

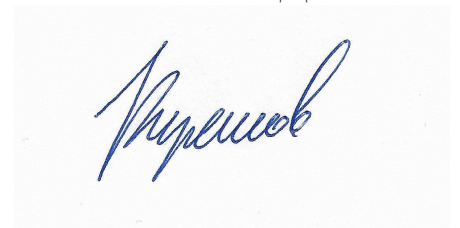
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Кафедра теоретической механики и мехатроники

На правах рукописи

УДК 531.36



Кулешов Александр Сергеевич

Точные решения некоторых задач динамики твердого тела

Специальность 1.1.7. – Теоретическая механика, динамика машин

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Москва — 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	6
Глава 1. Описание алгоритма Ковачича и его теоретические основы....	30
1. Постановка задачи	30
2. Некоторые вспомогательные утверждения	33
2.1. Четыре случая	33
2.2. Необходимые условия	41
2.3. Пример применения необходимых условий	48
3. Алгоритм Ковачича и его обоснование	49
3.1. Алгоритм Ковачича для Случая 1	49
3.2. Обоснование алгоритма Ковачича для Случая 1	53
3.3. Пример нахождения лиувиллева решения в Случае 1	61
3.4. Алгоритм Ковачича для Случая 2	63
3.5. Обоснование алгоритма Ковачича для Случая 2	66
3.6. Пример нахождения лиувиллева решения в Случае 2	72
3.7. Алгоритм Ковачича для Случая 3	75
3.8. Некоторые ключевые факты, используемые для обоснования алгоритма Ковачича в Случае 3	78
3.9. Пример нахождения лиувиллева решения в Случае 3	85
Глава 2. Задача о качении без проскальзывания тяжелого тела вращения по горизонтальной плоскости.	91
4. Введение	91
5. Постановка задачи	93
5.1. Основные системы координат	93

5.2. Уравнения движения	100
6. Обобщение результатов Х.М. Муштари.....	104
6.1. Условие Х.М. Муштари.....	104
6.2. Первые интегралы уравнений движения тела в случае Х.М. Муштари	107
6.3. Определение формы поверхности тела	109
7. Движение круглого диска.....	118
7.1. Уравнения движения. Интегрируемость уравнений движения в гипергеометрических функциях.....	118
7.2. Применение алгоритма Ковачича к задаче о движении круглого диска	120
8. Движение диска со смещенным центром масс	125
9. Движение тора.....	131
9.1. Постановка задачи. Уравнения движения. Общий случай и частные случаи	131
9.2. Исследование общего случая	136
10. Движение параболоида вращения	143
10.1. Постановка задачи и уравнения движения.....	143
10.2. Существование лиувиллевых решений	146
11. Движение веретенообразного тела.....	154
11.1. Постановка задачи. Уравнения движения. Общий случай и частные случаи	154
11.2. Исследование общего случая	159
12. Движение эллипсоида вращения.....	165
12.1. Постановка задачи о движении эллипсоида вращения. Общий случай и частные случаи.....	165

12.2. Случай существования лиувиллевых решений	182
Глава 3. Задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в интегрируемом случае Гесса	192
13. Постановка задачи. Случай Гесса	192
14. Уравнения Эйлера – Пуассона в специальных осях координат .	197
15. Уравнения движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса, записанные в специальной системе координат .	201
16. Обезразмеривание уравнений. Приведение к одному уравнению второго порядка	205
17. Применение алгоритма Ковачича. Общий случай	211
18. Исследование случая Лагранжа	215
19. Существование лиувиллевых решений в общем случае	220
20. Существование лиувиллевых решений при нулевой постоянной ин- теграла площадей	226
21. Описание особых случаев	230
22. Критический случай кратных корней	232
23. Критический случай совпадающих действительных корней	243
24. Особенный случай совпадающих действительных корней мно- гочленов	249
25. Критический случай совпадающих комплексных корней	253
26. Приложение. Движения твердого тела в случае Лагранжа при нулевой постоянной интеграла площадей	197
Глава 4. Задача о движении тяжелого однородного шара по абсолютно шероховатой поверхности вращения	257
27. Введение	257

28. Постановка задачи о качении тяжелого однородного шара по абсолютно шероховатой поверхности вращения	258
28.1. Общая постановка задачи о качении шара по абсолютно шероховатой поверхности вращения	258
28.2. Качение шара по параболоиду вращения	273
28.3. Качение шара по невырожденной поверхности второго порядка	280
28.4. Качение шара по циклоидальной поверхности	283
28.5. Качение шара по абсолютно шероховатому тору	289
28.6. Качение шара по поверхности псевдосферы	297
28.7. Качение шара по поверхности катеноида	302
Глава 5. Задача о качении тела вращения по поверхности сферы	308
29. Введение	308
30. Постановка задачи	309
31. Угловая скорость катящегося тела	313
32. Уравнения движения	317
33. Движение тела вращения	321
34. Движение динамически симметричного шара	323
Заключение	330
Список литературы	332

Введение

Общая характеристика работы. Цель работы состоит в решении в лиувиллевых функциях ряда задач классической механики, решение которых приводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка. Это задача о качении тяжелого тела вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости и сфере, задача о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения, а также задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в частном случае интегрируемости, известном как случай Гесса. Выписываются условия на параметры задач, при которых возможно явное интегрирование дифференциальных уравнений движения.

Актуальность. В механике никогда не ослабевал интерес к интегрируемым задачам. Нахождение новых интегрируемых случаев дифференциальных уравнений движения различных механических систем, а также нахождение решений в квадратурах для этих случаев — одна из главных задач теоретической механики. Проблема точного интегрирования дифференциальных уравнений движения имеет несколько аспектов. Геометрический аспект связан с качественным исследованием регулярного поведения траекторий интегрируемых систем. Примером служит известная геометрическая теорема Лиувилля о расслоении фазового пространства вполне интегрируемой гамильтоновой системы на инвариантные торы с условно — периодическими движениями. Конструктивный аспект связан с отысканием условий, при которых можно указать алгоритм явного решения дифференциальных уравнений при помощи квадратур. В качестве примеров здесь можно указать теорему Эйлера — Якоби об интегрируемости системы n уравнений, допускающих $n - 2$ независимых первых интегралов и инвариантную меру, и теорему Ли о системах с разрешимой группой симметрий. Эти алгоритмы дают принципиальную возможность отыскания полного решения системы дифференциальных уравнений движения, од-

нако их реализация упирается в довольно сложные проблемы (например, в явное решение систем алгебраических уравнений). В связи с этим возникает ещё один важный аспект рассматриваемого круга вопросов — явное решение систем дифференциальных уравнений. Для определённых классов дифференциальных уравнений, опираясь на их специфическую структуру, можно использовать специальные методы. Примером здесь служит широкий и важный, с точки зрения приложений, класс линейных дифференциальных уравнений. Исследование многих задач механики и математической физики сводится к решению линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Если при помощи замены независимой переменной удастся привести соответствующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка к уравнению с коэффициентами, имеющими вид рациональных функций независимой переменной, то для такого уравнения необходимые и достаточные условия разрешимости в лиувиллевых функциях определяются с помощью так называемого алгоритма Ковачича. В 1986 году американский математик Дж. Ковачич представил алгоритм [105], позволяющий найти лиувиллевы решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. Если у дифференциального уравнения нет лиувиллевых решений, то алгоритм также позволяет установить этот факт.

Научная новизна и основные результаты. Все включенные в диссертацию результаты являются новыми. В работах соискателя с соавторами (которые в основном являются учениками соискателя) исследован вопрос о существовании лиувиллевых решений в задаче о качении тела вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости и абсолютно шероховатой сфере. Исследован вопрос о существовании лиувиллевых решений в задаче о качении тяжелого однородного шара по неподвижной абсолютно шероховатой поверхности вращения. Также исследован вопрос о существовании лиувил-

левых решений в интегрируемом случае Гесса задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.

Теоретическая и практическая значимость. Проведенные исследования позволили получить условия, при выполнении которых некоторые задачи динамики твердого тела интегрируются в явном виде. Диссертация носит теоретический характер. Результаты диссертации могут применяться при проведении исследований в МГУ им. М. В. Ломоносова, Санкт – Петербургском государственном университете, Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете), Институте проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН и научно – исследовательских центрах, занимающихся исследованием классических задач динамики твердого тела.

Методология и методы. Результаты проведенного исследования обоснованы методами теоретической механики и качественными методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений, а также методами высшей алгебры и комплексного анализа. В первой главе диссертации для описания и обоснования алгоритма Ковачича используются методы высшей алгебры и комплексного анализа. Во второй главе применяется теория механических систем с неголономными связями и качественная теория дифференциальных уравнений. Указанные теории и методики используются и в других главах диссертации, с третьей по пятую.

Положения, выносимые на защиту.

1. Найдены в явном виде два дополнительных к интегралу энергии первых интеграла в задаче о движении тяжелого тела вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости в случае, когда поверхность тела удовлетворяет условию Х. М. Муштари. Получен общий вид поверхности, ограничивающей катящееся твердое тело, для которого справедливо условие Х. М. Муштари.

2. Полностью исследован вопрос о существовании лиувиллевых решений в задаче о качении тяжелого тела вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости в случаях, когда катящееся тело представляет собой круглый диск, диск со смещенным центром масс, динамически симметричный тор, динамически симметричный параболоид вращения, динамически симметричный эллипсоид вращения, а также веретенообразное тело. Доказано, что задачи о качении круглого диска, диска со смещенным центром масс и динамически симметричного тора не интегрируются в лиувиллевых функциях. Напротив, задача о качении тяжелого динамически симметричного параболоида, центр масс которого расположен в фокусе образующей параболы, интегрируется в лиувиллевых функциях при любых значениях параметров задачи. В задаче о качении динамически симметричного эллипсоида получены условия на параметры задачи, при которых данная задача интегрируется в лиувиллевых функциях.
3. Полностью исследован вопрос о существовании лиувиллевых решений в случае Гесса задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Доказано, что задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса интегрируется в лиувиллевых функциях только в двух случаях: если распределение масс в твердом теле соответствует случаю Лагранжа, или если постоянная интеграла площадей равна нулю.
4. Доказано, что задачи о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения второго порядка, а также по циклоидальной поверхности и по поверхности Бельтрами могут быть проинтегрированы в лиувиллевых функциях. Установлено, что в случае качения шара по тору решение задачи выражается с помощью функций Хейна (Гойна), а в случае качения шара по катеноиду решение задачи выражается в функциях Лежандра.

5. Полностью исследован вопрос о существовании лиувиллевых решений в задаче о качении без проскальзывания тела вращения по поверхности сферы, в случае, когда катящееся тело представляет собой неоднородный динамически симметричный шар. Доказано, что данная задача может быть проинтегрирована в лиувиллевых функциях.

Достоверность и обоснованность. Все положения, выносимые на защиту, обоснованы при помощи строгих математических методов. Все вычисления, проведенные в работе, проходили повторную проверку с помощью комплекса символьных вычислений MAPLE 7.

Апробация. Результаты работы прошли апробацию на ряде международных и российских конференций.

1. Международная конференция «Классические задачи динамики твердого тела», посвященная 80-летию со дня рождения П.В. Харламова. Донецк, Украина, 23 – 25 июня 2004 года.
2. IUTAM Symposium on Multiscale Problems in Multibody System Contacts. Stuttgart, Germany, February 20 – February 23, 2006.
3. Международная конференция «Моделирование, управление и устойчивость» (MCS - 2012), Крым, Севастополь, Украина, 10 – 14 сентября 2012 года.
4. XVI Международная конференция «Dynamical System Modelling and Stability Investigation» (DSMSI – 2013), Киев, Украина, 29 – 31 мая 2013 года.
5. XLI Международная летняя школа – конференция «Advanced Problems in Mechanics» (APM – 2013), Репино, Санкт – Петербург, Россия, 1 – 6 июня 2013 года.

6. XLII Международная летняя школа – конференция «Advanced Problems in Mechanics» (APM – 2014), Репино, Санкт – Петербург, Россия, 30 июня – 5 июля 2014 года.
7. 8th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC – 2014), Vienna, Austria, July 6 – July 11, 2014.
8. Международная научная конференция по механике «VII Поляховские чтения», Санкт – Петербург, Россия, 2 – 6 февраля 2015 года.
9. IUTAM – 2015 Symposium on Analytical Methods in Nonlinear Dynamics. Frankfurt, Germany, July 6 – July 9, 2015.
10. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, Россия, 20 – 24 августа 2015 года.
11. X Всероссийская научная конференция «Нелинейные колебания механических систем», Нижний Новгород, Россия, 26 – 29 сентября 2016 года.
12. Научная конференция «Ломоносовские чтения – 2017», Москва, Россия, 17 – 26 апреля 2017 года.
13. XI Международная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление», Казань, Россия, 13 – 17 июня 2017 года.
14. Международная научная конференция по механике «VIII Поляховские чтения», Санкт – Петербург, Россия, 30 января – 2 февраля 2018 года.
15. Научная конференция «Ломоносовские чтения – 2018», Москва, Россия, 16 – 25 апреля 2018 года.
16. XIV Международная научная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления», Москва, Россия, 30 мая – 1 июня 2018 года.

17. Международная научная конференция «Динамические системы в науке и технологиях» (DSST – 2018), Крым, Алушта, Россия, 17 – 21 сентября 2018 года.
18. XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Уфа, Россия, 19 – 24 августа, 2019 года.
19. XV Международная научная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления», Москва, Россия, 3 – 5 июня 2020 года.
20. XX Международная конференция «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии», Нижний Новгород, Россия, 23 – 27 ноября 2020 года.
21. Научная конференция «Ломоносовские чтения – 2020», Москва, Россия, 21 – 30 октября 2020 года.
22. Международная научная конференция по механике «IX Поляховские чтения», Санкт – Петербург, Россия, 9 – 12 марта 2021 года.
23. Международная научная конференция «Regular and Chaotic Dynamics: in memory of Alexey V. Borisov», Москва, Россия, 22 ноября – 3 декабря 2021 года.
24. XXIII Международная конференция «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии», Нижний Новгород, Россия, 13 – 26 ноября 2023 года.
25. 22-я Международная конференция «Авиация и космонавтика», Москва, Россия, 20 - 24 ноября 2023 года.
26. XIV Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ - 2024). Москва, Россия, 17 - 20 июня 2024 года.

27. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль, Россия, 28 июня - 3 июля 2024 года.
28. Международная научная конференция по механике «X Поляховские чтения», Санкт – Петербург, Россия, 23 – 26 сентября 2024 года.

Результаты диссертации также были представлены соискателем на следующих научных семинарах.

1. Семинар по аналитической механике и теории устойчивости имени В. В. Румянцева под руководством профессора А. А. Зобовой, профессора Е. И. Кугушева (механико – математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова).
2. Семинар «Гамильтоновы системы и статистическая механика» под руководством академика РАН В. В. Козлова, академика РАН Д. В. Трещева и члена – корреспондента РАН С. В. Болотина (механико – математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова).
3. Семинар секции теоретической механики имени профессора Н. Н. Поляхова Санкт – Петербургского Дома ученых РАН (под руководством профессора А. А. Тихонова).
4. Научный семинар «Дифференциальная геометрия и приложения» под руководством академика РАН А. Т. Фоменко (механико – математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова).
5. Научный семинар «Динамические системы и механика» под руководством профессора П. С. Красильникова, профессора Б. С. Бардина (Московский авиационный институт (технический университет)).
6. Семинар по теории управления и динамике систем под руководством академика РАН Ф. Л. Черноушко (Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН).

7. Научный семинар «Механика систем» имени академика РАН А.Ю. Ишлинского под руководством академика РАН В.Ф. Журавлева, академика РАН Д.М. Климова (Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН).

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации изложены в 44 печатных работах.

Монография:

1. Бардин Б.С., Кулешов А.С. Алгоритм Ковачича и его применение в задачах классической механики. М.: Издательство МАИ. 2020. 260 с.

Статьи в журналах.

2. Kuleshov A.S. On the Generalized Chaplygin Integral // Regular and Chaotic Dynamics. 2001. Vol. 6. № 2. P. 227–232.
3. Karapetyan A.V., Kuleshov A.S. Steady motions of nonholonomic systems // Regular and Chaotic Dynamics. 2002. Vol. 7. № 1. P. 81–117.
4. Кулешов А.С. О первых интегралах уравнений движения тяжелого тела вращения на абсолютно шероховатой плоскости // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2002. № 68. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша. 19 с.
5. Кулешов А.С. О первых интегралах уравнений симметричного гиростата на абсолютно шероховатой плоскости // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2003. № 47. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша. 20 с.
6. Кулешов А.С. Первые интегралы в задаче о качении тела вращения по шероховатой плоскости // Доклады РАН. 2003. Т. 391. № 3. С. 340–342. Перевод: Kuleshov A.S. First Integrals in the Problem of Rolling a Body of Revolution Over a Rough Plane // Doklady Physics. 2003. Vol. 48. № 7. P. 385–387.

7. Кулешов А.С. Первые интегралы в задаче о движении параболоида вращения по шероховатой плоскости // Доклады РАН. 2005. Т. 400. № 1. С. 46–48. Перевод: Kuleshov A.S. First Integrals in the Problem of the Motion of a Paraboloid of Revolution over a Rough Plane // Doklady Physics. 2005. Vol. 50. № 1. P. 37–39.
8. Кулешов А.С. О первых интегралах уравнений движения симметричного гиростата на абсолютно шероховатой плоскости // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. № 1. С. 40–45. Перевод: Kuleshov A.S. First Integrals of the Equations of Motion of a Symmetric Gyrostat on a Perfectly Rough Plane // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2006. Vol. 70. № 1. P. 36–41.
9. Dobrynin D.S., Kuleshov A.S. Solvable Cases in the Problem of Motion of a Heavy Rotationally Symmetric Ellipsoid on a Perfectly Rough Plane // Procedia IUTAM. 2016. Vol. 19. P. 161–168.
10. Кулешов А.С., Ифраимов С.В. О движении стержня по выпуклой поверхности // Вестник Санкт – Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2013. № 2. С. 105–110.
11. Ифраимов С.В., Кулешов А.С. О движении саней Чаплыгина по выпуклой поверхности // Автоматика и телемеханика. 2013. № 8. С. 80–90. Перевод: Ibraimov S.V., Kuleshov A.S. On the Motion of Chaplygin's Sledge over Convex Surface // Automation and Remote Control. 2013. Vol. 74. № 8. P. 1297–1306.
12. Кулешов А.С., Черняков Г.А. Применение алгоритма Ковачича для исследования задачи о движении тяжелого тела вращения по абсолютно шероховатой плоскости // Вестник Санкт – Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2013. № 4. С. 93–102.

13. Кулешов А.С., Черняков Г.А. О качении параболоида вращения по неподвижной абсолютно шероховатой плоскости // Вестник Санкт – Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2014. Т. 59. № 4. С. 624–631.
14. Кулешов А.С., Зуева Д.С. К задаче о движении тела вращения по сфере // Динамические системы. 2018. Т. 8. № 1. С. 23–30.
15. Кулешов А.С., Ицкович М.О. Несуществование лиувиллевых решений в задаче о движении эллипсоида вращения по абсолютно шероховатой плоскости // Вестник Санкт – Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 62. № 2. С. 291–299. Перевод: Kuleshov A.S., Itskovich M.O. Nonexistence of Liouvillian Solutions in the Problem of Motion of a Rotationally Symmetric Ellipsoid on a Perfectly Rough Plane // Vestnik. St. Petersburg University. 2017. Vol. 50. № 2. P. 173–179.
16. Karapetyan A.V., Kuleshov A.S. The Routh theorem for mechanical systems with unknown first integrals // Theoretical and Applied Mechanics. 2017. Vol. 44. № 2. P. 169–180.
17. Kuleshov A.S., Katasonova V.A. Existence of Liouvillian Solutions in the Problem of Motion of a Rotationally Symmetric Body on a Sphere // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. № 030015. P. 030015-1–030015-5.
18. Кулешов А.С., Катасонова В.А. О существовании лиувиллевых решений в задаче о качении динамически симметричного шара по сфере // Вестник Санкт – Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. Т. 63. № 4. С. 670–677. Перевод: Kuleshov A.S., Katasonova V.A. Existence of Liouvillian Solutions in the Problem of Rolling Motion of a Dynamically Symmetric Ball on a Perfectly Rough Sphere // Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. 2018. Vol. 51. № 4. P. 407–412.

19. Кулешов А.С., Черняков Г.А. Исследование задачи о движении тяжелого тела вращения по абсолютно шероховатой плоскости с помощью алгоритма Ковачича // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. 2018. Т. 145. С. 3–85. Перевод: Kuleshov A.S., Chernyakov G.A. Investigation of the Motion of a Heavy Body of Revolution on a Perfectly Rough Plane by the Kovacic Algorithm // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 245. № 4. P. 417–497.
20. Бардин Б.С., Кулешов А.С. Применение алгоритма Ковачича для исследования случая Гесса в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // Динамические системы. 2020. Т. 10. № 2. С. 197–204.
21. Кулешов А.С., Соломина Д.В. Применение алгоритма Ковачича для исследования задачи о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения // Проблемы информатики. 2021. № 1. С. 15–24.
22. Кулешов А.С., Соломина Д.В. Лиувиллевы решения в задаче о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения // Вестник Санкт – Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8. № 4. С. 653–660. Перевод: Kuleshov A.S., Solomina D.V. Liouvillian Solutions in the Problem of Rolling of a Heavy Homogeneous Ball on a Surface of Revolution // Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. 2021. Vol. 54. № 4. P. 405–410.
23. Bardin B.S., Kuleshov A.S. Application of the Kovacic algorithm for the investigation of motion of a heavy rigid body with a fixed point in the Hess case // ZAMM. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2022. Vol 102. № 11.
24. Кулешов А.С., Шишков А.А. Об интегрируемости в квадратурах задачи о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения второго

порядка // Вестник Санкт – Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11. № 2. С. 347–353. Перевод: Kuleshov A.S., Shishkov A.A. On the Integrability in Quadratures of the Problem of Rolling a Heavy Homogeneous Ball on a Surface of Revolution of the Second Order // Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. 2024. Vol. 57. № 2. P. 236–240.

25. Кулешов А.С. О приведении некоторых систем классической механики к системам Лиувилля // Труды МАИ. 2023. № 128. <https://trudymai.ru/published.php?ID=171383>
26. Кулешов А.С. Применение алгоритма Ковачича для исследования движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. 2021. Т. 202. С. 10–42.
27. Кулешов А.С., Лобанова Е.В. Анализ интегрируемого случая Гесса в задаче о движении шара по гладкой горизонтальной плоскости // Труды МАИ. 2024. № 135. <https://trudymai.ru/published.php?ID=179675>
28. Косенко И.И., Кулешов А.С., Шишков А.А. Задача о качении шара по поверхности вращения и её численный анализ // Труды МАИ. 2024. № 136. <https://trudymai.ru/published.php?ID=180666>

Статьи в сборниках трудов.

29. Kuleshov A.S. On the first integrals of equations of motions of a heavy rotational symmetric body on a perfectly rough plane // Proceedings of the XXXI Summer School – Conference «Advanced Problems in Mechanics». St. Petersburg Polytechnical University Publishing. 2003. P. 213–220.
30. Кулешов А.С. О первых интегралах уравнений движения тяжелого тела вращения на шероховатой плоскости // Механика твердого тела. Меж-

ведомственный сборник научных трудов. 2004. Т. 34. С. 72–79.

31. Kuleshov A.S. First Integrals of Equations of Motion of a Heavy Rotational Symmetric Body on a Perfectly Rough Plane // Proceedings of the IUTAM Symposium on Multiscale Problems in Multibody System Contacts. Stuttgart, Germany, February 20–23, 2006. Springer. P. 103–110.
32. Chernyakov G.A., Kuleshov A.S. Investigation of the problem of motion of a heavy dynamically symmetric body on a perfectly rough plane by the Kovacic algorithm // Proceedings of the XLI Summer School–Conference «Advanced Problems in Mechanics». St. Petersburg Polytechnical University Publishing. 2013. P. 310–320.
33. Chernyakov G.A., Kuleshov A.S. Motion of a Rotationally Symmetric Paraboloid on a Perfectly Rough Plane // Proceedings of the XLII Summer School – Conference «Advanced Problems in Mechanics». St. Petersburg Polytechnical University Publishing. 2014. P. 177–183.
34. Chernyakov G.A., Kuleshov A.S. Investigation of the Problem of Motion of a Heavy Dynamically Symmetric Body on a Perfectly Rough Plane by the Kovacic algorithm // Proceedings of the 8th European Nonlinear Dynamics Conference ENOC – 2014. Vienna: Institute of Mechanics and Mechatronics. Vienna University of Technology. 2014. P. 453–458.
35. Кулешов А.С., Добрынин Д.С., Черняков Г.А. Исследование задачи о движении тяжелого тела вращения по шероховатой плоскости методом Ковачича // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов (Казань, 20 – 24 августа 2015 года). Казань: Изд-во Казанского университета. 2015. С. 2160–2161.
36. Ицкович М.О., Кулешов А.С. Лиувиллевы решения в задаче о качении эллипсоида вращения по абсолютно шероховатой плоскости // Аналити-

- ческая механика, устойчивость и управление. Труды XI Международной Четаевской конференции. Казань, 13 – 17 июня 2017 года. Казань: КНИТУ – КАИ. 2017. Т. 1. С. 214 – 224.
37. Кулешов А.С., Катасонова В.А. О существовании лиувиллевых решений в задаче о качении тела вращения по сфере // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4-х томах. Т. 1. Общая и прикладная механика. Уфа: РИЦ БашГУ. 2019. С. 110–111.
 38. Kuleshov A.S., Dobrynin D.S. Motion of a Rotationally Symmetric Ellipsoid on a Fixed Perfectly Rough Horizontal Plane // Proceeding of the IEEE International Conference on Mechanics «Seventh Polyakhov's Reading». IEEE. 2015. P. 1–4.
 39. Kuleshov A.S., Katasonova V.A. Liouvillian Solutions in the Problem of Motion of a Dynamically Symmetric Body on a Sphere // IEEE Proceeding of 2018 14th International Conference «Stability and Oscillations of Nonlinear Control System» (Pyatnitskiy's Conference). IEEE. 2018. P. 1–3.
 40. Kuleshov A.S. Application of the Kovacic algorithm to the Problem of Motion of a Heavy Rigid Body with a Fixed Point in a Hess Case // IEEE Proceeding of 2020 15th International Conference «Stability and Oscillations of Nonlinear Control System» (Pyatnitskiy's Conference). IEEE. 2020. P. 1–2.
 41. Кулешов А.С., Соломина Д.В. Применение алгоритма Ковачича для исследования задачи о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. Труды XX Международной конференции, Нижний Новгород, 23 – 27 ноября 2020 года. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ. 2020. С. 228–233.

42. Кулешов А.С. Лиувиллевы решения в задаче о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения // IX Поляховские чтения: Материалы международной научной конференции по механике, 9 – 12 марта 2021 года. Санкт – Петербург: Изд-во ВВМ. 2021. С. 112–113.
43. Kuleshov A.S., Solomina D.V. Application of the Kovacic algorithm to the Problem of Rolling of a Heavy Homogeneous Ball on a Surface of Revolution // MMST 2020. Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. Communications in Computer and Information Sciences. 2021. Vol. 1413. P. 169–177.
44. Кулешов А.С., Шишков А.А. О качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения второго порядка и по тору // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. Труды XXIII Международной конференции, Нижний Новгород, 13 – 16 ноября 2023 года. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ. 2023. С. 93–97.

Некоторые из работ, входящих в список, являются составными частями кандидатских диссертаций и дипломных работ М. О. Ицковича [38], Г. А. Чернякова [60], Д. С. Добрынина, Д. С. Зуевой, С. В. Ифраимова, В. А. Катасоновой, Д. В. Соломиной, А. А. Шишкова, выполненных под научным руководством А. С. Кулешова.

Обзор литературы. В 1986 году в работе американского математика Дж. Ковачича [105] был предложен конструктивный алгоритм нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка в классе так называемых лиувиллевых функций [39, 58, 105]. Соответствующие решения линейного дифференциального уравнения второго порядка также принято называть лиувиллевыми. Если у данного дифференциального уравнения отсутствуют лиувиллевы решения, то алгоритм также позволяет установить этот факт. Для того, чтобы применить алгоритм Ковачича к тому или иному линейному однородному дифференциальному уравнению

второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты соответствующего уравнения являлись рациональными функциями независимой переменной.

Актуальность и важность алгоритма Ковачича были признаны во многих странах сразу после его появления, в том числе, в Советском Союзе. В начале 1987 года появилась работа А. Ю. Жаркова [21], в которой была предложена реализация алгоритма Ковачича на языке FORMAC [66]. По всей видимости, работу [21] следует считать первой работой на русском языке, посвященной алгоритму Ковачича. Также проблемами точного интегрирования различных уравнений много занимался Л. М. Беркович [5]– [8], используя как алгоритм Ковачича, так и предложенные им специальные методы, например, метод точной линеаризации дифференциальных уравнений.

Теоретические основы, на которых базируется алгоритм Ковачича, были заложены ещё в XIX веке в работах Ж. Лиувилля [110]– [116]. Именно поэтому функции, через которые выражается искомое решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, стали называться лиувиллевыми [118]. В дальнейшем результаты Ж. Лиувилля получили развитие в работах Л. Фукса [91, 92], К. Жордана [97], Т. Пепина [144, 145], Э. Пикара [146, 147], Э. Вессио [161], Д. Д. Мордухай – Болтовского [48]. Окончательный вид теория, лежащая в основе алгоритма Ковачича, приобрела во второй половине XX века с развитием ЭВМ. Соответствующая теория содержится в работах Дж. Ритта [150], Э. Колчина [100–102] (см. также [70]), Ф. Балдассарри [67, 68] и М. Сингера [148, 154, 155].

Первоначально алгоритм Ковачича применялся к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка, коэффициенты которых были рациональными функциями независимой переменной и не содержали параметров. Первыми работами, в которых алгоритм Ковачича применялся к линейному уравнению второго порядка, коэффициенты которого зависят от параметров, стали

работы Э. Дюваль [84, 85]. В этих работах была сделана попытка получить при помощи алгоритма Ковачича выводы о существовании лиувиллевых решений у гипергеометрического уравнения Гаусса, которые были получены ранее другими методами в работе Т. Кимуры [99].

Но наиболее часто алгоритм Ковачича стал применяться при доказательстве неинтегрируемости различных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Один из наиболее эффективных методов доказательства отсутствия мероморфных первых интегралов у гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, разработанный в работах С. Л. Зиглина [25]– [35] и получивший дальнейшее развитие в работах Х. Моралеса – Руиса и Ж.-П. Рамиса [135]– [141] связан с дифференциальной теорией Галуа. Исходные гамильтоновы дифференциальные уравнения линеаризуют в окрестности невырожденного (не являющегося положением равновесия) частного решения уравнений Гамильтона. Для получившейся линейной системы исследуется ее группа Галуа (теория Пикара — Вессио, см. [146, 147, 161]) и доказывается, что в случае полной интегрируемости соответствующая группа Галуа является абелевой. В этом случае необходимые и достаточные условия разрешимости дифференциальной группы Галуа (если дифференциальная группа Галуа является абелевой, следовательно, она и разрешима) определяются при помощи алгоритма Ковачича (подробнее об этом см. [77, 78, 162]). Поэтому алгоритм Ковачича является эффективным методом для доказательства неинтегрируемости (см., например, работы [61–63], [79, 80], [69, 86, 89, 156], [120]– [132], [158–160]).

В 2018 году в работе Т. Комбо и К. Санабрии [81] был представлен алгоритм, аналогичный алгоритму Ковачича, но позволяющий обосновывать мероморфную неинтегрируемость гамильтоновых систем с тремя степенями свободы. Представленная в [81] методика использовалась в работах [82, 157] для доказательства неинтегрируемости различных гамильтоновых систем с тремя степенями свободы.

В настоящей диссертации алгоритм Ковачича используется для нахождения условий интегрируемости в лиувиллевых функциях различных классических задач динамики твердого тела, в частности, задач динамики неголономных систем (систем с неинтегрируемыми дифференциальными связями). Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы.

Во введении описываются основные результаты, полученные в разные годы с помощью алгоритма Ковачича. Все упомянутые результаты подкреплены ссылками на работы, в которых они были получены.

В первой главе диссертации кратко обсуждаются теоретические основы алгоритма Ковачича, затем дается описание и обоснование самого алгоритма и рассказывается о том, как с его помощью находятся лиувиллевы решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. Приводятся простейшие примеры нахождения решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с помощью алгоритма Ковачича.

Во второй главе диссертации рассматривается одна из классических задач механики неголономных систем — задача о качении без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости тяжелого тела вращения, то есть тяжелого динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, ось симметрии которой совпадает с осью динамической симметрии тела. Впервые данная задача была рассмотрена в работе Э. Линделефа [109], который использовал для решения этой задачи обычные уравнения Лагранжа второго рода. Выписав уравнения неголономных связей, выражающих условие отсутствия проскальзывания при качении тела по плоскости, Э. Линделеф использовал их при составлении кинетической энергии и ошибочно посчитал, что тем самым полностью учтена неголономность задачи, а следовательно можно составлять уравнения Лагранжа второго рода. Полученная таким образом система дифференциальных уравнений оказалась проще истинной и могла быть

решена в квадратурах.

Допущенную Э. Линделефом существенную ошибку одним из первых заметил С.А. Чаплыгин, о чем уведомил автора, а 25 октября 1895 года сделал об этой задаче доклад на заседании отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. В этом докладе С.А. Чаплыгиным впервые были представлены полученные им уравнения движения не голономных систем, позднее названных системами Чаплыгина. Через два года он нашел правильное решение задачи Линделефа и опубликовал свои результаты в статье [59]. В этой работе С.А. Чаплыгин показал, что решение задачи Линделефа сводится к интегрированию одного линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка относительно компоненты угловой скорости тела в проекции на его ось динамической симметрии. Коэффициенты соответствующего уравнения зависят от формы поверхности, ограничивающей движущееся по плоскости твердое тело, и от распределения масс в твердом теле. После того, как находится общее решение соответствующего уравнения, задача сводится к квадратурам. В той же работе [59] С.А. Чаплыгиным были указаны два случая, когда удастся найти общее решение полученного им уравнения второго порядка и привести задачу к квадратурам. В одном из этих случаев катящееся по плоскости тело является неоднородным динамически симметричным шаром, а в другом — круглым диском или обручем. При этом в случае качения по плоскости круглого диска или обруча соответствующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка заменой переменных приводится к гипергеометрическому уравнению Гаусса, то есть задача о движении диска решается в гипергеометрических функциях Гаусса. Этот первоначально установленный С.А. Чаплыгиным факт чуть позднее был открыт также П. Аппелем [65], Д. Кортевегом [103, 104] и Э. Геллопом [93].

В 1932 году Х. М. Муштари продолжил исследование задачи о движении тела вращения по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной

плоскости [49]. При дополнительном условии, накладывающем ограничения на распределение масс и форму поверхности тела (это условие стало называться условием Х.М. Муштари), были найдены два новых случая, когда движение тела можно исследовать полностью. В первом случае движущееся тело ограничено поверхностью, образуемой при вращении дуги параболы вокруг оси, перпендикулярной оси симметрии параболы и проходящей через ее фокус. Во втором случае движущееся тело является параболоидом вращения. Для других тел вращения, катящихся по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости, полное решение задачи прежде указано не было.

Во второй главе диссертации приводится вывод соответствующего линейного дифференциального уравнения второго порядка, к интегрированию которого сводится решение задачи о качении тяжелого тела вращения по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Уравнение выведено при общих предположениях о форме поверхности, ограничивающей движущееся тело вращения. В случае, когда поверхность катящегося тела вращения и распределение масс в нем удовлетворяют условию Х. М. Муштари, найдено общее решение соответствующего линейного дифференциального уравнения. Описан общий вид поверхностей, для которых выполняется условие Х. М. Муштари, а также показано, что два случая, найденные и полностью описанные Х. М. Муштари, являются начальными элементами некоторого множества (или семейства) поверхностей. Полученные результаты существенно обобщают и развивают результаты работы Х. М. Муштари.

В дальнейшем во второй главе диссертации рассматриваются случаи, когда катящееся по абсолютно шероховатой плоскости тело является круглым диском, диском со смещенным центром масс, динамически симметричным тором, динамически симметричным параболоидом вращения, веретенообразным телом и динамически симметричным эллипсоидом вращения. В каждом из этих случаев для полученного линейного дифференциального уравнения второ-

го порядка строится замена переменных, приводящая его коэффициенты к виду рациональных функций независимой переменной. В результате становится возможным применить к полученному линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка алгоритм Ковачича и получить выводы о существовании у этого уравнения лиувиллевых решений. С помощью алгоритма доказано, что в случае, когда катящееся по плоскости тело является круглым диском, диском со смещённым центром масс или динамически симметричным тором, соответствующее линейное однородное уравнение второго порядка не имеет лиувиллевых решений, и уравнения движения задачи не интегрируются в лиувиллевых функциях. Напротив, в случае, когда движущееся по плоскости тело является динамически симметричным параболоидом, доказано, что общее решение соответствующего линейного уравнения второго порядка при любых значениях параметров задачи выражается через лиувиллевы функции, то есть уравнения движения параболоида вращения интегрируются в лиувиллевых функциях. В случае движения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости веретенообразного тела из работы Х.М. Муштари [49] (тела, ограниченного поверхностью, образуемой при вращении дуги параболы вокруг оси, проходящей через фокус параболы перпендикулярно к ее оси симметрии), доказано, что решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения выражается через лиувиллевы функции лишь в случае, указанном ранее Х. М. Муштари.

В случае движения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости динамически симметричного эллипсоида вращения доказано, что соответствующее дифференциальное уравнение не имеет лиувиллевых решений для почти всех значений параметров задачи, имеющих физический смысл. Указано условие на параметры, при выполнении которого у дифференциального уравнения второго порядка могут существовать лиувиллевы решения; рассмотрены несколько случаев, когда эти решения удастся найти в явном виде, в

этих случаях уравнения движения эллипсоида могут быть проинтегрированы в лиувиллевых функциях.

В третьей главе диссертации рассматривается другая классическая задача динамики твердого тела — задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой при условиях Гесса. В 1890 году немецкий математик и механик В. Гесс [94] указал новый частный случай интегрируемости уравнений Эйлера–Пуассона движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. В 1892 году П. А. Некрасов [51, 52] показал, что решение задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой при условиях Гесса приводится к интегрированию линейного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. В данной главе диссертации представлен вывод соответствующего линейного дифференциального уравнения второго порядка и показано, как привести коэффициенты полученного уравнения к виду рациональных функций. Затем при помощи алгоритма Ковачича исследуется вопрос о существовании лиувиллевых решений у данного линейного уравнения второго порядка. Показано, что лиувиллевы решения могут существовать лишь в двух случаях: в случае, соответствующем случаю Лагранжа движения твердого тела с неподвижной точкой и в случае, когда постоянная интеграла площадей равна нулю.

В четвертой главе диссертации рассматривается классическая задача механики неголономных систем — задача о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения. Ещё из работ Э. Дж. Рауса [152] и Ф. Нетера [143] было известно, что если при качении шара по поверхности под действием силы тяжести во все время движения его центр принадлежит заданной поверхности вращения, то задача сводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка, коэффициенты которого зависят от характеристик той поверхности, по которой при качении движется центр шара. Если удастся найти в явном виде общее решение этого уравнения, то задача о качении шара по соответствующей поверхности вращения может быть

проинтегрирована в квадратурах. Однако в общем случае (для произвольной поверхности вращения) получить общее решение этого уравнения в явном виде невозможно. Поэтому представляет интерес вопрос, для каких поверхностей вращения соответствующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка допускает общее решение, выражающееся в явном виде. В работе показано, что можно найти в явном виде общее решение соответствующего уравнения в случае, когда центр шара движется по произвольной невырожденной поверхности вращения второго порядка, по циклоидальной поверхности, а также по поверхности псевдосферы. Доказано, что в случае качения шара по тору решение данного уравнения выражается через функции Хейна (Гойна), а в случае качения шара по поверхности катеноида решение соответствующего уравнения выражается через обобщенные функции Лежандра.

В последней, пятой главе диссертации, рассматривается задача о качении динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по поверхности сферы. Предполагается, что качение тела по сфере происходит под действием сил, которые имеют равнодействующую, приложенную к центру масс тела, направленную к центру опорной сферы, и зависящую только от расстояния между центром масс тела и центром опорной сферы. В этом случае, как показано в работе П. В. Воронца [15], решение задачи сводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка. В случае, когда удастся найти общее решение данного уравнения, задача о качении соответствующего тела вращения по сфере может быть проинтегрирована в лиувиллевых функциях. В работе показано, что можно найти в лиувиллевых функциях решение задачи о качении по поверхности сферы неоднородного динамически симметричного шара.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [162]– [204].

ГЛАВА 1. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА КОВАЧИЧА И ЕГО ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Исследование многих задач механики и математической физики сводится к решению одного линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. В 1986 году Дж. Ковачич в своей работе [105] представил конструктивный алгоритм, позволяющий найти так называемые лиувиллевы решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, коэффициенты которого являются рациональными функциями независимой переменной. В случае отсутствия у дифференциального уравнения лиувиллевых решений, алгоритм также позволяет установить этот факт. Поскольку большинство результатов данной работы получено именно с помощью алгоритма Ковачича, то в этой вводной главе мы кратко обсудим, в чем заключается алгоритм, и как с его помощью можно найти лиувиллевы решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами.

1 Постановка задачи

Пусть $\mathbb{C}(x)$ — дифференциальное поле рациональных функций одного (в общем случае комплексного) переменного x . Наша задача заключается в том, чтобы найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$z'' + a(x)z' + b(x)z = 0, \quad (1.1)$$

где $a(x), b(x) \in \mathbb{C}(x)$, причем интересоваться нас будут так называемые лиувиллевы решения данного уравнения. Решение называется лиувиллевым, если оно является элементом лиувиллева поля, которое определяется следующим образом.

Определение 1.1. Пусть F — дифференциальное поле функций одного комплексного переменного x , которое содержит $\mathbb{C}(x)$, то есть F — поле характеристики ноль, на котором определен оператор дифференцирования $()'$, действующий на элементы этого поля по правилу $(ab)' = a'b + ab'$ и $(a + b)' = a' + b'$ для любых a и b , принадлежащих F . Поле F называется *лиувиллевым*, если существует последовательность (башня) конечных расширений полей

$$\mathbb{C}(x) = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \dots \subseteq F_n = F,$$

получающаяся последовательным присоединением одного элемента, такая, что для любого $i = 1, 2, \dots, n$

$$F_i = F_{i-1}(\alpha), \text{ где } \alpha' \in F_{i-1}$$

(то есть F_i образуется присоединением неопределенного интеграла над F_{i-1}) или

$$F_i = F_{i-1}(\alpha), \text{ где } \frac{\alpha'}{\alpha} \in F_{i-1}$$

(то есть F_i образуется присоединением экспоненты неопределенного интеграла над F_{i-1}) или F_i является конечным алгебраическим расширением над F_{i-1} (то есть $F_i = F_{i-1}(\alpha)$ и α удовлетворяет полиномиальному уравнению конечной степени вида

$$a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n = 0,$$

где $a_j \in F_{i-1}$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$ и не все равны нулю).

Таким образом, лиувиллевы решения строятся последовательно из рациональных функций с использованием неопределенного интегрирования, взятия экспоненты заданного выражения и алгебраических операций. С помощью определенных выше операций можно получить логарифмические функции, тригонометрические функции, но не сложные специальные функции типа

функций Лежандра, Бесселевых функций или гипергеометрических функций Гаусса. Можно сказать [58], что лиувиллевы решения уравнения (1.1) наиболее точно соответствуют понятию "решение уравнения в замкнутой форме" или "решение в квадратурах".

Применяя к уравнению (1.1) алгоритм Ковачича, нам достаточно найти только одно лиувиллево решение данного уравнения, поскольку другое его решение можно найти следующим образом. Предполагается, что это решение имеет вид $z_2 = \nu z_1$, где z_1 – известное первое решение и ν – неизвестная функция, которую требуется найти. Подставляя решение z_2 в дифференциальное уравнение (1.1), получаем следующее уравнение на нахождения функции ν :

$$z_1 \frac{d^2 \nu}{dx^2} + \left(2 \frac{dz_1}{dx} + a(x) z_1 \right) \frac{d\nu}{dx} = 0,$$

откуда получаем для z_2 следующее выражение:

$$z_2 = z_1 \int \frac{\exp \left(- \int a(x) dx \right)}{z_1^2} dx.$$

Если первое решение z_1 уравнения (1.1) выражается через лиувиллевы функции, то очевидно, что и второе его решение z_2 также будет лиувиллевым и значит, все решения линейного дифференциального уравнения (1.1) будут лиувиллевыми (поскольку всякое другое решение уравнения (1.1) является линейной комбинацией двух независимых решений z_1 и z_2).

Упростим теперь линейное дифференциальное уравнение второго порядка (1.1), для этого сделаем следующую замену:

$$y(x) = z(x) \exp \left(\frac{1}{2} \int a(x) dx \right). \quad (1.2)$$

Тогда уравнение (1.1) перепишется следующим образом:

$$y'' + \left(b - \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}a' \right) y = 0,$$

то есть

$$y'' = r(x)y, \quad r(x) = \frac{1}{2}a' + \frac{1}{4}a^2 - b. \quad (1.3)$$

Заметим, что замена вида (1.2) не изменяет свойств решений исходного уравнения (1.1), и лиувиллевы решения уравнения (1.1) будут таковыми и для уравнения (1.3). В дальнейшем мы будем предполагать, что рассматриваемое дифференциальное уравнение имеет вид (1.3). С помощью формулы

$$z(x) = y(x) \exp \left(-\frac{1}{2} \int a(x) dx \right)$$

можно осуществить обратный переход от решений уравнения (1.3) к решениям уравнения (1.1).

2 Некоторые вспомогательные утверждения

В данном разделе представлены некоторые утверждения из теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка, на которых основывается алгоритм Ковачича. Часть перечисленных утверждений снабжена доказательствами, другие даны без доказательства, но со ссылками на работы, в которых это доказательство представлено. Для начала опишем возможную структуру решения дифференциального уравнения (1.3).

2.1 Четыре случая

Следующая теорема, доказанная в работе Дж. Ковачича [105], определяет общий вид решения, с которым имеет дело алгоритм.

Теорема 2.1. *Для дифференциального уравнения (1.3) возможны только следующие 4 случая.*

1. Уравнение (1.3) имеет решение вида $\eta = \exp \left(\int \omega(x) dx \right)$ и $\omega(x) \in \mathbb{C}(x)$, то есть $\omega(x)$ — рациональная функция.

2. Уравнение (1.3) имеет решение вида $\eta = \exp\left(\int \omega(x)dx\right)$, где $\omega(x)$ — алгебраическая функция степени 2 над $\mathbb{C}(x)$, и Случай 1 не имеет места.
3. Все решения уравнения (1.3) являются алгебраическими над $\mathbb{C}(x)$ и Случаи 1 и 2 не имеют места. Решение уравнения (1.3) имеет в данном случае вид $\eta = \exp\left(\int \omega(x)dx\right)$ и $\omega(x)$ — алгебраическая функция степени 4, 6 или 12 над $\mathbb{C}(x)$.
4. Уравнение (1.3) не имеет лиувиллевых решений (Случаи 1, 2 и 3 не имеют места).

□

Кратко опишем здесь ключевые моменты доказательства этой теоремы. Пусть η и ζ — два независимых решения линейного дифференциального уравнения второго порядка (1.3). Обозначим $\overline{G}$ дифференциальное расширение поля $\mathbb{C}(x)$, образованное решениями η и ζ , то есть $\overline{G} = \mathbb{C}(x)(\eta, \eta', \zeta, \zeta')$. Тогда группой Галуа дифференциального уравнения (1.3) называется группа Галуа дифференциального расширения $\overline{G}$ относительно $\mathbb{C}(x)$, и она обозначается $G = G(\overline{G}/\mathbb{C}(x))$. Иными словами, G представляет собой группу всех дифференциальных автоморфизмов расширения $\overline{G}$, оставляющих элементы поля $\mathbb{C}(x)$ неподвижными. Напомним, что автоморфизмом группы H называется изоморфизм H на себя. Дифференциальный автоморфизм — это автоморфизм, коммутирующий с операцией дифференцирования $()'$. Это означает, что G — группа всех автоморфизмов $\sigma : \overline{G} \rightarrow \overline{G}$ таких, что $\sigma(a') = (\sigma a)'$ для всех $a \in \overline{G}$ и $\sigma f = f$ для всех $f \in \mathbb{C}(x)$.

Покажем, что группа Галуа G линейного дифференциального уравнения (1.3) изоморфна некоторой подгруппе группы $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, то есть группы всех обратимых матриц порядка 2×2 с комплексными коэффициентами. Ины-

ми словами, каждому автоморфизму $\sigma \in G$ соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} a_\sigma & b_\sigma \\ c_\sigma & d_\sigma \end{pmatrix},$$

где a_σ , b_σ , c_σ и d_σ являются комплексными числами. Указанный выше изоморфизм можно установить следующим образом. Поскольку η и ζ — это два независимых решения уравнения (1.3), и поскольку $\sigma \in G$ — дифференциальный автоморфизм, то

$$(\sigma\eta)'' = \sigma(\eta'') = \sigma(r\eta) = \sigma r \cdot \sigma\eta = r\sigma\eta$$

и, следовательно, функция $\sigma\eta$ также является решением уравнения (1.3). В силу того, что уравнение (1.3) — это линейное уравнение, следовательно $\sigma\eta$ может быть только линейной комбинацией решений η и ζ . Справедливо следующее равенство:

$$\sigma\eta = a_\sigma\eta + b_\sigma\zeta, \quad a_\sigma, b_\sigma \in \mathbb{C}.$$

Проводя аналогичные рассуждения, получаем

$$\sigma\zeta = c_\sigma\eta + d_\sigma\zeta, \quad c_\sigma, d_\sigma \in \mathbb{C}.$$

Если объединить вместе два эти результата, то будем иметь

$$\begin{pmatrix} \sigma\eta \\ \sigma\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_\sigma\eta + b_\sigma\zeta \\ c_\sigma\eta + d_\sigma\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_\sigma & b_\sigma \\ c_\sigma & d_\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

и ясно, что действие элемента σ из группы Галуа G соответствует умножению решения η , ζ на постоянную матрицу

$$\begin{pmatrix} a_\sigma & b_\sigma \\ c_\sigma & d_\sigma \end{pmatrix}.$$

Теперь покажем, что группа Галуа G дифференциального уравнения (1.3) изоморфна подгруппе $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ группы $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. Элементами группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ являются обратимые матрицы порядка 2×2 с определителем, равным единице. Для доказательства этого факта воспользуемся определителем Вронского решений η и ζ , который по определению равен $W = \eta\zeta' - \eta'\zeta$. Возьмем производную определителя Вронского W и получим

$$W' = \eta'\zeta' + \eta\zeta'' - \eta'\zeta' - \eta''\zeta = \eta\zeta'' - \eta''\zeta = \eta r\zeta - r\eta\zeta = 0.$$

Таким образом, определитель Вронского решений η и ζ является постоянным числом, и следовательно $W \in \mathbb{C}(x)$. Поэтому для любого $\sigma \in G$ имеем $\sigma W = W$ (так как, по определению, σ оставляет элементы $\mathbb{C}(x)$ неподвижными). Из уравнения $\sigma W = W$ следует, что

$$\begin{aligned} \sigma W &= \sigma(\eta\zeta' - \eta'\zeta) = \sigma\eta(\sigma\zeta)' - (\sigma\eta)'\sigma\zeta = \\ &= (a_\sigma\eta + b_\sigma\zeta)(c_\sigma\eta' + d_\sigma\zeta') - (a_\sigma\eta' + b_\sigma\zeta')(c_\sigma\eta + d_\sigma\zeta) = \\ &= (a_\sigma d_\sigma - b_\sigma c_\sigma)(\eta\zeta' - \eta'\zeta) = (a_\sigma d_\sigma - b_\sigma c_\sigma)W = W, \end{aligned}$$

откуда получаем равенство

$$a_\sigma d_\sigma - b_\sigma c_\sigma = 1.$$

Следующие два утверждения сформулируем без доказательства.

Теорема 2.2. *Группа Галуа G линейного дифференциального уравнения (1.3) изоморфна алгебраической подгруппе группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. $\square$*

Эта теорема является одним из фундаментальных фактов теории Пикара — Вессю [161]. Ее доказательство представлено в работе Дж. Ковачича [105]. Далее, для любой алгебраической подгруппы группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ справедлива

следующая лемма. Ее доказательство имеется в работах И. Капланского [39] и Дж. Ковачича [105].

Лемма 2.1. *Если G — алгебраическая подгруппа группы $SL(2, \mathbb{C})$, то для нее имеет место один из четырех случаев.*

1. G триангулируема, то есть существует $x \in G$ такой, что для любого $g \in G$ матрица gdx^{-1} является треугольной. Мы будем далее предполагать, что gdx^{-1} — нижняя треугольная матрица, и поэтому она имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a^{-1} \end{pmatrix},$$

где a и b — комплексные числа. Напомним, что G — подгруппа $SL(2, \mathbb{C})$ и поэтому определитель соответствующей нижней треугольной матрицы равен единице.

2. G сопряжена с подгруппой группы $D^\dagger$, где

$$D^\dagger = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}, c \in \mathbb{C}, c \neq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c^{-1} & 0 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{C}, c \neq 0 \right\}$$

и Случай 1 не имеет места, то есть существует $x \in G$ такой, что для любого $g \in G$ матрица gdx^{-1} является или диагональной или антидиагональной, но не существует такого $x \in G$, чтобы для всех $g \in G$ матрица gdx^{-1} была бы нижней треугольной (этот случай включает в себя лишь вариант, когда матрица получается диагональной).

3. G — конечная алгебраическая подгруппа, и Случаи 1 и 2 не имеют места.
4. $G = SL(2, \mathbb{C})$, то есть G — бесконечная группа всех матриц порядка 2×2 с определителем, равным 1.

□

Итак, выше мы показали, что группа Галуа G линейного дифференциального уравнения (1.3) изоморфна алгебраической подгруппе группы $SL(2, \mathbb{C})$. Нам также известно, что всякая алгебраическая подгруппа группы $SL(2, \mathbb{C})$ удовлетворяет сформулированной лемме. Мы можем применить теперь Лемму 2.1 к группе Галуа G уравнения (1.3) и установить связь между различными подгруппами группы $SL(2, \mathbb{C})$ и решениями уравнения (1.3), перечисленными в Теореме 2.1.

В первом случае G триангулируема. Предположим, что элемент $x \in G$ найден, и каждая матрица сопряжена с нижней треугольной матрицей (это эквивалентно изменению базиса в векторном пространстве или выбору двух специальных независимых решений $\bar{\eta}$ и $\bar{\zeta}$). Тогда каждый элемент группы σ , принадлежащий G , имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_\sigma & 0 \\ c_\sigma & a_\sigma^{-1} \end{pmatrix},$$

где a_σ и c_σ — комплексные числа. При этом σ отображает решение η в $\sigma\eta = a_\sigma\eta$. Теперь если мы положим $\omega = \frac{\eta'}{\eta}$ или, что эквивалентно, $\eta = \exp\left(\int \omega(x) dx\right)$, тогда получим

$$\sigma\omega = \sigma\left(\frac{\eta'}{\eta}\right) = \frac{(\sigma\eta)'}{\sigma\eta} = \frac{a_\sigma\eta'}{a_\sigma\eta} = \frac{\eta'}{\eta} = \omega$$

и, следовательно, $\omega \in \mathbb{C}(x)$. Тем самым, реализуется первый случай теоремы Ковачича 2.1: линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка (1.3) имеет решение $\eta = \exp\left(\int \omega(x) dx\right)$, где $\omega(x) \in \mathbb{C}(x)$.

В Случае 2 группа G сопряжена с подгруппой группы $D^\dagger$. В таком случае каждый элемент G либо имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_\sigma & 0 \\ 0 & a_\sigma^{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{либо вид} \quad \begin{pmatrix} 0 & b_\sigma \\ -b_\sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

так что или $\sigma\eta = a_\sigma\eta$, $\sigma\zeta = a_\sigma^{-1}\zeta$, или $\sigma\eta = b_\sigma\zeta$, $\sigma\zeta = -b_\sigma^{-1}\eta$. Легко показать, что в обоих названных случаях имеем $\sigma(\eta^2\zeta^2) = \eta^2\zeta^2$, так что $\eta^2\zeta^2 \in \mathbb{C}(x)$. Если мы положим теперь $\omega = \frac{\eta'}{\eta}$ (то есть $\eta = \exp(\int \omega(x) dx)$) и $\varphi = \frac{\zeta'}{\zeta}$, то либо получаем $\sigma\omega = \omega$, $\sigma\varphi = \varphi$, либо $\sigma\omega = \varphi$, $\sigma\varphi = \omega$. Для того, чтобы одновременно реализовывались оба случая, должно выполняться условие $\sigma^2\omega = \omega$ или $\sigma^2\omega - \omega = 0$, то есть ω удовлетворяет полиномиальному соотношению степени 2 над $\mathbb{C}(x)$ и, следовательно, является алгебраической функцией степени 2 над $\mathbb{C}(x)$. Тем самым, реализуется Случай 2 Теоремы 2.1.

В Случае 3 группа G является конечной группой, то есть в ней имеется только конечное число автоморфизмов $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Рассмотрим любую элементарную симметрическую функцию от $\sigma_1\eta, \sigma_2\eta, \dots, \sigma_n\eta$, например,

$$\sum \sigma_i\eta = \sigma_1\eta + \sigma_2\eta + \dots + \sigma_n\eta.$$

Для любого $\sigma_j \in G$ имеем

$$\sigma_j\left(\sum \sigma_i\eta\right) = \sum \sigma_i\eta,$$

поскольку $\sigma_i\sigma_j \in G$ для всех σ_i (так как G является группой и, следовательно, замкнута). Значит, $\sum \sigma_i\eta = f(x) \in \mathbb{C}(x)$ и решение η удовлетворяет уравнению

$$\sigma_1\eta + \sigma_2\eta + \dots + \sigma_n\eta - f(x) = 0,$$

то есть является алгебраическим. Аналогичные рассуждения применимы и к решению ζ , то есть η и ζ являются алгебраическими над $\mathbb{C}(x)$, то есть все решения дифференциального уравнения (1.3) являются в этом случае алгебраическими над $\mathbb{C}(x)$.

Чтобы уточнить, какую структуру имеет группа G в Случае 3, представим здесь без доказательства одну теорему, касающуюся этого вопроса. Детали ее доказательства могут быть найдены в работе Дж. Ковачича [105].

Теорема 2.3. *Если K — конечная подгруппа группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, то возможен один из следующих четырех случаев:*

1. K сопряжена подгруппе группы $D^\dagger$.
2. K имеет порядок 24.
3. K имеет порядок 48.
4. K имеет порядок 120. $\square$

Ясно, что первый случай, упомянутый в этой теореме, это частный случай Случая 2 Леммы 2.1. Это означает, что для Случая 3 Леммы 2.1 группа G имеет порядок 24, 48 или 120 и, следовательно, порядок η над $\mathbb{C}(x)$ равен 24, 48 или 120 соответственно.

Для каждого из этих случаев известно, какие именно функции решений η и ζ являются рациональными функциями: если G имеет порядок 24, то $(\eta^4 + 8\eta\zeta^3)^3 \in \mathbb{C}(x)$, если G имеет порядок 48, то $(\eta^5\zeta - \eta\zeta^5)^2 \in \mathbb{C}(x)$, а если G имеет порядок 120, то $\eta^{11}\zeta - 11\eta^6\zeta^6 - \eta\zeta^{11} \in \mathbb{C}(x)$. Доказательства перечисленных фактов приведены в работе Дж. Ковачича [105].

В Случае 4 Леммы 2.1 имеем $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Мы хотим показать, что в этом случае дифференциальное уравнение (1.3) не имеет лиувиллевых решений. Мы предположим противное и приведем рассуждение к противоречию.

Предположим, что дифференциальное уравнение (1.3) имеет одно лиувиллево решение. Тогда второе решение, которое можно получить методом понижения порядка (см. выше), также должно быть лиувиллевым, и, следовательно, все решения уравнения (1.3) должны быть в таком случае лиувиллевыми. Ясно, что в таком случае $\overline{G} = \mathbb{C}(x)(\eta, \eta', \zeta, \zeta')$ должна содержаться в лиувиллевом расширении, и можно показать, что компонента единицы G^0 группы G должна быть разрешимой [102, стр. 415]. Если $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, то $G^0 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ и, следовательно, $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ должна быть разрешима. Но, как известно, $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ неразрешима и, следовательно, мы получили противоречие.

Значит, первоначальная гипотеза была ошибочной, то есть дифференциальное уравнение (1.3) не имеет лиувиллевых решений. Этот случай соответствует Случаю 4 Теоремы 2.1.

2.2 Необходимые условия

Чтобы сократить объем вычислений, связанных с изучением существования лиувиллевых решений у линейного дифференциального уравнения (1.3), в работе Дж. Ковачича [105] был указан ряд условий на функцию $r(x)$, стоящую в правой части уравнения (1.3). Для каждого из трех случаев существования лиувиллевых решений у уравнения (1.3), перечисленных в Теореме 2.1, эти условия различны. И если выполняются условия на функцию $r(x)$, соответствующие, например, Случаю 1 Теоремы 2.1, то решение уравнения (1.3) следует искать именно в том виде, в котором оно указано при описании Случая 1 Теоремы 2.1. Если же функция $r(x)$ такова, что для нее не выполняется ни одно из условий, соответствующих Случаям 1, 2 или 3 Теоремы 2.1, то можно сказать сразу, что дифференциальное уравнение (1.3) не имеет лиувиллевых решений.

Данные условия на функцию $r(x)$ являются необходимыми, но не достаточными. Если, например, нарушены условия для реализации Случая 1 Теоремы 2.1, следует сразу же переходить к проверке условий, необходимых для Случаев 2 и 3 той же теоремы. Но если эти условия оказываются выполненными, то следует искать решение уравнения (1.3) с помощью алгоритма Ковачича именно в том виде, в котором оно представлено при описании соответствующего случая, хотя вовсе необязательно, что в итоге такое решение будет найдено.

Чтобы понимать смысл необходимых условий, налагаемых на функцию $r(x)$, напомним кратко некоторые утверждения из комплексного анализа, которые могут нам потребоваться.

Напомним, что всякая однозначная аналитическая функция $f(z)$ комплексного переменного z в проколотой окрестности изолированной особой точ-

ки a комплексной плоскости может быть представлена рядом Лорана по степеням $z - a$ вида

$$f(z) = a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots + \frac{a_{-1}}{z - a} + \frac{a_{-2}}{(z - a)^2} + \dots$$

Часть ряда, отвечающая неотрицательным степеням аргумента $z - a$, то есть ряд

$$a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots$$

называется правильной частью ряда Лорана. Другая его часть, а именно:

$$\frac{a_{-1}}{z - a} + \frac{a_{-2}}{(z - a)^2} + \dots,$$

называется главной частью ряда Лорана.

По определению, точка a называется полюсом порядка n функции $f(z)$, если главная часть ряда Лорана функции f в проколотой окрестности этой точки содержит конечное число членов, последний из которых записывается в виде

$$\frac{a_{-n}}{(z - a)^n}.$$

Если $f(z)$ — рациональная функция аргумента z , тогда a будет полюсом порядка n функции $f(z)$, если a является корнем кратности n многочлена, стоящего в знаменателе функции $f(z)$.

Далее, пусть n — порядок точки $z = \infty$ как нуля функции $f(z)$, то есть n — порядок точки $z = 0$ как полюса функции $f(z)$. Тогда говорят, что n — порядок функции f в точке ∞ . Если f является рациональной функцией, то ее порядок в точке $z = \infty$ определяется как разность степени знаменателя и степени числителя.

Следующая теорема определяет необходимые условия для того, чтобы один из трех первых случаев существования лиувиллевых решений у уравнения (1.3), перечисленных в Теореме 2.1, мог иметь место.

Теорема 2.4. *Для дифференциального уравнения (1.3) следующие условия являются необходимыми для того, чтобы один из трех первых случаев, перечисленных в Теореме 2.1, имел место, то есть чтобы у уравнения (1.3) существовало лиувиллево решение специального вида, указанного при описании соответствующего случая.*

1. *Каждый полюс функции $r(x)$ имеет порядок 1 или четный порядок. Порядок $r(x)$ в ∞ больше либо равен двум.*
2. *$r(x)$ имеет по меньшей мере один полюс или порядка 2 или нечетного порядка, большего чем 2.*
3. *$r(x)$ не имеет полюсов порядка большего, чем 2. Порядок $r(x)$ в ∞ равен по меньшей мере 2. Если разложение функции $r(x)$ в сумму простейших дробей имеет вид*

$$r(x) = \sum_i \frac{\alpha_i}{(x - c_i)^2} + \sum_j \frac{\beta_j}{x - d_j},$$

то должны выполняться условия

$$\sum_j \beta_j = 0, \quad \sqrt{1 + 4\alpha_i} \in \mathbb{Q} \quad \text{для любого } i,$$

а также условие

$$\sqrt{1 + 4\gamma} \in \mathbb{Q}, \quad \text{где } \gamma = \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j d_j. \quad \square$$

Ниже кратко изложены основные моменты доказательства данной теоремы. Часть из них будет обсуждаться более детально при описании самого алгоритма (см. Параграф 3).

В Случае 1 дифференциальное уравнение (1.3) имеет решение вида

$$\eta = \exp \left(\int \omega(x) dx \right), \quad (2.1)$$

где $\omega(x)$ является рациональной функцией независимой переменной. Подставляя данное решение в уравнение (1.3), убеждаемся, что функция $\omega(x)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\omega' + \omega^2 = r. \quad (2.2)$$

Поскольку в этом случае обе функции $r(x)$ и $\omega(x)$ являются рациональными функциями, то они могут быть разложены в ряд Лорана в проколотовой окрестности точки c комплексной плоскости следующим образом:

$$\omega = b(x - c)^\mu + O\left((x - c)^{\mu+1}\right), \quad \mu \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0 \quad (2.3)$$

$$r = \alpha(x - c)^\nu + O\left((x - c)^{\nu+1}\right), \quad \nu \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \neq 0 \quad (2.4)$$

Подставляя ряды Лорана (2.3) и (2.4) в дифференциальное уравнение (2.2), получаем

$$\mu b(x - c)^{\mu-1} + \dots + b^2(x - c)^{2\mu} + \dots = \alpha(x - c)^\nu + \dots \quad (2.5)$$

Покажем, что если точка c является полюсом функции r (то есть, показатель степени $\nu < 0$), то порядок этого полюса либо равен 1, либо является четным. В уравнении (2.5) указаны только наинизшие степени $x - c$, входящие в обе части данного уравнения. Эти наинизшие степени должны сокращаться. Действительно,

- 1) если $\nu = -1$, тогда $\mu = -1$ и два члена наинизшей степени, стоящие в левой части уравнения (2.5), сокращаются между собой;
- 2) если $\nu = -2$, тогда $\mu = -1$ и сокращаются три члена наинизшей степени;

3) если $\nu \leq -3$, то соответствующие члены наинизших степеней по $x - c$, стоящие в уравнении (2.5), дают

$$\nu \geq \min(\mu - 1, 2\mu).$$

Если $\nu \leq -3$, то из этого следует, что $\mu < -1$, т.е. $2\mu < \mu - 1$. Поскольку $b \neq 0$ (по предположению), то $\nu = 2\mu$, то есть ν действительно является четным, что и утверждалось.

Эти рассуждения доказывают также, что если функция r имеет в точке c полюс порядка $-\nu = -2\mu \geq 4$, то функция ω имеет в той же точке полюс порядка $-\mu$. Этот мы будем использовать при обосновании алгоритма в Параграфе 3.2.

Проверка условий на порядок полюса функции r в точке $x = \infty$ производится совершенно аналогично. При этом используются разложения r и ω в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$. Подробности смотри в работе Дж. Ковачича [105].

В Случае 2 линейное дифференциальное уравнение второго порядка (1.3) имеет решение вида

$$\eta = \exp\left(\int \omega(x)dx\right), \quad (2.6)$$

где $\omega(x)$ — алгебраическая функция степени 2 над $\mathbb{C}(x)$, то есть функция, являющаяся решением квадратного уравнения с рациональными коэффициентами.

В Случае 2 группа Галуа G дифференциального уравнения (1.3) сопряжена подгруппе группы $D^\dagger$, так что для любого $\sigma \in G$ выполняются условия $\sigma\eta = a_\sigma\eta$, $\sigma\zeta = a_\sigma^{-1}\zeta$ или $\sigma\eta = b_\sigma\zeta$, $\sigma\zeta = -b_\sigma^{-1}\eta$. В любом случае имеет место соотношение $\sigma(\eta^2\zeta^2) = \eta^2\zeta^2$, так что произведение $\eta^2\zeta^2$ является рациональной функцией. При этом функция $\eta\zeta$ рациональной не является, поскольку если бы она была рациональной, мы имели бы $\sigma(\eta\zeta) = \eta\zeta = a_\sigma\eta a_\sigma^{-1}\zeta$ и G должна была

бы состоять из диагональных матриц с коэффициентами a_σ и a_σ^{-1} на диагонали (то есть случай $\sigma\eta = b_\sigma\zeta$, $\sigma\zeta = -b_\sigma^{-1}\eta$ был бы невозможен).

Следовательно, мы можем представить рациональную функцию $\eta^2\zeta^2$ в виде

$$\prod (x - c_i)^{e_i}, \quad e_i \in \mathbb{Z}$$

и по меньшей мере один из показателей степени e_i является нечетным (если бы все они были четными, функция $\eta\zeta$ была бы рациональной, что невозможно). Предположим тогда, что $\eta^2\zeta^2 = (x - c)^e \prod (x - c_i)^{e_i}$, где e – нечетное число. Введем рациональную функцию

$$\varphi = \frac{(\eta\zeta)'}{\eta\zeta} = \frac{\frac{1}{2}(\eta^2\zeta^2)'}{\eta^2\zeta^2}.$$

Так как η и ζ являются независимыми решениями линейного дифференциального уравнения (1.3), то непосредственной проверкой можно установить, что функция φ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\varphi'' + 3\varphi\varphi' + \varphi^3 = 4r\varphi + 2r'. \quad (2.7)$$

Разложим φ и r в ряд Лорана в проколотой окрестности точки c . Тогда

$$\varphi = \frac{\frac{1}{2}e}{x - c} + P(x - c), \quad (2.8)$$

а разложение функции r в ряд Лорана в проколотой окрестности той же точки имеет вид:

$$r = \alpha(x - c)^\nu + O\left((x - c)^{\nu+1}\right). \quad (2.9)$$

В разложении (2.8) через $P(x - c)$ обозначено выражение, представляющее собой многочлен от $x - c$. Подставляя ряды Лорана (2.8) и (2.9) в дифферен-

циальное уравнение (2.7), получаем

$$\frac{e}{(x-c)^3} + \dots + \frac{-\frac{3}{4}e^2}{(x-c)^3} + \dots + \frac{\frac{1}{8}e^3}{(x-c)^3} + \dots = 2\alpha(e+\nu)(x-c)^{\nu-1} + \dots$$

Если $\nu > -2$, то должно выполняться соотношение

$$e - \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^3 = 0$$

и, значит, $e = 0, 2, 4$. Но степень e должна быть нечетной, поэтому $\nu \leq -2$. Если $\nu < -2$, следовательно $2\alpha(e+\nu) = 0$ и тогда $e = -\nu$, то есть степень ν является нечетной. Таким образом, мы получаем, что либо $\nu = -2$, либо $\nu < -2$ и является нечетной. Значит r имеет либо полюс порядка 2, либо полюс нечетного порядка, большего, чем 2.

