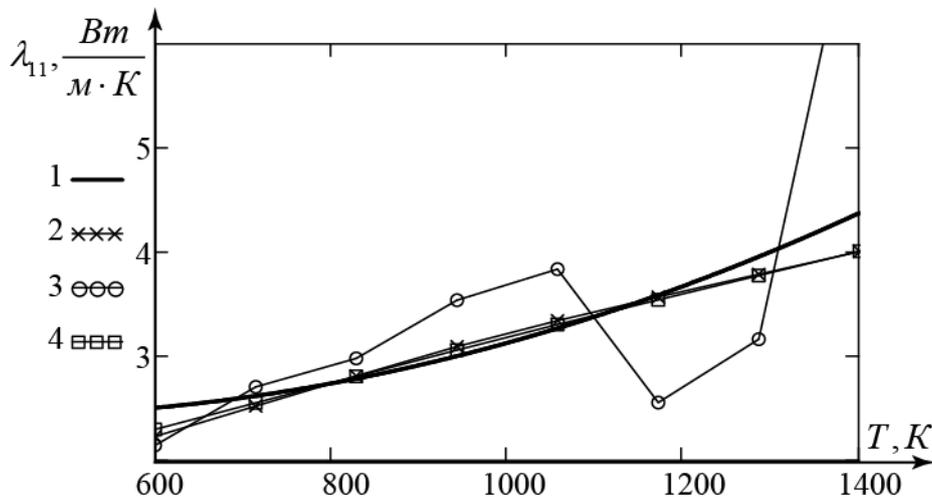


Рис. 5.11. Восстановленный компонент $\lambda_{11}(T)$ тензора теплопроводности при наличии погрешности в экспериментальных значениях температур $\tilde{T}_{i,k}$: 1 – искомая кривая; 2 –

$$a = 10^5; 3 - a = 0; 4 - a = 10^7.$$

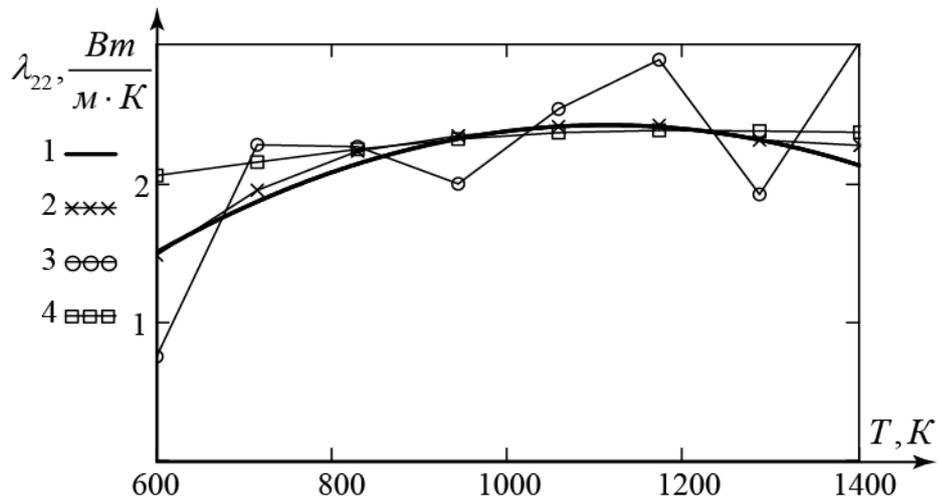


Рис. 5.12. Восстановленный компонент $\lambda_{22}(T)$ тензора теплопроводности при наличии погрешности в экспериментальных значениях температур $\tilde{T}_{i,k}$: 1 – искомая кривая; 2 – $a = 10^5$; 3 – $a = 0$; 4 – $a = 10^7$.

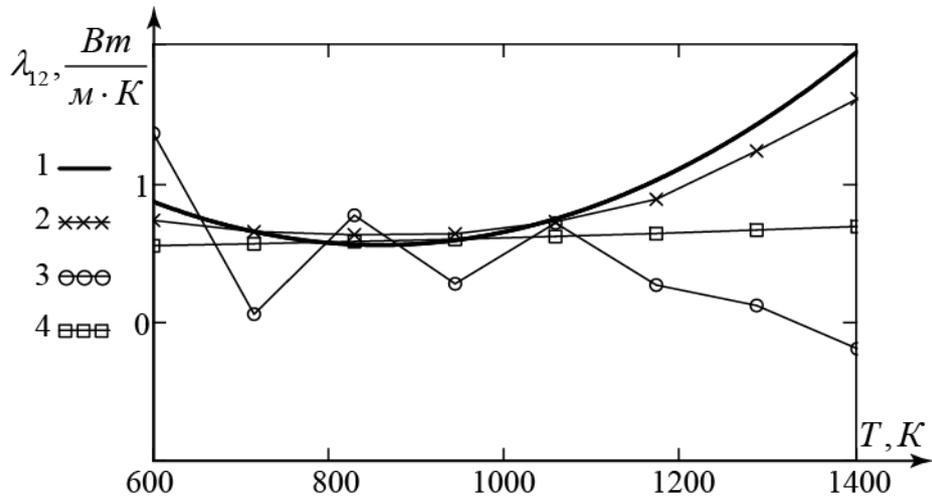


Рис. 5.13. Восстановленный компонент $\lambda_{12}(T)$ тензора теплопроводности при наличии погрешности в экспериментальных значениях температур $\tilde{T}_{i,k}$: 1 – искомая кривая; 2 – $a = 10^5$; 3 – $a = 0$; 4 – $a = 10^7$.

Для подтверждения методологии численные решения обратных задач восстановления нелинейных компонентов тензора теплопроводности $\lambda_{11}(T)$,

$\lambda_{22}(T)$, $\lambda_{12}(T)$ с использованием регуляризирующего функционала, рассмотрим другой вариант со следующими входными данными:

$$\lambda_{\xi}(T) = 10 - 4 \cos \left[0.3(T - 450)^{1/2} \right]; \quad (5.1.42)$$

$$\lambda_{\eta}(T) = 0.0005T,$$

$$\varphi = \pi / 6.$$

Экспериментальное поле температур в пластине с расположением термодатчиков в момент времени $t = 50$ с, определялось по математической модели (5.1.1)–(5.1.3) с использованием главных коэффициентов теплопроводности в виде функций (5.1.42) представлено на рисунке 14.

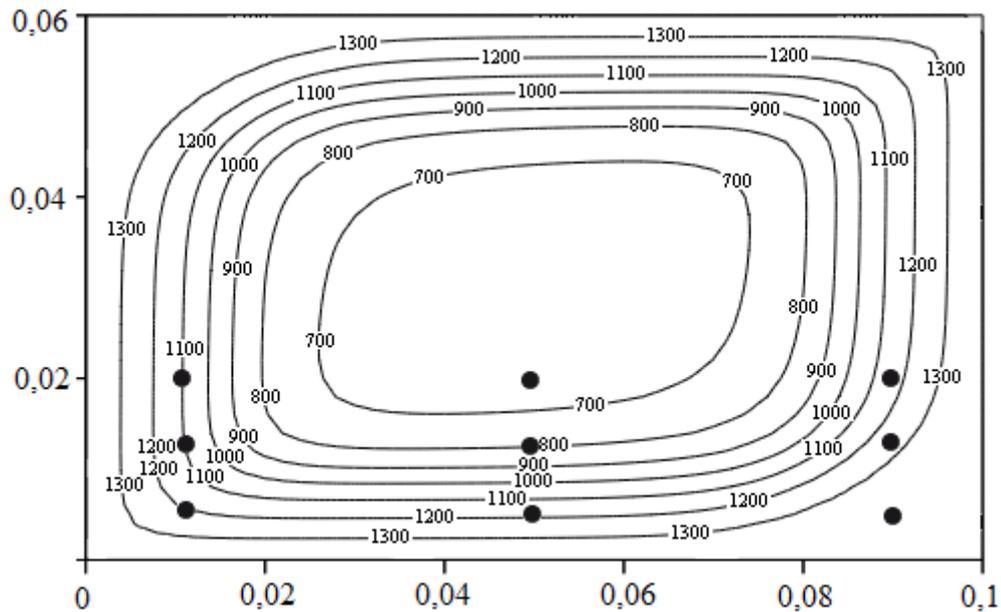


Рис. 5.14. Экспериментальное поле температур при $t = 50$ с (точками отмечены термодатчики).

Количество узлов M принималось равным десяти. В экспериментальные данные добавлена относительная погрешность

$|\delta \tilde{T}_{i,k}| = \frac{\tilde{T}_{i,k} - T_{i,k}}{T_{i,k}}$, распределенная случайным образом по нормальному закону

со средним квадратическим отклонением $\sigma = 0.03$, при этом предельная относительная погрешность составила $3\sigma = 0,09$ (9%).

На рисунках 5.15–5.17 показаны восстановленные нелинейные коэффициенты тензора теплопроводности для разных параметров регуляризации a . Кривая 1 – искомая зависимость, 2 – восстановленный компонент с параметром регуляризации $a = 10^5$, 3 – восстановленный компонент с параметром регуляризации ($a = 10^7$), 4 – восстановленный компонент с параметром регуляризации $a = 10^3$. Матрица регуляризирующего оператора B получена из условия непрерывности первых производных искомых функций в соответствии с (5.1.36), (5.1.37).

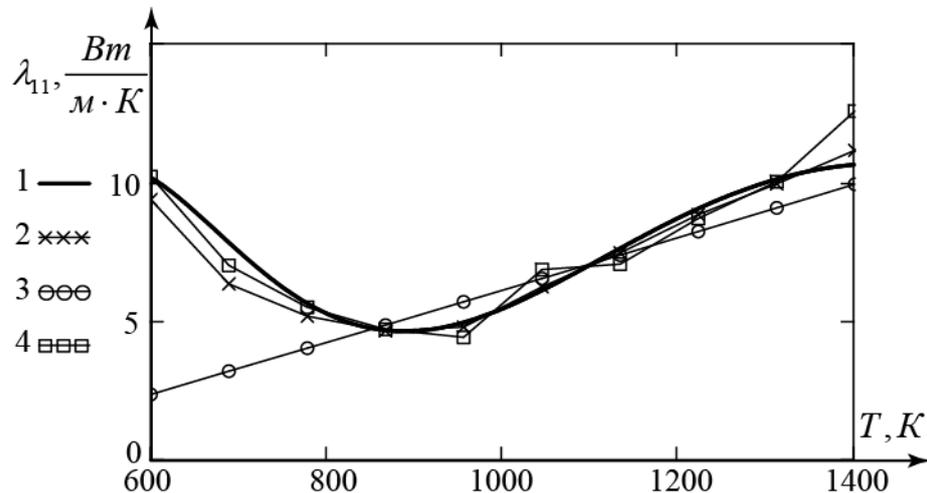


Рис. 5.15. Восстановленный компонент $\lambda_{11}(T)$ тензора теплопроводности при наличии погрешности в экспериментальных значениях температур $\tilde{T}_{i,k}$: 1 – искомая кривая; 2 – $a = 10^5$; 3 – $a = 10^7$; 4 – $a = 10^3$.

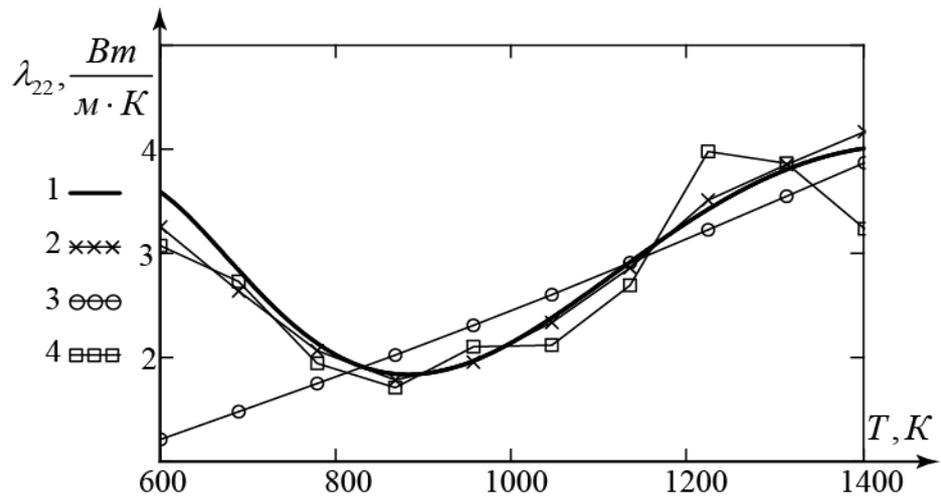


Рис. 5.16. Восстановленный компонент $\lambda_{22}(T)$ тензора теплопроводности при наличии погрешности в экспериментальных значениях температур $\tilde{T}_{i,k}$: 1 – искомая кривая; 2 – $a = 10^5$; 3 – $a = 10^7$; 4 – $a = 10^3$.

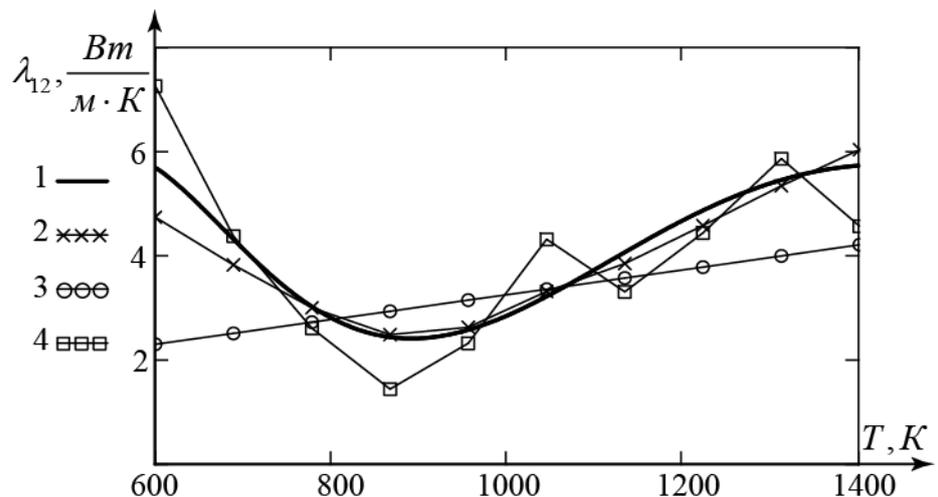


Рис. 5.17. Восстановленный компонент $\lambda_{12}(T)$ тензора теплопроводности при наличии погрешности в экспериментальных значениях температур $\tilde{T}_{i,k}$: 1 – искомая кривая; 2 – $a = 10^5$; 3 – $a = 10^7$; 4 – $a = 10^3$.

Из рисунков видно, что при большом параметре регуляризации восстановленные функции стремятся к прямой, при достаточно малом параметре, наоборот, наблюдается большое отклонение от исходной кривой (до 50-70%). В данном случае оптимальным является параметр $a = 10^5$ при

котором восстановленные коэффициенты достаточно близки к исходным и погрешность не превышает 10%, что согласуется с погрешностью во входных данных.

Матрица регуляризирующего оператора (5.1.36) может быть определена не только из условия непрерывности первой производной, но и, например, из условия непрерывности второй производной восстанавливаемых функций. В этом случае матрицы B_s ($s = 11, 22, 12$) примут вид:

$$B_s = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -3 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -4 & 6 & -3 & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -3 & 2 & \end{pmatrix}, s = \{11, 12, 22\}. \quad (5.1.43)$$

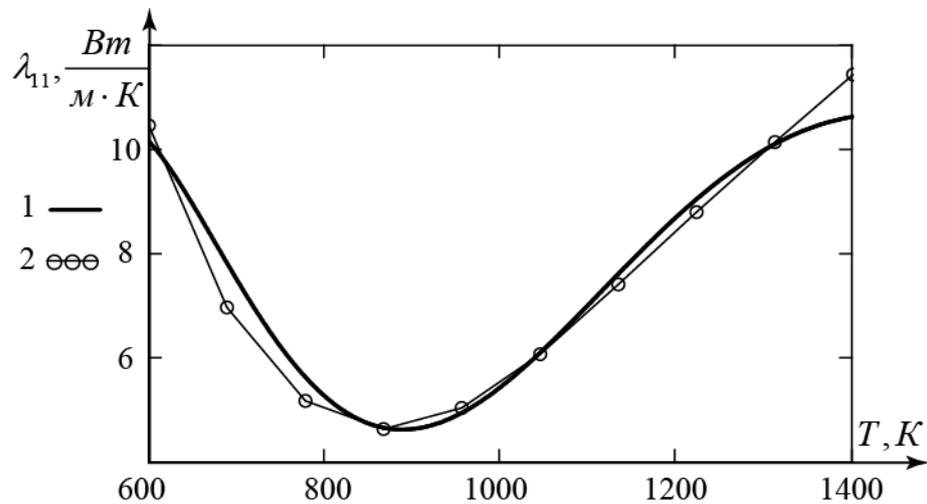


Рис. 5.18. Восстановленный компонент $\lambda_{11}(T)$ тензора теплопроводности при наличии погрешности в экспериментальных значениях температур $\tilde{T}_{i,k}$: 1 – искомая кривая, 2 – восстановленная.

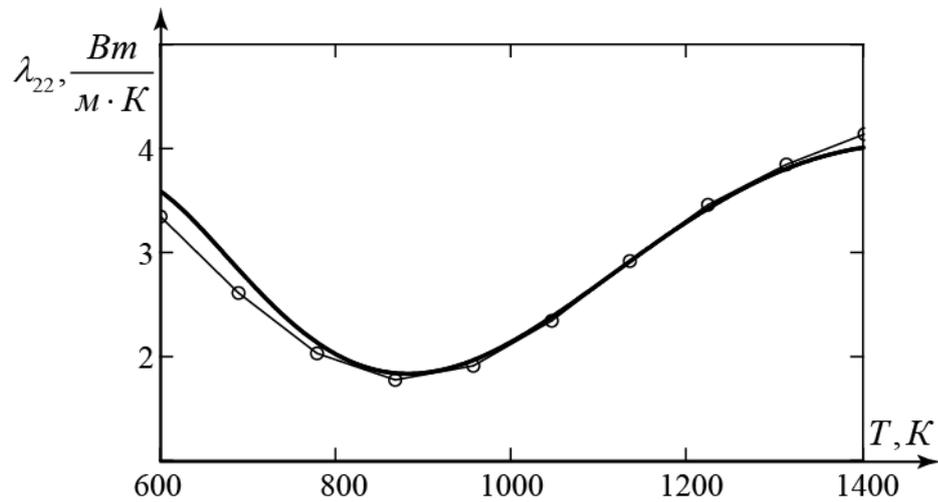


Рис. 5.19. Восстановленный компонент $\lambda_{22}(T)$ тензора теплопроводности при наличии погрешности в экспериментальных значениях температур $\tilde{T}_{i,k}$: 1 – искомая кривая, 2 – восстановленная.