В Случае 3 линейное однородное дифференциальное уравнение (1.3) имеет решение вида

$$\eta = \exp\left(\int \omega(x)dx\right), \quad (2.10)$$

где $\omega(x)$ — алгебраическая функция степени 4, 6 или 12 над $\mathbb{C}(x)$.

Поскольку функция η является алгебраической над полем рациональных функций, то она может быть разложена в ряд Пуизо (ряд с дробными показателями степеней) в окрестности некоторой точки комплексной плоскости. Так как η — решение линейного дифференциального уравнения (1.3), то

$$\eta'' = r\eta. \quad (2.11)$$

Раскладывая η и r в ряд в окрестности точки c , имеем:

$$\eta = a(x-c)^\mu + O\left((x-c)^{\mu+1}\right), \quad a \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0, \quad \mu \in \mathbb{Q}; \quad (2.12)$$

$$r = \alpha(x-c)^\nu + O\left((x-c)^{\nu+1}\right), \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \alpha \neq 0, \quad \nu \in \mathbb{Z}. \quad (2.13)$$

Подставляя ряды (2.12) и (2.13) в уравнение (2.11), перепишем его в виде:

$$a\mu(\mu-1)(x-c)^{\mu-2} + \dots = \alpha a(x-c)^{\mu+\nu} + \dots \quad (2.14)$$

Член наименьшего порядка, стоящий в правой части уравнения (2.14), получается как произведение членов наименьшего порядка в разложении функций η и r в ряд Лорана. Этот стоящий в правой части член всегда отличен от нуля, а потому он должен быть равен одному из членов выражения, стоящего в левой части. Отсюда имеем $\mu + \nu \geq \mu - 2$, то есть $\nu \geq -2$, а значит, порядок полюсов функции r может быть только первым или вторым.

Если $\nu = -2$, то приравнивая коэффициенты одинаковых степенях $(x-c)^{\mu-2}$ в левой и правой части равенства (2.14), получаем

$$\alpha = \mu(\mu-1), \text{ то есть } \mu = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4\alpha}.$$

Поскольку по предположению является рациональным числом, то должно выполняться условие $\sqrt{1+4\alpha} \in \mathbb{Q}$ и разложение функции r в сумму простейших дробей должно иметь вид

$$r = \sum_i \frac{\alpha_i}{(x-c_i)^2} + \sum_j \frac{\beta_j}{x-d_j} + \text{полиномиальное выражение},$$

причем для любого i должно выполняться условие $\sqrt{1+4\alpha_i} \in \mathbb{Q}$.

Оставшиеся условия, перечисленные в Случае 3, получаются совершенно аналогичным способом, а именно разложением r и η в ряд в окрестности точки $x = \infty$ и подстановкой соответствующих рядов Лорана в уравнение (2.11).

2.3 Пример применения необходимых условий

В 1838 году Дж. Эйри опубликовал работу [64], в которой он анализировал свойства решений уравнения

$$y'' = xy.$$

Общее решение данного уравнения выражается с помощью функций Эйри. Покажем, что уравнение Эйри не имеет лиувиллевых решений (имеет место Случай 4 Теоремы 2.1). Действительно, легко видеть, что функция $r(x) = x$ не имеет конечных полюсов, а ее порядок в точке $x = \infty$ равен -1 . Поэтому не выполняются необходимые условия существования лиувиллевых решений, описанные в Теореме 2.4. Таким образом, на основании анализа необходимых условий мы доказали отсутствие лиувиллевых решений у уравнения Эйри.

3 Алгоритм Ковачича и его обоснование

3.1 Алгоритм Ковачича для Случая 1

В Случае 1 Теоремы 2.1 цель алгоритма Ковачича состоит в том, чтобы найти решение уравнения (1.3) в виде $\eta = P \exp\left(\int \theta(x) dx\right)$, где $P \in \mathbb{C}[x]$ — многочлен с комплексными коэффициентами, а $\theta(x)$ — рациональная функция. Поскольку функция η может быть представлена в виде

$$\eta = \exp\left(\int \left(\frac{P'}{P} + \theta\right) dx\right),$$

то это соответствует общему виду решения в Случае 1, описанном в Теореме 2.1, где

$$\omega = \frac{P'}{P} + \theta.$$

Первый шаг алгоритма состоит в том, чтобы найти части разложения функции θ в сумму простейших дробей. Второй шаг состоит в том, чтобы, сложив эти части вместе, сформировать функцию, являющуюся кандидатом на роль функции θ . Максимальное число возможных кандидатов будет равно $2^{\rho+1}$, где ρ — число конечных полюсов функции r . Если таких кандидатов не находится, то у уравнения (1.3) не существует лиувиллевых решений вида (2.1). Третий и последний шаг алгоритма состоит в том, чтобы для каждого выбранного θ

попытаться подобрать подходящий многочлен P . Если такой многочлен находится, то мы получаем искомое решение линейного дифференциального уравнения (1.3). Если нет, то лиувиллевых решений вида (2.1) не существует.

Предположим, что необходимые условия для существования решения в Случае 1 выполняются, и обозначим через Γ множество конечных полюсов функции r .

Шаг 1. Для каждого $c \in \Gamma \cup \{\infty\}$ определим рациональную функцию $[\sqrt{r}]_c$ и два комплексных числа α_c^+ и α_c^- по правилам, описанным далее.

(c_1) Если $c \in \Gamma$ и c — полюс порядка 1, тогда

$$[\sqrt{r}]_c = 0, \quad \alpha_c^+ = \alpha_c^- = 1.$$

(c_2) Если $c \in \Gamma$ и c — полюс порядка 2, тогда

$$[\sqrt{r}]_c = 0.$$

Пусть b — коэффициент при $\frac{1}{(x-c)^2}$ в разложении функции r в сумму простейших дробей. Тогда

$$\alpha_c^\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4b}.$$

(c_3) Если $c \in \Gamma$ и c — полюс порядка $2\nu \geq 4$ (в данном случае порядок полюса является четным в силу соответствующих необходимых условий), тогда функция $[\sqrt{r}]_c$ представляет собой сумму членов, которые включают в себя все $\frac{1}{(x-c)^i}$ для $2 \leq i \leq \nu$ в разложении функции $\sqrt{r}$ в ряд Лорана в проколотой окрестности точки c . Причем для этой функции $[\sqrt{r}]_c$ имеются два значения, различающиеся знаком; может быть выбрано любое из двух. Таким образом,

$$[\sqrt{r}]_c = \frac{a}{(x-c)^\nu} + \cdots + \frac{d}{(x-c)^2}. \quad (3.1)$$

Пусть b — коэффициент при $\frac{1}{(x-c)^{\nu+1}}$ в выражении $r - [\sqrt{r}]_c^2$. Тогда

$$\alpha_c^\pm = \frac{1}{2} \left(\pm \frac{b}{a} + \nu \right).$$

(∞_1) Если порядок полюса функции r в точке $x = \infty$ больше, чем 2, тогда

$$[\sqrt{r}]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = 1, \quad \alpha_\infty^- = 0.$$

(∞_2) Если порядок полюса функции r в точке $x = \infty$ равен 2, тогда

$$[\sqrt{r}]_\infty = 0.$$

Пусть b — коэффициент при $\frac{1}{x^2}$ в разложении в ряд Лорана функции r в окрестности точки $x = \infty$. Тогда

$$\alpha_\infty^\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4b}.$$

(∞_3) Если порядок r в точке $x = \infty$ равен $-2\nu \leq 0$ (и является четным в силу сформулированных ранее необходимых условий), то функция $[\sqrt{r}]_\infty$ представляет собой сумму членов со степенями x^i , $0 \leq i \leq \nu$ разложения в ряд Лорана функции $\sqrt{r}$ в точке $x = \infty$ (может быть выбрана любая из двух возможностей). В этом случае

$$[\sqrt{r}]_\infty = ax^\nu + \dots + d.$$

Пусть b — коэффициент при $x^{\nu-1}$ в выражении $r - ([\sqrt{r}]_\infty)^2$. Тогда

$$\alpha_\infty^\pm = \frac{1}{2} \left(\pm \frac{b}{a} - \nu \right).$$

Шаг 2. Для каждого семейства знаков $s = (s(c))_{c \in \Gamma \cup \{\infty\}}$, где $s(c)$ может быть как знаком $+$, так и знаком $-$, положим

$$d = \alpha_{\infty}^{s(\infty)} - \sum_{c \in \Gamma} \alpha_c^{s(c)}. \quad (3.2)$$

Если d является неотрицательным целым числом, то функция

$$\theta = \sum_{c \in \Gamma} \left(s(c) [\sqrt{r}]_c + \frac{\alpha_c^{s(c)}}{x - c} \right) + s(\infty) [\sqrt{r}]_{\infty} \quad (3.3)$$

является кандидатом на роль θ . Если d не является неотрицательным целым числом, то соответствующее семейство s исключается из рассмотрения. Если по этому принципу из рассмотрения будут исключены все возможные семейства s , значит, Случай 1 не имеет места, и у уравнения (1.3) не существует лиувиллевых решений вида (2.1).

Шаг 3. Этот шаг совершается только для тех семейств s , которые были сохранены на предыдущем шаге. Если на этом шаге достигнут успех, то можно указать решение дифференциального уравнения (1.3) в явном виде. В противном случае соответствующее семейство s отбрасывается. Если таким образом будут отброшены все семейства s , отобранные на шаге 2, следовательно, Случай 1 не имеет места для линейного дифференциального уравнения второго порядка (1.3).

Для каждого семейства s будем искать многочлен P степени d (постоянная d определяется формулой (3.2)), удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$P'' + 2\theta P' + (\theta' + \theta^2 - r) P = 0. \quad (3.4)$$

Наиболее удобно искать данный многочлен P , воспользовавшись обычным методом неопределенных коэффициентов. Если такой многочлен будет

найден для какого-либо из семейств s , то

$$\eta = P \exp \left(\int \theta(x) dx \right)$$

является искомым решением дифференциального уравнения (1.3). Если ни для одного из семейств s невозможно найти соответствующий многочлен P , значит Случай 1 Теоремы 2.1 не имеет места для уравнения (1.3) и у уравнения (1.3) не существует лиувиллевых решений вида (2.1).

Далее представлено обоснование описанного только что алгоритма для поиска решений вида (2.1), соответствующих Случаю 1 Теоремы 2.1 для дифференциального уравнения (1.3).

3.2 Обоснование алгоритма Ковачича для Случая 1

Итак, в Случае 1 Теоремы 2.1 мы ищем решение дифференциального уравнения (1.3) вида (2.1), где

$$\omega(x) = \theta(x) + \frac{P'(x)}{P(x)}, \quad \theta(x) \in \mathbb{C}(x), \quad P(x) \in \mathbb{C}[x].$$

Поскольку функция $\omega(x)$ в данном случае является рациональной функцией, то она может быть разложена в ряд Лорана в окрестности любой точки комплексной плоскости. Алгоритм начинается с того, что определяется разложение функции $\omega(x)$ в сумму простейших дробей с использованием разложения в ряд Лорана функции r и уравнения Риккати (2.2).

Мы можем записать ряд Лорана функции ω в проколотой окрестности точки c , являющейся полюсом функции r , в виде

$$\omega = \sum_{i=2}^{\mu} \frac{a_i}{(x-c)^i} + \frac{e_c}{x-c} + \sum_{j=0}^{\infty} b_j (x-c)^j.$$

В дальнейшем нам не нужно будет определять явно все коэффициенты главной части ряда Лорана a_i и правильной части ряда Лорана b_j , поэтому для краткости обозначим

$$[\omega]_c = \sum_{i=2}^{\mu} \frac{a_i}{(x-c)^i} \text{ и } \bar{\omega}_c = \sum_{j=0}^{\infty} b_j (x-c)^j.$$

Таким образом, ряд Лорана функции ω в проколотой окрестности точки c представляется в виде:

$$\omega = \sum_{i=2}^{\mu} \frac{a_i}{(x-c)^i} + \frac{e_c}{x-c} + \sum_{j=0}^{\infty} b_j (x-c)^j = [\omega]_c + \frac{e_c}{x-c} + \bar{\omega}_c. \quad (3.5)$$

Основная задача алгоритма состоит в том, чтобы найти эти три части функции ω , то есть найти $[\omega]_c$, e_c и остаток $\bar{\omega}_c$, который имеет вид многочлена.

Нам известно, что согласно необходимым условиям для Случая 1 все конечные полюсы функции r имеют или порядок 1, или порядок 2, или четный порядок ≥ 4 .

Сначала предположим, что c — конечный полюс функции r порядка 1. Тогда функция r может быть представлена в виде:

$$r = \frac{\alpha}{x-c} + P(x-c), \quad (3.6)$$

где через $P(x-c)$ обозначено выражение, имеющее вид многочлена от $x-c$. Подставляя функции (3.5) и (3.6) в уравнение Риккати (2.2), получаем уравнение

$$-\frac{\mu a_{\mu}}{(x-c)^{\mu+1}} + \dots + \frac{a_{\mu}^2}{(x-c)^{2\mu}} + \dots = \frac{\alpha}{x-c} + \dots$$

Если предположить, что $a_{\mu} \neq 0$ и $\mu \geq 2$, то $2\mu \geq 4$ и член $\frac{a_{\mu}^2}{(x-c)^{2\mu}}$ не может сократиться ни с каким другим членом. Отсюда следует, что $[\omega]_c = 0$, и поэтому

$$\omega = \frac{e_c}{x-c} + \bar{\omega}_c.$$

Используя это выражение для ω и снова подставляя его в уравнение Риккати (2.2), получаем уравнение

$$-\frac{e_c}{(x-c)^2} + \bar{\omega}'_c + \frac{e_c^2}{(x-c)^2} + \frac{2e_c\bar{\omega}_c}{x-c} + \bar{\omega}_c^2 = \frac{\alpha}{x-c} + \dots$$

Член степени $\frac{1}{(x-c)^2}$ должен обращаться в ноль, следовательно $-e_c + e_c^2 = 0$, то есть e_c или равен 0, или равен 1. Случай $e_c = 0$ не может иметь места, поскольку в этом случае левая часть уравнения Риккати не содержит полюсов вообще, тогда как в правой части имеется полюс порядка 1. Следовательно, если c является конечным полюсом функции r порядка 1, то ω имеет вид

$$\omega = \frac{e_c}{x-c} + \bar{\omega}_c \text{ и } e_c = 1.$$

Предположим теперь, что c является конечным полюсом функции r порядка 2. Тогда эта функция имеет вид:

$$r = \frac{b}{(x-c)^2} + \frac{\alpha}{x-c} + \dots \quad (3.7)$$

Подставляя функции (3.5) и (3.7) в уравнение Риккати (2.2), получаем уравнение

$$-\frac{\mu a_\mu}{(x-c)^{\mu+1}} + \dots + \frac{a_\mu^2}{(x-c)^{2\mu}} + \dots = \frac{b}{(x-c)^2} + \frac{\alpha}{x-c} + \dots$$

Если снова предположить, что $a_\mu \neq 0$ и $\mu \geq 2$, то есть $2\mu \geq 4$, значит выражение $\frac{a_\mu^2}{(x-c)^{2\mu}}$ не может сократиться ни с каким другим выражением в данном уравнении. Следовательно, $[\omega]_c = 0$ и тогда

$$\omega = \frac{e_c}{x-c} + \bar{\omega}_c.$$

Теперь подставляем полученную функцию ω в уравнение Риккати (2.2) и получаем уравнение:

$$-\frac{e_c}{(x-c)^2} + \bar{\omega}'_c + \frac{e_c^2}{(x-c)^2} + \frac{2e_c\bar{\omega}_c}{x-c} + \bar{\omega}_c^2 = \frac{b}{(x-c)^2} + \frac{\alpha}{x-c} + \dots$$

Приравнивая нулю коэффициент при $\frac{1}{(x-c)^2}$ с учетом обеих частей данного уравнения, будем иметь

$$e_c^2 - e_c = b,$$

то есть получаем для e_c две возможности:

$$e_c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4b} \quad \text{или} \quad e_c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4b}.$$

Следовательно, если c является конечным полюсом функции r второго порядка, то

$$\omega = \frac{e_c}{x-c} + \bar{\omega}_c \quad \text{и} \quad e_c = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4b}.$$

Теперь предположим, что c является полюсом r порядка $2\nu \geq 4$. Из доказательства необходимых условий для Случая 1 (см. параграф 2.2) мы получаем, что в таком случае функция ω должна иметь в точке c полюс порядка ν , то есть

$$[\omega]_c = \sum_{i=2}^{\nu} \frac{a_i}{(x-c)^i}.$$

Введем теперь функцию $[\sqrt{r}]_c$ по формуле (3.1). Если ввести обозначение

$$\bar{r}_c = \sqrt{r} - [\sqrt{r}]_c,$$

то будем иметь

$$r = (\bar{r}_c + [\sqrt{r}]_c)^2 = \bar{r}_c^2 + 2\bar{r}_c [\sqrt{r}]_c + ([\sqrt{r}]_c)^2$$

и, следовательно,

$$r - ([\sqrt{r}]_c)^2 = \bar{r}_c^2 + 2\bar{r}_c [\sqrt{r}]_c. \quad (3.8)$$

Используя уравнение Риккати (2.2) и выражение (3.5) для функции ω , можно показать, что

$$\begin{aligned} ([\omega]_c + [\sqrt{r}]_c)([\omega]_c - [\sqrt{r}]_c) &= ([\omega]_c)^2 - ([\sqrt{r}]_c)^2 = \\ &= -[\omega]_c' + \frac{e_c}{(x-c)^2} - \bar{\omega}_c' + r - ([\sqrt{r}]_c)^2 - \frac{2e_c[\omega]_c}{x-c} - \frac{e_c^2}{(x-c)^2} - \\ &\quad - \frac{2e_c\bar{\omega}_c}{x-c} - 2[\omega]_c\bar{\omega}_c - \bar{\omega}_c^2. \end{aligned}$$

Левая часть данного уравнения включает в себя только слагаемые вида $\frac{1}{(x-c)^i}$ и $i = \nu + 2, \dots, 2\nu$. Правая часть данного уравнения включает в себя слагаемые вида $\frac{1}{(x-c)^i}$, причем $i = 1, \dots, \nu + 1$, а также выражения, полиномиальные по $x - c$. Поскольку в правой части не имеется членов вида $\frac{1}{(x-c)^i}$ для $i = \nu + 2, \dots, 2\nu$, то, следовательно, выражение в левой части равенства должно обращаться в ноль (мы учитываем, что $\nu \geq 2$) и поэтому либо

$$[\omega]_c = [\sqrt{r}]_c, \text{ либо } [\omega]_c = -[\sqrt{r}]_c$$

и, окончательно,

$$\omega = \pm [\sqrt{r}]_c + \frac{e_c}{x-c} + \bar{\omega}_c.$$

Используя полученное представление для функции ω и снова подставляя его в уравнение Риккати (2.2), приводим это уравнение к виду

$$\begin{aligned} \frac{\pm a\nu}{(x-c)^{\nu+1}} + \dots + \frac{e_c}{(x-c)^2} - \bar{\omega}_c' + \frac{b}{(x-c)^{\nu+1}} + \dots \\ \dots + \frac{\mp 2ae_c}{(x-c)^{\nu+1}} - \frac{e_c^2}{(x-c)^2} - \frac{2e_c\bar{\omega}_c}{x-c} \mp \frac{2\bar{\omega}_ca}{(x-c)^\nu} + \dots = 0. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при $\frac{1}{(x-c)^{\nu+1}}$ в обеих частях данного уравнения, получаем

$$\pm a\nu + b \mp 2ae_c = 0,$$

откуда

$$e_c = \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{b}{a} \right) \quad \text{или} \quad e_c = \frac{1}{2} \left(\nu - \frac{b}{a} \right).$$

Следовательно, если c — конечный полюс функции r четного порядка $2\nu \geq 4$, тогда

$$\omega = \pm [\sqrt{r}]_c + \frac{e_c}{x-c} + \bar{\omega}_c, \quad e_c = \frac{1}{2} \left(\nu \pm \frac{b}{a} \right).$$

Теперь рассмотрим точку g — точку комплексной плоскости, которая не является полюсом функции r . Разложение функции r в ряд Лорана в окрестности точки g имеет вид многочлена от $x - g$. Раскладывая теперь ω в ряд Лорана в окрестности точки g и используя уравнение Риккати (2.2), получим, применяя рассуждения, аналогичные приведенным выше, что

$$\omega = \frac{f}{x-g} + P(x-g),$$

где f равно 0 или 1, а $P(x-g)$ — выражение, имеющее вид многочлена от $x - g$.

Собирая теперь вместе все то, что мы получили, мы можем написать, что

$$\omega = [\omega]_c + \frac{e_c}{x-c} + \bar{\omega}_c = \sum_{c \in \Gamma} \left(\frac{e_c}{x-c} \pm [\sqrt{r}]_c \right) + \sum_{i=1}^d \frac{1}{x-g_i} + R,$$

где $[\sqrt{r}]_c = 0$, если c не является конечным полюсом функции r порядка ≥ 4 , а R — многочлен, принадлежащий $\mathbb{C}[x]$.

Теперь вычислим полиномиальную часть R функции ω . Для этого воспользуемся разложением в ряд Лорана функции ω в окрестности точки $x = \infty$. Будем иметь

$$\omega = R + \frac{e_\infty}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \dots \quad (3.9)$$

Используя рассуждения, аналогичные предыдущим, можно получить следующие результаты. Если порядок полюса функции r в точке $x = \infty$ больше, чем 2, то $e_\infty = 0; 1$ и $R = 0$, если порядок полюса в точке $x = \infty$ равен 2, то

$$e_\infty = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4b}, \quad R = 0$$

и, наконец, если порядок полюса в точке $x = \infty$ равен $-2\nu \leq 0$, то

$$e_\infty = \frac{1}{2} \left(-\nu \pm \frac{b}{a} \right), \quad R = \pm [\sqrt{r}]_\infty.$$

Следовательно,

$$\omega = \sum_{c \in \Gamma} \left(\frac{e_c}{x - c} + s(c) [\sqrt{r}]_c \right) + s(\infty) [\sqrt{r}]_\infty + \sum_{i=1}^d \frac{1}{x - g_i}, \quad (3.10)$$

где $s(c)$ равно $+$ или $-$ в зависимости от того, какой знак выбирается у соответствующего коэффициента e_c , а $s(\infty)$ равно $+$ или $-$ в зависимости от того, какой знак выбирается у коэффициента e_∞ ; также $[\sqrt{r}]_c = 0$, если c не является полюсом r порядка ≥ 4 и $[\sqrt{r}]_\infty = 0$, если порядок полюса в $x = \infty$ больше, либо равен 2. Раскладывая выражение (3.9) в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$ и приравнивая результат выражению (3.10), получаем уравнение

$$e_\infty = \sum_{c \in \Gamma} e_c + \sum_{i=1}^d 1$$

и, следовательно, отсюда можно получить формулу для вычисления d через e_∞ и e_c :

$$d = e_\infty - \sum_{c \in \Gamma} e_c.$$

Если мы теперь положим

$$P = \prod_{i=1}^d (x - g_i)$$

(заметим, что d является степенью P), то тогда

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^d \frac{1}{x - g_i}$$

и если

$$\theta = \sum_{c \in \Gamma} \left(\frac{e_c}{x - c} \pm [\sqrt{r}]_c \right) \pm [\sqrt{r}]_\infty,$$

то тогда

$$\omega = \theta + \frac{P'}{P}.$$

Таким образом, теперь про θ нам все известно; остается только в явном виде определить P . Сделать это можно следующим образом. Снова воспользуемся уравнением Риккати (2.2) и подставим в него выражение для ω вида

$$\omega = \theta + \frac{P'}{P}.$$

Тогда получим

$$\omega' = \theta' + \frac{PP'' - P'^2}{P^2}, \quad \omega^2 = \theta^2 + \frac{2\theta P'}{P} + \frac{P'^2}{P^2},$$

$$P'' + 2\theta P' + (\theta' + \theta^2 - r)P = 0.$$

Мы получили, что если ω удовлетворяет уравнению Риккати (2.2), то P удовлетворяет уравнению (3.4). Мы можем убедиться, что справедливо и обратное: если P удовлетворяет уравнению (3.4), то ω удовлетворяет уравнению Риккати (2.2) и, следовательно, функция $\eta = \exp \left(\int \omega(x) dx \right)$ является решением дифференциального уравнения (1.3). Действительно,

$$\begin{aligned} \omega' + \omega^2 &= \theta' + \frac{PP'' - P'^2}{P^2} + \theta^2 + \frac{2\theta P'}{P} + \frac{P'^2}{P^2} = \\ &= \frac{P'' + 2\theta P' + P(\theta' + \theta^2)}{P} = \frac{Pr}{P} = r. \end{aligned}$$

Этот вывод завершает доказательство корректности алгоритма Ковачича в Случае 1.

3.3 Пример нахождения лиувиллева решения в Случае 1

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$z'' - \frac{2}{2x+1} z' - \frac{2x+3}{2x+1} z = 0.$$

Преобразование вида (1.2) приводит данное линейное дифференциальное уравнение к виду (1.3)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = r(x) y = \frac{4x^2 + 8x + 6}{(2x+1)^2} y.$$

Легко видеть, что функция $r(x)$ имеет единственный конечный полюс в точке $x = -\frac{1}{2}$, и этот полюс является полюсом второго порядка. Разложим функцию $r(x)$ в сумму простейших дробей. Это разложение имеет вид

$$r(x) = 1 + \frac{1}{x + \frac{1}{2}} + \frac{3}{4 \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Разложение функции $r(x)$ в ряд в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид:

$$r(x)|_{x=\infty} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Таким образом, порядок полюса функции $r(x)$ в точке $x = \infty$ равен нулю. Следовательно, для данного линейного дифференциального уравнения второго порядка выполняются необходимые условия существования лиувиллевых решений, соответствующих Случаю 1 и Случаю 2 Теоремы 2.1. Начнем с проверки существования у данного линейного дифференциального уравнения лиувиллевых решений вида (2.1), то есть решений, соответствующих Случаю 1 Теоремы 2.1.

Шаг 1. В соответствии с алгоритмом Ковачича, вычислим соответствующие конечному полюсу $x = -\frac{1}{2}$ постоянную $[\sqrt{r}]_{-\frac{1}{2}}$ и постоянные $\alpha_{-\frac{1}{2}}^{\pm}$. Имеем:

$$[\sqrt{r}]_{-\frac{1}{2}} = 0, \quad \alpha_{-\frac{1}{2}}^{+} = \frac{3}{2}, \quad \alpha_{-\frac{1}{2}}^{-} = -\frac{1}{2}.$$

Поскольку порядок полюса функции $r(x)$ в точке $x = \infty$ равен нулю, то учитывая разложение функции $r(x)$ в ряд в этой точке, получаем $[\sqrt{r}]_{\infty} = a$, где $a^2 = 1$. Выберем значение $a = 1$, тогда $[\sqrt{r}]_{\infty} = 1$. Определим теперь коэффициент b , вычислив разность

$$r - ([\sqrt{r}]_{\infty})^2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad \text{то есть} \quad b = 1.$$

Это означает, что

$$\alpha_{\infty}^{\pm} = \frac{1}{2} \left(\pm \frac{b}{a} - \nu \right) = \pm \frac{1}{2}.$$

Шаг 2. Таким образом, нам следует рассмотреть 4 набора знаков $s = (s(\infty), s(-\frac{1}{2}))$, где $s(\infty)$ и $s(-\frac{1}{2})$ равны, соответственно, $+$ или $-$ и вычислить для этих наборов постоянную d по формуле (3.2). Имеем:

$$s(\infty) = +, \quad s\left(-\frac{1}{2}\right) = +, \quad d = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1;$$

$$s(\infty) = -, \quad s\left(-\frac{1}{2}\right) = + \quad d = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2;$$

$$s(\infty) = +, \quad s\left(-\frac{1}{2}\right) = -, \quad d = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1;$$

$$s(\infty) = -, \quad s\left(-\frac{1}{2}\right) = -, \quad d = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Таким образом, мы имеем всего два набора знаков, для которых число d является неотрицательным целым числом. Рассмотрим сначала случай $d = 1$.

По формуле (3.3) определим функцию $\theta(x)$, которая в данном случае будет равна

$$\theta = 1 - \frac{1}{2x+1} = \frac{2x}{2x+1}.$$

Шаг 3. Теперь нам нужно найти многочлен P степени $d = 1$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению (3.4). Будем искать соответствующий многочлен в виде $P = x + K$, где K — коэффициент, подлежащий определению. При подстановке функции θ и многочлена P дифференциальное уравнение (3.4) получаем, что левая часть уравнения (3.4) после подстановки и упрощения принимает вид

$$-\frac{4K}{2x+1},$$

и обращается в ноль при $K = 0$. Следовательно, многочлен $P = x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.4), и исходное линейное дифференциальное уравнение второго порядка обладает лиувиллевым решением

$$\eta = \frac{x \exp(x)}{\sqrt{2x+1}},$$

которое является лиувиллевым решением вида (2.1), то есть решением, соответствующем Случаю 1 Теоремы 2.1.

3.4 Алгоритм Ковачича для Случая 2

При рассмотрении алгоритма Ковачича для Случая 2 мы сразу предположим, что необходимые условия существования такого решения, сформулированные в Теореме 2.4, являются выполненными, а кроме того — что Случай 1 не имеет места. Будем искать решение вида (2.6) у линейного дифференциального уравнения (1.3).

Как и для Случая 1, мы будем собирать данные о каждом конечном полюсе функции r , а также о полюсе этой функции в точке $x = \infty$. Для каждого из полюсов мы сформируем множество E_c (или E_∞), состоящее из целых

чисел в количестве от одного до трех. Затем мы рассмотрим семейства элементов из этих множеств – часть из этих семейств будет после рассмотрения отброшена нами, а часть – сохранена. Если ни одно из семейств сохранено не будет, следовательно, Случай 2 не имеет места для дифференциального уравнения (1.3), и это уравнение не имеет лиувиллева решения вида (2.6). Для каждого сохраненного семейства мы попытаемся найти многочлен, удовлетворяющий определенному дифференциальному уравнению. Если для некоторого семейства такой многочлен найдется, то мы сможем получить решение дифференциального уравнения (1.3) в явном виде. Если же мы не сможем найти такой многочлен ни для одного из сохраненных семейств, то уравнение (1.3) не имеет лиувиллевых решений, соответствующих Случаю 2.

Перейдем непосредственно к изложению алгоритма. Обозначим через Γ множество конечных полюсов функции r .

Шаг 1. Для каждого $c \in \Gamma \cup \{\infty\}$ определим множество E_c следующим образом.

(c_1) Если $c \in \Gamma$ – конечный полюс функции r порядка 1, тогда

$$E_c = \{4\}.$$

(c_2) Если $c \in \Gamma$ – конечный полюс функции r порядка 2, и если b – коэффициент при $\frac{1}{(x-c)^2}$ в разложении функции r в сумму простейших дробей, тогда

$$E_c = \left\{ \left(2 + k\sqrt{1 + 4b} \right) \cap \mathbb{Z} \right\}, \quad k = 0, \pm 2.$$

(c_3) Если $c \in \Gamma$ – конечный полюс функции r порядка $\nu > 2$, тогда

$$E_c = \{\nu\}.$$

(∞_1) Если r имеет порядок полюса > 2 в точке $x = \infty$, тогда

$$E_\infty = \{0, 2, 4\}.$$

(∞_2) Если r имеет порядок полюса, равный 2 в точке $x = \infty$, и b – коэффициент при $\frac{1}{x^2}$ в разложении функции r в ряд Лорана в окрестности $x = \infty$, тогда

$$E_\infty = \left\{ \left(2 + k\sqrt{1 + 4b} \right) \cap \mathbb{Z} \right\}, \quad k = 0, \pm 2.$$

(∞_3) Если r имеет порядок полюса $\nu < 2$ в точке $x = \infty$, тогда

$$E_\infty = \{\nu\}.$$

Шаг 2. Рассмотрим семейства $s = (e_\infty, e_c)$, $c \in \Gamma$, где $e_c \in E_c$, $e_\infty \in E_\infty$ и по крайней мере одно из этих целых чисел является нечетным. Для каждого из этих семейств вычислим число d по формуле

$$d = \frac{1}{2} \left(e_\infty - \sum_{c \in \Gamma} e_c \right). \quad (3.11)$$

Если d – неотрицательное целое число, то соответствующее семейство должно быть сохранено. В противном случае оно должно быть отброшено.

Шаг 3. Для каждого семейства, сохраненного на шаге 2, построим рациональную функцию

$$\theta = \frac{1}{2} \sum_{c \in \Gamma} \frac{e_c}{x - c} \quad (3.12)$$

и попытаемся найти многочлен степени d (где d определяется формулой (3.11)), удовлетворяющий уравнению

$$P''' + 3\theta P'' + (3\theta^2 + 3\theta' - 4r) P' + (\theta'' + 3\theta\theta' + \theta^3 - 4r\theta - 2r') P = 0. \quad (3.13)$$

Если соответствующий многочлен удалось найти, положим

$$\varphi = \theta + \frac{P'}{P}$$

и пусть ω — решение квадратного уравнения вида

$$\omega^2 - \varphi\omega + \frac{1}{2}\varphi' + \frac{1}{2}\varphi^2 - r = 0. \quad (3.14)$$

Тогда $\eta = \exp\left(\int \omega(x) dx\right)$ — решение линейного дифференциального уравнения (1.3). Если соответствующий многочлен P найти не удалось, то Случай 2 не имеет места, и у линейного дифференциального уравнения (1.3) не существует лиувиллевых решений вида (2.6).

Далее мы даем обоснование алгоритма Ковачича для Случая 2.

3.5 Обоснование алгоритма Ковачича для Случая 2

В Случае 2 задача состоит в том, чтобы найти решение дифференциального уравнения (1.3) вида (2.6). Группа Галуа соответствующего дифференциального уравнения сопряжена подгруппе группы

$$D^\dagger = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}, c \in \mathbb{C}, c \neq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c^{-1} & 0 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{C}, c \neq 0 \right\}$$

и функция $\eta^2\zeta^2$ является инвариантом группы (то есть при действии на функцию $\eta^2\zeta^2$ автоморфизма из группы Галуа дифференциального уравнения (1.3) она не изменяется). Следовательно, функция $\eta^2\zeta^2$ является рациональной функцией, но при этом функция $\eta\zeta$ рациональной не является (иначе мы снова получим Случай 1). Поэтому мы можем написать, что

$$\eta^2\zeta^2 = \alpha \prod_{c \in \Gamma} (x - c)^{e_c} \prod_{i=1}^m (x - g_i)^{f_i}, \quad \alpha = \text{const}$$

и, следовательно,

$$\varphi = \frac{(\eta\zeta)'}{\eta\zeta} = \frac{1}{2} \frac{(\eta^2\zeta^2)'}{\eta^2\zeta^2} = \frac{1}{2} \sum_{c \in \Gamma} \frac{e_c}{x-c} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{f_i}{x-g_i}. \quad (3.15)$$

Задача алгоритма заключается в том, чтобы получить явные значения для коэффициентов e_c и f_i (нам не требуется находить явные значения g_i). Как только функция φ будет найдена, мы укажем квадратное уравнение, с коэффициентами, зависящими от φ и ее производных, которое задает функцию ω и, следовательно, определяет решение дифференциального уравнения (1.3).

Поскольку η и ζ — решения дифференциального уравнения (1.3), то функция φ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.7). Именно с помощью уравнения (2.7) мы будем искать зависимость между функцией φ (то есть, по сути, между e_c и f_i) и известной функцией r .

Определим теперь коэффициенты e_c , рассматривая конечные полюсы функции r и анализируя разложения в ряд Лорана функций r и φ в проколотой окрестности этих полюсов.

Предположим, что c является конечным полюсом функции r порядка 1. Тогда

$$r = \frac{\alpha}{x-c} + P(x-c), \quad (3.16)$$

где $P(x-c)$ — выражение, имеющее вид многочлена от $x-c$, и также

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{e_c}{x-c} + k + Q(x-c), \quad k \in \mathbb{C} \quad (3.17)$$

Подставляя разложения (3.16) и (3.17) в (2.7), получаем уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{e_c}{(x-c)^3} + \dots + \frac{-\frac{3}{4}e_c^2}{(x-c)^3} + \frac{-\frac{3}{2}e_ck}{(x-c)^2} + \dots + \frac{\frac{1}{8}e_c^3}{(x-c)^3} + \\ & + \frac{\frac{3}{4}e_c^2k}{(x-c)^2} + \dots = \frac{2\alpha e_c}{(x-c)^2} + \dots + \frac{-2\alpha}{(x-c)^2} + \dots \end{aligned}$$

Приравнивая нулю коэффициент при $\frac{1}{(x-c)^3}$ в данном уравнении, получаем

$$e_c - \frac{3}{4}e_c^2 + \frac{1}{8}e_c^3 = 0, \text{ то есть } e_c = 0, 2, 4.$$

Приравнивая нулю коэффициент при $\frac{1}{(x-c)^2}$ в данном уравнении, получаем

$$-\frac{3}{2}e_c k + \frac{3}{4}e_c^2 k = 2\alpha e_c - 2\alpha.$$

Поскольку $\alpha \neq 0$, то $e_c \neq 0$ и $e_c \neq 2$. Следовательно, если c является конечным полюсом функции r порядка 1, то

$$e_c = 4.$$

Теперь предположим, что c является конечным полюсом функции r порядка 2. Тогда функции r и φ представляются в виде:

$$r = \frac{b}{(x-c)^2} + \frac{\alpha}{x-c} + P(x-c), \quad (3.18)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{e_c}{x-c} + Q(x-c). \quad (3.19)$$

В формулах (3.18) и (3.19) через $P(x-c)$ и $Q(x-c)$ обозначены выражения, имеющие вид многочленов от $x-c$. Подставляя (3.18) и (3.19) в уравнение (2.7), получаем следующее уравнение

$$\frac{e_c}{(x-c)^3} + \dots + \frac{-\frac{3}{4}e_c^2}{(x-c)^3} + \dots + \frac{\frac{1}{8}e_c^3}{(x-c)^3} = \frac{2be_c}{(x-c)^3} + \dots + \frac{-4b}{(x-c)^3} + \dots$$

Приравнивая нулю коэффициент при $\frac{1}{(x-c)^3}$ в обеих частях данного уравнения, получаем

$$e_c - \frac{3}{4}e_c^2 + \frac{1}{8}e_c^3 = 2be_c - 4b,$$

то есть для e_c имеются три возможных значения:

$$e_c = 2, \quad e_c = 2 + 2\sqrt{1 + 4b}, \quad e_c = 2 - 2\sqrt{1 + 4b}.$$

Поскольку число e_c предполагается целым, то значения e_c , не являющиеся целыми числами, должны быть отброшены.

Следовательно, если c является конечным полюсом функции r порядка 2, то

$$e_c = 2, \quad 2 \pm 2\sqrt{1 + 4b} \in \mathbb{Z}.$$

Теперь предположим, что c является конечным полюсом функции r порядка $\nu > 2$. Тогда

$$r = \frac{\alpha}{(x - c)^\nu} + \frac{\beta}{(x - c)^{\nu-1}} + \dots, \quad (3.20)$$

а функция φ имеет вид (3.19). Подставляя выражения (3.19) и (3.20) в уравнение (2.7), получаем уравнение

$$\frac{e_c}{(x - c)^3} + \frac{-\frac{3}{4}e_c^2}{(x - c)^3} + \dots + \frac{\frac{1}{8}e_c^3}{(x - c)^3} + \dots = \frac{2\alpha e_c}{(x - c)^{\nu+1}} + \dots + \frac{-2\alpha\nu}{(x - c)^{\nu+1}} + \dots$$

Так как $\nu > 2$, следовательно, $\nu + 1 > 3$ и $2\alpha e_c - 2\alpha\nu = 0$, то есть $e_c = \nu$. Следовательно, если c – конечный полюс функции r порядка $\nu > 2$, то

$$e_c = \nu.$$

Теперь посмотрим на точки g_i , которые являются полюсами функции φ , но не будут особыми точками для функции r . Тогда

$$r = P(x - g_i), \quad (3.21)$$

где $P(x - g_i)$ — выражение, имеющее вид многочлена от $x - g_i$, и также

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{f_i}{x - g_i} + g + Q(x - g_i), \quad g \in \mathbb{C}. \quad (3.22)$$

Подставив выражения (3.21) и (3.22) в уравнение (2.7), получим следующее уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{f_i}{(x - g_i)^3} + \dots + \frac{-\frac{3}{4}f_i^2}{(x - g_i)^3} + \frac{-\frac{3}{2}f_i g}{(x - g_i)^2} + \dots + \frac{\frac{1}{8}f_i^3}{(x - g_i)^3} + \\ & + \frac{\frac{3}{4}f_i^2 g}{(x - g_i)^2} + \dots = \frac{\alpha}{x - g_i} + \dots \end{aligned}$$

Поскольку в правой части данного уравнения отсутствуют слагаемые вида $\frac{1}{(x - g_i)^3}$, следовательно должно выполняться условие

$$f_i - \frac{3}{4}f_i^2 + \frac{1}{8}f_i^3 = 0,$$

из которого следует, что

$$f_i = 0, 2, 4,$$

то есть все f_i в φ являются четными.

Собирая вместе все факты, что мы получили, находим

$$\eta^2 \zeta^2 = \alpha \prod_{c \in \Gamma} (x - c)^{e_c} P^2,$$

где $\alpha = \text{const}$, а $P \in \mathbb{C}[x]$ – многочлен такой, что

$$P^2 = \prod_{i=1}^m (x - g_i)^{f_i}.$$

Теперь воспользуемся разложением функции φ в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$, а именно:

$$\varphi = \frac{\frac{1}{2}e_\infty}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \dots. \quad (3.23)$$

Рассуждая также как и в случае конечного полюса, можно показать, что если порядок полюса функции r в точке $x = \infty$ больше двух, то $e_\infty = 0, 2, 4$;

если порядок полюса функции r в точке $x = \infty$ равен 2, то $e_\infty = 2, 2 \pm 2\sqrt{1+4b}$; и, наконец, если порядок полюса функции r в точке $x = \infty$ равен $\nu < 2$, то $e_\infty = \nu$.

Разложим выражение (3.15) в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$ и приравняем его выражению (3.23). В полученном соотношении приравняем нулю коэффициент при $\frac{1}{x}$. В результате получается уравнение

$$\frac{1}{2}e_\infty = \frac{1}{2} \sum_{c \in \Gamma} e_c + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m f_i.$$

Если d – степень многочлена P , входящего в функцию $\eta^2 \zeta^2$. Следовательно, $2d = \sum_{i=1}^m f_i$, так что из последнего равенства находим

$$d = \frac{1}{2} \left(e_\infty - \sum_{c \in \Gamma} e_c \right).$$

Полученное выражение для степени многочлена P в точности совпадает с формулой (3.11).

Если теперь ввести функцию θ

$$\theta = \frac{1}{2} \sum_{c \in \Gamma} \frac{e_c}{x - c},$$

тогда

$$\varphi = \theta + \frac{P'}{P}.$$

Используя это выражение и уравнение (2.7), получим для многочлена P дифференциальное уравнение (3.13). Но мы до сих пор не имеем выражения для функции ω , нахождение которой составляет цель нашего алгоритма. В работе Дж. Ковачича [105] вводится уравнение (3.14) для нахождения функции ω . Мы можем убедиться, что если ω является решением уравнения (3.14) и для дифференциального уравнения (1.3) имеет место Случай 2, то функция ω

удовлетворяет уравнению (2.2) и, следовательно, функция $\eta = \exp \left(\int \omega(x) dx \right)$ является решением дифференциального уравнения (1.3).

Если мы продифференцируем уравнение (3.14), то получим

$$(2\omega - \varphi) \omega' = \varphi' \omega - \frac{1}{2} \varphi'' - \varphi \varphi' + r'.$$

С другой стороны, из (3.14) мы имеем

$$\omega^2 - r = \varphi \omega - \frac{1}{2} \varphi' - \frac{1}{2} \varphi^2,$$

то есть

$$(2\omega - \varphi)(\omega' + \omega^2 - r) = -\frac{1}{2} (\varphi'' + 3\varphi\varphi' + \varphi^3 - 4r\varphi - 2r').$$

Последнее выражение обращается в нуль в силу (2.7). Следовательно, или $2\omega - \varphi = 0$ или $\omega' + \omega^2 - r = 0$. Однако $2\omega - \varphi$ не может быть нулем, поскольку функция φ является рациональной и, значит, при выполнении условия $2\omega - \varphi = 0$ рациональной будет и функция ω . Тем самым, мы приходим к Случаю 1, однако этот случай по условию не может иметь места, когда имеет место Случай 2.

Следовательно, $\omega' + \omega^2 - r = 0$ и $\eta = \exp \left(\int \omega(x) dx \right)$ является решением дифференциального уравнения (1.3). Это доказывает корректность приведенного алгоритма для Случая 2.

3.6 Пример нахождения лиувиллева решения в Случае 2

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$z'' - \frac{1}{2x} z' + \frac{x+1}{2x^2} z = 0.$$

При помощи преобразования вида (1.2) приводим данное линейное дифференциальное уравнение к виду (1.3):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = r(x) y = -\frac{3+8x}{16x^2} y.$$

Легко видеть, что функция $r(x)$ имеет единственный конечный полюс в точке $x = 0$, и этот полюс является полюсом второго порядка. Разложим функцию $r(x)$ в сумму простейших дробей. Это разложение имеет вид:

$$r(x) = -\frac{1}{2x} - \frac{3}{16x^2}.$$

Разложение функции $r(x)$ в ряд в окрестности точки $x = \infty$ имеет тот же вид:

$$r(x)|_{x=\infty} = -\frac{1}{2x} - \frac{3}{16x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Таким образом, в точке $x = \infty$ функция $r(x)$ имеет полюс первого порядка. Следовательно, для данного линейного дифференциального уравнения второго порядка выполняются только необходимые условия существования решения вида (2.6), то есть решения, соответствующего Случаю 2 Теоремы 2.1. Воспользуемся алгоритмом Ковачича и попытаемся найти у данного линейного дифференциального уравнения лиувиллево решение вида (2.6).

Шаг 1. Определим сначала множества чисел E_0 и E_∞ . Поскольку коэффициент при $1/x^2$ в разложении функции $r(x)$ в сумму простейших дробей равен $b = -3/16$, поэтому:

$$2\sqrt{1+4b} = 1,$$

откуда следует, что $E_0 = \{1, 2, 3\}$. В точке $x = \infty$ порядок полюса функции $r(x)$ равен 1, поэтому $E_\infty = \{1\}$.

Шаг 2. Таким образом, в нашем распоряжении имеется всего три набора $s = (e(\infty), ee(0))$ элементов множеств E_∞, E_0 :

$$s_1 = (1, 1); \quad s_2 = (1, 2); \quad s_3 = (1, 3).$$

Для каждого из этих наборов мы должны вычислить число d по формуле (3.11):

$$d = \frac{1}{2}(e_\infty - e_0).$$

В соответствии с алгоритмом, число d должно быть неотрицательным целым числом. Легко видеть, что единственным набором, для которого d будет неотрицательным числом, является набор s_1 , для которого $d = 0$.

Шаг 3. По формуле (3.12) составим функцию θ , воспользовавшись набором s_1 . Получим $\theta = 1/(2x)$. Многочлен P степени $d = 0$ ($P \equiv 1$) должен тождественно удовлетворять дифференциальному уравнению (3.13). Действительно, после подстановки в это уравнение функций θ и P оно выполняется тождественно. Таким образом, искомым многочлен равен $P \equiv 1$.

Теперь построим функцию

$$\varphi = \theta + \frac{P'}{P} = \frac{1}{2x}$$

и найдем решения квадратного уравнения

$$0 = \omega^2 - \varphi\omega + \left(\frac{1}{2}\varphi' + \frac{1}{2}\varphi^2 - r\right) = \omega^2 - \frac{1}{2x}\omega + \frac{1+8x}{16x^2}.$$

Решения этого квадратного уравнения имеют вид

$$\omega = \frac{1 \pm 2\sqrt{-2x}}{4x}$$

и, следовательно, исходное дифференциальное уравнение допускает решение

$$\eta = \exp \left(\int \omega(x) dx \right) = x^{\frac{1}{4}} \exp(\sqrt{-2x}),$$

которое является лиувиллевым решением вида (2.6).

3.7 Алгоритм Ковачича для Случая 3

В Случае 3 дифференциальное уравнение (1.3) допускает только алгебраические решения. Предположим с самого начала, что для линейного дифференциального уравнения второго порядка (1.3) Случаи 1 и 2 не имеют места (хотя и в этих случаях возможно, что у уравнения (1.3) существуют алгебраические решения).

Пусть η — решение уравнения (1.3) и пусть $\omega = \eta'/\eta$. Можно показать (см. [105]), что ω представляет собой алгебраическую функцию над $\mathbb{C}(x)$ и удовлетворяет алгебраическому уравнению степени 4, 6 или 12. Задачей алгоритма в данном случае является нахождение минимального многочлена с рациональными коэффициентами, корнем которого является функция ω . Сам алгоритм описывается следующим образом. Как и прежде, обозначим через Γ множество конечных полюсов функции r . В силу необходимых условий, в Случае 3 функция r не может иметь полюс порядка большего, чем 2.

Шаг 1. Для каждого $c \in \Gamma \cup \{\infty\}$ определим множество E_c , состоящее из целых чисел, следующим образом.

(c_1) Если $c \in \Gamma$ — полюс функции r порядка 1, тогда

$$E_c = \{12\}.$$

(c_2) Если $c \in \Gamma$ – полюс функции r порядка 2, и b – коэффициент при $\frac{1}{(x-c)^2}$ в разложении функции r на простейшие дроби, тогда

$$E_c = \left\{ \left(6 + k\sqrt{1+4b} \right) \cap \mathbb{Z} \right\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6.$$

(∞) Если разложение функции r в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид

$$r = \frac{b}{x^2} + \dots,$$

где b – комплексное число и, возможно, $b = 0$, тогда

$$E_\infty = \left\{ \left(6 + k\sqrt{1+4b} \right) \cap \mathbb{Z} \right\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6.$$

Шаг 2. Рассмотрим семейства элементов полученных множеств $s = (e_\infty, e_c)$, $c \in \Gamma$, где $e_c \in E_c$, $e_\infty \in E_\infty$. Пусть

$$d = e_\infty - \sum_{c \in \Gamma} e_c. \quad (3.24)$$

Если d – неотрицательное целое число, то соответствующее семейство должно быть сохранено, в противном случае оно должно быть отброшено.

Шаг 3. Для каждого семейства, сохраненного на предыдущем шаге, определим рациональную функцию

$$\theta = \sum_{c \in \Gamma} \frac{e_c}{x - c} \quad (3.25)$$

и многочлен

$$S = \prod_{c \in \Gamma} (x - c). \quad (3.26)$$

Теперь будем искать многочлен P степени d , удовлетворяющий системе уравнений, которую можно рекуррентно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{12} &= -P, \\ P_{i-1} &= -SP'_i + ((12-i)S' - S\theta)P_i - (12-i)(i+1)S^2rP_{i+1}, \\ P_{-1} &= 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Второе из соотношений (3.27) используется при $i = 12, \dots, 0$. Смысл последнего соотношения состоит в том, что когда мы вычислим P_{-1} , пользуясь второй из формул, мы должны приравнять его нулю.

Если соответствующий многочлен P найден, то пусть ω – корень алгебраического уравнения вида

$$\sum_{i=0}^{12} \frac{S^i P_i}{(12-i)!} \omega^i = 0. \quad (3.28)$$

Тогда $\eta = \exp\left(\int \omega(x) dx\right)$ – решение линейного дифференциального уравнения (1.3). Если получить P_i не удалось, значит Случай 3 не имеет места.

Обоснование корректности алгоритма Ковачича для Случая 3 является значительно более громоздким, по сравнению с обоснованиями корректности этого алгоритма для Случаев 1 и 2. Поэтому не будем приводить его здесь полностью. Детальное обоснование корректности алгоритма в Случае 3 содержится в работе Д. Ковачича [105]. Мы приведем только формулировки и доказательства нескольких ключевых фактов, на которые опирается соответствующее обоснование. Кроме того, явно укажем связь алгоритма для Случая 3 с алгоритмами для Случаев 1 и 2.

3.8 Некоторые ключевые факты, используемые для обоснования алгоритма Ковачича в Случае 3

Главной частью алгоритма в Случае 3 является нахождение многочлена P степени d (где d определяется формулой (3.24)) по формулам (3.27). Перепишем соотношения (3.27) следующим образом:

$$\begin{aligned} P_n &= -P, \\ P_{i-1} &= -SP'_i + ((n-i)S' - S\theta)P_i - (n-i)(i+1)S^2rP_{i+1}, \\ P_{-1} &= 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

то есть вместо числа 12 напишем произвольное n . Соответственно перепишем и формулу (3.28), заменив в ней 12 на произвольное n :

$$\sum_{i=0}^n \frac{S^i P_i}{(n-i)!} \omega^i = 0. \quad (3.30)$$

Сформулируем и докажем теперь одно из основных утверждений, на которое опирается обоснование алгоритма Ковачича в Случае 3.

Теорема 3.1. *Если многочлен P является решением уравнения $P_{-1} = 0$, где P_{i-1} , $i = n, \dots, 0$ определяются из системы уравнений (3.29) и если ω является решением уравнения (3.30), тогда функция*

$$\eta = \exp \left(\int \omega(x) dx \right) \quad (3.31)$$

является решением дифференциального уравнения (1.3).

Доказательство. Определим следующий многочлен с переменными коэффициентами, зависящими от независимой переменной x :

$$A(u) = \sum_{i=0}^n \frac{S^i P_i}{(n-i)!} u^i = 0. \quad (3.32)$$

Тогда для любого целого $k \geq 0$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} (u^2 - r) \frac{\partial^{k+1} A}{\partial u^{k+1}} &= \frac{\partial^{k+1} A}{\partial u^k \partial x} + k(n - k + 1) \frac{\partial^{k-1} A}{\partial u^{k-1}} + \\ &+ \left((n - 2k)u + \theta - \frac{nS'}{S} \right) \frac{\partial^k A}{\partial u^k}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

При $k = 0$ соотношение (3.33) принимает вид:

$$(u^2 - r) \frac{\partial A}{\partial u} = \frac{\partial A}{\partial x} + \left(nu + \theta - \frac{nS'}{S} \right) A.$$

Докажем справедливость этого соотношения. С учетом того, что $A(u)$ определяется формулой (3.32), имеем:

$$\frac{\partial A}{\partial u} = \sum_{i=1}^n \frac{iS^i P_i}{(n-i)!} u^{i-1}.$$

Тогда

$$(u^2 - r) \frac{\partial A}{\partial u} = \sum_{i=1}^n \frac{iS^i P_i}{(n-i)!} u^{i+1} - r \sum_{i=1}^n \frac{iS^i P_i}{(n-i)!} u^{i-1}. \quad (3.34)$$

Будем преобразовывать суммы, стоящие в правой части равенства (3.34). В первой сумме отделим слагаемое, соответствующее значению $i = n$. Во второй сумме сдвинем индекс суммирования на единицу: будем считать, что i меняется от 0 до $n-1$. Тогда выражение в правой части соотношения (3.34) перепишется следующим образом:

$$(u^2 - r) \frac{\partial A}{\partial u} = nS^n P_n u^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{iS^i P_i}{(n-i)!} u^{i+1} - r \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)S^{i+1} P_{i+1}}{(n-i-1)!} u^i. \quad (3.35)$$

Выражение $nS^n P_n u^{n+1}$ запишем как

$$nS^n P_n u^{n+1} = nu (S^n P_n u^n) = nu \left(A - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{S^i P_i}{(n-i)!} u^i \right) = nuA - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{nS^i P_i}{(n-i)!} u^{i+1}.$$

В результате соотношение (3.35) может быть переписано в виде:

$$(u^2 - r) \frac{\partial A}{\partial u} = nuA - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-i) S^i P_i}{(n-i)!} u^{i+1} - r \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-i)(i+1) S^{i+1} P_{i+1}}{(n-i)!} u^i. \quad (3.36)$$

В соотношении (3.36) перепишем второе слагаемое следующим образом:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-i) S^i P_i}{(n-i)!} u^{i+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{S^i P_i}{(n-i-1)!} u^{i+1} = \sum_{i=0}^n \frac{S^{i-1} P_{i-1}}{(n-i)!} u^i$$

с учетом того, что $P_{-1} = 0$. Окончательно, перепишем (3.36) в виде

$$(u^2 - r) \frac{\partial A}{\partial u} = nuA - \sum_{i=0}^n \frac{S^{i-1} P_{i-1}}{(n-i)!} u^i - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-i)(i+1) S^{i+1} P_{i+1} r}{(n-i)!} u^i.$$

Таким образом, получаем:

$$(u^2 - r) \frac{\partial A}{\partial u} = nuA - \sum_{i=0}^n \frac{S^{i-1} u^i}{(n-i)!} [P_{i-1} + (n-i)(i+1) S^2 r P_{i+1}]. \quad (3.37)$$

Для дальнейшего преобразования уравнения (3.37) воспользуемся формулами (3.29). В соответствии с этими формулами имеем:

$$P_{i-1} + (n-i)(i+1) S^2 r P_{i+1} = -S P'_i - i S' P_i - S \left(\theta - \frac{n S'}{S} \right) P_i. \quad (3.38)$$

С учетом формулы (3.38) соотношение (3.37) перепишется следующим образом:

$$\begin{aligned} (u^2 - r) \frac{\partial A}{\partial u} &= nuA + \sum_{i=0}^n \frac{S^i P'_i}{(n-i)!} u^i + \sum_{i=0}^n \frac{i S^{i-1} S' P_i}{(n-i)!} u^i + \\ &+ \left(\theta - \frac{n S'}{S} \right) \sum_{i=0}^n \frac{S^i P_i}{(n-i)!} u^i = nuA + \frac{\partial A}{\partial x} + \left(\theta - \frac{n S'}{S} \right) A. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливость соотношения (3.33) при $k = 0$ доказана. Дальнейшее доказательство соотношения (3.33) производится методом математической индукции.

Из определения многочлена $A(u)$ следует, что $A(\omega) = 0$. Покажем, что из условия $A(\omega) = 0$ следует $\omega' + \omega^2 = r$ (это эквивалентно утверждению, что функция (3.31) является решением дифференциального уравнения (1.3)). Будем доказывать от противного. Предположим $\omega' + \omega^2 - r \neq 0$ и придем к противоречию. Поскольку $A(\omega) = 0$, то

$$\frac{dA(\omega)}{dx} = 0.$$

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$\frac{dA(\omega)}{dx} = \frac{\partial A}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dx} + \frac{\partial A}{\partial x} = 0,$$

или

$$\frac{\partial A}{\partial \omega} \omega' + \frac{\partial A}{\partial x} = 0, \quad \text{то есть} \quad \frac{\partial A}{\partial \omega} \omega' = -\frac{\partial A}{\partial x}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} (\omega' + \omega^2 - r) \frac{\partial A}{\partial \omega} &= -\frac{\partial A}{\partial x} + (\omega^2 - r) \frac{\partial A}{\partial \omega} = \\ &= -\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial x} + \left(n\omega + \theta - \frac{nS'}{S} \right) A(\omega) = 0, \end{aligned}$$

поскольку $A(\omega) = 0$. Так как мы предположили, что $\omega' + \omega^2 - r \neq 0$, то отсюда следует, что

$$\frac{\partial A}{\partial \omega} = 0.$$

Итак, мы доказали, что если $\omega' + \omega^2 - r \neq 0$, то $A(\omega) = 0$ и $\partial A / \partial \omega = 0$.

Теперь воспользуемся методом математической индукции и докажем, что

$$\frac{\partial^{k+1} A(\omega)}{\partial \omega^{k+1}} = 0.$$

Предположим, что

$$\frac{\partial^{k-1} A(\omega)}{\partial \omega^{k-1}} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^k A(\omega)}{\partial \omega^k} = 0. \quad (3.39)$$

Тогда имеем:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^k A(\omega)}{\partial \omega^k} \right) = 0, \quad \text{то есть} \quad \frac{\partial^{k+1} A(\omega)}{\partial \omega^{k+1}} \omega' + \frac{\partial^{k+1} A(\omega)}{\partial \omega^k \partial x} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^{k+1} A(\omega)}{\partial \omega^{k+1}} \omega' = - \frac{\partial^{k+1} A(\omega)}{\partial \omega^k \partial x},$$

и значит

$$(\omega' + \omega^2 - r) \frac{\partial^{k+1} A(\omega)}{\partial \omega^{k+1}} = - \frac{\partial^{k+1} A(\omega)}{\partial \omega^k \partial x} + (\omega^2 - r) \frac{\partial^{k+1} A(\omega)}{\partial \omega^{k+1}}. \quad (3.40)$$

С учетом соотношения (3.33) равенство (3.40) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} (\omega' + \omega^2 - r) \frac{\partial^{k+1} A(\omega)}{\partial \omega^{k+1}} &= k(n - k + 1) \frac{\partial^{k-1} A(\omega)}{\partial \omega^{k-1}} + \\ &+ \left((n - 2k)u + \theta - \frac{nS'}{S} \right) \frac{\partial^k A(\omega)}{\partial \omega^k}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Принимая во внимание равенства (3.39), из (3.41) получаем, что

$$(\omega' + \omega^2 - r) \frac{\partial^{k+1} A(\omega)}{\partial \omega^{k+1}} = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial^{k+1} A(\omega)}{\partial \omega^{k+1}} = 0, \quad \forall k \geq 0.$$

Однако полученное соотношение противоречит условию

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n A(\omega)}{\partial \omega^n} &= \frac{\partial^n}{\partial \omega^n} \left(\sum_{i=0}^n \frac{S^i P_i}{(n-i)!} \omega^i \right) = \sum_{i=0}^n \frac{S^i P_i}{(n-i)!} \cdot \frac{\partial^n \omega^i}{\partial \omega^n} = \\ &= S^n P_n \frac{\partial^n \omega^n}{\partial \omega^n} = S^n P_n n! \neq 0.\end{aligned}$$

Таким образом, условие $A(\omega) = 0$ равносильно условию $\omega' + \omega^2 - r = 0$, из которого следует, что функция (3.31) является решением дифференциального уравнения (1.3). Окончательно, если ω удовлетворяет уравнению $A(\omega) = 0$, где P_i соответствуют многочлену P степени d рекуррентного уравнения (3.29), то функция (3.31) является решением дифференциального уравнения (1.3). Теорема доказана. $\square$

Из этой теоремы следует, что если мы найдем многочлен P степени d по формулам (3.27), а затем по этим же формулам вычислим коэффициенты P_i , то мы сможем построить алгебраическое уравнение (3.28) для нахождения ω и тем самым найти решение дифференциального уравнения (1.3).

Покажем теперь, что рекуррентные формулы (3.29) могут быть пригодны и при описании алгоритма Ковачича в Случаях 1 и 2. Рассмотрим формулы (3.29) и положим в них $n = 1$. Тогда эти формулы примут вид:

$$\begin{aligned}P_1 &= -P, \\ P_{i-1} &= -SP'_i + ((1-i)S' - S\theta)P_i - (1-i)(i+1)S^2rP_{i+1}, \\ P_{-1} &= 0,\end{aligned}\tag{3.42}$$

Из формул (3.42), полагая $i = 1, 0$, последовательно находим:

$$\begin{aligned}P_0 &= SP' + S\theta P = SP \left(\theta + \frac{P'}{P} \right), \\ P_{-1} &= -S^2 (P'' + 2\theta P' + (\theta' + \theta^2 - r)P).\end{aligned}$$

Учитывая, что $S \neq 0$, условие $P_{-1} = 0$ равносильно условию

$$P'' + 2\theta P' + (\theta' + \theta^2 - r) P = 0,$$

что совпадает с уравнением (3.4) для нахождения многочлена P в Случае 1 алгоритма Ковачича. Функция ω , вычисляемая по формуле (3.30), имеет вид:

$$SP' + S\theta P - SP\omega = 0,$$

откуда находим

$$\omega = \theta + \frac{P'}{P}.$$

Решение η , вычисляемое по формуле (3.31), имеет вид

$$\eta = \exp \left(\int \omega(x) dx \right) = P \exp \left(\int \theta(x) dx \right),$$

то есть именно тот вид, который имеет решение в Случае 1 алгоритма Ковачича.

Обратимся снова к формулам (3.29) и положим в них $n = 2$. Тогда эти формулы примут вид:

$$\begin{aligned} P_2 &= -P, \\ P_{i-1} &= -SP'_i + ((2-i)S' - S\theta)P_i - (2-i)(i+1)S^2rP_{i+1}, \\ P_{-1} &= 0, \end{aligned} \tag{3.43}$$

Из формул (3.43), полагая $i = 2, 1, 0$ последовательно находим:

$$P_2 = -P, \quad P_1 = SP' + S\theta P,$$

$$P_0 = -S^2 (P'' + 2\theta P' + (\theta' + \theta^2 - 2r) P),$$

$$P_{-1} = S^3 (P''' + 3\theta P'' + (3\theta^2 + 3\theta' - 4r) P' + (\theta'' + 3\theta\theta' + \theta^3 - 4r\theta - 2r') P).$$

Учитывая, что $S \neq 0$, условие $P_{-1} = 0$ равносильно условию

$$P''' + 3\theta P'' + (3\theta^2 + 3\theta' - 4r) P' + (\theta'' + 3\theta\theta' + \theta^3 - 4r\theta - 2r') P = 0,$$

что совпадает с уравнением (3.13) для нахождения многочлена P в Случае 2 алгоритма Ковачича. Функция ω , вычисляемая по формуле (3.30), удовлетворяет уравнению

$$\omega^2 - \left(\theta + \frac{P'}{P}\right) \omega + \frac{1}{2} \left(\frac{P''}{P} + \frac{2\theta P'}{P} + \theta' + \theta^2 - 2r\right) = 0,$$

которое может быть представлено в виде

$$\omega^2 - \varphi\omega + \frac{1}{2}\varphi' + \frac{1}{2}\varphi^2 - r = 0,$$

если положить

$$\varphi = \theta + \frac{P'}{P}.$$

Данное уравнение в точности совпадает с уравнением (3.14) для нахождения функции ω в Случае 2 алгоритма Ковачича. Таким образом, можно сделать вывод, что формулы (3.29) связывают между собой все три Случая, которые могут иметь место при изучении линейного дифференциального уравнения второго порядка методом Ковачича.

3.9 Пример нахождения лиувиллева решения в Случае 3.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $y'' = r(x)y$ с функцией $r(x)$, равной

$$r(x) = -\frac{5x^2 + 27}{36(x^2 - 1)^2} = -\frac{2}{9(x-1)^2} + \frac{11}{72(x-1)} - \frac{2}{9(x+1)^2} - \frac{11}{72(x+1)}.$$

Таким образом, функция $r(x)$ имеет два полюса в точках $x = \pm 1$ и оба эти полюса имеют второй порядок. Порядок функции $r(x)$ в точке $x = \infty$ также равен двум. Необходимые условия существования лиувиллевых решений урав-

нения (1.3) с данной функцией $r(x)$, перечисленные в Теореме 2.1, выполняются для всех трех случаев. Сначала попытаемся найти решение, соответствующее Случаю 1 Теоремы 2.1. Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска решения вида (2.1) уравнения (1.3) так, как он описан в пункте 3.1.

Шаг 1. Вычислим следующие величины:

$$[\sqrt{r}]_1 = 0, \quad \alpha_1^+ = \frac{2}{3}, \quad \alpha_1^- = \frac{1}{3};$$

$$[\sqrt{r}]_{-1} = 0, \quad \alpha_{-1}^+ = \frac{2}{3}, \quad \alpha_{-1}^- = \frac{1}{3};$$

$$[\sqrt{r}]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = \frac{5}{6}, \quad \alpha_\infty^- = \frac{1}{6}.$$

Шаг 2. Поскольку число ρ конечных полюсов функции $r(x)$ равно 2, то мы имеем $2^{\rho+1} = 2^3 = 8$ наборов знаков $s = (s(\infty), s(1), s(-1))$. Для каждого из этих наборов по формуле (3.2) вычислим величину d :

$$d = \alpha_\infty^{s(\infty)} - \alpha_1^{s(1)} - \alpha_{-1}^{s(-1)}.$$

В соответствии с алгоритмом, число d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы знаков s и соответствующие им наборы значений α , убеждаемся, что не существует ни одного набора, для которого величина d была бы неотрицательным целым числом. Это означает, что в рассматриваемом случае уравнение (1.3) не имеет решения вида (2.1), то есть решения, соответствующего Случаю 1 Теоремы 2.1.

Попытаемся для уравнения (1.3) найти решение вида (2.6), то есть решение, соответствующее Случаю 2 Теоремы 2.1. Необходимые условия существования такого решения у уравнения (1.3) с данной функцией $r(x)$ являются выполненными (см. Теорему 2.1). Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 2 так, как он описан в пункте 3.4.

Шаг 1. Определим следующие множества, состоящие из целых чисел

$$E_1 = \{2\}, \quad E_{-1} = \{2\}, \quad E_\infty = \{2\}.$$

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные наборы $s = (e_\infty, e_1, e_{-1})$ элементов множеств E_∞, E_1, E_{-1} , причем в каждом наборе хотя бы одно из чисел обязательно должно быть нечетным. Легко видеть, что в нашем случае не найдется ни одного такого набора. Это означает, что у уравнения (1.3) не существует решения вида (2.6), то есть решения, соответствующего Случаю 2 Теоремы 2.1.

Теперь попытаемся для уравнения (1.3) найти решение вида (2.10), то есть решение, соответствующее Случаю 3 Теоремы 2.1. Необходимые условия существования такого решения уравнения (1.3) с данной функцией $r(x)$ являются выполненными. Действительно, функция $r(x)$ не имеет полюсов порядка большего, чем 2. Порядок функции $r(x)$ в точке $x = \infty$ выше 1. Вычисления показывают, что все остальные условия Теоремы 2.4 также выполняются:

$$\sqrt{1+4\alpha_1} = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{1+4\alpha_{-1}} = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}, \quad \sum_{i=1}^2 \beta_i = 0,$$

$$\gamma = -\frac{5}{36}, \quad \sqrt{1+4\gamma} = \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}.$$

Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 3 так, как он описан в пункте 3.7.

Шаг 1. Определим следующие множества, состоящие из целых чисел:

$$E_1 = \{4, 5, 6, 7, 8\}, \quad E_{-1} = \{4, 5, 6, 7, 8\},$$

$$E_\infty = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

Шаг 2. Рассмотрим все возможные наборы $s = (e_\infty, e_1, e_{-1})$ элементов множеств E_∞, E_0, E_1 и по формуле (3.24) определим число d : $d = e_\infty - e_1 - e_{-1}$. В соответствии с алгоритмом, число d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы элементов множеств E_∞, E_1, E_{-1} , убеждаемся, что имеется всего 7 наборов, для которых число d будет неотрицательным целым числом. А именно, для четырех наборов

$$s_1 = (8, 4, 4), \quad s_2 = (10, 5, 5), \quad s_3 = (10, 4, 6), \quad s_4 = (10, 6, 4)$$

имеем $d = 0$, ещё для двух наборов

$$s_5 = (10, 4, 5), \quad s_6 = (10, 5, 4)$$

имеем $d = 1$, а ещё для одного набора $s_7 = (10, 4, 4)$ имеем $d = 2$. Сначала проведем проверку для набора s_1 . По формуле (3.25) определим функцию θ . Она оказывается равной

$$\theta = \frac{4}{x-1} + \frac{4}{x+1} = \frac{8x}{x^2-1},$$

а многочлен S равен $S = x^2 - 1$. Многочлен P степени $d = 0$ имеет вид $P = 1$. Подставляя многочлен P и функции θ и S в формулы (3.27), убеждаемся, что условие $P_{-1} = 0$ выполняется тождественно. Другие выражения P_i , $i = 12, \dots, 0$, вычисленные по формулам (3.27), имеют вид:

$$P_{12} = -1, \quad P_{11} = 8x, \quad P_{10} = -\frac{(173x^2 + 3)}{3}, \quad P_9 = \frac{2x}{9} (1667x^2 + 93),$$

$$P_8 = -\frac{4185}{2}x^4 - \frac{757}{3}x^2 - \frac{11}{6}, \quad P_7 = \frac{160x}{9} (575x^4 + 126x^2 + 3),$$

$$P_6 = -\frac{126875}{3}x^6 - \frac{413255}{27}x^4 - \frac{21785}{27}x^2 - \frac{5}{3},$$

$$P_5 = \frac{70x}{27} (55625x^6 + 31365x^4 + 3099x^2 + 23),$$

$$P_4 = -\frac{21109375}{54}x^8 - \frac{26783750}{81}x^6 - \frac{4548215}{81}x^4 - \frac{27650}{27}x^2 + \frac{385}{54},$$

$$P_3 = \frac{140x}{243} (1390625x^8 + 1717500x^6 + 478278x^4 + 18428x^2 - 351),$$

$$P_2 = -\frac{560546875}{486}x^{10} - \frac{328671875}{162}x^8 - \frac{73254125}{81}x^6 - \frac{16795625}{243}x^4 +$$

$$+ \frac{391475}{162}x^2 - \frac{175}{18},$$

$$P_1 = \frac{1925x}{729} (390625x^{10} + 946875x^8 + 664650x^6 + 100342x^4 - 5403x^2 + 63),$$

$$P_0 = -\frac{3759765625}{8748}x^{12} - \frac{2015234375}{1458}x^{10} - \frac{4230428125}{2916}x^8 -$$

$$- \frac{1012840675}{2187}x^6 + \frac{33843425}{972}x^4 - \frac{128975}{162}x^2 + \frac{1925}{324}.$$

Таким образом, рассматриваемое дифференциальное уравнение имеет лиувиллево решение вида (2.10), где функция ω является решением алгебраического уравнения

$$\sum_{i=0}^{12} \frac{x^i (x-1)^i P_i}{(12-i)!} \omega^i = 0.$$

Можно показать, что данное алгебраическое уравнение приводится к более простому виду. А именно, оно может быть записано следующим образом:

$$-\frac{V^3}{2176782336} = 0,$$

$$V = 1296 (x^2 - 1)^4 \omega^4 - 3456x (x^2 - 1)^3 \omega^3 + 216 (15x^2 + 1) (x^2 - 1)^2 \omega^2 - \\ - 48x (25x^2 + 7) (x^2 - 1) \omega + 125x^4 + 134x^2 - 3.$$

Итак, нами доказано, что рассматриваемое линейное дифференциальное уравнение второго порядка имеет лиувиллево решение вида (2.10), в котором функция ω является решением алгебраического уравнения четвертой степени.

Таким образом, если задача исследования движения какой – либо механической системы сводится к нахождению общего решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, то можно попытаться найти замену переменных, приводящую коэффициенты данного уравнения к рациональному виду, а затем, используя алгоритм Ковачича, можно попытаться найти лиувиллевы решения соответствующего уравнения. Далее алгоритм Ковачича применяется в ряде задач классической механики, в частности, в задаче о качении без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости и по сфере динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса, а также в задаче о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения.

ГЛАВА 2. ЗАДАЧА О КАЧЕНИИ БЕЗ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

4 Введение

В 1932 году Х.М. Муштари в своей статье [49] заметил, что "... в то время как изучение общих проблем о неголономных системах дало обильные результаты, круг разрешенных частных задач мало расширился, решение же проблемы катания тяжелого твердого тела вращения по неподвижной горизонтальной плоскости со времени работ Чаплыгина и Аппеля совершенно не продвинулось вперед..." Удивительно, но это замечание сохраняет актуальность и по сей день. В упомянутой работе С. А. Чаплыгина [59] было доказано, что задача исследования движения тяжелого динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости, сводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка относительно компоненты угловой скорости тела в проекции на его ось симметрии. Вид коэффициентов соответствующего дифференциального уравнения зависит от формы поверхности, ограничивающей движущееся по плоскости твердое тело, а также от распределения масс в твердом теле. В тех случаях, когда удастся найти общее решение соответствующего уравнения, задача интегрируется в квадратурах. Например, в случае, когда движущееся тело представляет собой неоднородный динамически симметричный шар, решение соответствующего уравнения выражается через элементарные функции [59]. При движении по горизонтальной плоскости круглого диска или обруча решение указанного уравнения выражается через гипергеометрические ряды [59, 65].

В работе Х. М. Муштари [49] при дополнительном условии, накладывающем ограничения на распределение масс и форму поверхности тела, были найде-

ны два новых частных случая, когда уравнения движения тела интегрируются в квадратурах. В первом случае движущееся тело ограничено поверхностью, образуемой при вращении дуги параболы вокруг оси, перпендикулярной оси симметрии параболы и проходящей через ее фокус (веретенообразное тело), а вот втором случае движущееся тело представляет собой параболоид вращения.

В данной главе приводится вывод соответствующего линейного дифференциального уравнения второго порядка при общих предположениях о форме поверхности, ограничивающей движущееся тело вращения. Указан явный вид двух дополнительных первых интегралов в случае, когда поверхность движущегося тела удовлетворяет условию Х. М. Муштари. Получен общий вид поверхности, для которой выполняется условие Х. М. Муштари, и показано, как из полученного общего вида находятся два случая, ранее изученные в работе Х. М. Муштари [49].

В дальнейшем рассматриваются задачи о движении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости круглого диска, диска со смещенным центром масс, динамически симметричного тора, динамически симметричного параболоида вращения, веретенообразного тела и динамически симметричного эллипсоида вращения. Для каждой из перечисленных задач выписано линейное дифференциальное уравнение второго порядка, к которому сводится решение задачи, и показано, как привести коэффициенты соответствующего уравнения к виду рациональных функций. Путем применения алгоритма Ковачича доказано, что в случае качения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости круглого диска, диска со смещенным центром масс и динамически симметричного тора соответствующее линейное уравнение второго порядка не имеет лиувиллевых решений. Напротив, в случае качения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости динамически симметричного параболоида, общее решение соответствующего линейного уравнения второго порядка выражается через лиувиллевы функции, и следовательно, задача о

качении параболоида вращения разрешима в лиувиллевых функциях. В случае качения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости веретенообразного тела установлено, что данная задача интегрируется в лиувиллевых функциях только при условиях, указанных ранее в работе Х. М. Муштари [49].

В случае качения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости динамически симметричного эллипсоида вращения доказано, что для почти всех значений параметров задачи соответствующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка не имеет лиувиллевых решений. Вместе с тем, получены условия на параметры задачи, при выполнении которых общее решение линейного уравнения второго порядка в задаче о качении эллипсоида вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости выражается через лиувиллевы функции.

5 Постановка задачи

5.1 Основные системы координат

Пусть твердое тело катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости под действием силы тяжести. Поверхность, ограничивающая твердое тело, предполагается выпуклой, так что во все время движения имеется только одна точка соприкосновения твердого тела и плоскости. В большинстве рассмотренных задач считается, что в точке соприкосновения поверхность, ограничивающая твердое тело, имеет однозначно определенную единственную касательную плоскость. Также рассмотрены две задачи, в которых тело имеет острый край (ребро), то есть данное тело ограничено кривой, одной из точек которой оно касается неподвижной опорной плоскости при движении.

Следуя работам С. А. Чаплыгина [59] и А. П. Маркеева [46], будем рассматривать движение тела относительно неподвижной системы координат $Oxyz$ с началом в некоторой точке O опорной плоскости; ось Oz данной системы

координат направим вертикально вверх. Пусть γ – единичный вектор нормали к поверхности тела, построенный в точке M касания тела и плоскости (Рис. 1).

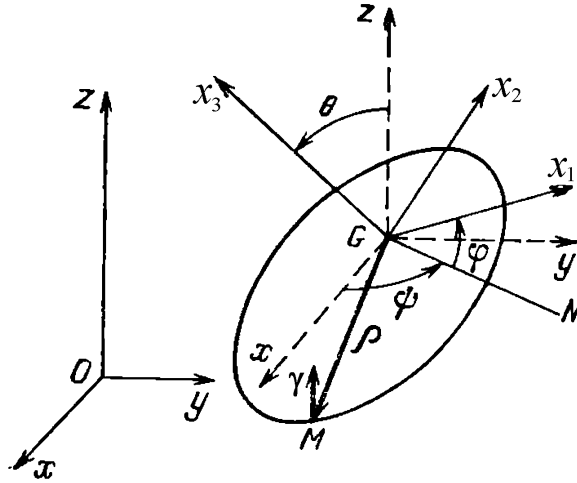


Рис. 1. Качение тела вращения: углы Эйлера

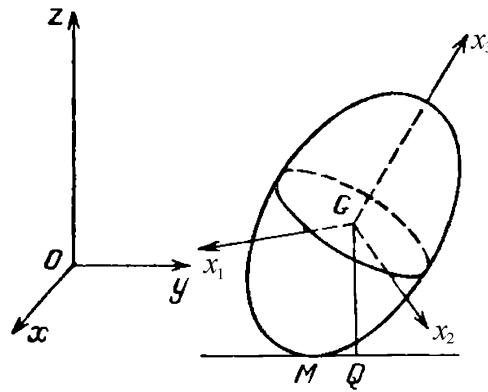


Рис. 2. Качение тела вращения: главные центральные оси инерции

Предположим теперь, что тело, катящееся по неподвижной горизонтальной плоскости, является динамически и геометрически симметричным. Под динамически и геометрически симметричным телом подразумевается тело, ограниченное поверхностью вращения, ось симметрии которой совпадает с осью динамической симметрии тела. На той же оси располагается центр тяжести G тела.

С твердым телом жестко свяжем систему координат $Gx_1x_2x_3$, начало G которой возьмем в центре масс катящегося тела, а оси направим вдоль глав-

ных центральных осей инерции. В силу динамической и геометрической симметрии тела ось симметрии его поверхности является одной из главных центральных осей инерции; направим вдоль нее ось Gx_3 введенной системы координат (Рис. 2). Ориентация тела относительно неподвижной системы координат задается углами Эйлера ψ, θ, φ , где θ – угол между осью динамической симметрии тела Gx_3 и вертикалью, то есть осью Oz неподвижной системы координат. Таким образом, взаимная ориентация систем координат $Oxyz$ и $Gx_1x_2x_3$ определяется с помощью матрицы направляющих косинусов, задаваемых таблицей

$$\begin{array}{cccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ x & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ y & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ z & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}.$$

Компоненты a_{ij} данной матрицы выражаются с помощью углов Эйлера по формулам

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta, & a_{12} &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta, \\ a_{21} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta, & a_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta, \\ a_{13} &= \sin \psi \sin \theta, & a_{23} &= -\cos \psi \sin \theta, \\ a_{31} &= \sin \varphi \sin \theta, & a_{32} &= \cos \varphi \sin \theta, & a_{33} &= \cos \theta. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Уравнение поверхности, ограничивающей тело, запишем относительно системы координат $Gx_1x_2x_3$ в виде

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (5.2)$$

выбирая знак функции F так, чтобы выполнялось условие

$$\gamma = -\frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|},$$

$$\text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} \mathbf{e}_3,$$

$$|\text{grad } F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^2},$$

где $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ – единичные базисные векторы системы координат $Gx_1x_2x_3$. Отсюда и из равенств (5.1) следует, что

$$a_{31} = \sin \theta \sin \varphi = -\frac{1}{|\text{grad } F|} \frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad a_{32} = \sin \theta \cos \varphi = -\frac{1}{|\text{grad } F|} \frac{\partial F}{\partial x_2},$$

$$a_{33} = \cos \theta = -\frac{1}{|\text{grad } F|} \frac{\partial F}{\partial x_3}.$$
(5.3)

Поскольку катящееся по плоскости твердое тело является геометрически симметричным, то уравнение (5.2), задающее его поверхность, может быть переписано в виде

$$F(\delta, x_3) = 0, \quad \delta = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \quad (5.4)$$

Равенства (5.3) можно переписать так:

$$a_{31} = \sin \theta \sin \varphi = -\frac{1}{|\text{grad } F|} \frac{\partial F}{\partial \delta} \cdot \frac{x_1}{\delta}, \quad a_{32} = \sin \theta \cos \varphi = -\frac{1}{|\text{grad } F|} \frac{\partial F}{\partial \delta} \cdot \frac{x_2}{\delta},$$

$$a_{33} = \cos \theta = -\frac{1}{|\text{grad } F|} \frac{\partial F}{\partial x_3}.$$
(5.5)

Из первых двух уравнений (5.5) получаем тождество

$$x_1 \cos \varphi = x_2 \sin \varphi. \quad (5.6)$$

В силу динамической симметрии тела оси Gx_1 и Gx_2 можно выбрать с точностью до их одновременного поворота на произвольный угол в экваториальной плоскости центрального эллипсоида инерции. Выберем их таким образом, чтобы при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, координата x_1 точки касания M равнялась $-\delta$. На Рис. 3

показано меридианное сечение поверхности тела, отвечающее значению угла $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

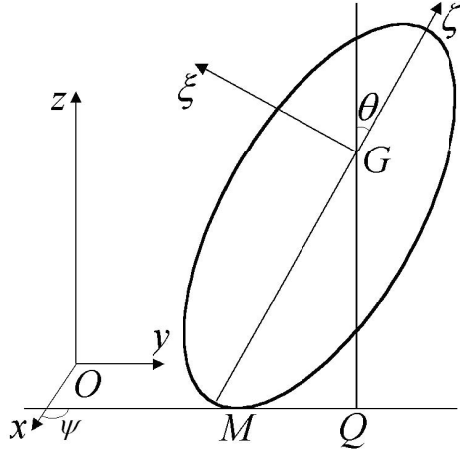


Рис. 3. Качение тела вращения: основные системы координат.

Тогда из (5.4) и (5.6) следует, что

$$x_1 = -\delta \sin \varphi, \quad x_2 = -\delta \cos \varphi. \quad (5.7)$$

Из (5.7) и из второго и третьего уравнений (5.5) получаем соотношение

$$\frac{\partial F}{\partial \delta} \cos \theta + \frac{\partial F}{\partial x_3} \sin \theta = 0,$$

которое с учетом (5.4) показывает, что величины δ и x_3 являются функциями угла θ .

Введем теперь подвижную как в теле, так и в абсолютном пространстве систему координат $G\xi\eta\zeta$, с началом в центре масс G тела и осью $G\zeta$, направленной по оси динамической симметрии тела (то есть, совпадающей по направлению с осью Gx_3 системы координат $Gx_1x_2x_3$). Ось $G\eta$ данной системы выберем так, чтобы она была сонаправлена с векторным произведением $[\mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\gamma}]$, а ось $G\xi$ будет дополнять оси $G\eta$ и $G\zeta$ до правой тройки (Рис. 3). Будем обозначать $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\zeta$ единичные базисные векторы системы координат $G\xi\eta\zeta$. Несложно понять, что во все время движения ось $G\eta$ будет перпендикулярна меридианному сечению поверхности тела, отвечающему значению $\varphi = \frac{\pi}{2}$, а ось $G\xi$ будет

лежать в плоскости соответствующего меридианного сечения. В силу того, как направлена ось $G\eta$, имеем для вектора $\mathbf{e}_\eta$ следующую формулу:

$$\mathbf{e}_\eta = \frac{1}{\sin \theta} [\mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\gamma}].$$

Учитывая теперь формулы (5.1), получаем

$$\mathbf{e}_\eta = -\cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2$$

и, следовательно,

$$\mathbf{e}_\xi = [\mathbf{e}_\eta \times \mathbf{e}_\zeta] = [\mathbf{e}_\eta \times \mathbf{e}_3] = \sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2.$$

Таким образом, единичные векторы $\mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\zeta$ связаны с единичными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ формулами

$$\mathbf{e}_1 = \sin \varphi \mathbf{e}_\xi - \cos \varphi \mathbf{e}_\eta, \quad \mathbf{e}_2 = \cos \varphi \mathbf{e}_\xi + \sin \varphi \mathbf{e}_\eta, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_\zeta.$$

В разложении по единичным базисным векторам $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\zeta$ системы координат $G\xi\eta\zeta$ единичный вектор $\boldsymbol{\gamma}$ имеет вид

$$\boldsymbol{\gamma} = \sin \theta \mathbf{e}_\xi + \cos \theta \mathbf{e}_\zeta,$$

а радиус-вектор $\overrightarrow{GM}$ точки M касания тела с плоскостью имеет вид

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GM} &= (x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi) \mathbf{e}_\xi + (x_2 \sin \varphi - x_1 \cos \varphi) \mathbf{e}_\eta + x_3 \mathbf{e}_\zeta = \\ &= \xi \mathbf{e}_\xi + \eta \mathbf{e}_\eta + \zeta \mathbf{e}_\zeta. \end{aligned}$$

С учетом соотношений (5.6) и (5.7) можно сделать вывод, что

$$\xi = -\delta, \quad \eta = 0, \quad \zeta = x_3,$$

то есть компоненты вектора $\overrightarrow{GM}$ в системе координат $G\xi\eta\zeta$ будут функциями только угла θ . Отсюда следует, что расстояние от центра тяжести до горизонтальной плоскости будет функцией только угла θ :

$$GQ = -(\overrightarrow{GM} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = -\xi \sin \theta - \zeta \cos \theta = f(\theta). \quad (5.8)$$

Уравнения $\xi = \xi(\theta)$, $\zeta = \zeta(\theta)$ задают в параметрической форме меридианное сечение поверхности тела, изображенное на Рис. 3. Так как вектор $\overrightarrow{MQ}$ направлен вдоль касательной к этому сечению, то он коллинеарен вектору, имеющему в системе координат $G\xi\eta\zeta$ компоненты ξ' и ζ' , где штрих обозначает производную по θ ; вектор $\overrightarrow{GQ}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{\gamma}$. В силу ортогональности векторов $\overrightarrow{MQ}$ и $\overrightarrow{GQ}$ отсюда следует тождество

$$\xi' \sin \theta + \zeta' \cos \theta = 0. \quad (5.9)$$

Дифференцируя обе части соотношения (5.8) по θ и используя уравнение (5.9), получаем

$$f'(\theta) = -\xi \cos \theta + \zeta \sin \theta. \quad (5.10)$$

Из (5.8) и (5.10) находим параметрические уравнения меридианного сечения поверхности катящегося тела в такой форме:

$$\xi = -f(\theta) \sin \theta - f'(\theta) \cos \theta, \quad \zeta = -f(\theta) \cos \theta + f'(\theta) \sin \theta. \quad (5.11)$$

Таким образом, функция $f(\theta)$, определяемая соотношением (5.8), полностью характеризует форму поверхности движущегося тела. В дальнейшем движение тела по плоскости мы будем рассматривать относительно системы координат $G\xi\eta\zeta$, движущейся как в абсолютном пространстве, так и в теле.

5.2 Уравнения движения

Для получения уравнений движения тела вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости воспользуемся общими теоремами динамики. Положение тела на плоскости будет определяться углами Эйлера θ , ψ и φ , введенными выше, и координатами x и y точки касания M . Пусть векторы скорости $\mathbf{v}$ центра масс G , угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела, угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ системы координат $G\xi\eta\zeta$ и реакции плоскости $\mathbf{R}$ задаются относительно осей $G\xi\eta\zeta$ компонентами $v_\xi, v_\eta, v_\zeta; p, q, r; \Omega_\xi, \Omega_\eta, \Omega_\zeta$ и R_ξ, R_η, R_ζ соответственно. Пусть m — масса тела, A_1 — его момент инерции относительно осей $G\xi$ и $G\eta$, а A_3 — момент инерции относительно оси симметрии $G\zeta$.

Уравнения движения тела, записанные относительно системы координат $G\xi\eta\zeta$, имеют вид

$$m\dot{\mathbf{v}} + m[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}] = -mg\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{R}, \quad (5.12)$$

$$\dot{\mathbf{K}} + [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{K}] = [\overrightarrow{GM} \times \mathbf{R}], \quad (5.13)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma}] = \mathbf{0}, \quad (5.14)$$

$$\mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{GM}] = \mathbf{0}. \quad (5.15)$$

Уравнения (5.12) и (5.13) выражают, соответственно, законы изменения импульса и кинетического момента тела относительно центра масс, уравнение (5.14) выражает условие постоянства вектора $\boldsymbol{\gamma}$ в неподвижной системе координат $Oxyz$, а уравнение (5.15) представляет собой условие отсутствия проскальзывания в точке касания тела и плоскости. Здесь g — величина ускорения свободного падения, $\mathbf{K}$ — кинетический момент тела относительно центра масс. Пусть ξ, η, ζ — координаты точки касания M тела и плоскости в подвижной системе координат $G\xi\eta\zeta$. Тогда $\eta = 0$, а ξ и ζ определяются формулами (5.11).

Запишем уравнения (5.12), (5.13) и (5.15) в скалярной форме:

$$\frac{dv_\xi}{dt} + \Omega_\eta v_\zeta - \Omega_\zeta v_\eta = -g \sin \theta + \frac{R_\xi}{m}, \quad \frac{dv_\eta}{dt} + \Omega_\zeta v_\xi - \Omega_\xi v_\zeta = \frac{R_\eta}{m}, \quad (5.16)$$

$$\frac{dv_\zeta}{dt} + \Omega_\xi v_\eta - \Omega_\eta v_\xi = -g \cos \theta + \frac{R_\zeta}{m};$$

$$A_1 \frac{dp}{dt} + A_3 r \Omega_\eta - A_1 q \Omega_\zeta = -\zeta R_\eta, \quad A_1 \frac{dq}{dt} + A_1 p \Omega_\zeta - A_3 r \Omega_\xi = \zeta R_\xi - \xi R_\zeta, \quad (5.17)$$

$$A_3 \frac{dr}{dt} + A_1 q \Omega_\xi - A_1 p \Omega_\eta = \xi R_\eta;$$

$$v_\xi + q\zeta = 0, \quad v_\eta + r\xi - p\zeta = 0, \quad v_\zeta - q\xi = 0. \quad (5.18)$$

Выясним теперь, как связаны между собой компоненты векторов угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ системы координат $G\xi\eta\zeta$ и угловой скорости $\mathbf{\omega}$ тела. Так как ось $G\zeta$ неподвижна в теле, то

$$\Omega_\xi = p, \quad \Omega_\eta = q. \quad (5.19)$$

Величина же Ω_ζ может быть выражена через p ; действительно, поскольку (в силу (5.14)) вектор $\mathbf{\Omega}$ перпендикулярен вектору $\dot{\gamma}$, то отсюда и из (5.19) следует, что

$$\Omega_\zeta = \Omega_\xi \operatorname{ctg} \theta = p \operatorname{ctg} \theta. \quad (5.20)$$

Исключим теперь компоненты реакции R_ξ , R_η и R_ζ из уравнений (5.16), (5.17), используя (5.11), (5.18)–(5.20). В результате получим систему трех уравнений:

$$\begin{aligned} [A_1 + m(\xi^2 + \zeta^2)] \frac{dq}{dt} &= mgf'(\theta) + (A_3 r - A_1 p \operatorname{ctg} \theta) p - \\ &- mp(\zeta \operatorname{ctg} \theta + \xi)(p\zeta - r\xi) - mq \left(\xi \frac{d\xi}{dt} + \zeta \frac{d\zeta}{dt} \right), \end{aligned}$$

$$A_1 \frac{dp}{dt} + A_3 \frac{\zeta}{\xi} \frac{dr}{dt} = (A_1 p \operatorname{ctg} \theta - A_3 r) q, \quad (5.21)$$

$$\frac{d}{dt} (p\zeta - r\xi) - \frac{A_3}{m\xi} \frac{dr}{dt} = (\zeta \operatorname{ctg} \theta + \xi) pq.$$

Здесь ξ и ζ — функции угла θ , определяемые равенствами (5.11). Добавив к (5.21) очевидное соотношение

$$q = -\frac{d\theta}{dt}, \quad (5.22)$$

получим замкнутую систему четырех дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций времени p , q , r , θ .

Полученная система уравнений обладает интегралом энергии $E = T + V = \text{const}$. Если воспользоваться теоремой Кенига и условиями отсутствия скольжения (5.18), то его можно записать в таком виде:

$$\frac{1}{2} A_1 p^2 + \frac{1}{2} (A_1 + m(\xi^2 + \zeta^2)) q^2 + \frac{1}{2} A_3 r^2 + \frac{1}{2} m (p\zeta - r\xi)^2 + m g f(\theta) = \text{const}. \quad (5.23)$$

Будем считать, что $\theta \neq \text{const}$. Тогда, используя равенство (5.22), перейдем во втором и третьем из уравнений (5.21) к новой независимой переменной — углу θ . Получим

$$A_1 \frac{dp}{d\theta} + A_3 \frac{\zeta}{\xi} \frac{dr}{d\theta} = -A_1 p \operatorname{ctg} \theta + A_3 r, \quad (5.24)$$

$$\zeta \frac{dp}{d\theta} - \frac{A_3 + m\xi^2}{m\xi} \frac{dr}{d\theta} = -(\zeta \operatorname{ctg} \theta + \xi + \zeta') p + \xi' r.$$

Таким образом, компоненты угловой скорости p и r удовлетворяют системе двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка (5.24). Из системы (5.24) можно получить одно линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Интегрирование этого уравнения или системы (5.24) дает зависимость p и r от θ с двумя произвольными постоянными; затем интегрирова-

ние задачи заканчивается в квадратурах. Подробная процедура приведения данной задачи к квадратурам описана в работах С. А. Чаплыгина [59] и А. П. Маркеева [46].

Таким образом, решение задачи о качении тяжелого тела вращения по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости сводится к решению системы уравнений (5.24). Разрешим эту систему относительно производных:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{d\theta} &= \left(-\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{A_3 m \zeta (\xi + \zeta')}{\Delta} \right) p + \frac{A_3 (A_3 + m \xi^2 + m \xi' \zeta)}{\Delta} r, \\ \frac{dr}{d\theta} &= \frac{A_1 m \xi (\xi + \zeta')}{\Delta} p + \frac{m \xi (A_3 \zeta - A_1 \xi')}{\Delta} r.\end{aligned}\tag{5.25}$$

Здесь и в дальнейшем через Δ будем обозначать выражение

$$\Delta = A_1 A_3 + A_1 m \xi^2 + A_3 m \zeta^2.$$

Заметим, что если справедливо условие $\xi + \zeta' = 0$, то второе уравнение системы (5.25) интегрируется отдельно. Этому условию удовлетворяет тело вращения

$$f(\theta) = R - d \cos \theta, \quad \xi = -R \sin \theta, \quad \zeta = d - R \cos \theta,$$

которое представляет собой динамически симметричный шар радиуса R , геометрический центр которого отстоит от центра тяжести, лежащего на оси динамической симметрии, на расстояние d . Движение по горизонтальной плоскости неоднородного динамически симметричного шара было полностью исследовано С.А. Чаплыгиным [59], которому удалось показать, что в этом случае система уравнений (5.24) или (5.25) допускает два линейных по p и r первых интеграла – интеграл Джеллетта

$$A_1 p \sin \theta + A_3 r \left(\cos \theta - \frac{d}{R} \right) = j_1 = \text{const},$$

и интеграл Чаплыгина

$$r \sqrt{A_1 A_3 + m R^2 \left(A_1 \sin^2 \theta + A_3 \left(\cos \theta - \frac{d}{R} \right)^2 \right)} = j_2 = \text{const}, \quad (5.26)$$

и, следовательно, данная система разрешима в лиувиллевых функциях. В дальнейшем мы будем считать, что $\xi + \zeta' \neq 0$. Тогда из системы (5.25) можно получить для r следующее дифференциальное уравнение второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\theta^2} + \left[\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{3m(A_1 \xi \xi' + A_3 \zeta \zeta')}{\Delta} - \frac{\frac{d}{d\theta}(\xi(\xi + \zeta'))}{\xi(\xi + \zeta')} \right] \frac{dr}{d\theta} + \\ + \frac{m\xi(\xi + \zeta')}{\Delta \sin \theta} \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{(A_1 \xi' - A_3 \zeta) \sin \theta}{\xi + \zeta'} \right) - A_3 \sin \theta \right] r = 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Дальнейшее решение задачи сводится к нахождению общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка (5.27). В этой главе мы будем изучать движение по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости тел, ограниченных различными поверхностями вращения. Для каждого из этих тел мы будем выписывать соответствующее линейное дифференциальное уравнение (5.27), приводить его коэффициенты к рациональному виду, а затем, используя алгоритм Ковачича, выяснять, при каких условиях у полученного уравнения существуют лиувиллевы решения.

6 Обобщение результатов Х. М. Муштари

6.1 Условие Х.М. Муштари

В работе Х. М. Муштари [49] основное внимание было уделено телам, имеющим такую форму меридианного сечения, при которой были бы возможны движения тела с постоянной угловой скоростью вращения вокруг оси симметрии. Таким

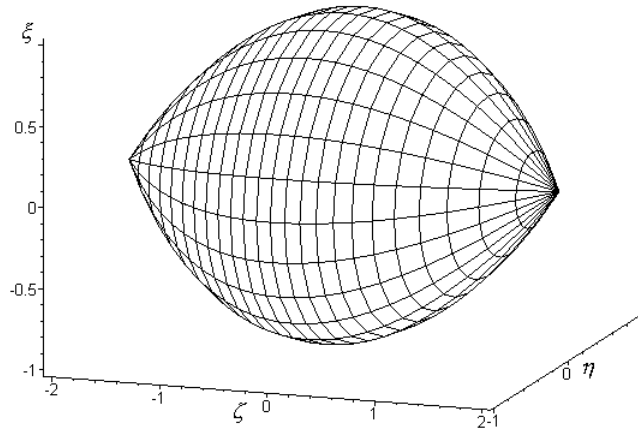


Рис. 4. Веретенообразное тело.

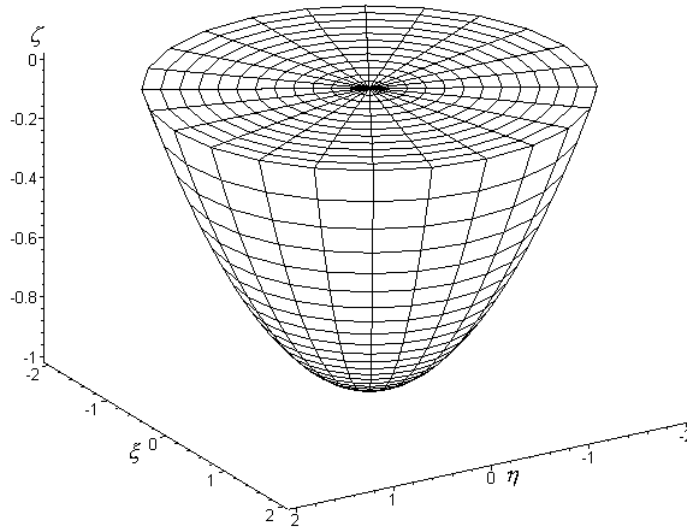


Рис. 5. Параболоид вращения.

образом, в работе [49] предполагалось, что линейное дифференциальное уравнение (5.27) допускает частное решение

$$r = r_0 = \text{const.} \quad (6.1)$$

Для исследования этого частного случая в работе [49] предлагался следующий подход. Очевидно (см. (5.27)), что для того, чтобы выполнялось условие (6.1), координаты точки касания ξ и ζ должны удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{(A_1 \xi' - A_3 \zeta) \sin \theta}{\xi + \zeta'} \right) - A_3 \sin \theta = 0, \quad (6.2)$$

которое принято называть условием Х. М. Муштари. Подставляя в условие Муштари выражения (5.11) для ξ , ζ и их производных по θ , получим дифференциальное уравнение для определения функции $f(\theta)$. Решая полученное уравнение, найдем в явном виде функцию $f(\theta)$ и определим тем самым, при какой форме меридианного сечения поверхности вращения выполняется условие Муштари (6.2). Затем, зная явный вид функции $f(\theta)$, найдем выражения для координат точки касания ξ и ζ , подставим их в систему (5.25) и, решив ее, найдем явные выражения для $p = p(\theta)$ и $r = r(\theta)$.

В работе [49] были указаны два частных решения уравнения (6.2). Они имеют вид:

$$A_3 = \frac{2}{3}A_1, \quad f(\theta) = \frac{\lambda}{\sin \theta}, \quad \xi = \frac{\lambda \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - \lambda, \quad \zeta = -\frac{2\lambda \cos \theta}{\sin \theta}, \quad (6.3)$$

$$A_3 = 2A_1, \quad f(\theta) = \frac{\lambda}{\cos \theta}, \quad \xi = -\frac{2\lambda \sin \theta}{\cos \theta}, \quad \zeta = \frac{\lambda \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \lambda, \quad (6.4)$$

где λ – произвольная постоянная. Поверхность, определяемая условиями (6.3), образуется при вращении дуги параболы вокруг оси, проходящей через ее фокус (веретенообразное тело, см. Рис. 4), а поверхность, определяемая условиями (6.4), представляет собой параболоид вращения (Рис. 5). Как было показано в работе Х. М. Муштари [49] в обоих указанных случаях переменные p и r выражаются через эллиптические функции, то есть задача о качении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости тела вращения, ограниченного указанными поверхностями, интегрируется в эллиптических функциях. Это обстоятельство отмечалось также в работах А. А. Зобовой [36, 37], в которых рассматривалась задача о движении веретенообразного тела, удовлетворяющего условиям (6.3), причем допускалась возможность опоры тела на острие, когда указанная задача превращается в задачу о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Лагранжа. Покажем далее, что если поверхность катящегося тела и распределение масс в нем удовлетворяют

условию Х. М. Муштари (6.2), то можно записать в явном виде общее решение системы (5.25).

6.2 Первые интегралы уравнений движения тела в случае Х.М. Муштари

Заметим, что систему уравнений (5.25) можно привести к такому виду [167–170]:

$$\frac{d\tau}{d\theta} = h(\theta)r, \quad \frac{dr}{d\theta} = z(\theta)\tau. \quad (6.5)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\tau = m \left[A_1 p + \frac{(A_3 \zeta - A_1 \xi')}{(\xi + \zeta')} r \right] \sqrt{\Delta} \sin \theta, \quad z(\theta) = \frac{\xi(\xi + \zeta')}{\Delta^{\frac{3}{2}} \sin \theta},$$

$$h(\theta) = m \sqrt{\Delta} \left[A_3 \sin \theta + \frac{d}{d\theta} \left(\frac{(A_3 \zeta - A_1 \xi') \sin \theta}{(\xi + \zeta')} \right) \right].$$

Для системы уравнений (6.5) справедливо следующее утверждение [167–170].

Теорема 6.1. *При выполнении условия Муштари (6.2) система уравнений (6.5) (или, что то же самое, система уравнений (5.25)) допускает первый интеграл, выраженный через элементарные функции.*

Доказательство. Действительно, при выполнении условия Муштари (6.2) получаем

$$h(\theta) \equiv 0$$

и, как следует из уравнений (6.5), сохраняется выражение

$$\tau = m \left[A_1 p + \frac{(A_3 \zeta - A_1 \xi')}{(\xi + \zeta')} r \right] \sqrt{\Delta} \sin \theta = \tau_0 = \text{const.} \quad (6.6)$$

Из условия Муштари (6.2) следует, что

$$\frac{(A_3 \zeta - A_1 \xi') \sin \theta}{\xi + \zeta'} = A_3 \cos \theta + A_3 \ell, \quad (6.7)$$

где ℓ – некоторая константа. Таким образом, интеграл (6.6) можно переписать в виде

$$U = [A_1 p \sin \theta + A_3 r \cos \theta + \ell A_3 r] \sqrt{A_1 A_3 + A_1 m \xi^2 + A_3 m \zeta^2} = k_1 = \text{const.} \quad (6.8)$$

Очевидно, что интеграл (6.8) выражается через элементарные функции. Теорема доказана. $\square$

Заметим, что по своей структуре интеграл (6.8) напоминает интеграл Чаплыгина (5.26), возникающий в случае движения по шероховатой плоскости тела, ограниченного сферической поверхностью. Очевидно, что выражение, стоящее перед знаком корня в интеграле (5.26), представляет собой проекцию кинетического момента тела на ось динамической симметрии. Аналогично, выражение, стоящее перед знаком корня в интеграле (6.8), представляет собой линейную комбинацию с постоянными коэффициентами проекций кинетического момента тела на вертикаль и ось симметрии соответственно.

После нахождения интеграла (6.8) легко найти явный вид и другого первого интеграла. Поскольку $\tau = \tau_0 = \text{const}$ (см. (6.6)), то из второго уравнения системы (6.5) следует, что

$$r = \tau_0 \int z(\theta) d\theta + r_0,$$

откуда

$$r - m k_1 \int z(\theta) d\theta = r_0 = \text{const.} \quad (6.9)$$

Таким образом, для тел, меридианное сечение которых удовлетворяет условию Муштари (6.2), линейные первые интегралы имеют вид (6.8) и (6.9). Тем самым, найдены в явном виде все первые интегралы, существующие в задаче о движении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости твердого тела, поверхность которого удовлетворяет условию Муштари (6.2).

Следующий пункт данной работы посвящен выяснению того, какую форму должно иметь меридианное сечение движущегося тела, чтобы для него было выполнено условие Муштари (6.2).

6.3 Определение формы поверхности тела

Условие (6.2) однократным интегрированием можно привести к виду (6.7). Сначала рассмотрим случай $\ell = 0$. В этом случае координаты точки касания тела с плоскостью ξ и ζ удовлетворяют уравнению

$$(A_3\zeta - A_1\xi') \sin \theta = A_3 (\xi + \zeta') \cos \theta. \quad (6.10)$$

Подставляя в уравнение (6.10) выражения (5.11) для ξ и ζ и их производных и вводя безразмерный параметр $k = A_3/A_1$, получим, что дифференциальное уравнение для определения функции $f(\theta)$ имеет вид

$$(k - 1) f'' \sin \theta \cos \theta - k f' + (k - 1) f \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (6.11)$$

Заметим, что частные решения (6.3) и (6.4), найденные Муштари [49], удовлетворяют дифференциальному уравнению (6.11). Определим теперь, как выглядит общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка (6.11). Для этого преобразуем его. Положим

$$f(\theta) = \frac{s(\theta)}{\cos \theta},$$

тогда для функции $s(\theta)$ уравнение (6.11) запишется следующим образом:

$$s'' + \left[\frac{(k - 2)}{(k - 1) \sin \theta \cos \theta} - \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} \right] s' + \frac{(k - 2)}{(k - 1) \cos^2 \theta} s = 0. \quad (6.12)$$

Делая в уравнении (6.12) замену независимой переменной по формуле

$$w = \frac{1}{\cos^2 \theta},$$

приведем данное уравнение к виду

$$w(1-w) \frac{d^2 s}{dw^2} + \left[2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{(k-2)}{2(k-1)} \right) w \right] \frac{ds}{dw} - \frac{(k-2)}{4(k-1)} s = 0. \quad (6.13)$$

Уравнение (6.13) представляет собой дифференциальное гипергеометрическое уравнение Гаусса [17, 24]. Следовательно, в случае $\ell = 0$ меридианное сечение тела, поверхность которого удовлетворяет условию Муштари (6.2), определяется при помощи гипергеометрических функций.

Если обозначить через $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ гипергеометрический ряд Гаусса

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} z^2 + \dots + \\ + \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n)\beta(\beta+1) \dots (\beta+n)}{1 \cdot 2 \dots (n+1) \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n)} z^{n+1} + \dots,$$

то данный ряд будет одним из частных решений дифференциального уравнения

$$z(1-z) \frac{d^2 r}{dz^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z] \frac{dr}{dz} - \alpha\beta r = 0.$$

Отметим [17, 24], что гипергеометрический ряд сходится равномерно на любом отрезке числовой оси, лежащем внутри интервала $-1 < z < 1$.

Для уравнения (6.13) параметры α , β и γ равны

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{(k-2)}{2(k-1)}, \quad \gamma = 2.$$

Следовательно, одним из частных решений уравнения (6.13) будет гипергеометрический ряд

$$s_0 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{(k-2)}{2(k-1)}, 2; w\right) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{(k-2)}{2(k-1)}, 2; \frac{1}{\cos^2 \theta}\right). \quad (6.14)$$

Другое решение линейного дифференциального уравнения (6.11), линейно независимое с решением (6.14), определим следующим образом. Вернемся к

линейному дифференциальному уравнению (6.11) и положим в нем

$$f(\theta) = \frac{u(\theta)}{\sin \theta},$$

тогда для функции $u(\theta)$ уравнение (6.11) запишется следующим образом:

$$u'' + \left[\frac{2 \sin \theta}{\cos \theta} - \frac{(3k-2)}{(k-1) \sin \theta \cos \theta} \right] u' + \frac{(3k-2)}{(k-1) \sin^2 \theta} u = 0. \quad (6.15)$$

Сделаем в уравнении (6.15) замену независимой переменной по формуле

$$w = \frac{1}{\sin^2 \theta}.$$

Тогда уравнение (6.15) примет вид

$$w(1-w) \frac{d^2 u}{dw^2} + \left[2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{(3k-2)}{2(k-1)} \right) w \right] \frac{du}{dw} - \frac{(3k-2)}{4(k-1)} u = 0. \quad (6.16)$$

Уравнение (6.16) также имеет вид дифференциального гипергеометрического уравнения Гаусса [17, 24]. Одним из частных решений уравнения (6.16) будет решение

$$u_0 = F \left(\frac{1}{2}, \frac{(3k-2)}{2(k-1)}, 2; w \right) = F \left(\frac{1}{2}, \frac{(3k-2)}{2(k-1)}, 2; \frac{1}{\sin^2 \theta} \right).$$

Таким образом, общее решение линейного дифференциального уравнения (6.11) можно записать в виде

$$f(\theta) = \frac{\lambda_1}{\cos \theta} F \left(\frac{1}{2}, \frac{(k-2)}{2(k-1)}, 2; \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) + \frac{\lambda_2}{\sin \theta} F \left(\frac{1}{2}, \frac{(3k-2)}{2(k-1)}, 2; \frac{1}{\sin^2 \theta} \right). \quad (6.17)$$

Покажем, как из общего решения (6.17) линейного дифференциального уравнения (6.11) получить два частных решения (6.3) и (6.11), впервые найденные в работе Х. М. Муштари [49]. Сначала укажем, как из решения (6.17) получается частное решение (6.3). Предположим, что в формуле (6.17) для

функции $f(\theta)$ постоянная $\lambda_1 = 0$. Тогда функция $f(\theta)$ определяется формулой

$$f(\theta) = \frac{\lambda_2}{\sin \theta} F\left(\frac{1}{2}, \frac{(3k-2)}{2(k-1)}, 2; \frac{1}{\sin^2 \theta}\right). \quad (6.18)$$

Теперь предположим, что гипергеометрический ряд, стоящий в числителе выражения (6.18), является конечной суммой. Это предположение накладывает ограничения на значения параметра k . Действительно, гипергеометрический ряд

$$F(\alpha, \beta, \gamma; w)$$

станет конечной суммой, если один из его параметров α или β равен отрицательному целому числу или нулю [17, 24]. В нашем случае соответствующее условие имеет вид:

$$\frac{(3k-2)}{2(k-1)} = -N,$$

где N – натуральное число или нуль. Выражая отсюда k , находим

$$k = \frac{2(N+1)}{2N+3}. \quad (6.19)$$

При $N = 0$ из формулы (6.19) получаем,

$$k = \frac{2}{3},$$

а из формулы (6.18) следует, что

$$f(\theta) = \frac{\lambda_2}{\sin \theta},$$

то есть нами получено частное решение (6.3), впервые найденное Х. М. Мустафи [49].

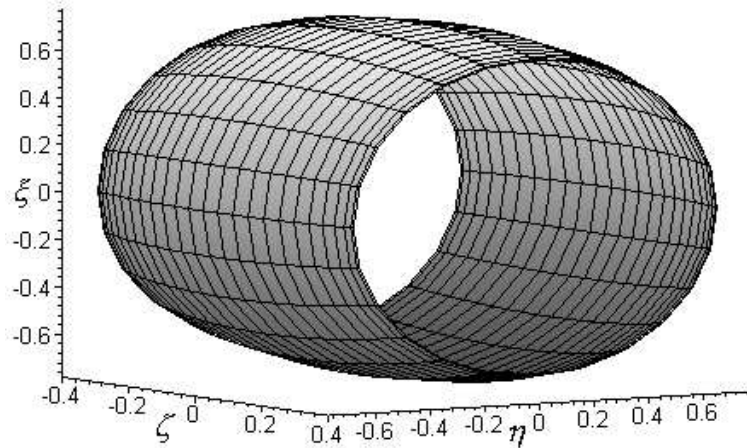


Рис. 6. $N = 1$, $k = \frac{4}{5}$, $f(\theta) = \frac{\lambda}{\sin \theta} \left(1 - \frac{1}{4 \sin^2 \theta} \right)$.

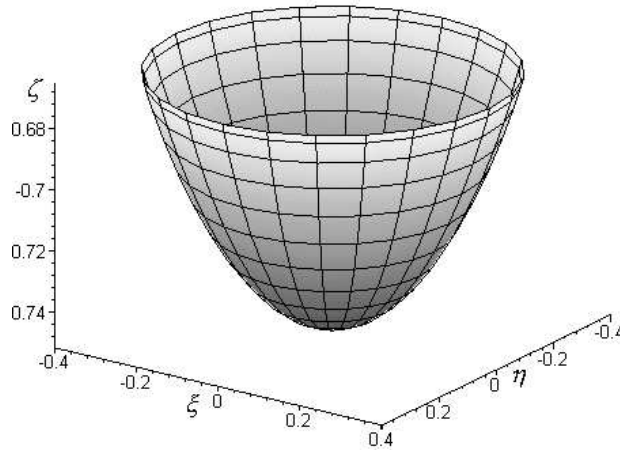


Рис. 7. $N = 1$, $k = \frac{4}{3}$, $f(\theta) = \frac{\lambda}{\cos \theta} \left(1 - \frac{1}{4 \cos^2 \theta} \right)$.

Теперь предположим, что в формуле (6.17) для функции $f(\theta)$ постоянная $\lambda_2 = 0$. Тогда функция $f(\theta)$ определяется формулой

$$f(\theta) = \frac{\lambda_1}{\cos \theta} F \left(\frac{1}{2}, \frac{(k-2)}{2(k-1)}, 2; \frac{1}{\cos^2 \theta} \right). \quad (6.20)$$

Предположим снова, что гипергеометрический ряд, стоящий в числителе выражения (6.20), является конечной суммой. В данном случае соответствующее условие имеет вид:

$$\frac{(k-2)}{2(k-1)} = -N.$$

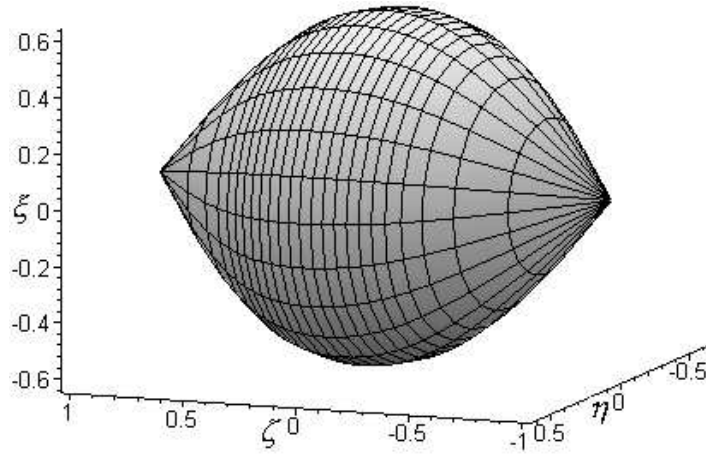


Рис. 8. $N = 2$, $k = \frac{6}{7}$, $f(\theta) = \frac{\lambda}{\sin \theta} \left(1 - \frac{1}{2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{8 \sin^4 \theta} \right)$.

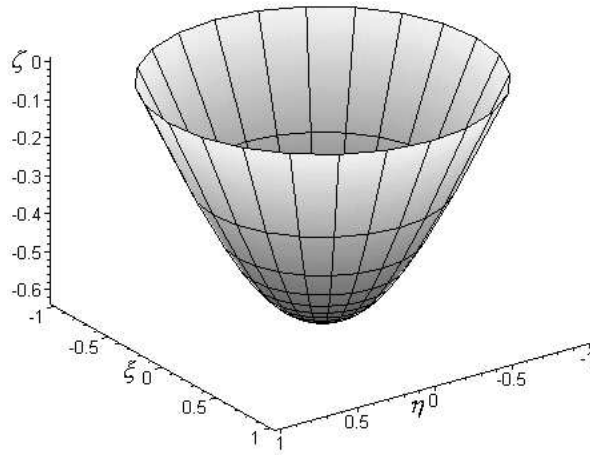


Рис. 9. $N = 2$, $k = \frac{6}{5}$, $f(\theta) = \frac{\lambda}{\cos \theta} \left(1 - \frac{1}{2 \cos^2 \theta} + \frac{1}{8 \cos^4 \theta} \right)$.

Выражая отсюда k , находим

$$k = \frac{2(N+1)}{2N+1}. \quad (6.21)$$

При $N = 0$ из формулы (6.21) получаем

$$k = 2,$$

а из формулы (6.20) следует, что

$$f(\theta) = \frac{\lambda_1}{\cos \theta},$$

то есть мы получаем частное решение (6.4), впервые найденное Х. М. Мустафи [49].

Легко видеть, что полагая $N = 1, N = 2, \dots$ мы можем найти бесконечное множество решений линейного дифференциального уравнения (6.11), опираясь на формулы (6.18)–(6.21). Так, полагая $N = 1$ из формул (6.18), (6.19) получаем

$$k = \frac{4}{5}, \quad f(\theta) = \frac{\lambda_2}{\sin \theta} \left(1 - \frac{1}{4 \sin^2 \theta} \right),$$

а из формул (6.20), (6.21) получаем

$$k = \frac{4}{3}, \quad f(\theta) = \frac{\lambda_1}{\cos \theta} \left(1 - \frac{1}{4 \cos^2 \theta} \right).$$

При $N = 2$ получаем

$$k = \frac{6}{7}, \quad f(\theta) = \frac{\lambda_2}{\sin \theta} \left(1 - \frac{1}{2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{8 \sin^4 \theta} \right),$$

$$k = \frac{6}{5}, \quad f(\theta) = \frac{\lambda_1}{\cos \theta} \left(1 - \frac{1}{2 \cos^2 \theta} + \frac{1}{8 \cos^4 \theta} \right)$$

и так далее. Вид соответствующих поверхностей указан на Рис. 6 — 9.

Теперь рассмотрим случай $\ell \neq 0$. В этом случае дифференциальное уравнение для определения функции $f(\theta)$ будет иметь вид

$$((k-1) \cos \theta - k\ell) f'' \sin \theta + k(\ell \cos \theta - 1) f' + (k-1) f \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (6.22)$$

В уравнении (6.22) сделаем замену независимой переменной. Положим $1 + \cos \theta = 2x$, тогда после указанной замены уравнение (6.22) примет вид

$$\begin{aligned} x(x-1) \left[x - \frac{k(\ell+1)-1}{2(k-1)} \right] \frac{d^2 f}{dx^2} + \left(x^2 - x - \frac{1}{4(k-1)} \right) \frac{df}{dx} + \\ + \left(\frac{1}{2} - x \right) f = 0. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Уравнение (6.23) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка, называемое уравнением Хейна [24, 151]. Если ввести параметры

$$a = \frac{(k(\ell + 1) - 1)}{2(k - 1)}, \quad \alpha = 1, \quad \beta = -1, \quad \gamma = -\frac{1}{2(k(\ell + 1) - 1)},$$

$$\delta = \frac{1}{k\ell - (k - 1)}, \quad q = -\frac{1}{2},$$

то уравнение (6.23) можно записать в том виде, в котором в литературе обычно приводится уравнение Хейна [24, 151]:

$$\begin{aligned} x(x - 1)(x - a)f''_{xx} + \left[(\alpha + \beta + 1)x^2 - \right. \\ \left. - (\alpha + \beta + 1 + a(\gamma + \delta) - \delta)x + a\gamma \right] f'_x + (\alpha\beta x - q)f = 0. \end{aligned} \quad (6.24)$$

При $|a| \geq 1$ и $\gamma \neq 0, -1, -2, -3, \dots$ решение уравнения (6.24) может быть представлено в виде ряда

$$F(a, q, \alpha, \beta, \gamma, \delta; x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad (6.25)$$

коэффициенты которого определяются рекуррентными формулами:

$$c_0 = 1, \quad a\gamma c_1 = q,$$

$$\begin{aligned} a(n + 1)(\gamma + n)c_{n+1} = \left[a(\gamma + \delta + n - 1) + \alpha + \beta - \delta + n + \frac{q}{n} \right] nc_n - \\ - [(n - 1)(n - 2) + (n - 1)(\alpha + \beta + 1) + \alpha\beta] c_{n-1}. \end{aligned}$$

Этот ряд заведомо сходится при $|x| \leq 1$. Отметим, однако, что уравнение Хейна (6.24) изучено гораздо меньше, нежели гипергеометрическое уравнение. Так, например, в отличие от гипергеометрической функции, для функции Хей-

на (6.25) не имеется интегрального представления. Также мало что известно о том, к каким функциям сводится функция Хейна при частных значениях ее параметров. Подробнее об этой функции и о возможности ее сведения к другим функциям (в частности, к гипергеометрическим) можно прочесть в работах [133, 134, 151]. Изучению функции Хейна посвящены многочисленные работы А. М. Ишханяна с соавторами [55, 90, 95, 96, 153].

Уравнение Хейна не раз возникало при решении различных задач механики [11, 98, 142]. В частности, решение задачи о качении без проскальзывания круглого диска по внутренней поверхности неподвижной сферы выражается через функции Хейна [98].

Таким образом, при $\ell = 0$ поверхность тела, удовлетворяющая условию Муштари (6.2), определяется при помощи гипергеометрической функции (см. (6.17)), а при $\ell \neq 0$ – при помощи функции Хейна (6.24).

Кратко сформулируем основные результаты, полученные в данном параграфе.

1. Указан явный вид двух дополнительных к интегралу энергии первых интеграла уравнений движения тяжелого тела вращения по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости в случае, когда поверхность тела удовлетворяет условию Муштари (6.2). Соответствующие первые интегралы, линейные относительно обобщенных скоростей, имеют вид (6.8) и (6.9).
2. Показано, что условию Муштари (6.2) при $\ell = 0$ удовлетворяют поверхности, меридианное сечение которых определяется формулой (6.17). Тем самым, обнаружено целое семейство поверхностей, для которых справедливо условие Муштари (6.2). Показано, каким образом в это семейство входят два частных случая (6.3) и (6.4), изученные в работе Х. М. Муштари [49].

3. Показано, что условию Муштари (6.2) при $\ell \neq 0$ удовлетворяют поверхности, меридианное сечение которых определяется с помощью функции Хейна, которая является решением уравнения Хейна (6.24).

Выше нами было показано, что решение задачи о движении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости тяжелого тела вращения приводится к нахождению общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка (5.27). В дальнейшем мы будем изучать движение по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости различных тел, для каждого из которых будем выписывать соответствующее уравнение вида (5.27) и, используя алгоритм Ковачича, выяснять, при каких условиях у полученного линейного дифференциального уравнения второго порядка существуют лиувиллевы решения.

7 Движение круглого диска

7.1 Уравнения движения. Интегрируемость уравнений движения в гипергеометрических функциях

Для начала рассмотрим задачу о движении по абсолютно шероховатой плоскости динамически симметричного тела, имеющего острый край в форме окружности, центр которой совпадает с центром тяжести G тела; ось симметрии тела $G\zeta$ перпендикулярна плоскости острого края [59, 65, 103]. Такое твердое тело будем называть диском. В частности, диском является однородная круглая пластинка. Рассмотрим движение диска радиусом R в однородном поле тяжести, предполагая, что он опирается о горизонтальную плоскость одной точкой своего острого края. Тогда по формулам (5.8), (5.11) получаем:

$$f(\theta) = R \sin \theta, \quad \xi = -R, \quad \zeta = 0. \quad (7.1)$$

С учетом (7.1) система (5.24) запишется в виде

$$(A_3 + mR^2) \frac{dr}{d\theta} = mR^2 p, \quad A_1 \frac{d}{d\theta} (p \sin \theta) = A_3 r \sin \theta, \quad (7.2)$$

а дифференциальное уравнение второго порядка (5.27) записывается следующим образом:

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{dr}{d\theta} - Br = 0, \quad B = \frac{mR^2 A_3}{A_1 (A_3 + mR^2)}, \quad \theta \in (0, \pi). \quad (7.3)$$

В этом уравнении перейдем от независимой переменной θ к независимой переменной z , которая определяется соотношением [59, 65, 103]

$$\cos \theta = 1 - 2z,$$

и тогда получим

$$z(1-z) \frac{d^2 r}{dz^2} + (1-2z) \frac{dr}{dz} - Br = 0. \quad (7.4)$$

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка (7.4) представляет собой гипергеометрическое уравнение Гаусса [17, 24]. Таким образом, задача о движении диска интегрируется при помощи гипергеометрических функций.

Общее решение уравнения (7.4) можно представить в виде [17, 24]

$$r = c_1 F(\alpha, \beta, 1; z) + c_2 F(\alpha, \beta, 1; 1-z),$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные. Для полученного общего решения параметры α и β гипергеометрического ряда удовлетворяют условиям

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = B = \frac{mR^2 A_3}{A_1 (A_3 + mR^2)}.$$

Переходя от z к прежней переменной θ , получаем функцию $r(\theta)$ в виде

$$r = c_1 F\left(\alpha, \beta, 1; \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + c_2 F\left(\alpha, \beta, 1; \cos^2 \frac{\theta}{2}\right). \quad (7.5)$$

Функцию $p = p(\theta)$ найдем, воспользовавшись уравнениями (7.2) и (7.5):

$$p = \frac{A_3}{2A_1} \sin \theta \left[c_1 F\left(\alpha+1, \beta+1, 2; \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) - c_2 F\left(\alpha+1, \beta+1, 2; \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (7.6)$$

с учетом выражения для производной гипергеометрической функции [17, 24]

$$\frac{d}{dz} F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1; z).$$

Таким образом, общее решение системы уравнений (7.2) представляется в виде (7.5), (7.6) и выражается через гипергеометрические функции. Следовательно, при произвольном значении параметра B общее решение линейного дифференциального уравнения (7.3) не выражается через лиувиллевы функции. Выясним, могут ли существовать лиувиллевы решения у дифференциального уравнения (7.3) при дополнительных ограничениях на распределение масс в диске, то есть при каких-либо конкретных значениях параметра B . Для этого воспользуемся алгоритмом Ковачича.

7.2 Применение алгоритма Ковачича к задаче о движении круглого диска

Для того, чтобы применить к дифференциальному уравнению (7.3) алгоритм Ковачича, необходимо сначала представить коэффициенты этого уравнения в виде рациональных функций. Для приведения коэффициентов уравнения (7.3) к рациональному виду сделаем в этом уравнении замену независимой переменной по формуле $\cos \theta = x$. Тогда оно примет вид

$$\frac{d^2 r}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2} \frac{dr}{dx} - \frac{B}{1-x^2} r = 0. \quad (7.7)$$

Коэффициенты полученного уравнения являются рациональными функциями независимой переменной, поэтому к нему можно применять алгоритм Кова-

чича. При помощи замены вида (1.2) уравнение (7.7) приводится к уравнению

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = D(x)y, \quad (7.8)$$

$$D(x) = \frac{2B-1}{4(x+1)} - \frac{2B-1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)^2} - \frac{1}{4(x-1)^2}.$$

Разложение функции $D(x)$ в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид

$$D(x)|_{x=\infty} = -\frac{B}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Все первоначальные действия, необходимые для применения алгоритма Ковачича, произведены.

Замечание 7.1. *Здесь и всюду в дальнейшем нами будут рассматриваться значения параметров задачи, имеющие физический смысл. Под этим понимается положительность всех геометрических параметров, массы тела и моментов инерции, а также выполнение неравенства треугольника для моментов инерции. Однако алгоритм Ковачича позволяет найти лиувиллевы решения линейного дифференциального уравнения второго порядка при любых значениях параметров. Например, если $B = 0$ (масса диска сосредоточена на его оси симметрии), то общее решения уравнения (7.3) выражается через лиувиллевы (более того, через элементарные) функции:*

$$r(\theta) = c_1 \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) + c_2. \quad (7.9)$$

Непосредственное применение алгоритма Ковачича к дифференциальному уравнению (7.8) приводит к следующему результату.

Теорема 7.1. *При всех значениях параметров задачи, имеющих физический смысл, уравнение (7.8) не имеет решений, выражающихся через лиувиллевы функции.*

Доказательство. Сначала выясним, существуют ли у уравнения (7.8) лиувиллевы решения вида (2.1), то есть решения, соответствующие Случаю 1 Теоремы 2.1. Функция $D(x)$ имеет два конечных полюса – в точках $x = 1$ и $x = -1$, и порядок обоих этих полюсов – второй. В точке $x = \infty$ функция $D(x)$ также имеет полюс второго порядка. Следовательно, указанные в Теореме 2.4 необходимые условия существования решения вида (1.1) выполняются. Применим алгоритм Ковачича для поиска лиувиллевых решений вида (2.1) уравнения (7.8) так, как он описан в пункте 3.1.

Шаг 1. Вычислим сначала постоянные $\left[\sqrt{D}\right]_c$ и $\alpha_c^\pm$:

$$\left[\sqrt{D}\right]_{\pm 1} = 0, \quad b_{\pm 1} = -\frac{1}{4}, \quad \alpha_1^\pm = \alpha_{-1}^\pm = \frac{1}{2},$$

$$\left[\sqrt{D}\right]_\infty = 0, \quad b_\infty = -B, \quad \alpha_\infty^\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4B}}{2}.$$

Шаг 2. Поскольку число ρ конечных полюсов функции $D(x)$ равно 2, то мы имеем $2^{\rho+1} = 2^3 = 8$ наборов знаков $s = (s(\infty), s(1), s(-1))$. Для каждого из этих наборов вычислим величину d по формуле (3.2):

$$d = \alpha_\infty^{s(\infty)} - \alpha_1^{s(1)} - \alpha_{-1}^{s(-1)}.$$

Вычисления показывают, что из восьми значений d различны только два, а именно:

$$d = \frac{\pm \sqrt{1 - 4B} - 1}{2}.$$

В соответствии с алгоритмом, число d должно быть неотрицательным целым числом. Но поскольку по физическому смыслу задачи параметр $B > 0$, то число d в данном случае может быть только отрицательным. Это означает, что у уравнения (7.8) не может существовать решения вида (2.1). Заметим еще, что при $B = 0$ для d находится единственное неотрицательное значение $d = 0$, и у уравнения (7.8) существует лиувиллево решение вида (2.1), которое для

исходного уравнения (7.3) имеет вид (7.9).

Теперь попытаемся найти у уравнения (7.8) лиувиллевы решения вида (2.6), то есть решения, соответствующие Случаю 2 Теоремы 2.1. Необходимые условия существования данных решений у уравнения (7.8) выполняются (см. Теорему 2.4). Применим алгоритм Ковачича для поиска лиувиллевых решений вида (2.6) уравнения (7.8) так, как он описывается пункте 3.4.

Шаг 1. Определим множества E_c , соответствующие конечным полюсам:

$$E_1 = \{2\}, \quad E_{-1} = \{2\}, \quad E_\infty = \left\{ \left(2 \pm k\sqrt{1-4B} \right) \cap \mathbb{Z}, k = 0, \pm 2 \right\}.$$

Определим, какие целые числа могут входить в множество E_∞ . Легко показать, что при условиях

$$B > 0, \quad 1 - 4B \geq 0$$

имеем либо

$$E_\infty = \{1, 2, 3\}$$

при $B = \frac{3}{16}$, либо

$$E_\infty = \{2\}$$

при остальных допустимых значениях B .

Шаг 2. В соответствии с алгоритмом, на этом шаге рассмотрим все возможные наборы $s = (e_\infty, e_1, e_{-1})$ элементов множеств E_1, E_{-1}, E_∞ , причем в каждом наборе одно из чисел обязательно должно быть нечетным. Очевидно, что нечетные числа в наборе s могут появиться только при $B = \frac{3}{16}$. Имеем ровно два таких набора чисел: $(1, 2, 2)$ и $(3, 2, 2)$. Однако соответствующие им значения постоянной d , вычисляемые по формуле (3.11)

$$d = \frac{1}{2} (e_\infty - e_1 - e_{-1}),$$

являются отрицательными числами, хотя в соответствии с алгоритмом они должны быть целыми неотрицательными. Следовательно, у уравнения (7.8) не существует лиувиллевых решений вида (2.6).

Выясним теперь, существует ли у уравнения (7.8) лиувиллевы решения вида (2.10), то есть решения, соответствующие Случаю 3 Теоремы 2.1. Сначала определим, выполняются ли необходимые условия существования таких решений у уравнения (7.8). Функция $D(x)$ может быть записана в виде

$$D(x) = \frac{\alpha_1}{(x+1)^2} + \frac{\alpha_2}{(x-1)^2} + \frac{\beta_1}{x+1} + \frac{\beta_2}{x-1},$$

$$\alpha_1 = -\frac{1}{4}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{4}, \quad \beta_1 = \frac{2B-1}{4}, \quad \beta_2 = -\frac{2B-1}{4},$$

то есть данная функция имеет в точности вид, который указан в описании необходимых условий существования решений вида (2.10) у уравнения (7.8), приведенных в Теореме 2.4. Для функции $D(x)$ выполняются условия

$$\sqrt{1+4\alpha_1} = 0 \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{1+4\alpha_2} = 0 \in \mathbb{Q}, \quad \beta_1 + \beta_2 = 0.$$

Таким образом, для того, чтобы у уравнения (7.8) могли существовать лиувиллевы решения вида (2.10), должно иметь место условие:

$$\sqrt{1+4\gamma} \in \mathbb{Q}, \quad \gamma = \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 + \beta_2.$$

Для уравнения (7.8) это условие приводится к виду

$$\sqrt{1-4B} \in \mathbb{Q}.$$

Будем считать, что данное условие выполнено. Применим алгоритм Ковачича для поиска лиувиллевых решений вида (2.10) уравнения (7.8) так, как он описывается в пункте 3.7.

Шаг 1. Определим множества E_c , соответствующие конечным полюсам:

$$E_1 = \{6\}, \quad E_{-1} = \{6\},$$

$$E_\infty = \left\{ \left(6 + k\sqrt{1 - 4B} \right) \cap \mathbb{Z} \right\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 6.$$

Шаг 2. Теперь рассмотрим все возможные наборы $s = (e_\infty, e_1, e_{-1})$ элементов множеств E_1, E_{-1}, E_∞ и найдем число d по формуле (3.24):

$$d = e_\infty - e_1 - e_{-1} = k\sqrt{1 - 4B} - 6.$$

В соответствии с алгоритмом, d должно быть неотрицательным целым числом. При этом наибольшее значение, которое может принимать целое число k , равно 6. Поэтому при $B > 0$ число d является отрицательным. Это означает, что у уравнения (7.8) не существует лиувиллевых решений вида (2.10).

Таким образом, можно сделать вывод, что уравнение (7.8) при $B > 0$ не имеет лиувиллевых решений. Теорема доказана. $\square$

Итак, мы доказали, что задача о качении без проскальзывания круглого диска по горизонтальной плоскости не интегрируется в лиувиллевых функциях. Иными словами, гипергеометрические функции (7.5), (7.6) не сводятся к лиувиллевым функциям ни при каких конкретных значениях параметра B .

8 Движение диска со смещенным центром масс

Пусть снова по неподвижной горизонтальной плоскости катится без проскальзывания динамически симметричное тело, имеющее острый край в форме окружности радиуса R . Предположим, что ось динамической симметрии $G\zeta$ тела, содержащая его центр масс G , проходит также через центр этой окружности перпендикулярно плоскости острого края. В отличие от предыдущего случая будем теперь считать, что центр окружности и центр масс G тела не совпадают друг с другом, а лежат на оси динамической симметрии на расстоянии

h друг от друга. Такое тело принято называть диском со смещенным центром масс или диском конечной толщины. Движение по горизонтальной плоскости такого диска рассматривалось в работах [71–73, 108, 119]. Будем считать, что в процессе движения диск наклонен по отношению к вертикали и, следовательно, касается плоскости в единственной точке. Расстояние от центра масс диска до опорной плоскости выражается формулой

$$f(\theta) = R \sin \theta + h \cos \theta.$$

Тогда по формулам (5.11) находим

$$\xi = -R, \quad \zeta = -h.$$

Система уравнений (5.25) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\theta} &= \frac{A_3 (A_3 + mR^2)}{A_1 A_3 + A_1 mR^2 + A_3 m h^2} r - \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{A_3 m R h}{A_1 A_3 + A_1 mR^2 + A_3 m h^2} \right) p, \\ \frac{dr}{d\theta} &= \frac{A_1 m R^2}{A_1 A_3 + A_1 mR^2 + A_3 m h^2} p + \frac{A_3 m R h}{A_1 A_3 + A_1 mR^2 + A_3 m h^2} r. \end{aligned} \quad (8.1)$$

а линейного дифференциального уравнение второго порядка (5.27) представляется в виде:

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{dr}{d\theta} - \frac{A_3 m R (R \sin \theta + h \cos \theta)}{(A_1 A_3 + A_1 mR^2 + A_3 m h^2) \sin \theta} r = 0, \quad (8.2)$$

причем угол θ меняется в интервале

$$\theta \in \left(0, \pi - \arccos \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right) \right).$$

Общее решение системы (8.1), выражающееся через гипергеометрические функции, было впервые указано в работах М. Батисты [71–73]. Выясним, существуют ли лиувиллевы решения у линейного дифференциального уравнения

второго порядка (8.2). Сделаем в этом уравнении замену независимой переменной по формуле $\operatorname{ctg} \theta = x$ и введем следующие обозначения:

$$A = \frac{A_3 m h R}{A_1 A_3 + A_1 m R^2 + A_3 m h^2}, \quad B = \frac{A_3 m R^2}{A_1 A_3 + A_1 m R^2 + A_3 m h^2}. \quad (8.3)$$

В результате уравнение (8.2) запишется так:

$$\frac{d^2 r}{dx^2} + \frac{x}{x^2 + 1} \frac{dr}{dx} - \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)^2} r = 0. \quad (8.4)$$

Замена вида (1.2) приводит уравнение (8.4) к уравнению

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = D_1(x) y, \quad (8.5)$$

$$D_1(x) = \frac{(4B + 1)i}{16(x + i)} - \frac{3 + 4B - 4Ai}{16(x + i)^2} - \frac{(4B + 1)i}{16(x - i)} - \frac{3 + 4B + 4Ai}{16(x - i)^2}.$$

Разложение функции $D_1(x)$ в ряд Лорана в окрестности $x = \infty$ имеет вид

$$D_1(x) |_{x=\infty} = -\frac{1}{4x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Применение алгоритма Ковачича к уравнению (8.5) дает следующий результат.

Теорема 8.1. *При всех значениях параметров задачи, имеющих физический смысл, уравнение (8.5) не имеет лиувиллевых решений.*

Доказательство. Сначала попытаемся найти у уравнения (8.5) лиувиллевы решения вида (2.1), то есть решения, соответствующие Случаю 1 Теоремы 2.1. Функция $D_1(x)$ имеет два конечных полюса второго порядка – в точках $x = i$ и $x = -i$. В точке $x = \infty$ функция $D_1(x)$ также имеет полюс второго порядка. Следовательно, указанные в Теореме 2.4 необходимые условия существования решений вида (2.1) для уравнения (8.5) являются выполненными. Применим алгоритм Ковачича для поиска лиувиллевых решений вида (2.1) уравнения (8.5)

так, как он описан в пункте 3.1.