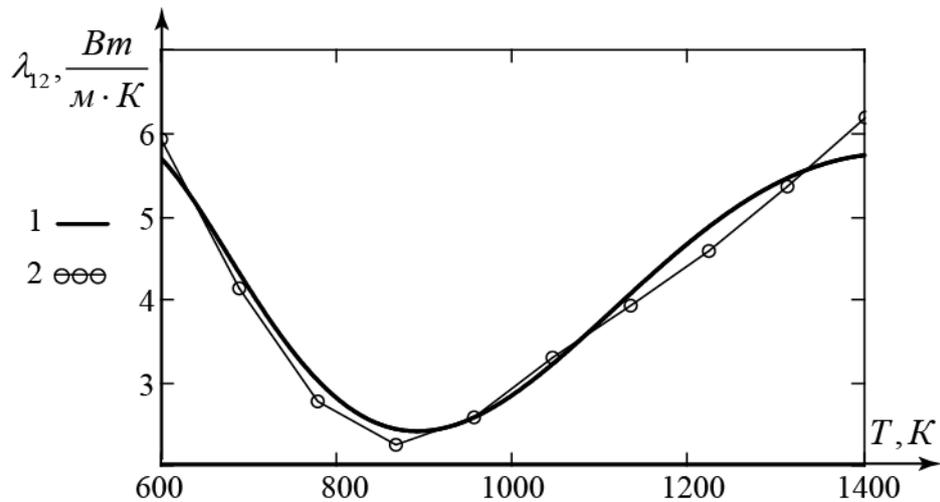


Рис. 5.20. Восстановленный компонент $\lambda_{12}(T)$ тензора теплопроводности при наличии погрешности в экспериментальных значениях температур $\tilde{T}_{i,k}$: 1 – искомая кривая, 2 – восстановленная.

На рис. 5.18–5.20 представлены восстановленные компоненты тензора теплопроводности с использованием регуляризирующего оператора с матрицей вида (5.1.43). Благодаря условию непрерывности второй

производной удалось уменьшить относительные погрешности

$$\delta\lambda_s = \left| \frac{\lambda_s^m - \lambda_s(T_m)}{\lambda_s(T_m)} \right| \cdot 100\%, \quad s = \{11, 22, 12\} \text{ восстановленных функций:}$$

$\delta\lambda_{11} = 10,9\%$, $\delta\lambda_{22} = 7,9\%$, $\delta\lambda_{12} = 8,5\%$, при наличии предельной относительной погрешности во входных данных равной 9%.

Проведенные вычислительные эксперименты по восстановлению нелинейных компонентов тензора теплопроводности показали, во-первых, что погрешности результатов существенно возрастают по сравнению с погрешностями в экспериментальных данных, если не формировать регуляризирующий функционал. Такие погрешности в восстанавливаемых функциях возникают в узлах стыковки конечных элементов вследствие недостаточной априорной информации о восстанавливаемых функциях.

Например, предположение о принадлежности функций классу C_1 и оформление этого предположения в виде регуляризирующего функционала существенно сглаживает восстанавливаемые функции, убирая колебания и существенно увеличивая точность решения нелинейных обратных задач анизотропной теплопроводности.

Эксперименты показали, что при наличии регуляризации минимизируемого функционала погрешности в восстанавливаемых функциях имеют такой же порядок, что погрешности экспериментальных данных. Если регуляризирующий функционал формировать на основе априорного предположения о принадлежности восстанавливаемых функций классу C_2 , то погрешности восстанавливаемых функций становятся меньше погрешностей в экспериментальных данных и возможно восстановление нелинейных компонентов тензора теплопроводности в виде существенно немонотонных функций – при наличии одного или нескольких экстремумов, одной или нескольких точек перегиба и т.п., то есть существенно увеличить априорные предположения о поведении восстанавливаемых функций.

Во-вторых, при формировании регуляризирующего функционала возникает проблема определения параметра регуляризации, от величины которого существенно зависит вид восстанавливаемых функций. Например, при восстановлении нелинейных компонентов тензора теплопроводности анизотропных тел при большом параметре регуляризации восстанавливаемая функция становится линейной, а при малом параметре регуляризации искомая функция приобретает колебательный процесс.

Наиболее распространенным методом определения параметра регуляризации остается метод подбора, когда из множества подобранных в каждом конкретном случае параметров регуляризации выбирается тот, с помощью которого реализуется искомая функция с минимальным отклонением от априорного представления функции, например, априорно известно о наличии минимального или максимального экстремума.

5.2. Математическое моделирование обратных граничных задач сопряженного теплообмена между анизотропными телами и вязкими теплогазодинамическими течениями с учетом регуляризирующего функционала

В данном параграфе, на основе аналитических и численных методов решения сопряженных задач теплообмена и теплопроводности в анизотропных телах, разработана методология численного решения обратных граничных задач по восстановлению тепловых потоков к границам анизотропного тела с использованием экспериментальных замеров температур в пространственно-временных точках внутри тела. Разработан регуляризирующий функционал на основе априорного предположения о принадлежности искомым функций классу C_1 .

5.2.1. Метод решения обратной граничной задачи сопряженного теплопереноса с использованием аналитического решения второй начально-краевой задачи анизотропной теплопроводности

Для анизотропной полосы (рис. 5.21) ставится следующая граничная обратная задача сопряженного теплопереноса: определить функцию теплового потока $q(x)$, действующую на границе $y=0$ анизотропной пластины с теплоизолированными остальными границами, используя экспериментальное распределение температур в выбранных точках пластины

$$T((x, y)_i, t^k) = \tilde{T}_{ik}, \quad i = \overline{1, I}, \quad k = \overline{1, K}, \quad (5.2.1)$$

где I – количество пространственных узлов, в которых расположены термопары, K – количество точек по времени.

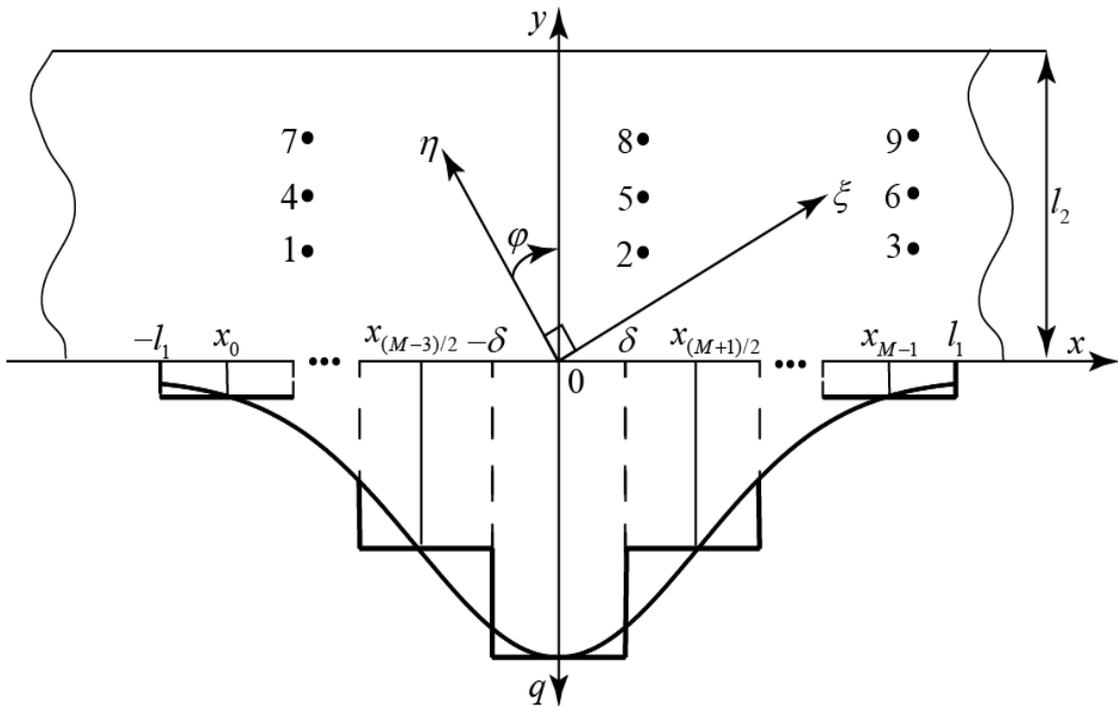


Рис. 5.21. Анизотропная полоса с тепловым потоком на границе $y=0$, симметричным относительно оси Oy .

Ограничениями для решения этой задачи являются следующие:

- 1) функция $q(x) \geq 0$ на промежутке $|x| \leq l_1$ и $q(x) = 0$ на промежутке $|x| > l_1$.

2) вторая начально-краевая задача теплопроводности в анизотропной полосе

$$\lambda_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad y \in (0, l_2), \quad t > 0; \quad (5.2.2)$$

$$-\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \begin{cases} q(x), & |x| < l_1; \\ 0, & |x| > l_1 \end{cases}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad y = 0, \quad t > 0; \quad (5.2.3)$$

$$\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad y = l_2, \quad t > 0; \quad (5.2.4)$$

$$T(\pm\infty, y, t) = 0, \quad \frac{\partial T(\pm\infty, y, t)}{\partial x} = 0, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad y \in [0, l_2], \quad t > 0; \quad (5.2.5)$$

$$T(x, y, 0) = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad y \in [0, l_2], \quad t = 0, \quad (5.2.6)$$

где λ_{ij} , $i, j = 1, 2$ компоненты тензора теплопроводности, определяемые соотношениями [122]:

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= \lambda_\xi \cos^2 \varphi + \lambda_\eta \sin^2 \varphi, \\ \lambda_{22} &= \lambda_\xi \sin^2 \varphi + \lambda_\eta \cos^2 \varphi, \\ \lambda_{12} &= \lambda_{21} = (\lambda_\xi - \lambda_\eta) \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned}$$

3) $q(x)$ определяется в классе непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $x \in [-l_1; l_1]$.

В математической модели (5.2.2)–(5.2.6) $O\xi, O\eta, \lambda_\xi, \lambda_\eta$ – соответственно главные оси и главные компоненты тензора теплопроводности, x, y – декартовы прямоугольные координаты, φ – угол ориентации главных осей относительно декартовой системы координат.

Для решения задачи (5.2.1)–(5.2.6) разобьем отрезок $x \in [-l_1; l_1]$ точками $x_m = -l_1 + \delta(2m+1)$, $\delta = l_1 / M$ на M отрезков длиной 2δ каждый $x \in [x_m - \delta; x_m + \delta]$, $m = \overline{0, M-1}$. Искомая функция $q(x)$ представляется в виде следующей линейной комбинации кусочно-постоянных базисных функций $\eta(\delta - |x - x_m|)$:

$$q(x) \approx \sum_{m=0}^{M-1} q_m \cdot \eta(\delta - |x - x_m|), \quad x_m = -l_1 + \delta(2m+1), \quad m = \overline{0, M-1}, \quad (5.2.7)$$

где

$$\eta(\delta - |x - x_m|) = \begin{cases} 1, & |x - x_m| < \delta, \\ 0, & |x - x_m| > \delta. \end{cases}$$

Количество элементов M выбирается нечетным.

Решением задачи (5.2.2)–(5.2.6) для теплового потока, заданного кусочно-постоянной функцией $q(x) = q_{(M-1)/2} \cdot \eta(\delta - |x|)$ на центральном конечном элементе ($x_m = 0$), будет функция (4.2.24)

$$T(x, y, t) = \frac{q_{(M-1)/2}}{2\lambda_{22}\gamma l_2} \int_0^t F(x, y, \tau) \Theta(y, \tau) d\tau, \quad (5.2.8)$$

где

$$F(x, y, \tau) = \operatorname{erf} \frac{\sqrt{\gamma}(\delta + \alpha y - x)}{2\sqrt{\beta\tau}} + \operatorname{erf} \frac{\sqrt{\gamma}(\delta - \alpha y + x)}{2\sqrt{\beta\tau}},$$

$$\Theta(y, \tau) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{k\pi(l_2 - y)}{l_2} \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\gamma l_2^2} \tau\right),$$

$$\alpha = \lambda_{12} / \lambda_{22}, \quad \beta = \lambda_{\xi} \lambda_{\eta} / \lambda_{22}^2, \quad \gamma = c\rho / \lambda_{22},$$

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\xi^2) d\xi,$$

а для кусочно-постоянной функции теплового потока $q(x) = q_m \eta(\delta - |x - x_m|)$, заданной на произвольном конечном элементе, решение задачи (5.2.2)–(5.2.6) в соответствии с той же формулой (4.2.24) будет иметь вид:

$$T_m(x, y, t) = \frac{q_m}{2\lambda_{22}\gamma l_2} \int_0^t F(x - x_m, y, \tau) \Theta(y, \tau) d\tau = q_m T_m(x, y, t). \quad (5.2.9)$$

Решение (5.2.7) для функции теплового потока $q(x)$, в силу линейности задачи (5.2.2)–(5.2.6) будет суперпозиция решений (5.2.9):

$$T(x, y, t) = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{q_m}{2\lambda_{22}\gamma l_2} \int_0^t F(x - x_m, y, \tau) \Theta(y, \tau) d\tau = \sum_{m=0}^{M-1} q_m T_m(x, y, t). \quad (5.2.10)$$

Таким образом, для идентификации функции $q(x)$ необходимо определить множество параметров $\{q_m\}$.

В случае отсутствия экспериментальных значений $\tilde{T}_{i,k}$ (5.2.1) последние определяются по формуле (5.2.10) в заданных пространственно-временных узлах анизотропного тела по приемлемым тепловым потокам $q(x)$, которые считаются искомыми

$$\tilde{T}_{i,k} = \tilde{T}((x, y)_i, t^k) = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{q_m}{2\lambda_{22}\gamma l_2} \int_0^{t^k} F((x-x_m, y)_i, \tau) \theta(y_i, \tau) d\tau = \sum_{m=0}^{M-1} q_m \cdot T_m((x, y)_i, t^k). \quad (5.2.11)$$

Для заданных пространственно-временных узлов, с помощью выражения (5.2.10), вычисляются теоретические значения температур по каким-либо приемлемым тепловым потокам, которые одновременно можно использовать и для оценки погрешностей экспериментальных значений (5.1.1):

$$T_{i,k} \equiv T((x, y)_i, t^k) = \sum_{m=0}^{M-1} q_m T_m((x, y)_i, t^k), \quad i = \overline{1, I}, \quad k = \overline{1, K}. \quad (5.2.12)$$

Выражение (5.2.12) записывается в виде следующего векторно-матричного соотношения:

$$T = Zq, \quad (5.2.13)$$

где Z – матрица размерностью $(I \cdot K) \times M$.

$$Z = \begin{pmatrix} T_0((x, y)_1, t^1) & T_1((x, y)_1, t^1) & \dots & T_{M-1}((x, y)_1, t^1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_0((x, y)_I, t^1) & T_1((x, y)_I, t^1) & \dots & T_{M-1}((x, y)_I, t^1) \\ T_0((x, y)_1, t^2) & T_1((x, y)_1, t^2) & \dots & T_{M-1}((x, y)_1, t^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_0((x, y)_{I-1}, t^K) & T_1((x, y)_{I-1}, t^K) & \dots & T_{M-1}((x, y)_{I-1}, t^K) \\ T_0((x, y)_I, t^K) & T_1((x, y)_I, t^K) & \dots & T_{M-1}((x, y)_I, t^K) \end{pmatrix}, \quad (5.2.14)$$

q – вектор с M компонентами, T – вектор с $I \cdot K$ компонентами.

Искомый вектор q определяем из условия минимума функционала:

$$S(q) = \frac{1}{2} \|T - \tilde{T}\|^2 = \frac{1}{2} \|Zq - \tilde{T}\|^2. \quad (5.2.15)$$

В соответствии с необходимыми условиями минимума функционала (5.2.15) имеем:

$$\text{grad}(S) = Z^T (Zq - \tilde{T}) = 0. \quad (5.2.16)$$

Выражение (5.2.16) – система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно вектора неизвестных q . Поскольку малым возмущениям экспериментальных значений температур \tilde{T} могут соответствовать значительные возмущения вектора q , то СЛАУ (5.2.16) – некорректна по Адамару.

Для регуляризации СЛАУ (5.2.16) используем условие непрерывной дифференцируемости искомой функции $q(x)$ на интервале $x \in (-l_1; l_1)$, для чего в регуляризирующий функционал необходимо ввести разность первых производных в узлах x_m , которая представляется в конечно-разностном виде выражением:

$$R(q_m) = \frac{q_{m+1} - q_m}{\delta} - \frac{q_m - q_{m-1}}{\delta}. \quad (5.2.17)$$

Представим выражение (5.2.17) в виде регуляризирующего функционала:

$$R(q) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-1} (R(q_m))^2 = \frac{1}{2} \|Bq\|^2. \quad (5.2.18)$$

Функционал (5.2.18) с параметром регуляризации a добавляется к функционалу (5.2.15), в результате получаем:

$$S_a(q) = \frac{1}{2} \|Zq - \tilde{T}\|^2 + \frac{a}{2\delta^2} \|Bq\|^2, \quad (5.2.19)$$

где B – трехдиагональная матрица размерностью $M \times M$ вида

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

a – параметр регуляризации, который подбирается методом невязки [118].