Шаг 1. Вычислим сначала постоянные $[\sqrt{D_1}]_c$ и $\alpha_c^\pm$:

$$[\sqrt{D_1}]_{\pm i} = 0, \quad \alpha_i^\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} - B - Ai}, \quad \alpha_{-i}^\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} - B + Ai},$$

$$[\sqrt{D_1}]_\infty = 0, \quad b_\infty = -\frac{1}{4}, \quad \alpha_\infty^\pm = \frac{1}{2}.$$

Шаг 2. Таким образом, мы имеем 8 наборов знаков $s = (s(\infty), s(i), s(-i))$. Для каждого из этих восьми наборов вычислим величину d по формуле (3.2):

$$d = \alpha_\infty^{s(\infty)} - \alpha_i^{s(i)} - \alpha_{-i}^{s(-i)}.$$

В явном виде число d записывается следующим образом:

$$d = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} - B - Ai} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} - B + Ai}.$$

Здесь знак радикала обозначает пару комплексных чисел, противоположных по знаку. Поскольку квадратные корни извлекаются из двух комплексно сопряженных чисел, то полученные в результате четыре числа имеют вид

$$u + vi, \quad u - vi, \quad -u + vi, \quad -u - vi,$$

где $u = \left| \operatorname{Re} \sqrt{\frac{1}{4} - B + Ai} \right|$, $v = \left| \operatorname{Im} \sqrt{\frac{1}{4} - B + Ai} \right|$.

Следовательно, d является неотрицательным целым числом, если из указанных четырех чисел в выражении для d будет участвовать пара комплексно сопряженных чисел с положительной действительной частью, т.е. если

$$d = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(u + vi + u - vi) = -\frac{1}{2} + \left| \operatorname{Re} \sqrt{\frac{1}{4} - B + Ai} \right|.$$

Можно показать, что

$$d = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - 4B + \sqrt{16A^2 + (1 - 4B)^2}}{2}}. \quad (8.6)$$

Докажем, что полученное условие (8.6) не выполняется ни для одного целого неотрицательного d , если A и B определяются формулами (8.3). Перепишем условие (8.6) в виде

$$16A^2 = 4(2d + 1)^4 - 4(2d + 1)^2(1 - 4B).$$

Обозначим $2(2d + 1)^2 = k \geq 2$ при $d \geq 0$. С учетом этого обозначения получим

$$16A^2 = k^2 - 2k(1 - 4B).$$

Перепишем последнее соотношение следующим образом:

$$8B(2\frac{A^2}{B} - k) = k(k - 2). \quad (8.7)$$

Покажем, что при $k \geq 2$ в левой части соотношения (8.7) стоит отрицательное выражение, в то время как его правая часть неотрицательна. Для этого достаточно получить оценку $\frac{A^2}{B} < 1$ и учесть, что $B > 0$. Из формул (8.3) следует, что

$$\frac{A^2}{B} = \frac{A_3mh^2}{A_1A_3 + A_1mR^2 + A_3mh^2} < \frac{A_3mh^2}{A_3mh^2} = 1.$$

Полученное противоречие доказывает, что у дифференциального уравнения (8.5) отсутствуют лиувиллевы решения вида (2.1).

Теперь попытаемся найти у линейного дифференциального уравнения (8.5) лиувиллевы решения вида (2.6), то есть решения, соответствующие Случаю 2 Теоремы 2.1. Необходимые условия существования таких решения у уравнения (8.5) выполняются (см. Теорему 2.4). Для поиска соответствующих решений применим алгоритм Ковачича так, как он описан в пункте 3.4.

Шаг 1. Определим множества E_c :

$$E_{\pm i} = \left\{ \left(2 + k \sqrt{\frac{1}{4} - B \mp Ai} \right) \cap \mathbb{Z} \right\} = \{2\}, \quad k = 0, \pm 2,$$

$$E_{\infty} = \{2\}.$$

Шаг 2. В соответствии с алгоритмом, рассмотрим все возможные наборы $s = (e_{\infty}, e_i, e_{-i})$ элементов множеств E_i, E_{-i}, E_{∞} , причем в каждом наборе один из элементов обязательно должен быть нечетным. Очевидно, что в данном случае ни одного такого набора не существует. Следовательно, у уравнения (8.5) не существует лиувиллевых решений вида (2.6).

Выясним теперь, существуют ли у уравнения (8.5) лиувиллевы решения вида (2.10), то есть решения, соответствующие Случаю 3 Теоремы 2.1. Сначала проверим, выполняются ли необходимые условия существования таких решений у уравнения (8.5). Функция $D_1(x)$ может быть разложена в сумму простейших дробей

$$D_1(x) = \frac{\alpha_1}{(x+i)^2} + \frac{\alpha_2}{(x-i)^2} + \frac{\beta_1}{x+i} + \frac{\beta_2}{x-i},$$

$$\alpha_1 = -\frac{3+4B-4Ai}{16}, \quad \alpha_2 = -\frac{3+4B+4Ai}{16},$$

$$\beta_1 = \frac{(4B+1)i}{16}, \quad \beta_2 = -\frac{(4B+1)i}{16}.$$

Легко видеть, что справедливы условия

$$\sqrt{1+4\alpha_1} = \sqrt{\frac{1}{4} - B + Ai} \notin \mathbb{Q},$$

$$\sqrt{1+4\alpha_2} = \sqrt{\frac{1}{4} - B - Ai} \notin \mathbb{Q}.$$

Таким образом, необходимые условия существования решений вида (2.10) у уравнения (8.5) не выполняются. Следовательно, уравнение (8.5) не имеет лиувиллевых решений вида (2.10). Теорема доказана. $\square$

Итак, мы доказали, что задача о качении без проскальзывания диска со смещенным центром масс по неподвижной горизонтальной плоскости не разрешима в лиувиллевых функциях.

9 Движение тора

9.1 Постановка задачи. Уравнения движения. Общий случай и частные случаи

Рассмотрим задачу о качении без проскальзывания по горизонтальной плоскости динамически симметричного тора. Пусть R – радиус меридиана тора на экваторе, и $a + R$ – радиус экваториальной окружности, центр которой совпадает с центром масс тора (Рис. 10). Тогда высота центра масс тора над опорной плоскостью выражается формулой

$$f(\theta) = R + a \sin \theta.$$

По формулам (5.11) находим координаты точки касания тора с опорной плоскостью

$$\xi = -a - R \sin \theta, \quad \zeta = -R \cos \theta.$$

Система уравнений (5.25) записывается следующим образом:

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{A_3(A_3 + ma^2 + mR^2 + 2maR \sin \theta)}{\Delta} r - \left(1 + \frac{A_3maR \sin \theta}{\Delta}\right) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} p, \quad (9.1)$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{mR(A_3 - A_1)(R \sin \theta + a) \cos \theta}{\Delta} r + \frac{A_1ma(R \sin \theta + a)}{\Delta} p,$$

$$\Delta = (A_1 - A_3)mR^2 \sin^2 \theta + 2A_1mRa \sin \theta + A_1A_3 + A_1ma^2 + A_3mR^2,$$

а линейное дифференциальное уравнение второго порядка (5.27) представляется в виде:

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + b_1 \frac{dr}{d\theta} + b_2 r = 0, \quad \theta \in (0, \pi), \quad (9.2)$$

$$b_1 = \frac{a \cos \theta}{(R \sin \theta + a) \sin \theta} + \frac{3mR((A_1 - A_3)R \sin \theta + A_1 a) \cos \theta}{\Delta},$$

$$b_2 = \frac{m(R \sin \theta + a)(R(A_1 - A_3)(1 - 2 \sin^2 \theta) - A_3 a \sin \theta)}{\Delta \sin \theta}.$$

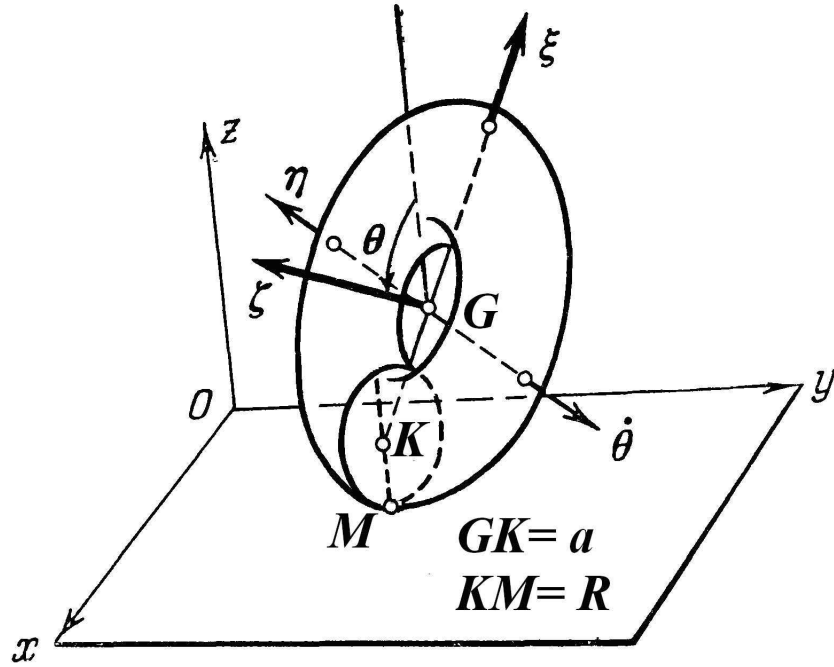


Рис. 10. Качение тора по горизонтальной плоскости.

Система уравнений (9.1) впервые была получена в работах Л. Г. Лобаса [44, 45] (см. также [20, 50]). Выясним, существуют ли у линейного дифференциального уравнения второго порядка (9.2) лиувиллевы решения. Для этого воспользуемся алгоритмом Ковачича. Для применения алгоритма приведем сначала коэффициенты уравнения (9.2) к виду рациональных функций. Для этого сделаем в уравнении (9.2) замену независимой переменной по формуле $\sin \theta = x$ и введем обозначение $B = \frac{a}{R}$. Поскольку $a > R$, то $B > 1$.

В результате уравнение (9.2) примет вид уравнения с рациональными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dx^2} + d_1(x) \frac{dr}{dx} + d_2(x)r &= 0, \\ d_1(x) &= \frac{B}{x(x+B)} + \frac{x}{x^2-1} + \frac{3mR^2((A_1-A_3)x + A_1B)}{\Delta}, \\ d_2(x) &= \frac{mR^2(x+B)((A_1-A_3)(2x^2-1) + A_3Bx)}{x(x^2-1)\Delta}, \end{aligned} \quad (9.3)$$

$$\Delta = (A_1 - A_3)mR^2x^2 + 2A_1BmR^2x + A_1A_3 + A_1B^2mR^2 + A_3mR^2.$$

При $A_3 \neq A_1$ многочлен Δ , входящий в знаменатели коэффициентов d_1 и d_2 , имеет два корня, которые мы обозначим x_1 и x_2 . В явном виде их можно записать так:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{A_1mRB - \sqrt{A_3m(A_1mR^2B^2 - (A_1 - A_3)(A_1 + mR^2))}}{mR(A_1 - A_3)}, \\ x_2 &= -\frac{A_1mRB + \sqrt{A_3m(A_1mR^2B^2 - (A_1 - A_3)(A_1 + mR^2))}}{mR(A_1 - A_3)}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Замена вида (1.2) приводит уравнение (9.3) к виду

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = T(x)y, \quad (9.5)$$

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{\beta_1}{x-1} + \frac{\alpha_1}{(x-1)^2} + \frac{\beta_2}{x+1} + \frac{\alpha_2}{(x+1)^2} + \frac{\beta_3}{x-x_1} + \frac{\alpha_3}{(x-x_1)^2} + \\ &+ \frac{\beta_4}{x-x_2} + \frac{\alpha_4}{(x-x_2)^2} + \frac{\beta_5}{x+B} + \frac{\alpha_5}{(x+B)^2} + \frac{\beta_6}{x} + \frac{\alpha_6}{x^2}, \\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 &= -\frac{3}{16}, \quad \alpha_5 = \frac{3}{4}, \quad \alpha_6 = -\frac{1}{4}, \end{aligned} \quad (9.6)$$

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{8B^3 + 4(x_1 + x_2 + 2)B^2 + (5x_1x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 9)B}{16(x_1 - 1)(x_2 - 1)(B + 1)} + \\
&+ \frac{x_1x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 5}{16(x_1 - 1)(x_2 - 1)(B + 1)}, \\
\beta_2 &= -\frac{8B^3 + 4(x_1 + x_2 - 2)B^2 + (5x_1x_2 + 3x_1 + 3x_2 + 9)B}{16(x_1 + 1)(x_2 + 1)(B - 1)} + \\
&+ \frac{x_1x_2 + 3x_1 + 3x_2 + 5}{16(x_1 + 1)(x_2 + 1)(B - 1)}, \\
\beta_3 &= \frac{8x_1B^3 + 4(x_1^2 + x_1x_2 + 2)B^2 + (5x_1^3 - 4x_1^2x_2 + x_1 + 6x_2)B}{8x_1(x_1 - 1)(x_1 + 1)(x_1 - x_2)(x_1 + B)} + \\
&+ \frac{(3x_1^2 - 2x_1x_2 - 1)x_1^2}{8x_1(x_1 - 1)(x_1 + 1)(x_1 - x_2)(x_1 + B)}, \\
\beta_4 &= \frac{8x_2B^3 + 4(x_2^2 + x_1x_2 + 2)B^2 + (5x_2^3 - 4x_1x_2^2 + 6x_1 + x_2)B}{8x_2(x_2 - 1)(x_2 + 1)(x_2 - x_1)(x_2 + B)} + \\
&+ \frac{(3x_2^2 - 2x_1x_2 - 1)x_2^2}{8x_2(x_2 - 1)(x_2 + 1)(x_2 - x_1)(x_2 + B)}, \\
\beta_5 &= \frac{10B^4 + 7(x_1 + x_2)B^3 + 4(x_1x_2 - 2)B^2 - 5(x_1 + x_2)B - 2x_1x_2}{4B(B - 1)(B + 1)(x_1 + B)(x_2 + B)}, \\
\beta_6 &= -\frac{4B^2 + 3(x_1 + x_2)B + 2x_1x_2}{4x_1x_2B}.
\end{aligned}$$

Таким образом, функция $T(x)$ имеет шесть конечных полюсов в точках $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $x = -B$, $x = x_1$ и $x = x_2$. При произвольных значениях параметров задачи все эти полюсы различны. Однако возможны ситуации, когда при дополнительных ограничениях на параметры задачи функция $T(x)$ имеет вид, отличный от того, что указан выше. Перечислим далее все возмож-

ные случаи, когда общий вид функции $T(x)$ изменяется.

1. При выполнении условия

$$A_3 = A_1 \quad (9.7)$$

многочлен Δ является многочленом не второй степени от x , а первой. В этом случае единственным корнем многочлена Δ будет значение x_0 , равное

$$x_0 = -\frac{A_1 + mR^2 + mR^2B^2}{2mBR^2}. \quad (9.8)$$

2. Для полюса x_0 , определяемого по формуле (9.8), справедлива оценка $x_0 < -1$. Поэтому x_0 не может совпадать ни с одним из полюсов 0, 1 или -1 . Однако, при выполнении условия

$$A_3 = A_1 = mR^2(B^2 - 1) = m(a^2 - R^2) \quad (9.9)$$

мы получаем, что $x_0 = -B$.

3. При выполнении условий

$$A_3 \neq A_1, \quad A_1 = m(a^2 - R^2) \quad (9.10)$$

будем иметь совпадение двух полюсов $x_1 = -B$.

4. При выполнении условия

$$A_3 = \frac{A_1}{A_1 + mR^2} (A_1 + mR^2 - ma^2) \quad (9.11)$$

будем иметь совпадение двух полюсов $x_1 = x_2$, которые будут при этом равны:

$$x_1 = x_2 = -\frac{A_1 + mR^2}{mBR^2}.$$

Чтобы условие (9.11) имело физический смысл, необходимо выполнение неравенства $A_1 + mR^2 - ma^2 > 0$, с учетом которого имеем для полюсов

$x_1 = x_2$ оценку

$$x_1 = x_2 < -B.$$

Следовательно, если справедливо условие (9.11), то полюсы $x_1 = x_2$ не могут совпадать ни с одним из оставшихся полюсов $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $x = -B$.

Таким образом, для полного исследования вопроса о существовании лиувиллевых решений у линейного дифференциального уравнения (9.5) необходимо изучение не только общего случая, когда все полюсы функции $T(x)$ различны, и она имеет вид (9.6), но и четырех перечисленных выше случаев, когда параметры задачи удовлетворяют одному из соотношений (9.7), (9.9), (9.10) или (9.11).

9.2 Исследование общего случая

Предположим, что все полюсы функции $T(x)$ различны. Тогда она определяется формулой (9.6). В этом случае разложение функции $T(x)$ в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид

$$T(x)|_{x=\infty} \approx \frac{12B^2 + 4(x_1 + x_2)B + 2x_1x_2 - 3x_1^2 - 3x_2^2 - 8}{16x^4} + O\left(\frac{1}{x^5}\right).$$

Применение алгоритма Ковачича к уравнению (9.5) приводит в этом случае к следующему результату:

Теорема 9.1. *Если все полюсы функции $T(x)$ различны, то у линейного дифференциального уравнения второго порядка (9.5) не существует лиувиллевых решений ни при каких значениях параметров задачи, имеющих физический смысл.*

Доказательство. Сначала попытаемся найти у уравнения (9.5) лиувиллевы решения вида (2.1), то есть решения, соответствующие Случаю 1 Теоремы 2.1.

Функция $T(x)$ имеет шесть конечных полюсов второго порядка в точках $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $x = -B$, $x = x_1$ и $x = x_2$. В точке $x = \infty$ функция $T(x)$ имеет полюс порядка не ниже четвертого. Следовательно, указанные в Теореме 2.4 необходимые условия существования решения вида (2.1) для уравнения (9.5) выполняются. Применим алгоритм Ковачича для доказательства существования или отсутствия решения вида (2.1) у линейного дифференциального уравнения (9.5) так, как он описан в пункте 3.1.

Шаг 1. Вычислим сначала постоянные $\left[\sqrt{T}\right]_c$ и $\alpha_c^\pm$:

$$\left[\sqrt{T}\right]_1 = 0, \quad \alpha_1^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_1^- = \frac{1}{4},$$

$$\left[\sqrt{T}\right]_{-1} = 0, \quad \alpha_{-1}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{-1}^- = \frac{1}{4},$$

$$\left[\sqrt{T}\right]_{x_1} = 0, \quad \alpha_{x_1}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{x_1}^- = \frac{1}{4},$$

$$\left[\sqrt{T}\right]_{x_2} = 0, \quad \alpha_{x_2}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{x_2}^- = \frac{1}{4},$$

$$\left[\sqrt{T}\right]_{-B} = 0, \quad \alpha_{-B}^+ = \frac{3}{2}, \quad \alpha_{-B}^- = -\frac{1}{2},$$

$$\left[\sqrt{T}\right]_0 = 0, \quad \alpha_0^+ = \alpha_0^- = \frac{1}{2},$$

$$\left[\sqrt{T}\right]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = 0, \quad \alpha_\infty^- = 1.$$

Шаг 2. Функция $T(x)$ имеет 6 конечных полюсов, поэтому мы должны рассмотреть в общей сложности 128 наборов знаков:

$$s = (s(\infty), s(1), s(-1), s(x_1), s(x_2), s(-B), s(0)).$$

Для каждого из этих наборов вычислим число d по формуле (3.2):

$$d = \alpha_{\infty}^{s(\infty)} - \alpha_1^{s(1)} - \alpha_{-1}^{s(-1)} - \alpha_{x_1}^{s(x_1)} - \alpha_{x_2}^{s(x_2)} - \alpha_{-B}^{s(-B)} - \alpha_0^{s(0)}.$$

В соответствии с алгоритмом число d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы знаков s и соответствующие им наборы значений $\alpha_c^{\pm}$, делаем вывод, что единственным набором, для которого d будет неотрицательным числом, является набор

$$\alpha = (\alpha_{\infty}^-, \alpha_1^-, \alpha_{-1}^-, \alpha_{x_1}^-, \alpha_{x_2}^-, \alpha_{-B}^-, \alpha_0^-) = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

для которого $d = 0$. Для указанного набора значений $\alpha_c^{\pm}$ построим по формуле (3.3) функцию $\theta = \theta(x)$. В явном виде она записывается следующим образом:

$$\theta = \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x-x_1)} + \frac{1}{4(x-x_2)} - \frac{1}{2(x+B)} + \frac{1}{2x}.$$

Шаг 3. Для сохраненного на предыдущем шаге набора значений $\alpha_c^{\pm}$ нам требуется найти многочлен P степени $d = 0$, то есть $P \equiv 1$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению (3.4). Уравнение (3.4) после подстановки в него многочлена P и функции $\theta(x)$ примет вид:

$$-\frac{B(2B+x_1+x_2)(Bx+1)}{2x(x^2-1)(x+B)(x-x_1)(x-x_2)} = 0.$$

Учитывая что $B > 0$, делаем вывод, что условие существования лиувиллевых решений вида (2.1) у линейного дифференциального уравнения (9.5) имеет вид $2B + x_1 + x_2 = 0$. С учетом явного вида выражений x_1 и x_2 (см. (9.4)), данное условие записывается следующим образом:

$$2B + x_1 + x_2 = \frac{2A_3B}{A_3 - A_1} = 0.$$

Поскольку $B > 0$ и $A_3 > 0$, то очевидно, что данное условие не выполняется ни при каких значениях параметров задачи. Таким образом, уравнение (9.5) не имеет лиувиллевых решений вида (2.1).

Выясним теперь, существуют ли у линейного дифференциального уравнения (9.5) лиувиллевы решения вида (2.6), то есть решения, соответствующие Случаю 2 Теоремы 2.1. Необходимые условия существования таких решений у уравнения (9.5) являются выполненными (см. Теорему 2.4). Применим алгоритм Ковачича для поиска лиувиллевых решений вида (2.6) в том виде, как он описан в пункте 3.4.

Шаг 1. Определим множества E_c , состоящие из целых чисел и соответствующие конечным полюсам:

$$E_1 = \{1, 2, 3\}, \quad E_{-1} = \{1, 2, 3\}, \quad E_{x_1} = \{1, 2, 3\}, \quad E_{x_2} = \{1, 2, 3\},$$

$$E_{-B} = \{-2, 2, 6\}, \quad E_0 = \{2\}, \quad E_\infty = \{0, 2, 4\}.$$

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные наборы

$$s = (e_\infty, e_1, e_{-1}, e_{x_1}, e_{x_2}, e_{-B}, e_0)$$

элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{-1}, E_{x_1}, E_{x_2}, E_{-B}, E_0$, причем в каждом наборе один из элементов обязательно должен быть нечетным. Для каждого набора элементов s вычислим число d по формуле (3.11):

$$d = \frac{1}{2} (e_\infty - e_1 - e_{-1} - e_{x_1} - e_{x_2} - e_{-B} - e_0).$$

В соответствии с алгоритмом число d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы элементов множеств $E_1, E_{-1}, E_{x_1}, E_{x_2}, E_{-B}, E_0$ и E_∞ , убеждаемся, что единственным набором, для которого d

будет неотрицательным числом, является набор

$$e = (e_\infty, e_1, e_{-1}, e_{x_1}, e_{x_2}, e_{-B}, e_0) = (4, 1, 1, 1, 1, -2, 2),$$

и для него $d = 0$.

Шаг 3. Используя набор чисел e , сохраненный на предыдущем шаге, по формуле (3.12) определим функцию θ . Она записывается следующим образом:

$$\theta = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-x_1)} + \frac{1}{2(x-x_2)} - \frac{1}{x+B} + \frac{1}{x}.$$

Полином степени $d = 0$ ($P \equiv 1$) должен тождественно удовлетворять уравнению (3.13), которое после подстановки в него полинома P и функции θ принимает вид

$$\frac{B(2B + x_1 + x_2)(Bx^2 - (2B^2 - 2)x - B)}{x^2(x+B)^2(x^2-1)(x-x_1)(x-x_2)} = 0.$$

Поскольку ни один из трех сомножителей в числителе полученного выражения не может обратиться в ноль, то последнее соотношение не может выполняться ни при каких значениях параметров системы, имеющих физический смысл. Следовательно, у линейного уравнения (9.5) не существует лиувиллевых решений вида (2.6).

Выясним теперь, существуют ли у линейного дифференциального уравнения (9.5) лиувиллевы решения вида (2.10), то есть решения, соответствующие Случаю 3 Теоремы 2.1. Проверим для начала, выполняются ли необходимые условия существования таких решений у уравнения (9.5) (см. Теорему 2.4). Функция $T(x)$ не имеет конечных полюсов порядка, большего, чем 2. Порядок полюса функции $T(x)$ в точке $x = \infty$ больше, чем первый. Разложение функции $T(x)$ в сумму простейших дробей имеет вид (9.6). Вычисления показывают, что все остальные условия Теоремы 2.4 также выполняются:

$$\sqrt{1+4\alpha_i} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \ (i = 1, \dots, 4), \ \sqrt{1+4\alpha_5} = 2 \in \mathbb{Q}, \ \sqrt{1+4\alpha_6} = 0 \in \mathbb{Q},$$

$$\sum_{i=1}^6 \beta_i = 0, \quad \sqrt{1+4\gamma} = 1 \in \mathbb{Q}, \quad \gamma = 0.$$

Применим алгоритм Ковачича для поиска лиувиллевых решений вида (2.10) в том виде, как он описан в пункте 3.7.

Шаг 1. Определим множества E_c , состоящие из целых чисел:

$$E_1 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \quad E_{-1} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$E_{x_1} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \quad E_{x_2} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$E_{-B} = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}, \quad E_0 = \{6\},$$

$$E_\infty = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

Шаг 2. Рассмотрим все возможные наборы

$$s = (e_\infty, e_1, e_{-1}, e_{x_1}, e_{x_2}, e_{-B}, e_0)$$

элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{-1}, E_{x_1}, E_{x_2}, E_{-B}, E_0$ и по формуле (3.24) вычислим для них число d :

$$d = e_\infty - e_1 - e_{-1} - e_{x_1} - e_{x_2} - e_{-B} - e_0.$$

В соответствии с алгоритмом число d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{-1}, E_{x_1}, E_{x_2}, E_{-B}, E_0$, убеждаемся, что единственным набором, для которого d будет неотрицательным числом, является набор

$$e = (e_\infty, e_1, e_{-1}, e_{x_1}, e_{x_2}, e_{-B}, e_0) = (12, 3, 3, 3, 3, -6, 6),$$

для которого $d = 0$.

Шаг 3. Используя набор чисел e , сохраненный на предыдущем шаге, по формуле (3.25) определим для него функцию θ . Для набора e она имеет вид

$$\theta = \frac{3}{x-1} + \frac{3}{x+1} + \frac{3}{x-x_1} + \frac{3}{x-x_2} - \frac{6}{x+B} + \frac{6}{x}.$$

По формуле (3.26) составим многочлен

$$S = x(x-1)(x+1)(x-x_1)(x-x_2)(x+B).$$

Далее требуется выполнение рекуррентных уравнений (3.27):

$$\begin{aligned} P_{12} &= -P, \\ P_{i-1} &= -SP'_i + ((12-i)S' - S\theta)P_i - (12-i)(i+1)S^2T(x)P_{i+1}, \\ P_{-1} &= 0, \end{aligned}$$

в которых $P_{12} = -P \equiv -1$ – многочлен степени $d = 0$. Соответствующие вычисления, произведенные с помощью системы символьных вычислений Maple 7, приводят к многочлену, все коэффициенты которого должны быть равны нулю (вследствие условия $P_{-1} = 0$). Из условия $P_{-1} = 0$ следует, что либо $B = 0$, либо $x_1 = 0$, либо $x_2 = 0$, либо $x_1 + x_2 + 2B = 0$. Ранее было показано, что $B \neq 0$, $x_1 + x_2 + 2B \neq 0$. Тот факт, что $x_1 \neq 0$ и $x_2 \neq 0$ следует из формул (9.4). Это означает, что у уравнения (9.5) не существует лиувиллевых решений вида (2.10).

Таким образом, можно сделать вывод, что в случае, когда все полюсы функции $T(x)$ различны, уравнение (9.5) не имеет лиувиллевых решений. Теорема доказана. $\square$

Аналогично исследуются описанные выше частные случаи, когда параметры задачи удовлетворяют одному из соотношений (9.7), (9.9), (9.10) или (9.11). Это исследование подробно описано в работах [60, 187, 193]. Ни в одном из указанных частных случаев уравнение (9.5) не имеет лиувиллевых решений. Таким образом, можно утверждать, что уравнение (9.5) не имеет лиувиллевых решений при всех значениях параметров задачи, имеющих физический смысл.

10 Движение параболоида вращения

10.1 Постановка задачи и уравнения движения

Рассмотрим задачу о качении без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости динамически симметричного параболоида вращения (Рис. 11). Будем считать, что параметр параболы, являющейся меридианом параболоида, равен 2λ , а центр масс параболоида расположен в фокусе образующей параболы. Для такого параболоида высота его центра масс над опорной плоскостью выражается формулой

$$f(\theta) = \frac{\lambda}{\cos \theta}. \quad (10.1)$$

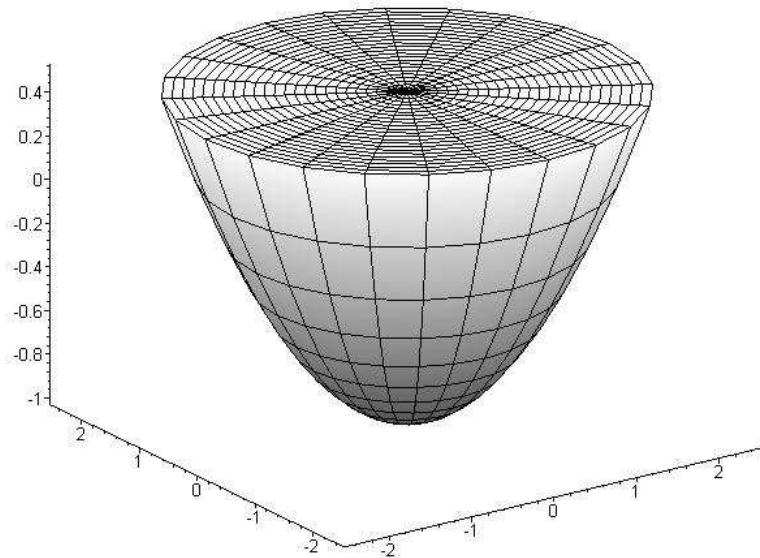


Рис. 11. Качение параболоида вращения по горизонтальной плоскости

По формулам (5.11), находим координаты ξ и ζ точки касания параболоида с горизонтальной плоскостью:

$$\xi = -\frac{2\lambda \sin \theta}{\cos \theta}, \quad \zeta = \frac{\lambda \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \lambda, \quad \zeta = \frac{\xi^2}{4\lambda} - \lambda. \quad (10.2)$$

Система уравнений (5.25) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\theta} = & - \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{2A_3 m \lambda^2 \sin^3 \theta (1 - 2 \cos^2 \theta)}{\Delta \cos \theta} \right) p + \\ & + \frac{A_3 ((A_3 - 4m\lambda^2) \cos^4 \theta + 8m\lambda^2 \cos^2 \theta - 2m\lambda^2)}{\Delta} r, \end{aligned} \quad (10.3)$$

$$\frac{dr}{d\theta} = - \frac{4A_1 m \lambda^2 \sin^4 \theta}{\Delta} p - \frac{2m\lambda^2 \sin \theta \cos \theta (2A_1 + A_3 - 2A_3 \cos^2 \theta)}{\Delta} r,$$

$$\Delta = (A_1 A_3 + 4m\lambda^2 (A_3 - A_1)) \cos^4 \theta - 4m\lambda^2 (A_3 - A_1) \cos^2 \theta + A_3 m \lambda^2,$$

а линейное дифференциальное уравнение второго порядка (5.27) представляется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\theta^2} + b_1 \frac{dr}{d\theta} + b_2 r &= 0, \\ b_1 &= \frac{\cos^2 \theta - 4}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{6(A_3 - 2(A_3 - A_1) \cos^2 \theta) m \lambda^2 \sin \theta}{\Delta \cos \theta}, \\ b_2 &= \frac{2m\lambda^2 (A_3 - 2A_1) (1 + \cos^2 \theta)}{\Delta}. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Заметим, что если выполняется условие

$$A_3 = 2A_1 \quad (10.5)$$

то уравнение (10.4) имеет частное решение

$$r = r_0 = \text{const}.$$

Этот факт впервые был установлен в работе Х.М. Муштари [49].

Для применения алгоритма Ковачича приведем коэффициенты линейного дифференциального уравнения второго порядка (10.4) к виду рациональных функций. Для этого в уравнении (10.4) сделаем замену независимой перемен-

ной по формуле $\cos^2 \theta = x$ и введем обозначение $B = m\lambda^2$. В результате данное переписывается в виде линейного дифференциального уравнения с рациональными коэффициентами

$$\frac{d^2 r}{dx^2} + d_1(x) \frac{dr}{dx} + d_2(x)r = 0, \quad (10.6)$$

$$d_1(x) = \frac{5-3x}{2x(1-x)} - \frac{3(A_3 - 2(A_3 - A_1)x)B}{x\Delta}, \quad d_2(x) = \frac{(A_3 - 2A_1)B(x+1)}{2x(1-x)\Delta},$$

$$\Delta = (A_1 A_3 + 4(A_3 - A_1)B)x^2 - 4(A_3 - A_1)Bx + A_3 B.$$

При произвольных значениях параметров задачи многочлен Δ , входящий в знаменатели коэффициентов d_1 и d_2 , имеет два корня x_1 и x_2 , которые равны

$$x_1 = \frac{2B(A_3 - A_1) - \sqrt{4A_1 B^2(A_1 - A_3) - A_1 A_3^2 B}}{A_1 A_3 + 4B(A_3 - A_1)}, \quad (10.7)$$

$$x_2 = \frac{2B(A_3 - A_1) + \sqrt{4A_1 B^2(A_1 - A_3) - A_1 A_3^2 B}}{A_1 A_3 + 4B(A_3 - A_1)}.$$

Замена вида (1.2) приводит линейное дифференциальное уравнение (10.6) к виду

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \Pi(x)y, \quad (10.8)$$

$$\Pi(x) = \frac{\beta_1}{x-1} + \frac{\alpha_1}{(x-1)^2} + \frac{\beta_0}{x} + \frac{\alpha_0}{x^2} + \frac{\beta_2}{x-x_1} + \frac{\alpha_2}{(x-x_1)^2} + \frac{\beta_3}{x-x_2} + \frac{\alpha_3}{(x-x_2)^2},$$

$$\alpha_0 = \frac{5}{16}, \quad \alpha_1 = \frac{3}{4}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = -\frac{3}{16},$$

$$\beta_0 = \frac{x_1 + x_2 + 2x_1 x_2}{8x_1 x_2}, \quad \beta_1 = \frac{4x_1 + 4x_2 - 3x_1 x_2 - 5}{4(x_1 - 1)(x_2 - 1)},$$

$$\beta_2 = -\frac{4x_1 + x_2 - 7x_1 x_2 - 2x_1^2 + 4x_1^2 x_2}{8x_1(x_1 - x_2)(x_1 - 1)},$$

$$\beta_3 = \frac{x_1 + 4x_2 - 7x_1 x_2 - 2x_2^2 + 4x_1 x_2^2}{8x_2(x_1 - x_2)(x_2 - 1)}.$$

Воспользуемся алгоритмом Ковачича для исследования вопроса о существовании лиувиллевых решений у линейного дифференциального уравнения второго порядка (10.8).

10.2 Существование лиувиллевых решений

Легко видеть, что при произвольных значениях параметров задачи функция $\Pi(x)$ имеет четыре конечных полюса второго порядка в точках $x = 0$, $x = 1$, $x = x_1$ и $x = x_2$. Будем далее предполагать, что все эти полюсы различны. Разложение функции $\Pi(x)$ в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид

$$\Pi(x)|_{x=\infty} \approx -\frac{3}{16x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Попытаемся найти у линейного дифференциального уравнения (10.8) лиувиллевы решения вида (2.1), то есть решения, соответствующие Случаю 1 Теоремы 2.1. Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (10.8) приводит к следующему результату.

Теорема 10.1. *Если все полюсы функции $\Pi(x)$ различны, то линейное уравнение (10.8) имеет решения вида (2.1) только при выполнении условия Х. М. Муштары (10.5).*

Доказательство. Применим алгоритм Ковачича для поиска лиувиллевых решений вида (2.1) уравнения (10.8) в том виде, как он описан в пункте 3.1.

Шаг 1. Вычислим сначала постоянные $\left[\sqrt{\Pi}\right]_c$ и $\alpha_c^\pm$:

$$\left[\sqrt{\Pi}\right]_0 = 0, \quad \alpha_0^+ = \frac{5}{4}, \quad \alpha_0^- = -\frac{1}{4},$$

$$\left[\sqrt{\Pi}\right]_1 = 0, \quad \alpha_1^+ = \frac{3}{2}, \quad \alpha_1^- = -\frac{1}{2},$$

$$\left[\sqrt{\Pi}\right]_{x_1} = 0, \quad \alpha_{x_1}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{x_1}^- = \frac{1}{4},$$

$$\left[\sqrt{\Pi} \right]_{x_2} = 0, \quad \alpha_{x_2}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{x_2}^- = \frac{1}{4},$$

$$\left[\sqrt{\Pi} \right]_{\infty} = 0, \quad \alpha_{\infty}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{\infty}^- = \frac{1}{4}.$$

Шаг 2. Теперь нам требуется рассмотреть 32 набора знаков

$$s = (s(\infty), s(0), s(1), s(x_1), s(x_2)),$$

где каждый $s(c)$ может быть как "плюсом", так и "минусом". Для каждого из этих наборов вычислим число d по формуле (3.2):

$$d = \alpha_{\infty}^{s(\infty)} - \alpha_0^{s(0)} - \alpha_1^{s(1)} - \alpha_{x_1}^{s(x_1)} - \alpha_{x_2}^{s(x_2)}.$$

В соответствии с алгоритмом, число d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы знаков s и соответствующие им наборы значений $\alpha_c^{\pm}$, убеждаемся, что для трех наборов

$$p_1 = (\alpha_{\infty}^+, \alpha_0^-, \alpha_1^-, \alpha_{x_1}^+, \alpha_{x_2}^+) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right),$$

$$p_2 = (\alpha_{\infty}^-, \alpha_0^-, \alpha_1^-, \alpha_{x_1}^+, \alpha_{x_2}^-) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right),$$

$$p_3 = (\alpha_{\infty}^-, \alpha_0^-, \alpha_1^-, \alpha_{x_1}^-, \alpha_{x_2}^+) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right)$$

получается $d = 0$, а еще для одного набора

$$p_4 = (\alpha_{\infty}^+, \alpha_0^-, \alpha_1^-, \alpha_{x_1}^-, \alpha_{x_2}^-) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$$

получается $d = 1$.

Проведем проверку набора p_1 . Для данного набора по формуле (3.3) определим функцию $\theta = \theta(x)$. Она будет иметь вид

$$\theta = -\frac{1}{4x} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{3}{4(x-x_1)} + \frac{3}{4(x-x_2)}.$$

Шаг 3. Для сохраненного на предыдущем шаге набора значений p_1 мы должны получить условия на параметры задачи, при выполнении которых многочлен степени $d = 0$, то есть $P \equiv 1$, тождественно удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.4). Уравнение (3.4) после подстановки в него функции $\theta = \theta(x)$ и многочлена $P \equiv 1$, примет вид

$$\frac{(2x_1x_2 - x_1 - x_2)(1+x)}{4x(x-1)(x-x_1)(x-x_2)} = 0.$$

Выражение, стоящее в левой части данного уравнения, обращается в ноль, если параметры x_1 и x_2 удовлетворяют условию

$$2x_1x_2 - x_1 - x_2 = 0. \quad (10.9)$$

Через исходные параметры условие (10.9) записывается следующим образом:

$$\frac{2m\lambda^2(2A_1 - A_3)}{A_1A_3 + 4m\lambda^2(A_3 - A_1)} = 0.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что условие (10.9) эквивалентно условию Муштари (10.5).

Проверка оставшихся наборов p_2 , p_3 и p_4 приводит к условиям на параметры x_1 и x_2 , которые не выполняются по физическому смыслу параметров задачи. Тем самым установлено, что уравнение (10.8) допускает решения вида (2.1) только при выполнении условия Муштари. Теорема доказана. $\square$

Теперь попытаемся найти у линейного дифференциального уравнения (10.8) лиувиллевы решения вида (2.6), то есть решения, соответствующие Случаю 2 Теоремы 2.1. Необходимые условия существования таких решений у уравне-

ния (10.8) выполняются (см. Теорему 2.4). Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (10.8) приводит к следующему результату.

Теорема 10.2. *Если все конечные полюсы функции $\Pi(x)$ различны, то общее решение уравнения (10.8) выражается через лиувиллевы функции вида (2.6).*

Доказательство. Применим алгоритм Ковачича для поиска лиувиллевых решений вида (2.6) уравнения (10.8) в том виде, как он описан в пункте 3.4.

Шаг 1. Определим множества E_c , соответствующие конечным полюсам и полюсу в точке $x = \infty$:

$$E_1 = \{-2, 2, 6\}, \quad E_0 = \{-1, 2, 5\},$$

$$E_{x_1} = \{1, 2, 3\}, \quad E_{x_2} = \{1, 2, 3\}, \quad E_\infty = \{1, 2, 3\}.$$

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные наборы

$$s = (e_\infty, e_1, e_0, e_{x_1}, e_{x_2})$$

элементов множеств $E_\infty, E_1, E_0, E_{x_1}, E_{x_2}$, причем в каждом наборе один из элементов обязательно должен быть нечетным. Для каждого набора s по формуле (3.11) вычислим число d :

$$d = \frac{1}{2} (e_\infty - e_1 - e_0 - e_{x_1} - e_{x_2}).$$

В соответствии с алгоритмом число d должно быть неотрицательным целым числом. Вычисления показывают, что существует один набор

$$s_1 = (3, -2, -1, 1, 1),$$

для которого число $d = 2$, шесть наборов

$$s_2 = (1, -2, -1, 1, 1), \quad s_3 = (2, -2, -1, 1, 2), \quad s_4 = (2, -2, -1, 2, 1),$$

$$s_5 = (3, -2, -1, 2, 2), \quad s_6 = (3, -2, -1, 1, 3), \quad s_7 = (3, -2, -1, 3, 1),$$

для которых число $d = 1$ и 10 наборов

$$\begin{aligned} s_8 &= (1, -2, -1, 2, 2), \quad s_9 = (1, -2, -1, 1, 3), \quad s_{10} = (1, -2, -1, 3, 1), \\ s_{11} &= (2, -2, -1, 2, 3), \quad s_{12} = (2, -2, -1, 3, 2), \quad s_{13} = (3, -2, -1, 3, 3), \\ s_{14} &= (3, 2, -1, 1, 1), \quad s_{15} = (3, -2, 2, 1, 2), \quad s_{16} = (3, -2, 2, 2, 1), \\ s_{17} &= (2, -2, 2, 1, 1), \end{aligned}$$

для которых число $d = 0$. Для начала проведем проверку набора s_1 .

Шаг 3. Используя набор элементов s_1 , сохраненный на предыдущем шаге, по формуле (3.12) определим функцию $\theta = \theta(x)$. Она будет равна

$$\theta = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x-x_1)} + \frac{1}{2(x-x_2)}.$$

Многочлен степени $d = 2$

$$P = x^2 + k_1x + k_0$$

должен тождественно удовлетворять дифференциальному уравнению (3.13). Из этого уравнения после подстановки в него функции θ и многочлена P найдем, что оно удовлетворяется тождественно, если коэффициенты многочлена P положить равными

$$k_0 = \frac{x_1x_2}{1-2x_1-2x_2+4x_1x_2}, \quad k_1 = -\frac{2x_1x_2}{1-2x_1-2x_2+4x_1x_2}.$$

Таким образом, многочлен P существует при любых значениях параметров x_1, x_2 и имеет вид

$$P = x^2 - \frac{2x_1x_2}{1-2x_1-2x_2+4x_1x_2}x + \frac{x_1x_2}{1-2x_1-2x_2+4x_1x_2}.$$

Теперь, следуя алгоритму, введем функцию φ

$$\begin{aligned}\varphi = \theta + \frac{P'}{P} &= \frac{1}{2(x-x_1)} + \frac{1}{2(x-x_2)} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2x} + \\ &+ \frac{2(1-2x_1-2x_2+4x_1x_2)x-2x_1x_2}{(1-2x_1-2x_2+4x_1x_2)x^2-2x_1x_2x+x_1x_2}\end{aligned}$$

и найдем функцию ω , которая является решением уравнения (3.14).

В явном виде функция ω записывается следующим образом:

$$\omega = f(x) \pm ig(x),$$

$$\begin{aligned}f(x) = \frac{\varphi}{2} &= \frac{1}{4(x-x_1)} + \frac{1}{4(x-x_2)} - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{4x} + \\ &+ \frac{(1-2x_1-2x_2+4x_1x_2)x-x_1x_2}{(1-2x_1-2x_2+4x_1x_2)x^2-2x_1x_2x+x_1x_2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{D(1-x)}{(1-2x_1-2x_2+4x_1x_2)x^2-2x_1x_2x+x_1x_2} \sqrt{\frac{x}{(x-x_1)(x-x_2)}}, \\ D &= \sqrt{x_1x_2(2x_1-1)(2x_2-1)(2x_1x_2-x_1-x_2)}.\end{aligned}$$

Таким образом, лиувиллево решение вида (2.6) линейного дифференциального уравнения (10.8) имеет вид

$$y(x) = \exp\left(\int f(x)dx\right) \left(c_1 \cos\left(\int g(x)dx\right) + c_2 \sin\left(\int g(x)dx\right)\right),$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные. Тем самым, общее решение линейного дифференциального уравнения (10.8) выражается через лиувиллевы функции вида (2.6). Теорема доказана. $\square$

Получим теперь решение исходного линейного дифференциального уравнения (10.4). Сделаем обратную замену переменной

$$r(x) = y(x) \exp \left(-\frac{1}{2} \int d_1(x) dx \right),$$

где $d_1(x)$ — коэффициент при dr/dx в уравнении (10.6). В получившемся выражении для $r(x)$ вернемся к исходным параметрам m , λ , A_1 и A_3 , используя формулы (10.7) для определения x_1 и x_2 . Кроме того, положим $x = \cos^2 \theta$. Окончательно общее решение уравнения (10.4) запишется в виде

$$r(\theta) = \sqrt{\frac{K_1(\theta)}{K_2(\theta)}} (c_1 \cos \Phi(\theta) + c_2 \sin \Phi(\theta)), \quad (10.10)$$

$$\Phi(\theta) = 2m\lambda^2 D \int_0^\theta \frac{\sin^3 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi}{K_1(\varphi) \sqrt{K_2(\varphi)}}, \quad D = \sqrt{2A_1 A_3 (A_3 + 4m\lambda^2) (2A_1 - A_3)},$$

$$K_1(\theta) = (A_1 A_3 + 4A_1 m\lambda^2) \cos^4 \theta - 2A_3 m\lambda^2 \cos^2 \theta + A_3 m\lambda^2,$$

$$K_2(\theta) = (A_1 A_3 + 4m\lambda^2 (A_3 - A_1)) \cos^4 \theta - 4m\lambda^2 (A_3 - A_1) \cos^2 \theta + A_3 m\lambda^2.$$

Заметим, что общее решение, выраженное формулой (10.10) учитывает и частный случай, исследованный ранее в работе Х.М. Муштари [49]. Действительно, если положить $A_3 = 2A_1$ в формуле (4.2.2), то она приведет к виду $r = r_0 = \text{const}$, т.е. будет определять частное решение, найденное Х. М. Муштари.

Пользуясь уравнениями (5.24) или (5.25) и решением (10.10), можно найти явное выражение для функции $p(\theta)$:

$$\begin{aligned}
 p(\theta) = & -\frac{D \cos^2 \theta}{2A_1 \sin \theta \sqrt{K_1(\theta)}} (c_2 \cos \Phi(\theta) - c_1 \sin \Phi(\theta)) - \\
 & -\frac{A_3 ((A_3 + 4m\lambda^2) \cos^4 \theta - 4m\lambda^2 \cos^2 \theta + 2m\lambda^2) \cos \theta}{\sqrt{K_1(\theta)K_2(\theta)} \sin \theta} \times \\
 & \times (c_1 \cos \Phi(\theta) + c_2 \sin \Phi(\theta)).
 \end{aligned} \tag{10.11}$$

Таким образом, общее решение системы (5.24) в случае качения без проскальзывания по горизонтальной плоскости параболоида вращения определяется формулами (10.10), (10.11).

Отметим, что впервые данные формулы были получены в работе А. С. Кулешова [169] без применения алгоритма Ковачича.

Качественное описание движения динамически симметричного параболоида по плоскости представлено в работе [186]. В этой работе было показано, что следом точки касания M на поверхности параболоида будет кривая, состоящая из периодически повторяющихся волн и прикасающаяся поочередно к двум параллелям параболоида. След точки касания на неподвижной плоскости образует кривую такого же характера, заключенную между двумя концентрическими окружностями, которых точка M поочередно касается при движении параболоида.

Итак, нами установлено, что задача о качении по абсолютно шероховатой плоскости динамически симметричного параболоида вращения, центр масс которого расположен в фокусе образующей параболы, интегрируется в лиувилевых функциях.

11 Движение веретенообразного тела

11.1 Постановка задачи. Уравнения движения. Общий случай и частные случаи

Рассмотрим задачу о качении без проскальзывания по горизонтальной плоскости тела, поверхность которого образована вращением дуги параболы относительно оси, перпендикулярной оси симметрии параболы и проходящей через ее фокус. Такое тело напоминает по форме веретено (Рис. 12), а его поверхность имеет два острия. Задача о движении данного тела рассматривалась Х. М. Муштари [49], который полностью исследовал соответствующую задачу при дополнительном ограничении на моменты инерции тела:

$$A_3 = \frac{2}{3}A_1. \quad (11.1)$$

Будем предполагать, что во все время движения тело опирается о плоскость своей выпуклой поверхностью. Более общий случай движения данного тела, когда возможна его опора на острие, исследовался в работах А.А. Зобовой [36, 37].

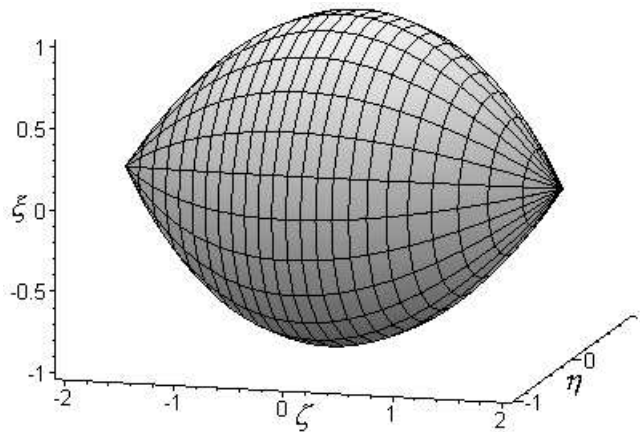


Рис. 12. Качение веретенообразного тела по горизонтальной плоскости

Для рассматриваемого тела высота его центра масс над опорной плоскостью выражается формулой

$$f(\theta) = \frac{\lambda}{\sin \theta}, \quad \lambda = \text{const.}$$

Замечание 11.1. Чтобы при качении тело касалось плоскости своей выпуклой поверхностью, угол θ должен удовлетворять условию: $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

По формулам (5.11) определим координаты ξ и ζ точки касания тела с опорной плоскостью:

$$\xi = \frac{\lambda \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - \lambda, \quad \zeta = -\frac{2\lambda \cos \theta}{\sin \theta}, \quad \zeta^2 = 4\lambda(\xi + \lambda).$$

Система уравнений (5.25) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\theta} = & \left(\frac{2A_3 m \lambda^2 \sin^2 \theta (3 - 2 \sin^2 \theta)}{\Delta} - 1 \right) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} p + \\ & + \frac{A_3 ((A_3 + 4m\lambda^2) \sin^4 \theta - 8m\lambda^2 \sin^2 \theta + 5m\lambda^2)}{\Delta} r, \\ \frac{dr}{d\theta} = & \frac{A_1 m \lambda^2 (1 - 2 \sin^2 \theta) (3 - 2 \sin^2 \theta)}{\Delta} p + \\ & + \frac{2m\lambda^2 \cos \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) (A_1 - A_3 \sin^2 \theta)}{\Delta \sin \theta} r, \end{aligned}$$

$$\Delta = (A_1 A_3 + 4(A_1 - A_3)m\lambda^2) \sin^4 \theta - 4(A_1 - A_3)m\lambda^2 \sin^2 \theta + A_1 m \lambda^2,$$

а линейное дифференциальное уравнение второго порядка (5.27) принимает вид:

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + b_1 \frac{dr}{d\theta} + b_2 r = 0, \quad (11.2)$$

$$b_1 = \frac{(4 \sin^4 \theta - 24 \sin^2 \theta + 15) \cos \theta}{(1 - 2 \sin^2 \theta)(3 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta} - \frac{6(A_1 - 2(A_1 - A_3) \sin^2 \theta)m\lambda^2 \cos \theta}{\Delta \sin \theta},$$

$$b_2 = \frac{(3A_3 - 2A_1)m\lambda^2(1 - 2\sin^2 \theta)^2}{\Delta(3 - 2\sin^2 \theta)}.$$

Если $3A_3 = 2A_1$, то уравнение (11.2) допускает решение (см. [49]) $r = r_0 = \text{const}$. Для применения алгоритма Ковачича к линейному дифференциальному уравнению (11.2) приведем сначала коэффициенты этого уравнения к виду рациональных функций. Для этого сделаем в уравнении (11.2) замену независимой переменной по формуле $\sin^2 \theta = x$ и введем обозначение $B = m\lambda^2$. В результате уравнение (11.2) перепишется следующим образом:

$$\frac{d^2 r}{dx^2} + d_1(x) \frac{dr}{dx} + d_2(x)r = 0, \quad (11.3)$$

$$d_1(x) = \frac{18 - 53x + 48x^2 - 12x^3}{2x(1-x)(1-2x)(3-2x)} - \frac{3(A_1 - 2(A_1 - A_3)x)B}{x\Delta},$$

$$d_2(x) = \frac{(3A_3 - 2A_1)(1-2x)^2 B}{4x(1-x)(3-2x)\Delta},$$

$$\Delta = (A_1 A_3 + 4B(A_1 - A_3))x^2 - 4B(A_1 - A_3)x + A_1 B.$$

При выполнении условия $A_1 A_3 + 4B(A_1 - A_3) \neq 0$ многочлен Δ , входящий в знаменатели коэффициентов d_1 и d_2 , имеет два корня x_1 и x_2 , которые определяются формулами:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2B(A_1 - A_3) - \sqrt{4A_3 B^2(A_3 - A_1) - A_1^2 A_3 B}}{A_1 A_3 + 4B(A_1 - A_3)}, \\ x_2 &= \frac{2B(A_1 - A_3) + \sqrt{4A_3 B^2(A_3 - A_1) - A_1^2 A_3 B}}{A_1 A_3 + 4B(A_1 - A_3)}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Замена вида (1.2) приводит уравнение (11.3) к виду

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = S(x)y, \quad (11.5)$$

$$\begin{aligned}
S(x) &= \frac{\beta_0}{x} + \frac{\beta_1}{x-1} + \frac{\alpha_1}{(x-1)^2} + \frac{\beta_2}{x-\frac{1}{2}} + \frac{\alpha_2}{(x-\frac{1}{2})^2} + \frac{\beta_3}{x-\frac{3}{2}} + \\
&+ \frac{\alpha_3}{(x-\frac{3}{2})^2} + \frac{\beta_4}{x-x_1} + \frac{\alpha_4}{(x-x_1)^2} + \frac{\beta_5}{x-x_2} + \frac{\alpha_5}{(x-x_2)^2}, \\
\alpha_1 &= \alpha_4 = \alpha_5 = -\frac{3}{16}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{3}{4}, \\
\beta_0 &= \frac{3(x_1+x_2)-4x_1x_2}{48x_1x_2}, \quad \beta_1 = \frac{4x_1x_2-9(x_1+x_2)+12}{16(x_1-1)(x_2-1)}, \\
\beta_2 &= \frac{3(x_1+x_2-1)}{(2x_1-1)(2x_2-1)}, \quad \beta_3 = \frac{15(x_1+x_2)-8x_1x_2-27}{3(2x_1-3)(2x_2-3)}, \\
\beta_4 &= -\frac{(8x_1^3-36x_1^2+51x_1-25)(4x_2-3)x_1+15(x_1-1)x_1+3(x_2-x_1)}{16x_1(x_1-1)(2x_1-1)(2x_1-3)(x_1-x_2)}, \\
\beta_5 &= \frac{(8x_2^3-36x_2^2+51x_2-25)(4x_1-3)x_2+15(x_2-1)x_2+3(x_1-x_2)}{16x_2(x_2-1)(2x_2-1)(2x_2-3)(x_1-x_2)}.
\end{aligned} \tag{11.6}$$

При произвольных значениях параметров задачи функция $S(x)$ имеет шесть конечных полюсов в точках $x = 0$, $x = 1$, $x = 1/2$, $x = 3/2$, $x = x_1$ и $x = x_2$. В общем случае эти полюсы не совпадают друг с другом. Однако возможны ситуации, когда при дополнительных условиях на параметры задачи функция $S(x)$ имеет вид, отличный от (11.6). Перечислим далее все возможные случаи, когда структура функции $S(x)$ меняется.

1. При выполнении условия

$$A_1A_3 + 4B(A_1 - A_3) = 0 \tag{11.7}$$

степень многочлена Δ меняется со второй на первую. Единственным корнем многочлена Δ в этом случае будет значение x_0 , равное $x_0 = -m\lambda^2/A_3$.

Значение x_0 является отрицательным, следовательно, оно не может совпадать ни с одним из значений $x = 0$, $x = 1$, $x = 1/2$, $x = 3/2$.

2. При выполнении условий

$$A_1 A_3 + 4B(A_1 - A_3) \neq 0, \quad B = \frac{9A_1 A_3}{4(3A_3 - 4A_1)} \quad (11.8)$$

будем иметь совпадение значений $x_1 = 3/2$. Легко показать, что другие значения $x = 0$, $x = 1$ и $x = 1/2$ не могут совпадать со значениями $x = x_1$ и $x = x_2$ ни при каких значениях параметров задачи, имеющих физический смысл.

3. При выполнении условий

$$A_1 A_3 + 4B(A_1 - A_3) \neq 0, \quad B = \frac{A_1^2}{4(A_3 - A_1)} \quad (11.9)$$

будем иметь совпадение значений $x_1 = x_2$, которые будут при этом равны

$$x_1 = x_2 = \frac{A_1}{2(A_1 - A_3)} < 0.$$

4. При выполнении условия (11.1) равен нулю коэффициент β_0 в разложении (11.6) функции $S(x)$ на простейшие дроби и, следовательно, в этом разложении отсутствует полюс первого порядка $x = 0$. В этом случае решения уравнения (11.5) выражаются через лиувиллевы функции, что следует из результатов работы Х. М. Муштари [49].

Таким образом, для того, чтобы полностью исследовать задачу о существовании лиувиллевых решений у линейного дифференциального уравнения второго порядка (11.5), нам необходимо изучить не только общий случай, когда функция $S(x)$ имеет вид (11.6), но и перечисленные выше частные случаи, когда параметры задачи удовлетворяют условиям (11.7), или (11.8), или (11.9).

11.2 Исследование общего случая

Предположим, что все конечные полюсы функции $S(x)$ различны и коэффициент β_0 отличен от нуля, то есть функция $S(x)$ определяется формулой (11.6). В этом случае разложение функции $S(x)$ в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид

$$S(x)|_{x=\infty} \approx -\frac{3}{16x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (11.5) приводит к следующему результату.

Теорема 11.1. *Если функция $S(x)$ определяется выражением (11.6), то уравнение (11.5) ни при каких физически допустимых значениях параметров задачи не имеет решений, выражающихся через лиувиллевы функции.*

Доказательство. Сначала попытаемся определить, при каких условиях у линейного дифференциального уравнения (11.5) существуют лиувиллевы решения вида (2.1), то есть решения, соответствующие Случаю 1 Теоремы 2.1. Заметим, что функция $S(x)$ имеет пять конечных полюсов второго порядка в точках $x = 1$, $x = 1/2$, $x = 3/2$, $x = x_1$ и $x = x_2$, а также полюс первого порядка в точке $x = 0$. В точке $x = \infty$ функция $S(x)$ имеет полюс второго порядка. Следовательно, указанные в Теореме 2.4 необходимые условия существования решения вида (2.1) для уравнения (11.5) выполняются. Применим алгоритм Ковачича для поиска лиувиллевых решений вида (2.1) уравнения (11.5) в том виде, как он описан в пункте 3.1.

Шаг 1. Вычислим сначала постоянные $[\sqrt{S}]_c$ и $\alpha_c^\pm$:

$$[\sqrt{S}]_1 = 0, \quad \alpha_1^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_1^- = \frac{1}{4},$$

$$[\sqrt{S}]_{x_1} = 0, \quad \alpha_{x_1}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{x_1}^- = \frac{1}{4},$$

$$\left[\sqrt{S}\right]_{x_2} = 0, \quad \alpha_{x_2}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{x_2}^- = \frac{1}{4},$$

$$\left[\sqrt{S}\right]_{\frac{1}{2}} = 0, \quad \alpha_{\frac{1}{2}}^+ = \frac{3}{2}, \quad \alpha_{\frac{1}{2}}^- = -\frac{1}{2},$$

$$\left[\sqrt{S}\right]_{\frac{3}{2}} = 0, \quad \alpha_{\frac{3}{2}}^+ = \frac{3}{2}, \quad \alpha_{\frac{3}{2}}^- = -\frac{1}{2},$$

$$\left[\sqrt{S}\right]_0 = 0, \quad \alpha_0^+ = \alpha_0^- = 1,$$

$$\left[\sqrt{S}\right]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_\infty^- = \frac{1}{4}.$$

Шаг 2. Теперь нам потребуется рассмотреть 128 наборов знаков

$$s = \left(s(\infty), s(1), s(x_1), s(x_2), s\left(\frac{1}{2}\right), s\left(\frac{3}{2}\right), s(0) \right),$$

где $s(c)$ является "плюсом" или "минусом". Для каждого из этих наборов найдем число d по формуле (3.2):

$$d = \alpha_\infty^{s(\infty)} - \alpha_1^{s(1)} - \alpha_{x_1}^{s(x_1)} - \alpha_{x_2}^{s(x_2)} - \alpha_{\frac{1}{2}}^{s(\frac{1}{2})} - \alpha_{\frac{3}{2}}^{s(\frac{3}{2})} - \alpha_0^{s(0)}.$$

В соответствии с алгоритмом, d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы знаков s и соответствующие им наборы значений $\alpha_c^\pm$, делаем вывод, что единственным набором, для которого d будет неотрицательным числом, является набор

$$p_1 = \left(\alpha_\infty^+, \alpha_1^-, \alpha_{x_1}^-, \alpha_{x_2}^-, \alpha_{\frac{1}{2}}^-, \alpha_{\frac{3}{2}}^-, \alpha_0^- \right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right),$$

для которого $d = 0$. Для набора p_1 по формуле (3.3) определим функцию $\theta = \theta(x)$, которая в явном виде запишется следующим образом:

$$\theta = \frac{1}{x} + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x-3} + \frac{1}{4(x-x_1)} + \frac{1}{4(x-x_2)}.$$

Шаг 3. Для сохраненного на предыдущем шаге набора p_1 мы должны найти условия, при выполнении которых многочлен P степени $d = 0$, то есть $P \equiv 1$, тождественно удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.4). Уравнение (3.4) после подстановки в него многочлена P и функции $\theta = \theta(x)$, примет вид

$$\frac{(4x_1x_2 - x_1 - x_2)(2x - 3)^2}{16x(x - 1)(2x - 1)(x - x_1)(x - x_2)} = 0.$$

Следовательно, для существования лиувиллевых решений вида (2.1) у линейного дифференциального уравнения (11.5) должно выполняться условие $4x_1x_2 - x_1 - x_2 = 0$. Возвращаясь к исходным параметрам, приведем данное условие к виду

$$4x_1x_2 - x_1 - x_2 = \frac{4A_3B}{A_1A_3 + 4B(A_1 - A_3)} = 0.$$

Очевидно, данное условие не выполняется ни при каких значениях параметров задачи, имеющих физический смысл. Следовательно, линейное дифференциальное уравнение (11.5) не имеет лиувиллевых решений вида (2.1).

Теперь попытаемся найти у линейного дифференциального уравнения (11.5) лиувиллевы решения вида (2.6), то есть решения, соответствующие Случаю 2 Теоремы 2.1. Необходимые условия существования таких решений у уравнения (11.5) выполняются (см. Теорему 2.4). Применим алгоритм Ковачича для поиска лиувиллевых решений вида (2.6) уравнения (11.5) в том виде, как он описан в пункте 3.4.

Шаг 1. Определим множества E_c :

$$E_1 = \{1, 2, 3\}, \quad E_{x_1} = \{1, 2, 3\}, \quad E_{x_2} = \{1, 2, 3\},$$

$$E_{\frac{1}{2}} = \{-2, 2, 6\}, \quad E_{\frac{3}{2}} = \{-2, 2, 6\}, \quad E_0 = \{4\}, \quad E_\infty = \{1, 2, 3\}.$$

Шаг 2. Теперь нам требуется рассмотреть все возможные наборы

$$s = \left(e_\infty, e_1, e_{x_1}, e_{x_2}, e_{\frac{1}{2}}, e_{\frac{3}{2}}, e_0 \right)$$

элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{x_1}, E_{x_2}, E_{\frac{1}{2}}, E_{\frac{3}{2}}, E_0$, причем в каждом наборе один из элементов должен быть нечетным. Для каждого набора s по формуле (3.11) найдем число d :

$$d = \frac{1}{2} \left(e_\infty - e_1 - e_{x_1} - e_{x_2} - e_{\frac{1}{2}} - e_{\frac{3}{2}} - e_0 \right).$$

В соответствии с алгоритмом число d должна быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы элементов множеств $E_1, E_{x_1}, E_{x_2}, E_{\frac{1}{2}}, E_{\frac{3}{2}}, E_0$ и E_∞ убеждаемся, что единственным набором, для которого d будет неотрицательным числом, является набор

$$e = \left(e_\infty, e_1, e_{x_1}, e_{x_2}, e_{\frac{1}{2}}, e_{\frac{3}{2}}, e_0 \right) = (3, 1, 1, 1, -2, -2, 4),$$

для которого $d = 0$.

Шаг 3. Используя набор чисел e , сохраненный на предыдущем шаге, по формуле (3.12) определим функцию $\theta = \theta(x)$. Получим

$$\theta = \frac{2}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x-x_1)} + \frac{1}{2(x-x_2)} - \frac{1}{x-\frac{1}{2}} - \frac{1}{x-\frac{3}{2}}.$$

Теперь мы должны определить условия, при выполнении которых многочлен степени $d = 0$ ($P \equiv 1$) тождественно удовлетворяет уравнению (3.13). Уравнение (3.13) после подстановки в него функции $\theta(x)$ и многочлена $P \equiv 1$ принимает вид

$$-\frac{3(4x_1x_2 - x_1 - x_2)(2x - 3)^2}{8x^2(2x - 1)^2(x - 1)(x - x_1)(x - x_2)} = 0.$$

Отсюда, как и при поиске решений вида (2.1), следует равенство

$$4x_1x_2 - x_1 - x_2 = 0.$$

Таким образом, при всех значениях параметров задачи, имеющих физический смысл, у уравнения (11.5) не существует лиувиллевых решений вида (2.6)

Теперь попытаемся определить условия, при выполнении которых у уравнения (11.5) существуют лиувиллевы решения вида (2.10), то есть решения, соответствующие Случаю 3 Теоремы 2.1. Сначала выясним, выполняются ли необходимые условия существования решений (2.10) у уравнения (11.5) (см. Теорему 2.4). Функция $S(x)$ не имеет полюсов порядка, большего чем 2. Порядок функции $S(x)$ в ∞ выше, чем первый. Разложение функции $S(x)$ в сумму простейших дробей имеет вид (11.6). Вычисления показывают, что выполняются также и все остальные условия Теоремы 2.4:

$$\sqrt{1+4\alpha_i} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \quad (i = 1; 4; 5), \quad \sqrt{1+4\alpha_j} = 2 \in \mathbb{Q} \quad (j = 2; 3),$$

$$\sum_{i=0}^5 \beta_i = 0, \quad \sqrt{1+4\gamma} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \quad \gamma = -\frac{3}{16}.$$

Применим алгоритм Ковачича для поиска лиувиллевых решений вида (2.10) уравнения (11.5) в том виде, как он описан в пункте 3.7.

Шаг 1. Определим множества E_c :

$$E_\infty = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \quad E_1 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$E_{x_1} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \quad E_{x_2} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$E_{\frac{1}{2}} = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\},$$

$$E_{\frac{3}{2}} = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\},$$

$$E_0 = \{12\}.$$

Шаг 2. Теперь рассмотрим все возможные наборы

$$s = \left(e_\infty, e_1, e_{x_1}, e_{x_2}, e_{\frac{1}{2}}, e_{\frac{3}{2}}, e_0 \right)$$

элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{x_1}, E_{x_2}, E_{\frac{1}{2}}, E_{\frac{3}{2}}, E_0$ и по формуле (3.24) найдем число d :

$$d = e_\infty - e_1 - e_{x_1} - e_{x_2} - e_{\frac{1}{2}} - e_{\frac{3}{2}} - e_0.$$

В соответствии с алгоритмом d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{x_1}, E_{x_2}, E_{\frac{1}{2}}, E_{\frac{3}{2}}, E_0$, убеждаемся, что единственным набором, для которого d будет неотрицательным числом, является набор

$$e = \left(e_\infty, e_1, e_{x_1}, e_{x_2}, e_{\frac{1}{2}}, e_{\frac{3}{2}}, e_0 \right) = (9, 3, 3, 3, -6, -6, 12),$$

для которого $d = 0$.

Шаг 3. Используя набор чисел e , сохраненный на предыдущем шаге, по формуле (3.25) определим функцию θ . Она будет иметь вид:

$$\theta = \frac{12}{x} + \frac{3}{x - x_1} + \frac{3}{x - x_2} - \frac{6}{x - \frac{1}{2}} - \frac{6}{x - \frac{3}{2}} + \frac{3}{x - 1}.$$

Следуя формуле (3.26), составим многочлен

$$S = x(x - 1)(x - x_1)(x - x_2) \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{3}{2} \right).$$

Далее требуется выполнение рекуррентных уравнений (3.27):

$$P_{12} = -P,$$

$$P_{i-1} = -SP'_i + ((12 - i)S' - S\theta)P_i - (12 - i)(i + 1)S^2S(x)P_{i+1},$$

$$P_{-1} = 0,$$

в которых $P_{12} = -P \equiv -1$ – многочлен степени $d = 0$. Соответствующие вычисления, произведенные с помощью системы символьных вычислений Maple 7, приводят к многочлену, все коэффициенты которого должны быть равны нулю (вследствие условия $P_{-1} = 0$). Из этого условия необходимым образом вытекает, что $4x_1x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 2 = 0$. Легко проверить невозможность выполнения этого условия при всех физически допустимых значениях параметров задачи.

Таким образом, можно сделать вывод, что когда функция $S(x)$ определяется формулой (11.6), уравнение (11.5) не имеет лиувиллевых решений при всех значениях параметров задачи, имеющих физический смысл. Теорема доказана.

□

Исследование частных случаев, когда параметры задачи удовлетворяют одному из соотношений (11.7), или (11.8), или (11.9) проводилось в работах [60, 187, 193]. Было установлено, что ни в одном из указанных частных случаев уравнение (11.5) не имеет лиувиллевых решений. Таким образом, в задаче о качении веретенообразного тела по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости удалось найти лишь один случай, когда линейное уравнение (11.5) интегрируется в лиувиллевых функциях. Это случай, когда параметры задачи удовлетворяют условию Х. М. Муштари (11.1).