Минимизируя функционал (5.2.19) получаем следующую СЛАУ относительно вектора q :

$$\text{grad } S_a(q) = Z^T (Zq - \tilde{T}) + \frac{a}{\delta^2} B^T (Bq) = 0$$

или

$$\left(Z^T Z + \frac{a}{\delta^2} B^T B \right) q = Z^T \tilde{T} . \quad (5.2.20)$$

По изложенному методу и соответствующему программному комплексу проведены численные эксперименты, результаты которых приведены ниже. Входные данные принимали следующие значения:

$$l_1 = 0,15 \text{ м}; l_2 = 0,05 \text{ м}, c\rho = 10^6 \text{ Дж}/(\text{м}^3\text{К}),$$

$$\lambda_\xi = 20 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К}); \lambda_\eta = 1 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К}); \varphi = \frac{\pi}{6};$$

количество I пространственных узлов принималось равным девяти с координатами $x = \{-0,01; 0,01; 0,03\}$; $y = \{0,01; 0,015; 0,02\}$; моменты времени $t^k = 31,25k + 250$, $k = \overline{1;8}$; экспериментальные значения температур получены с помощью численного решения задачи (5.2.2)–(5.2.6) с перечисленными входными данными и функцией теплового потока в виде $q(x) = 10^4 \exp(-(4,5x/l_1)^2)$ и представлены в таблице 5.7:

Таблица 5.7. Экспериментальные значения температур \tilde{T} .

$(x, y)_i / t^k$	281,25	312,5	343,75	375	406,25	437,5	468,75	500
(-0,01; 0,01)	33,8746	36,3713	38,7933	41,1478	43,4408	45,6769	47,8606	49,9956
(0; 0,01)	43,2743	46,0372	48,6988	51,2707	53,7624	56,1818	58,5354	60,8287
(0,03; 0,01)	39,0147	41,6730	44,2427	46,7338	49,1544	51,5113	53,8099	56,0554
(-0,01; 0,015)	26,3610	28,6868	30,9550	33,1699	35,3350	37,4536	39,5284	41,5623
(0; 0,015)	36,3413	39,0479	41,6592	44,1858	46,6360	49,0169	51,3347	53,5949
(0,03; 0,015)	37,2222	39,9594	42,5995	45,1536	47,6306	50,0379	52,3819	54,6681
(-0,01; 0,02)	20,3824	22,5156	24,6039	26,6552	28,6701	30,6499	32,5961	34,51
(0; 0,02)	29,9048	32,5085	35,0282	37,4720	39,8467	42,1583	44,4119	46,6118
(0,03; 0,02)	34,0248	36,7933	39,4615	42,0406	44,5397	46,9664	49,3274	51,6283

Для сравнения в таблице 5.8 приведены значения температур с помощью аналитического решения (5.2.10) для $M = 25$,

$q_m = 10^4 \exp\left(-\left(4,5x_m / l_1\right)^2\right)$. Эти значения позволяют оценить погрешности численного метода решения задачи (5.2.2)–(5.2.6) и погрешности при аппроксимации теплового потока выражением (5.2.7).

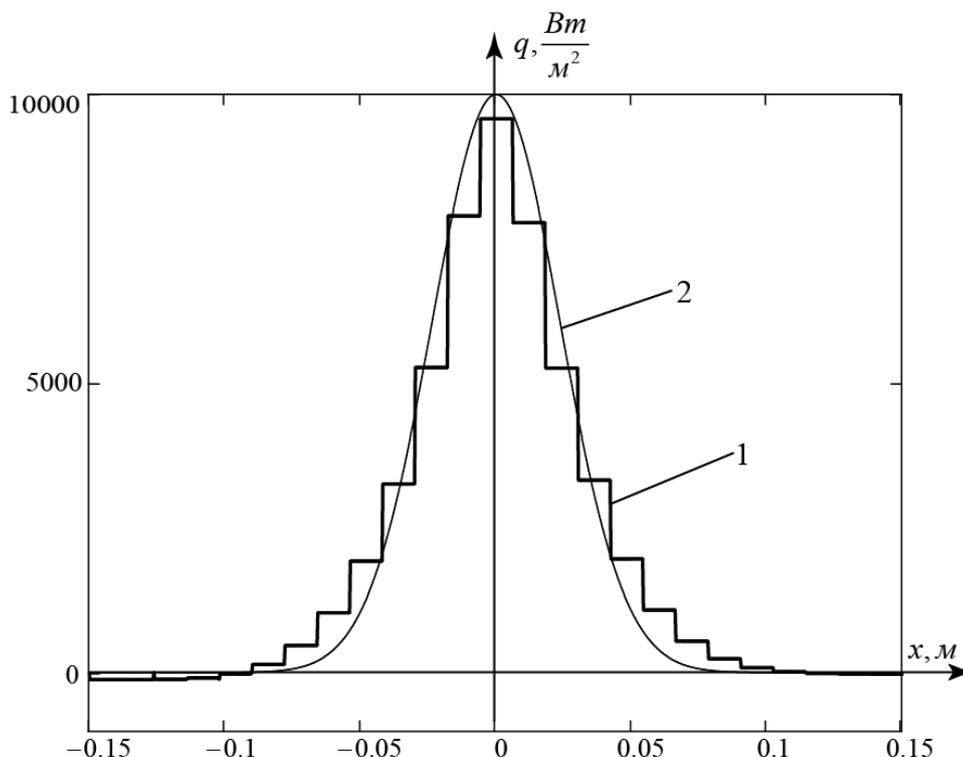


Рис. 5.22. Восстановленный тепловой поток при $M = 25$ с параметром регуляризации $a = 0,5 \cdot 10^{-12}$: 1- восстановленная функция, 2-искомая функция.

Таблица 5.8. Значения температур, полученные с помощью аналитического решения.

$(x, y)_i / t^k$	281,25	312,5	343,75	375	406,25	437,5	468,75	500
(-0,01;0,01)	35,646	38,2176	40,7079	43,1249	45,4748	47,7632	49,9944	52,1726
(0; 0,01)	46,2186	49,0857	51,8398	54,4928	57,0566	59,54	61,9496	64,2921
(0,03; 0,01)	41,6285	44,3741	47,0202	49,5766	52,0531	54,4569	56,7940	59,0697
(-0,01;0,015)	27,1062	29,4899	31,8112	34,0756	36,2868	38,4485	40,5630	42,6336
(0; 0,015)	38,7341	41,5389	44,2377	46,8424	49,3625	51,8060	54,1794	56,4886
(0,03; 0,015)	39,7179	42,5541	45,2807	47,9104	50,4531	52,9091	55,3092	57,6356
(-0,01;0,02)	20,4113	22,5759	24,7009	26,7871	28,8357	30,8478	32,8245	34,7673
(0; 0,02)	31,5973	34,2878	36,8857	39,4001	41,8388	44,2080	46,5141	48,7602
(0,03; 0,02)	36,2760	39,1487	41,9087	44,5685	47,1386	49,6276	52,0427	54,3902

Это сравнение позволяет объективно оценить относительную погрешность экспериментальных значений, которая не превышает 7%.

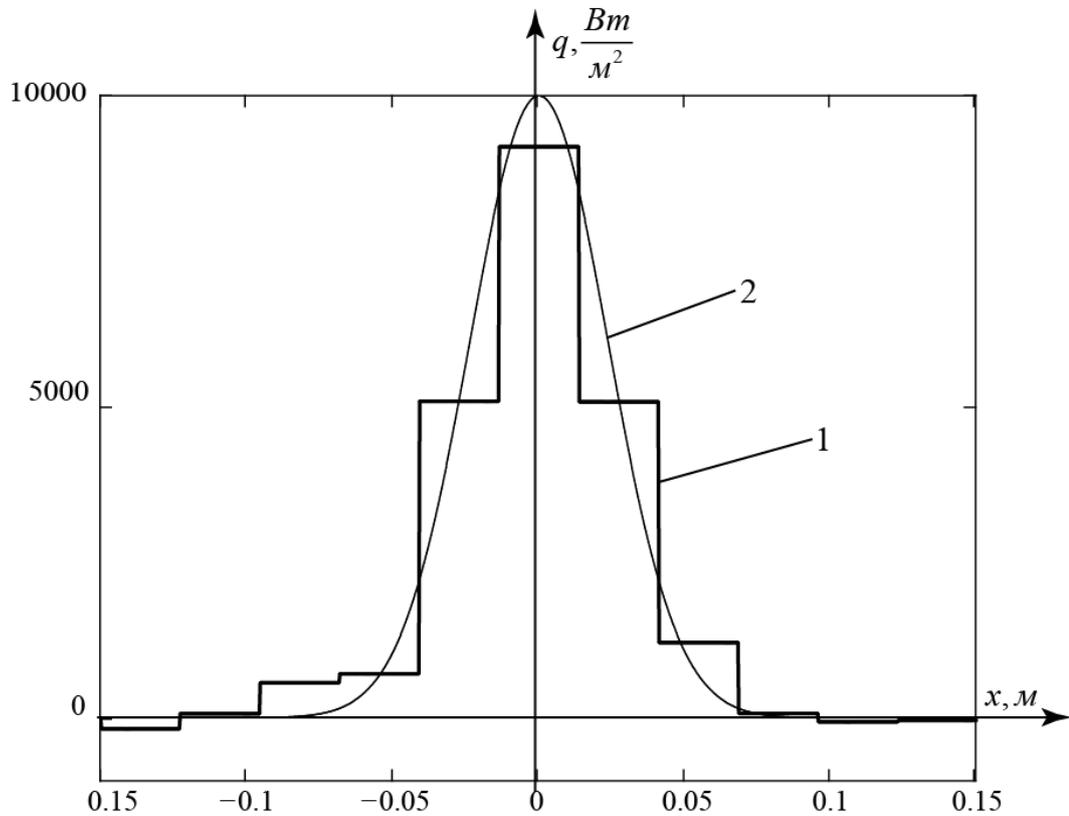


Рис. 5.23. Восстановленный тепловой поток при $M = 11$ с параметром регуляризации $a = 0,26 \cdot 10^{-11}$: 1- восстановленная функция, 2-искомая функция.

На рис. 5.22 представлены результаты расчетов по восстановлению тепловых потоков с подобранным параметром регуляризации $a = 0,5 \cdot 10^{-12}$ и $M = 25$, которые показали, что относительная погрешность по отношению к искомым тепловым потокам составляет 7,1 %, т.е. примерно ту же самую, с которой определены экспериментальные значения температур.

На рисунках 5.23, 5.24 представлены аналогичные расчеты для $M = 11$ и $a = 0,26 \cdot 10^{-11}$ и $M = 51$ с $a = 10^{-13}$ соответственно. В первом случае погрешность составила 5,4%, а во втором – 7,2%, т.е. примерно сохраняется уровень погрешности экспериментальных данных.

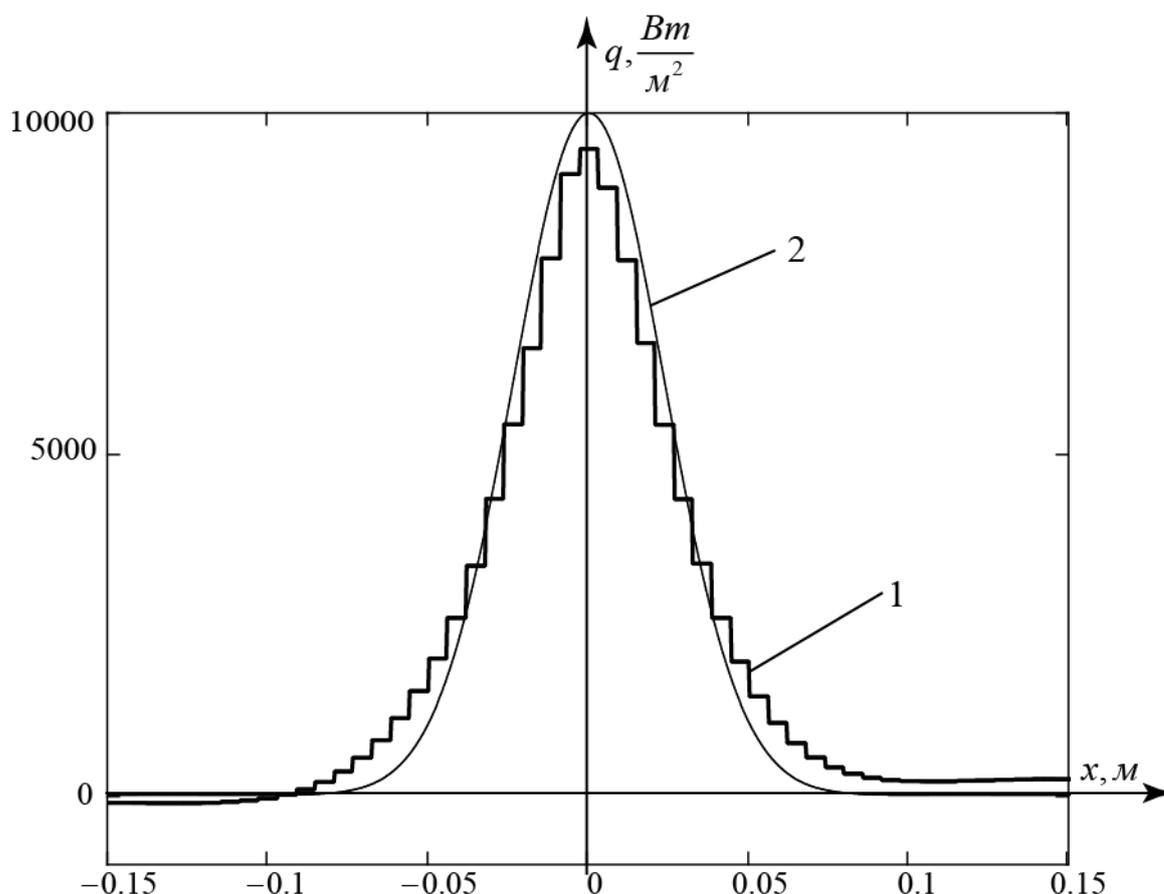


Рис. 5.24. Восстановленный тепловой поток при $M = 51$ с параметром регуляризации $\alpha = 1,0 \cdot 10^{-13}$: 1- восстановленная функция, 2-искомая функция.

5.2.2. Метод решения обратной граничной задачи сопряженного теплопереноса на основе численного решения второй начально-краевой задачи нелинейной теплопроводности в анизотропных телах

В данном разделе, в отличие от раздела 5.2.1, тепловые потоки от газодинамического течения, восстанавливаются на границе анизотропной пластины (рис. 5.21), *теплоперенос в которой описывается нелинейными уравнениями*, для которых аналитические решения отсутствуют и которые решаются численно. Вместе с тем многие пункты метода, излагаемого ниже, повторяют пункты метода численного решения обратных коэффициентных задач нелинейного теплопереноса в анизотропных телах, изложенного в параграфе 5.1, с отличием, что здесь восстанавливаются параметрические

коэффициенты для пространственных функций тепловых потоков, а не параметрические коэффициенты температурных зависимостей компонентов тензора теплопроводности.

Для анизотропной пластины (рис. 5.21) ставится следующая граничная задача сопряженного теплообмена на основе второй начально-краевой задачи теплопроводности: по пространственно – временному распределению температур

$$T((x, y)_i, t^k) = \tilde{T}_{ik}, \quad i = \overline{1, I}, \quad k = \overline{1, K}, \quad (5.2.21)$$

где I – количество пространственных узлов, в которых расположены термопары, K – количество точек по времени, – восстановить функцию теплового потока $q(x)$, действующую на границе $y=0$ пластины с теплоизолированными остальными границами. Теоретическое распределение температур в пластине используется из решения следующей нелинейной задачи анизотропной теплопроводности:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{11}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{12}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{21}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{22}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}, \quad x \in (0, l_1), \quad y \in (0, l_2), \quad t > 0; \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

$$-\left(\lambda_{21}(T) \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) = q(x), \quad x \in (0, l_1), \quad y = 0, \quad t > 0; \quad (5.2.23)$$

$$\left(\lambda_{21}(T) \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0, \quad x \in (0, l_1), \quad y = l_2, \quad t > 0; \quad (5.2.24)$$

$$-\left(\lambda_{11}(T) \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{12}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0, \quad x = 0, \quad y \in (0, l_2), \quad t > 0; \quad (5.2.25)$$

$$\left(\lambda_{11}(T) \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{12}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0, \quad x = l_1, \quad y \in (0, l_2), \quad t > 0; \quad (5.2.26)$$

$$T(x, y, 0) = T_0(x, y), \quad x \in [0, +l_1], \quad y \in [0, +l_2], \quad t = 0. \quad (5.2.27)$$

Функция $q(x)$ определяется в классе функций C_1 на отрезке $x \in [0; l_1]$.

Восстанавливаемая функция $q(x)$ представляется в виде следующей линейной комбинации линейно-непрерывных базисных функций $N_m(x)$ (5.1.5), задаваемых на конечных элементах Δx_m , полученных разбиением отрезка $x \in [-l_1, l_1]$ точками x_m , $m = \overline{0, M}$:

$$q(x) \approx \sum_{m=0}^M q_m N_m(x) \quad . \quad (5.2.28)$$

Решение сводится к поиску вектора $\mathbf{q} = (q_0, \dots, q_m, \dots, q_M)^T \in \mathbb{R}^{M+1}$.

Так как дифференциальный оператор в уравнении (5.2.22) является нелинейным (квазилинейным), то решение задачи (5.2.2)–(5.2.7) уже нельзя свести к решению СЛАУ, необходимо использовать численные методы минимизации функционала:

$$S(\bar{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K [T_{i,k}(\mathbf{q}) - \tilde{T}_{i,k}]^2, \quad (5.2.29)$$

в виде суммы по пространственно-временным переменным квадратов отклонения экспериментальных значений $\tilde{T}_{i,k}$ в точках $((x, y)_i, t^k)$ от расчетных $T_{i,k}(\mathbf{q}) \equiv T_{i,k}((x, y)_i, t^k, \mathbf{q})$, полученных при некотором фиксированном векторе \mathbf{q} .