12 Движение эллипсоида вращения

12.1 Постановка задачи о движении эллипсоида вращения. Общий случай и частные случаи

Рассмотрим задачу о качении без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения, ось симметрии которого совпадает с осью динамической симметрии тела. Пусть a_1 и a_3 — полуоси эллипсоида. Тогда

высота центра масс эллипсоида над опорной плоскостью определяется по формуле:

$$f(\theta) = \sqrt{a_1^2 \sin^2 \theta + a_3^2 \cos^2 \theta}.$$

По формулам (5.11) вычислим координаты ξ и ζ точки касания эллипсоида с плоскостью

$$\xi = -\frac{a_1^2 \sin \theta}{\sqrt{a_1^2 \sin^2 \theta + a_3^2 \cos^2 \theta}}, \quad \zeta = -\frac{a_3^2 \cos \theta}{\sqrt{a_1^2 \sin^2 \theta + a_3^2 \cos^2 \theta}}.$$

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка (5.27) имеет вид:

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + h_1 \frac{dr}{d\theta} + h_2 r = 0, \quad \theta \in (0, \pi) \quad (12.1)$$

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{4a_3^2 \cos \theta}{(a_1^2 \sin^2 \theta + a_3^2 \cos^2 \theta) \sin \theta} + \frac{3}{a_1^2 \sin^2 \theta + a_3^2 \cos^2 \theta} \times \\ &\times \frac{(A_1 a_1^2 - A_3 a_3^2) m a_1^2 a_3^2 \sin \theta \cos \theta}{((A_1 + m a_3^2) A_3 a_3^2 - (A_3 + m a_1^2) A_1 a_1^2) \cos^2 \theta + (A_3 + m a_1^2) A_1 a_1^2} \\ h_2 &= -\frac{1}{a_1^2 \sin^2 \theta + a_3^2 \cos^2 \theta} \times \\ &\times \frac{m a_1^2 \left(A_3 (a_3^2 - a_1^2)^2 \sin^4 \theta + a_3^2 (A_1 a_1^2 - A_3 a_3^2) (1 + \cos^2 \theta) \right)}{((A_1 + m a_3^2) A_3 a_3^2 - (A_3 + m a_1^2) A_1 a_1^2) \cos^2 \theta + (A_3 + m a_1^2) A_1 a_1^2} \end{aligned}$$

Выясним, при каких значениях параметров задачи у линейного дифференциального уравнения второго порядка (12.1) существуют лиувиллевы решения. Для этого воспользуемся алгоритмом Ковачича. Прежде чем применять алгоритм, приведем коэффициенты линейного уравнения (12.1) к виду рациональных функций. Сделаем в этом уравнении замену независимой переменной по

формуле $\cos^2 \theta = x$ и введем обозначения

$$\frac{A_3}{A_1} = A \in (0, 2), \quad \frac{ma_1^2}{A_1} = B, \quad \frac{a_3^2}{a_1^2} = C.$$

В результате уравнение (12.1) примет вид уравнения с рациональными коэффициентами:

$$\frac{d^2 r}{dx^2} + d_1 \frac{dr}{dx} + d_2 r = 0, \quad (12.2)$$

$$d_1 = \frac{3x-1}{2x(x-1)} + \frac{2C}{(x-1)((1-C)x-1)} + \frac{3(AC-1)BC}{2((1-C)x-1)((A+B-(1+BC)AC)x-(A+B))},$$

$$d_2 = \frac{\left(A(1-C)^2 x^2 + (C-A-A(1-C)(1-3C))x + C-A+2A(1-C) \right) B}{4x(x-1)((1-C)x-1)((A+B-(1+BC)AC)x-(A+B))}.$$

Рассмотрим сначала общий случай, то есть будем считать, что выполняются условия

$$1-C \neq 0 \quad \text{и} \quad A+B-(1+BC)AC \neq 0.$$

Введем следующие обозначения:

$$\frac{1}{1-C} = x_1, \quad \frac{A+B}{A+B-(1+BC)AC} = x_2.$$

Будем рассматривать данные соотношения как систему уравнений относительно параметров B и C задачи. Разрешая данные уравнения относительно B и C , находим:

$$C = \frac{x_1-1}{x_1}, \quad B = \frac{Ax_1(x_2-x_1)}{(x_1-1)^2 x_2 A + x_1^2 (1-x_2)}.$$

Подставляя полученные выражения для параметров B и C в коэффициенты d_1 и d_2 , приведем их к виду:

$$d_1 = \frac{3x-1}{2x(x-1)} + \frac{2(x_1-1)}{(x-1)(x-x_1)} + \frac{3(x_2-x_1)}{2(x-x_1)(x-x_2)},$$

$$d_2 = \frac{(x_2 - x_1)(Ax^2 - ((A-1)(x_1^2 - 2x_1 + 3) - x_1 + 3)x - ((A-1)(x_1 - 2) - 1)x_1)}{4(x_1 - 1)((A-1)(x_1 - 1) - 1)(x - 1)(x - x_1)(x - x_2)x}$$

Теперь с помощью замены вида (1.2) перепишем дифференциальное уравнение (12.2) следующим образом:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = E(x)y, \quad E(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx}(d_1) + \frac{1}{4}d_1^2 - d_2. \quad (12.3)$$

Функция $E(x)$ в явном виде записывается так:

$$E(x) = \frac{c_1}{x-1} + \frac{b_1}{(x-1)^2} + \frac{c_0}{x} + \frac{b_0}{x^2} + \frac{c_{x_1}}{x-x_1} + \frac{b_{x_1}}{(x-x_1)^2} + \frac{c_{x_2}}{x-x_2} + \frac{b_{x_2}}{(x-x_2)^2}, \quad (12.4)$$

$$b_1 = \frac{3}{4}, \quad b_0 = b_{x_1} = b_{x_2} = -\frac{3}{16},$$

$$c_1 = -\frac{x_1 x_2 - 2x_1 - 4x_2 + 5}{4(x_1 - 1)(x_2 - 1)}, \quad c_0 = \frac{(2x_1 x_2 - x_1 - 3x_2)(A-1)}{8x_2((A-1)x_1 - A)} -$$

$$-\frac{A(x_1 - 1)(2x_2 - 1)}{8x_1 x_2((A-1)x_1 - A)} + \frac{A(x_2 - 1)(x_1 + 1)}{8x_1 x_2(x_1 - 1)((A-1)x_1 - A)},$$

$$c_{x_1} = \frac{(3x_1 x_2 - 4x_1 + x_2)(x_1 - 1)A - 3x_1(x_1 x_2 - 2x_1 + x_2)}{8x_1(x_1 - 1)(x_1 - x_2)((A-1)x_1 - A)},$$

$$c_{x_2} = \frac{A(x_2 - 1)^2}{4x_2(x_1 - 1)(x_1 - x_2)((A-1)x_1 - A)} +$$

$$+ \frac{(x_1 + x_1 x_2 - 2)A - (A-1)(2x_2^2 + x_1 x_2 + x_1 - 4x_2)x_1}{8x_2(x_2 - 1)(x_1 - x_2)((A-1)x_1 - A)}.$$

Таким образом, в общем случае функция $E(x)$ имеет четыре конечных полюса второго порядка в точках $x = 0$, $x = 1$, $x = x_1$ и $x = x_2$. Легко показать, учитывая положительность параметров A , B и C задачи, что для параметров x_1 и x_2 справедливы условия:

$$x_1 \neq 0, \quad x_2 \neq 0, \quad x_1 \neq 1, \quad x_2 \neq 1.$$

Поэтому полюсы $x = x_1$ и $x = x_2$ функции $E(x)$ не могут совпадать с полюсами $x = 0$ и $x = 1$. Однако возможны ситуации, когда при дополнительных условиях на параметры задачи функция $E(x)$ имеет вид, отличный от (12.4). Перечислим далее все возможные случаи, когда при дополнительных условиях на параметры задачи вид функции $E(x)$ изменяется.

1. Если выполнено условие

$$C = 1, \quad (12.5)$$

то у функции $E(x)$ отсутствует полюс в точке $x = x_1$. Заметим, что условие (12.5) означает, что движущееся по плоскости тело представляет собой неоднородный динамически симметричный шар. Из работ Д. К. Бобылева [9], Н. Е. Жуковского [23] и С. А. Чаплыгина [59] следует, что в этом случае все решения уравнения (12.1) выражаются через лиувиллевы функции.

2. Если выполнено условие

$$A + B - (1 + BC)AC = 0, \quad (12.6)$$

то у функции $E(x)$ отсутствует полюс в точке $x = x_2$. Заметим, что в исходных параметрах условие (12.6) записывается в виде:

$$A_3 = \frac{A_1 m a_1^4}{m a_3^4 + A_1 a_3^2 - A_1 a_1^2}.$$

Требование того, чтобы параметр A изменялся в интервале $A \in (0, 2)$, эквивалентно двум условиям типа неравенств на параметры задачи

$$m a_3^4 + A_1 a_3^2 - A_1 a_1^2 > 0, \quad 2m a_3^4 + 2A_1 a_3^2 - 2A_1 a_1^2 - m a_1^4 > 0,$$

из которых второе является более строгим. Заметим, что данные неравенства заведомо выполняются в случае вытянутого эллипсоида ($a_3 > a_1$), а в случае

сжатого эллипсоида ($a_1 > a_3$) имеем

$$A_1 < \frac{m(2a_3^4 - a_1^4)}{2(a_1^2 - a_3^2)},$$

откуда следует, что в случае сжатого эллипсоида для выполнения данных условий достаточно, чтобы полуоси эллипсоида удовлетворяли неравенству

$$a_3^2 < a_1^2 < \sqrt{2}a_3^2.$$

3. Если выполнено условие

$$AC = 1 \quad \text{или} \quad A_1a_1^2 = A_3a_3^2, \quad (12.7)$$

то выполняется равенство

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{1 - C}.$$

4. Заметим, что в случае качения без проскальзывания по горизонтальной плоскости однородного шара выполняются условия

$$a_3 = a_1 = R, \quad A_3 = A_1 = \frac{2}{5}mR^2,$$

то есть

$$C = 1, \quad A = 1.$$

В этом случае имеет место одновременное выполнение всех трех условий (12.5) – (12.7).

Таким образом, для полного решения задачи о существовании лиувиллевых решений у линейного дифференциального уравнения второго порядка (12.3) требуется изучить не только общий случай, когда функция $E(x)$ имеет вид (12.4), но и три частных случая, когда параметры задачи удовлетворяют одному из соотношений (12.5), или (12.6) или (12.7).

Рассмотрим общий случай, то есть будем считать, что все конечные полюсы функции $E(x)$ различны. В этом случае разложение функции $E(x)$ в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид:

$$E(x)|_{x=\infty} = \frac{b_\infty}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad b_\infty = -\frac{3}{16} + \frac{A(x_1 - x_2)}{4(x_1 - 1)((A - 1)x_1 - A)}. \quad (12.8)$$

Таким образом, коэффициент b_∞ при $1/x^2$ в разложении функции $E(x)$ в окрестности точки $x = \infty$ зависит от параметров задачи. В зависимости от параметров коэффициент b_∞ может быть равным нулю, может быть таким, что выражение

$$\sqrt{1 + 4b_\infty} \quad (12.9)$$

является иррациональным или рациональным. Предположим сначала, что коэффициент b_∞ принимает такие значения, что выражение (12.9) является иррациональным. В этом случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 12.1. *Если все конечные полюсы функции $E(x)$ различны и число (12.9) является иррациональным, то уравнение (12.3) не имеет лиувиллевых решений.*

Доказательство. Учитывая, что для коэффициента b_∞ выполняется условие

$$b_\infty = b_1 + b_0 + b_{x_1} + b_{x_2} + c_1 + c_{x_1}x_1 + c_{x_2}x_2 = \gamma,$$

следовательно, дифференциальное уравнение (12.3) не имеет лиувиллевых решений вида (2.10) (то есть решений, соответствующих Случаю 3 Теоремы 2.1). Это следует из того, что не выполняются необходимые условия существования таких решений (смотри Теорему 2.4). Аналогично обстоит дело и с лиувиллевыми решениями вида (2.1) (то есть решениями, соответствующими Случаю 1 Теоремы 2.1): постоянная d , вычисляемая по формуле (3.2) в процессе их нахождения, будет в рассматриваемом случае иррациональным числом, тогда как согласно алгоритму она должна быть числом целым и неотрицательным.

Таким образом, в рассматриваемом случае у линейного дифференциального уравнения (12.3) могут существовать только лиувиллевы решения вида (2.6), то есть решения, соответствующие Случаю 2 Теоремы 2.1. Для их нахождения применим алгоритм Ковачича в том виде, как он описан в пункте 3.4.

Шаг 1. В соответствии с алгоритмом, сначала определим множества E_c :

$$E_1 = \{-2, 2, 6\}, E_0 = \{1, 2, 3\}, E_{x_1} = \{1, 2, 3\}, E_{x_2} = \{1, 2, 3\}, E_\infty = \{2\}.$$

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные наборы $s = (e_\infty, e_1, e_0, e_{x_1}, e_{x_2})$ элементов множеств $E_\infty, E_1, E_0, E_{x_1}, E_{x_2}$, причем в каждом таком наборе один из элементов обязательно должен быть нечетным. Для каждого набора s найдем число d по формуле (3.11):

$$d = \frac{1}{2} (e_\infty - e_1 - e_0 - e_{x_1} - e_{x_2}).$$

В соответствии с алгоритмом число d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы s элементов множеств $E_1, E_0, E_{x_1}, E_{x_2}$ и E_∞ , приходим к выводу, что в данном случае число d может быть только равным нулю. Это условие имеет место для трех наборов чисел:

$$s_1 = (2, -2, 2, 1, 1), \quad s_2 = (2, -2, 1, 1, 2), \quad s_3 = (2, -2, 1, 2, 1).$$

Шаг 3. Проведем проверку каждого из трех наборов, сохраненных на предыдущем шаге. Начнем с рассмотрения набора s_1 . Используя набор чисел s_1 , по формуле (3.12) составим функцию θ . Она будет иметь вид:

$$\theta = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x - x_1)} + \frac{1}{(x - x_2)} - \frac{1}{(x - 1)}.$$

Из условия, что многочлен P степени $d = 0$ ($P \equiv 1$) должен тождественно удовлетворять дифференциальному уравнению (3.13) следуют ограничения на параметры задачи, при которых у линейного дифференциального уравне-

ния (12.3) существуют лиувиллевы решения вида (2.6). Уравнение (3.13) после подстановки в него $P \equiv 1$ и явных выражений для θ и $E(x)$ тождественно обращается в ноль в следующих случаях:

- 1) $x_1 = x_2 = 1$, A — произвольное число;
- 2) $x_1 = x_2 = -1$, A — произвольное число;
- 3) $x_1 = x_2 = \frac{A}{A-1}$, A — произвольное число;
- 4) $x_1 = 0$, $A = 0$, x_2 — произвольное число;
- 5) $x_1 = 1$, $A = 0$, x_2 — произвольное число.

Поскольку мы считаем, что все конечные полюсы функции $E(x)$ различны, то ни одно из перечисленных выше условий выполняться не может. Таким образом, для набора чисел s_1 не существует лиувиллевых решений вида (2.6) у дифференциального уравнения (12.3).

Теперь рассмотрим набор чисел s_2 . Используя набор s_2 , по формуле (3.12) составим функцию θ . Она будет иметь вид

$$\theta = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x-x_1)} + \frac{1}{x-x_2} - \frac{1}{x-1}.$$

Для существования лиувиллевых решений у уравнения (12.3) многочлен P степени $d = 0$ ($P \equiv 1$) должен тождественно удовлетворять дифференциальному уравнению (3.13). Уравнение (3.13) после подстановки в него $P \equiv 1$ и явных выражений для θ и $E(x)$ тождественно обращается в ноль в следующих случаях:

- 1) $x_1 = 0$, $A = 0$, x_2 — произвольное число;
- 2) $x_1 = x_2 = 1$, A — произвольное число;
- 3) $x_1 = 1$, $A = 0$, x_2 — произвольное число;
- 4) $x_1 = x_2$, $A = \frac{x_2}{x_2-1}$, x_2 — произвольное число;

- 5) $A = \frac{x_1}{x_1 - 1}$, $x_2 = 1$, x_1 — произвольное число;
 6) $x_2 = \frac{x_1 + 1}{2}$, $A = \frac{x_1^2}{x_1^2 - 1}$, x_1 — произвольное число.

Поскольку мы считаем, что все конечные полюсы функции $E(x)$ различны, то ни один из первых пяти перечисленных случаев выполняться не может. Более подробного рассмотрения заслуживает только последний случай. Подставляя вместо x_1 и x_2 их явные выражения через параметры A , B и C задачи, убеждаемся, что условия, соответствующие случаю 6, в исходных параметрах записываются следующим образом:

$$A - \frac{1}{C(2-C)} = 0, \quad \frac{A+B}{A+B-(1+BC)AC} - \frac{C-2}{2(C-1)} = 0.$$

Выражая параметр A из первого соотношения и подставляя его во второе, получаем условие

$$\frac{C}{2(1-C)(1+2BC)} = 0,$$

которое, очевидно, выполняться не может. Таким образом, для набора чисел s_2 не существует лиувиллевых решений вида (2.6) у дифференциального уравнения (12.3).

Аналогичные выводы получаются и при проверке набора s_3 . Следовательно, уравнение (12.3) не может иметь лиувиллевых решений вида (2.6), то есть решений, соответствующих Случаю 2 Теоремы 2.1. Теорема доказана. $\square$

Замечание 12.1. Число (12.9) является иррациональным почти для всех значений параметров задачи. Следовательно, почти для всех значений параметров задачи дифференциальное уравнение (12.3) не имеет лиувиллевых решений. Полученный результат позволяет сделать вывод, что почти для всех значений параметров задачи лиувиллевы решения будут отсутствовать и у дифференциального уравнения (12.1).

Замечание 12.2. Утверждение Теоремы 12.1 останется справедливым и в случае, когда выражение (12.9) является рациональным и таким, что число d , вычисляемое в процессе поиска решений вида (2.1) и вида (2.10) у дифференциального уравнения (12.3), не является целым неотрицательным числом.

Перейдем теперь к рассмотрению случаев, когда у дифференциального уравнения (12.3) могут существовать лиувиллевы решения вида (2.1) и вида (2.10). Обсудим сначала вопрос о существовании у дифференциального уравнения (12.3) лиувиллевых решений вида (2.1), то есть решений, соответствующих Случаю 1 Теоремы 2.1. Будем считать, что необходимые условия для существования решений вида (2.1) у уравнения (12.3) выполняются. Для поиска лиувиллевых решений вида (2.1) у уравнения (12.3) применим алгоритм Ковачича в том виде, как он описан в пункте 3.1.

Шаг 1. Вычислим постоянные $[\sqrt{E}]_c$ и $\alpha_c^\pm$:

$$[\sqrt{E}]_1 = 0, \alpha_1^+ = \frac{3}{2}, \alpha_1^- = -\frac{1}{2};$$

$$[\sqrt{E}]_0 = 0, \alpha_0^+ = \frac{3}{4}, \alpha_0^- = \frac{1}{4};$$

$$[\sqrt{E}]_{x_1} = 0, \alpha_{x_1}^+ = \frac{3}{4}, \alpha_{x_1}^- = \frac{1}{4};$$

$$[\sqrt{E}]_{x_2} = 0, \alpha_{x_2}^+ = \frac{3}{4}, \alpha_{x_2}^- = \frac{1}{4};$$

$$[\sqrt{E}]_\infty = 0, \alpha_\infty^+ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{A(x_1 - x_2)}{(x_1 - 1)((A - 1)x_1 - A)},$$

$$\alpha_\infty^- = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{A(x_1 - x_2)}{(x_1 - 1)((A - 1)x_1 - A)}.$$

Рассмотрим теперь все возможные значения постоянных $\alpha_1^\pm, \alpha_0^\pm, \alpha_{x_1}^\pm, \alpha_{x_2}^\pm$ и для каждого набора вычислим сумму

$$Q = \alpha_1^\pm + \alpha_0^\pm + \alpha_{x_1}^\pm + \alpha_{x_2}^\pm.$$

Ниже представлены все возможные наборы значений постоянных $\alpha_1^\pm, \alpha_0^\pm, \alpha_{x_1}^\pm, \alpha_{x_2}^\pm$ и соответствующие им значения Q :

$$s_1 = (\alpha_1^-, \alpha_0^-, \alpha_{x_1}^-, \alpha_{x_2}^-), \quad Q = \frac{1}{4}; \quad s_2 = (\alpha_1^-, \alpha_0^-, \alpha_{x_1}^-, \alpha_{x_2}^+), \quad Q = \frac{3}{4};$$

$$s_3 = (\alpha_1^-, \alpha_0^-, \alpha_{x_1}^+, \alpha_{x_2}^-), \quad Q = \frac{3}{4}; \quad s_4 = (\alpha_1^-, \alpha_0^+, \alpha_{x_1}^-, \alpha_{x_2}^-), \quad Q = \frac{3}{4};$$

$$s_5 = (\alpha_1^-, \alpha_0^+, \alpha_{x_1}^+, \alpha_{x_2}^-), \quad Q = \frac{5}{4}; \quad s_6 = (\alpha_1^-, \alpha_0^+, \alpha_{x_1}^-, \alpha_{x_2}^+), \quad Q = \frac{5}{4};$$

$$s_7 = (\alpha_1^-, \alpha_0^-, \alpha_{x_1}^+, \alpha_{x_2}^+), \quad Q = \frac{5}{4}; \quad s_8 = (\alpha_1^-, \alpha_0^+, \alpha_{x_1}^+, \alpha_{x_2}^+), \quad Q = \frac{7}{4};$$

$$s_9 = (\alpha_1^+, \alpha_0^-, \alpha_{x_1}^-, \alpha_{x_2}^-), \quad Q = \frac{9}{4}; \quad s_{10} = (\alpha_1^+, \alpha_0^+, \alpha_{x_1}^-, \alpha_{x_2}^-), \quad Q = \frac{11}{4};$$

$$s_{11} = (\alpha_1^+, \alpha_0^-, \alpha_{x_1}^+, \alpha_{x_2}^-), \quad Q = \frac{11}{4}; \quad s_{12} = (\alpha_1^+, \alpha_0^-, \alpha_{x_1}^-, \alpha_{x_2}^+), \quad Q = \frac{11}{4};$$

$$s_{13} = (\alpha_1^+, \alpha_0^+, \alpha_{x_1}^+, \alpha_{x_2}^-), \quad Q = \frac{13}{4}; \quad s_{14} = (\alpha_1^+, \alpha_0^+, \alpha_{x_1}^-, \alpha_{x_2}^+), \quad Q = \frac{13}{4};$$

$$s_{15} = (\alpha_1^+, \alpha_0^-, \alpha_{x_1}^+, \alpha_{x_2}^+), \quad Q = \frac{13}{4}; \quad s_{16} = (\alpha_1^+, \alpha_0^+, \alpha_{x_1}^+, \alpha_{x_2}^+), \quad Q = \frac{15}{4}.$$

Шаг 2. Рассмотрим набор s_1 и предположим, что число d , которое считается по формуле (3.2) в процессе поиска решений вида (2.1), получается равным некоторому неотрицательному числу N . Это условие равносильно следу-

ющему соотношению на параметры A , x_1 и x_2 :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{A(x_1 - x_2)}{(x_1 - 1)((A - 1)x_1 - A)}} = N. \quad (12.10)$$

Из условия (12.10) выразим A через N , x_1 и x_2 :

$$A = \frac{2N(2N - 1)x_1(x_1 - 1)}{2N(2N - 1)(x_1 - 1)^2 + x_2 - x_1}. \quad (12.11)$$

Теперь по формуле (3.3) определим функцию $\theta(x)$. Она равна

$$\theta = \frac{1}{4x} - \frac{1}{2(x - 1)} + \frac{1}{4(x - x_1)} + \frac{1}{4(x - x_2)}. \quad (12.12)$$

Шаг 3. На этом шаге мы должны найти многочлен P степени $d = N$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению (3.4). Предполагая, что многочлен P имеет вид

$$P = x^N + k_1 x^{N-1} + k_2 x^{N-2} + \dots + k_{N-1} x + k_N,$$

подставим его, а также функции $\theta(x)$ и $E(x)$ в уравнение (3.4). После приведения к общему знаменателю числитель выражения в левой части уравнения (3.4) будет представлять собой многочлен степени $N + 1$ с отличным от единицы старшим коэффициентом. Этот многочлен может быть записан в виде:

$$R = u_0 x^{N+1} + u_1 x^N + \dots + u_N x + u_{N+1}.$$

Система уравнений

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \quad \dots, \quad u_N = 0, \quad u_{N+1} = 0$$

представляет собой систему $N + 2$ уравнений относительно N неизвестных коэффициентов $k_1, \dots, k_N$ многочлена P и двух параметров x_1 и x_2 рассматриваемой задачи. В общем случае эта система является совместной и из нее

удается выразить все неизвестные в зависимости от N . Таким образом, можно утверждать, что у дифференциального уравнения (12.3) всегда существуют лиувиллевы решения вида (2.1). Однако вопрос о том, имеют ли эти лиувиллевы решения физический смысл, остается без ответа. Ответить на него можно лишь рассматривая фиксированные значения N и в явном виде выписывая ограничения на параметры x_1 и x_2 . Справедливость наших слов подтвердим на двух примерах.

Рассмотрим набор s_1 и предположим, что число d получилось равным 1. Тогда, учитывая формулу (12.11), параметр A будет иметь вид

$$A = \frac{2x_1(x_1 - 1)}{2x_1^2 - 5x_1 + 2 + x_2}.$$

Функция $\theta = \theta(x)$ снова записывается в виде (12.12). Теперь мы должны найти многочлен первой степени $P = x + K$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению (3.4). Подстановка многочлена P в дифференциальное уравнение (3.4) и последующее упрощение приводят к следующему результату:

$$\frac{(-2K - x_2)x^2 + (4x_1 + 3x_2 - 2 + 6K - x_2K - 2x_1x_2)x - 2K - x_2K - x_1x_2}{4x(x - 1)(x - x_1)(x - x_2)} = 0.$$

Из системы уравнений

$$-2K - x_2 = 0, \quad -2K - x_2K - x_1x_2 = 0,$$

$$4x_1 + 3x_2 - 2 + 6K - x_2K - 2x_1x_2 = 0$$

получаем следующие выражения для K и x_1 в зависимости от x_2 :

$$K = -\frac{x_2}{2}, \quad x_1 = \frac{x_2}{4} + \frac{1}{2}.$$

Подставим найденное выражение для x_1 в формулу для A

$$A = \frac{x_2 - 2}{x_2}.$$

Функция $\theta = \theta(x)$, определяемая формулой (12.12), переписывается в виде

$$\theta = \theta(x) = \frac{4x^3 - 12x^2 + (4 + 8x_2 - x_2^2)x - x_2^2 - 2x_2}{4x(x-1)(4x - x_2 - 2)(x - x_2)}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция

$$y = \left(x - \frac{x_2}{2}\right) \exp\left(\int \theta(x) dx\right) \quad (12.13)$$

является решением дифференциального уравнения (12.3). Таким образом, при выполнении условий

$$x_1 = \frac{x_2}{4} + \frac{1}{2}, \quad A = \frac{x_2 - 2}{x_2} \quad (12.14)$$

у дифференциального уравнения (12.3) существуют лиувиллевы решения вида (12.13). Выясним теперь, как записываются полученные условия (12.14), если выразить их через исходные параметры. Можно показать, что условия (12.14) записываются через параметры A , B и C следующим образом:

$$(A + B)(1 + 3C) - 2(1 + BC)AC(C + 1) = 0, \quad A = \frac{2C}{C + 1}.$$

Подставим A из второго соотношения в первое. Тогда оно переписется в виде

$$\frac{2C}{C + 1} + (2C + 1)B = 0.$$

Очевидно, что в левой части данного соотношения стоит положительное выражение, которое не может обращаться в ноль. Поэтому условия (12.14) существования лиувиллевых решений (12.13) не имеют физического смысла.

Снова рассмотрим набор значений s_1 и предположим, что постоянная d равна 2. Тогда параметр A будет выражаться через параметры x_1 и x_2 по фор-

муле (12.11) следующим образом:

$$A = \frac{12x_1(x_1 - 1)}{12x_1^2 - 25x_1 + 12 + x_2}.$$

Функция $\theta = \theta(x)$ имеет вид (12.12). Теперь мы должны найти многочлен второй степени $P = x^2 + k_1x + k_2$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению (3.4). Подстановка многочлена P в дифференциальное уравнение (3.4) и последующее упрощение приводят к выражению:

$$\frac{P_3(x)}{4x(x-1)(x-x_1)(x-x_2)} = 0,$$

$$\begin{aligned} P_3(x) = & (6 - 8x_1 - 9x_2 - 10k_1)x^3 + \\ & + (4x_1x_2 - 12 + 16x_1 + 15x_2 + 20k_1 - 12k_2 - k_1x_2)x^2 + \\ & + (4k_1x_1 - 2x_1x_2k_1 + 3k_1x_2 - 12x_1x_2 - x_2k_2 - 12k_1 + 26k_2)x - \\ & - 12k_2 - x_2k_2 - 2x_1x_2k_1. \end{aligned}$$

Из системы уравнений на коэффициенты k_1 и k_2 многочлена и параметры x_1 и x_2

$$\begin{aligned} 6 - 8x_1 - 9x_2 - 10k_1 &= 0, & 12k_2 + x_2k_2 + 2x_1x_2k_1 &= 0, \\ 4x_1x_2 - 12 + 16x_1 + 15x_2 + 20k_1 - 12k_2 - k_1x_2 &= 0, \\ 4k_1x_1 - 2x_1x_2k_1 + 3k_1x_2 - 12x_1x_2 - x_2k_2 - 12k_1 + 26k_2 &= 0 \end{aligned}$$

следует, что

$$k_1 = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}x_1 - \frac{9}{10}x_2, \quad k_2 = \frac{2}{5}x_1x_2 - \frac{3}{10}x_2 + \frac{3}{40}x_2^2,$$

$$64x_1^2 + 56x_1x_2 - 3x_2^2 - 240x_1 - 24x_2 + 144 = 0.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция

$$y = (x^2 + k_1x + k_2) \exp \left(\int \theta(x) dx \right) \quad (12.15)$$

представляет собой лиувиллево решение дифференциального уравнения (12.3). Таким образом, при выполнении условий

$$A = \frac{12x_1(x_1 - 1)}{12x_1^2 - 25x_1 + 12 + x_2}, \quad (12.16)$$

$$64x_1^2 + 56x_1x_2 - 3x_2^2 - 240x_1 - 24x_2 + 144 = 0 \quad (12.17)$$

у дифференциального уравнения (12.3) существуют лиувиллевы решения вида (2.1). Выясним теперь, как записываются условия (12.16), (12.17), если выразить их через исходные параметры. Подставим в условие (12.16) выражения x_1 и x_2 через A , B и C , а затем разрешим получившееся условие относительно A . В результате параметр A будет выражаться через параметры B и C по формуле:

$$A = \frac{12B}{12BC^2 + (B + 12)(C - 1)}. \quad (12.18)$$

Подставим теперь в условие (12.17) выражения x_1 , x_2 через A , B и C , а также выражение (12.18) для A через B и C . После всех этих подстановок и упрощений условие (12.17) примет вид:

$$-\frac{3B^2 + 50B^2C + 195B^2C^2 + 360B^2C^3}{B^2(C - 1)^2} - \frac{432B^2C^4 + 312BC + 360BC^2 + 864BC^3 + 432C^2}{B^2(C - 1)^2} = 0.$$

Очевидно, что в силу условий $B > 0$ и $C > 0$ полученное соотношение не может иметь место ни при каких значениях параметров B и C . Поэтому лиувиллево решение (12.15) также не имеет физического смысла.

Указанные примеры призваны подчеркнуть, что в случае, когда у дифференциального уравнения (12.3) существуют лиувиллевы решения вида (2.1) и вида (2.10), они могут не иметь физического смысла. Полный ответ на вопрос о существовании таких решений, имеющих физический смысл, возможен

лишь при рассмотрении конкретных значений параметра b_∞ . В работе [38] была высказана гипотеза, что лиувиллевы решения у дифференциального уравнения (12.2) существуют при значениях коэффициента b_∞ , удовлетворяющих условию

$$b_\infty = \frac{(2N-1)(2N+3)}{16},$$

где N — натуральное число. Далее мы рассматриваем случай $N = 1$, когда $b_\infty = \frac{5}{16}$, и доказываем существование имеющих физический смысл лиувиллевых решений у дифференциального уравнения (12.2) в этом случае.

12.2 Случай существования лиувиллевых решений

Рассмотрим случай, когда коэффициент $b_\infty = \frac{5}{16}$. В этом случае исходные параметры удовлетворяют условию

$$A_3 (a_3^2 - a_1^2) (2A_1 + ma_1^2) + 2m (A_3 a_3^4 - A_1 a_1^4) = 0. \quad (12.19)$$

Из условия (12.19) получаем:

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{2ma_1^4}{(2A_1 + ma_1^2)(a_3^2 - a_1^2) + 2ma_3^4}.$$

Выражение

$$\frac{2ma_1^4}{(2A_1 + ma_1^2)(a_3^2 - a_1^2) + 2ma_3^4}$$

должно принадлежать интервалу $(0, 2)$. Это условие равносильно системе двух неравенств

$$(2A_1 + ma_1^2)(a_3^2 - a_1^2) + 2ma_3^4 > 0, \quad 2(A_1 + ma_3^2 + ma_1^2)(a_3^2 - a_1^2) + ma_1^2 a_3^2 > 0,$$

из которых второе – более строгое. Таким образом, для выполнения условия $b_\infty = \frac{5}{16}$ достаточно, чтобы параметры системы удовлетворяли соотношению:

$$2(A_1 + ma_3^2 + ma_1^2)(a_3^2 - a_1^2) + ma_1^2 a_3^2 > 0. \quad (12.20)$$

В случае вытянутого эллипсоида вращения ($a_3^2 > a_1^2$) условие (12.20) заведомо выполняется. Если же эллипсоид сжат ($a_1^2 > a_3^2$), то соответствующее условие будет справедливо, если

$$\frac{a_3^2}{a_1^2} \in \left(\frac{\sqrt{17} - 1}{4}, 1 \right).$$

Через параметры A , x_1 и x_2 условие $b_\infty = \frac{5}{16}$ записывается следующим образом:

$$A = \frac{2x_1(x_1 - 1)}{2x_1^2 - 5x_1 + x_2 + 2}. \quad (12.21)$$

Подставляя выражение (12.21) для A в функцию $E(x)$, приведем ее к виду:

$$\begin{aligned} E(x)|_{(12.21)} = E_1(x) &= \frac{c_1}{x-1} + \frac{b_1}{(x-1)^2} + \frac{c_0}{x} + \frac{b_0}{x^2} + \frac{c_{x_1}}{x-x_1} + \\ &+ \frac{b_{x_1}}{(x-x_1)^2} + \frac{c_{x_2}}{x-x_2} + \frac{b_{x_2}}{(x-x_2)^2}, \\ b_1 &= \frac{3}{4}, \quad b_0 = b_{x_1} = b_{x_2} = -\frac{3}{16}, \\ c_1 &= -\frac{x_1x_2 - 2x_2 - 4x_2 + 5}{4(x_1 - 1)(x_2 - 1)}, \quad c_0 = \frac{2x_1x_2 - x_1 - 3x_2 - 4}{8x_1x_2}, \\ c_{x_1} &= \frac{3x_1x_2 + 4x_1^2 - 14x_1 + 3x_2 + 4}{8x_1(x_1 - 1)(x_2 - 1)}, \quad c_{x_2} = -\frac{x_1x_2 + 6x_2^2 + x_1 - 12x_2 + 4}{8x_2(x_2 - 1)(x_1 - x_2)}. \end{aligned}$$

Разложение функции $E_1(x)$ в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид

$$E_1(x) \big|_{x=\infty} = \frac{5}{16x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Применим алгоритм Ковачича для поиска лиувиллевых решений у дифференциального уравнения (12.3), когда параметры этого уравнения удовлетворяют условию (12.19). Заметим, что необходимые условия существования лиувиллевых решений у дифференциального уравнения (12.3) выполняются для всех трех типов решения. Сначала попытаемся найти у уравнения (12.3) лиувиллевы решения вида (2.1), то есть решения, соответствующие Случаю 1 Теоремы 2.1. Применим алгоритм Ковачича для поиска решений (2.1) в том виде, как он описан в пункте 3.1.

Шаг 1. Вычислим постоянные $[\sqrt{E_1}]_c$ и $\alpha_c^\pm$:

$$[\sqrt{E_1}]_1 = 0, \alpha_1^+ = \frac{3}{2}, \alpha_1^- = -\frac{1}{2},$$

$$[\sqrt{E_1}]_0 = 0, \alpha_0^+ = \frac{3}{4}, \alpha_0^- = \frac{1}{4},$$

$$[\sqrt{E_1}]_{x_1} = 0, \alpha_{x_1}^+ = \frac{3}{4}, \alpha_{x_1}^- = \frac{1}{4},$$

$$[\sqrt{E_1}]_{x_2} = 0, \alpha_{x_2}^+ = \frac{3}{4}, \alpha_{x_2}^- = \frac{1}{4},$$

$$[\sqrt{E_1}]_\infty = 0, \alpha_\infty^+ = \frac{5}{4}, \alpha_\infty^- = -\frac{1}{4}.$$

Шаг 2. Теперь нам необходимо рассмотреть 32 набора знаков

$$s = (s(\infty), s(1), s(0), s(x_1), s(x_2)),$$

где каждый элемент $s(c)$ может быть как знаком "плюс", так и знаком "минус". Для каждого из этих наборов найдем число d по формуле (3.2):

$$d = \alpha_{\infty}^{s(\infty)} - \alpha_1^{s(1)} - \alpha_0^{s(0)} - \alpha_{x_1}^{s(x_1)} - \alpha_{x_2}^{s(x_2)}.$$

В соответствии с алгоритмом число d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы знаков s и соответствующие им наборы значений $\alpha_c^{\pm}$, делаем вывод, что для одного набора

$$p_1 = (\alpha_{\infty}^+, \alpha_1^-, \alpha_0^-, \alpha_{x_1}^-, \alpha_{x_2}^-) = \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$$

получается $d = 1$, а еще для трех наборов

$$p_2 = (\alpha_{\infty}^+, \alpha_1^-, \alpha_0^+, \alpha_{x_1}^+, \alpha_{x_2}^-) = \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right),$$

$$p_3 = (\alpha_{\infty}^+, \alpha_1^-, \alpha_0^+, \alpha_{x_1}^-, \alpha_{x_2}^+) = \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right),$$

$$p_4 = (\alpha_{\infty}^+, \alpha_1^-, \alpha_0^-, \alpha_{x_1}^+, \alpha_{x_2}^+) = \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right)$$

получается $d = 0$. Необходимо проверить все найденные наборы на предмет существования для них решения дифференциального уравнения (12.3), имеющего вид (2.1). Заметим, что для набора p_1 нами уже был установлен факт несуществования лиувиллевых решений вида (2.1) у уравнения (12.3). Поэтому далее проведем только проверку наборов p_2 , p_3 и p_4 .

Шаг 3. Рассмотрим набор значений p_2 , сохраненный на предыдущем шаге. Для набора p_2 вычислим функцию $\theta = \theta(x)$ по формуле (3.3). Она имеет вид

$$\theta = -\frac{1}{2(x-1)} + \frac{3}{4x} + \frac{3}{4(x-x_1)} + \frac{1}{4(x-x_2)}.$$

Теперь для набора p_2 мы должны найти многочлен P степени $d = 0$, ($P \equiv 1$), удовлетворяющий дифференциальному уравнению (3.4).

Подстановка многочлена P и функций θ и E_1 в данное дифференциальное уравнение приводит к следующему соотношению:

$$\frac{(x_1 - x_2)x - 2x_1x_2 + x_1 + 3x_2 - 2}{4x(x-1)(x-x_1)(x-x_2)} = 0.$$

Очевидно, что в случае, когда все полюсы функции $E_1(x)$ различны, данное соотношение не имеет места, поскольку $x_1 \neq x_2$. Следовательно, для набора p_2 не существует лиувиллевых решений вида (2.1) у уравнения (12.3). При помощи аналогичных рассуждений наборы p_3 и p_4 также отбрасываются. Таким образом, при выполнении условия (12.19) линейное дифференциальное уравнение (12.3) не имеет лиувиллевых решений вида (2.1), то есть решений, соответствующих Случаю 1 Теоремы 2.1.

Теперь попытаемся найти у линейного дифференциального уравнения (12.3) лиувиллевы решения вида (2.6), то есть решения, соответствующее Случаю 2 Теоремы 2.1. Применим алгоритм Ковачича для поиска решений (2.6) линейного дифференциального уравнения (12.3) в том виде, как он описан в пункте 3.4.

Шаг 1. Определим сначала множества E_c :

$$E_0 = \{1, 2, 3\}, E_{x_1} = \{1, 2, 3\}, E_{x_2} = \{1, 2, 3\}, E_1 = \{-2, 2, 6\}, E_\infty = \{-1, 2, 5\}.$$

Шаг 2. Теперь нам требуется рассмотреть все возможные наборы $s = (e_\infty, e_1, e_0, e_{x_1}, e_{x_2})$ элементов множеств $E_\infty, E_1, E_0, E_{x_1}, E_{x_2}$, причем в каждом наборе один из элементов обязательно должен быть нечетным. Для каждого набора s найдем число d по формуле (3.11):

$$d = \frac{1}{2}(e_\infty - e_1 - e_0 - e_{x_1} - e_{x_2}).$$

В соответствии с алгоритмом число d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все имеющиеся наборы s , приходим к выводу, что для одного набора

$$s_1 = (5, -2, 1, 1, 1),$$

имеем $d = 2$, еще для шести наборов

$$s_2 = (5, -2, 1, 2, 2), \quad s_3 = (5, -2, 2, 1, 2), \quad s_4 = (5, -2, 2, 2, 1),$$

$$s_5 = (5, -2, 3, 1, 1), \quad s_6 = (5, -2, 1, 3, 1), \quad s_7 = (5, -2, 1, 1, 3),$$

имеем $d = 1$, а ещё для десяти наборов

$$s_8 = (5, -2, 3, 3, 1), \quad s_9 = (5, -2, 3, 1, 3), \quad s_{10} = (5, -2, 1, 3, 3),$$

$$s_{11} = (5, -2, 2, 2, 3), \quad s_{12} = (5, -2, 2, 3, 2), \quad s_{13} = (5, -2, 3, 2, 2),$$

$$s_{14} = (5, 2, 1, 1, 1), \quad s_{15} = (2, -2, 2, 1, 1), \quad s_{16} = (2, -2, 1, 2, 1),$$

$$s_{17} = (2, -2, 1, 1, 2),$$

имеем $d = 0$. Все эти наборы нуждаются в проверке. Для начала проведем проверку набора s_1 .

Шаг 3. Используя набор чисел s_1 , сохраненный на предыдущем шаге, по формуле (3.12) составим функцию θ . Она будет иметь вид

$$\theta = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x-x_1)} + \frac{1}{2(x-x_2)}.$$

Многочлен $P = x^2 + k_1x + k_2$ степени $d = 2$ должен тождественно удовлетворять уравнению (3.13). Из уравнения (3.13) после подстановки в него функ-

ций θ , E_1 и многочлена P находим:

$$k_1 = -x_2, \quad k_2 = x_1x_2 - 2x_1 + 1.$$

Следовательно, многочлен P существует при любых значениях параметров x_1 и x_2 , связанных соотношением (12.21), и имеет вид

$$P(x) = x^2 - x_2x + x_1x_2 - 2x_1 + 1. \quad (12.22)$$

Теперь в соответствии с алгоритмом введем функцию φ

$$\varphi = \theta + \frac{P'}{P} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x-x_1)} + \frac{1}{2(x-x_2)} - \frac{1}{x-1} + \frac{2x-x_2}{x^2-xx_2+x_1x_2-2x_1+1}$$

и найдем по функции φ функцию ω , которая является решением квадратного уравнения (3.14).

Тогда исходное дифференциальное уравнение (12.3) имеет решение

$$\eta = \exp \left(\int \omega(x) dx \right).$$

В явном виде данное решение может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta = & (x(x-x_1)(x-x_2))^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{P(x)}{x-1}} \times \\ & \times \exp \left(\int \frac{x-1}{2P(x)} \sqrt{\frac{(x_1x_2-2x_1+1)(4x_1-x_2-2)}{x(x-x_1)(x-x_2)}} dx \right), \end{aligned}$$

где $P(x)$ — многочлен второго порядка, определяемый формулой (12.22).

Окончательно, можно сделать вывод, что при выполнении условия (12.19) общее решение линейного дифференциального уравнения второго поряд-

ка (12.3) выражается через лиувиллевы функции вида (2.6) и имеет вид:

$$\begin{aligned}
 y(x) = & C_1 (x(x-x_1)(x-x_2))^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{P(x)}{x-1}} \times \\
 & \times \exp \left(\int \frac{x-1}{2P(x)} \sqrt{\frac{(x_1x_2-2x_1+1)(4x_1-x_2-2)}{x(x-x_1)(x-x_2)}} dx \right) + \\
 & + C_2 (x(x-x_1)(x-x_2))^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{P(x)}{x-1}} \times \\
 & \times \exp \left(- \int \frac{x-1}{2P(x)} \sqrt{\frac{(x_1x_2-2x_1+1)(4x_1-x_2-2)}{x(x-x_1)(x-x_2)}} dx \right). \quad (12.23)
 \end{aligned}$$

В исходных переменных и параметрах решению (12.23) линейного дифференциального уравнения (12.3) соответствует решение дифференциального уравнения (12.1), вид которого определяется знаком разности $a_3^2 - a_1^2$. Можно показать, что для вытянутого эллипсоида ($a_3^2 > a_1^2$) соответствующее общее решение дифференциального уравнения (12.1) имеет вид:

$$r(\theta) = \sqrt{\cos^2 \theta + \frac{a_1^2 a_3^2 B_1}{(a_3^2 - a_1^2) (B_1 + m(a_3^2 - a_1^2) (a_1^2 \sin^2 \theta + a_3^2))}} \times \quad (12.24)$$

$$\times (C_1 \cos \Phi_1(\theta) + C_2 \sin \Phi_1(\theta)),$$

$$\Phi_1(\theta) = \int \frac{\sqrt{m(a_3^2 - a_1^2)^3 (a_3^2 B_1^2 + m(a_1^2 + a_3^2)^2 B_1)} a_1^2 a_3 \sin^3 \theta d\theta}{T_1(\theta) \sqrt{(a_1^2 \sin^2 \theta + a_3^2 \cos^2 \theta) (B_1 + m(a_3^2 - a_1^2) (a_1^2 \sin^2 \theta + a_3^2))}},$$

$$T_1(\theta) = a_1^2 a_3^2 B_1 + (a_3^2 - a_1^2) (a_3^2 B_1 + m a_3^4 - m a_1^4) \cos^2 \theta -$$

$$-m a_1^2 (a_3^2 - a_1^2)^2 \cos^4 \theta, \quad B_1 = 2A_1 + m a_1^2 + m a_3^2.$$

а для сжатого эллипсоида ($a_1^2 > a_3^2$) соответствующее общее решение дифференциального уравнения (12.1) имеет вид:

$$r(\theta) = \sqrt{\frac{a_1^2 a_3^2 B_1}{(a_1^2 - a_3^2)(B_1 - m(a_1^2 - a_3^2)(a_1^2 \sin^2 \theta + a_3^2))}} - \cos^2 \theta \times \quad (12.25)$$

$$\times (C_1 \exp(\Phi_2(\theta)) + C_2 \exp(-\Phi_2(\theta))),$$

$$\Phi_2(\theta) = \int \frac{\sqrt{m(a_1^2 - a_3^2)^3 \left(a_3^2 B_1^2 + m(a_1^2 + a_3^2)^2 B_1\right)} a_1^2 a_3 \sin^3 \theta d\theta}{T_2(\theta) \sqrt{(a_1^2 \sin^2 \theta + a_3^2 \cos^2 \theta)(B_1 - m(a_1^2 - a_3^2)(a_1^2 \sin^2 \theta + a_3^2))}},$$

$$T_2(\theta) = a_1^2 a_3^2 B_1 - (a_1^2 - a_3^2)(a_3^2 B_1 + m a_3^4 - m a_1^4) \cos^2 \theta -$$

$$-m a_1^2 (a_1^2 - a_3^2)^2 \cos^4 \theta.$$

Итак, в случае $b_\infty = \frac{5}{16}$ удастся построить общее решение уравнения (12.3), которое в зависимости от знака разности $a_3^2 - a_1^2$ имеет вид (12.24) (при $a_3^2 - a_1^2 > 0$) или вид (12.25) (при $a_3^2 - a_1^2 < 0$).

Таким образом, при помощи алгоритма Ковачича нами проведено исследование существования лиувиллевых решений у линейного дифференциального уравнения второго порядка (12.1). К нахождению общего решения данного уравнения сводится задача о качении без проскальзывания тяжелого динамически симметричного эллипсоида вращения по неподвижной горизонтальной плоскости. Для почти всех значений параметров задачи доказано отсутствие лиувиллевых решений у соответствующего линейного дифференциального уравнения второго порядка (12.1). Указано соотношение на параметры системы, при выполнении которого линейное дифференциальное уравнение второго порядка (12.1) имеет лиувиллевы решения, и выписан явный вид этих решений. Другие случаи, когда у уравнения (12.1) существуют лиувиллевы решения, изучались в работах [38, 194].

В следующей главе рассматривается другая классическая задача механики — задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса. Решение этой задачи также сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка, для исследования которого можно воспользоваться алгоритмом Ковачича.

ГЛАВА 3. ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ В СЛУЧАЕ ГЕССА

В 1890 году немецкий математик и механик В. Гесс [94] указал новый частный случай интегрируемости уравнений Эйлера – Пуассона движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. В 1892 году П. А. Некрасов показал [51, 52], что решение задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой при условиях Гесса сводится к интегрированию линейного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. В данной главе представлен вывод соответствующего уравнения второго порядка и показано, как привести коэффициенты этого уравнения к виду рациональных функций. Затем при помощи алгоритма Ковачича [105] исследуется вопрос о существовании лиувиллевых решений у соответствующего линейного уравнения второго порядка. Показано, что лиувиллевы решения могут существовать лишь в двух случаях: в случае, соответствующем случаю Лагранжа движения твердого тела с неподвижной точкой и в случае, когда постоянная интеграла площадей равна нулю.

13 Постановка задачи. Случай Гесса

Рассмотрим движение твердого тела с одной закрепленной точкой O в однородном поле силы тяжести. Движение тела будем изучать по отношению к подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанной с телом, оси которой совпадают с главными осями инерции тела для точки O . Единичные базисные векторы системы координат $Ox_1x_2x_3$ обозначим соответственно $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Пусть A_1 , A_2 , A_3 – моменты инерции тела относительно осей Ox_1 , Ox_2 и Ox_3 соответственно. Пусть $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3$ – вектор угловой скорости тела, а $\boldsymbol{\gamma} = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3$ единичный вектор, направленный по вертикали вверх. Положение центра тяжести G тела будем определять радиусом – векто-

ром $\mathbf{r} = \overrightarrow{OG} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ с проекциями x_1, x_2, x_3 на оси подвижной системы координат. Пусть M — масса тела, g — величина ускорения силы тяжести. Уравнения движения тела получим из теоремы об изменении кинетического момента относительно неподвижной точки O . В системе координат $Ox_1x_2x_3$ они имеют вид [2, 10, 43]:

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\omega_2\omega_3 &= Mg(x_3\gamma_2 - x_2\gamma_3), \\ A_2\dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3)\omega_1\omega_3 &= Mg(x_1\gamma_3 - x_3\gamma_1), \\ A_3\dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2 &= Mg(x_2\gamma_1 - x_1\gamma_2). \end{aligned} \quad (13.1)$$

Уравнения (13.1) следует дополнить уравнениями Пуассона для компонент вектора $\boldsymbol{\gamma}$

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2. \quad (13.2)$$

Таким образом, имеем замкнутую систему шести нелинейных дифференциальных уравнений (13.1), (13.2) относительно шести неизвестных функций $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Совокупность этих шести уравнений называется уравнениями Эйлера – Пуассона.

Известно, что для решения уравнений Эйлера – Пуассона достаточно найти четыре независимых первых интеграла системы (13.1), (13.2), не содержащих время [2, 43]. При любых значениях параметров $A_1, A_2, A_3, x_1, x_2, x_3$ известны три не содержащих время независимых первых интеграла уравнений Эйлера – Пуассона.

1. Интеграл энергии

$$\frac{1}{2} (A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2) + Mg(x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3) = h.$$

2. Интеграл площадей

$$A_1\omega_1\gamma_1 + A_2\omega_2\gamma_2 + A_3\omega_3\gamma_3 = C.$$

3. Геометрический интеграл

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Таким образом, для того, чтобы проинтегрировать уравнения Эйлера – Пуассона, достаточно найти еще только один не зависящий от времени первый интеграл. При ограничениях на распределение массы твердого тела, то есть при ограничениях на постоянные $A_1, A_2, A_3, x_1, x_2, x_3$ дополнительный первый интеграл существует только в трех случаях [2, 43].

1. Случай Эйлера ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$). Четвертый интеграл имеет вид:

$$A_1^2 \omega_1^2 + A_2^2 \omega_2^2 + A_3^2 \omega_3^2 = k^2.$$

2. Случай Лагранжа ($A_1 = A_2, x_1 = x_2 = 0$). В этом случае четвертый интеграл будет иметь вид:

$$\omega_3 = \omega = \text{const.}$$

3. Случай С.В. Ковалевской ($A_1 = A_2 = 2A_3, x_2 = x_3 = 0$). Если ввести обозначение

$$\frac{Mgx_1}{A_3} = n,$$

то дополнительный первый интеграл можно записать в виде:

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2 - n\gamma_1)^2 + (2\omega_1\omega_2 - n\gamma_2)^2 = j.$$

Других общих случаев интегрируемости у уравнений Эйлера – Пуассона не существует [2, 43]. Однако существуют частные случаи интегрируемости, когда дополнительный первый интеграл существует при специальных условиях на начальные данные. Одним из таких случаев является случай Гесса, открытый в 1890 году в работе [94]. Остановимся на рассмотрении этого случая более подробно.

Предположим, что параметры тела удовлетворяют соотношениям:

$$x_3 = 0, \quad A_2(A_3 - A_1)x_2^2 = A_1(A_2 - A_3)x_1^2, \quad A_2 \geq A_3 \geq A_1. \quad (13.3)$$

Покажем, что при выполнении условий (13.3) уравнения Эйлера – Пуассона (13.1), (13.2) допускают частный четвертый интеграл, имеющий вид:

$$A_1\omega_1x_1 + A_2\omega_2x_2 = 0. \quad (13.4)$$

Для этого запишем первое и второе уравнения системы (13.1) с учетом условий (13.3):

$$A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\omega_2\omega_3 = -Mgx_2\gamma_3, \quad A_2\dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3)\omega_1\omega_3 = Mgx_1\gamma_3. \quad (13.5)$$

Умножая теперь первое из уравнений (13.5) на x_1 , а второе — на x_2 и складывая, получаем:

$$\frac{d}{dt}(A_1\omega_1x_1 + A_2\omega_2x_2) = (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3x_2 + (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3x_1. \quad (13.6)$$

Правая часть соотношения (13.6) с учетом условий (13.3) может быть представлена в виде:

$$(A_3 - A_1)\omega_1\omega_3x_2 + (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3x_1 = \frac{\omega_3(A_2 - A_3)x_1}{A_2x_2}(A_1\omega_1x_1 + A_2\omega_2x_2). \quad (13.7)$$

С учетом соотношения (13.7) из уравнения (13.6) следует вывод, что если в начальный момент времени справедливо условие (13.4), то это условие справедливо во все время движения твердого тела. Следовательно, система уравнений (13.1), (13.2) при выполнении условий (13.3) допускает частный интеграл (13.4).

Впервые данный частный случай интегрируемости был указан в 1890 году в работе В. Гесса [94]. В 1892 году случай Гесса был переоткрыт Г.Г. Аппельротом [1], который получил его, воспользовавшись идеей С. В. Ковалев-

ской [106, 107] исследования на однозначность особых точек решений уравнений Эйлера – Пуассона. Детальное аналитическое исследование решения Гесса было выполнено П. А. Некрасовым [51, 52]. Он привел задачу к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка с двоякопериодическими комплексными коэффициентами и показал, что решения в случае Гесса являются, вообще говоря, неоднозначными. П. А. Некрасов изучил аналитические свойства полученного линейного дифференциального уравнения и выявил основные свойства траекторий на сфере Пуассона. Также П. А. Некрасовым [51, 52] было показано, что при выполнении условий Гесса и при дополнительном условии равенства нулю постоянной интеграла площадей уравнения Эйлера – Пуассона интегрируются в эллиптических функциях. В этом случае удастся записать решение уравнений Эйлера – Пуассона в квадратурах. Часть результатов работ В. Гесса [94] и П. А. Некрасова [51, 52] были повторены впоследствии Р. Лиувиллем [117]. Геометрическое истолкование движения тяжелого тела с неподвижной точкой в случае Гесса (в частности, при нулевой постоянной площадей) было дано Н.Е. Жуковским в [22], а Б. К. Млодзеевский и П. А. Некрасов в [47] доказали, что при некоторых ограничениях решения могут быть асимптотическими.

Полный качественный анализ фазовых траекторий решения Гесса был выполнен А. М. Ковалевым [40]. В работе [42], существенно использующей результаты работы [40], была предложена детальная классификация возможных годографов вектора кинетического момента в зависимости от значений постоянных интеграла энергии и площадей h и C . В работе [41] методом годографов [56, 57] дано кинематическое истолкование движения тела с неподвижной точкой в случае Гесса при нулевой постоянной площадей. В работе [16] при нулевой постоянной площадей была изучена временная и пространственная эволюция вектора угловой скорости и вектора кинетического момента. Движение тела было представлено качением эллипсоида инерции по неподвижной плоскости.

Поскольку решение задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка, то можно поставить задачу о существовании у соответствующего линейного дифференциального уравнения решений, имеющих аналитическое представление в виде лиувиллевых функций. Для решения этой задачи можно воспользоваться алгоритмом Ковачича [105]. Чтобы воспользоваться этим алгоритмом, необходимо, чтобы коэффициенты соответствующего линейного дифференциального уравнения второго порядка были рациональными функциями независимой переменной.

Ниже показано, как получить линейное дифференциальное уравнение второго порядка в случае Гесса и как привести его к уравнению с рациональными коэффициентами. Для этого запишем сначала уравнения Эйлера – Пуассона в специальной системе координат, предложенной П.В. Харламовым [56, 57].

14 Уравнения Эйлера – Пуассона в специальных осях координат

Выберем вместо главных осей инерции в неподвижной точке O произвольную правую прямоугольную систему координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ с единичными векторами $\mathbf{e}_I$, $\mathbf{e}_{II}$, $\mathbf{e}_{III}$, фиксированную в твердом теле. В этой системе координат кинетический момент имеет вид:

$$\mathbf{K} = K_1\mathbf{e}_I + K_2\mathbf{e}_{II} + K_3\mathbf{e}_{III}, \quad (14.1)$$

а с другой стороны, он определяется формулой [10]

$$\mathbf{K} = \mathbb{J}_O\boldsymbol{\omega},$$

где

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega_1\mathbf{e}_I + \Omega_2\mathbf{e}_{II} + \Omega_3\mathbf{e}_{III}, \quad (14.2)$$

$$\mathbb{J}_O = \begin{pmatrix} L_{11} & -L_{12} & -L_{13} \\ -L_{21} & L_{22} & -L_{23} \\ -L_{31} & -L_{32} & L_{33} \end{pmatrix}. \quad (14.3)$$

Здесь компоненты тензора инерции $\mathbb{J}_O$ удовлетворяют условию $L_{ij} = L_{ji}$. В этом тензоре компоненты L_{11} , L_{22} , L_{33} являются моментами инерции относительно осей $O\xi_1$, $O\xi_2$, $O\xi_3$, а L_{ij} , ($i \neq j$) — центробежными моментами инерции. Из формул (14.1), (14.2), (14.3) следует, что проекциями вектора кинетического момента $\mathbf{K}$ на оси $O\xi_1\xi_2\xi_3$ будут

$$\begin{aligned} K_1 &= L_{11}\Omega_1 - L_{12}\Omega_2 - L_{13}\Omega_3, & K_2 &= -L_{21}\Omega_1 + L_{22}\Omega_2 - L_{23}\Omega_3, \\ K_3 &= -L_{31}\Omega_1 - L_{32}\Omega_2 + L_{33}\Omega_3. \end{aligned} \quad (14.4)$$

С помощью вектора кинетического момента $\mathbf{K}$ кинетическая энергия твердого тела может быть представлена в векторном виде:

$$T = \frac{1}{2} (\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\omega}).$$

Принимая во внимание формулы (14.2), (14.4), запишем выражение для кинетической энергии в скалярной форме:

$$T = \frac{1}{2} (L_{11}\Omega_1^2 + L_{22}\Omega_2^2 + L_{33}\Omega_3^2) - L_{23}\Omega_2\Omega_3 - L_{13}\Omega_1\Omega_3 - L_{12}\Omega_1\Omega_2. \quad (14.5)$$

Тензор инерции (14.3) представляет собой невырожденную матрицу. Поэтому систему (14.4) можно интерпретировать как систему линейных неоднородных уравнений относительно переменных Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 . Разрешая эту систему относительно Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 , находим:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= l_{11}K_1 + l_{12}K_2 + l_{13}K_3, & \Omega_2 &= l_{21}K_1 + l_{22}K_2 + l_{23}K_3, \\ \Omega_3 &= l_{31}K_1 + l_{32}K_2 + l_{33}K_3. \end{aligned} \quad (14.6)$$

Здесь обозначено:

$$l_{11} = \frac{L_{22}L_{33} - L_{23}^2}{\Delta}, \quad l_{22} = \frac{L_{11}L_{33} - L_{13}^2}{\Delta}, \quad l_{33} = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{\Delta},$$

$$l_{23} = l_{32} = \frac{L_{11}L_{23} + L_{12}L_{13}}{\Delta}, \quad l_{13} = l_{31} = \frac{L_{12}L_{23} + L_{13}L_{22}}{\Delta},$$

$$l_{12} = l_{21} = \frac{L_{12}L_{33} + L_{13}L_{23}}{\Delta};$$

$$\Delta = \det(L_{ij}) = L_{11}L_{22}L_{33} - L_{11}L_{23}^2 - L_{33}L_{12}^2 - L_{22}L_{13}^2 - 2L_{12}L_{13}L_{23}.$$

Подставляя соотношения (14.6) в формулу (14.5) для кинетической энергии T , получаем следующее выражение кинетической энергии тела в переменных K_1, K_2, K_3 :

$$T = \frac{1}{2} (l_{11}K_1^2 + l_{22}K_2^2 + l_{33}K_3^2) + l_{23}K_2K_3 + l_{13}K_1K_3 + l_{12}K_1K_2. \quad (14.7)$$

Упростим теперь выражение кинетической энергии (14.7), для чего повернем против часовой стрелки оси системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ вокруг первой оси $O\xi_1$ на некоторый угол α . Полученную систему координат обозначим $O\xi_1^*\xi_2^*\xi_3^*$. В этом случае новые координаты вектора $\mathbf{K}$, которые мы обозначим через K_1^*, K_2^*, K_3^* , можно выразить через старые K_1, K_2, K_3 по следующим формулам:

$$K_1 = K_1^*, \quad K_2 = K_2^* \cos \alpha - K_3^* \sin \alpha, \quad K_3 = K_2^* \sin \alpha + K_3^* \cos \alpha.$$

Выражение для кинетической энергии T в новых координатах вектора $\mathbf{K}$ примет вид:

$$T = \frac{1}{2} (l_{11}^* (K_1^*)^2 + l_{22}^* (K_2^*)^2 + l_{33}^* (K_3^*)^2) + l_{23}^* K_2^* K_3^* + l_{13}^* K_1^* K_3^* + l_{12}^* K_1^* K_2^*. \quad (14.8)$$

В этой формуле коэффициенты l_{ij}^* выражаются через коэффициенты l_{ij} и угол α по формулам:

$$l_{11}^* = l_{11}, \quad l_{22}^* = l_{22} \cos^2 \alpha + l_{33} \sin^2 \alpha + l_{23} \sin 2\alpha,$$

$$l_{33}^* = l_{22} \sin^2 \alpha + l_{33} \cos^2 \alpha - l_{23} \sin 2\alpha,$$

$$l_{12}^* = l_{13} \sin \alpha + l_{12} \cos \alpha, \quad l_{13}^* = l_{13} \cos \alpha - l_{12} \sin \alpha,$$

$$l_{23}^* = l_{23} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} (l_{22} - l_{33}) \sin 2\alpha.$$

Положим теперь

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2l_{23}}{l_{22} - l_{33}}.$$

В этом случае коэффициент l_{23}^* становится равным нулю, и выражение (14.8) для кинетической энергии принимает вид:

$$T = \frac{1}{2} \left(l_{11}^* (K_1^*)^2 + l_{22}^* (K_2^*)^2 + l_{33}^* (K_3^*)^2 \right) + (l_{13}^* K_3^* + l_{12}^* K_2^*) K_1^*. \quad (14.9)$$

Предполагая, что центр тяжести тела G не совпадает с закрепленной точкой O , рассмотрим систему координат $O\eta_1\eta_2\eta_3$, у которой ось $O\eta_1$ проходит через точку G (то есть она направлена вдоль вектора $\mathbf{r}$), а оси $O\eta_2$ и $O\eta_3$ направлены так, что кинетическая энергия T будет представлена выражением (14.9). Очевидно, что данная система координат определяется однозначно, и она будет жестко связана с твердым телом. Эту систему координат назовем специальными осями П.В. Харламова [56, 57]. При использовании этой системы вместо l_{11}^* , l_{22}^* , l_{33}^* , l_{12}^* , l_{13}^* будем писать a , a_1 , a_2 , b_1 , b_2 ; вместо K_1^* , K_2^* , K_3^* будем писать L_1 , L_2 , L_3 ; вместо Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 напомним ω_I , ω_{II} , ω_{III} . Таким образом, получаем следующее выражение для кинетической энергии и компонент угловой скорости:

$$T = \frac{1}{2} (aL_1^2 + a_1L_2^2 + a_2L_3^2) + (b_1L_2 + b_2L_3) L_1, \quad (14.10)$$

$$\omega_I = aL_1 + b_1L_2 + b_2L_3, \quad \omega_{II} = a_1L_2 + b_1L_1, \quad \omega_{III} = a_2L_3 + b_2L_1. \quad (14.11)$$

Воспользовавшись уравнениями (13.1), (13.2), (14.10), (14.11) выразим уравнения движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в специ-

альной системе координат П. В. Харламова [56, 57]:

$$\begin{aligned}
 \dot{L}_1 &= (a_2 - a_1) L_2 L_3 + (b_2 L_2 - b_1 L_3) L_1, \\
 \dot{L}_2 &= (a - a_2) L_1 L_3 + (b_1 L_2 + b_2 L_3) L_3 - b_2 L_1^2 + \Gamma \nu_3, \\
 \dot{L}_3 &= -(a - a_1) L_1 L_2 - (b_1 L_2 + b_2 L_3) L_2 + b_1 L_1^2 - \Gamma \nu_2, \\
 \dot{\nu}_1 &= (a_2 L_3 + b_2 L_1) \nu_2 - (a_1 L_2 + b_1 L_1) \nu_3, \\
 \dot{\nu}_2 &= (a L_1 + b_1 L_2 + b_2 L_3) \nu_3 - (a_2 L_3 + b_2 L_1) \nu_1, \\
 \dot{\nu}_3 &= -(a L_1 + b_1 L_2 + b_2 L_3) \nu_2 + (a_1 L_2 + b_1 L_1) \nu_1.
 \end{aligned} \tag{14.12}$$

В этих уравнениях через ν_1, ν_2, ν_3 обозначены проекции вектора γ на оси специальной системы координат, а $\Gamma = Mg\rho$, где $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Воспользуемся специальными осями П. В. Харламова при исследовании движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса.

15 Уравнения движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса, записанные в специальной системе координат

При рассмотрении задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса переход от главных осей инерции $Ox_1x_2x_3$ (единичные векторы осей обозначим $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) к специальным осям П.В. Харламова $O\eta_1\eta_2\eta_3$ (единичные векторы осей обозначим $\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}$) осуществляется по формулам:

$$\mathbf{e}_I = \mathbf{e}_1 \cos \alpha + \mathbf{e}_2 \sin \alpha, \quad \mathbf{e}_{II} = -\mathbf{e}_1 \sin \alpha + \mathbf{e}_2 \cos \alpha, \quad \mathbf{e}_{III} = \mathbf{e}_3,$$

где значения $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ выбраны равными

$$\cos \alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}. \quad (15.1)$$

Покажем, что единичные базисные векторы $\mathbf{e}_I$, $\mathbf{e}_{II}$, $\mathbf{e}_{III}$ действительно являются базисными векторами специальных осей П. В. Харламова. Заметим, прежде всего, что $x_3 = 0$ в силу условий (13.3), и, значит, единичный вектор $\mathbf{e}_I$ оси $O\eta_1$ действительно коллинеарен вектору $\overrightarrow{OG} = \mathbf{r}$. Теперь убедимся, что кинетическая энергия тела в данном случае представляется в виде (14.10). Для этого представим кинетический момент тела в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= L_1 \mathbf{e}_I + L_2 \mathbf{e}_{II} + L_3 \mathbf{e}_{III} = \\ &= (L_1 \cos \alpha - L_2 \sin \alpha) \mathbf{e}_1 + (L_1 \sin \alpha + L_2 \cos \alpha) \mathbf{e}_2 + L_3 \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (15.2)$$

В главных осях инерции кинетический момент тела имеет вид:

$$\mathbf{K} = K_1 \mathbf{e}_1 + K_2 \mathbf{e}_2 + K_3 \mathbf{e}_3 = A_1 \omega_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \omega_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \omega_3 \mathbf{e}_3, \quad (15.3)$$

а кинетическая энергия записывается следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{K_1^2}{A_1} + \frac{K_2^2}{A_2} + \frac{K_3^2}{A_3} \right). \quad (15.4)$$

Из формул (15.2), (15.3) следует, что компоненты L_1 , L_2 , L_3 вектора кинетического момента относительно базиса $\mathbf{e}_I$, $\mathbf{e}_{II}$, $\mathbf{e}_{III}$ связаны с компонентами K_1 , K_2 , K_3 кинетического момента относительно главных осей инерции формулами:

$$K_1 = L_1 \cos \alpha - L_2 \sin \alpha, \quad K_2 = L_1 \sin \alpha + L_2 \cos \alpha, \quad K_3 = L_3. \quad (15.5)$$

Подставляя формулы (15.5) в выражение (15.4) и учитывая явные выражения (15.1) для $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, получаем следующее выражение для кинетической

энергии тела как квадратичной формы компонент L_1, L_2, L_3 :

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{A_1} + \frac{x_2^2}{A_2} \right) \frac{L_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)} + \frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{A_2} + \frac{x_2^2}{A_1} \right) \frac{L_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{L_3^2}{A_3} + \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1} \right) \frac{x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)} L_1 L_2. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Заметим, что у выражения (15.6) для кинетической энергии твердого тела отсутствуют члены, содержащие произведения $L_1 L_3$ или $L_2 L_3$. Это означает, что кинетическая энергия твердого тела в данном случае имеет вид (14.10), то есть единичные базисные векторы $\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}$ действительно являются базисными векторами специальных осей П. В. Харламова [56, 57]. У выражения (15.6) коэффициенты

$$b_2 = 0, \quad l_{23}^* = 0.$$

Кроме того, в силу условий (13.3), при которых существует интеграл Гесса, имеем:

$$\frac{A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2}{A_1 A_2 (x_1^2 + x_2^2)} = \frac{1}{A_3},$$

откуда следует равенство

$$a_1 = a_2.$$

Таким образом, выражение (15.6) для кинетической энергии тела в случае Гесса кратко может быть записано следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} a L_1^2 + \frac{1}{2} c (L_2^2 + L_3^2) + b L_1 L_2, \quad (15.7)$$

где обозначено

$$a = \frac{A_2 x_1^2 + A_1 x_2^2}{A_1 A_2 (x_1^2 + x_2^2)}, \quad b = \frac{(A_1 - A_2) x_1 x_2}{A_1 A_2 (x_1^2 + x_2^2)}, \quad c = \frac{1}{A_3}.$$

С учетом найденного выражения (15.7) для кинетической энергии, уравнения движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, записанные в форме

уравнений (14.12), имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{L}_1 &= -bL_1L_3, \quad \dot{L}_2 = (a-c)L_1L_2 + bL_2L_3 + \nu_3\Gamma, \\ \dot{L}_3 &= -(a-c)L_1L_2 + bL_1^2 - bL_2^2 - \nu_2\Gamma, \\ \dot{\nu}_1 &= cL_3\nu_2 - (cL_2 + bL_1)\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = -cL_3\nu_1 + (aL_1 + bL_2)\nu_3, \\ \dot{\nu}_3 &= (bL_1 + cL_2)\nu_1 - (aL_1 + bL_2)\nu_2.\end{aligned}\tag{15.8}$$

Чтобы обнаружить дополнительный первый интеграл, существующий в случае Гесса, достаточно рассмотреть только первое уравнение полученной системы (15.8):

$$\dot{L}_1 = -bL_1L_3.$$

В этом уравнении правая часть равна самой переменной L_1 , умноженный на ограниченный по модулю коэффициент $-bL_3$. В связи с этим, если в начальный момент времени величина $L_1 = 0$, то и в любой момент времени окажется, что

$$L_1 \equiv 0.\tag{15.9}$$

Инвариантное многообразие (15.9) (или, в других обозначениях, (13.4)) вместе с условиями (13.3) и определяет случай Гесса. При выполнении всех этих условий уравнения (15.8) заметно упрощаются и принимают вид:

$$\dot{L}_2 = bL_2L_3 + \nu_3\Gamma, \quad \dot{L}_3 = -bL_2^2 - \nu_2\Gamma,\tag{15.10}$$

$$\dot{\nu}_1 = cL_3\nu_2 - cL_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = bL_2\nu_3 - cL_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = cL_2\nu_1 - bL_2\nu_2.$$

Система уравнений (15.10) допускает следующие первые интегралы:

$$\frac{c}{2}(L_2^2 + L_3^2) + \Gamma\nu_1 = E; \quad L_2\nu_2 + L_3\nu_3 = k; \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1.\tag{15.11}$$

Заметим, что случай $b = 0$ соответствует интегрируемому случаю Лагранжа.

16 Обезразмеривание уравнений. Приведение к одному уравнению второго порядка

Приведем теперь систему уравнений (15.10) и первые интегралы (15.11) к безразмерному виду. Для этого введем безразмерные компоненты момента

$$L_2 = \sqrt{\frac{\Gamma}{c}}y, \quad L_3 = \sqrt{\frac{\Gamma}{c}}z,$$

а также безразмерное время

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{\Gamma c}}$$

и параметр

$$d_1 = \frac{b}{c}.$$

Введем также безразмерные постоянные первых интегралов

$$h = \frac{E}{\Gamma}, \quad k_1 = k\sqrt{\frac{c}{\Gamma}}.$$

Тогда система уравнений (15.10) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= d_1 y z + \nu_3, & \frac{dz}{d\tau} &= -d_1 y^2 - \nu_2, \\ \frac{d\nu_1}{d\tau} &= z\nu_2 - y\nu_3, & \frac{d\nu_2}{d\tau} &= d_1 y\nu_3 - z\nu_1, & \frac{d\nu_3}{d\tau} &= y\nu_1 - d_1 y\nu_2. \end{aligned} \tag{16.1}$$

Система уравнений (16.1) допускает следующие первые интегралы:

$$\frac{y^2 + z^2}{2} + \nu_1 = h, \quad y\nu_2 + z\nu_3 = k_1, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \tag{16.2}$$

Объектом дальнейшего исследования является система уравнений (16.1) совместно с первыми интегралами (16.2). Но прежде чем исследовать данную си-

стему уравнений, рассмотрим вопрос о том, в каких пределах изменяются параметры d_1 , h , k_1 . Легко видеть, что параметр k_1 изменяется в бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$. Поскольку выражение $y^2 + z^2$ является неотрицательным, то для параметра h должно выполняться неравенство

$$h - \nu_1 \geq 0, \quad \text{то есть} \quad h \geq \nu_1.$$

Минимальное значение, которое может принимать компонента ν_1 вектора $\boldsymbol{\nu}$, равно -1 . Следовательно, параметр h изменяется в пределах

$$h \in [-1, +\infty).$$

Параметр d_1 может быть представлен в виде:

$$d_1 = \frac{b}{c} = \frac{(A_1 - A_2) x_1 x_2}{(A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2)}.$$

Заметим прежде всего, что в силу условий (13.3) параметр $d_1 < 0$. Преобразуем выражение для d_1 следующим образом:

$$d_1 = \frac{(A_1 - A_2) x_1 x_2}{(A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2)} = \frac{(A_1 - A_2) \frac{x_1}{x_2}}{\left(A_1 \frac{x_1^2}{x_2^2} + A_2\right)}. \quad (16.3)$$

Из условий (13.3), при которых существует интеграл Гесса, находим

$$\frac{x_1^2}{x_2^2} = \frac{A_2 (A_3 - A_1)}{A_1 (A_2 - A_3)}, \quad \text{то есть} \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{\sqrt{A_2 (A_3 - A_1)}}{\sqrt{A_1 (A_2 - A_3)}}.$$

Подставляя данное выражение в формулу (16.3), находим, что

$$d_1 = -\sqrt{\frac{(A_2 - A_3)(A_3 - A_1)}{A_1 A_2}}, \quad \text{то есть} \quad d_1^2 = \frac{(A_2 - A_3)(A_3 - A_1)}{A_1 A_2}.$$

Поскольку для моментов инерции твердого тела выполняются неравенства треугольника

$$\begin{aligned} A_1 + A_3 > A_2, \quad \text{то есть} \quad \frac{A_2 - A_3}{A_1} < 1, \\ A_1 + A_2 > A_3, \quad \text{то есть} \quad \frac{A_3 - A_1}{A_2} < 1, \end{aligned}$$

то с учетом этих неравенств получаем

$$d_1^2 = \frac{(A_2 - A_3)}{A_1} \cdot \frac{(A_3 - A_1)}{A_2} < 1.$$

С учетом ограничения $d_1 \leq 0$ окончательно получаем, что параметр d_1 изменяется в пределах

$$d_1 \in (-1, 0].$$

Теперь продолжим исследование полученной системы уравнений (16.1) совместно с интегралами (16.2). Умножая первое уравнение системы (16.1) на y , а второе – на z и складывая, получаем:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{y^2 + z^2}{2} \right) = y\nu_3 - z\nu_2. \quad (16.4)$$

Используя тождество

$$(y^2 + z^2) (\nu_2^2 + \nu_3^2) = (y\nu_2 + z\nu_3)^2 + (y\nu_3 - z\nu_2)^2,$$

из первого из интегралов (16.2) находим:

$$\nu_1 = h - \frac{y^2 + z^2}{2},$$

откуда

$$\nu_2^2 + \nu_3^2 = 1 - \left(h - \frac{y^2 + z^2}{2} \right)^2 = 1 - \left(\frac{y^2 + z^2}{2} - h \right)^2, \quad y\nu_2 + z\nu_3 = k_1.$$

Окончательно, получаем

$$(y\nu_3 - z\nu_2)^2 = (y^2 + z^2) \left(1 - \left(\frac{y^2 + z^2}{2} - h \right)^2 \right) - k_1^2.$$

Будем считать, что

$$y\nu_3 - z\nu_2 = -\sqrt{(y^2 + z^2) \left(1 - \left(\frac{y^2 + z^2}{2} - h \right)^2 \right) - k_1^2} \quad (16.5)$$

(знак перед корнем выражения, стоящего в правой части равенства (16.5), может быть выбран любым). С учетом равенства (16.5) уравнение (16.4) принимает вид:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{y^2 + z^2}{2} \right) = -\sqrt{(y^2 + z^2) \left[1 - \left(\frac{y^2 + z^2}{2} - h \right)^2 \right] - k_1^2}.$$

Умножим теперь первое уравнение системы (16.1) на z , а второе – на y и вычтем из второго уравнения первое. Получаем:

$$y \frac{dz}{d\tau} - z \frac{dy}{d\tau} = -d_1 y (y^2 + z^2) - k_1.$$

Введем теперь полярные координаты x и φ по формулам:

$$y = x \cos \varphi, \quad z = x \sin \varphi.$$

Тогда для определения величин x и φ мы получаем следующую систему двух дифференциальных уравнений

$$x \frac{dx}{d\tau} = -\sqrt{x^2 \left[1 - \left(\frac{x^2}{2} - h \right)^2 \right] - k_1^2}, \quad x^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = -d_1 x^3 \cos \varphi - k_1. \quad (16.6)$$

Из этой системы находим зависимость $\varphi = \varphi(x)$, которая определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d_1 x^3 \cos \varphi + k_1}{x \sqrt{x^2 \left[1 - \left(\frac{x^2}{2} - h \right)^2 \right] - k_1^2}}. \quad (16.7)$$

Заметим, что при переходе от системы (16.6) к уравнению (16.7) мы исключаем из рассмотрения случай $x = \text{const}$, то есть $y^2 + z^2 = \text{const}$ или $\nu_1 = \text{const}$. Между тем, у тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса существуют стационарные движения, для которых $\nu_1 = \nu_1^0 = \text{const}$ (см., например, работу [53]).

При помощи замены

$$w = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

уравнение (16.7) приводится к уравнению Риккати:

$$\frac{dw}{dx} + \frac{(d_1 x^3 - k_1) w^2 - d_1 x^3 - k_1}{2x \sqrt{x^2 \left[1 - \left(\frac{x^2}{2} - h \right)^2 \right] - k_1^2}} = 0,$$

или, по-другому,

$$\frac{dw}{dx} = - \frac{d_1 x^3 - k_1}{2x \sqrt{x^2 \left[1 - \left(\frac{x^2}{2} - h \right)^2 \right] - k_1^2}} w^2 + \frac{d_1 x^3 + k_1}{2x \sqrt{x^2 \left[1 - \left(\frac{x^2}{2} - h \right)^2 \right] - k_1^2}}.$$

Из общей теории дифференциальных уравнений известно [24], что если общее уравнение Риккати имеет вид:

$$\frac{dw}{dx} = f_2(x) w^2 + f_0(x),$$

то замена переменных

$$u(x) = \exp \left(- \int f_2(x) w(x) dx \right)$$

приводит уравнение Риккати к линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$f_2 \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{df_2}{dx} \frac{du}{dx} + f_0 f_2^2 u = 0 \quad (16.8)$$

или, если разделить на f_2 :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{1}{f_2} \frac{df_2}{dx} \frac{du}{dx} + f_0 f_2 u = 0. \quad (16.9)$$

В нашем случае

$$f_2 = - \frac{d_1 x^3 - k_1}{2x \sqrt{x^2 \left[1 - \left(\frac{x^2}{2} - h \right)^2 \right] - k_1^2}}, \quad f_0 = \frac{d_1 x^3 + k_1}{2x \sqrt{x^2 \left[1 - \left(\frac{x^2}{2} - h \right)^2 \right] - k_1^2}}.$$

Заметим, что переход от уравнения (16.8) к уравнению (16.9) возможен только в том случае, когда $f_2 \neq 0$. Условие $f_2 = 0$ с учётом того, что $x \neq \text{const}$, равносильно одновременному выполнению условий

$$d_1 = 0, \quad k_1 = 0. \quad (16.10)$$

При выполнении условий (16.10) уравнение (16.7) дает $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$. Можно показать (см. параграф 26), что при выполнении условий (16.10) тяжелое твердое тело с неподвижной точкой в случае Гесса будет совершать маятниковые нутационные колебания. В дальнейшем будем считать, что $f_2 \neq 0$. Окончательно, дифференциальное уравнение второго порядка, к решению которого сводится решение задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной

точкой в случае Гесса, имеет вид:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + a(x) \frac{du}{dx} + b(x) u = 0, \quad (16.11)$$

$$a(x) = \frac{d_1 x^9 - 4k_1 x^6 - 4d_1 (h^2 - 1) x^5 + 12k_1 h x^4 - 8k_1^2 d_1 x^3 - 8k_1 (h^2 - 1) x^2 - 4k_1^3}{x (x^6 - 4h x^4 + 4(h^2 - 1) x^2 + 4k_1^2) (d_1 x^3 - k_1)},$$

$$b(x) = \frac{(d_1 x^3 + k_1) (d_1 x^3 - k_1)}{x^2 (x^6 - 4h x^4 + 4(h^2 - 1) x^2 + 4k_1^2)}.$$

Таким образом, решение задачи о движении тяжелого тела с неподвижной точкой в случае Гесса сводится к исследованию уравнения второго порядка (16.11), коэффициенты которого имеют вид рациональных функций. Следовательно, можно поставить задачу о существовании лиувиллевых решений у данного дифференциального уравнения. Чтобы решить эту задачу, можно воспользоваться алгоритмом Ковачича. Результаты применения алгоритма к уравнению (16.11) описываются далее.

17 Применение алгоритма Ковачича. Общий случай

Итак, исследуемое уравнение имеет вид (16.11). Сделаем в этом уравнении замену переменной (1.2) и приведем его к виду (1.3):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = R(x) y. \quad (17.1)$$

В данном случае функция $R(x)$ имеет вид:

$$R(x) = \frac{U(x)}{V(x)}, \quad (17.2)$$

$$\begin{aligned}
U(x) = & - (1 + 4d_1^2) d_1^2 x^{16} + 8 (2d_1^2 - 1) d_1^2 h x^{14} + 4 (2d_1^2 + 5) d_1 k_1 x^{13} - \\
& - 8 (2d_1^2 - 7) (h^2 - 1) d_1^2 x^{12} - 8 (4d_1^2 + 19) d_1 k_1 h x^{11} + \\
& + 8 ((1 + 17d_1^2 - 2d_1^4) k_1^2 - 12 (h^2 - 1) d_1^2 h) x^{10} + 576 (h^2 - 1) k_1^3 d_1 x^3 + \\
& + 16 (2 (h^2 - 1) d_1^2 + 29h^2 - 5) d_1 k_1 x^9 - 240 k_1^4 h x^2 + \\
& + 8 (6 (h^2 - 1)^2 d_1^2 - (7 + 40d_1^2) k_1^2 h) x^8 + 288 k_1^5 d_1 x + \\
& + 32 ((d_1^2 - 2) k_1^2 - 21 (h^2 - 1) h) d_1 k_1 x^7 + 48 (h^2 - 1) k_1^4 + \\
& + 16 (14 (h^2 - 1) d_1^2 + 8h^2 - 5) k_1^2 x^6 + 96 (4 (h^2 - 1)^2 - 3k_1^2 h) d_1 k_1 x^5 + \\
& + 4 ((32d_1^2 + 35) k_1^2 - 24 (h^2 - 1) h) k_1^2 x^4.
\end{aligned}$$

$$V(x) = 4 (d_1 x^3 - k_1)^2 (x^6 - 4h x^4 + 4 (h^2 - 1) x^2 + 4k_1^2)^2.$$

Таким образом, легко видеть, что функция $R(x)$ имеет девять конечных полюсов, и все эти полюса являются полюсами второго порядка. Обозначим корни многочлена шестой степени

$$x^6 - 4h x^4 + 4 (h^2 - 1) x^2 + 4k_1^2 = 0 \quad (17.3)$$

через $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Заметим, что в данный многочлен входят только четные степени независимой переменной, вследствие чего его корни удовлетворяют условиям:

$$x_2 = -x_1, \quad x_4 = -x_3, \quad x_6 = -x_5.$$

Корни многочлена третьей степени

$$d_1 x^3 - k_1 = 0 \quad (17.4)$$

обозначим через x_7, x_8, x_9 . Разложим функцию $R(x)$ в сумму простейших дробей. Это разложение имеет вид:

$$R(x) = -\frac{3}{16} \sum_{i=1}^6 \frac{1}{(x-x_i)^2} + \sum_{i=1}^9 \frac{\gamma_i(x_i)}{x-x_i} + \frac{3}{4} \sum_{i=7}^9 \frac{1}{(x-x_i)^2}.$$

Коэффициенты $\gamma_i(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, 9$ имеют довольно громоздкий вид и не выписаны здесь явно. Можно отметить следующие особенности разложения функции $R(x)$ в сумму простейших дробей.

1. Коэффициенты $b_1, \dots, b_6$ при выражениях $\frac{b_i}{(x-x_i)^2}$, $i = 1, \dots, 6$ все одинаковы и равны

$$b_i = -\frac{3}{16}, \quad i = 1, \dots, 6.$$

2. Коэффициенты b_7, b_8, b_9 при $\frac{b_i}{(x-x_i)^2}$, $i = 7, 8, 9$ все одинаковы и равны

$$b_i = \frac{3}{4}, \quad i = 7, 8, 9.$$

3. Разложение функции $R(x)$ в ряд в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид:

$$R(x) = -\frac{(1+4d_1^2)}{4x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

Таким образом, имеем:

$$b_\infty = -\frac{1}{4} - d_1^2,$$

и потому

$$1 + 4b_\infty = -4d_1^2$$

Таким образом, коэффициенты $\alpha_{\infty}^{\pm}$, вычисляемые в процессе применения алгоритма Ковачича для поиска лиувиллевых решений вида (2.1), то есть решений, соответствующих Случаю 1 Теоремы 2.1, являются комплексными числами, если $d_1 \neq 0$. Все остальные коэффициенты $\alpha_c^{\pm}$ являются рациональными числами. Их вид приведен в следующей таблице.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
α_c^+	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
α_c^-	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Таким образом, число d , вычисляемое по формуле (3.2) в процессе поиска лиувиллевых решений вида (2.1), является при $d_1 \neq 0$ комплексным числом, что говорит об отсутствии лиувиллевых решений вида (2.1) при $d_1 \neq 0$. Кроме того, коэффициент b_{∞} совпадает с выражением γ , вычисляемым при проверке необходимых условий существования лиувиллевых решений вида (2.10), то есть решений, соответствующих Случаю 3 Теоремы 2.1, уравнения (1.3). В соответствии с необходимыми условиями, для существования лиувиллевых решений вида (2.10) выражение

$$\sqrt{1 + 4\gamma} = \sqrt{1 + 4b_{\infty}}$$

должно быть рациональным числом. Но при $d_1 \neq 0$ это число является чисто мнимым. Следовательно, можно сделать вывод, что при $d_1 \neq 0$ линейное дифференциальное уравнение (17.1) (или (16.11)) не допускает лиувиллевых решений вида (2.10), то есть решений, соответствующих Случаю 3 Теоремы 2.1. Окончательно, можно сделать следующий вывод.

Теорема 17.1. *Если все корни многочленов (17.3) и (17.4) различны, и $d_1 \neq 0$, то в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса не существует лиувиллевых решений вида (2.1) и вида (2.10). $\square$*

Чтобы окончательно ответить на вопрос, могут ли у дифференциального уравнения (17.1) существовать лиувиллевы решения вида (2.1) и вида (2.10), рассмотрим это дифференциальное уравнение при $d_1 = 0$.

18 Исследование случая Лагранжа

В случае $d_1 = 0$ уравнение (16.11) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} + a(x) \frac{du}{dx} + b(x) u &= 0, \\ a(x) &= \frac{4(x^6 - 3hx^4 + 2(h^2 - 1)x^2 + k_1^2)}{x(x^6 - 4hx^4 + 4(h^2 - 1)x^2 + 4k_1^2)}, \\ b(x) &= -\frac{k_1^2}{x^2(x^6 - 4hx^4 + 4(h^2 - 1)x^2 + 4k_1^2)}. \end{aligned} \quad (18.1)$$

Мы полагаем, что в уравнении (18.1) должно быть $k_1 \neq 0$. В противном случае выполняются условия (16.10) и невозможно из уравнения (16.7) получить линейное уравнение второго порядка (16.11), из которого при $d_1 = 0$ получается (18.1).

Сделаем в уравнении (18.1) замену независимой переменной по формуле $x^2 = z$. В результате уравнение (18.1) перепишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dz^2} + a(z) \frac{du}{dz} + b(z) u &= 0, \\ a(z) &= \frac{5z^3 - 16hz^2 + 12(h^2 - 1)z + 8k_1^2}{2z(z^3 - 4hz^2 + 4(h^2 - 1)z + 4k_1^2)}, \\ b(z) &= -\frac{k_1^2}{4z(z^3 - 4hz^2 + 4(h^2 - 1)z + 4k_1^2)}. \end{aligned} \quad (18.2)$$

Сделаем в полученном уравнении (18.2) замену переменной (1.2) и приведем его к виду (1.3):

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = R(z) y = \frac{U_1(z)}{V_1(z)} y, \quad (18.3)$$

$$\begin{aligned} U_1(z) &= 5z^6 - 32hz^5 + 56(h^2 - 1)z^4 + 116k_1^2 z^3 - \\ &- 48\left((h^2 - 1)^2 + 3hk_1^2\right)z^2 - 48(h^2 - 1)k_1^2 z - 48k_1^4, \\ V_1(z) &= 16z^2(z^3 - 4hz^2 + 4(h^2 - 1)z + 4k_1^2)^2. \end{aligned}$$

Легко видеть, что функция $R(z)$ имеет четыре конечных полюса второго порядка. Обозначим корни многочлена

$$P_3(z) = z^3 - 4hz^2 + 4(h^2 - 1)z + 4k_1^2$$

через z_1, z_2, z_3 . Будем считать, что z_1, z_2, z_3 не равны между собой (возможность кратных корней рассматривается далее, в пункте 22). Разложим функцию $R(z)$ в сумму простейших дробей. Это разложение имеет вид

$$\begin{aligned} R(z) &= -\frac{3}{16z^2} + \frac{3(h^2 - 1)}{16k_1^2 z} - \frac{3}{16} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(z - z_i)^2} + \sum_{i=1}^3 \frac{\gamma_i(z_i)}{z - z_i}, \\ \gamma_i(z_i) &= -\frac{\left(153k_1^4 + 32hk_1^2(h^2 - 10) - 48(h^2 - 1)^2\right)z_i^2}{64k_1^2\left(27k_1^4 + 8k_1^2h(h^2 - 9) - 16(h^2 - 1)^2\right)} + \\ &+ \frac{\left(33hk_1^4 + (7h^4 - 75h^2 - 4)k_1^2 - 12h(h^2 - 1)^2\right)z_i}{4k_1^2\left(27k_1^4 + 8k_1^2h(h^2 - 9) - 16(h^2 - 1)^2\right)} - \\ &- \frac{(101h^2 - 129)k_1^4 + 24k_1^2h(h^2 - 1)(h^2 - 11) - 48(h^2 - 1)^3}{16k_1^2\left(27k_1^4 + 8k_1^2h(h^2 - 9) - 16(h^2 - 1)^2\right)}. \end{aligned}$$

Можно отметить следующие особенности разложения функции $R(z)$ в сумму простейших дробей.

1. Коэффициент b_0 при выражении $\frac{b_0}{z^2}$ равен

$$b_0 = -\frac{3}{16}.$$

2. Коэффициенты b_1, b_2, b_3 при выражениях $\frac{b_i}{(z - z_i)^2}$, $i = 1, 2, 3$ все одинаковы и равны

$$b_i = -\frac{3}{16}, \quad i = 1, 2, 3.$$

3. Разложение функции $R(z)$ в ряд в окрестности точки $z = \infty$ имеет вид:

$$R(z) = \frac{5}{16z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right).$$

Наша цель заключается в том, чтобы понять, имеет ли в этом случае дифференциальное уравнение (18.3) лиувиллево решение вида (2.1), или вида (2.6) или вида (2.10). Обратимся к вопросу о существовании у дифференциального уравнения (18.3) лиувиллевых решений вида (2.1), то есть решений, соответствующих Случаю 1 Теоремы 2.1. Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска решения вида (2.1) уравнения (18.3) так, как он описан в пункте 3.1.

Шаг 1. В соответствии с алгоритмом Ковачича, вычислим постоянные $\alpha_c^\pm$. Для всех конечных полюсов $z = 0$ и $z = z_i$, $i = 1, 2, 3$ имеем:

$$\alpha_0^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_0^- = \frac{1}{4}; \quad \alpha_{z_i}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{z_i}^- = \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (18.4)$$

Значения $\alpha_\infty^\pm$ оказываются равными

$$\alpha_\infty^+ = \frac{5}{4}, \quad \alpha_\infty^- = -\frac{1}{4}. \quad (18.5)$$

Шаг 2. Поскольку постоянные $\alpha_0^\pm$, $\alpha_{z_i}^\pm$, $i = 1, 2, 3$ принимают значения (18.4), а постоянные $\alpha_\infty^\pm$ принимают значения (18.5), следовательно, не существует такого набора знаков "плюс" или "минус", для которого постоянная d , вычисляемая по формуле (3.2), принимала бы целые неотрицательные значения. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 18.1. *В задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса при $d_1 = 0$ и $k_1 \neq 0$ не существует лиувиллевых решений вида (2.1), то есть решений, соответствующих Случаю 1 Теоремы 2.1.*

□

Продолжим исследование вопроса о существовании лиувиллевых решений в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса при условии $d_1 = 0$, то есть в задаче о движении волчка Лагранжа, когда соответствующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид (18.3), и все корни многочлена $P_3(z)$ различны. Попытаемся найти у уравнения (18.3) решение вида (2.6), то есть решение, соответствующее Случаю 2 Теоремы 2.1. Необходимые условия существования такого решения у уравнения (18.3) являются выполненными (см. Теорему 2.4). Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 2 так, как он описан в пункте 3.4.

Шаг 1. Найдем сначала множества чисел E_0 , E_{z_i} , $i = 1, 2, 3$, соответствующие конечным полюсам функции $R(z)$, и множество E_∞ , соответствующее полюсу в точке $z = \infty$. Для конечных полюсов $z = 0$, $z = z_i$, $i = 1, 2, 3$, множества E_0 , E_{z_i} оказываются равными

$$E_0 = \{1, 2, 3\}, \quad E_{z_i} = \{1, 2, 3\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Множество E_∞ имеет в данном случае вид:

$$E_\infty = \{-1, 2, 5\}.$$

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные наборы

$$s = (e_\infty, e_0, e_{z_1}, e_{z_2}, e_{z_3})$$

элементов множеств $E_\infty, E_0, E_{z_1}, E_{z_2}, E_{z_3}$, причем в каждом наборе хотя бы одно из чисел обязательно должно быть нечетным. Вычислим величину d для каждого набора s по формуле (3.11):

$$d = \frac{1}{2} (e_\infty - e_0 - e_{z_1} - e_{z_2} - e_{z_3}).$$

В соответствии с алгоритмом число d должно быть неотрицательным целым числом. Заметим, что минимальное значение суммы элементов множеств, соответствующих конечным полюсам, равно 4. Поэтому у нас имеется всего четыре набора, для которых постоянная d , вычисляемая по формуле (3.11), будет неотрицательным целым числом. Это наборы

$$s_1 = (5, 2, 1, 1, 1), \quad s_2 = (5, 1, 2, 1, 1), \quad s_3 = (5, 1, 1, 2, 1), \quad s_4 = (5, 1, 1, 1, 2),$$

для каждого из которых мы имеем $d = 0$. Все эти наборы нуждаются в проверке.

Шаг 3. Начнем с проверки набора s_1 . По формуле (3.12) сформируем функцию θ . Поскольку коэффициенты при конечных полюсах $z = z_i, i = 1, 2, 3$ одинаковы, то нам удастся записать функцию θ в явном виде. Для набора s_1 она оказывается равной:

$$\theta = \frac{1}{z} + \frac{3z^2 - 8hz + 4(h^2 - 1)}{2(z^3 - 4hz^2 + 4(h^2 - 1)z + 4k_1^2)}.$$

Многочлен P нулевой степени, то есть $P \equiv 1$, должен тождественно удовлетворять уравнению (3.13). После подстановки многочлена P и функции θ в левую часть уравнения (3.13), мы убеждаемся, что это уравнение удовлетворяется тождественно при любых значениях параметров h и k_1 . Окончательно,

можно сформулировать следующий результат.

Теорема 18.2. *В случае движения волчка Лагранжа $d_1 = 0$ при выполнении условий Гесса и при условии $k_1 \neq 0$ все решения дифференциального уравнения (18.1) являются лиувиллевыми решениями вида (2.6), то есть решениями, соответствующими Случаю 2 Теоремы 2.1. $\square$*

Действительно, общее решение уравнения (18.1) можно записать следующим образом:

$$u(x) = C_1 \exp \left(\int \frac{k_1 dx}{x \sqrt{x^6 - 4hx^4 + 4(h^2 - 1)x^2 + 4k_1^2}} \right) + \\ + C_2 \exp \left(- \int \frac{k_1 dx}{x \sqrt{x^6 - 4hx^4 + 4(h^2 - 1)x^2 + 4k_1^2}} \right).$$

Проверка других наборов s_2, s_3, s_4 дает те же выводы о существовании лиувиллевых решений вида (2.6) у дифференциального уравнения (18.3).

Вернемся теперь к вопросу о существовании лиувиллевых решений у дифференциального уравнения (17.1) в общем случае, когда $d_1 \neq 0$.

19 Существование лиувиллевых решений в общем случае

Итак, обратимся теперь к вопросу о существовании у дифференциального уравнения (16.11) (или (17.1)) лиувиллевых решений вида (2.6), то есть решений, соответствующих Случаю 2 Теоремы 2.1. Необходимые условия существования такого решения у уравнения (17.1) являются выполненными (см. Теорему 2.1). Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 2 так, как он описан в пункте 3.4.

Шаг 1. В соответствии с алгоритмом, найдем сначала множества E_c и E_∞ для каждого полюса функции $R(x)$. Для конечных полюсов $x = x_i, i = 1, \dots, 6$,

являющихся корнями многочлена (17.3), множества E_{x_i} оказываются равными

$$E_{x_i} = \{1, 2, 3\}, \quad i = 1, \dots, 6,$$

а для конечных полюсов $x = x_i$, $i = 7, 8, 9$, являющихся корнями многочлена (17.4), множества E_{x_i} оказываются равными

$$E_{x_i} = \{-2, 2, 6\}, \quad i = 7, 8, 9.$$

Множество E_∞ состоит всего лишь из одного элемента и равно

$$E_\infty = \{2\}.$$

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные наборы

$$s = (e_\infty, e_{x_1}, e_{x_2}, e_{x_3}, e_{x_4}, e_{x_5}, e_{x_6}, e_{x_7}, e_{x_8}, e_{x_9})$$

элементов множеств E_∞ , E_{x_i} , $i = 1, \dots, 9$, причем в каждом наборе хотя бы одно из чисел обязательно должно быть нечетным. Вычислим величину d для каждого набора s по формуле (3.11):

$$d = \frac{1}{2} (e_\infty - e_{x_1} - e_{x_2} - e_{x_3} - e_{x_4} - e_{x_5} - e_{x_6} - e_{x_7} - e_{x_8} - e_{x_9}).$$

В соответствии с алгоритмом число d должно быть неотрицательным целым числом. Заметим, что минимальное значение суммы элементов множеств, соответствующих конечным полюсам, равно нулю. Поэтому максимальное значение постоянной d , вычисляемой по формуле (3.11), оказывается равным $d = 1$. Значению $d = 1$ соответствует набор, в котором элементы e_∞ и e_i , $i = 1, 2, \dots, 9$ равны

$$s_1 = (2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2).$$

Кроме того, у нас имеется некоторое число наборов, для которых постоянная d , вычисляемая по формуле (3.11), оказывается равной нулю. Такими, в частности, являются наборы:

$$s_2 = (2, 3, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2), \quad s_3 = (2, 1, 3, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2),$$

$$s_4 = (2, 1, 1, 3, 1, 1, 1, -2, -2, -2), \quad s_5 = (2, 1, 1, 1, 3, 1, 1, -2, -2, -2),$$

$$s_6 = (2, 1, 1, 1, 1, 3, 1, -2, -2, -2), \quad s_7 = (2, 1, 1, 1, 1, 1, 3, -2, -2, -2),$$

$$s_8 = (2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2), \quad s_9 = (2, 2, 1, 2, 1, 1, 1, -2, -2, -2),$$

$$s_{10} = (2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, -2, -2, -2), \quad s_{11} = (2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, -2, -2, -2),$$

$$s_{12} = (2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, -2, -2, -2), \quad s_{13} = (2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, -2, -2, -2),$$

$$s_{14} = (2, 1, 2, 1, 2, 1, 1, -2, -2, -2), \quad s_{15} = (2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, -2, -2, -2),$$

$$s_{16} = (2, 1, 2, 1, 1, 1, 2, -2, -2, -2), \quad s_{17} = (2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, -2, -2, -2),$$

$$s_{18} = (2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, -2, -2, -2), \quad s_{19} = (2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, -2, -2, -2),$$

$$s_{20} = (2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, -2, -2, -2), \quad s_{21} = (2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, -2, -2, -2),$$

$$s_{22} = (2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, -2, -2, -2).$$

Все эти наборы нуждаются в проверке.

Шаг 3. Начнем с проверки набора s_1 . По формуле (3.12) сформируем функцию θ . Поскольку коэффициенты при всех конечных полюсах $x = x_i$, $i = 1, 2, \dots, 6$ одинаковы, и коэффициенты при всех полюсах $x = x_i$, $i = 7, 8, 9$

одинаковы, то нам удастся записать функцию θ в явном виде. Для набора s_1 она равна

$$\theta = \frac{3x^5 - 8hx^3 + 4(h^2 - 1)x}{x^6 - 4hx^4 + 4(h^2 - 1)x^2 + 4k_1^2} - \frac{3d_1x^2}{d_1x^3 - k_1}.$$

Искомый полином P имеет вид:

$$P = x + B.$$

Чтобы определить коэффициент B многочлена P воспользуемся уравнением (3.13). После подстановки многочлена P и функции θ в левую часть уравнения (3.13), мы получаем в левой части этого уравнения рациональное выражение. В числителе этого выражения стоит многочлен девятой степени, старший коэффициент которого имеет вид:

$$P_9 = -Bd_1^2(1 + 4d_1^2)x^9 + \dots$$

Положим коэффициент B равным нулю. Тогда многочлен в числителе рационального выражения в левой части (3.13) примет вид

$$P_7 = -12xk_1d_1(d_1x^3 - k_1)^2 + \dots$$

Таким образом, на основе проверки набора s_1 можно сделать следующий вывод о существовании лиувиллевых решений вида (2.6) в случае Гесса.

Теорема 19.1. *Лиувиллевы решения вида (2.6), то есть решения, соответствующие Случаю 2 Теоремы 2.1, в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса существуют, если выполнено одно из двух условий*

$$d_1 = 0 \quad \text{или} \quad k_1 = 0.$$

Другими словами, лиувиллевы решения вида (2.6) могут существовать либо в случае Лагранжа, либо в случае Гесса, если проекция кинетического мо-

мента тела на вертикаль равна нулю. $\square$

Заметим, что факт разрешимости дифференциального уравнения (16.11) в эллиптических функциях (являющихся лиувиллевыми функциями) при выполнении условия $k_1 = 0$ был отмечен впервые в работах П.А. Некрасова [51, 52].

Для доказательства Теоремы 19.1 нам следует проверить все наборы $s_2, \dots, s_{22}$, а также рассмотреть различные критические случаи, о которых речь пойдет далее, в пунктах 22 – 25. Начнем с проверки наборов $s_2, \dots, s_7$. Для набора s_2 функция θ , вычисляемая по формуле (3.12), имеет вид:

$$\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{x-y_1} + \frac{1}{x+y_1} + \frac{1}{x-y_2} + \frac{1}{x+y_2} + \frac{1}{x-iy_3} + \frac{1}{x+iy_3} \right) - \frac{3d_1x^2}{d_1x^3 - k_1}.$$

Преобразуем выражение для функции θ . Его можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x-y_1} + \frac{1}{x+y_1} + \frac{1}{x-y_2} + \frac{1}{x+y_2} + \frac{1}{x-iy_3} + \frac{1}{x+iy_3} \right] + \\ &+ \frac{1}{x-y_1} - \frac{3d_1x^2}{d_1x^3 - k_1}. \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x-y_1} + \frac{1}{x+y_1} + \frac{1}{x-y_2} + \frac{1}{x+y_2} + \frac{1}{x-iy_3} + \frac{1}{x+iy_3} = \\ &= \frac{2x(3x^4 - 8hx^2 + 4(h^2 - 1))}{x^6 - 4hx^4 + 4(h^2 - 1)x^2 + 4k_1^2}. \end{aligned}$$

Окончательно, мы можем записать функцию θ следующим образом:

$$\theta = \frac{3x^5 - 8hx^3 + 4(h^2 - 1)x}{x^6 - 4hx^4 + 4(h^2 - 1)x^2 + 4k_1^2} + \frac{1}{x-y_1} - \frac{3d_1x^2}{d_1x^3 - k_1}.$$

Многочлен P степени $d = 0$ имеет вид $P \equiv 1$. Подстановка данного многочлена P и функции θ в уравнение (3.13) дает в левой части этого уравнения рациональное выражение, в числителе которого стоит многочлен девятой степени относительно x , старший коэффициент которого равен

$$P_9 = y_1 d_1^2 (1 + 4d_1^2) x^9 + \dots$$

Если положить $y_1 = 0$ и, следовательно, $k_1 = 0$ (так как условие $y_1 = 0$ означает, что у многочлена (17.3) имеется нулевой корень), то многочлен P_9 обратится в ноль. Таким образом, набор s_2 дает те же условия, что и набор s_1 . Эти условия сформулированы в Теореме 19.1. Аналогично проверяются все остальные наборы $s_3, \dots, s_7$.

Проверим теперь набор s_8 . Для набора s_8 функция θ , вычисляемая по формуле (3.12), имеет вид:

$$\theta = \frac{1}{x - y_1} + \frac{1}{x + y_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - y_2} + \frac{1}{x + y_2} + \frac{1}{x - iy_3} + \frac{1}{x + iy_3} \right) - \frac{3d_1 x^2}{d_1 x^3 - k_1}.$$

Перепишем эту функцию в виде

$$\begin{aligned} \theta = & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - y_1} + \frac{1}{x + y_1} + \frac{1}{x - y_2} + \frac{1}{x + y_2} + \frac{1}{x - iy_3} + \frac{1}{x + iy_3} \right) + \\ & + \frac{1}{2(x - y_1)} + \frac{1}{2(x + y_1)} - \frac{3d_1 x^2}{d_1 x^3 - k_1}. \end{aligned}$$

Последнее выражение может быть переписано следующим образом:

$$\theta = \frac{3x^5 - 8hx^3 + 4(h^2 - 1)x}{x^6 - 4hx^4 + 4(h^2 - 1)x^2 + 4k_1^2} - \frac{3d_1 x^2}{d_1 x^3 - k_1} + \frac{x}{x^2 - y_1^2}.$$

Многочлен P степени $d = 0$ имеет вид $P \equiv 1$. Подстановка данного многочлена P и функции θ в уравнение (3.13) дает в левой части этого уравнения рациональное выражение, в числителе которого стоит многочлен тринадцатой

степени относительно x , и его старший коэффициент равен

$$P_{13} = 4y_1^2 d_1^2 (1 + d_1^2) x^{13} + \dots$$

Полагая $y_1 = 0$ и $k_1 = 0$ убеждаемся, что данный многочлен обращается в ноль. Таким образом, набор s_8 дает те же условия, что и набор s_1 . Эти условия сформулированы в Теореме 19.1. Аналогично проверяются все остальные наборы $s_9, \dots, s_{22}$.

Окончательно можно сделать вывод, что необходимые условия существования лиувиллевых решений вида (2.6) уравнения (17.1), сформулированные в Теореме 19.1, являются также и достаточными. Для подтверждения полученных результатов ниже алгоритм Ковачича применяется в случае, когда $k_1 = 0$.

20 Существование лиувиллевых решений при нулевой постоянной интеграла площадей

В случае $k_1 = 0$, функция $R(x)$, определяемая по формуле (17.2), принимает вид:

$$R(x) = \frac{U(x)}{V(x)},$$

$$U(x) = -(1 + 4d_1^2)x^8 + 8h(2d_1^2 - 1)x^6 + 8(7 - 2d_1^2)(h^2 - 1)x^4 - \\ - 96h(h^2 - 1)x^2 + 48(h^2 - 1)^2,$$

$$V(x) = 4x^2(x^2 - 2h - 2)^2(x^2 - 2h + 2)^2.$$

Таким образом, функция $R(x)$ имеет полюс второго порядка в точке $x_0 = 0$, а также четыре полюса второго порядка x_1, x_2, x_3, x_4 , которые являются корнями двух квадратных трехчленов:

$$x^2 - 2h - 2 = 0$$

(его корни обозначим x_1, x_2) и

$$x^2 - 2h + 2 = 0$$

(его корни обозначим x_3, x_4). Разложение функции $R(x)$ в сумму простейших дробей имеет вид:

$$R(x) = \frac{3}{4x^2} - \sum_{i=1}^4 \frac{3}{16(x-x_i)^2} - \\ - \sum_{i=1}^2 \frac{(4d_1^2(h+1) - 2h + 1)x_i}{32(h+1)(x-x_i)} + \sum_{i=3}^4 \frac{(4d_1^2(h-1) - 2h - 1)x_i}{32(h-1)(x-x_i)}.$$

На основе этого разложения можно сделать следующие выводы.

1. Коэффициент b_0 при $\frac{b_0}{x^2}$ равен

$$b_0 = \frac{3}{4}.$$

2. Для других конечных полюсов коэффициенты $b_1, \dots, b_4$ все одинаковы и равны

$$b_i = -\frac{3}{16}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

3. Разложение функции $R(x)$ в ряд в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид:

$$R(x) = -\frac{(1 + 4d_1^2)}{4x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Попытаемся найти у дифференциального уравнения (17.1) в случае $k_1 = 0$ решение вида (2.6), то есть решение, соответствующее Случаю 2 Теоремы 2.1. Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 2 так, как он описан в пункте 3.4.

Шаг 1. Сначала определим множества E_{x_i} , соответствующие конечным полюсам. Для полюса $x = 0$ соответствующее множество имеет вид

$$E_0 = \{-2, 2, 6\}.$$

Для полюсов x_i , $i = 1, 2, 3, 4$ множества E_{x_i} имеют вид

$$E_{x_i} = \{1, 2, 3\}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Множество E_∞ состоит только из одного элемента и равно

$$E_\infty = \{2\}.$$

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные наборы

$$s = (e_\infty, e_0, e_{x_1}, e_{x_2}, e_{x_3}, e_{x_4})$$

элементов множеств E_∞ , E_0 , E_{x_1} , E_{x_2} , E_{x_3} , E_{x_4} , причем в каждом наборе хотя бы одно из чисел обязательно должно быть нечетным. Вычислим величину для каждого набора s по формуле (3.11):

$$d = \frac{1}{2} (e_\infty - e_0 - e_{x_1} - e_{x_2} - e_{x_3} - e_{x_4}).$$

В соответствии с алгоритмом число d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы элементов множеств E_∞ , E_0 , E_{x_1} , E_{x_2} , E_{x_3} , E_{x_4} убеждаемся, что единственным набором, для которого d будет неотрицательным целым числом, является набор

$$s_1 = \{2, -2, 1, 1, 1, 1\},$$

для которого $d = 0$.

Шаг 3. По формуле (3.12) составим функцию θ , используя набор чисел s_1 , найденный на предыдущем шаге. Получаем:

$$\theta = -\frac{1}{x} + \frac{2(x^2 - 2h)x}{(x^2 - 2h - 2)(x^2 - 2h + 2)}.$$

Многочлен P степени $d = 0$ имеет вид $P \equiv 1$. Подставляя функцию $R(x)$, функцию θ и многочлен P в уравнение (3.13), убеждаемся, что оно выполняется тождественно. Таким образом, окончательный результат может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 20.1. *В случае движения волчка Гесса ($d_1 \neq 0$), при условии, что $k_1 = 0$ дифференциальное уравнение (16.11) интегрируется в лиувиллевых функциях. $\square$*

Действительно, в случае $k_1 = 0$ дифференциальное уравнение (16.11) принимает вид

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{x^4 - 4(h^2 - 1)}{x(x^2 - 2h - 2)(x^2 - 2h + 2)} \frac{du}{dx} + \frac{d_1^2 x^2}{(x^2 - 2h - 2)(x^2 - 2h + 2)} u = 0. \quad (20.1)$$

Общее решение уравнения (20.1) имеет вид:

$$u(x) = C_1 \exp \left(id_1 \int \frac{xdx}{\sqrt{x^4 - 4hx^2 + 4h^2 - 4}} \right) + \\ + C_2 \exp \left(-id_1 \int \frac{xdx}{\sqrt{x^4 - 4hx^2 + 4h^2 - 4}} \right).$$

Видно, что данная функция относится к классу лиувиллевых функций вида (2.6). Общее решение уравнения (20.1) может быть представлено также в

виде:

$$u(x) = K_1 \sin \left(\frac{d_1}{2} \ln \left(x^2 - 2h + \sqrt{x^4 - 4hx^2 + 4h^2 - 4} \right) \right) + \\ + K_2 \cos \left(\frac{d_1}{2} \ln \left(x^2 - 2h + \sqrt{x^4 - 4hx^2 + 4h^2 - 4} \right) \right),$$

где K_1 и K_2 – произвольные постоянные.

Итак, окончательно, можно сделать вывод, что существование лиувиллевых решений вида (2.6) в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса определяется условиями Теоремы 19.1. При выполнении каждого из этих условий лиувиллевы решения вида (2.6) существуют независимо от того, какие значения принимают другие параметры задачи.

Подведем итоги. Лиувиллевых решений, соответствующих Случаю 1 и Случаю 3 Теоремы 2.1, в задаче о движении волчка Гесса не существует. Лиувиллевы решения, соответствующие Случаю 2 Теоремы 2.1 существуют, если $d_1 = 0$ или если $k_1 = 0$.

Указанные выводы были сделаны для общего случая, когда предполагалось, что все полюсы функции $R(x)$, определяемой соотношением (17.2), различны. Перейдем теперь к рассмотрению особых случаев, когда эти полюсы могут совпадать друг с другом.

21 Описание особых случаев

Заметим, что в знаменателе функции $R(x)$, определяемой выражением (17.2), стоит произведение двух многочленов: многочлена шестой степени (17.3) и кубического многочлена (17.4). Исследуем детально многочлен шестой степени (17.3). Как уже было замечено, в данный многочлен входят только четные степени независимой переменной, вследствие чего заменой $x^2 = z$ он приводится

к многочлену третьей степени относительно z :

$$P_{3z} = z^3 - 4hz^2 + 4(h^2 - 1)z + 4k_1^2 = 0. \quad (21.1)$$

Исследуем вопрос о характере корней многочлена (21.1). При помощи замены

$$z = y + \frac{4h}{3}$$

многочлен (21.1) приводится к виду

$$y^3 - 4\left(1 + \frac{h^2}{3}\right)y + 4\left(k_1^2 + \frac{4h^3}{27} - \frac{4h}{3}\right) = 0. \quad (21.2)$$

Таким образом, многочлен (21.2) имеет вид

$$p = -\frac{4}{3}\left(1 + \frac{h^2}{3}\right), \quad q = 2\left(k_1^2 + \frac{4h^3}{27} - \frac{4h}{3}\right).$$

Характер корней многочлена (21.2) определяется знаком выражения

$$D = q^2 + p^3.$$

Если $D > 0$, то многочлен (21.2) имеет один действительный и два комплексно-сопряженных корня. Если $D < 0$, то многочлен (21.2) имеет три действительных различных корня. Если же $D = 0$, то многочлен (21.2) имеет три действительных корня, два из которых совпали.

В явном виде выражение D записывается следующим образом:

$$D = 4\left(k_1^4 + \frac{8}{27}(h^2 - 9)k_1^2h - \frac{16}{27}(h^2 - 1)^2\right). \quad (21.3)$$

Таким образом, при $D = 0$ многочлен (17.3) может иметь кратные корни.

Теперь рассмотрим многочлен третьей степени (17.4). На коэффициент d_1 мы имеем условие $d_1 \in (-1, 0]$. Положим

$$k_1 = c^3 d_1,$$

где c — новый параметр. Тогда многочлен (17.4) переписывается в виде

$$d_1 (x^3 - c^3) = 0. \quad (21.4)$$

Корнями многочлена (21.4) являются числа

$$x_1 = c, \quad x_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) c, \quad x_3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) c. \quad (21.5)$$

Легко видеть, что при $c \neq 0$ корни x_1, x_2, x_3 многочлена (21.4) все различны. Таким образом, случай совпадения корней у многочлена (21.4) возможен лишь при $k_1 = 0$, который нами не рассматривается.

Однако возможен случай, когда один из корней (21.5) многочлена (21.4) является корнем многочлена шестой степени (17.3). Рассмотрим далее все возможные критические случаи, описанные в данном разделе.

22 Критический случай кратных корней

Рассмотрим первый критический случай, когда многочлен шестой степени (17.3) имеет кратные корни. Предположим сначала, что $d_1 = 0$, то есть рассмотрим движение волчка Лагранжа. При $d_1 = 0$ кубический многочлен (17.4) вырождается и становится постоянной величиной, поэтому общих корней у многочленов (17.3) и (17.4) при $d_1 = 0$ быть не может. Всюду в дальнейшем будем считать, что $k_1 \neq 0$.

Многочлен (17.3) имеет кратные корни, если обращается в ноль выражение D , представленное формулой (21.3). Рассматривая соответствующее условие

как биквадратное уравнение относительно k_1

$$k_1^4 + \frac{8}{27} (h^2 - 9) k_1^2 h - \frac{16}{27} (h^2 - 1)^2 = 0, \quad (22.1)$$

убеждаемся, что единственное значение k_1^2 , удовлетворяющее данному уравнению, имеет вид:

$$k_1^2 = \frac{4}{27} \left((h^2 + 3) \sqrt{h^2 + 3} - h (h^2 - 9) \right).$$

При этом многочлен третьей степени (21.1) имеет три действительных корня

$$z_1 = \frac{4h}{3} - \frac{4}{3} \sqrt{h^2 + 3},$$

$$z_2 = z_3 = \frac{4h}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{h^2 + 3}.$$

Видно, что величины z_2 и z_3 являются положительными. Это говорит о том, что многочлен шестой степени (17.3) имеет один действительный положительный корень кратности 2 и один действительный отрицательный корень кратности 2. Кроме того, многочлен шестой степени (17.3) имеет два чисто мнимых корня, различающихся знаком, которые образуются при извлечении корня из выражения z_1 , являющегося отрицательным.

Итак, окончательно, в рассматриваемом критическом случае многочлен (17.3) может быть представлен в виде

$$(x^2 - z_1) (x^2 - z_2)^2.$$

При этом выражения z_1 и z_2 связаны соотношением

$$z_2 = \frac{z_1}{4} - \frac{4}{z_1},$$

позволяющим существенно упростить процедуру преобразования функции $R(x)$, стоящей в правой части уравнения (17.1). Действительно, в качестве па-

раметра, через который выражаются h и k_1 , примем z_1 . Параметры h и k_1 выражаются через z_1 по формулам

$$h = \frac{3}{8}z_1 - \frac{2}{z_1}, \quad k_1 = \left(\frac{2}{z_1} - \frac{z_1}{8} \right) \sqrt{-z_1}. \quad (22.2)$$

Подстановка выражений (22.2) и условия $d_1 = 0$ в коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ уравнения (16.11) дает следующие выражения для этих коэффициентов

$$a(x) = \frac{16z_1x^4 + 2(16 - 7z_1^2)x^2 + z_1(z_1^2 - 16)}{(x^2 - z_1)(4z_1x^2 + 16 - z_1^2)x},$$

$$b(x) = \frac{z_1(z_1 - 4)^2(z_1 + 4)^2}{4(x^2 - z_1)(4z_1x^2 + 16 - z_1^2)^2x^2}.$$

По формуле (1.3) вычислим функцию $R(x)$. Она представляет собой рациональную функцию, знаменатель которой имеет вид:

$$V(x) = (x^2 - z_1)^2(4z_1x^2 - z_1^2 + 16)^2.$$

Таким образом, функция $R(x)$ имеет четыре конечных полюса второго порядка. Ее разложение в сумму простейших дробей имеет довольно громоздкий вид и не приводится здесь полностью. Однако можно отметить следующие особенности этого разложения.

1. Коэффициенты b_i при выражениях $\frac{b_i}{(x - x_i)^2}$, где x_i , $i = 1, 2$ – корни многочлена

$$x^2 - z_1 = 0,$$

все одинаковы и равны

$$b_i = -\frac{3}{16}, \quad i = 1, 2.$$

2. Коэффициенты b_i при выражениях $\frac{b_i}{(x - x_i)^2}$, где $x_i, i = 3, 4$ – корни многочлена

$$4z_1x^2 - z_1^2 + 16 = 0, \quad (22.3)$$

все одинаковы и равны

$$b_i = -\frac{z_1^2 + 8}{2(3z_1^2 + 16)}, \quad i = 3, 4.$$

3. Разложение функции $R(x)$ в ряд в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид:

$$R(x) = \frac{2}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Выясним, могут ли у дифференциального уравнения (17.1) в рассматриваемом критическом случае существовать лиувиллевы решения вида (2.1) то есть решения, соответствующие Случаю 1 Теоремы 2.1 (существование лиувиллевых решений вида (2.6) при всех значениях параметров h и k_1 было установлено в пунктах 19 и 20). В соответствии с алгоритмом Ковачича для поиска лиувиллевых решений вида (2.1), вычислим сначала постоянные $\alpha_c^\pm$. Для конечных полюсов $x = x_i, i = 1, 2$ они равны

$$\alpha_{x_i}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{x_i}^- = \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2.$$

Значения $\alpha_\infty^\pm$ оказываются равными

$$\alpha_\infty^+ = 2, \quad \alpha_\infty^- = -1.$$

Легко видеть, что коэффициенты b_i при полюсах $x = x_i, i = 3, 4$, являющихся корнями многочлена (22.3), зависят от z_1 . Оценим эти выражения. Отметим, прежде всего, что $b_i < 0, i = 3, 4$. Покажем теперь, что для этих коэффициентов

справедливо неравенство

$$b_i < -\frac{3}{16}, \quad i = 3, 4.$$

Действительно, неравенство

$$-\frac{z_1^2 + 8}{2(3z_1^2 + 16)} < -\frac{3}{16}$$

может быть переписано в виде:

$$\frac{z_1^2 + 8}{3z_1^2 + 16} - \frac{3}{8} > 0.$$

Последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$\frac{16 - z_1^2}{8(3z_1^2 + 16)} > 0,$$

справедливому при всех значениях z_1 таких, что $k_1 \neq 0$.

Кроме того, анализ выражений b_i , $i = 3, 4$ показывает, что при $z_1 = 0$ данные выражения принимают минимальное значение, равное

$$b_i = -\frac{1}{4}.$$

Окончательно, для коэффициентов b_i , $i = 3, 4$ справедлива оценка

$$-\frac{1}{4} < b_i < -\frac{3}{16}.$$

Тогда для величины

$$\alpha_{x_i}^+ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4b_i} = \frac{1}{2} - \frac{z_1}{2\sqrt{3z_1^2 + 16}}, \quad i = 3, 4$$

справедлива оценка

$$\frac{1}{2} < \alpha_{x_i}^+ < \frac{3}{4},$$

а для величины

$$\alpha_{x_i}^- = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4b_i} = \frac{1}{2} + \frac{z_1}{2\sqrt{3z_1^2+16}}, \quad i = 3, 4$$

справедлива оценка

$$\frac{1}{4} < \alpha_{x_i}^- < \frac{1}{2},$$

Следовательно, в рассматриваемом случае постоянная d , вычисляемая по формуле (3.2), может быть только равной нулю. Значение $d = 0$ достигается для наборов $s = (s(\infty), s(x_1), s(x_2), s(x_3), s(x_4))$ знаков "плюс" или "минус"

$$s_1 = (+, +, -, +, -), \quad s_2 = (+, -, +, +, -),$$

$$s_3 = (+, +, -, -, +), \quad s_4 = (+, -, +, -, +).$$

Все эти наборы подлежат проверке. Начнем с проверки набора s_1 . Для набора s_1 по формуле (3.3) определим функцию θ . Она имеет вид

$$\theta = \frac{3}{4(x-x_1)} + \frac{1}{4(x-x_2)} + \frac{\alpha_{x_3}^+}{(x-x_3)} + \frac{\alpha_{x_3}^-}{(x-x_4)}.$$

Многочлен P степени $d = 0$ имеет вид $P \equiv 1$. Подстановка многочлена P и функции θ в дифференциальное уравнение (3.4) приводит его к виду (18.4). В левой части полученного уравнения стоит рациональное выражение, которое обращается в ноль только при $z_1 = 0$. Но мы считаем, что $z_1 \neq 0$. Поэтому можно утверждать, что выражение в левой части уравнения (18.4) в ноль не обращается. Таким образом, в рассматриваемом критическом случае для набора s_1 не существует лиувиллевых решений вида (2.1) в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Лагранжа. Аналогично устанавливается факт отсутствия лиувиллевых решений вида (2.1) в рассматриваемом критическом случае для наборов s_2, s_3, s_4 . Окончательно, можно утверждать, что лиувиллевых решений вида (2.1) (то есть решений, соответствующих Случаю

чаю 1 Теоремы 2.1) в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Лагранжа не существует.

Теперь рассмотрим случай $d_1 \neq 0$. В качестве параметров, входящих в соответствующие коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ уравнения (16.11), примем d_1 и z_1 . Подстановка выражений (22.2) в коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ уравнения (16.11) дает следующие выражения для этих коэффициентов

$$a(x) = \frac{U_1(x)}{V_1(x)},$$

$$\begin{aligned} U_1(x) = & 32d_1z_1^2x^7 + (z_1^2 - 16) [8d_1z_1x^5 + 16z_1\sqrt{-z_1}x^4 - \\ & - 16d_1z_1^2x^3 - 2(7z_1^2 - 16)\sqrt{-z_1}x^2 + z_1(z_1^2 - 16)\sqrt{-z_1}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1(x) = & x(x^2 - z_1)(4z_1x^2 - z_1^2 + 16)(8d_1z_1x^3 + (z_1^2 - 16)\sqrt{-z_1}), \\ b(x) = & \frac{(8d_1z_1x^3 + 16\sqrt{-z_1} - z_1^2\sqrt{-z_1})(8d_1z_1x^3 - 16\sqrt{-z_1} + z_1^2\sqrt{-z_1})}{4x^2(x^2 - z_1)(4z_1x^2 + 16 - z_1^2)^2}. \end{aligned}$$

По формуле (1.3) вычислим функцию $R(x)$. Она представляет собой рациональную функцию, знаменатель которой имеет вид:

$$V(x) = (x^2 - z_1)^2 (4z_1x^2 - z_1^2 + 16)^2 (8d_1z_1x^3 - 16\sqrt{-z_1} + z_1^2\sqrt{-z_1})^2.$$

Таким образом, функция $R(x)$ имеет семь конечных полюсов второго порядка. Ее разложение в сумму простейших дробей имеет довольно громоздкий вид и не приводится здесь полностью. Однако можно отметить следующие особенности этого разложения.

1. Коэффициенты b_i при выражениях $\frac{b_i}{(x - x_i)^2}$, где x_i , $i = 1, 2, 3$ – корни многочлена

$$8d_1z_1x^3 - 16\sqrt{-z_1} + z_1^2\sqrt{-z_1} = 0,$$

все одинаковы и равны

$$b_i = \frac{3}{4}, \quad i = 1, 2, 3.$$

2. Коэффициенты b_i при выражениях $\frac{b_i}{(x - x_i)^2}$, где x_i , $i = 4, 5$ – корни многочлена

$$x^2 - z_1 = 0,$$

все одинаковы и равны

$$b_i = -\frac{3}{16}, \quad i = 4, 5.$$

3. Коэффициенты b_i при выражениях $\frac{b_i}{(x - x_i)^2}$, где x_i , $i = 6, 7$ – корни многочлена (22.3), все одинаковы и равны

$$b_i = \frac{1}{4} \left(\frac{z_1^2 (d_1^2 - 2) - 16 (d_1^2 + 1)}{16 + 3z_1^2} \right), \quad i = 6, 7.$$

4. Разложение функции $R(x)$ в ряд в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид:

$$R(x) = -\frac{(1 + 4d_1^2)}{4x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Особенности разложения в ряд функции $R(x)$ в окрестности точки $x = \infty$ позволяют утверждать, что у дифференциального уравнения (16.11) в рассматриваемом случае могут существовать лиувиллевы решения только вида (2.6), то есть решения, соответствующие Случаю 2 Теоремы 2.1. Кроме того, легко видеть, что коэффициенты b_i при полюсах $x = x_i$, $i = 6, 7$, являющихся корнями многочлена (22.3), не являются постоянными, а зависят от параметров d_1 и z_1 . Оценим эти выражения. Заметим, прежде всего, что в силу ограничений на параметр d_1 можно сделать вывод, что коэффициенты $b_i < 0$, $i = 6, 7$. Покажем

теперь, что для этих коэффициентов справедливо неравенство

$$b_i < -\frac{3}{16}, \quad i = 6, 7.$$

Для этого докажем справедливость неравенства

$$\frac{16(d_1^2 + 1) + (2 - d_1^2)z_1^2}{16 + 3z_1^2} > \frac{3}{4}. \quad (22.4)$$

Знаменатель левой части неравенства (22.4) является положительным, следовательно, мы можем домножить на него обе части неравенства и знак неравенства при этом не изменится. Получаем

$$16d_1^2 + 16 + 2z_1^2 - d_1^2z_1^2 > 12 + \frac{9}{4}z_1^2.$$

Переносим вправо все выражения, содержащие z_1^2 , а влево – все выражения, не содержащие z_1^2 , получаем:

$$16\left(d_1^2 + \frac{1}{4}\right) > z_1^2\left(d_1^2 + \frac{1}{4}\right).$$

Таким образом, неравенство (22.4) приводится к неравенству

$$16 > z_1^2,$$

которое справедливо при всех значениях z_1 таких, что $k_1 \neq 0$.

Итак, попытаемся найти у уравнения (16.11) в рассматриваемом критическом случае решение вида (2.6), то есть решение, соответствующее Случаю 2 Теоремы 2.1. Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 2 так, как он описан в пункте 3.4.

Шаг 1. Сначала определим множества E_{x_i} , соответствующие конечным полюсам. Для полюсов $x = x_i$, $i = 1, 2, 3$ соответствующие множества имеют вид

$$E_{x_i} = \{-2, 2, 6\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Для полюсов x_i , $i = 4, 5$ множества E_{x_i} имеют вид

$$E_{x_i} = \{1, 2, 3\}, \quad i = 4, 5.$$

Наконец, с учетом оценок, сделанных для коэффициентов b_i , $i = 6, 7$, можно утверждать, что множества E_{x_i} , соответствующие этим полюсам, состоят из одного элемента и равны

$$E_{x_i} = \{2\}, \quad i = 6, 7.$$

Множество E_∞ , соответствующее полюсу в точке $x = \infty$, также состоит только из одного элемента и равно

$$E_\infty = \{2\}.$$

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные работы

$$s = (e_\infty, e_{x_1}, e_{x_2}, e_{x_3}, e_{x_4}, e_{x_5}, e_{x_6}, e_{x_7})$$

элементов множеств $E_\infty, E_{x_1}, E_{x_2}, E_{x_3}, E_{x_4}, E_{x_5}, E_{x_6}, E_{x_7}$, причем в каждом наборе хотя бы одно из чисел обязательно должно быть нечетным. Вычислим величину d для каждого набора s по формуле (3.11):

$$d = \frac{1}{2} (e_\infty - e_{x_1} - e_{x_2} - e_{x_3} - e_{x_4} - e_{x_5} - e_{x_6} - e_{x_7}).$$

В соответствии с алгоритмом число d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы элементов множеств $E_\infty, E_{x_1}, E_{x_2}, E_{x_3}, E_{x_4}, E_{x_5}, E_{x_6}, E_{x_7}$, легко видеть, что постоянная d является неотрицательным целым числом всего для трех наборов. Для набора

$$s_1 = (2, -2, -2, -2, 1, 1, 2, 2)$$

имеем $d = 1$, а для наборов

$$s_2 = (2, -2, -2, -2, 3, 1, 2, 2), \quad s_3 = (2, -2, -2, -2, 1, 3, 2, 2),$$

имеем $d = 0$.

Шаг 3. Рассмотрим сначала набор s_1 . По коэффициентам этого набора, используя формулу (3.12), вычислим функцию θ . Она оказывается равной

$$\theta = -\frac{24d_1z_1x^2}{8d_1z_1x^3 - 16\sqrt{-z_1} + z_1^2\sqrt{-z_1}} + \frac{x}{x^2 - z_1} + \frac{8z_1x}{4z_1x^2 - z_1^2 + 16}.$$

Многочлен P степени $d = 1$ имеет вид $P \equiv x + B$, где B – коэффициент, подлежащий определению. Подставляя функцию R , функцию θ и многочлен P в уравнение (3.13), получаем в левой части этого уравнения рациональное выражение, в числителе которого стоит многочлен 12-ой степени

$$P_{12} = -8192d_1^3z_1^5(1 + 4d_1^2)Bx^{12} + \dots$$

Чтобы старший коэффициент этого многочлена обратился в ноль, положим $B = 0$. Тогда в числителе рационального выражения останется многочлен десятой степени, старший коэффициент которого имеет вид

$$P_{10} = 12288z_1^4d_1^4\sqrt{-z_1}(z_1 - 4)(z_1 + 4)x^{10} + \dots$$

Поскольку $z_1 < 0$, то $z_1 - 4 < 0$. Случаи $z_1 = 0$ и $d_1 = 0$ здесь не рассматриваются, так как уже были рассмотрены выше. Также следует отбросить случай $z_1 = -4$, так как в этом случае мы получаем $z_2 = 0$. Таким образом, если не принимать во внимание случаи, рассмотренные выше, то старший коэффициент этого многочлена в ноль не обращается. Это означает, что для набора s_1 не существует лиувиллевых решений вида (2.6), то есть решений, соответствующих Случаю 2 Теоремы 2.1.

Аналогично показывается, что для наборов s_2 и s_3 не существует лиувиллевых решений вида (2.6). Окончательно можно сделать следующий вывод.

Теорема 22.1. *В критическом случае кратных корней у многочлена (17.3) линейное уравнение (16.11) не имеет лиувиллевых решений. $\square$*

Таким образом, в первом из рассмотренных нами критических случаев, когда многочлен (17.3) имеет кратные корни, лиувиллевых решений не существует.

23 Критический случай совпадающих действительных корней

Рассмотрим теперь случай, когда корень $x_1 = c$ – действительный корень многочлена (17.4) из числа корней (21.5), является также корнем многочлена шестой степени (17.3). Ранее мы уже указали связь между корнем $x_1 = c$ и параметрами k_1 и d_1 :

$$k_1 = c^3 d_1.$$

Условие того, что $x_1 = c$ является корнем многочлена (17.3), записывается в виде:

$$(1 + 4d_1^2) c^4 - 4hc^2 + 4h^2 - 4 = 0. \quad (23.1)$$

Из условия (23.1) легко выразить d_1 . Действительно, имеем:

$$d_1^2 = \frac{4 - (c^2 - 2h)^2}{4c^4}. \quad (23.2)$$

Воспользуемся равенством (23.2) для упрощения коэффициентов $a(x)$ и $b(x)$ уравнения (16.11). Параметрами, входящими в эти коэффициенты, будем считать c и h . С учетом равенства (23.2), коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ выражаются

следующим образом:

$$\begin{aligned}
 a(x) &= \frac{x^2 (x^3 - 3c^3)}{(x-c)(x+c)(x^4 + (c^2 - 4h)x^2 + c^4 - 4c^2h + 4h^2 - 4)} - \\
 &- \frac{4(h^2 - 1)x^3 + (2h - c^2 + 2)(2h^2 - c^2 - 2)c^3}{x(x-c)(x^2 + xc + c^2)(x^4 + (c^2 - 4h)x^2 + c^4 - 4c^2h + 4h^2 - 4)} + \\
 &+ \frac{c^2x(12chx + 4h^2 - 4 - c^4 + 4c^2h)}{(x-c)(x+c)(x^2 + xc + c^2)(x^4 + (c^2 - 4h)x^2 + c^4 - 4c^2h + 4h^2 - 4)}, \\
 b(x) &= -\frac{(x^2 - xc + c^2)(x^2 + xc + c^2)(2h - c^2 + 2)(2h - c^2 - 2)}{4c^4x^2(x^4 + (c^2 - 4h)x^2 + c^4 - 4c^2h + 4h^2 - 4)}.
 \end{aligned}$$

По формуле (1.3) вычислим функцию $R(x)$ для данного критического случая. Она представляет собой рациональную функцию, знаменатель которой имеет вид:

$$\begin{aligned}
 V(x) &= (x-c)^2 (x^2 + xc + c^2)^2 (x+c)^2 \times \\
 &\times (x^4 + (c^2 - 4h)x^2 + c^4 - 4c^2h + 4h^2 - 4)^2 c^4.
 \end{aligned}$$

Таким образом, функция $R(x)$ имеет восемь конечных полюсов второго порядка. Полюсам функции $R(x)$ соответствуют значения $x = c$ и $x = -c$, а также корни x_1, x_2, x_3, x_4 многочлена четвертой степени

$$x^4 + (c^2 - 4h)x^2 + c^4 - 4c^2h + 4h^2 - 4 = 0, \quad (23.3)$$

и корни x_5 и x_6 многочлена

$$x^2 + xc + c^2 = 0. \quad (23.4)$$

Разложение функции $R(x)$ в сумму простейших дробей имеет довольно громоздкий вид, но можно отметить следующие его свойства.

1. Коэффициент b_c при выражении $\frac{b_c}{(x-c)^2}$ равен

$$b_c = \frac{5}{16}.$$

2. Коэффициент b_{-c} при выражении $\frac{b_{-c}}{(x+c)^2}$ равен

$$b_{-c} = -\frac{3}{16}.$$

3. Коэффициенты b_i при выражениях $\frac{b_i}{(x-x_i)^2}$, где x_i , $i = 1, 2, 3, 4$ – корни многочлена (23.3) все одинаковы и равны

$$b_i = -\frac{3}{16}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

4. Коэффициенты b_i при выражениях $\frac{b_i}{(x-x_i)^2}$, где x_i , $i = 5, 6$ – корни многочлена (23.4) все одинаковы и равны

$$b_i = \frac{3}{4}, \quad i = 5, 6.$$

5. Разложение функции $R(x)$ в ряд в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид:

$$R(x) = -\frac{(1+4d_1^2)}{4x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Указанные особенности функции $R(x)$ позволяют утверждать, что у дифференциального уравнения (16.11) (или (17.1)) в рассматриваемом критическом случае могут существовать лиувиллевы решения только вида (2.6), то есть решения, соответствующие Случаю 2 Теоремы 2.1. Для нахождения этих лиувиллевых решений будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 2 так, как он описан в пункте 3.4.