Для минимизации функционала используется *неявный* метод градиентного спуска

$$\mathbf{q}^{(n+1)} = \mathbf{q}^{(n)} - \alpha_n \text{grad } S(\mathbf{q}^{(n+1)}). \quad (5.2.30)$$

где n – номер предыдущей итерации, α_n – малые параметрические шаги, подчиняющиеся условию ($\alpha_n > 0$)

$$S(\mathbf{q}^{(n+1)}) < S(\mathbf{q}^{(n)}). \quad (5.2.31)$$

Значение α_0 выбирается произвольно. Если условие (5.2.31) не выполнилось на следующей итерации, то α_n необходимо уменьшить, после

чего расчет на этой итерации повторяется, в противном случае α_n можно увеличить для ускорения сходимости итерационного процесса.

Итерационный процесс заканчивается, когда функционал достигает стационарного значения $\text{grad } S(\mathbf{q}^{(n+1)}) = 0$, или

$$|\text{grad } S(\mathbf{q}^{(n+1)})| \leq \varepsilon, \quad (5.2.32)$$

где ε – заданная погрешность.

Для определения градиента функционала в выражении (5.2.30), функцию $T_{i,k}(\mathbf{q}^{(n+1)})$ в окрестности $\mathbf{q}^{(n)}$ разложим в ряд Тейлора с удержанием линейных относительно $\Delta\mathbf{q}^{(n)}$ членов:

$$S(\mathbf{q}^{(n+1)}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K \left[\left(T_{i,k}(\mathbf{q}^{(n)}) + \sum_{l=0}^M \frac{\partial T_{i,k}(\mathbf{q}^{(n)})}{\partial q_l} \Delta q_l^{(n)} \right) - \tilde{T}_{i,k} \right]^2 + O(\|\Delta\mathbf{q}\|^2). \quad (5.2.33)$$

В этом случае составляющие градиента функционала (5.2.33) будут определяться выражениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\mathbf{q}^{(n+1)})}{\partial q_l} &= \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K \left[\left(T_{i,k}(\mathbf{q}^{(n)}) - \tilde{T}_{i,k} \right) + \sum_{l=0}^M \frac{\partial T_{i,k}(\mathbf{q}^{(n)})}{\partial q_l} \Delta q_l^{(n)} \right] \times \\ &\times \left[\frac{\partial T_{i,k}(\mathbf{q}^{(n)})}{\partial q_l} + \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\sum_{l=0}^M \frac{\partial T_{i,k}(\mathbf{q}^{(n)})}{\partial q_l} \Delta q_l^{(n)} \right) \right] \approx \\ &\approx \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K \left[\left(T_{i,k}(\mathbf{q}^{(n)}) - \tilde{T}_{i,k} \right) + \sum_{l=0}^M \frac{\partial T_{i,k}(\mathbf{q}^{(n)})}{\partial q_l} \Delta q_l^{(n)} \right] \frac{\partial T_{i,k}(\mathbf{q}^{(n)})}{\partial q_l}, \quad l = \overline{0, M}, \end{aligned} \quad (5.2.34)$$

где $(M+1)$ – число искоемых параметров.

Выражение (5.2.34) представляется в форме:

$$\text{grad } S(\mathbf{q}^{(n+1)}) = Z^T(\mathbf{q}^{(n)}) \left(T(\mathbf{q}^{(n)}) - \tilde{T} \right) + Z^T(\mathbf{q}^{(n)}) Z(\mathbf{q}^{(n)}) \Delta\mathbf{q}^{(n)}, \quad (5.2.35)$$

где

$$Z(\mathbf{q}^{(n)}) = \begin{pmatrix} z^0((x, y)_1, t^1, \mathbf{q}^{(n)}) & \dots & z^m((x, y)_1, t^1, \mathbf{q}^{(n)}) & \dots & z^M((x, y)_1, t^1, \mathbf{q}^{(n)}) \\ z^0((x, y)_2, t^1, \mathbf{q}^{(n)}) & \dots & z^m((x, y)_2, t^1, \mathbf{q}^{(n)}) & \dots & z^M((x, y)_2, t^1, \mathbf{q}^{(n)}) \\ \dots & & \dots & & \dots \\ z^0((x, y)_I, t^K, \mathbf{q}^{(n)}) & \dots & z^m((x, y)_I, t^K, \mathbf{q}^{(n)}) & \dots & z^M((x, y)_I, t^K, \mathbf{q}^{(n)}) \end{pmatrix} \quad (5.2.36)$$

Элементы этой матрицы определяются из решения сопряженных (в математическом смысле) задач относительно производных от прямой задачи (5.2.22)–(5.2.27) по каждому компоненту q_l , $l = \overline{0, M}$.

Подставляя выражение (5.2.35) в (5.2.30), находим

$$\Delta \mathbf{q}^{(n)} = -\alpha_n \left[Z^T(\mathbf{q}^{(n)}) (T(\mathbf{q}^{(n)}) - \tilde{T}) + Z^T(\mathbf{q}^{(n)}) Z(\mathbf{q}^{(n)}) \Delta \mathbf{q}^{(n)} \right],$$

откуда

$$(E + \alpha_n \cdot Z^T(\mathbf{q}^{(n)}) Z(\mathbf{q}^{(n)})) \Delta \mathbf{q}^{(n)} = -\alpha_n Z^T(\mathbf{q}^{(n)}) (T(\mathbf{q}^{(n)}) - \tilde{T})$$

или

$$\Delta \mathbf{q}^{(n)} = -\alpha_n \left(E + \alpha_n Z^T(\mathbf{q}^{(n)}) Z(\mathbf{q}^{(n)}) \right)^{-1} Z^T(\mathbf{q}^{(n)}) (T(\mathbf{q}^{(n)}) - \tilde{T}). \quad (5.2.37)$$

Для определения элементов матрицы коэффициентов чувствительности (5.2.36) необходимо решить $(M+1)$ независимые начально-краевые задачи относительно функций $z^0(x, y, t) = \frac{\partial T}{\partial q_0}, \dots, z^m(x, y, t) = \frac{\partial T}{\partial q_m}, \dots, z^M(x, y, t) = \frac{\partial T}{\partial q_M}$, которые можно получить продифференцировав задачу (5.2.22)–(5.2.27) по соответствующим параметрам q_0, \dots, q_M .

Продифференцируем уравнения задачи (5.2.22)–(5.2.27) по параметру q_m , с учетом выражение (5.2.28), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \lambda_{11}(T)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} z^m + \lambda_{11}(T) \frac{\partial z^m}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \lambda_{12}(T)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial y} z^m + \lambda_{12}(T) \frac{\partial z^m}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \lambda_{21}(T)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} z^m + \lambda_{21}(T) \frac{\partial z^m}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \lambda_{22}(T)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial y} z^m + \lambda_{22}(T) \frac{\partial z^m}{\partial y} \right) = \\ & = c\rho \frac{\partial z^m}{\partial t}, \quad x \in (0, l_1), \quad y \in (0, l_2), \quad t > 0; \end{aligned} \quad (5.2.38)$$

$$-\left(\lambda_{21}(T)\frac{\partial z^m}{\partial x} + \lambda_{22}(T)\frac{\partial z^m}{\partial y}\right) = N_m(x), \quad x \in (0, l_1), \quad y = 0, \quad t > 0; \quad (5.2.39)$$

$$\left(\lambda_{21}(T)\frac{\partial z^m}{\partial x} + \lambda_{22}(T)\frac{\partial z^m}{\partial y}\right) = 0, \quad x \in (0, l_1), \quad y = l_2, \quad t > 0; \quad (5.2.40)$$

$$-\left(\lambda_{11}(T)\frac{\partial z^m}{\partial x} + \lambda_{12}(T)\frac{\partial z^m}{\partial y}\right) = 0, \quad x = 0, \quad y \in (0, l_2), \quad t > 0; \quad (5.2.41)$$

$$\left(\lambda_{11}(T)\frac{\partial z^m}{\partial x} + \lambda_{12}(T)\frac{\partial z^m}{\partial y}\right) = 0, \quad x = l_1, \quad y \in (0, l_2), \quad t > 0; \quad (5.2.42)$$

$$z^m(x, y, 0) = 0, \quad x \in [0, +l_1], \quad y \in [0, +l_2], \quad t = 0. \quad (5.2.43)$$

Задачи (5.2.38)–(5.2.43) для каждой функции $N_m(x)$, $m = \overline{0, M}$ решаются с помощью метода расщепления с экстраполяцией по времени (МРЭВ).

На каждом итерационном шаге задачи (5.2.38)–(5.2.43) могут решаться параллельно с использованием метода решения прямой задачи (5.2.22)–(5.2.27) для текущего вектора $\mathbf{q}^{(n)}$.

Поскольку на функцию теплового потока не накладывается никаких априорных ограничений, то восстанавливаемые тепловые потоки, будучи непрерывными в местах стыковки конечных элементов, получают разрывы первого рода производных в этих узлах, возникают значительные колебания искомых функций, то есть обратная задача становится некорректной. Для увеличения устойчивости необходимо составить регуляризирующий функционал $R(\bar{q})$ [118] и добавить его к функционалу невязки, то есть составить функционал в виде

$$S_a(\mathbf{q}) = S(\mathbf{q}) + R_a(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^K [T_{i,k}(\mathbf{q}) - \tilde{T}_{i,k}]^2 + R_a(\mathbf{q}). \quad (5.2.44)$$

Регуляризирующий функционал $R(\mathbf{q})$, формируется на основе дополнительных априорных условий, накладываемых на восстанавливаемую

функцию $q(x)$, например, гладкость n -го порядка, ограничение сверху или снизу, и др.

Функционал может быть как линейным, так и нелинейным, однако целесообразно использовать линейный функционал, что существенно упрощает алгоритм решения обратной задачи. В линейном случае регуляризирующий функционал может быть записан в векторно-матричном виде:

$$R_a(\mathbf{q}) = \frac{a}{2} \|B\mathbf{q}\|^2, \quad (5.2.45)$$

где a – параметр регуляризации.

Тогда

$$\begin{aligned} \text{grad } S_a(\mathbf{q}^{(n+1)}) &= \text{grad } S(\mathbf{q}^{(n+1)}) + \text{grad } R_a(\mathbf{q}^{(n+1)}) = \\ &= \text{grad } S(\mathbf{q}^{(n+1)}) + aB^T(B\mathbf{q}^{(n+1)}). \end{aligned} \quad (5.2.46)$$

Используя выражение (5.2.35) получим:

$$\begin{aligned} \text{grad } S_a(\mathbf{q}^{(n+1)}) &= Z^T(\mathbf{q}^{(n)}) \left(T(\mathbf{q}^{(n)}) - \tilde{T} \right) + Z^T(\mathbf{q}^{(n)}) Z(\mathbf{q}^{(n)}) \Delta \mathbf{q}^{(n)} + \\ &+ aB^T B(\mathbf{q}^{(n)} + \Delta \mathbf{q}^{(n)}). \end{aligned} \quad (5.2.47)$$

Подставим (5.2.47) в итерационное выражение (5.2.30) метода градиентного спуска, находим

$$\Delta \mathbf{q}^{(n)} = -\alpha_n \left[Z^T(\mathbf{q}^{(n)}) \left(T(\mathbf{q}^{(n)}) - \tilde{T} \right) + Z^T(\mathbf{q}^{(n)}) Z(\mathbf{q}^{(n)}) \Delta \mathbf{q}^{(n)} + aB^T B(\mathbf{q}^{(n)} + \Delta \mathbf{q}^{(n)}) \right],$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \left(E + \alpha_n \cdot Z^T(\mathbf{q}^{(n)}) Z(\mathbf{q}^{(n)}) + \alpha_n \cdot a \cdot B^T B \right) \Delta \mathbf{q}^{(n)} = \\ = -\alpha_n Z^T(\mathbf{q}^{(n)}) \left(T(\mathbf{q}^{(n)}) - \tilde{T} \right) - \alpha_n a \cdot B^T B \cdot \mathbf{q}^{(n)} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{q}^{(n)} &= -\alpha_n \left(E + \alpha_n \left\{ Z^T(\mathbf{q}^{(n)}) Z(\mathbf{q}^{(n)}) + a \cdot B^T B \right\} \right)^{-1} \times \\ &\times \left\{ Z^T(\mathbf{q}^{(n)}) \left(T(\mathbf{q}^{(n)}) - \tilde{T} \right) + a \cdot B^T B \cdot \mathbf{q}^{(n)} \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.48)$$

Итерационный процесс построен теперь для вектора \mathbf{q} узловых значений коэффициентов линейных комбинаций (5.2.28).

Общий алгоритм решения обратной граничной задачи теплопереноса с использованием нелинейной второй начально-краевой задачи теплопроводности в анизотропных телах включает в себя следующие пункты:

1. Задаются входные параметры:

1.1. Размеры расчетной области l_1, l_2 [м], начальное $T_0(x, y)$ значение температур [К], число конечных элементов M , объемная теплоемкость исследуемого материала $c\rho$ [Дж/м³К], компоненты тензора теплопроводности $\lambda_{11}(T), \lambda_{12}(T), \lambda_{22}(T)$.

1.2. Координаты точек $(x, y)_i$ [м] и моменты времени t^k [с], в которых проводятся замеры температуры $\tilde{T}_{i,k}$ [К].

1.3. Если экспериментальные значения $\tilde{T}_{i,k}$ в точках $((x, y)_i, t^k)$ определяются из численного эксперимента, то решается задача (5.2.22)–(5.2.27) по приемлемым функциям $q(x)$, которые и считаются искомыми.

1.4. Формируются линейно-непрерывные базисные функции $N_m(x)$, $m = \overline{0, M}$ на конечных элементах Δx_m .

1.5. Формируется матрица регуляризирующего оператора B и задается параметр регуляризации a .

1.6. Задается начальное приближение вектора $\mathbf{q}^{(0)} = (q_0^{(0)}, \dots, q_M^{(0)})^T$.

1.7. Инициализируется начальное значение итерационного параметра цикла $n = 0$, и параметрического шага $\alpha^0 = 1$.

2. Решается задача (5.2.22)–(5.2.27) с использованием вектора $\mathbf{q}^{(0)}$, определяется вектор теоретических значений температур $T_{i,k}(\mathbf{q}^{(0)})$ и распределение температур во всей расчетной области в каждый момент времени.

3. Численно решаются $(M + 1)$ независимые сопряженные задачи (5.2.38)–(5.2.43) по определению $z_{(i,k)}^m = \frac{\partial T((x,y)_i, t^k)}{\partial q_m}$. Эти задачи могут решаться с помощью параллельных вычислений, с одновременным использованием M процессоров.

4. Формируется прямоугольная матрица чувствительности Z с размерами $(I \cdot K) \times (M + 1)$.

5. Вычисляется значение функционала $S_a(\mathbf{q}^{(n)})$.

6. Определяются вектор $\mathbf{q}^{(n+1)}$ по формуле (5.2.48).

7. Решается задача (5.2.22)–(5.2.27) с использованием вектора $\mathbf{q}^{(n+1)}$ для определения вектора значений температур $T_{i,k}(\mathbf{q}^{(n+1)})$ на $(n+1)$ -й итерации.

8. Вычисляется значение функционала $S_a(\mathbf{q}^{(n+1)})$.

9. Если $S_a(\mathbf{q}^{(n+1)}) > S_a(\mathbf{q}^{(n)})$, то $\alpha^{(n+1)} = \alpha^{(n)} \cdot 0.1$, после чего осуществляется переход к п.3 алгоритма, в противном случае происходит переход к следующему п.10.

10. Если $|S(\mathbf{q}^{(n+1)}) - S(\mathbf{q}^{(n)})| > \varepsilon$, то $\alpha^{(n+1)} = \alpha^{(n)} \cdot 1.2$, $n = n + 1$ и осуществляется переход к п.3, в противном случае происходит переход к п.11.

11. Считается, что вектор искомых параметров $\mathbf{q}^{(n+1)}$, входящих в линейные комбинации, определены и, в соответствии с (5.2.28), определена и функция $q(x)$.

По изложенным методу и алгоритму разработан программный комплекс, с помощью которого проведены численные эксперименты, результаты которых приведены ниже. Входные данные принимали следующие значения:

$$l_1 = 0,1\text{ м}; l_2 = 0,05\text{ м}, c\rho = 2,23 \cdot 10^6 \text{ Дж}/(\text{м}^3\text{К}),$$

$$\lambda_\xi = 2\text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}); \lambda_\eta = 6\text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}); \varphi = \frac{\pi}{6};$$

количество I пространственных узлов принималось равным 9 с координатами $x = \{0,025; 0,05; 0,075\}$; $y = \{0,005; 0,025; 0,035\}$; моменты времени $t^k = 10k$, $k = \overline{1,200}$; $t_{\text{кон}} = 2000\text{ с}$. Экспериментальные значения температур получены с помощью численного решения задачи (5.2.22)–(5.2.27) с перечисленными входными данными и различными функциями теплового потока.

На рисунках 5.25–5.27 представлены восстановленные соответствующие тепловые потоки.

Регуляризирующий оператор был выбран из условия непрерывности первых производных искомых функций:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2.49)$$

В матрице (5.2.49) первая и последняя строки обнулены, чтобы не накладывались условия $\left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 = \frac{q_1 - q_0}{\Delta x}$ и $\left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x=M} = 0 = \frac{q_M - q_{M-1}}{\Delta x}$.

К точным значениям температур в пространственно-временных точках добавлена относительная погрешность δ в виде случайной величины с равномерным распределением на отрезке $(-10; 10)$.

На рис. 5.25 представлены теоретические расчеты температурного поля в пластине с тепловым потоком $q(x) = 10^4 \left(\sin \left(6 \left(\frac{x}{l_1} \right) - 3 \right) + \cos \left(\frac{x}{l_1} + 0,5 \right) \right)$ в момент времени $t_{\text{кон}} = 2000\text{ с}$ и отмечены точки в которых расположены термопары.