Шаг 1. Определим сначала множества E_{x_i} , соответствующие конечным полюсам. Для полюса $x = c$ соответствующее множество имеет вид:

$$E_c = \{-1, 2, 5\}.$$

Для полюса $x = -c$ соответствующее множество имеет вид:

$$E_{-c} = \{1, 2, 3\}.$$

Для конечных полюсов $x = x_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ соответствующие множества E_{x_i} одинаковы и равны

$$E_{x_i} = \{1, 2, 3\}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Наконец, для конечных полюсов $x = x_i$, $i = 5, 6$ множества E_{x_i} равны

$$E_{x_i} = \{-2, 2, 6\}, \quad i = 5, 6.$$

Множество E_∞ , соответствующее полюсу в точке $x = \infty$, состоит из одного элемента и равно

$$E_\infty = \{2\}.$$

Шаг 2. Теперь из элементов этих множеств нам следует составить наборы

$$s = (e_\infty, e_c, e_{-c}, e_{x_1}, e_{x_2}, e_{x_3}, e_{x_4}, e_{x_5}, e_{x_6})$$

и выяснить, для каких наборов число d , вычисляемое по формуле (3.11), является неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы элементов множеств $E_\infty, E_c, E_{-c}, E_{x_1}, E_{x_2}, E_{x_3}, E_{x_4}, E_{x_5}, E_{x_6}$, легко видеть, что минимальное значение суммы элементов множеств, соответствующих конечным полюсам, равно нулю. Следовательно, для набора

$$s_1 = (2, -1, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2)$$

постоянная $d = 1$, а для наборов

$$s_2 = (2, -1, 3, 1, 1, 1, 1, -2, -2), \quad s_3 = (2, -1, 1, 3, 1, 1, 1, -2, -2),$$

$$s_4 = (2, -1, 1, 1, 3, 1, 1, -2, -2), \quad s_5 = (2, -1, 1, 1, 1, 3, 1, -2, -2),$$

$$s_6 = (2, -1, 1, 1, 1, 1, 3, -2, -2), \quad s_7 = (2, -1, 2, 2, 1, 1, 1, -2, -2),$$

$$s_8 = (2, -1, 2, 1, 2, 1, 1, -2, -2), \quad s_9 = (2, -1, 2, 1, 1, 2, 1, -2, -2),$$

$$s_{10} = (2, -1, 2, 1, 1, 1, 2, -2, -2), \quad s_{11} = (2, -1, 1, 2, 2, 1, 1, -2, -2),$$

$$s_{12} = (2, -1, 1, 2, 1, 2, 1, -2, -2), \quad s_{13} = (2, -1, 1, 2, 1, 1, 2, -2, -2),$$

$$s_{14} = (2, -1, 1, 1, 2, 2, 1, -2, -2), \quad s_{15} = (2, -1, 1, 1, 2, 1, 2, -2, -2),$$

$$s_{16} = (2, -1, 1, 1, 1, 2, 2, -2, -2).$$

постоянная $d = 0$. Все эти наборы нуждаются в проверке.

Шаг 3. Начнем с проверки набора s_1 . Используя элементы этого набора, по формуле (3.12) определим функцию θ :

$$\theta = \frac{2x^3 + (c^2 - 4h)x}{x^4 + (c^2 - 4h)x^2 + c^4 - 4c^2h + 4h^2 - 4} - \frac{2x + c}{x^2 + xc + c^2} - \frac{c}{x^2 - c^2}.$$

Многочлен P степени $d = 1$ равен $P \equiv x + B$, где B – коэффициент, подлежащий определению. Подставляя функцию R , функцию θ и многочлен P в уравнение (3.13), получаем в левой части этого уравнения рациональное выражение, в числителе которого стоит многочлен восьмой степени вида

$$P_8 = 4(h^2 - c^2h - 1)Bx^8 + \dots.$$

Если положим $B = 0$, то многочлен P_8 станет многочленом шестой степени вида

$$P_6 = 3c^3 (2h - c^2 + 2) (2h - c^2 - 2) x^6 + \dots$$

Коэффициент при x^6 у многочлена P_6 обращается в ноль только если $c = 0$ или $d_1 = 0$. Ни одна из этих возможностей нами не рассматривается, поэтому многочлен P_6 тождественно в ноль не обращается. Аналогично проверяется, что тождественно не обращается в ноль многочлен шестой степени, получаемый из P_8 если предположить, что

$$h^2 - c^2 h - 1 = 0. \quad (23.5)$$

Окончательно это означает, что для набора s_1 не существует лиувиллевых решений вида (2.6) у дифференциального уравнения (16.11) (или (17.1)) в рассматриваемом нами критическом случае.

Теперь поочередно рассмотрим наборы $s_2, \dots, s_6$. Для набора s_2 функция θ , определяемая по формуле (3.12):

$$\theta = \frac{2x^3 + (c^2 - 4h)x}{x^4 + (c^2 - 4h)x^2 + c^4 - 4c^2 h + 4h^2 - 4} - \frac{2x + c}{x^2 + xc + c^2} + \frac{x - 2c}{x^2 - c^2}.$$

Многочлен P степени $d = 0$ имеет вид $P \equiv 1$. Подставляя функцию R , функцию θ и многочлен P в уравнение (3.13), получаем в левой части этого уравнения рациональное выражение, в числителе которого стоит многочлен восьмой степени вида

$$P_8 = 4(h^2 - c^2 h - 1)x^8 + \dots$$

Если предположить, что выполняется условие (23.5), то подстановка этого условия в многочлен P_8 приведет его к многочлену шестой степени, не обращающемуся в ноль ни при каких значениях параметров таких, что $c \neq 0$ и $d_1 \neq 0$. Таким образом, для набора s_2 также не существует лиувиллевых решений ви-

да (2.6) у дифференциального уравнения (16.11).

Аналогично проверяются наборы $s_3, \dots, s_6$. Ни для одного из этих наборов уравнение (16.11) не имеет лиувиллевых решений вида (2.6).

Проверка наборов $s_7, \dots, s_{16}$ также приводит к результату, что дифференциальное уравнение (16.11) не имеет лиувиллевых решений вида (2.6) в рассматриваемом нами критическом случае.

Итак, окончательно, можно утверждать, что если у многочленов (17.3) и (17.4) есть общий действительный корень, не являющийся кратным корнем многочлена (17.3), то уравнение (16.11) не имеет лиувиллевых решений.

24 Особенный случай совпадающих действительных корней многочленов

Теперь рассмотрим случай, когда действительный корень $x_1 = c$ многочлена третьей степени (17.4) является кратным корнем многочлена (17.3). В этом случае многочлен третьей степени (21.1), получаемый из многочлена (17.3), допускает разложение на множители вида

$$P_{3z} = z^3 - 4hz^2 + 4(h^2 - 1)z + 4d_1^2c^6 = (z - c^2)^2(z + z_1).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z у двух различных представлений многочлена P_{3z} , получаем следующую систему уравнений на параметры задачи:

$$2c^2 - z_1 - 4h = 0, \quad 2c^2z_1 - c^4 + 4h^2 - 4 = 0, \quad (24.1)$$

$$4d_1^2c^6 - c^4z_1 = 0.$$

Решая систему (24.1), находим следующие выражения параметров h , z_1 и d_1 через параметр c :

$$d_1^2 = \frac{\sqrt{c^4 + 4}}{2c^2} - \frac{1}{2}, \quad z_1 = 2\sqrt{c^4 + 4} - 2c^2, \quad h = c^2 - \frac{\sqrt{c^4 + 4}}{2}. \quad (24.2)$$

Подстановка выражений (24.2) в функции $a(x)$ и $b(x)$, являющиеся коэффициентами уравнения (16.11), дает следующие выражения для этих коэффициентов:

$$a(x) = \frac{x^5 + 2cx^4 + 4c^2x^3 + 2c^3x^2 + 2c^2(2x + c)(\sqrt{c^4 + 4} - c^2)}{x(x + c)(x^2 + xc + c^2)(x^2 + 2\sqrt{c^4 + 4} - 2c^2)},$$

$$b(x) = \frac{(x^2 + xc + c^2)(x^2 - xc + c^2)(\sqrt{c^4 + 4} - c^2)}{2c^2x^2(x - c)(x + c)(x^2 + 2\sqrt{c^4 + 4} - 2c^2)}.$$

По формуле (1.3) вычислим функцию $R(x)$ для данного критического случая. Она представляет собой рациональную функцию, знаменатель которой имеет вид

$$V(x) = 4c^2(x + c)^2(x^2 + xc + c^2)^2(x^2 + 2\sqrt{c^4 + 4} - 2c^2)^2(x - c).$$

Таким образом, функция $R(x)$ имеет шесть конечных полюсов. В точке $x = c$ функция $R(x)$ имеет полюс первого порядка, а в точке $x = -c$ — полюс второго порядка. Также функция $R(x)$ имеет полюсы второго порядка в точках $x = x_1$ и $x = x_2$, являющихся корнями многочлена второй степени:

$$x^2 + xc + c^2 = 0, \quad (24.3)$$

и в точках $x = x_3$ и $x = x_4$, являющихся корнями многочлена второй степени:

$$x^2 + 2\sqrt{c^4 + 4} - 2c^2 = 0. \quad (24.4)$$

Разложение функции $R(x)$ в сумму простейших дробей имеет довольно громоздкий вид, и не представлено здесь явно. Однако можно отметить следующие его особенности.

1. Коэффициенты b_i при выражениях $\frac{b_i}{(x - x_i)^2}$, где x_i , $i = 1, 2$ – корни многочлена (24.3), все одинаковы и равны

$$b_i = \frac{3}{4}, \quad i = 1, 2.$$

2. Коэффициенты b_i при выражениях $\frac{b_i}{(x - x_i)^2}$, где x_i , $i = 3, 4$ – корни многочлена (24.4), все одинаковы и равны

$$b_i = -\frac{3}{16}, \quad i = 3, 4.$$

3. Коэффициент b_{-c} при выражении $\frac{b_{-c}}{(x + c)^2}$ равен

$$b_{-c} = -\frac{1}{4}.$$

4. Разложение функции $R(x)$ в ряд в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид:

$$R(x) = -\frac{(1 + 4d_1^2)}{4x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

где параметр d_1 выражается через параметр c по формулам (24.2).

Указанные особенности функции $R(x)$ позволяют утверждать, что у дифференциального уравнения (16.11) (или (17.1)) в рассматриваемом критическом случае могут существовать лиувиллевы решения только вида (2.6), то есть решения, соответствующие Случаю 2 Теоремы 2.1. Для нахождения этих лиувиллевых решений будем по шагам применять алгоритм Ковачича для Случая 2 так, как он описан в пункте 3.4.

Шаг 1. Определим сначала множества E_{x_i} , соответствующие конечным полюсам. Для полюса первого порядка $x = c$ соответствующее множество имеет вид:

$$E_c = \{4\}.$$

Для полюса второго порядка $x = -c$ соответствующее множество имеет вид:

$$E_{-c} = \{2\}.$$

Для конечных полюсов второго порядка $x = x_i$, $i = 1, 2$ множества E_{x_i} одинаковы и равны

$$E_{x_i} = \{-2, 2, 6\}, \quad i = 1, 2.$$

Для конечных полюсов второго порядка $x = x_i$, $i = 3, 4$ соответствующие множества E_{x_i} одинаковы и равны

$$E_{x_i} = \{1, 2, 3\}, \quad i = 3, 4.$$

Наконец, множество E_∞ , соответствующее полюсу в точке $x = \infty$, состоит из одного элемента и равно

$$E_\infty = \{2\}.$$

Шаг 2. Теперь из элементов этих множеств нам следует составить наборы

$$s = (e_\infty, e_c, e_{-c}, e_{x_1}, e_{x_2}, e_{x_3}, e_{x_4}, e_{x_5}, e_{x_6}),$$

элементов множеств $E_\infty, E_c, E_{-c}, E_{x_i}, i = 1, \dots, 6$ и выяснить, для каких наборов постоянная d , вычисляемая по формуле (3.11), является неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы элементов множеств $E_\infty, E_c, E_{-c}, E_{x_i}, i = 1, \dots, 6$, легко видеть, что минимальное значение суммы элементов множеств, соответствующих конечным полюсам, равно четырём. Это означает, что не найдется ни одного набора s , для которого постоянная d , вычисляемая

по формуле (3.11), была бы неотрицательным целым числом. Следовательно, в рассматриваемом критическом случае уравнение (16.11) не имеет лиувиллевых решений.

25 Критический случай совпадающих комплексных корней

Теперь рассмотрим случай, когда корнем многочлена (17.3) является комплексный корень x_2 или x_3 из числа корней (21.5) многочлена (17.4). Подставляя любой из этих корней в многочлен (17.3) и учитывая, что $k_1 = c^3 d_1$, найдем, приравнявая нулю действительную и мнимую части получившегося выражения, что параметры задачи в этом случае должны удовлетворять двум условиям:

$$h^2 + hc^2 - 1 = 0, \quad (1 + 4d_1^2) c^4 + 2hc^2 - 2(h^2 - 1) = 0. \quad (25.1)$$

Рассмотрим первое из уравнений (25.1). Это квадратное уравнение относительно h , имеющее корни

$$h_1 = \frac{1}{2} \sqrt{c^4 + 4} - \frac{c^2}{2}, \quad h_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{c^4 + 4} - \frac{c^2}{2}.$$

Легко видеть, что для значения h_2 справедливо условие

$$-\frac{1}{2} \sqrt{c^4 + 4} - \frac{c^2}{2} \leq -1,$$

причем равенство достигается лишь в случае $c = 0$, который нами не рассматривается. Поэтому, принимая во внимание диапазон изменения параметра h , получаем, что h может принимать только значение $h = h_1$. Таким образом, параметры h и c связаны в рассматриваемом критическом случае соотношением

$$h = \frac{\sqrt{c^4 + 4}}{2} - \frac{c^2}{2}.$$

Если мы подставим теперь полученное значение h во второе уравнение системы (25.1) и разрешим это уравнение относительно d_1^2 , то мы получаем, что

$$d_1^2 = -\frac{2\sqrt{c^4 + 4} - c^2}{4c^2}. \quad (25.2)$$

Легко видеть, что выражение, стоящее в правой части равенства (25.2), является отрицательным при любом $c \neq 0$. Следовательно, равенство (25.2) не может выполняться ни при каких значениях параметров. Это, в свою очередь, означает, что комплексные корни (21.5) многочлена (17.4) не могут быть корнями многочлена шестой степени (17.3). Следовательно, рассматриваемый критический случай не имеет места.

Таким образом, нами была рассмотрена задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой при условиях Гесса. Мы показали, что решение задачи сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка (16.11) с рациональными коэффициентами. Применение к данному дифференциальному уравнению алгоритма Ковачича позволило установить, что это уравнение допускает лиувиллевы решения только вида (2.6) и только если движущееся твердое тело является волчком Лагранжа $d_1 = 0$, или если проекция кинетического момента тела на вертикаль равна нулю $k_1 = 0$. Таким образом, вопрос о существовании лиувиллевых решений у дифференциального уравнения (16.11), к интегрированию которого сводится задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса, полностью исследован.

26 Приложение. Движения твердого тела в случае Лагранжа при нулевой постоянной интеграла площадей

Выясним, какие движения совершает тяжелое твердое тело в случае Гесса, если кроме условий (13.3) выполняются также условия (16.10). Условие $d_1 = 0$ равносильно условию

$$(A_1 - A_2)x_1x_2 = 0. \quad (26.1)$$

Будем считать, что $A_1 \neq A_2$, поскольку случай равенства двух этих моментов инерции при $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ соответствует случаю полной кинетической симметрии. Тогда условие (26.1) выполняется, если $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$. Будем считать, что $x_1 = 0$ (случай $x_2 = 0$ рассматривается аналогично). Это условие, учитываемое совместно с условиями Гесса (13.3), соответствует случаю Лагранжа

$$x_1 = 0, \quad x_3 = 0, \quad A_1 = A_3, \quad x_2 = a \neq 0. \quad (26.2)$$

Интеграл Гесса (13.4) принимает вид

$$\omega_2 = 0, \quad (26.3)$$

а интеграл площадей переписывается следующим образом:

$$\omega_1\gamma_1 + \omega_3\gamma_3 = 0, \quad (26.4)$$

с учетом того, что постоянная интеграла площадей равна нулю.

Уравнения Эйлера (13.1) при условиях (26.2) принимают вид:

$$A_1\dot{\omega}_1 = -Mga\gamma_3, \quad A_1\dot{\omega}_3 = Mga\gamma_1.$$

Вводя углы Эйлера по формулам

$$\gamma_1 = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma_2 = \cos \theta, \quad \gamma_3 = \sin \theta \sin \varphi,$$

$$\omega_1 = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad \omega_2 = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}, \quad \omega_3 = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi,$$

убеждаемся, что условие (26.3) переписывается в виде

$$\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} = 0, \quad (26.5)$$

а условие (26.4) принимает вид

$$\dot{\psi} \sin^2 \theta = 0. \quad (26.6)$$

Будем считать, что $\sin \theta \neq 0$ (иначе все компоненты угловой скорости – нулевые). Тогда из условия (26.6) следует, что $\dot{\psi} = 0$. Условие (26.5) немедленно дает $\dot{\varphi} = 0$ и, значит, на рассматриваемых движениях волчка Лагранжа углы прецессии и собственного вращения оказываются постоянными:

$$\psi = \psi_0 = \text{const}, \quad \varphi = \varphi_0 = \text{const}.$$

С учетом этого, выражения для компонент ω_1 и ω_3 угловой скорости тела принимают вид:

$$\omega_1 = -\dot{\theta} \sin \varphi_0, \quad \omega_3 = \dot{\theta} \cos \varphi_0.$$

Уравнения Эйлера (13.1) приводятся к одному уравнению:

$$\ddot{\theta} - \frac{Mga}{A_1} \sin \theta = 0,$$

описывающему маятниковые нутационные колебания твердого тела в окрестности значения $\theta = \pi$. Следовательно, движениям волчка Гесса, на которых $d_1 = 0$ и $k_1 = 0$, отвечают маятниковые нутационные колебания волчка.

ГЛАВА 4. ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ОДНОРОДНОГО ШАРА ПО АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

27 Введение

Задача о качении без скольжения однородного шара по неподвижной поверхности под действием силы тяжести является одной из классических задач механики неголономных систем [74–76, 83, 87, 88, 143, 149, 152]. Обычно при рассмотрении этой задачи, следуя подходу, предложенному в трактате Э. Дж. Рауса [152], принято задавать в явном виде поверхность, по которой движется центр шара, а не опорную поверхность, по которой катится шар. Поверхность, по которой движется центр шара, является эквидистантной к поверхности, по которой движется точка контакта. Еще из работ Э. Дж. Рауса [152] и Ф. Нетера [143] было известно, что если при качении шара по поверхности под действием силы тяжести его центр движется по заданной поверхности вращения, то задача сводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка относительно компоненты скорости центра шара в проекции на направление касательной к параллели поверхности вращения. Если для некоторой поверхности вращения удастся найти в явном виде общее решение соответствующего уравнения, то задача о движении шара может быть проинтегрирована в квадратурах. Поэтому представляет интерес вопрос — для каких поверхностей вращения соответствующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка допускает общее решение, которое можно записать в явном виде, например, с помощью лиувиллевых функций. Ответ на этот вопрос также дает алгоритм Ковачича [105].

В этой главе мы приводим наш собственный способ получения линейного дифференциального уравнения второго порядка, к интегрированию которого сводится задача о качении тяжелого шара по неподвижной поверхности такой,

что центр шара при качении движется по заданной поверхности вращения. Применяя затем к полученному линейному дифференциальному уравнению второго порядка алгоритм Ковачича, мы показываем, что в случае, когда центр шара принадлежит невырожденной поверхности вращения второго порядка, общее решение данного уравнения может быть найдено в явном виде. Это означает, что задача о качении шара по поверхности такой, что при качении шара его центр принадлежит невырожденной поверхности вращения второго порядка, интегрируется в лиувиллевых функциях. Также интегрируемой в лиувиллевых функциях будет задача о качении шара по поверхности вращения, такой, что при качении центр шара принадлежит поверхности, полученной вращением арки циклоиды вокруг своей оси симметрии. В случае, когда при качении шара его центр принадлежит тору, решение соответствующей задачи выражается через функции Хейна. В случае, когда при качении шара по поверхности его центр принадлежит поверхности Бельтрами (псевдосфере), задача о качении шара является интегрируемой в лиувиллевых функциях, а если при качении шара его центр принадлежит поверхности катеноида, то задача о качении шара решается в полиномах Лежандра.

28 Постановка задачи о качении тяжелого однородного шара по абсолютно шероховатой поверхности вращения

28.1 Общая постановка задачи о качении шара по абсолютно шероховатой поверхности вращения

Рассмотрим задачу о качении однородного шара по произвольной выпуклой абсолютно шероховатой поверхности под действием сил, результирующая которых проходит через центр масс G шара, совпадающий с его геометрическим центром [74–76, 83, 87, 88, 143, 149, 152, 183, 184, 204]. Для описания движения шара

введем подвижную систему координат $Gx_1x_2x_3$, ось Gx_3 которой направлена по нормали к опорной поверхности. Направления осей Gx_1 и Gx_2 определим позднее. Обозначим через $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ единичные базисные векторы осей Gx_1, Gx_2 и Gx_3 соответственно. Пусть $\boldsymbol{\Omega} = \theta_1\mathbf{e}_1 + \theta_2\mathbf{e}_2 + \theta_3\mathbf{e}_3$ — угловая скорость выбранной подвижной системы координат; $\mathbf{v}_G = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3$ — вектор скорости центра G шара (причем очевидно, что $w = 0$, поскольку шар не отрывается от опорной поверхности во все время движения); $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3$ — угловая скорость шара в проекции на оси рассматриваемой системы координат. Обозначим через $\mathbf{N} = F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2 + N\mathbf{e}_3$ силу реакции, действующую на шар со стороны опорной поверхности. Через $\mathbf{P} = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2 + P\mathbf{e}_3$ обозначим результирующую силу, приложенную к центру масс шара. Пусть M — масса шара, R — его радиус, J — момент инерции шара относительно любой оси, проходящей через его центр масс. Предполагая, что положительное направление оси Gx_3 направлено наружу в сторону выпуклости опорной поверхности, запишем уравнения движения шара в векторном виде:

$$M\dot{\mathbf{v}}_G + M[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_G] = \mathbf{P} + \mathbf{N}, \quad (28.1)$$

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\Omega} \times J\boldsymbol{\omega}] = [\overrightarrow{GK} \times \mathbf{N}]. \quad (28.2)$$

Уравнения (28.1) и (28.2) выражают, соответственно, законы изменения импульса и кинетического момента шара относительно выбранной подвижной системы координат. Здесь $\overrightarrow{GK} = -R\mathbf{e}_3$ — радиус-вектор из центра масс G шара в точку K касания шара с опорной поверхностью. Поскольку скорость точки шара, находящейся в соприкосновении с опорной поверхностью, в каждый момент времени равна нулю, следовательно:

$$\mathbf{v}_G + [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{GK}] = 0. \quad (28.3)$$

В скалярной форме уравнения (28.1)–(28.3) записываются следующим образом:

$$M\dot{u} - M\theta_3 v = X + F_1, \quad M\dot{v} + M\theta_3 u = Y + F_2, \quad M\theta_1 v - M\theta_2 u = P + N; \quad (28.4)$$

$$J\dot{\omega}_1 + J\theta_2 \omega_3 - J\theta_3 \omega_2 = F_2 R, \quad J\dot{\omega}_2 + J\theta_3 \omega_1 - J\theta_1 \omega_3 = -F_1 R, \quad (28.5)$$

$$\dot{\omega}_3 + \theta_1 \omega_2 - \theta_2 \omega_1 = 0;$$

$$u - R\omega_2 = 0, \quad v + R\omega_1 = 0. \quad (28.6)$$

Исключая F_1 , F_2 , ω_1 , ω_2 из уравнений (28.4)–(28.6), получаем:

$$\dot{u} - \theta_3 v = \frac{R^2 X}{J + MR^2} + \frac{JR\theta_1 \omega_3}{J + MR^2}, \quad \dot{v} + \theta_3 u = \frac{R^2 Y}{J + MR^2} + \frac{JR\theta_2 \omega_3}{J + MR^2}. \quad (28.7)$$

Уравнения (28.7) можно рассматривать как уравнения такого движения центра масс шара, которое получается в предположении, что центр масс G движется по гладкой поверхности, в точке G приложены дополнительные силы

$$\frac{JR\theta_1 \omega_3}{J + MR^2} \quad \text{и} \quad \frac{JR\theta_2 \omega_3}{J + MR^2}$$

по осям Gx_1 и Gx_2 , а ранее приложенные силы уменьшены в отношении

$$\frac{R^2}{J + MR^2}.$$

Система уравнений (28.4)–(28.6) не является замкнутой. Для того, чтобы замкнуть эту систему, мы должны указать явные выражения для компонент X , Y , P силы, действующей на шар, а также задать в явном виде поверхность, по которой катится шар. Заметим, что центр масс шара G шара движется по поверхности, полученной из опорной поверхности, по которой катится шар, смещением по нормали на расстояние, равное радиусу R шара. Данная поверхность является эквидистантной к исходной, опорной поверхности. Следуя подходу, предложенному в работах Э. Дж. Рауса [152] и Ф. Нетера [143] будем задавать

в явном виде именно поверхность, по которой движется центр масс G шара. Направим оси Gx_1 и Gx_2 по касательным к линиям кривизны этой поверхности. Найдем выражение для угловой скорости Ω выбранной подвижной системы координат $Gx_1x_2x_3$ в зависимости от компонент u и v скорости центра масс G шара. Будем считать, что поверхность, по которой движется центр шара, задается относительно некоторой неподвижной системы координат уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2), \quad (28.8)$$

где q_1 и q_2 — гауссовы координаты на поверхности. Предположим, что координатная сеть на поверхности (28.8) составлена из линий кривизны. Направления этих линий в каждой точке указываются ортогональными единичными векторами

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}, \quad (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}. \quad (28.9)$$

Здесь через h_1, h_2 обозначены коэффициенты Ламе данной поверхности

$$h_i(q_1, q_2) = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right|, \quad i = 1, 2.$$

Вектор $\mathbf{e}_3 = [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2]$ является вектором нормали к поверхности (28.8) в точке (q_1, q_2) . С другой стороны, скорость центра масс $\mathbf{v}_G$ шара может быть определена по формуле:

$$\mathbf{v}_G = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2.$$

Отсюда следует, что компоненты скорости u и v связаны с координатами q_1, q_2 и их производными формулами:

$$u = h_1 \dot{q}_1, \quad v = h_2 \dot{q}_2. \quad (28.10)$$

Обозначая через $k_i = k_i(q_1, q_2)$, $i = 1, 2$ главные кривизны поверхности (28.8), имеем:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial q_1} = -h_1 k_1 \mathbf{e}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial q_2} = -h_2 k_2 \mathbf{e}_2. \quad (28.11)$$

Формулы (28.11) являются следствием известной в дифференциальной геометрии теоремы (формулы) Родрига [54], в которой дополнительно нужно учесть, что выбранная нами координатная сеть на поверхности (28.8) является ортогональной и составленной из линий кривизны.

Утверждение 28.1. *Справедливы следующие формулы*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_1} &= -\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + h_1 k_1 \mathbf{e}_3, & \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_2} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \mathbf{e}_2, \\ \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial q_1} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \mathbf{e}_1, & \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial q_2} &= -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + h_2 k_2 \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (28.12)$$

Доказательство. Докажем только первую из формул (28.12), а остальные доказываются аналогично. Производная вектора $\mathbf{e}_1$ по q_1 выражается через единичные базисные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_1} = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + c_3 \mathbf{e}_3.$$

Здесь c_1, c_2, c_3 — коэффициенты, подлежащие определению. Дифференцируя очевидное равенство

$$(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) = 1$$

по q_1 , находим, что

$$\left(\mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_1} \right) = 0$$

и, следовательно, $c_1 = 0$.

Учитывая, что функция $\mathbf{r}(q_1, q_2)$ — гладкая, и выражение смешанной производной не зависит от порядка дифференцирования, имеем по формуле (28.9)

$$\frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \right), \quad \text{то есть} \quad \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 \mathbf{e}_1) = \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 \mathbf{e}_2).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial h_1}{\partial q_2} \mathbf{e}_1 + h_1 \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_2} = \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \mathbf{e}_2 + h_2 \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial q_1}. \quad (28.13)$$

Умножая обе части соотношения (28.13) скалярно на $\mathbf{e}_1$, получаем:

$$\frac{\partial h_1}{\partial q_2} = h_2 \left(\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial q_1} \cdot \mathbf{e}_1 \right), \quad \text{то есть} \quad \left(\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial q_1} \cdot \mathbf{e}_1 \right) = \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2}.$$

Дифференцируя теперь по q_1 очевидное равенство

$$(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) = 0,$$

получаем:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_1} \cdot \mathbf{e}_2 \right) + \left(\mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial q_1} \right) = 0.$$

Таким образом:

$$c_2 = \left(\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_1} \cdot \mathbf{e}_2 \right) = - \left(\mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial q_1} \right) = - \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2}.$$

Аналогично, дифференцируя по q_1 очевидное равенство

$$(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3) = 0,$$

получаем:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_1} \cdot \mathbf{e}_3 \right) + \left(\mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial q_1} \right) = 0.$$

Используя первую из формул (28.11), находим, что

$$c_3 = \left(\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_1} \cdot \mathbf{e}_3 \right) = - \left(\mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial q_1} \right) = h_1 k_1.$$

Получив в явном виде коэффициенты c_2 и c_3 , записываем первую из формул (28.12):

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_1} = -\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + h_1 k_1 \mathbf{e}_3.$$

Рассуждая аналогично, получим оставшиеся формулы (28.12). $\square$

Угловая скорость системы координат $Gx_1x_2x_3$ находится по стандартной формуле:

$$\boldsymbol{\Omega} = (\dot{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_1 + (\dot{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_2 + (\dot{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_3,$$

где обозначено

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2, \quad i = 1, 2, 3.$$

Принимая во внимание формулы (28.11)–(28.12), для угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ подвижной системы координат $Gx_1x_2x_3$ получим следующее выражение:

$$\boldsymbol{\Omega} = h_2 k_2 \dot{q}_2 \mathbf{e}_1 - h_1 k_1 \dot{q}_1 \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\dot{q}_2}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} - \frac{\dot{q}_1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \right) \mathbf{e}_3.$$

Учитывая формулы (28.10), перепишем выражение для угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ в виде:

$$\boldsymbol{\Omega} = k_2 v \mathbf{e}_1 - k_1 u \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial h_2}{\partial q_1} v - \frac{\partial h_1}{\partial q_2} u \right) \mathbf{e}_3.$$

Таким образом, для компонент θ_1 , θ_2 , θ_3 угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ подвижной системы координат $Gx_1x_2x_3$ мы имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= h_2 k_2 \dot{q}_2 = k_2 v, & \theta_2 &= -h_1 k_1 \dot{q}_1 = -k_1 u, \\ \theta_3 &= \left(\frac{\dot{q}_2}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} - \frac{\dot{q}_1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \right) = \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial h_2}{\partial q_1} v - \frac{\partial h_1}{\partial q_2} u \right). \end{aligned} \tag{28.14}$$

Теперь предположим, что поверхность, по которой движется центр масс G шара, является поверхностью вращения, заданной относительно некоторой неподвижной системы координат уравнением

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho(q_1) \cos q_2 \\ \rho(q_1) \sin q_2 \\ \zeta(q_1) \end{pmatrix}. \quad (28.15)$$

В этом случае коэффициенты Ламе h_1 и h_2 имеют вид:

$$h_1 = h_1(q_1) = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dq_1}\right)^2}, \quad h_2 = h_2(q_1) = \rho(q_1), \quad (28.16)$$

а главные кривизны k_1 и k_2 поверхности вычисляются по формулам:

$$k_1 = k_1(q_1) = \frac{\left(\frac{d^2\zeta}{dq_1^2} \frac{d\rho}{dq_1} - \frac{d\zeta}{dq_1} \frac{d^2\rho}{dq_1^2}\right)}{\left(\left(\frac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dq_1}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad k_2 = k_2(q_1) = \frac{\frac{d\zeta}{dq_1}}{\rho \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dq_1}\right)^2}}. \quad (28.17)$$

Формулы (28.9), связывающие единичные базисные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ подвижной системы координат $Gx_1x_2x_3$ с единичными базисными векторами $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ неподвижной системы координат, примут вид:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{h_1} \frac{d\rho}{dq_1} \cos q_2 \mathbf{e}_x + \frac{1}{h_1} \frac{d\rho}{dq_1} \sin q_2 \mathbf{e}_y + \frac{1}{h_1} \frac{d\zeta}{dq_1} \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{e}_2 = -\sin q_2 \mathbf{e}_x + \cos q_2 \mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{e}_3 = [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2] = -\frac{1}{h_1} \frac{d\zeta}{dq_1} \cos q_2 \mathbf{e}_x - \frac{1}{h_1} \frac{d\zeta}{dq_1} \sin q_2 \mathbf{e}_y + \frac{1}{h_1} \frac{d\rho}{dq_1} \mathbf{e}_z.$$

Соответственно, единичные базисные векторы неподвижной системы координат $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ выражаются через единичные базисные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

подвижной системы координат $Gx_1x_2x_3$ по формулам:

$$\mathbf{e}_x = \frac{1}{h_1} \frac{d\rho}{dq_1} \cos q_2 \mathbf{e}_1 - \sin q_2 \mathbf{e}_2 - \frac{1}{h_1} \frac{d\zeta}{dq_1} \cos q_2 \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{e}_y = \frac{1}{h_1} \frac{d\rho}{dq_1} \sin q_2 \mathbf{e}_1 + \cos q_2 \mathbf{e}_2 - \frac{1}{h_1} \frac{d\zeta}{dq_1} \sin q_2 \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{e}_z = [\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y] = \frac{1}{h_1} \frac{d\zeta}{dq_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_1} \frac{d\rho}{dq_1} \mathbf{e}_3.$$

Линиями кривизны на поверхности вращения являются ее меридианы и параллели. Пусть вертикальная ось Z является осью симметрии рассматриваемой поверхности вращения. Принимая во внимание формулы (28.10), (28.14), а также уравнения неголономных связей (28.6), из третьего уравнения системы (28.5) получаем:

$$\dot{\omega}_3 = \theta_2 \omega_1 - \theta_1 \omega_2 = -\frac{\theta_2 v}{R} - \frac{u \theta_1}{R} = \frac{k_1 uv}{R} - \frac{k_2 uv}{R} = \frac{(k_1 - k_2) v h_1 \dot{q}_1}{R}.$$

Переходя в полученном уравнении к новой независимой переменной — координате q_1 , запишем данное уравнение в виде

$$\frac{d\omega_3}{dq_1} = \frac{(k_1 - k_2) h_1}{R} v. \quad (28.18)$$

Поскольку движение шара происходит под действием силы тяжести, которая имеет вид

$$\mathbf{P} = -Mg\mathbf{e}_z = -Mg \frac{1}{h_1} \frac{d\zeta}{dq_1} \mathbf{e}_1 - Mg \frac{1}{h_1} \frac{d\rho}{dq_1} \mathbf{e}_3,$$

следовательно, получаем:

$$X = -Mg \frac{1}{h_1} \frac{d\zeta}{dq_1}, \quad Y = 0, \quad P = -Mg \frac{1}{h_1} \frac{d\rho}{dq_1}. \quad (28.19)$$

С учетом этих выражений и формул (28.10), (28.14), из второго уравнения системы (28.7) находим, что

$$\dot{v} + \frac{v}{h_2} \frac{dh_2}{dq_1} \dot{q}_1 = -\frac{JRh_1k_1\dot{q}_1}{J + MR^2} \omega_3.$$

В полученном уравнении мы также перейдем к новой независимой переменной — координате q_1 , в результате чего данное дифференциальное уравнение примет вид:

$$\frac{dv}{dq_1} + \frac{v}{h_2} \frac{dh_2}{dq_1} = -\frac{JRh_1k_1}{J + MR^2} \omega_3. \quad (28.20)$$

Система уравнений (28.18), (28.20) представляет собой систему двух линейных уравнений первого порядка относительно неизвестных v и ω_3 . Ниже будет показано, что решение задачи о качении шара по поверхности такой, что центр масс шара принадлежит заданной поверхности вращения, сводится к интегрированию системы уравнений (28.18), (28.20).

Немного преобразуем данную систему. Введем новые переменные V и Ω по формулам

$$V = h_2 v = \rho(q_1) v, \quad \Omega = R \omega_3,$$

а также обозначим

$$\frac{J}{J + MR^2} = n^2 < 1.$$

Тогда система уравнений (28.18), (28.20) перепишется в виде

$$\frac{d\Omega}{dq_1} = \frac{h_1}{h_2} (k_1 - k_2) V, \quad \frac{dV}{dq_1} = -n^2 h_1 h_2 k_1 \Omega. \quad (28.21)$$

Систему уравнений (28.21) легко привести к одному линейному дифференциальному уравнению второго порядка относительно V

$$\frac{d^2 V}{dq_1^2} - \frac{1}{h_1 h_2 k_1} \frac{d}{dq_1} \left[h_1 h_2 k_1 \right] \frac{dV}{dq_1} + n^2 (k_1 - k_2) h_1^2 k_1 V = 0. \quad (28.22)$$

Таким образом, задача о качении однородного шара по неподвижной выпуклой поверхности под действием силы тяжести, в предположении, что центр масс G шара движется по заданной поверхности вращения, сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка (28.22).

Покажем, как записывается закон сохранения энергии в рассматриваемой задаче. Умножая первое уравнение системы уравнений (28.7) на u , а второе — на v , и складывая их, находим:

$$u\dot{u} + v\dot{v} = \frac{R^2 (Xu + Yv)}{J + MR^2} + \frac{JR\omega_3 (\theta_1 u + \theta_2 v)}{J + MR^2}. \quad (28.23)$$

С учетом уравнений неголономных связей (28.6) и третьего уравнения системы (28.5), имеем:

$$\theta_1 u + \theta_2 v = R (\theta_1 \omega_2 - \theta_2 \omega_1) = -R\dot{\omega}_3.$$

Поэтому соотношение (28.23) переписывается следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{JR^2\omega_3^2}{2(J + MR^2)} \right) = \frac{R^2 (Xu + Yv)}{J + MR^2}. \quad (28.24)$$

Учитывая явные выражения (28.19) для компонент силы тяжести, перепишем равенство (28.24) в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{JR^2\omega_3^2}{2(J + MR^2)} \right) = -\frac{MgR^2}{(J + MR^2)} \frac{d\zeta}{dq_1} \dot{q}_1.$$

Следовательно, закон сохранения энергии, имеющий место в данной задаче, записывается следующим образом:

$$H = \frac{(J + MR^2)}{2} (u^2 + v^2) + \frac{JR^2}{2} \omega_3^2 + MgR^2 \zeta = E = \text{const}. \quad (28.25)$$

Таким образом, дальнейший способ исследования задачи о качении шара по абсолютно шероховатой поверхности такой, что при качении центр масс G ша-

ра принадлежит заданной поверхности вращения, представляется следующим. Если удастся найти общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка (28.22), то оно записывается в виде

$$V = V(q_1) = K_1 V_1(q_1) + K_2 V_2(q_1),$$

где K_1 и K_2 — произвольные постоянные. Из системы уравнений (28.21) сразу получается явное выражение для функции Ω :

$$\Omega = \Omega(q_1).$$

Располагая явными выражениями для функций $V = V(q_1)$ и $\Omega = \Omega(q_1)$, находим, используя эти функции

$$v(q_1) = \frac{V(q_1)}{\rho(q_1)}, \quad \omega_3(q_1) = \frac{\Omega(q_1)}{R}.$$

Учитывая теперь, что

$$u = h_1 \dot{q}_1,$$

и подставляя все найденные функции в интеграл энергии (28.25), приведем его к виду

$$H(q_1, \dot{q}_1) = E.$$

Дальнейшее решение задачи может быть осуществлено путем исследования поведения фазовых траекторий на плоскости $(q_1, \dot{q}_1)$.

Полученные выше результаты (в частности, линейное дифференциальное уравнение второго порядка (28.22)) были найдены в предположении, что шар катится по выпуклой стороне неподвижной поверхности, и что положительное направление оси GC направлено наружу в сторону выпуклости. Выясним, как будет записываться линейное дифференциальное уравнение второго порядка (28.22), если шар катится по внутренней (вогнутой) стороне неподвижной поверхности, и положительное направление оси Gx_3 направлено внутрь, в сто-

рону вогнутости. В этом случае вместо единичных базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ системы координат $Gx_1x_2x_3$ удобнее рассматривать векторы

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_3,$$

то есть соответствующая система координат получается из системы $Gx_1x_2x_3$ поворотом вокруг оси с направляющим вектором $\mathbf{e}_1$ на 180 градусов. Легко видеть, что уравнения (28.1)–(28.7) при этом не поменяются, поскольку в этих уравнениях нигде не учитывалось, что положительное направление оси Gx_3 направлено в сторону выпуклости поверхности. Изменения начнутся с формул (28.9). Эти формулы примут вид:

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}, \quad \mathbf{e}'_2 = -\frac{1}{h_2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}, \quad (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j) = \delta_{ij}. \quad (28.26)$$

Вектор $\mathbf{e}'_3 = [\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2]$ будет вектором внутренней нормали к поверхности (28.8), по которой движется центр шара, в точке (q_1, q_2) . С другой стороны, скорость центра масс $\mathbf{v}_G$ шара может быть определена по формуле:

$$\mathbf{v}_G = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 = u\mathbf{e}'_1 + v\mathbf{e}'_2.$$

Отсюда следует, что в случае, когда нормаль к опорной поверхности направлена внутрь, компоненты скорости u и v центра масс G шара связаны с координатами q_1, q_2 и их производными формулами:

$$u = h_1 \dot{q}_1, \quad v = -h_2 \dot{q}_2. \quad (28.27)$$

С учетом того, как связаны единичные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ с единичными векторами $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, для производных единичного вектора $\mathbf{e}'_3$ будут справедливы формулы, аналогичные (28.11)

$$\frac{\partial \mathbf{e}'_3}{\partial q_1} = h_1 k_1 \mathbf{e}'_1, \quad \frac{\partial \mathbf{e}'_3}{\partial q_2} = -h_2 k_2 \mathbf{e}'_2.$$

Соответственно, для производных единичных векторов $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}'_2$ будут выполняться формулы, аналогичные (28.12)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{e}'_1}{\partial q_1} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \mathbf{e}'_2 - h_1 k_1 \mathbf{e}'_3, & \frac{\partial \mathbf{e}'_1}{\partial q_2} &= -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \mathbf{e}'_2, \\ \frac{\partial \mathbf{e}'_2}{\partial q_1} &= -\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \mathbf{e}'_1, & \frac{\partial \mathbf{e}'_2}{\partial q_2} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \mathbf{e}'_1 + h_2 k_2 \mathbf{e}'_3.\end{aligned}$$

Тогда определяя угловую скорость системы координат $G\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ по стандартной формуле

$$\boldsymbol{\Omega} = (\dot{\mathbf{e}}'_2 \cdot \mathbf{e}'_3) \mathbf{e}'_1 + (\dot{\mathbf{e}}'_3 \cdot \mathbf{e}'_1) \mathbf{e}'_2 + (\dot{\mathbf{e}}'_1 \cdot \mathbf{e}'_2) \mathbf{e}'_3,$$

получим следующее выражение:

$$\boldsymbol{\Omega} = h_2 k_2 \dot{q}_2 \mathbf{e}'_1 + h_1 k_1 \dot{q}_1 \mathbf{e}'_2 + \left(\frac{\dot{q}_1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} - \frac{\dot{q}_2}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \right) \mathbf{e}'_3.$$

или, принимая во внимание формулы (28.27)

$$\boldsymbol{\Omega} = -k_2 v \mathbf{e}'_1 + k_1 u \mathbf{e}'_2 + \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial h_1}{\partial q_2} u + \frac{\partial h_2}{\partial q_1} v \right) \mathbf{e}'_3.$$

Таким образом, для компонент θ_1 , θ_2 , θ_3 угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ подвижной системы координат $G\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ мы имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= h_2 k_2 \dot{q}_2 = -k_2 v, & \theta_2 &= h_1 k_1 \dot{q}_1 = k_1 u, \\ \theta_3 &= \frac{\dot{q}_1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} - \frac{\dot{q}_2}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} = \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial h_1}{\partial q_2} u + \frac{\partial h_2}{\partial q_1} v \right).\end{aligned}\tag{28.28}$$

Как и в рассуждениях, представленных выше, предположим теперь, что поверхность, по которой движется центр масс G шара, является поверхностью вращения, заданной относительно некоторой неподвижной системы координат уравнением (28.15). В этом случае коэффициенты Ламе h_1 и h_2 все равно будут определяться формулами (28.16), а главные кривизны k_1 и k_2 поверхности бу-

дуг вычисляться по формулам (28.17). Снова предположим, что вертикальная ось Z совпадает с осью симметрии неподвижной поверхности вращения. Принимая во внимание формулы (28.27), (28.28), а также уравнения неголономных связей (28.6), из третьего уравнения системы (28.5) получаем:

$$\dot{\omega}_3 = \theta_2 \omega_1 - \theta_1 \omega_2 = -\frac{\theta_2 v}{R} - \frac{u \theta_1}{R} = -\frac{k_1 u v}{R} + \frac{k_2 u v}{R} = \frac{(k_2 - k_1) v h_1 \dot{q}_1}{R}.$$

Переходя в полученном уравнении к новой независимой переменной — координате q_1 , запишем данное уравнение в виде

$$\frac{d\omega_3}{dq_1} = \frac{(k_2 - k_1) h_1}{R} v. \quad (28.29)$$

Поскольку движение шара происходит под действием силы тяжести, следовательно имеем $Y = 0$. С учетом этого факта и формул (28.27), (28.28), из второго уравнения системы (28.7) находим, что

$$\dot{v} + \frac{v}{h_2} \frac{dh_2}{dq_1} \dot{q}_1 = \frac{J R h_1 k_1 \dot{q}_1}{J + M R^2} \omega_3.$$

В полученном уравнении мы также перейдем к новой независимой переменной — координате q_1 , в результате чего данное дифференциальное уравнение примет вид:

$$\frac{dv}{dq_1} + \frac{v}{h_2} \frac{dh_2}{dq_1} = \frac{J R h_1 k_1}{J + M R^2} \omega_3. \quad (28.30)$$

Преобразуем систему уравнений (28.29), (28.30). Снова введем переменные

$$V = h_2 v = \rho(q_1) v, \quad \Omega = R \omega_3,$$

и обозначение

$$\frac{J}{J + M R^2} = n^2 < 1.$$

Тогда система уравнений (28.29), (28.30) переписывается в виде

$$\frac{d\Omega}{dq_1} = \frac{h_1}{h_2} (k_2 - k_1) V, \quad \frac{dV}{dq_1} = n^2 h_1 h_2 k_1 \Omega. \quad (28.31)$$

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно переменной V , которое получается из системы уравнений (28.31), имеет вид (28.22). Это означает, что при качении однородного шара по внутренней (вогнутой) стороне неподвижной поверхности, когда положительное направление оси Gx_3 направлено внутрь в сторону вогнутости, решение задачи все равно приводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения (28.22). Коэффициенты линейного дифференциального уравнения второго порядка (28.22) определяются формой поверхности вращения, по которой движется центр масс шара. Можно поставить вопрос о том, для каких поверхностей вращения уравнение (28.22) интегрируется в явном виде. Например, в каких случаях общее решение соответствующего уравнения выражается с помощью лиувиллевых функций. Для ответа на вопрос о существовании лиувиллевых решений у линейного дифференциального уравнения второго порядка обычно используется алгоритм Ковачича [105]. Ниже показано, что задача о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения такой, что центр шара движется по внутренней поверхности параболоида вращения, интегрируется в лиувиллевых функциях.

28.2 Качение шара по параболоиду вращения

Пусть абсолютно шероховатая поверхность, по которой катится шар, такова, что геометрическое место центров шара представляет собой параболоид вращения с вершиной, занимающей наинизшее положение. Будем считать, что когда центр шара движется по параболоиду, шар катится, находясь внутри некоторой

поверхности. Уравнение параболоида запишем в виде (28.15):

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} pq_1 \cos q_2 \\ pq_1 \sin q_2 \\ \frac{pq_1^2}{2} \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемом случае

$$\rho(q_1) = pq_1, \quad \zeta(q_1) = \frac{pq_1^2}{2}.$$

Здесь p — некоторый параметр, имеющий размерность длины. Коэффициенты Ламе h_1 и h_2 , вычисляемые по формуле (28.16), имеют вид

$$h_1 = p\sqrt{1 + q_1^2}, \quad h_2 = pq_1,$$

а главные кривизны k_1 и k_2 параболоида, вычисляемые по формулам (28.17), имеют вид:

$$k_1 = \frac{1}{p(1 + q_1^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad k_2 = \frac{1}{p\sqrt{1 + q_1^2}}.$$

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка (28.22) может быть представлено в виде:

$$\frac{d^2V}{dq_1^2} + \frac{q_1^2 - 1}{(1 + q_1^2)q_1} \frac{dV}{dq_1} - \frac{n^2 q_1^2}{(1 + q_1^2)^2} V = 0. \quad (28.32)$$

Таким образом, задача о качении шара по абсолютно шероховатой поверхности такой, что геометрическое место центров шара является параболоидом вращения, сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка (28.32). Уравнение (28.32) имеет вид уравнения с рациональными коэффициентами. Тем не менее, немного упростим его. Сделаем в

уравнении (28.32) замену независимой переменной по формуле

$$x = q_1^2 + 1.$$

Тогда уравнение (28.32) перепишется в виде:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dV}{dx} - \frac{n^2}{4x^2} V = 0. \quad (28.33)$$

Для того, чтобы привести дифференциальное уравнение (28.33) к более простому виду, сделаем замену

$$y = V\sqrt{x}.$$

Тогда линейное дифференциальное уравнение второго порядка (28.33) перепишется следующим образом:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{n^2 - 1}{4x^2} y. \quad (28.34)$$

Уравнение (28.34) имеет в точности вид, необходимый для того, чтобы применить к этому уравнению алгоритм Ковачича [105]. Функция $r(x)$ в данном случае равна

$$r(x) = \frac{n^2 - 1}{4x^2}.$$

Очевидно, что в функция $r(x)$ имеет один конечный полюс второго порядка в точке $x = 0$, а порядок полюса этой функции в точке $x = \infty$ равен двум. Следовательно, в соответствии с необходимыми условиями существования лиувиллевых решений (см. Теорему 2.4) у дифференциального уравнения (28.34) могут существовать лиувиллевы решения всех трех типов. Сначала попытаемся найти у дифференциального уравнения (28.34) лиувиллевы решения вида (2.1), то есть решения, соответствующие Случаю 1 Теоремы 2.1. Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска решения вида (2.1) уравнения (28.34) так, как он описан в пункте 3.1.

Шаг 1. Вычислим следующие величины:

$$[\sqrt{r}]_0 = 0, \quad \alpha_0^+ = \frac{1}{2} + \frac{n}{2}, \quad \alpha_0^- = \frac{1}{2} - \frac{n}{2},$$

$$[\sqrt{r}]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = \frac{1}{2} + \frac{n}{2}, \quad \alpha_\infty^- = \frac{1}{2} - \frac{n}{2}.$$

Шаг 2. Таким образом, мы имеем всего четыре набора знаков

$$s = (s(\infty), s(0)),$$

где $s(\infty)$ и $s(0)$ равны, соответственно, $+$ или $-$.

Для каждого из этих наборов по формуле (3.2) вычислим величину d :

$$d = \alpha_\infty^{s(\infty)} - \alpha_0^{s(0)}.$$

В соответствии с алгоритмом, d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы знаков s и соответствующие им наборы значений α , убеждаемся, что поскольку $n < 1$, следовательно, возможны только два случая

$$\alpha_1 = (\alpha_\infty^+, \alpha_0^+) \quad \text{и} \quad \alpha_2 = (\alpha_\infty^-, \alpha_0^-),$$

для которых $d = 0$. Рассмотрим набор α_1 . Соответствующая функция $\theta = \theta(x)$, построенная по формуле (3.3) для указанного набора значений α_1 , имеет вид:

$$\theta(x) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{n}{2}}{x} = \frac{1+n}{2x}.$$

Шаг 3. Для найденного на предыдущем шаге набора значений α_1 мы должны найти многочлен P степени $d = 0$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$P'' + 2\theta P' + (\theta(x)' + \theta(x)^2 - r(x)) P = 0.$$

Данное уравнение, после подстановки в него функции $\theta = \theta(x)$ и многочлена $P \equiv 1$, будет выполняться тождественно. Тот же результат получается и для

набора значений α_2 . Таким образом, общее решение линейного дифференциального уравнения (28.34) представляется в виде:

$$y = C_1 x^{\frac{1+n}{2}} + C_2 x^{\frac{1-n}{2}},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Соответственно, общее решение линейного дифференциального уравнения (28.33) имеет вид

$$V(x) = C_1 x^{\frac{n}{2}} + C_2 x^{-\frac{n}{2}},$$

а общее решение исходного линейного уравнения (28.32) записывается следующим образом:

$$V(q_1) = C_1 (1 + q_1^2)^{\frac{n}{2}} + C_2 (1 + q_1^2)^{-\frac{n}{2}}. \quad (28.35)$$

Тем самым, при помощи алгоритма Ковачича установлено, что задача о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения такой, что при качении центр масс шара принадлежит параболоиду вращения, интегрируется в лиувиллевых функциях. Ранее данный факт был установлен в работах [143, 152] другим способом.

Покажем теперь как, зная в явном виде общее решение (28.35) линейного дифференциального уравнения второго порядка (28.32), привести задачу о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения такой, что при качении центр шара лежит на параболоиде вращения, к квадратурам.

Используя общее решение (28.35) и зная явные выражения для h_1 , h_2 , k_1 и k_2 в зависимости от q_1 , перепишем первое уравнение системы (28.31) в виде:

$$\frac{d\Omega}{dq_1} = \frac{q_1}{p(1 + q_1^2)} \left(C_1 (1 + q_1^2)^{\frac{n}{2}} + C_2 (1 + q_1^2)^{-\frac{n}{2}} \right).$$

Интегрирование этого уравнения дает следующее выражение для Ω :

$$\Omega = \frac{C_1 (1 + q_1^2)^{\frac{n}{2}} - C_2 (1 + q_1^2)^{-\frac{n}{2}}}{pn}.$$

Учитывая, как связаны между собой переменные v , ω_3 , V и Ω , находим явные выражения для v и ω_3 :

$$v = \frac{V}{h_2} = \frac{V}{\rho} = \frac{C_1 (1 + q_1^2)^{\frac{n}{2}} + C_2 (1 + q_1^2)^{-\frac{n}{2}}}{pq_1},$$

$$\omega_3 = \frac{\Omega}{R} = \frac{C_1 (1 + q_1^2)^{\frac{n}{2}} - C_2 (1 + q_1^2)^{-\frac{n}{2}}}{Rpn}.$$

Кроме того, из первого уравнения системы (28.27) получаем:

$$u = p\dot{q}_1 \sqrt{1 + q_1^2}.$$

Воспользуемся теперь законом сохранения энергии (28.25), который перепишем в виде:

$$u^2 + v^2 + n^2 R^2 \omega_3^2 + \frac{2MgR^2}{J + MR^2} \zeta = h, \quad (28.36)$$

и подставим в него найденные выражения для u , v , ω_3 и ζ . Тогда закон сохранения энергии (28.36) запишется следующим образом:

$$p^2 \dot{q}_1^2 (1 + q_1^2) + \frac{\left(C_1 (1 + q_1^2)^{\frac{n}{2}} + C_2 (1 + q_1^2)^{-\frac{n}{2}} \right)^2}{p^2 q_1^2} +$$

$$+ \frac{\left(C_1 (1 + q_1^2)^{\frac{n}{2}} - C_2 (1 + q_1^2)^{-\frac{n}{2}} \right)^2}{p^2} + \frac{MgR^2 p}{J + MR^2} q_1^2 = h. \quad (28.37)$$

Представим полученное уравнение (28.37) в виде:

$$p^2 \dot{q}_1^2 (1 + q_1^2) + \frac{(1 + q_1^2)}{p^2 q_1^2} \left(C_1 (1 + q_1^2)^{\frac{n}{2}} + C_2 (1 + q_1^2)^{-\frac{n}{2}} \right)^2 -$$

$$- \frac{4C_1 C_2}{p^2} + \frac{MgR^2 p}{J + MR^2} q_1^2 = h. \quad (28.38)$$

Теперь в уравнении (28.38) сделаем замену переменных. Вместо независимой переменной q_1 введем новую независимую переменную θ , связанную с q_1 соотношением

$$q_1 = \operatorname{tg} \theta, \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Помимо этого, вместо произвольных постоянных C_1 и C_2 введем новые произвольные постоянные K_1 и K_2 , которые связаны с C_1 и C_2 соотношениями

$$K_1 = \frac{C_2}{p}, \quad K_2 = \frac{C_1}{p}.$$

Тогда уравнение (28.38) перепишется в виде:

$$\frac{\dot{\theta}^2 p^2}{\cos^6 \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(K_1 (\cos \theta)^n + \frac{K_2}{(\cos \theta)^n} \right)^2 - 4K_1 K_2 + \frac{MgR^2 p}{J + MR^2} \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = h. \quad (28.39)$$

Из уравнения (28.39) следует, что

$$\dot{\theta}^2 = R_1(\theta),$$

где функция $R_1(\theta)$ выражается равенством

$$R_1(\theta) = \frac{\cos^6 \theta}{p^2} Q(\theta).$$

Здесь обозначено

$$Q(\theta) = h_1 - \frac{MgR^2 p}{J + MR^2} \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(K_1 (\cos \theta)^n + \frac{K_2}{(\cos \theta)^n} \right)^2, \quad h_1 = h + 4K_1 K_2.$$

Итак, мы показали, как задача о качении шара по поверхности такой, что при качении центр шара принадлежит параболоиду вращения, приводится к квадратурам. Подобное приведение возможно, если удастся найти в явном виде общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка (28.22). Перечислим еще ряд случаев, когда удастся в явном виде указать общее решение соответствующего уравнения.

28.3 Качение шара по невырожденной поверхности второго порядка

Рассмотрим задачу о качении шара по поверхности такой, что при качении центр масс шара движется по заданной поверхности вращения второго порядка, причем будем считать, что для данной поверхности выполняется условие $k_1 \neq 0$, то есть она не является цилиндром или конусом (тот факт, что задача о качении шара по цилиндру и по конусу интегрируется в квадратурах, был доказан еще Раусом [152]). В этом случае кривую, определяющую меридиан соответствующей поверхности вращения, можно задать ее полярным уравнением

$$r(q_1) = \frac{p}{1 - e \cos q_1},$$

и следовательно, для функций $\rho(q_1)$ и $\zeta(q_1)$, определяющих меридиан заданной поверхности вращения, мы будем иметь следующие выражения

$$\rho(q_1) = r(q_1) \sin q_1 = \frac{p \sin q_1}{1 - e \cos q_1}, \quad \zeta(q_1) = r(q_1) \cos q_1 = \frac{p \cos q_1}{1 - e \cos q_1}.$$

Тогда коэффициенты Ламе h_1 , h_2 и главные кривизны k_1 , k_2 поверхности, вычисляемые по формулам (28.16), (28.17) будут равны

$$h_1 = \frac{p}{(1 - e \cos q_1)^2} \sqrt{1 + e^2 - 2e \cos q_1}, \quad h_2 = \frac{p \sin q_1}{1 - e \cos q_1},$$

$$k_1 = -\frac{(1 - e \cos q_1)^3}{p(1 + e^2 - 2e \cos q_1)^{\frac{3}{2}}}, \quad k_2 = -\frac{1 - e \cos q_1}{p\sqrt{1 + e^2 - 2e \cos q_1}}.$$

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка (28.22) запишется следующим образом

$$\frac{d^2 V}{dq_1^2} + \frac{2e - (1 + e^2) \cos q_1}{(1 + e^2 - 2e \cos q_1) \sin q_1} \frac{dV}{dq_1} - \frac{n^2 e^2 \sin^2 q_1}{(1 + e^2 - 2e \cos q_1)^2} V = 0. \quad (28.40)$$

В дифференциальном уравнении (28.40) сделаем замену независимой переменной по формуле $\cos q_1 = x$. Тогда уравнение (28.40) примет вид уравнения

с рациональными коэффициентами

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{2e}{(2ex - e^2 - 1)} \frac{dV}{dx} - \frac{n^2 e^2}{(2ex - e^2 - 1)^2} V = 0. \quad (28.41)$$

Для того, чтобы привести дифференциальное уравнение (28.41) к более простому виду, сделаем замену

$$y = V \sqrt{2ex - e^2 - 1}.$$

Тогда линейное дифференциальное уравнение второго порядка (28.41) переписывается следующим образом:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{(1 - n^2) e^2}{(2ex - e^2 - 1)^2} y. \quad (28.42)$$

Уравнение (28.42) имеет в точности вид, необходимый для того, чтобы применить к этому уравнению алгоритм Ковачича [105]. Функция $r(x)$ в данном случае равна

$$r(x) = \frac{(n^2 - 1) e^2}{(2ex - e^2 - 1)^2} = \frac{(n^2 - 1)}{4(x - x_*)^2}, \quad x_* = \frac{1 + e^2}{2e}.$$

Очевидно, что в данном случае функция $r(x)$ имеет один конечный полюс второго порядка в точке $x = x_*$, а порядок полюса этой функции в точке $x = \infty$ равен двум. Следовательно, в соответствии с необходимыми условиями существования лиувиллевых решений (см. Теорему 2.4), у дифференциального уравнения (28.42) могут существовать лиувиллевы решения всех трех типов. Сначала попытаемся найти у дифференциального уравнения (28.42) лиувиллевы решения вида (2.1), то есть решения, соответствующие Случаю 1 Теоремы 2.1. Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска решения вида (2.1) уравнения (28.42) так, как он описан в пункте 3.1.

Шаг 1. Вычислим следующие величины:

$$[\sqrt{r}]_{x_*} = 0, \quad \alpha_{x_*}^+ = \frac{1}{2} + \frac{n}{2}, \quad \alpha_{x_*}^- = \frac{1}{2} - \frac{n}{2},$$

$$[\sqrt{r}]_{\infty} = 0, \quad \alpha_{\infty}^+ = \frac{1}{2} + \frac{n}{2}, \quad \alpha_{\infty}^- = \frac{1}{2} - \frac{n}{2}.$$

Шаг 2. Таким образом, мы имеем всего четыре набора знаков

$$s = (s(\infty), s(0)),$$

где $s(\infty)$ и $s(0)$ равны, соответственно, $+$ или $-$.

Для каждого из этих наборов вычислим величину d по формуле (3.2):

$$d = \alpha_{\infty}^{s(\infty)} - \alpha_0^{s(0)}.$$

В соответствии с алгоритмом, d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы знаков s и соответствующие им наборы значений α , убеждаемся, что поскольку $n < 1$, следовательно, возможны только два случая

$$\alpha_1 = (\alpha_{\infty}^+, \alpha_{x_*}^+) \quad \text{и} \quad \alpha_2 = (\alpha_{\infty}^-, \alpha_{x_*}^-),$$

для которых $d = 0$. Рассмотрим набор α_1 . Соответствующая функция $\theta = \theta(x)$, построенная по формуле (3.3) для указанного набора значений α_1 , имеет вид:

$$\theta(x) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{n}{2}}{x - x_*} = \frac{1 + n}{2(x - x_*)}.$$

Шаг 3. Для найденного на предыдущем шаге набора значений α_1 мы должны найти многочлен P степени $d = 0$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$P'' + 2\theta P' + (\theta(x)' + \theta(x)^2 - r(x)) P = 0.$$

Данное уравнение, после подстановки в него функции $\theta = \theta(x)$ и многочлена $P \equiv 1$, будет выполняться тождественно. Тот же результат получается и для набора значений α_2 . Таким образом, общее решение линейного дифференциального уравнения (28.42) представляется в виде:

$$y = C_1 (2ex - e^2 - 1)^{\frac{1+n}{2}} + C_2 (2ex - e^2 - 1)^{\frac{1-n}{2}},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Для исходного линейного дифференциального уравнения (28.40) общее решение записывается следующим образом:

$$V = K_1 (1 + e^2 - 2e \cos q_1)^{\frac{n}{2}} + K_2 (1 + e^2 - 2e \cos q_1)^{-\frac{n}{2}}.$$

Таким образом, нами установлено, что при любых значениях параметров n , p и e линейное дифференциальное уравнение второго порядка (28.40) интегрируется в явном виде. Следовательно, задача о качении шара по поверхности такой, что центр шара движется по заданной невырожденной поверхности вращения второго порядка, может быть проинтегрирована в лиувиллевых функциях.

28.4 Качение шара по циклоидальной поверхности

Пусть теперь поверхность, по которой катится шар, такова, что при качении шара по этой поверхности его центр принадлежит поверхности, полученной вращением арки циклоиды вокруг ее оси симметрии. Функции $\rho = \rho(q_1)$ и $\zeta = \zeta(q_1)$, параметрически задающие соответствующую поверхность вращения, имеют вид:

$$\rho(q_1) = a(1 - q_1), \quad \zeta(q_1) = -a\sqrt{1 - q_1^2} - a \arcsin q_1 + \frac{a\pi}{2}. \quad (28.43)$$

Коэффициенты Ламе h_1 , h_2 и главные кривизны k_1 и k_2 поверхности (28.43) будут равны

$$h_1 = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{1 + q_1}}, \quad h_2 = a(1 - q_1),$$

$$k_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4a\sqrt{1-q_1}}, \quad k_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2a\sqrt{1-q_1}}.$$

Тогда линейное дифференциальное уравнение второго порядка (28.22) запишется в виде:

$$\frac{d^2V}{dq_1^2} + \frac{1}{1-q_1^2} \frac{dV}{dq_1} - \frac{n^2}{4(1-q_1^2)} V = 0. \quad (28.44)$$

Уравнение (28.44) уже имеет вид линейного уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. Для единообразия изложения обозначим независимую переменную q_1 в уравнении (28.44) через x . Тогда уравнение (28.44) переписывается следующим образом:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{1}{1-x^2} \frac{dV}{dx} - \frac{n^2}{4(1-x^2)} V = 0. \quad (28.45)$$

Для того, чтобы привести дифференциальное уравнение (28.45) к более простому виду, сделаем замену

$$y(x) = V(x) \frac{(1+x)^{\frac{1}{4}}}{(1-x)^{\frac{1}{4}}}.$$

В результате уравнение (28.45) примет вид:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(n^2x^2 - 4x - n^2 - 1)}{4(x^2 - 1)^2} y. \quad (28.46)$$

Уравнение (28.46) имеет в точности вид, необходимый для того, чтобы применить к этому уравнению алгоритм Ковачича [105]. Функция $r(x)$ в данном случае равна

$$r(x) = -\frac{(n^2x^2 - 4x - n^2 - 1)}{4(x^2 - 1)^2}.$$

Легко видеть, что функция $r(x)$ имеет два конечных полюса в точках $x = 1$ и $x = -1$, и оба эти полюса являются полюсами второго порядка. Разложим

функцию $r(x)$ в сумму простых дробей. Это разложение имеет вид:

$$r(x) = \frac{2n^2 + 1}{16(x+1)} - \frac{2n^2 + 1}{16(x-1)} - \frac{3}{16(x+1)^2} + \frac{5}{16(x+1)^2}.$$

Разложение функции $r(x)$ в ряд в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид:

$$r(x) = -\frac{n^2}{4x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Таким образом, порядок полюса функции $r(x)$ в точке $x = \infty$ равен двум. Следовательно, в соответствии с необходимыми условиями существования лиувиллевых решений (см. Теорему 2.4), у дифференциального уравнения (28.46) могут существовать лиувиллевы решения всех трех типов.

Сначала попытаемся найти у дифференциального уравнения (28.46) лиувиллевы решения вида (2.1), то есть решения, соответствующие Случаю 1 Теоремы 2.1. Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска решения вида (2.1) уравнения (28.46) так, как он описан в пункте 3.1.

Шаг 1. В соответствии с алгоритмом Ковачича вычислим соответствующие конечным полюсам постоянные $[\sqrt{r}]_c$ и постоянные $\alpha_c^\pm$. Для полюса $x = 1$ имеем:

$$[\sqrt{r}]_1 = 0, \quad \alpha_1^+ = \frac{5}{4}, \quad \alpha_1^- = -\frac{1}{4}.$$

Аналогично, для полюса $x = -1$ имеем:

$$[\sqrt{r}]_{-1} = 0, \quad \alpha_{-1}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{-1}^- = \frac{1}{4}.$$

Значения $[\sqrt{r}]_\infty$ и $\alpha_\infty^\pm$ оказываются равными

$$[\sqrt{r}]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-n^2}, \quad \alpha_\infty^- = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-n^2}.$$

Шаг 2. Поскольку число ρ конечных полюсов функции $r(x)$ равно 2, то мы имеем $2^{\rho+1} = 2^3 = 8$ наборов знаков

$$s = (s(\infty), s(1), s(-1)),$$

где $s(\infty)$, $s(1)$ и $s(-1)$ равны, соответственно, $+$ или $-$.

Для каждого из этих наборов по формуле (3.2) вычислим величину d :

$$d = \alpha_{\infty}^{s(\infty)} - \alpha_1^{s(1)} - \alpha_{-1}^{s(-1)}.$$

В соответствии с алгоритмом, d должно быть неотрицательным целым числом. Однако, принимая во внимание условие

$$0 < n^2 < 1,$$

убеждаемся, что постоянная d не будет равна неотрицательному целому числу ни для одного набора значений $\alpha_{\infty}^{s(\infty)}$, $\alpha_1^{s(1)}$, $\alpha_{-1}^{s(-1)}$. Следовательно, в данной задаче у линейного дифференциального уравнения (28.46) не существует лиувиллевых решений вида (2.1).

Попробуем теперь найти у линейного дифференциального уравнения (28.46) лиувиллевы решения вида (2.6), то есть решения, соответствующее Случаю 2 Теоремы 2.1. Необходимые условия существования такого решения у уравнения (28.46) являются выполненными (см. Теорему 2.4). Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска лиувиллевых решений вида (2.6), как он описан в пункте 3.4.

Шаг 1. Найдем сначала множества чисел E_1 и E_{-1} , соответствующие конечным полюсам, и множество E_{∞} , соответствующее полюсу в точке $x = \infty$. Для конечного полюса $x = 1$ множество E_1 будет иметь вид:

$$E_1 = \{-1, 2, 5\}.$$

Аналогично, для конечного полюса $x = -1$ множество E_{-1} будет равно:

$$E_{-1} = \{1, 2, 3\}.$$

Поскольку n является произвольным действительным числом, поэтому будем считать, что множество E_∞ имеет в данном случае вид:

$$E_\infty = \{2\}.$$

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные наборы

$$s = (e_\infty, e_1, e_{-1})$$

элементов множеств E_∞ , E_1 , E_{-1} , причем в каждом наборе хотя бы одно из чисел обязательно должно быть нечетным. Вычислим величину d для каждого набора s по формуле (3.11):

$$d = \frac{1}{2} (e_\infty - e_1 - e_{-1}).$$

В соответствии с алгоритмом число d должно быть неотрицательным целым числом. Заметим, что минимальное значение суммы элементов множеств, соответствующих конечным полюсам, равно нулю. Поэтому максимальное значение постоянной d , вычисляемой по формуле (3.11), оказывается равным $d = 1$. Значению $d = 1$ соответствует набор, элементы которого равны

$$s_1 = (2, -1, 1).$$

Кроме того, у нас имеется набор, для которого постоянная d , вычисляемая по формуле (3.11), оказывается равной нулю. Этот набор имеет вид:

$$s_2 = (2, -1, 3).$$

Для того, чтобы доказать существование или отсутствие лиувиллевых решений вида (2.6) у дифференциального уравнения (28.46), мы должны проверить оба набора s_1 и s_2 , применив к ним алгоритм Ковачича.

Шаг 3. Начнем с проверки набора s_1 . По формуле (3.12) сформируем функцию θ . Для набора s_1 она будет равна:

$$\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right).$$

Искомый многочлен P первой степени будет иметь вид:

$$P = x + B,$$

где B — постоянный коэффициент, подлежащий определению. Для поиска коэффициента B многочлена P воспользуемся уравнением (3.13). После подстановки многочлена P и функции θ в левую часть уравнения (3.13), мы получаем в левой части этого уравнения рациональное выражение вида:

$$\frac{2 - n^2 - n^2 B}{(1-x)(1-x^2)}.$$

Данное выражение обращается в ноль, если B равно

$$B = \frac{2 - n^2}{n^2}.$$

Таким образом, искомый многочлен P имеет вид:

$$P = x + \frac{2 - n^2}{n^2}.$$

Таким образом, общее решение линейного дифференциального уравнения (28.46) выражается через лиувиллевы функции вида (2.6). Возвращаясь к линейному дифференциальному уравнению (28.45), можно сделать вывод, что общее решение уравнения (28.45) в явном виде записывается следующим

образом:

$$V(x) = C_1 \sqrt{2 - n^2 + n^2 x} \sin \left(\int \frac{n^2 \sqrt{(1 - n^2)(1 - x^2)}}{2(2 - n^2 + n^2 x)(1 + x)} dx \right) + \\ + C_2 \sqrt{2 - n^2 + n^2 x} \cos \left(\int \frac{n^2 \sqrt{(1 - n^2)(1 - x^2)}}{2(2 - n^2 + n^2 x)(1 + x)} dx \right).$$

Проверка другого набора s_2 дает те же выводы относительно существования лиувиллевых решений у линейного дифференциального уравнения (28.45).