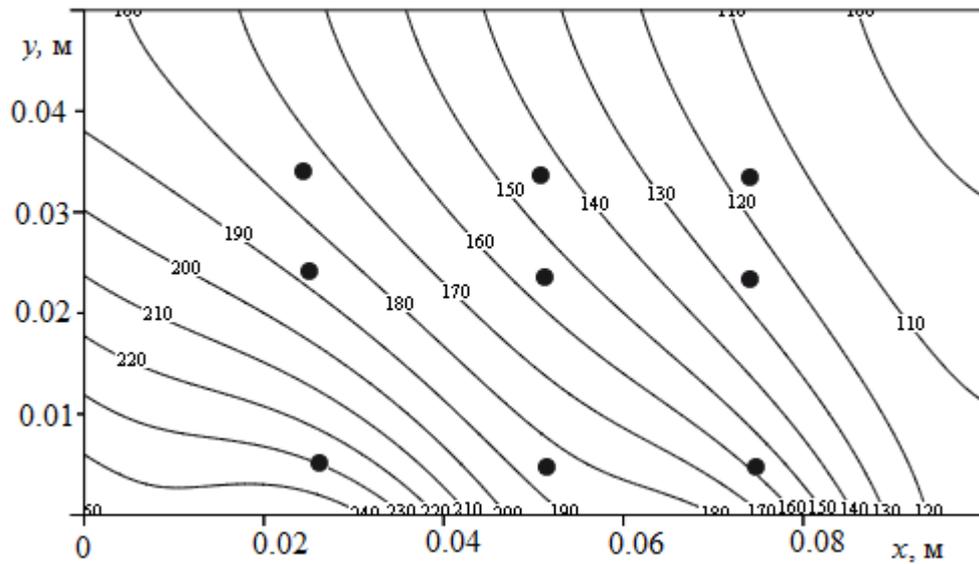


Рис. 5.25. Теоретически рассчитанное температурное поле в анизотропной пластине в момент времени $t_{\text{кон}} = 2000\text{с}$.

На рис. 5.26 представлены восстановленные тепловые потоки для варианта, в котором искомая функция в экспериментальных значениях температур $\tilde{T}_{i,k}$ задавалась в виде $q(x) = -10^4 \left(\frac{(x-0,05)^2}{l_1^2} - 1 \right)$. Количество элементов M принималось равным 20.

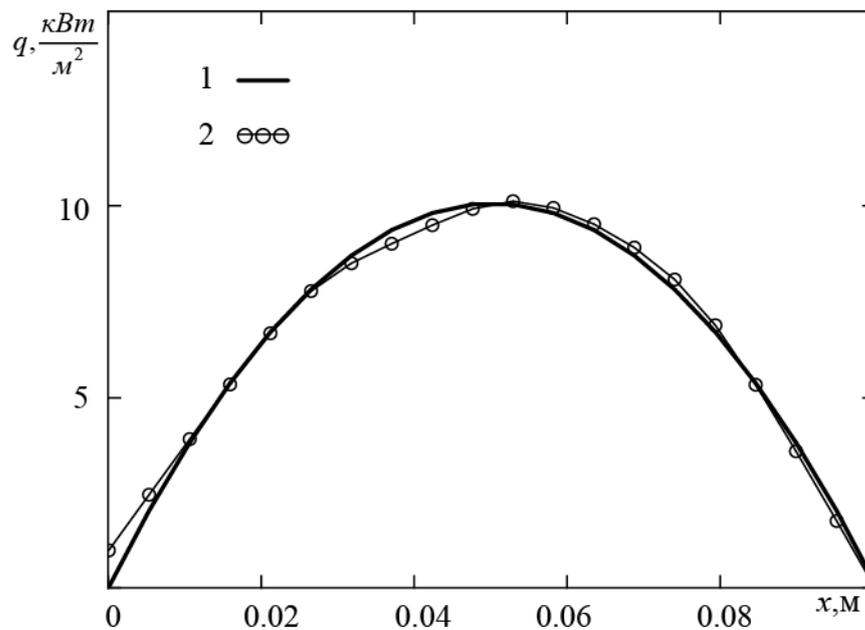


Рис. 5.26. Восстановленный тепловой поток при $M = 20$ с параметром регуляризации $a = 0,01$: 1- восстановленная функция, 2-искомая функция.

На рис. 5.27 представлены восстановленные тепловые потоки, которые в экспериментальных значениях температур $\tilde{T}_{i,k}$, задавались функцией

$$q(x) = 10^4 \exp\left(-30\left(\frac{x}{l_1} - 0,5\right)^2\right) + 60 \exp\left(9\left(\frac{x}{l_1} - 0,5l_1\right)\right).$$

Количество элементов M принималось равным 30.

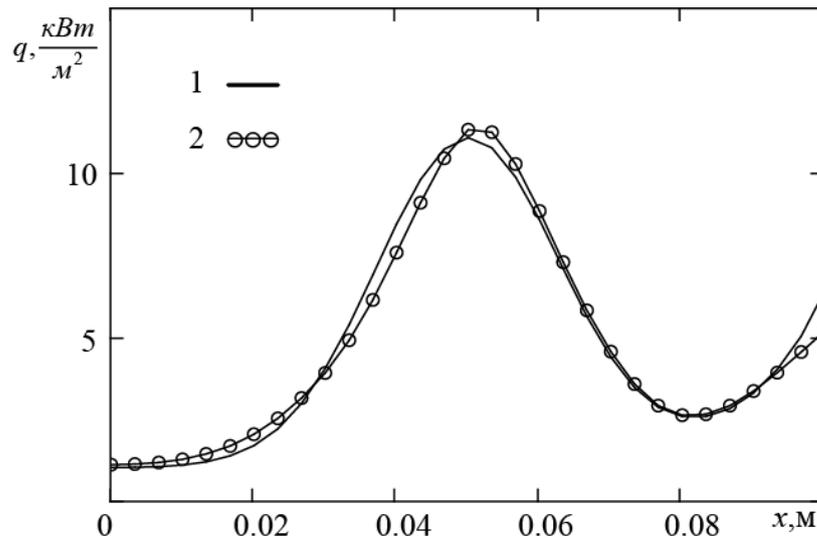


Рис. 5.27. Восстановленный тепловой поток при $M = 30$ с параметром регуляризации $\alpha = 0,01$: 1- восстановленная функция, 2-искомая функция.

Регуляризирующий оператор для вариантов на рисунках 5.26, 5.27 строился по непрерывности первых производных искомых функций.

На рис. 5.28 представлены восстановленные тепловые потоки, заложенные в экспериментальные значения температур $\tilde{T}_{i,k}$, в виде функции

$$q(x) = 10^4 \left(\sin\left(6\left(\frac{x}{l_1} - 3\right)\right)^2 + \cos\left(\frac{x}{l_1} + 0,5\right) \right).$$

Количество элементов M принималось равным 20.

Матрица регуляризирующего оператора выбрана с условием непрерывности второй производной:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -3 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -4 & 6 & -3 & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -3 & 2 & \end{pmatrix}.$$

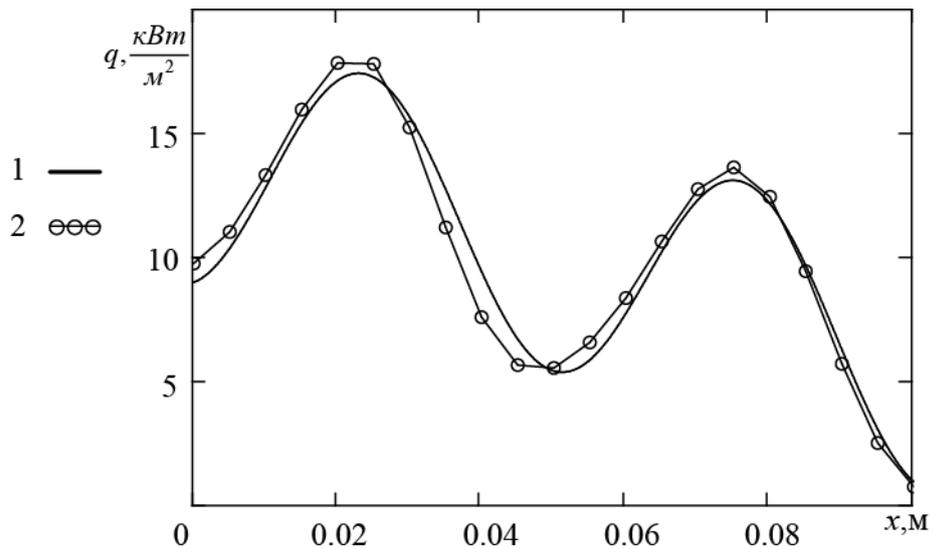


Рис. 5.28. Восстановленный тепловой поток при $M = 20$ с параметром регуляризации $\alpha = 0,001$: 1- восстановленная функция, 2-искомая функция.

Также как в обратных коэффициентных задачах теплопереноса в анизотропных телах, в обратных граничных задачах сопряженного теплопереноса с регуляризацией функционала невязки основной проблемой является проблема определения параметра регуляризации. Вычислительные эксперименты показали существенное повышение устойчивости восстанавливаемой функции (корректности) от способа формализации в регуляризирующем функционале априорных предположений о принадлежности искомых функций классу C_1 или C_2 , а также от значений параметра регуляризации.

При реализации этих априорных предположений возложено восстановление практически произвольных (но гладких) функций – многоэкстремальных, с наличием точек перегиба, существенно

немонотонных с точностью в окрестности точности экспериментальных данных и даже с большей точностью.

Параметры регуляризации можно подбирать в каждом конкретном случае по максимальной близости искомой функции к общему априорному ее представлению.

5.3. Необходимые и достаточные условия сходимости неявных итерационных методов в обратных нелинейных задачах сопряженного теплопереноса в анизотропных телах

В обратных граничных и коэффициентных задачах нелинейного теплопереноса остро встают вопросы сходимости итерационных процессов, единственности решения и устойчивости решения к различным возмущениям, среди которых основными являются погрешности экспериментальных данных и численных методов. В предыдущих параграфах вопросы увеличения устойчивости решались использованием методов регуляризации – использованием неявных градиентных методов и априорным предположением о гладкости искомых функций по первой или второй производной.

В данном параграфе рассматриваются условия сходимости итерационных процессов, реализующих весь комплекс задач, составляющих методологию численного решения по идентификации граничных условий на границах анизотропных тел и нелинейных компонентов тензора теплопроводности.

Ниже формулируются и доказывается теорема о необходимых и достаточных условиях существования неподвижной точки в пространстве $R^{3(M+1)}$, где M – число конечных элементов по температуре, на которых восстанавливаются отдельные (линейные) куски искомых функций.

Покажем вначале, что квадратные матрицы $Z^{T(n)}Z^{(n)}$ в (5.1.39) являются *нормальными*. Действительно, $(Z^{T(n)}Z^{(n)})^T = (Z^{(n)})^T \cdot (Z^{T(n)})^T = Z^{T(n)} \cdot Z^{(n)}$. Кроме этого, все элементы на главной диагонали матрицы $Z^{T(n)}Z^{(n)}$ являются положительными и, следовательно, собственные значения являются положительными, то есть матрица $Z^{T(n)}Z^{(n)} > 0$.

Поскольку трехдиагональная матрица B симметрическая, то матрица $B^T B > 0$ и является симметрической матрицей. Следовательно, матрицы $E + \alpha_n (Z^{T(n)}Z^{(n)} + aB^T B)$ в выражении (5.1.39) при положительных α_n являются положительно определенными, то есть обратные матрицы не превышают единичной матрицы

$$\left[E + \alpha_n (Z^{T(n)}Z^{(n)} + aB^T B) \right]^{-1} < E. \quad (5.3.1)$$

Рассмотрим итерационный процесс (5.1.39) по неявному методу градиентного спуска с регуляризацией на двух соседних итерациях

$$\Delta \lambda^{(n)} = -\alpha_n \left[E + \alpha_n (Z^{T(n)}Z^{(n)} + aB^T B) \right]^{-1} \cdot \left[Z^{T(n)}Z^{(n)} (\mathbf{T}^{(n)} - \tilde{\mathbf{T}}) + aB^T B \lambda^{(n)} \right]; \quad (5.3.2)$$

$$\Delta \lambda^{(n+1)} = -\alpha_{n+1} \left[E + \alpha_{n+1} (Z^{T(n+1)}Z^{(n+1)} + aB^T B) \right]^{-1} \cdot \left[Z^{T(n+1)}Z^{(n+1)} (\mathbf{T}^{(n+1)} - \tilde{\mathbf{T}}) + aB^T B \lambda^{(n+1)} \right]. \quad (5.3.3)$$

Т е о р е м а 5.1. Для сходимости итерационного процесса (5.3.2) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\left\| E + \alpha_{n+1} (Z^{T(n+1)}Z^{(n+1)} + aB^T B) \right\| \leq \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о .

Достаточность.

Пусть $Z^{T(n+1)}Z^{(n+1)} \leq Z^{T(n)}Z^{(n)}$ и $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$. Тогда для итерационного процесса (5.3.1), (5.3.2) выполняется принцип сжимающих отображений, то есть в $R^{3(M+1)}$ существует неподвижная точка λ^* , в которой функционал $S(\lambda) + R_a(\lambda)$ достигает стационарного значения $grad(S(\lambda) + R_a(\lambda)) = 0$. При этом выполняется неравенство

$$\left\| E + \alpha_{n+1} \left(Z^{T(n+1)} Z^{(n+1)} + aB^T B \right) \right\| \leq \left| \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \right|. \quad (5.3.4)$$

Для доказательства достаточно определить условия, при которых $\|\Delta\lambda^{(n+1)}\| / \|\Delta\lambda^{(n)}\| \leq 1$.

Действительно, в равенстве (5.3.3) $\mathbf{T}^{(n+1)} = \mathbf{T}^{(n)} + Z^{(n)} \Delta\lambda^{(n)}$, а из равенства (5.3.2) имеем

$$Z^{T(n)} Z^{(n)} \left(\mathbf{T}^{(n)} - \tilde{\mathbf{T}} \right) + aB^T B \lambda^{(n)} = -\frac{1}{\alpha_n} \left[E + \alpha_n \left(Z^{T(n)} Z^{(n)} + aB^T B \right) \Delta\lambda^{(n)} \right]. \quad (5.3.5)$$

Подставляя (5.3.5) в (5.3.3), находим

$$\begin{aligned} \Delta\lambda^{(n+1)} &= \left[E + \alpha_{n+1} \left(Z^{T(n+1)} Z^{(n+1)} + aB^T B \right) \right]^{-1} \times \\ &\times \left\{ -\alpha_{n+1} \left[Z^{T(n+1)} \left(\mathbf{T}^{(n)} - \tilde{\mathbf{T}} \right) + aB^T B \lambda^{(n)} \right] - \alpha_{n+1} \left(Z^{T(n+1)} Z^{(n)} + aB^T B \right) \Delta\lambda^{(n)} \right\}, \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

откуда

$$\begin{aligned} \|\Delta\lambda^{(n+1)}\| &\leq \left\| \left[E + \alpha_{n+1} \left(Z^{T(n+1)} Z^{(n+1)} + aB^T B \right) \right]^{-1} \right\| \times \\ &\times \left\| \left[Z^{T(n+1)} \left(\mathbf{T}^{(n)} - \tilde{\mathbf{T}} \right) + aB^T B \lambda^{(n)} \right] + \left(Z^{T(n+1)} Z^{(n)} + aB^T B \right) \Delta\lambda^{(n)} \right\|. \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

Поскольку $Z^{T(n+1)} Z^{(n+1)} \leq Z^{T(n)} Z^{(n)}$ (условие теоремы), то из (5.3.7) получаем неравенство

$$\begin{aligned} \|\Delta\lambda^{(n+1)}\| &\leq \left\| \left[E + \alpha_{n+1} \left(Z^{T(n+1)} Z^{(n+1)} + aB^T B \right) \right]^{-1} \right\| \times \\ &\times \left| \alpha_{n+1} \right| \left\| -\frac{1}{\alpha_n} \left[E + \alpha_n \left(Z^{T(n)} Z^{(n)} + aB^T B \right) \right] + \left(Z^{T(n)} Z^{(n)} + aB^T B \right) \Delta\lambda^{(n)} \right\| = \\ &= \frac{|\alpha_{n+1}|}{\alpha_n} \cdot \left\| \left[E + \alpha_{n+1} \left(Z^{T(n+1)} Z^{(n+1)} + aB^T B \right) \right]^{-1} \right\| \cdot \|\Delta\lambda^{(n)}\|. \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

Для сходимости итерационного процесса достаточно, чтобы $\|\Delta\lambda^{(n+1)}\| / \|\Delta\lambda^{(n)}\| < 1$, тогда из (5.3.7) имеем

$$\frac{\|\Delta\lambda^{(n+1)}\|}{\|\Delta\lambda^{(n)}\|} \leq \frac{|\alpha_{n+1}| / |\alpha_n|}{\left\| \left[E + \alpha_{n+1} \left(Z^{T(n+1)} Z^{(n+1)} + aB^T B \right) \right]^{-1} \right\|} < 1, \quad (5.3.9)$$

откуда следует неравенство

$$\left\| E + \alpha_{n+1} \left(Z^{T(n+1)} Z^{(n+1)} + aB^T B \right) \right\|^{-1} \leq \frac{|\alpha_n|}{|\alpha_{n+1}|}, \quad (5.3.10)$$

что и требовалось доказать.

Необходимость. Пусть итерационный процесс сходится. Тогда выполняется соотношение (5.3.4).

Доказательство сразу следует из неравенства (5.3.7).

Теорема доказана.

Выводы по пятой главе

1. Разработана методология численного решения обратных коэффициентных и граничных задач сопряженного теплопереноса на основе использования неявных градиентных методов минимизации квадратичных функционалов невязки, методов параметрической идентификации, выработки регуляризирующих функционалов, применения новых численных методов.

2. На основе анализа погрешностей, возникающих при численном решении обратных задач теплопереноса в анизотропных телах, разработаны принципы регуляризации при требовании принадлежности восстанавливаемых функций классу C_1 и C_2 , которые реализованы в регуляризирующих функционалах с добавлением последних к функционалам квадратичной невязки.

3. Разработаны методы и развернутые алгоритмы с регуляризацией по восстановлению нелинейных компонентов тензора теплопроводности анизотропных тел в виде температурных зависимостей произвольного вида, а также пространственных зависимостей тепловых потоков в сопряженных задачах с использованием аналитических решений для анизотропных тел с линейным теплопереносом и численных решений для анизотропных тел с нелинейным теплопереносом.

В отличие от существующих методов параметрической идентификации, осуществляющих минимизацию функционалов на отдельных конечных по температуре элементах, разработан метод минимизации функционала для всей искомой функции на всем интервале изменения температур, что существенно облегчает разработку и применение регуляризирующего функционала.

4. Разработаны программные комплексы по восстановлению нелинейных компонентов тензоров теплопроводности и тепловых потоков от

вязких газодинамических течений, по которым получены многочисленные результаты численных экспериментов.

5. Анализ результатов показал, что восстановленные функции получают значительные возмущения, существенно превышающие погрешности экспериментальных значений температур, приводящие к неустойчивости результатов восстановления, в случаях, если не построены и не используются регуляризирующие функционалы. В случае построения регуляризирующих функционалов и добавления их к квадратичному функционалу невязки, восстанавливаемые функции имеют погрешности, не превышающие погрешности экспериментальных данных в случае искомых функций, принадлежащих классу C_1 , и значительно меньше погрешностей экспериментальных данных в случае принадлежности искомых функций классу C_2 .

6. Установлено, что параметр регуляризации существенно влияет на вид восстанавливаемой функции, причем при стремлении этого параметра к нулю (отсутствие регуляризации) искомые функции приобретают сильные колебания в узлах стыковки конечных элементов по температуре, при значительных параметрах регуляризации искомые функции становятся линейными. *Отсюда следует вывод, что при выборе параметра регуляризации необходимо априорное представление восстанавливаемой функции (линейность, монотонность, наличие одного или нескольких экстремумов, наличие или отсутствие точек перегиба и т.п.).*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе проведенных исследований формулируются следующие основные результаты диссертационной работы:

1. Впервые сформулированы замкнутые физико-математические модели сопряженного теплообмена между вязкими диссоциирующими теплогазодинамическими течениями на основе полных уравнений Навье-Стокса между головными ударными волнами и поверхностями затупленных носовых частей летательных аппаратов (ЛА) с тепловой защитой, изготовленной из анизотропных материалов (композиционных материалов, графитов, графитосодержащих и редкоземельных материалов). Проанализированы и выбраны эффективные модели турбулентности. Поставлены краевые условия на ударной волне и на границе сопряжения «газ – твердое тело» в условиях сложного теплообмена, предложен эффективный алгебраический метод определения компонентов тензора теплопроводности в криволинейных координатах.

2. Разработан новый экономичный абсолютно устойчивый метод расщепления с экстраполяцией по пространственным переменным (МРЭП) с использованием апостериорной информации и процедуры «предиктор-корректор» численного решения задач теплогазодинамики между ударной волной и анизотропным телом. Доказаны теоремы об аппроксимации со вторым порядком и об устойчивости. При этом экономичность достигается применением скалярных прогонок вдоль координатных осей, а устойчивость – применением процедуры экстраполяции с получением сильного диагонального преобладания в матрицах результирующих систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

3. Разработана и обоснована по аппроксимации и устойчивости модификация численного метода расщепления с экстраполяцией по времени (МРЭВ) решения задач анизотропной теплопроводности, с уравнениями параболического типа, которые содержат смешанные производные.

Доказаны теоремы об аппроксимации по начальным условиям и правым частям и устойчивости методом энергетических неравенств в норме энергетических операторов в гильбертовых пространствах сеточных функций. Предложен новый алгоритм по определению параметра сопряжения – температуры границы «газ – твердое тело», сохраняющий второй порядок аппроксимации в газе и анизотропном теле с неявной аппроксимацией существенно нелинейного лучистого потока, сохраняющей устойчивость комплексной задачи.

4. На основе обобщенных математических моделей сопряженного теплообмена, разработана физико-математическая модель между вязкими пристенными газодинамическими течениями и составными анизотропными телами в связанных системах координат, сформулированы краевые условия на внешней границе пристенных течений и граничные условия сопряжения на границе «газ – твердое тело». Разработан интегрированный программный комплекс по определению теплогазодинамических характеристик вязкого теплопроводного газа, тепловых потоков к телу, нестационарных температурных полей в составном анизотропном теле (наличие разрывов теплофизических характеристик).

5. Проведены широкие вычислительные эксперименты по исследованию влияния на сопряженный теплообмен продольной степени анизотропии, главных компонентов и углов ориентации главных осей теноров теплопроводности анизотропных материалов, получены количественные характеристики взаимного влияния на тепловые потоки к телу и нестационарных температурных полей в теле на газодинамические характеристики вязкого газа. Установлено, что при высокой продольной степени анизотропии обтекаемого тела (>10) наблюдаются значительные продольные перетоки теплоты в теле в продольном направлении, в результате чего хвостовая часть тела значительно нагревается, а тепловые потоки к телу существенно уменьшаются и даже становятся отрицательными (тело остывает), что можно использовать как новый незатратный способ

тепловой защиты тела. Установлено также, что на границах разрыва анизотропных теплофизических характеристик продольные составляющие векторов плотностей тепловых потоков имеют разрывы первого рода.

6. Впервые получены аналитические решения класса задач теплопереноса, описываемых дифференциальными уравнениями, содержащими смешанные производные, на основе разработанной методологии получения граничной функции влияния с использованием краевых условий I-го, II-го, III-го и IV-го родов. На основе этих точных решений разработаны методы приближенно-аналитических решений сопряженных задач с линеаризованными уравнениями пограничного слоя и уравнениями теплогазодинамики на основе уравнений Навье-Стокса. Эти решения активно используются для тестирования новых численных методов решения задач анизотропной теплопроводности, а также при математическом моделировании обратных задач сопряженного теплообмена в анизотропных телах, а также в реальных задачах аэрогазодинамического нагрева ЛА.

7. Впервые разработана методология численного решения обратных коэффициентных и граничных задач сопряженного теплопереноса в анизотропных телах с регуляризацией функционала квадратичной невязки по восстановлению нелинейных компонентов тензора теплопроводности, зависящих от температуры и тепловых потоков от газодинамического течения, распределенных вдоль границы анизотропного тела. Методология основана на использовании неявных градиентных методов минимизации квадратичных функционалов невязки, методов глобальной (а не локальной как во многих методах) параметрической идентификации, методов построения регуляризирующих функционалов, новых численных методов в частности высокоточного и абсолютно устойчивого метода МРЭВ.

8. По разработанным программным комплексам проведены широкие параметрические исследования по восстановлению нелинейных зависимостей от температуры компонентов тензоров теплопроводности анизотропных тел. Установлено, что в условиях отсутствия

регуляризирующих функционалов восстанавливаемые функции получают сильные возмущения, приводящие к неустойчивости, особенно в узлах стыковки конечных элементов по температуре. Разработка, формализация и использование регуляризирующих функционалов на основе априорных предположений о принадлежности искомым функций классам C_1 или C_2 существенно стабилизирует восстанавливаемые функции произвольного вида с погрешностями ниже или равными погрешностям экспериментальных данных.

9. Установлено, что параметр регуляризации в регуляризирующем функционале существенно влияет на вид восстанавливаемых функций, так как при стремлении этого параметра к нулю (отсутствие регуляризации) возникает неустойчивость результирующей функции, а при больших его значениях искомые функции становятся линейными. Поэтому при выборе параметра регуляризации необходимо *априорное качественное представление о виде восстанавливаемой функции (линейности, монотонности, наличии одного или нескольких экстремумов, наличие или отсутствие точек перегиба и т.п.)*.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдудевский В.С., Галицейский Б.М., Глебов Г.А. и др. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. – М.: Машиностроение, 1992, 624с.
2. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука. 1988. 288с.
3. Алифанов О.М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов (введение в теорию обратных задач теплообмена). – М.: Машиностроение. 1979. 216с.
4. Алексашенко А.А. Аналитическое исследование тепло и массопереноса с учетом конечной скорости переноса. Канд. дис. ИТМО. Минск, 1968.
5. Анисимов С.И., Имас Я.А., Романов Г.С., Ходыко Ю.В. Действие излучения большой мощности на металлы. М.: Наука, 1970.
6. Аржаников Н.С., Садекова Г.С. Аэродинамика больших скоростей. – М.: Высшая школа. 1965. 560с.
7. Аттетков А.В., Волков И.К. Осциллирующая составляющая квазистационарного температурного поля системы, находящейся под воздействием импульсно-периодического теплового потока// Известия Российской академии наук. Энергетика. 2015 .- № 5 . С. 124 – 134.
8. Аттетков А.В., Волков И.К. Квазистационарное температурное поле системы с подвижной границей, находящейся под воздействием импульсно-периодического теплового потока // Тепловые процессы в технике. 2015 . Т. 7 , № 9 .- С. 410 - 416.
9. Аттетков А.В., Волков И.К. Температурное поле анизотропного полупространства, подвижная граница которого содержит пленочное покрытие // Известия Российской академии наук. Энергетика. 2015. № 3 .- С. 39–49.

10. Аттетков А.В., Волков И.К. Особенности процесса формирования температурного поля в системе с активной теплозащитой // Известия Российской академии наук. Энергетика. 2014 .- № 3 . С. 69 – 81.
11. Аттетков А.В., Волков И.К. Температурное поле конструкции с активной системой теплозащиты, содержащей анизотропное покрытие // Известия Российской академии наук. Энергетика. 2013 .- № 6 . С. 125 – 136.
12. Беккер Р. Теория теплоты. М.: Энергия, 1974.
13. Берман Р. Теплопроводность твердых тел. – М.: Мир. 1979. 362с.
14. Бородин А. И. Регулируемый теплообмен в ламинарном пограничном слое вдоль проницаемой поверхности затупленного тела// Теплофизика высоких температур. – 2003.Т. 41, № 3. С. 427-431.
15. Быков Л.В., Никитин П.В., Пашков О.А. Математическое моделирование процессов обтекания затупленного тела высокоскоростным потоком//Труды МАИ. 2014 . № 78.
16. Бушуев Ю.Г., Персин М.И., Соколов В.А. Углерод-углеродные композиционные материалы. Справочник. – М.: Металлургия, 1994. 128с.
17. Варгафтик Н.Б. Теплофизические свойства веществ. – М.: Госэнергоиздат, 1956. 468 с.
18. Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Приближенные методы математической физики. – М.: Изд-во МГТУ. 2001. 700с.
19. Галицейский Б.М., Совершенный В.Д., Формалев В.Ф. Тепловая защита лопаток турбин // М.: Изд-во МАИ. 1996. 356с.
20. Гдалевич Л.Б., Хусид Б.М. Сопряженный нестационарный теплообмен тонкой пластины в потоке несжимаемой жидкости. // Инженерно-физический журнал. 1971. Т. 20, № 6. С.1045-1052.
21. Гилязов С.Ф. Методы решения линейных некорректных задач.– М.: Изд-во МГУ. 1988. 120.
22. Гласко В.Б. Обратные задачи математической физики. – М.: Изд-во МГУ. 1984. 112с.

23. Головин Н.Н., Кувыркин Г.Н., Цицин А.Г. Численное решение нестационарной осесимметричной задачи теплопроводности для анизотропного тела переменного объема // Проблемы прочности. 1988. № 12. С. 105–108.
24. Головин Н.Н., Кувыркин Г.Н. Численное моделирование нестационарных температурных полей в конструкциях из композиционных материалов при высокотемпературном нагружении // В тр. 2-ой Российской национальной конференции по теплообмену. 1998. Т. 7. С. 57–59.
25. Гребер Г., Эрк С., Григуль У. Основы учения о теплообмене. – М.: ИЛ. 1958. 468с.
26. Дорренс У.Х. Гиперзвуковые течения вязкого газа. – М.: Изд-во Мир. 1966. 440с.
27. Дорфман А.Ш. Теплообмен при обтекании неизотермических тел. М.: Машиностроение, 1982. 192с.
28. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. – М.: Наука. 288с.
29. Епифановский И.С. Композиционные углерод-углеродные материалы в конструкциях летательных аппаратов. – М.: Изд-во МГТУ. 1993. 51с.
30. Зарубин В.С. Температурные поля в конструкциях летательных аппаратов (методы расчета). – М.: Машиностроение, 1978. 184с.
31. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. – М.: Энергоатомиздат, 1983. 328с.
32. Исаев С.А., Леонтьев А.И., Садовников Г.С. Сопряженный турбулентный теплообмен в зоне падения скачка уплотнения на стенку с пористой вставкой // Теплофизика высоких температур. 2004. Т. 42. № 1. С. 72–76.
33. Иванов В.В., Карасев Л.В. Сопряженный теплообмен в пластине с излучающими наружными поверхностями // Известия высших учебных

заведений. Северо-Кавказский регион. Серия «Технические науки». 2015. № 1 (182). С. 65–68.

34. Зинченко В.И., Якименко А.С. Режимы термохимического разрушения углефенольного композиционного материала под действием теплового потока // Физика горения и взрыва. 1988. Т. 24. № 2. С. 141–149.

35. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457с.

36. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. 487с.

37. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа. 2001. 552с.

38. Карташов Э.М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами (обзор) // Инженерно-физический журнал. 2000. Т. 74. № 2. С. 1–24.

39. Карташов Э.М. Динамическая термовязкоупругость в проблеме теплового удара // Известия Российской академии наук. Энергетика. 2012. № 5. С. 56-70.

40. Карташов Э.М. О новом подходе в методе функций Грина при решении краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа // Тепловые процессы в технике. 2013. № 1. С. 26-32.

41. Карташов Э.М. Аналитические решения гиперболических моделей теплопроводности // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87. № 5. С. 1072-1081.

42. Камья Ф.М. Импульсная теория теплопроводности. М.: Энергия. 1972.

43. Композиционные материалы. Справочник под ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение. 1989. 510с.

44. Композиционные материалы. Справочник под ред. В.В. Васильева, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др. – М.: Машиностроение 1990. 512с.

45. Кочин И.К. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Изд-во АН СССР. 1951. 426с.
46. Краснов Н.Ф. Аэродинамика тел вращения. – М.: Машиностроение. 1964. 572с.
47. Клибанов М.В. Об одном классе обратных задач для нелинейных параболических уравнений // ДАН СССР. 1985. Т. 280. № 3. С. 533–536.
48. Колесник С.А. Идентификация компонентов тензора теплопроводности анизотропных композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2012. Т. 18, № 1. С. 111-120.
49. Колесник С.А. Метод численного решения обратных нелинейных задач по восстановлению компонентов тензора теплопроводности анизотропных материалов // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18, №1. С. 34-45.
50. Колесник С.А. Метод восстановления тепловых потоков к анизотропным элементам конструкций силовых установок // Известия Академии наук. Энергетика. 2013. № 5. С. 146-153.
51. Колесник С.А. Метод идентификации нелинейных компонентов тензора теплопроводности анизотропных материалов// Математическое моделирование. 2014. Т. 26, № 2. С. 119–132.
52. Колесник С.А. Численные методы решения задач для уравнений параболического типа со смешанными производными.– М.: Изд-во Доброе слово, 2013. – 96с.
53. Колесник С.А. Моделирование пристенного высокотемпературного градиентного газодинамического течения на неизотермической стенке // VI международная конференция по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ - 2006). Тезисы докладов. 2006. С. 208.
54. Колесник С.А. Численное моделирование сопряженного теплопереноса между пристенными газодинамическими течениями и затупленными анизотропными телами // Материалы VIII международной

конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ-2010) . 2010. С. 306-308.

55. Колесник С.А. Исследование сопряженного теплообмена в условиях аэрогазодинамического нагрева анизотропных тел // Тезисы докладов XI Всероссийской школы-конференции молодых ученых "Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики". 2010. С. 49.

56. Колесник С.А. Коэффициентная обратная задача теплопереноса в анизотропных материалах // XVII международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2011). Тезисы докладов. 2011. С. 96-97.

57. Колесник С.А. Исследование теплопереноса в многослойных телах с анизотропией свойств // Тезисы докладов XVI международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики сплошных сред". – 2010. Т. 1, С. 94-95.

58. Колесник С.А. Исследование влияния продольной неизотермичности на сопряженный теплообмен в условиях аэрогазодинамического нагрева затупленных анизотропных тел// Тезисы докладов XVII международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики сплошных сред". – 2011. Т. 1. С. 95-96.

59. Колесник С.А. Метод решения обратных коэффициентных задач в анизотропных средах// Тезисы докладов XVIII международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики сплошных сред". – 2012. Т. 1, С. 103-104.

60. Колесник С.А., Формалев В.Ф. Метод параметрической идентификации в нелинейных обратных задачах теплопроводности в анизотропных телах // Тезисы докладов X Международной конференции молодых ученых "Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики"-Новосибирск. 2012. С. 64.

61. Колесник С.А. Новый метод численного решения обратных коэффициентных задач теплопроводности в нелинейных анизотропных средах // Материалы IX международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях - М.: Изд-во МАИ, 2012. С. 556-557.

62. Колесник С.А. Новый метод численного решения граничных задач анизотропной теплопроводности // Тезисы докладов XIX международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики сплошных сред”. – 2013. Т. 1, С. 119.

63. Колесник С.А., Формалев В.Ф. Метод параметрической идентификации в обратных граничных задачах анизотропной теплопроводности // Тезисы XVIII международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2013). С. 98.

64. Колесник С.А. Особенности моделирования обратных граничных задач в анизотропных средах // Материалы X международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях - М.: Изд-во МАИ, 2014. С. 556-557.

65. Колесник С.А. Общий подход к решению обратных граничных задач в анизотропных средах // Тезисы докладов XX международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики сплошных сред”. – 2014. Т. 2, С. 26-27.

66. Колесник С.А., Кузнецова Е.Л. Восстановление тепловых потоков путем решения обратной граничной задачи теплопереноса в анизотропной полосе // Известия Академии наук. Энергетика. – 2011. № 6. С. 196-203.

67. Колесник С.А., Кузнецова Е.Л. Моделирование сопряженного теплопереноса в условиях аэрогазодинамического нагрева анизотропных затупленных носовых частей гиперзвуковых летательных аппаратов // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2012. № 3. С. 40-45.

68. Колесник С.А., Формалев В.Ф., Кузнецова Е.Л. О граничной обратной задаче теплопроводности по восстановлению тепловых потоков к границам анизотропных тел // Теплофизика высоких температур. –2015. Т. 53. № 1. С.72-77.

69. С.А. Колесник, В.Ф. Формалев, И.А. Селин Об одном методе регуляризации при решении обратной граничной задачи теплопроводности в анизотропных телах // Тезисы докладов XXI международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики сплошных сред”.– 2015. Т.2, С.38.

70. Колесник С.А., Кузнецова Е.Л. Моделирование сопряженного теплообмена на границе анизотропных тел с использованием аналитических решений // Вестник Московского Авиационного Института. 2010. Т. 17, № 2. С. 121-126.

71. Колесник С. А., Формалев В. Ф., Селин И. А. Математическая модель и программный комплекс сопряженного теплообмена между вязкими газодинамическими течениями и охлаждаемыми лопатками газовых турбин // Труды МАИ. 2015. №80.

72. Кондратов Д.В. Могилевич Л.И., Кондратова Ю.Н. Математическое моделирование ламинарного движения жидкости в упругой цилиндрической трубе кольцевого профиля со свободным опиранием по торцам // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2009. № 1 (37). – С. 33–40.

73. Кондратов Д.В. Могилевич Л.И., Кондратова Ю.Н. Пульсирующее ламинарное течение жидкости по упругой цилиндрической трубе кольцевого сечения// Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2009 – № 4. – С. 60-72.

74. Кузнецова Е.Л., Колесник С.А., Формалев В.Ф. Методология численного решения обратных граничных задач теплопереноса в анизотропных телах на основе аналитического решения// Нелинейный мир. – 2011. Т. 9, № 2, С.71-77.

75. Кузнецова Е.Л., Колесник С.А., Формалев В.Ф. Сопряженный теплообмен на границах композиционных анизотропных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. Т. 16, № 2. С. 232-240.

76. Кузнецова Е.Л., Колесник С.А. Обратная коэффициентная задача теплопереноса в анизотропном полупространстве// Известия Академии наук. Энергетика. – 2011. № 4. С.117-123.

77. Кузнецова Е.Л., Колесник С.А. Моделирование тепломассопереноса в композиционных теплозащитных материалах в условиях высоких температур // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2012. №1. С. 31-36.

78. Кузнецов Г.В., Рудзинский В.П. Высокотемпературный тепломассоперенос в слое кокса теплозащитных материалов // Теплофизика высоких температур. 2000. Т. 38. № 4. С. 654–660.

79. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979.

80. Лапин Ю.В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М.: Наука, 1982. 312с.

81. Леонтьев А.И. Теория тепло-массопереноса. – М.: Физматлит. 1998. 426с.

82. Лунёв В.В. Гиперзвуковое обтекание притупленных конусов с учётом равновесных физико-химических превращений. – М.: Издательство ВЦ АН СССР, 1968.

83. Лунёв В.В. Гиперзвуковая аэродинамика. – М.: Машиностроение, 1975.

84. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло- и массообмена. – М.: Госэнергоиздат, 1969. 362с.

85. Лыков А.В. Явления переноса в капиллярно-пористых телах. – М. – Л.: Гостехиздат, 1954. 264с.

86. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. 600с.

87. Лыков А.В. Теплообмен. Справочник. – М.: Энергия, 1978. 480с.
88. Любимов Л.Н., Русанов В.В. Течения газа около тупых тел. М.: Наука, 1970. Т. 2. 380с.
89. Любов Б.Я., Соболев Э.М. Процессы теплопереноса при фазовых превращениях под действием интенсивных потоков энергии // Инженерно-физический журнал. 1983. Т. 45. № 3. С. 670–676.
90. Музылев Н.В. О единственности одновременного определения коэффициентов теплопроводности и объемной теплоемкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1983. Т. 23. № 1. С. 102–108.
91. Никитенко Н.И. Теория тепло- и массопереноса. – Киев: Наукова думка, 1983.
92. Никитенко Н.И. Сопряженные и обратные задачи теплообмена. – Киев: Наукова думка, 1988.
93. Падерин Л.Я., Прусов Б.В., Токарев О.Д., Наливайко А.Г. Метод исследования теплопроводности углеродных композиционных материалов. – М.: В тр. 5-й национальной конф. по теплообмену. 2010. Т. 7. С. 150–152.
94. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. 150с.
95. Перельман Г.Л. О сопряженных задачах теплообмена // Тепло - и массоперенос. – Минск: Наука и техника, 1963. Т. 5 – С. 231-245.
95. Петрикевич Б.Б. Математическая формулировка сопряженных задач сложного теплообмена резкоускоренного потока со стенкой. // ММФ-1988. С.98-100.
96. Полежаев Ю.В., Юревич Ф.Б. Тепловая защита. – М.: Энергия, 1976. 392с.
97. Полежаев Ю.В., Шишков А.А. Газодинамические испытания тепловой защиты. – М.: Промедак, 1992. 248с.

98. Пэдовен Д. Нестационарное распределение температур в анизотропном полупространстве // Ракетная техника и космонавтика. 1973. № 4. С. 174–179.

99. Пэдовен Д. Обобщенный метод Штурма-Луивилля решения нестационарной теплопередачи в анизотропной композиционной среде // Ракетная техника и космонавтика. 1974. № 8. С. 190–193.

100. Пунь К.С., Цзоу Р.С., Чжан Ю.П. Решение анизотропных задач первого класса методом преобразования координат // Теплопередача. 1979. № 2. С. 177–184.

101. Ревизников Д.Л., Сафонов В.Е., Формалёв В.Ф. Численное моделирование сопряженного теплообмена при сверхзвуковом обтекании осесимметричных тел // Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации: Сб. трудов. – М.: Наука, 1987.

102. Ревизников Д.Л., Формалёв В.Ф. Моделирование граничных условий в задачах сопряженного теплообмена // Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации: Сб. трудов. – М.: Наука, 1989.

103. Ревизников Д.Л. Коэффициенты неизотермичности в задаче нестационарного сопряженного теплообмена на поверхности затупленного тела // Теплофизика высоких температур. 1995. Т.33, № 2. С. 261–267.

104. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1978, 680с..

105. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука. 1983.

106. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука. 1978.

107. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. – М.: Наука. 1975.

108. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач «конвекция-диффузия». – М.: Физматлит, 1999. 452с.

109. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. – М.: Изд-во ЛКИ. 2009. 480с.

110. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – М.: Наука, 1987.

111. Сапелкин В.В. Сопряженная задача нестационарного теплообмена ламинарного пограничного слоя с секционированной плоской пластиной // Журнал прикладной механики и технической физики. 1985. № 3. С. 90-95.

112. Саульев В.К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. – М.: Физматгиз, 1960.

113. Совершенный В.Д. Модель полной вязкости в пристеночной области пограничного слоя. // Инженерно-физический журнал. 1974. Т.27, № 5, С. 920-921.

114. Сендерович Р.Б., Первушин Ю.С. К определению теплофизических характеристик композиционных полимерных материалов // Инженерно-физический журнал 1985. Т. 49. № 6. С. 982–989.78.

115. Страхов В.Л., Леонова С.И., Геращенко А.И. Некоторые результаты определения температурных зависимостей теплофизических характеристик композиционных полимерных материалов // Инженерно-физический журнал. 1977. Т. 33. № 6. С. 1047–1051.

116. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.

117. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. 288с.

118. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука, 1983. 198с.

119. Формалев В.Ф. Тепломассоперенос в анизотропных телах. Обзор // Теплофизика высоких температур. 2001. Т. 39. № 5. С.810–832.

120. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М.: Физматлит, 2004. 400с.

121. Формалев В.Ф., Кузнецова Е.Л. Тепломассоперенос в анизотропных телах при аэрогазодинамическом нагреве. – М.: МАИ-ПРИНТ, 2011. 300с.
122. Формалев В.Ф. Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014.–312с.
123. Формалев В.Ф. Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015.–280с.
124. Формалев В.Ф. , Колесник С.А. Математическое моделирование аэрогазодинамического нагрева затупленных анизотропных тел. – М.: Изд-во МАИ, 2016.–160с.
125. Формалёв В.Ф., Колесник С.А. Аналитическое решение второй начально-краевой задачи анизотропной теплопроводности // Математическое моделирование. 2001. Т.13, № 7. С. 21-25.
126. Формалёв В.Ф., Колесник С.А. Аналитическое исследование сопряженного теплообмена на границах анизотропных тел // Теплофизика высоких температур. 2002. Т. 40, №6. С. 993-999.
127. Формалёв В.Ф., Колесник С.А., Миканев С.В. Моделирование теплового состояния композиционных материалов // Теплофизика высоких температур. 2003. Т. 41, № 6. С. 935-941.
128. Формалёв В.Ф., Колесник С.А. Аналитическое исследование теплового состояния анизотропной пластины при наличии теплообмена на свободных границах// Математическое моделирование. 2003. Т. 15, № 6. С. 107–110.
129. Формалёв В.Ф., Колесник С.А., Чипашвили А.А. Численное моделирование теплопереноса в анизотропных телах с разрывными характеристиками // Математическое моделирование. 2004. Т. 16, №5. С. 94 – 102.

130. Формалёв В.Ф., Колесник С.А., Чипашвили А.А. Аналитическое исследование теплопереноса при плёночном охлаждении тел // Теплофизика высоких температур. 2006. Т. 44, №1. С. 107-112.

131. Формалёв В.Ф., Колесник С.А. Сопряженный теплоперенос между пристенными газодинамическими течениями и анизотропными телами // Теплофизика высоких температур. 2007. Т. 45, №1. С. 85-93.

132. Формалев В.Ф., Колесник С.А., Кузнецова Е.Л. Влияние продольной неизотермичности на сопряженный теплообмен между пристенными газодинамическими течениями и затупленными анизотропными телами // Теплофизика высоких температур. 2009. Т. 47, №2. С.456-463.

133. Формалев В.Ф., Колесник С.А. Методология решения обратных коэффициентных задач по определению нелинейных теплофизических характеристик анизотропных тел // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51. № 6. С.875-883.

134. Формалев В.Ф., Колесник С.А., Кузнецова Е.Л. Моделирование сопряженного теплообмена в пакетах малогабаритных плоских газодинамических сопел с охлаждением // Теплофизика высоких температур. –2015. Т. 53. №5. С.735-740.

135. Формалев В.Ф., Колесник С.А., Пегачкова Е.А. Аналитическое исследование тепломассопереноса при интенсивном газообразовании в теплозащитных композиционных материалах в условиях аэрогазодинамического нагрева // Механика композиционных материалов и конструкций. 2015. Т. 21, №3. С. 434-446.

136. Формалев В.Ф., Колесник С.А., Кузнецова Е.Л., Рабинский Л.Н. Тепломассоперенос в теплозащитных композиционных материалах в условиях высокотемпературного нагружения // Теплофизика высоких температур. 2016. Т. 54. №3. С.415-422.

137. Формалев В.Ф., Колесник С.А. Методика, алгоритм и программный комплекс по определению теплового состояния охлаждаемых микроракетных двигателей // Труды МАИ. 2014. №78.

138. Формалев В.Ф., Колесник С.А., Кузнецова Е.Л. Исследование тепломассопереноса при пленочном охлаждении тел в условиях высокоинтенсивного нагрева // Материалы международной научно-технической конференции "Модели и алгоритмы для имитации физико-химических процессов". Таганрог, 2008. С. 177-185.

139. Формалев В.Ф., Колесник С.А., Селин И.А. Сопряженный теплообмен между пристенными газодинамическими течениями и затупленными анизотропными телами// Труды пятой российской национальной конференции по теплообмену. Т.7. С. 179-182.

140. Фрязинов И.В. Об экономичных разностных схемах для двумерного уравнения теплопроводности со смешанными производными // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1976. Т. 16. № 4. С. 908–929.

141. Фрязинов И.В. Схемы переменных направлений для параболического уравнения со смешанными производными в криволинейной области: Препринт № 92. М.: Институт прикладной математики им. Келдыша АН СССР, 1978.

142. Чжан Ю.П., Цзоу Р.Ц. Теплопроводность в анизотропной среде, однородной в цилиндрических областях// Теплопередача. 1977. № 1. С. 42–51.

143. Чжан Ю.П., Пунь К.Ц. Трехмерная установившаяся теплопроводность в цилиндрах из материала с анизотропией свойств общего вида // Теплопередача. 1979. № 3. С. 203–210.

144. Чиркин В.С. Теплопроводность промышленных материалов. – М.: Машгиз. 1962. 484с.

145. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. – М.: Наука. 1988. 192с.

146. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1969. 742с.
147. Шнейдер П. Инженерные проблемы теплопроводности. – М.: ИЛ, 1960. 342с.
148. Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М. Теория тепло- и массопереноса. – М.: Госэнергоиздат, 1961. 356с.
149. Яненко Н.Н. О неявных разностных методах счета многомерного уравнения теплопроводности // Изв. высш. учебн. заведений. 1961. Т. 4. № 23. С. 148–157.
150. Яненко Н.Н. О сходимости метода расщепления для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1962. Т. 2. № 5. С. 933–937.
151. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967. 196с.
152. Янкелев Л.Ф., Гусева Л.И. Метод одновременного определения коэффициента теплопроводности и объемной теплоемкости, зависящих от температуры // Инженерно-физический журнал. 1975. Т. 28. № 4. С. 652–656.
153. Alifanov O.M. Inverse Heat Transfer Problems, Springer – Verlag, Berlin, 1994.
154. Baxter D.C., Reynolds W.S. – «JAS», 1958, vol. 25. № 6.
155. Beck J.V., Blackwell B., St. Clair C.R. Inverse Heat Conduction. Ill-posed Problems. – N -Y: A. Wiley – Interscience Publication. 1985. 308p.
156. Chang- Y.P., Tsou R.C. // ASME Journal of Heat Transfer. 1977. V.99. № 1. P. 42–49.
157. Chapman D.R., Rubesin M.W. Temperature and velocity profiles in the compressible, laminar boundary with arbitrary distribution of surface temperature. – «JAS», 1949, vol. 16, № 9.
158. Chen Y.K., Milos F.S. Ablation and thermal response program for spacecraft heatshield analysis// AIAA Paper. 1980. № 1488. 8p.

159. Eckert E.P., Drake R.M. Heat and Mass Transfer. Mc Graw – Hill, New York, 1972.
160. Houwen P.J., Sommeijer B.P., Verwer J.G. Comparing time integrators for parabolic equations in two space dimensions with mixed derivatives // Journal of computational and applied mathematics. 1979. V. 5. № 2. P. 73–83.
161. Huang C.H., Ozisik N. Inverse problem of determining unknown wall heat flux in laminar flow through parallel plate duct // Numerica Heat Transfer, Vol. 21, pp. 55–70, 1992.
162. Hong Y.K., Baek S.W. Inverse analysis for estimating the unsteady inlet temperature distribution for two-phase laminar flow in a channel // Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol. 49, pp. 1137–1147. 2006.
163. Iyengar Sateelure R.K., Jain M.K. Comparative study of two and three level ADI methods for parabolic equations with a mixed derivative // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1976. V.10. № 6.
164. Jarny V., Ozisik M.N., Bardon J.P. A general optimization method using an adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction // Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 34, pp. 2911–2919. 1991.
165. Lin Pengcheng. An explicit difference scheme for solving parabolic equations with mixed derivatives // Гаодэн сюэсяо цзису-ань шусюэ сюэбао, Numer. Math. J. Chin. Univ. 1983. V. 5. № 3. P. 281–285.
166. Mckee S., Mitchell A. Alternating direction methods for parabolic equation in two space dimensions with a mixed derivative // The Computer Journal. 1970. V. 13. № 1.
167. Morris J.LI., Nicoll I.F. Hopscotch methods for an anisotropic thermal print head problem // Journal of computational physics. 1973. V. 13. P. 316–337.
168. Padovan J.// AIAA Journal. 1973. V.II. № 4. P. 565–566.
169. Peaceman D., Rachford H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations // SIAM. 1955. V. 3. № 1. P. 23–42.

170. Park H.M., Chung O.Y. An inverse natural convection problem of estimating the strength of a heat source // *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 4259–4273. 1999.
171. Scala S.M., Gilbert L.M. Thermal degradation of a char forming plastics during supersonic flight // *ARSJ*. 1962. № 6.
172. Satage R.T., Love W., Blotscher F. High Temperature Performance of Flexible Thermal Protection Materials // *AIAA Paper*. 1984. № 1770. 9 p.
173. Shin P.K., Zwan A.D., Kelley H.N. Thermal Protection System Optimization for a Hypersonic Aerospace Vehicle // *AIAA Paper*. 1988. № 2839. 9 p.
174. Van Driest E.R. On Turbulent Flow Near a Wall // *JAS*. 1956. v. 23. № 11, pp. 1007–1011.
175. Greenwood T.F., Lee Y.C., Bender R.L., Carter R.E. Space shuttle base heating // *J. Spacecraft and Rockets*. 1984. vol. 21. № 4. p. 339–345.
176. Ho C.Y., Powell R.W., Liley P.E. Thermal Conductivity of Selected Materials. Part 2. Washington: US Government Printing Office. 1968. pp. 129–133.
177. Jones W.P., Launder B.E. The Calculation of Low Reynolds – Number Phenomena with a Two–Equation Model of Turbulence // *International J. Heat and Mass Transfer*. 1973. v. 16, pp. 1119–1130.
178. Wood W. A., Eberhardt S. Dual-Code Solution Strategy for Chemically-Reacting Hypersonic Flows // *AIAA Paper*. 1995. № 95-0158.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ОПИСАНИЕ ОБЩЕГО АЛГОРИТМА И ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Программный комплекс предназначен для расчета двумерных квазистационарных задач вязкой теплогазодинамики и многомерных нестационарных температурных полей в составных анизотропных затупленных телах с учетом сопряжения теплогазодинамических характеристик на границе «газ – твердое тело» (границе сопряжения) с определением параметра сопряжения в виде распределения по границе температуры. Программный комплекс SOPRZ составлен на языке C++ по следующему алгоритму:

1. Задаются входные параметры:

1.1. Размеры расчетной области, радиус затупления R_0 , угол конусности θ_0 , длина боковой поверхности L , толщина несущей конструкции l_2 , толщина наружного теплозащитного слоя l_3 .

1.2. Параметры набегающего потока : a_n - скорость звука, M_n – число Маха набегающего потока, p_n – давление, T_n – температура, ρ_n – плотность, c_p – теплоемкость, λ_n – теплопроводность, μ_n – вязкость.

1.3. Теплофизические характеристики анизотропных материалов несущей конструкции $\lambda_\xi^I(T), \lambda_\eta^I(T), c\rho^I(T)$, и наружного слоя тепловой защиты $\lambda_\xi^{II}(T), \lambda_\eta^{II}(T), c\rho^{II}(T)$, φ^I и φ^{II} – углы наклона главных осей тензоров теплопроводности, T_0 – начальная температура.

2. Рассчитывается геометрия отхода ударной волны в соответствии с (1.1.31) и рассчитываются газодинамические и теплофизические характеристики за ударной волной по формулам (1.1.20)-(1.1.31).

3. Формируется согласования расчетная сетка в соответствии с (3.3.1) и (3.4.16).

4. На расчетной сетке задаются начальные значения массивов для соответствующих теплогазодинамических характеристик.

5. На первом временном полуслое $k + \frac{1}{2}$:

5.1. Рассчитываются газодинамические и теплофизические характеристики на линии полного торможения в соответствии с формулами раздела 2.2.1.

5.2. Рассчитывается продольная составляющая вектора скорости $u(x, y)$ вдоль поперечного направления, решая уравнение сохранения импульса (3.3.2) методом прогонки.

5.3. Рассчитывается поперечная составляющая вектора скорости $v(x, y)$ вдоль поперечного направления, решая уравнение неразрывности: (3.3.3) при известном распределении $u(x, y)$.

5.3. Рассчитывается концентрация атомарного компонента $c_A(x, y)$ вдоль поперечного направления, решая уравнение диффузии (3.3.4) методом прогонки.

5.4. Рассчитываются сквозные прогоночные коэффициенты при решении СЛАУ для уравнений энергии (3.3.5) в газе и анизотропном теле (3.4.17).

5.5. Определяется температура границы сопряжения по формуле (3.5.18) и температура во всех расчетных областях, осуществляя обратный ход метода прогонки.

5.6. Рассчитывается плотность газа вдоль поперечного направления из решения уравнения состояния (3.3.6).

6. На втором временном полуслое $k + 1$:

6.1. Рассчитывается продольная составляющая вектора скорости $u(x, y)$ вдоль продольного направления из решения уравнения сохранения импульса (3.3.7) методом прогонки.

6.2. Рассчитывается поперечная составляющая вектора скорости $v(x, y)$ вдоль продольного направления из решения уравнения неразрывности (3.3.8) при известном распределении $u(x, y)$.

6.3. Рассчитывается концентрация атомарного компонента $c_A(x, y)$ вдоль продольного направления из решения уравнения диффузии (3.3.9) методом прогонки.

6.4. Определяется распределение температур $T(x, y)$ вдоль продольного направления в газе из решения СЛАУ для уравнения энергии (3.3.10) и в теле $T(x, y, t)$ из решения СЛАУ для уравнения (3.4.18).

6.5. Рассчитывается плотность газа $\rho(x, y)$ вдоль продольного направления из решения уравнения состояния (3.3.11).

7. Пункты 5 и 6 повторяются для каждого временного слоя.

Описание программного комплекса

Программный комплекс, укрепленная блок-схема которого приведена на рисунке П1.1, состоит из следующих основных функций:

1. По расчету теплогазодинамических характеристик на ударной волне и в окрестности критической точки.

2. По расчету теплогазодинамических характеристик на линии полного торможения и в окрестности критической точки.

3. По расчету газодинамических характеристик (давление, плотность, атомарная концентрация, продольные и поперечные компоненты вектора скорости) вдоль поперечного направления.

3. По расчету температуры вдоль поперечного направления в газе и теле с учетом сопряженного теплообмена.

4. По расчету газодинамических характеристик (давление, плотность, атомарная концентрация, продольные и поперечные компоненты вектора скорости) вдоль продольного направления.

5. По расчету температуры вдоль продольного направления в газе и теле с учетом сопряженного теплообмена.

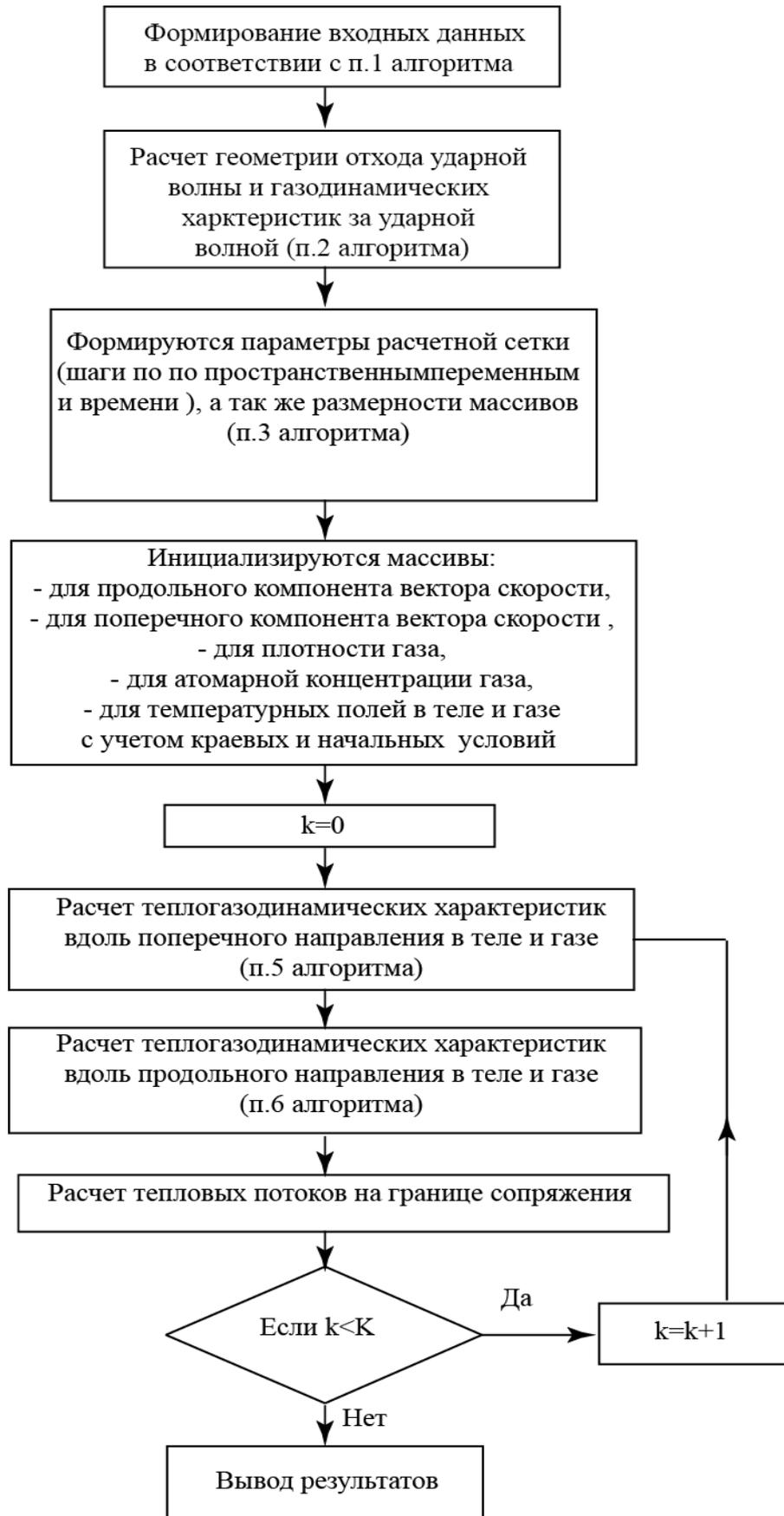


Рис. П1.1. Укрупненная блок-схема программного комплекса SOPRZ.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ОПИСАНИЕ ОБЩЕГО АЛГОРИТМА И ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ

Общий алгоритм численного решения обратной задачи анизотропной теплопроводности по восстановлению компонентов тензора теплопроводности, зависящих от температуры (нелинейных коэффициентов), с добавлением к функционалу квадратичной невязки регуляризирующего функционала содержит следующие пункты:

1. Задаются входные параметры:

1.1. Размеры расчетной области l_1, l_2 [м], начальное T_{\min} и граничное T_{\max} значение температур [K], число конечных элементов M по температуре, объемная теплоемкость исследуемого материала $c\rho$ [Дж/м³К].

1.2. Координаты точек $(x, y)_i$ [м] и моменты времени t^k [с], в которых проводятся замеры температуры $\tilde{T}_{i,k}$ [K].

1.3. Если экспериментальные значения $\tilde{T}_{i,k}$ в точках $((x, y)_i, t^k)$ определяются из численного эксперимента, то решается задача (5.1.1)–(5.1.3) по приемлемым значениям $\lambda_{11}(T), \lambda_{12}(T), \lambda_{22}(T)$, которые и считаются искомыми. При этом расчетные значения $T_{i,k}(\lambda)$, входящие в функционал (5.1.33), определяются по произвольным значениям $\bar{\lambda}_{11}(T), \bar{\lambda}_{12}(T), \bar{\lambda}_{22}(T)$, которые в несколько раз могут отличаться от искомых. Значения $\tilde{T}_{i,k}$ и $T_{i,k}(\lambda)$ подставляются в функционал (5.1.33).

1.4. Формируются линейно-непрерывные базисные функции $N_m(T)$, $m = \overline{0, M}$ на конечных элементах по температуре ΔT_m .

1.5. Задается начальное приближение вектора

$$\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = (\lambda_{11}^0, \dots, \lambda_{11}^M, \lambda_{22}^0, \dots, \lambda_{22}^M, \lambda_{12}^0, \dots, \lambda_{12}^M)^T.$$

1.6. Формируется матрица регуляризирующего оператора B (5.1.36) и задается параметр регуляризации a .

1.7. Инициализируется начальное значение итерационного параметра цикла $n = 0$, и параметрического шага $\alpha^0 = 1$.

2. Решается задача (5.1.1)–(5.1.3) с использованием вектора $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}$, в результате чего определяется вектор значений температур $T_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}^{(0)})$.

3. Вычисляется значение функционала $S_a(\boldsymbol{\lambda}^{(0)})$ с учетом регуляризирующего функционала.

4. Численно решаются $3(M + 1)$ независимые сопряженные задачи по

определению

$$u_{i,k}^m(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) = \frac{\partial T((x, y)_i, t^k, \boldsymbol{\lambda}^{(n)})}{\partial \lambda_{11}^m}; \quad v_{i,k}^m(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) = \frac{\partial T((x, y)_i, t^k, \boldsymbol{\lambda}^{(n)})}{\partial \lambda_{12}^m};$$

$$w_{i,k}^m(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) = \frac{\partial T((x, y)_i, t^k, \boldsymbol{\lambda}^{(n)})}{\partial \lambda_{22}^m}. \quad \text{Эти задачи могут решаться с помощью}$$

параллельных вычислений, с использованием M процессоров.

5. Формируется прямоугольная матрица чувствительности $Z^{(n)}$ с размерами $(I \cdot K) \times (3 \cdot (M + 1))$.

6. Определяются векторы $\Delta \boldsymbol{\lambda}^{(n)}$ по формуле (5.1.39) и $\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)} = \boldsymbol{\lambda}^{(n)} + \Delta \boldsymbol{\lambda}^{(n)}$.

7. Решается задача (5.1.1)–(5.1.3) с использованием вектора $\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)}$ для определения вектора значений температур $T_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)})$ на $(n+1)$ -й итерации.

8. Вычисляется значение функционала $S_a(\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)})$.

9. Если $S_a(\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)}) > S_a(\boldsymbol{\lambda}^{(n)})$, то $\alpha^{(n+1)} = \alpha^{(n)} \cdot 0.1$, после чего осуществляется переход к п.4 алгоритма, в противном случае происходит переход к следующему п.10.

10. Если $\left|S(\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)}) - S(\boldsymbol{\lambda}^{(n)})\right| > \varepsilon$, то $\alpha^{(n+1)} = \alpha^{(n)} \cdot 1.2$, $n = n + 1$ и

осуществляется переход к п.4, в противном случае происходит переход к п. 11.

11. Считается, что вектор искомых параметров $\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)}$, входящих в линейные комбинации определены и, в соответствии с (5.1.6)–(5.1.8), определены нелинейные компоненты тензора теплопроводности анизотропного материала в соответствии с итерационным процессом (5.1.10).

В соответствии с изложенным алгоритмом разработан программный комплекс OZATK на языке C++, укрупненная блок-схема которого представлена на рис. П2.1. Программный комплекс позволяет определять функциональные зависимости от температуры компонентов тензора теплопроводности $\lambda_{11}(T), \lambda_{12}(T), \lambda_{22}(T)$ по экспериментальным значениям температур и другим теплофизическим характеристикам материала.

Программный комплекс состоит из следующих основных функциональных блоков:

1. Блок расчета температурного поля внутри пластины по заданным теплофизическим характеристикам материала, который возвращает вектор $T_{i,k}$. Температурное поле рассчитывается с помощью метода расщепления с экстраполяцией по времени (МРЭВ). С помощью этого блока моделируются так же вектор экспериментальных значений температур $\tilde{T}_{i,k}$ в случае вычислительного эксперимента.

2. Блок решения сопряженных задач по заданным значениям вектора $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_{11}^0, \dots, \lambda_{11}^M; \lambda_{22}^0, \dots, \lambda_{22}^M; \lambda_{12}^0, \dots, \lambda_{12}^M)^T$, которая возвращает вектора $\mathbf{u}^m, \mathbf{v}^m, \mathbf{w}^m$ $m = \overline{0..M}$, для формирования матрицы (5.1.16). Так как каждый из m векторов $\mathbf{u}^m, \mathbf{v}^m, \mathbf{w}^m$ вычисляется независимо, данный блок может вызываться в параллельном режиме, задействовав M независимых процессоров, что существенно позволяет ускорить расчет матрицы (5.1.16) – наиболее ресурсозатратного пункта описанного алгоритма.

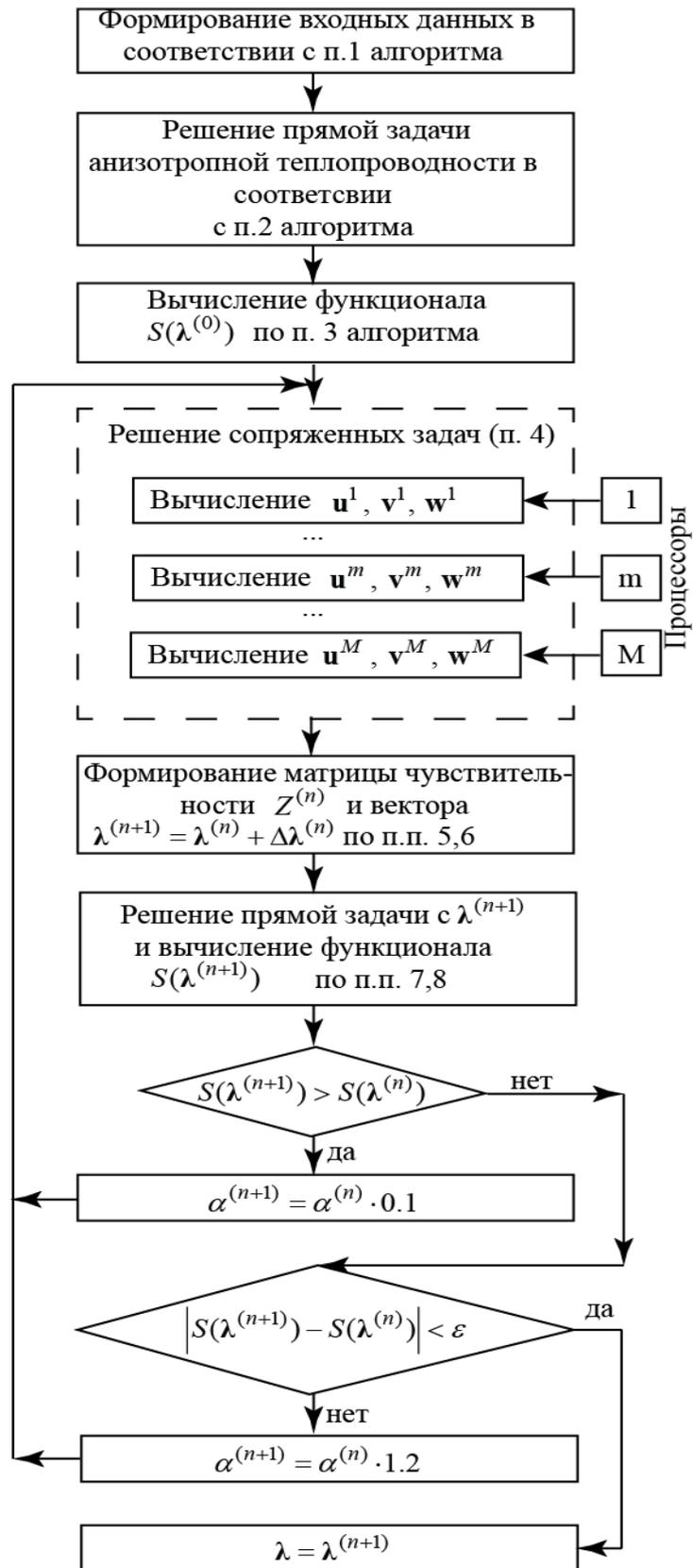


Рис. П2.1. Укрупненная блок-схема программного комплекса по восстановлению нелинейных компонентов тензора теплопроводности с введением регуляризирующего функционала.