Окончательно, можно сформулировать следующий результат. Задача о качении тяжелого однородного шара по поверхности такой, что при качении центр шара принадлежит поверхности, полученной вращением арки циклоиды вокруг ее оси симметрии, является интегрируемой в лиувиллевых функциях.

28.5 Качение шара по абсолютно шероховатому тору

Пусть абсолютно шероховатая поверхность, по которой катится шар, такова, что геометрическое место центров шара представляет собой тор. Ранее задача о качении шара по внешней или по внутренней поверхности тора рассматривалась в работах А. А. Афолина [3, 4] и С. Деневой [18, 19]. Однако в этих работах рассматривалась задача о качении шара по тору в предположении, что тором является именно опорная поверхность, по которой катится шар. В рассматриваемой нами задаче по тору движется центр шара. Уравнение тора запишем в виде (28.15)

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} (a + b \cos q_1) \cos q_2 \\ (a + b \cos q_1) \sin q_2 \\ b \sin q_1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в рассматриваемой нами задаче

$$\rho(q_1) = a + b \cos q_1, \quad \zeta(q_1) = b \sin q_1.$$

Здесь a и b — параметры, имеющие размерность длины, и такие, что $a > b$. Тогда коэффициенты Ламе, вычисляемые по формулам (28.16), имеют вид:

$$h_1 = b, \quad h_2 = a + b \cos q_1,$$

а главные кривизны k_1 и k_2 тора, вычисляемые по формулам (28.17), равны

$$k_1 = \frac{1}{b}, \quad k_2 = \frac{\cos q_1}{a + b \cos q_1}.$$

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка (28.22) в рассматриваемом случае принимает вид:

$$\frac{d^2 V}{dq_1^2} + \frac{b \sin q_1}{a + b \cos q_1} \frac{dV}{dq_1} + \frac{n^2 a}{a + b \cos q_1} V = 0. \quad (28.47)$$

В дифференциальном уравнении (28.47) сделаем замену независимой переменной по формуле $\cos q_1 = x$. Тогда уравнение (28.47) примет вид:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{b + ax}{(a + bx)(x^2 - 1)} \frac{dV}{dx} - \frac{n^2 a}{(a + bx)(x^2 - 1)} V = 0. \quad (28.48)$$

Введем теперь параметр x_0 , положив

$$a = -bx_0.$$

Тогда уравнение (28.48) представится в окончательной форме

$$\frac{d^2 V}{dx^2} - \frac{(xx_0 - 1)}{(x - x_0)(x^2 - 1)} \frac{dV}{dx} + \frac{n^2 x_0}{(x - x_0)(x^2 - 1)} V = 0. \quad (28.49)$$

Для того, чтобы привести линейное дифференциальное уравнение второго порядка (28.49) к более простому виду, сделаем замену

$$y(x) = V(x) \frac{(x^2 - 1)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x - x_0}}.$$

Тогда уравнение (28.49) примет вид:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = r(x) y, \quad (28.50)$$

$$r(x) = \frac{4x_0(1-n^2)x^3 + (4n^2x_0^2 - x_0^2 - 6)x^2}{4(x-x_0)^2(x^2-1)^2} +$$

$$+ \frac{2(1+2n^2)x_0x + 3 - 2x_0^2 - 4n^2x_0^2}{4(x-x_0)^2(x^2-1)^2}.$$

Легко видеть, что функция $r(x)$ имеет три конечных полюса в точках $x = 1$, $x = -1$ и $x = x_0$, и все эти полюсы являются полюсами второго порядка. Разложение функции $r(x)$ в ряд в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид:

$$r(x) = \frac{(1-n^2)x_0}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

то есть порядок полюса этой функции в точке $x = \infty$ равен 3. Следовательно, в соответствии с необходимыми условиями существования лиувиллевых решений (см. Теорему 2.4), у линейного дифференциального уравнения второго порядка (28.50) могут существовать лиувиллевы решения всех трех типов. Разложение функции $r(x)$ на простые дроби имеет вид:

$$r(x) = \frac{x_0 + 8n^2x_0 + 3}{16(x_0-1)(x-1)} - \frac{3}{16(x-1)^2} - \frac{x_0 + 8n^2x_0 - 3}{16(x_0+1)(x+1)} -$$

$$- \frac{3}{16(x+1)^2} - \frac{x_0(1+2n^2)}{2(x_0^2-1)(x-x_0)} + \frac{3}{4(x-x_0)^2}.$$

Сначала попытаемся найти у дифференциального уравнения (28.50) лиувиллевы решения вида (2.1), то есть решения, соответствующие Случаю 1 Теоремы 2.1. Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска решения вида (2.1) уравнения (28.50) так, как он описан в пункте 3.1.

Шаг 1. Вычислим следующие величины:

$$[\sqrt{r}]_1 = 0, \quad \alpha_1^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_1^- = \frac{1}{4},$$

$$[\sqrt{r}]_{-1} = 0, \quad \alpha_{-1}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{-1}^- = \frac{1}{4},$$

$$[\sqrt{r}]_{x_0} = 0, \quad \alpha_{x_0}^+ = \frac{3}{2}, \quad \alpha_{x_0}^- = -\frac{1}{2},$$

$$[\sqrt{r}]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = 1, \quad \alpha_\infty^- = 0.$$

Шаг 2. Поскольку число ρ конечных полюсов функции $r(x)$ равно 3, то мы имеем $2^{\rho+1} = 2^4 = 16$ наборов знаков:

$$s = (s(\infty), s(1), s(-1), s(x_0)).$$

Для каждого из этих наборов вычислим величину d по формуле (3.2):

$$d = \alpha_\infty^{s(\infty)} - \alpha_1^{s(1)} - \alpha_{-1}^{s(-1)} - \alpha_{x_0}^{s(x_0)}.$$

В соответствии с алгоритмом, число d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы знаков s и соответствующие им наборы значений α , убеждаемся, что для двух наборов

$$p_1 = (\alpha_\infty^+, \alpha_1^+, \alpha_{-1}^+, \alpha_{x_0}^-) = \left(1, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right),$$

$$p_2 = (\alpha_\infty^-, \alpha_1^-, \alpha_{-1}^-, \alpha_{x_0}^-) = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right),$$

получается $d = 0$, а еще для одного набора

$$p_3 = (\alpha_\infty^+, \alpha_1^-, \alpha_{-1}^-, \alpha_{x_0}^-) = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$$

получается $d = 1$. Все соответствующие наборы нуждаются в проверке.

Рассмотрим набор значений p_1 . Соответствующая функция $\theta = \theta(x)$, вычисляемая по формуле (3.3), для указанного набора значений α имеет вид

$$\theta = \frac{3}{4(x-1)} + \frac{3}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x-x_0)}.$$

Шаг 3. Для найденного на предыдущем шаге набора значений p_1 мы должны найти многочлен P степени $d = 0$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению (3.4). Уравнение (3.4) после подстановки в него функции $\theta = \theta(x)$ и многочлена нулевой степени $P \equiv 1$, примет вид

$$\frac{(n^2 - 1)x_0}{(x^2 - 1)(x - x_0)} = 0. \quad (28.51)$$

Поскольку по физическому смыслу задачи $n^2 < 1$, а кроме того, $x_0 \neq 0$ (в противном случае имеем $a = 0$, что невозможно), следовательно, условие (28.51) не выполняется ни при каких значениях параметров. Таким образом, для набора p_1 уравнение (28.50) не имеет лиувиллевых решений вида (2.1). Аналогичные выводы получаются и при проверке наборов p_2 и p_3 . Таким образом, установлено, что линейное дифференциальное уравнение второго порядка (28.50) не имеет лиувиллевых решений вида (2.1).

Теперь попытаемся найти у линейного дифференциального уравнения (28.50) лиувиллевы решения вида (2.6), то есть решения, соответствующее Случаю 2 Теоремы 2.1. Необходимые условия существования такого решения у уравнения (28.50) являются выполненными (см. Теорему 2.4). Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска лиувиллевых решений вида (2.6), как он описан в пункте 3.4.

Шаг 1. Найдем сначала множества чисел E_c , соответствующие конечным полюсам, и множество E_∞ , соответствующее полюсу в точке $x = \infty$. Для ко-

нечных полюсов $x = 1$ и $x = -1$ множества E_1 и E_{-1} оказываются равными:

$$E_1 = \{1, 2, 3\}, \quad E_{-1} = \{1, 2, 3\}.$$

Множество E_{x_0} равно

$$E_{x_0} = \{-2, 2, 6\}.$$

Наконец, множество E_∞ имеет в данном случае вид:

$$E_\infty = \{0, 2, 4\}.$$

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные наборы

$$s = (e_\infty, e_1, e_{-1}, e_{x_0})$$

элементов множеств $E_\infty, E_1, E_{-1}, E_{x_0}$, причем в каждом наборе хотя бы одно из чисел обязательно должно быть нечетным. Вычислим величину d для каждого набора s по формуле (3.11):

$$d = \frac{1}{2} (e_\infty - e_1 - e_{-1} - e_{x_0}).$$

В соответствии с алгоритмом d должно быть неотрицательным целым числом. Заметим, что минимальное значение суммы элементов множеств, соответствующих конечным полюсам, равно нулю. Поэтому максимальное значение постоянной d , вычисляемой по формуле (3.11), оказывается равным $d = 2$. Значению $d = 2$ соответствует набор, элементы которого равны

$$s_1 = (4, 1, 1, -2).$$

Кроме того, у нас имеется некоторое число наборов, для которых постоянная d , вычисляемая по формуле (3.11), оказывается равной единице или нулю.

Таковыми, в частности, являются наборы:

$$s_2 = (2, 1, 1, -2), \quad d = 1; \quad s_3 = (4, 1, 3, -2), \quad d = 1;$$

$$s_4 = (4, 3, 1, -2), \quad d = 1; \quad s_5 = (0, 1, 1, -2), \quad d = 0;$$

$$s_6 = (2, 1, 3, -2), \quad d = 0; \quad s_7 = (2, 3, 1, -2), \quad d = 0;$$

$$s_8 = (4, 3, 3, -2), \quad d = 0; \quad s_9 = (4, 1, 1, 2), \quad d = 0.$$

Все эти наборы нуждаются в проверке.

Шаг 3. Начнем с проверки набора s_1 . По формуле (3.12) составим функцию $\theta = \theta(x)$. Для набора s_1 она имеет вид:

$$\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{(x-1)} - \frac{2}{(x-x_0)} \right).$$

Искомый многочлен P имеет вид:

$$P = x^2 + B_1x + B_2,$$

где B_1 и B_2 — коэффициенты, подлежащие определению. Для поиска коэффициентов B_1 и B_2 многочлена P воспользуемся уравнением (3.13). После подстановки многочлена P и функции $\theta = \theta(x)$ в левую часть уравнения (3.13), мы получаем в левой части этого уравнения рациональное выражение. В числителе этого выражения стоит многочлен второй степени следующего вида:

$$P_2 = 2x_0(n^2 - 1)x^2 + \dots.$$

Поскольку по физическому смыслу задачи $n^2 < 1$, а кроме того, $x_0 \neq 0$, следовательно полученное выражение не может быть тождественно равным нулю ни при каких значениях параметров. Таким образом, для набора s_1 уравне-

ние (28.50) не имеет лиувиллевых решений вида (2.6). Аналогичные выводы получаются и при проверке наборов $s_2 \dots s_9$: для существования лиувиллевых решений должно выполняться одно из условий: либо $n^2 - 1 = 0$, либо $x_0 = 0$, что невозможно. Таким образом, уравнение (28.50) не имеет лиувиллевых решений вида (2.6).

Аналогичные выводы получаются и при применении алгоритма для поиска лиувиллевых решений вида (2.10) у линейного дифференциального уравнения второго порядка (28.50). Итак, окончательно можно сделать вывод, что линейное дифференциальное уравнение второго порядка (28.50) не имеет лиувиллевых решений. Попытаемся, однако, определить, с помощью каких функций выражается общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка (28.47). Для этого снова обратимся к уравнению (28.47) и сделаем в нем замену независимой переменной по формуле $1 + \cos q_1 = 2x$. Тогда линейное дифференциальное уравнение (28.47) примет вид:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{2ax - a + b}{2x(x-1)(2bx - b + a)} \frac{dV}{dx} - \frac{n^2a}{x(x-1)(2bx - b + a)} V = 0. \quad (28.52)$$

Вводя обозначение $a = b(1 - 2x_0)$, перепишем полученное линейное дифференциальное уравнение второго порядка в виде:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{x-x_0} \right) \frac{dV}{dx} + \frac{(2x_0-1)n^2}{2x(x-1)(x-x_0)} V = 0. \quad (28.53)$$

Уравнение (28.53) является линейным дифференциальным уравнением Хейна [24, 151]. Таким образом, рассматриваемая задача о качении шара по поверхности вращения такой, что при качении центр шара принадлежит тору, интегрируется в функциях Хейна [24, 151]. Функции Хейна, также как и гипергеометрические функции, не являются лиувиллевыми функциями. Поэтому применение алгоритма Ковачича к данному дифференциальному уравнению не позволило найти его общее решение.

28.6 Качение шара по поверхности псевдосферы

Пусть теперь поверхность, по которой катится шар, такова, что при качении шара по этой поверхности его центр принадлежит поверхности псевдосферы, называемой также поверхностью Бельтрами. Функции $\rho = \rho(q_1)$ и $\zeta = \zeta(q_1)$, параметрически задающие соответствующую поверхность вращения, имеют вид:

$$\rho(q_1) = a \sin q_1, \quad \zeta(q_1) = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{q_1}{2} + \cos q_1 \right), \quad (28.54)$$

где a — некоторая положительная постоянная. Коэффициенты Ламе h_1 , h_2 и главные кривизны k_1 и k_2 поверхности (28.54) будут равны

$$h_1 = \frac{a \cos q_1}{\sin q_1}, \quad h_2 = a \sin q_1, \quad k_1 = -\frac{\sin q_1}{a \cos q_1}, \quad k_2 = \frac{\cos q_1}{a \sin q_1}.$$

Тогда линейное дифференциальное уравнение второго порядка (28.22) запишется в виде:

$$\frac{d^2 V}{dq_1^2} - \frac{\cos q_1}{\sin q_1} \frac{dV}{dq_1} + \frac{n^2}{\sin^2 q_1} V = 0. \quad (28.55)$$

В дифференциальном уравнении (28.55) сделаем замену независимой переменной по формуле

$$\sin^2 q_1 = x.$$

Тогда уравнение (28.55) примет вид уравнения с рациональными коэффициентами

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{1}{2(x-1)} \frac{dV}{dx} - \frac{n^2}{4x^2(x-1)} V = 0. \quad (28.56)$$

Для того, чтобы привести дифференциальное уравнение (28.56) к более простому виду, сделаем замену

$$y(x) = V(x) (1-x)^{\frac{1}{4}}.$$

Тогда линейное дифференциальное уравнение второго порядка (28.56) переписывается следующим образом:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{(3x^2 - 4n^2x + 4n^2)}{16x^2(x-1)^2}y. \quad (28.57)$$

Уравнение (28.57) имеет в точности вид, необходимый для того, чтобы применить к этому уравнению алгоритм Ковачича [105]. Функция $r(x)$ в данном случае равна

$$r(x) = -\frac{(3x^2 - 4n^2x + 4n^2)}{16x^2(x-1)^2}.$$

Легко видеть, что функция $r(x)$ имеет два конечных полюса в точках $x = 0$ и $x = 1$, и оба эти полюса являются полюсами второго порядка. Разложим функцию $r(x)$ в сумму простых дробей. Это разложение имеет вид:

$$r(x) = -\frac{n^2}{4x} - \frac{n^2}{4x^2} + \frac{n^2}{4(x-1)} - \frac{3}{16(x-1)^2}.$$

Разложение функции $r(x)$ в ряд в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид:

$$r(x) = -\frac{3}{16x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Таким образом, порядок полюса функции $r(x)$ в точке $x = \infty$ равен двум. Следовательно, в соответствии с необходимыми условиями существования лиувиллевых решений (см. Теорему 2.4), у дифференциального уравнения (28.57) могут существовать лиувиллевы решения всех трех типов.

Сначала попытаемся найти у дифференциального уравнения (28.57) лиувиллевы решения вида (2.1), то есть решения, соответствующие Случаю 1 Теоремы 2.1. Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска решения вида (2.1) уравнения (28.57) так, как он описан в пункте 3.1.

Шаг 1. В соответствии с алгоритмом Ковачича вычислим соответствующие конечным полюсам постоянные $[\sqrt{r}]_c$ и постоянные $\alpha_c^\pm$. Для полюса $x = 1$ име-

ем:

$$[\sqrt{r}]_1 = 0, \quad \alpha_1^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_1^- = \frac{1}{4}.$$

Аналогично, для полюса $x = 0$ имеем:

$$[\sqrt{r}]_0 = 0, \quad \alpha_0^+ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-n^2}, \quad \alpha_0^- = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-n^2}.$$

Значения $[\sqrt{r}]_\infty$ и $\alpha_\infty^\pm$ оказываются равными

$$[\sqrt{r}]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_\infty^- = \frac{1}{4}.$$

Шаг 2. Поскольку число ρ конечных полюсов функции $r(x)$ равно 2, то мы имеем $2^{\rho+1} = 2^3 = 8$ наборов знаков

$$s = (s(\infty), s(0), s(1)),$$

где $s(\infty)$, $s(0)$ и $s(1)$ равны, соответственно, $+$ или $-$.

Для каждого из этих наборов по формуле (3.2) вычислим величину d :

$$d = \alpha_\infty^{s(\infty)} - \alpha_0^{s(0)} - \alpha_1^{s(1)}.$$

В соответствии с алгоритмом, d должно быть неотрицательным целым числом. Однако, принимая во внимание условие

$$0 < n^2 < 1,$$

убеждаемся, что постоянная d не будет равна неотрицательному целому числу ни для одного набора значений $\alpha_\infty^{s(\infty)}$, $\alpha_0^{s(0)}$, $\alpha_1^{s(1)}$. Следовательно, в данной задаче у линейного дифференциального уравнения (28.57) не существует лиувиллевых решений вида (2.1).

Попробуем теперь найти у линейного дифференциального уравнения (28.57) лиувиллевы решения вида (2.6), то есть решения, соответствующее

Случаю 2 Теоремы 2.1. Необходимые условия существования такого решения у уравнения (28.57) являются выполненными (см. Теорему 2.4). Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска лиувиллевых решений вида (2.6), как он описан в пункте 3.4.

Шаг 1. Найдем сначала множества чисел E_0 и E_1 , соответствующие конечным полюсам, и множество E_∞ , соответствующее полюсу в точке $x = \infty$. В силу того, что $0 < n^2 < 1$, для конечного полюса $x = 0$ получаем:

$$E_0 = \{2\}.$$

Для конечного полюса $x = 1$ множество E_1 будет иметь вид:

$$E_1 = \{1, 2, 3\}.$$

Аналогично, множество E_∞ в данном случае равно:

$$E_\infty = \{1, 2, 3\}.$$

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные наборы

$$s = (e_\infty, e_0, e_1)$$

элементов множеств E_∞, E_0, E_1 , причем в каждом наборе хотя бы одно из чисел обязательно должно быть нечетным. Вычислим величину d для каждого набора s по формуле (3.11):

$$d = \frac{1}{2} (e_\infty - e_0 - e_1).$$

В соответствии с алгоритмом число d должно быть неотрицательным целым числом. Следовательно, существует всего лишь один набор, для которого d будет неотрицательным целым числом. Этот набор имеет вид

$$s_1 = (3, 2, 1),$$

и для него постоянная $d = 0$. Для того, чтобы доказать существование или отсутствие лиувиллевых решений типа 2 у дифференциального уравнения (28.57), мы должны проверить применить к набору s_1 алгоритм Ковачича.

Шаг 3. По формуле (3.12) сформируем функцию $\theta = \theta(x)$. Для набора s_1 она будет равна:

$$\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} \right).$$

Искомый многочлен P нулевой степени будет равен $P \equiv 1$. После подстановки многочлена P и функции $\theta = \theta(x)$ в левую часть уравнения (3.13), мы убеждаемся, что оно выполняется тождественно. Следовательно, при любом значении параметра n общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка (28.57) выражается через лиувиллевы функции вида (2.6). Возвращаясь к линейному дифференциальному уравнению (28.55), можно сделать вывод, что общее решение уравнения (28.55) в явном виде записывается следующим образом:

$$V(q_1) = \sin q_1 \left(C_1 \left(\frac{1 + \cos q_1}{1 - \cos q_1} \right)^{\frac{\sqrt{1-n^2}}{2}} + C_2 \left(\frac{1 + \cos q_1}{1 - \cos q_1} \right)^{-\frac{\sqrt{1-n^2}}{2}} \right).$$

Окончательно, можно сформулировать следующий результат. Задача о качении тяжелого однородного шара по поверхности такой, что при качении центр шара принадлежит поверхности псевдосферы, является интегрируемой в лиувиллевых функциях.

Замечание 28.1. Впервые утверждение, что если тяжелый однородный шар катится по поверхности вращения такой, что при качении центр шара принадлежит поверхности псевдосферы, то все первые интегралы задачи могут быть записаны в явном виде, было получено в работе А. В. Борисова, И. С. Мамаева и И. А. Бизяева [75]. Это утверждение равносильно нашему выводу о том, что данная задача интегрируется в лиувиллевых функциях. $\square$

28.7 Качение шара по поверхности катеноида

Пусть поверхность, по которой катится шар, такова, что при качении шара по этой поверхности его центр принадлежит поверхности катеноида. Функции $\rho = \rho(q_1)$ и $\zeta = \zeta(q_1)$, параметрически задающие поверхность катеноида вращения, имеют вид:

$$\rho(q_1) = a \operatorname{ch} q_1, \quad \zeta = a q_1, \quad (28.58)$$

где a — некоторая положительная постоянная. В этом случае коэффициенты Лапе h_1, h_2 и главные кривизны k_1, k_2 поверхности (28.58) будут равны

$$h_1 = h_2 = a \operatorname{ch} q_1, \quad k_1 = -\frac{1}{a \operatorname{ch}^2 q_1}, \quad k_2 = \frac{1}{a \operatorname{ch}^2 q_1}.$$

С учетом явных выражений для h_1, h_2, k_1 и k_2 линейное дифференциальное уравнение второго порядка (28.22) запишется в виде:

$$\frac{d^2 V}{dq_1^2} + \frac{2n^2}{\operatorname{ch}^2 q_1} V = 0. \quad (28.59)$$

В дифференциальном уравнении (28.59) сделаем замену независимой переменной по формуле

$$\operatorname{ch}^2 q_1 = x.$$

Тогда уравнение (28.59) примет вид уравнения с рациональными коэффициентами:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{2x-1}{2(x-1)} \frac{dV}{dx} + \frac{n^2}{2x^2(x-1)} V = 0. \quad (28.60)$$

Для того, чтобы привести линейное дифференциальное уравнение (28.60) к более простому виду, сделаем замену

$$y(x) = V(x) (x(x-1))^{\frac{1}{4}}.$$

Тогда уравнение линейное дифференциальное уравнение второго порядка (28.60) переписывается следующим образом:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{4x^2 - 4x + 3 + 8n^2 x - 8n^2}{16x^2 (x - 1)^2} y. \quad (28.61)$$

Уравнение (28.61) имеет в точности вид, необходимый для того, чтобы применить к этому уравнению алгоритм Ковачича [105]. Функция $r(x)$ в данном случае равна

$$r(x) = -\frac{4x^2 - 4x + 3 + 8n^2 x - 8n^2}{16x^2 (x - 1)^2}.$$

Легко видеть, что функция $r(x)$ имеет два конечных полюса в точках $x = 0$ и $x = 1$, и оба эти полюса являются полюсами второго порядка. Разложим функцию $r(x)$ в сумму простых дробей. Это разложение имеет вид:

$$r(x) = -\frac{3}{16(x-1)^2} + \frac{1-4n^2}{8(x-1)} - \frac{1-4n^2}{8x} + \frac{8n^2-3}{16x^2}.$$

Разложение функции $r(x)$ в ряд в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид:

$$r(x) = -\frac{1}{4x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Таким образом, порядок полюса функции $r(x)$ в точке $x = \infty$ равен двум. Следовательно, в соответствии с необходимыми условиями существования лиувиллевых решений (см. Теорему 2.4), у линейного дифференциального уравнения второго порядка (28.61) могут существовать лиувиллевы решения всех трех типов.

Заметим, что в случае, когда $8n^2 - 3 = 0$, то есть когда

$$n = \sqrt{\frac{3}{8}},$$

точка $x = 0$ становится полюсом первого порядка функции $r(x)$. Этот случай нуждается в отдельном рассмотрении. Начнем с изучения общего случая, когда

$0 < n < 1$ и $8n^2 - 3 \neq 0$, и попытаемся найти у дифференциального уравнения (28.61) лиувиллевы решения вида (2.1), то есть решения, соответствующие Случаю 1 Теоремы 2.1. Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска решения вида (2.1) уравнения (28.50) так, как он описан в пункте 3.1.

Шаг 1. В соответствии с алгоритмом Ковачича вычислим соответствующие конечным полюсам постоянные $[\sqrt{r}]_c$ и постоянные $\alpha_c^\pm$. Для полюса $x = 1$ имеем:

$$[\sqrt{r}]_1 = 0, \quad \alpha_1^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_1^- = \frac{1}{4}.$$

Аналогично, для полюса $x = 0$ имеем:

$$[\sqrt{r}]_0 = 0, \quad \alpha_0^+ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + 2n^2}, \quad \alpha_0^- = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + 2n^2}.$$

Значения $[\sqrt{r}]_\infty$ и $\alpha_\infty^\pm$ оказываются равными

$$[\sqrt{r}]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = \frac{1}{2}, \quad \alpha_\infty^- = \frac{1}{2}.$$

Шаг 2. Поскольку число ρ конечных полюсов функции $r(x)$ равно 2, то мы имеем $2^{\rho+1} = 2^3 = 8$ наборов знаков

$$s = (s(\infty), s(0), s(1)),$$

где $s(\infty)$, $s(0)$ и $s(1)$ равны, соответственно, $+$ или $-$.

Для каждого из этих наборов по формуле (3.2) вычислим величину d :

$$d = \alpha_\infty^{s(\infty)} - \alpha_0^{s(0)} - \alpha_1^{s(1)}.$$

В соответствии с алгоритмом, d должно быть неотрицательным целым числом. Однако, принимая во внимание условие

$$0 < n^2 < 1,$$

убеждаемся, что постоянная d не будет равна неотрицательному целому числу ни для одного набора значений $\alpha_\infty^{s(\infty)}$, $\alpha_0^{s(0)}$, $\alpha_1^{s(1)}$. Следовательно, в данной задаче у линейного дифференциального уравнения (28.61) не существует лиувиллевых решений вида (2.1).

Попробуем теперь найти у линейного дифференциального уравнения (28.61) лиувиллевы решения вида (2.6), то есть решения, соответствующее Случаю 2 Теоремы 2.1. Необходимые условия существования такого решения у уравнения (28.61) являются выполненными (см. Теорему 2.4). Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска лиувиллевых решений вида (2.6), как он описан в пункте 3.4.

Шаг 1. Найдем сначала множества чисел E_0 и E_1 , соответствующие конечным полюсам, и множество E_∞ , соответствующее полюсу в точке $x = \infty$. В силу того, что $0 < n^2 < 1$ и $8n^2 - 3 \neq 0$, для конечного полюса $x = 0$ получаем:

$$E_0 = \{2\}.$$

Для конечного полюса $x = 1$ множество E_1 будет иметь вид:

$$E_1 = \{1, 2, 3\}.$$

Аналогично, множество E_∞ в данном случае равно:

$$E_\infty = \{2\}.$$

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные наборы

$$s = (e_\infty, e_0, e_1)$$

элементов множеств E_∞ , E_0 , E_1 , причем в каждом наборе хотя бы одно из чисел обязательно должно быть нечетным. Вычислим величину d для каждого набора

s по формуле (3.11):

$$d = \frac{1}{2} (e_{\infty} - e_0 - e_1).$$

В соответствии с алгоритмом число d должно быть неотрицательным целым числом. Однако легко видеть, что не существует ни одного набора s , для которого число d было бы неотрицательным целым числом. Следовательно, уравнение (28.61) не имеет лиувиллевых решений вида (2.6).

Аналогичные выводы получаются и при применении алгоритма для поиска лиувиллевых решений вида (2.10) у линейного дифференциального уравнения второго порядка (28.61). Вывод об отсутствии лиувиллевых решений у дифференциального уравнения (28.61) имеет место также и в частном случае, когда

$$n = \sqrt{\frac{3}{8}}.$$

Итак, окончательно можно сделать вывод, что линейное дифференциальное уравнение второго порядка (28.61) не имеет лиувиллевых решений. Попробуем, однако, определить, с помощью каких функций выражается общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка (28.61). Для этого снова обратимся к уравнению (28.60) и сделаем в нем замену переменных по формуле

$$V(x) = x^{\frac{1}{4}} W(x).$$

Тогда дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $W(x)$, будет иметь вид:

$$x^2 \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{(3x-2)x}{2(x-1)} \frac{dW}{dx} + \frac{x+1+8n^2}{16(x-1)} W = 0. \quad (28.62)$$

Теперь в уравнении (28.62) сделаем замену независимой переменной по формуле

$$z = \sqrt{1-x},$$

тогда это уравнение примет вид:

$$(1 - z^2) \frac{d^2 W}{dz^2} - 2z \frac{dW}{dz} + \frac{z^2 - 2 - 8n^2}{4(1 - z^2)} W = 0. \quad (28.63)$$

Уравнение (28.63) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка, называемое уравнением Лежандра [17, 24]. Его общее решение выражается через функции Лежандра [17, 24]. Функциями Лежандра $P_\nu^\mu(z)$ и $Q_\nu^\mu(z)$ называют два линейно независимых решения уравнения Лежандра

$$(1 - z^2) \frac{d^2 W}{dz^2} - 2z \frac{dW}{dz} + \left[\nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{(1 - z^2)} \right] W = 0. \quad (28.64)$$

Для уравнения (28.63) соответствующие значения параметров μ и ν равны

$$\mu = \frac{\sqrt{1 + 8n^2}}{2}, \quad \nu = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что задача о качении шара по поверхности такой, что при качении шара его центр принадлежит катеноиду вращения, решается в функциях Лежандра. Функции Лежандра представляют собой частный случай гипергеометрических функций и не являются лиувиллевыми функциями. Поэтому применение алгоритма Ковачича к данному дифференциальному уравнению не позволило найти его общее решение.

В следующей главе диссертации рассматривается задача о качении динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения (тела вращения), по поверхности сферы в поле сил, потенциал которых зависит от расстояния между центром сферы и центром тяжести тела. Показано, что решение данной задачи также приводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка.

ГЛАВА 5. ЗАДАЧА О КАЧЕНИИ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ПО ПОВЕРХНОСТИ СФЕРЫ

29 Введение

В 1897 году С. А. Чаплыгин в своей работе [59] установил, что в случае качения тяжелого тела вращения по горизонтальной плоскости решение соответствующей задачи сводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка относительно компоненты угловой скорости тела в проекции на его ось динамической симметрии. Эта задача рассматривалась нами во второй главе работы. В 1910 году П. В. Воронец в работе [15] показал, что рассуждения С. А. Чаплыгина без изменений переносятся на случай качения тела вращения по поверхности сферы, если приложенные к твердому телу силы имеют равнодействующую, приложенную к центру масс O тела, направленную к центру O_1 опорной сферы, и зависящую только от расстояния между точками O и O_1 . В этом случае решение задачи сводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка или системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно компонент угловой скорости в проекции на ось динамической симметрии тела и на нормаль к поверхности сферы. Позднее тот же результат был получен в работах Ю. П. Бычкова [13, 14].

В данной главе изучается задача о качении тела вращения по поверхности сферы при условиях П. В. Воронца [15]. Получена система двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка, к интегрированию которой сводится решение задачи. Рассмотрена задача о качении неоднородного динамически симметричного шара по поверхности сферы при условиях П. В. Воронца [15]. Получено линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно компоненты угловой скорости шара в проекции на его ось динамической симметрии. При помощи алгоритма Ковачича исследован вопрос о существова-

нии лиувиллевых решений в данной задаче. Показано, что при всех значениях параметров общее решение соответствующего линейного дифференциального уравнения второго порядка выражается через лиувиллевы функции.

30 Постановка задачи

Рассмотрим общую задачу о качении тела, ограниченного выпуклой поверхностью S , по неподвижной опорной поверхности S_1 . Следуя работе П. В. Воронца [15], для описания движения тела введем четыре системы координат (в скобках указаны обозначения для единичных базисных векторов осей):

$Ox_1y_1z_1 (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ — неподвижная система координат с началом в некоторой точке неподвижной опорной поверхности;

$Oxyz (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ — система координат, жестко связанная с движущимся твердым телом; ее начало выбрано в центре масс O движущегося тела, а оси направлены по главным осям инерции;

$Puvn (\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_n)$ — подвижная система координат с началом в точке контакта P тела с опорной поверхностью и осями, направленными по касательным к координатным линиям и по нормали к поверхности S тела;

$Pu_1v_1n_1 (\mathbf{e}_{u_1}, \mathbf{e}_{v_1}, \mathbf{e}_{n_1})$ — подвижная система координат, оси которой направлены по касательным к координатным линиям и по нормали к неподвижной опорной поверхности S_1 .

Пусть поверхность S , ограничивающая твердое тело, задается в системе координат $Oxyz$ координатами точки контакта P поверхности S тела с неподвижной поверхностью S_1 :

$$\boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{GP} = x(u, v) \mathbf{e}_1 + y(u, v) \mathbf{e}_2 + z(u, v) \mathbf{e}_3,$$

где u и v — гауссовы криволинейные координаты точки P на поверхности S . Будем считать, что координатные линии u ($v = \text{const}$) и v ($u = \text{const}$) являются

линиями кривизны на поверхности S . Пусть E, F, G — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S , тогда по формулам из дифференциальной геометрии

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2,$$

$$F = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) = 0.$$

В таком случае единичные базисные векторы $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_n$ системы координат $Puvn$ связаны с единичными базисными векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ системы координат $Oxyz$ соотношениями

$$\mathbf{e}_u = \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \mathbf{e}_3 \right),$$

$$\mathbf{e}_v = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \mathbf{e}_3 \right),$$

$$\mathbf{e}_n = [\mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_v].$$

Взаимную ориентацию систем координат $Oxyz$ и $Puvn$ определим при помощи матрицы направляющих косинусов таблицей

	x	y	z
u	c_{11}	c_{12}	c_{13}
v	c_{21}	c_{22}	c_{23}
n	c_{31}	c_{32}	c_{33}

Тогда для коэффициентов c_{ij} справедливы следующие формулы:

$$c_{11} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad c_{12} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad c_{13} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial z}{\partial u};$$

$$c_{21} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad c_{22} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad c_{23} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v};$$

$$c_{31} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right), \quad c_{32} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right),$$

$$c_{33} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right).$$

Коэффициенты L , M , N второй квадратичной формы поверхности S катящегося тела в явном виде записываются следующим образом:

$$L = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} c_{31} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} c_{32} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} c_{33}, \quad N = \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} c_{31} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} c_{32} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} c_{33},$$

$$M = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} c_{31} + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} c_{32} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} c_{33} = 0.$$

Будем считать, что в системе координат $O_1 x_1 y_1 z_1$ опорная поверхность задается уравнениями

$$x_1 = x_1(u_1, v_1), \quad y_1 = y_1(u_1, v_1), \quad z_1 = z_1(u_1, v_1),$$

где u_1 и v_1 — гауссовы криволинейные координаты точки P на опорной поверхности S_1 . Коэффициенты первой и второй квадратичной формы опорной поверхности обозначим соответственно E_1 , F_1 , G_1 и L_1 , M_1 , N_1 . С учетом того, как выбраны оси системы координат $Pu_1 v_1 n_1$ имеем:

$$F_1 = 0, \quad M_1 = 0.$$

Следуя работе П. В. Воронца [15], в качестве обобщенных координат в задаче о качении твердого тела по неподвижной поверхности, выберем следующие пять переменных: две гауссовы координаты u , v , определяющие положение точки касания P тела и опорной поверхности на участке поверхности катящегося тела S ; две гауссовы координаты u_1 , v_1 , определяющие положение точки P на участке опорной поверхности S_1 , и угол θ между осями Pu_1 и Pv (Рис. 13).

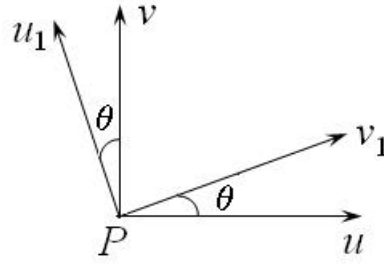


Рис. 13. Подвижные системы координат Puv и Pu_1v_1 .

Поскольку качение тела происходит без скольжения, то координаты u , v , u_1 , v_1 и θ в каждый момент времени должны удовлетворять двум неголономным связям. Получим соответствующие уравнения связей. Условие отсутствия скольжения означает, что вектор скорости геометрической точки P при её перемещении по поверхности S равен вектору скорости точки P при её перемещении по S_1 . Пусть a , b — проекции на оси Pu и Pv скорости геометрической точки P при её перемещении по S , а a_1 , b_1 — проекции на оси Pu_1 и Pv_1 её скорости при перемещении по S_1 . Учитывая, что скорость перемещения точки P по S равна

$$\mathbf{v}_1 = a\mathbf{e}_u + b\mathbf{e}_v = \sqrt{E}\dot{u}\mathbf{e}_u + \sqrt{G}\dot{v}\mathbf{e}_v,$$

а скорость перемещения точки P по S_1 равна

$$\mathbf{v}_2 = a_1\mathbf{e}_{u_1} + b_1\mathbf{e}_{v_1} = \sqrt{E_1}\dot{u}_1\mathbf{e}_{u_1} + \sqrt{G_1}\dot{v}_1\mathbf{e}_{v_1}.$$

Имеем:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2.$$

Из того, как определен угол θ следует, что

$$\mathbf{e}_{u_1} = -\sin\theta\mathbf{e}_u + \cos\theta\mathbf{e}_v, \quad \mathbf{e}_{v_1} = \cos\theta\mathbf{e}_u + \sin\theta\mathbf{e}_v.$$

Поэтому

$$a\mathbf{e}_u + b\mathbf{e}_v = a_1(-\sin\theta\mathbf{e}_u + \cos\theta\mathbf{e}_v) + b_1(\cos\theta\mathbf{e}_u + \sin\theta\mathbf{e}_v).$$

Из последнего равенства следуют два условия

$$a = b_1 \cos \theta - a_1 \sin \theta, \quad b = b_1 \sin \theta + a_1 \cos \theta.$$

Разрешая данные соотношения относительно a_1 и b_1 , находим:

$$a_1 = -a \sin \theta + b \cos \theta, \quad b_1 = a \cos \theta + b \sin \theta.$$

Таким образом, условия отсутствия скольжения могут быть записаны в виде:

$$\sqrt{E_1} \dot{u}_1 = -\sqrt{E} \dot{u} \sin \theta + \sqrt{G} \dot{v} \cos \theta, \quad \sqrt{G_1} \dot{v}_1 = \sqrt{E} \dot{u} \cos \theta + \sqrt{G} \dot{v} \sin \theta. \quad (30.1)$$

Пусть вектор скорости $\mathbf{v}$ центра масс O тела и его абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ задаются в системе координат $Oxyz$ компонентами w_1, w_2, w_3 и $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ соответственно. Из условия того, что точка касания P тела находится в мгновенном покое, получим формулы, связывающие компоненты векторов $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$:

$$\begin{aligned} w_1 + \omega_2 z - \omega_3 y &= 0, & w_2 + \omega_3 x - \omega_1 z &= 0, \\ w_3 + \omega_1 y - \omega_2 x &= 0. \end{aligned} \quad (30.2)$$

Следующий параграф посвящен нахождению явного выражения для вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости катящегося тела.

31 Угловая скорость катящегося тела

Для нахождения абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ катящегося твердого тела воспользуемся формулой сложения угловых скоростей [10]. Разложим угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ твердого тела на три составляющих:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\Omega}_2 + \boldsymbol{\Omega}_3,$$

где Ω_1 — угловая скорость системы координат $Oxyz$ относительно системы координат $Puvn$, Ω_2 — угловая скорость системы координат $Puvn$ относительно системы координат $Pu_1v_1n_1$ и Ω_3 — угловая скорость системы координат $Pu_1v_1n_1$ относительно неподвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$.

Пусть в системе координат $Puvn$ угловая скорость Ω_1 записывается в виде:

$$\Omega_1 = \Omega_{11}\mathbf{e}_u + \Omega_{12}\mathbf{e}_v + \Omega_{13}\mathbf{e}_n.$$

Тогда компоненты Ω_{11} , Ω_{12} , Ω_{13} угловой скорости Ω_1 могут быть определены из следующего кинематического соотношения

$$\dot{\mathbf{C}}\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_{13} & \Omega_{12} \\ \Omega_{13} & 0 & -\Omega_{11} \\ -\Omega_{12} & \Omega_{11} & 0 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{C} = (c_{ij})$ — матрица перехода от системы координат $Oxyz$ к системе координат $Puvn$, компоненты которой были выписаны нами выше. Производя необходимые вычисления, получим следующие выражения для компонент угловой скорости Ω_1 :

$$\Omega_{11} = -\frac{N}{\sqrt{G}}\dot{v}, \quad \Omega_{12} = \frac{L}{\sqrt{E}}\dot{u}, \quad \Omega_{13} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial E}{\partial v}\dot{u} - \frac{\partial G}{\partial u}\dot{v} \right). \quad (31.1)$$

Угловую скорость Ω_3 представим в виде:

$$\Omega_3 = \Omega_{31}\mathbf{e}_{u_1} + \Omega_{32}\mathbf{e}_{v_1} + \Omega_{33}\mathbf{e}_{n_1}.$$

Компоненты Ω_{31} , Ω_{32} , Ω_{33} вектора угловой скорости Ω_3 на оси системы координат $Pu_1v_1n_1$ можно найти аналогично тому, как выше были найдены величины Ω_{11} , Ω_{12} , Ω_{13} — проекции вектора Ω_1 на оси системы координат $Puvn$; нужно только изменить знак каждой из правых частей равенств (31.1) на противоположный и приписать индекс "1" всем величинам, входящим в эти правые

части. В результате получим:

$$\Omega_{31} = \frac{N_1}{\sqrt{G_1}}\dot{v}_1, \quad \Omega_{32} = -\frac{L_1}{\sqrt{E_1}}\dot{u}_1, \quad \Omega_{33} = -\frac{1}{\sqrt{E_1G_1}} \left(\frac{\partial E_1}{\partial v_1}\dot{u}_1 - \frac{\partial G_1}{\partial u_1}\dot{v}_1 \right). \quad (31.2)$$

Угловая скорость $\boldsymbol{\Omega}_2$ направлена по оси Pn_1 и равна

$$\boldsymbol{\Omega}_2 = \dot{\theta} \mathbf{e}_{n_1}.$$

Воспользуемся соотношениями, связывающими единичные векторы $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$ с единичными векторами $\mathbf{e}_{u_1}$, $\mathbf{e}_{v_1}$, а также заметим, что $\mathbf{e}_{n_1} = -\mathbf{e}_n$. Если записать абсолютную угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ катящегося тела в виде

$$\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{e}_u + q\mathbf{e}_v + n\mathbf{e}_n,$$

то для компонент p , q , n получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} p &= -\frac{N}{\sqrt{G}}\dot{v} - \frac{N_1}{\sqrt{G_1}}\dot{v}_1 \sin \theta - \frac{L_1}{\sqrt{E_1}}\dot{u}_1 \cos \theta; \\ q &= \frac{L}{\sqrt{E}}\dot{u} + \frac{N_1}{\sqrt{G_1}}\dot{v}_1 \cos \theta - \frac{L_1}{\sqrt{E_1}}\dot{u}_1 \sin \theta; \\ n &= -\dot{\theta} + \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial E}{\partial v}\dot{u} - \frac{\partial G}{\partial u}\dot{v} \right) + \frac{1}{\sqrt{E_1G_1}} \left(\frac{\partial E_1}{\partial v_1}\dot{u}_1 - \frac{\partial G_1}{\partial u_1}\dot{v}_1 \right). \end{aligned} \quad (31.3)$$

Воспользовавшись уравнениями связей (30.1), исключим $\dot{u}_1$ и $\dot{v}_1$ из компонент p и q угловой скорости тела, определяемых формулами (31.2). В результате компоненты p и q переписываются в виде:

$$\begin{aligned} p &= -\left(\frac{N}{G} + \frac{N_1}{G_1} \right) \sqrt{G}\dot{v} + \frac{(L_1G_1 - N_1E_1)}{E_1G_1} \left(\sqrt{E}\dot{u} \sin \theta - \sqrt{G}\dot{v} \cos \theta \right) \cos \theta; \\ q &= \left(\frac{L}{E} + \frac{L_1}{E_1} \right) \sqrt{E}\dot{u} - \frac{(L_1G_1 - N_1E_1)}{E_1G_1} \left(\sqrt{E}\dot{u} \cos \theta + \sqrt{G}\dot{v} \sin \theta \right) \cos \theta. \end{aligned} \quad (31.4)$$

Предположим теперь, что опорная поверхность S_1 представляет собой сферу радиуса R_1 . Начало неподвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$ выберем в центре сферы. Тогда справедливы следующие соотношения

$$\frac{L_1}{E_1} = \frac{N_1}{G_1} = -\frac{1}{R_1},$$

и, следовательно,

$$L_1G_1 - N_1E_1 = 0.$$

В результате компоненты p и q угловой скорости твердого тела существенно упрощаются. Вводя обозначения

$$\sigma = \left(\frac{L}{E} - \frac{1}{R_1} \right) \sqrt{E}, \quad \tau = - \left(\frac{N}{G} - \frac{1}{R_1} \right) \sqrt{G},$$

представим эти компоненты в виде:

$$p = \tau \dot{v}, \quad q = \sigma \dot{u}. \quad (31.5)$$

Выражение для компоненты n угловой скорости оставим без изменений. Заметим, что если в проекции на оси системы координат $Puvn$ угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ имеет вид:

$$\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{e}_u + q\mathbf{e}_v + n\mathbf{e}_n,$$

то в проекции на оси системы координат $Oxyz$, жестко связанной с твердым телом, ее компоненты равны

$$\begin{aligned} \omega_1 &= c_{11}p + c_{21}q + c_{31}n, & \omega_2 &= c_{12}p + c_{22}q + c_{32}n, \\ \omega_3 &= c_{13}p + c_{23}q + c_{33}n. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к выводу уравнений движения твердого тела, катящегося по абсолютно шероховатой сфере.

32 Уравнения движения

При выводе уравнений движения твердого тела, катящегося без скольжения по неподвижной опорной сфере, будем предполагать, что силы, действующие на тело, имеют потенциал, который зависит только от координат u и v точки касания P . В частности, такой случай имеет место, когда приложенные к твердому телу силы имеют равнодействующую, приложенную к центру масс O твердого тела, направленную к центру O_1 опорной сферы и зависящую только от расстояния между точками O и O_1 . Таким образом, будем считать, что

$$V = V(u, v). \quad (32.1)$$

Кинетическая энергия катящегося тела имеет вид:

$$T = \frac{m}{2} (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) + \frac{1}{2} (A_1 \omega_1^2 + A_2 \omega_2^2 + A_3 \omega_3^2), \quad (32.2)$$

где m — масса тела и A_1, A_2, A_3 — моменты инерции тела относительно главных центральных осей инерции. Выражения, определяющие компоненты $w_1, w_2, w_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= c_{11} \tau \dot{v} + c_{21} \sigma \dot{u} + c_{31} n, & \omega_2 &= c_{12} \tau \dot{v} + c_{22} \sigma \dot{u} + c_{32} n, \\ \omega_3 &= c_{13} \tau \dot{v} + c_{23} \sigma \dot{u} + c_{33} n; \end{aligned} \quad (32.3)$$

$$\begin{aligned} w_1 &= (c_{33} y - c_{32} z) n + (c_{13} y - c_{12} z) \tau \dot{v} + (c_{23} y - c_{22} z) \sigma \dot{u}, \\ w_2 &= (c_{31} z - c_{33} x) n + (c_{11} z - c_{13} x) \tau \dot{v} + (c_{21} z - c_{23} x) \sigma \dot{u}, \\ w_3 &= (c_{32} x - c_{31} y) n + (c_{12} x - c_{11} y) \tau \dot{v} + (c_{22} x - c_{21} y) \sigma \dot{u}. \end{aligned} \quad (32.4)$$

Зная выражения для абсолютной угловой скорости тела и скорости его центра масс через переменные $u, v, \dot{u}, \dot{v}, n$ можно получить уравнения движения тела по неподвижной сфере. Для этого воспользуемся тем же способом, который использовал П. В. Воронец [15] для вывода уравнений движения твердого тела, катящегося без проскальзывания по неподвижной сфере. Запишем проек-

ции вектора импульса системы $\mathbf{Q} = Q_1\mathbf{e}_1 + Q_2\mathbf{e}_2 + Q_3\mathbf{e}_3$ и вектора кинетического момента относительно центра масс $\mathbf{K} = K_1\mathbf{e}_1 + K_2\mathbf{e}_2 + K_3\mathbf{e}_3$, а также теоремы об изменении импульса и кинетического момента. Имеем:

$$Q_1 = \frac{\partial T}{\partial w_1}, \quad Q_2 = \frac{\partial T}{\partial w_2}, \quad Q_3 = \frac{\partial T}{\partial w_3};$$

$$K_1 = \frac{\partial T}{\partial \omega_1}, \quad K_2 = \frac{\partial T}{\partial \omega_2}, \quad K_3 = \frac{\partial T}{\partial \omega_3}.$$

Уравнения, которые следуют из закона изменения импульса, имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial w_1} \right) = \omega_3 \frac{\partial T}{\partial w_2} - \omega_2 \frac{\partial T}{\partial w_3} + F_1 + N_1,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial w_2} \right) = \omega_1 \frac{\partial T}{\partial w_3} - \omega_3 \frac{\partial T}{\partial w_1} + F_2 + N_2,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial w_3} \right) = \omega_2 \frac{\partial T}{\partial w_1} - \omega_1 \frac{\partial T}{\partial w_2} + F_3 + N_3.$$

Теорема об изменении кинетического момента относительно центра масс, дает следующие уравнения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1} \right) = \omega_3 \frac{\partial T}{\partial \omega_2} - \omega_2 \frac{\partial T}{\partial \omega_3} + yN_3 - zN_2,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_2} \right) = \omega_1 \frac{\partial T}{\partial \omega_3} - \omega_3 \frac{\partial T}{\partial \omega_1} + zN_1 - xN_3,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_3} \right) = \omega_2 \frac{\partial T}{\partial \omega_1} - \omega_1 \frac{\partial T}{\partial \omega_2} + xN_2 - yN_1.$$

Здесь F_1, F_2, F_3 — компоненты равнодействующей силы, приложенной к центру масс, а N_1, N_2, N_3 — компоненты реакции поверхности в проекции на соответствующие оси.

Обозначим через Θ кинетическую энергию T , выраженную через координаты $u, v, \dot{u}, \dot{v}, n$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial n} &= \frac{\partial T}{\partial \omega_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial n} + \frac{\partial T}{\partial \omega_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial n} + \frac{\partial T}{\partial \omega_3} \frac{\partial \omega_3}{\partial n} + \frac{\partial T}{\partial w_1} \frac{\partial w_1}{\partial n} + \\ &+ \frac{\partial T}{\partial w_2} \frac{\partial w_2}{\partial n} + \frac{\partial T}{\partial w_3} \frac{\partial w_3}{\partial n} = c_{31} \frac{\partial T}{\partial \omega_1} + c_{32} \frac{\partial T}{\partial \omega_2} + c_{33} \frac{\partial T}{\partial \omega_3} + \\ &+ (c_{33}y - c_{32}z) \frac{\partial T}{\partial w_1} + (c_{31}z - c_{33}x) \frac{\partial T}{\partial w_2} + (c_{32}x - c_{31}y) \frac{\partial T}{\partial w_3}. \end{aligned} \quad (32.5)$$

Продифференцируем обе части выражения (32.5) по времени и в правой части полученного уравнения заменим производные

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1} \right), \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_2} \right), \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_3} \right), \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial w_1} \right), \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial w_2} \right), \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial w_3} \right)$$

на выражения, которые получаются из теорем об изменении импульса и кинетического момента тела. В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial n} \right) &= (\dot{c}_{31} - c_{32}\omega_3 + c_{33}\omega_2) \frac{\partial T}{\partial \omega_1} + (\dot{c}_{32} - c_{31}\omega_3 + c_{33}\omega_1) \frac{\partial T}{\partial \omega_2} + \\ &+ (\dot{c}_{33} - c_{31}\omega_2 + c_{32}\omega_1) \frac{\partial T}{\partial \omega_3} + \\ &+ \left[\frac{d}{dt} (c_{33}y - c_{32}z) + (c_{32}x - c_{31}y) \omega_2 - (c_{31}z - c_{33}x) \omega_3 \right] \frac{\partial T}{\partial w_1} + \\ &+ \left[\frac{d}{dt} (c_{31}z - c_{33}x) + (c_{33}y - c_{32}z) \omega_3 - (c_{32}x - c_{31}y) \omega_1 \right] \frac{\partial T}{\partial w_2} + \\ &+ \left[\frac{d}{dt} (c_{32}x - c_{31}y) + (c_{31}z - c_{33}x) \omega_1 - (c_{33}y - c_{32}z) \omega_2 \right] \frac{\partial T}{\partial w_3}. \end{aligned}$$

Производя необходимые вычисления в правой части данного уравнения, получим первое из динамических уравнений движения твердого тела по поверхности сферы

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial n} \right) = & -\frac{\sqrt{G}}{R_1} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{u}} \dot{v} - \frac{\sqrt{E}}{R_1} \frac{1}{\tau} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{v}} \dot{u} + \\ & + m\rho \left(\frac{\partial \rho}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial \rho}{\partial v} \dot{v} \right) n - m\varepsilon \frac{LG - NE}{\sqrt{EG}} \dot{u} \dot{v}. \end{aligned} \quad (32.6)$$

Здесь через ρ обозначено расстояние от центра масс O тела до точки касания P :

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

а через ε обозначено расстояние от центра масс O тела до касательной плоскости к поверхности S в точке P :

$$\varepsilon = xc_{31} + yc_{32} + zc_{33}.$$

Действуя аналогично, получаем ещё два динамических уравнения движения тела по неподвижной сфере:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial \Theta}{\partial u} = & \sqrt{EG} \left(\frac{LN}{EG} - \frac{1}{R_1^2} \right) \frac{\partial \Theta}{\partial n} \dot{v} + \frac{\sqrt{E}}{R_1} \frac{1}{\tau} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{v}} n - m\rho \frac{\partial \rho}{\partial u} n^2 - \\ & - m\varepsilon \sqrt{EG} \left(\frac{N}{G} - \frac{1}{R_1} \right) n \dot{v} - \frac{\partial V}{\partial u}, \end{aligned} \quad (32.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial \Theta}{\partial v} = & -\sqrt{EG} \left(\frac{LN}{EG} - \frac{1}{R_1^2} \right) \frac{\partial \Theta}{\partial n} \dot{u} + \frac{\sqrt{G}}{R_1} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{u}} n - m\rho \frac{\partial \rho}{\partial v} n^2 + \\ & + m\varepsilon \sqrt{EG} \left(\frac{L}{E} - \frac{1}{R_1} \right) n \dot{u} - \frac{\partial V}{\partial v}. \end{aligned} \quad (32.8)$$

Присоединяя к уравнениям (32.6)–(32.8) последнее из соотношений (31.2), а также уравнения неголономных связей (30.1), получим систему шести уравнений, из которой определяются все неизвестные u , v , n , θ , u_1 , v_1 как функции времени.

33 Движение тела вращения

Предположим теперь, что твердое тело, катящееся без проскальзывания по неподвижной сфере, является динамически симметричным ($A_1 = A_2$). Пусть поверхность S , ограничивающая твердое тело, является поверхностью вращения с осью симметрии Oz , то есть задается соотношениями

$$x = f(u) \cos v, \quad y = f(u) \sin v, \quad z = g(u). \quad (33.1)$$

Тогда потенциальная энергия системы будет зависеть только от переменной u , то есть

$$V = V(u).$$

Коэффициенты c_{ij} принимают вид:

$$c_{11} = \frac{f' \cos v}{\sqrt{f'^2 + g'^2}}, \quad c_{12} = \frac{f' \sin v}{\sqrt{f'^2 + g'^2}}, \quad c_{13} = \frac{g'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}},$$

$$c_{21} = -\sin v, \quad c_{22} = \cos v, \quad c_{23} = 0,$$

$$c_{31} = -\frac{g' \cos v}{\sqrt{f'^2 + g'^2}}, \quad c_{32} = -\frac{g' \sin v}{\sqrt{f'^2 + g'^2}}, \quad c_{33} = \frac{f'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}}.$$

Здесь штрихом обозначена производная по переменной u . В этом случае кинетическая энергия тела $\Theta(\dot{u}, \dot{v}, u, v, n)$ запишется следующим образом:

$$2\Theta(\dot{u}, \dot{v}, u, v, n) = K_{11}\dot{u}^2 + K_{22}\dot{v}^2 + K_{33}n^2 + 2K_{23}\dot{v}n,$$

$$K_{11} = (A_1 + m f'^2 + m g'^2) (f'^2 + g'^2) \left(\frac{g'' f' - f'' g'}{(f'^2 + g'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{R_1} \right)^2,$$

$$K_{22} = \frac{A_1 f'^2 + A_3 g'^2 + m (g f' - f g')^2}{f'^2 + g'^2} \left(\frac{g'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} - \frac{f}{R_1} \right)^2,$$

$$K_{33} = \frac{A_1 g'^2 + A_3 f'^2 + m (f f' + g g')^2}{f'^2 + g'^2},$$

$$K_{23} = \frac{m (g f' - f g') (f f' + g g') - (A_3 - A_1) f' g'}{f'^2 + g'^2} \left(\frac{g'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} - \frac{f}{R_1} \right).$$

Легко видеть, что в этом случае имеют место формулы

$$\frac{\partial \Theta}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0.$$

Тогда можно переписать уравнения (32.6) и (32.8) следующим образом:

$$\frac{d}{dt} (K_{23} n + K_{22} \dot{v}) = (c_1 n + c_2 \dot{v}) \dot{u}, \quad (33.2)$$

$$\frac{d}{dt} (K_{33} n + K_{23} \dot{v}) = (k_1 n + k_2 \dot{v}) \dot{u}.$$

Коэффициенты K_{22} , K_{23} , K_{33} , c_1 , c_2 , k_1 , k_2 являются функциями только переменной u . В силу того, что коэффициент $c_{23} = 0$, из выражений (31.2) для компонент угловой скорости ω_1 , ω_2 , ω_3 получаем, что

$$\dot{v} = \frac{1}{c_{13}\tau} \omega_3 - \frac{c_{33}}{c_{13}\tau} n, \quad (33.3)$$

причем коэффициенты при переменных ω_3 и n также будут функциями только переменной u . Переходя в системе уравнений (33.2) к новой независимой

переменной u , и используя уравнение (33.3), приведем уравнения (32.8) к виду

$$\begin{aligned} \frac{K_{22}}{c_{13}\tau} \frac{d\omega_3}{du} + \left(K_{23} - \frac{K_{22}c_{33}}{c_{13}\tau} \right) \frac{dn}{du} &= d_1 n + s_1 \omega_3, \\ \frac{K_{23}}{c_{13}\tau} \frac{d\omega_3}{du} + \left(K_{33} - \frac{K_{23}c_{33}}{c_{13}\tau} \right) \frac{dn}{du} &= d_2 n + s_2 \omega_3, \end{aligned} \quad (33.4)$$

где d_1, s_1, d_2, s_2 — функции, зависящие от u . Таким образом, решение задачи описания движения тела вращения по поверхности сферы в поле сил с потенциалом специального вида сводится к интегрированию системы двух линейных уравнений первого порядка (33.4) относительно компонент угловой скорости n и ω_3 .

Разрешим систему уравнений (33.4) относительно производных, и приведем её к виду:

$$\frac{dn}{du} = a_1 n + a_2 \omega_3, \quad \frac{d\omega_3}{du} = b_1 n + b_2 \omega_3, \quad (33.5)$$

Если найти общее решение этой системы уравнений или общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка, которое может быть получено из системы линейных дифференциальных уравнений (33.5), то задача о качении тела, ограниченного поверхностью вращения, может быть проинтегрирована в квадратурах.

34 Движение динамически симметричного шара

Проиллюстрируем все сказанное на примере задачи о качении по сфере неоднородного динамически симметричного шара, центр масс которого не совпадает с геометрическим центром. Пусть R — радиус шара, a — расстояние от центра масс шара до геометрического центра вдоль оси симметрии. Тогда формулы поверхности шара задаются следующими формулами:

$$x = R \sin u \cos v, \quad y = R \sin u \sin v, \quad z = R \cos u + a.$$

Система двух линейных уравнений (33.4) относительно компонент угловой скорости n и ω_3 имеет вид:

$$\frac{dn}{du} = a_1 n + a_2 \omega_3, \quad \frac{d\omega_3}{du} = b_1 n + b_2 \omega_3, \quad (34.1)$$

$$a_1 = -\frac{mR^2 ((A_3 - A_1) R \cos u + A_3 a) \sin u}{\left(A_1 A_3 + A_1 m R^2 \sin^2 u + A_3 m (R \cos u + a)^2 \right) R_1},$$

$$a_2 = \frac{(R_1 + R) ((A_3 + mR^2) (A_3 - A_1) - A_3 m a^2) \sin u}{\left(A_1 A_3 + A_1 m R^2 \sin^2 u + A_3 m (R \cos u + a)^2 \right) R_1},$$

$$b_1 = \frac{mR^3 A_1 \sin u}{\left(A_1 A_3 + A_1 m R^2 \sin^2 u + A_3 m (R \cos u + a)^2 \right) R_1},$$

$$b_2 = \frac{mR (R_1 + R) ((A_3 - A_1) R \cos u + A_3 a) \sin u}{\left(A_1 A_3 + A_1 m R^2 \sin^2 u + A_3 m (R \cos u + a)^2 \right) R_1}.$$

Из системы уравнений (34.1) можно получить для ω_3 одно линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 \omega_3}{du^2} + d_1 \frac{d\omega_3}{du} + d_2 \omega_3 = 0, \quad (34.2)$$

$$d_1 = -\frac{2mR^2 (A_3 - A_1) \sin^2 u \cos u + (3 - \cos^2 u) m R a A_3}{\left(A_1 A_3 + A_1 m R^2 \sin^2 u + A_3 m (R \cos u + a)^2 \right) \sin u} +$$

$$+ \frac{A_3 (A_1 + mR^2 + m a^2) \cos u}{\left(A_1 A_3 + A_1 m R^2 \sin^2 u + A_3 m (R \cos u + a)^2 \right) \sin u},$$

$$d_2 = \frac{mR^2 (R_1^2 - R^2) (A_3 - A_1) \sin^2 u}{\left(A_1 A_3 + A_1 m R^2 \sin^2 u + A_3 m (R \cos u + a)^2 \right) R_1^2}.$$

Заметим, что при выполнении условия $R_1 = R$ (то есть когда радиус шара равен радиусу опорной сферы), уравнение (34.2) допускает частное решение

$$\omega_3 = \omega_3^0 = \text{const.}$$

Сделаем в уравнении (34.2) замену независимой переменной по формуле $\cos u = x$. Тогда уравнение (34.2) перепишется в виде:

$$\frac{d^2\omega_3}{dx^2} + d_1 \frac{d\omega_3}{dx} + d_2\omega_3 = 0, \quad (34.3)$$

$$d_1 = \frac{3(2x - x_1 - x_2)}{2(x - x_1)(x - x_2)}, \quad d_2 = \frac{(R_1^2 - R^2)}{(x - x_1)(x - x_2)R_1^2}.$$

Здесь d_1, d_2 — рациональные функции переменной x , а x_1 and x_2 — корни уравнения

$$A_1A_3 + A_1mR^2(1 - x^2) + mA_3(Rx + a)^2 = 0.$$

При помощи замены переменных

$$y = \omega_3 \exp \left(\frac{1}{2} \int d_1(x) dx \right),$$

уравнение (34.3) приводится к виду

$$\frac{d^2y}{dx^2} = r(x)y. \quad (34.4)$$

Уравнение (34.4) имеет в точности вид, необходимый для того, чтобы применить к данному уравнению алгоритм Ковачича [105]. Функция $r(x)$ в данном случае равна

$$r(x) = -\frac{4(R_1^2 - 4R^2)(x - x_1)(x - x_2) + 3R_1^2(x_1 - x_2)^2}{16R_1^2(x - x_1)^2(x - x_2)^2}.$$

Легко видеть, что функция $r(x)$ имеет два конечных полюса в точках $x = x_1$ и $x = x_2$, и оба эти полюса являются полюсами второго порядка. Разложим

функцию $r(x)$ в сумму простых дробей. Это разложение имеет вид:

$$r(x) = \frac{R_1^2 + 8R^2}{8R_1^2(x_1 - x_2)(x - x_1)} - \frac{3}{16(x - x_1)^2} - \frac{R_1^2 + 8R^2}{8R_1^2(x_1 - x_2)(x - x_2)} - \frac{3}{16(x - x_2)^2}.$$

В окрестности точки $x = \infty$ функция $r(x)$ представляется в виде:

$$r(x) = \left(-\frac{1}{4} + \frac{R^2}{R_1^2}\right) \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Таким образом, порядок полюса функции $r(x)$ в точке $x = \infty$ равен двум. Следовательно, в соответствии с необходимыми условиями существования лиувиллевых решений (см. Теорему 2.4) у дифференциального уравнения (34.4) могут существовать лиувиллевы решения всех трех типов.

Сначала попытаемся найти у дифференциального уравнения (34.4) лиувиллевы решения вида (2.1), то есть решения, соответствующие Случаю 1 Теоремы 2.1. Будем по шагам применять алгоритм Ковачича для поиска решения вида (2.1) уравнения (34.4) так, как он описан в пункте 3.1.

Шаг 1. В соответствии с алгоритмом Ковачича вычислим соответствующие конечным полюсам постоянные $[\sqrt{r}]_c$ и постоянные $\alpha_c^\pm$. Для полюса $x = x_1$ имеем:

$$[\sqrt{r}]_{x_1} = 0, \quad \alpha_{x_1}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{x_1}^- = \frac{1}{4}.$$

Аналогично, для полюса $x = x_2$ имеем:

$$[\sqrt{r}]_{x_2} = 0, \quad \alpha_{x_2}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{x_2}^- = \frac{1}{4}.$$

Значения $[\sqrt{r}]_\infty$ и $\alpha_\infty^\pm$ оказываются равными

$$[\sqrt{r}]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = \frac{1}{2} + \frac{R}{R_1}, \quad \alpha_\infty^- = \frac{1}{2} - \frac{R}{R_1}.$$

Шаг 2. Поскольку число ρ конечных полюсов функции $r(x)$ равно 2, то мы имеем $2^{\rho+1} = 2^3 = 8$ наборов знаков

$$s = (s(\infty), s(x_1), s(x_2)).$$

Для каждого из этих наборов по формуле (3.2) вычислим величину d :

$$d = \alpha_{\infty}^{s(\infty)} - \alpha_{x_1}^{s(x_1)} - \alpha_{x_2}^{s(x_2)}.$$

В соответствии с алгоритмом, d должно быть неотрицательным целым числом. Проверка всех возможных наборов $(\alpha_{\infty}^{s(\infty)}, \alpha_{x_1}^{s(x_1)}, \alpha_{x_2}^{s(x_2)})$ показывает, что для того, чтобы число d было неотрицательным целым числом, должно выполняться равенство

$$\frac{R}{R_1} = \frac{N}{2}, \quad (34.5)$$

где N — натуральное число.

Шаг 3. Покажем, что при выполнении условия (34.5) у линейного дифференциального уравнения второго порядка (34.4) существует лиувиллево решение типа 1. Непосредственной проверкой можно установить, что при выполнении условия (34.5) линейное дифференциальное уравнение второго порядка (34.4) допускает лиувиллево решение типа 1:

$$y(x) = (x - x_1)^{\frac{1}{4}} (x - x_2)^{\frac{1}{4}} \left[C_1 (\sqrt{x - x_1} + \sqrt{x - x_2})^N + \right. \\ \left. + C_2 (\sqrt{x - x_1} + \sqrt{x - x_2})^{-N} \right],$$

выражающееся через элементарные функции.

Попытаемся теперь найти у линейного дифференциального уравнения (34.3) лиувиллевы решения вида (2.6), то есть решения, соответствующее Случаю 2 Теоремы 2.1. Необходимые условия существования такого решения у уравнения (28.46) являются выполненными (см. Теорему 2.4). Будем по шагам приме-

нять алгоритм Ковачича для поиска лиувиллевых решений вида (2.6), как он описан в пункте 3.4.

Шаг 1. Найдем сначала множества чисел E_{x_1} и E_{x_2} , соответствующие конечным полюсам, и множество E_∞ , соответствующее полюсу в точке $x = \infty$. Для конечного полюса $x = x_1$ множество E_1 будет иметь вид:

$$E_{x_1} = \{1, 2, 3\}.$$

Аналогично, для конечного полюса $x = x_2$ множество E_{x_2} будет равно:

$$E_{x_2} = \{1, 2, 3\}.$$

Будем считать, что условие (34.5) не выполняется. Тогда множество E_∞ имеет вид:

$$E_\infty = \{2\}.$$

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные наборы

$$s = (e_\infty, e_{x_1}, e_{x_2})$$

элементов множеств E_∞ , E_{x_1} , E_{x_2} , причем в каждом наборе хотя бы одно из чисел обязательно должно быть нечетным. Вычислим величину d для каждого набора s по формуле (3.11):

$$d = \frac{1}{2} (e_\infty - e_{x_1} - e_{x_2}).$$

В соответствии с алгоритмом число d должно быть неотрицательным целым числом. Поэтому существует всего один набор, для которого число d является неотрицательным целым числом. Это набор

$$s_1 = (2, 1, 1),$$

для которого величина d оказывается равной нулю. Применим к этому набору алгоритм Ковачича.

Шаг 3. По формуле (3.12) для набора s_1 сформируем функцию $\theta = \theta(x)$. Она будет равна:

$$\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} \right).$$

Искомый многочлен P нулевой степени будет иметь вид $P \equiv 1$. Подстановка функции $\theta = \theta(x)$ и многочлена P в уравнение (3.13) показывает, что данное уравнение будет выполняться тождественно. Следовательно, можно сделать вывод, что при любом соотношении на параметры R, R_1 общее решение уравнения (3.4) записывается в виде:

$$y(x) = (x - x_1)^{\frac{1}{4}} (x - x_2)^{\frac{1}{4}} \left[C_1 (\sqrt{x - x_1} + \sqrt{x - x_2})^{\frac{2R}{R_1}} + \right. \\ \left. + C_2 (\sqrt{x - x_1} + \sqrt{x - x_2})^{-\frac{2R}{R_1}} \right].$$

Таким образом, мы доказали, что общее решение уравнения (3.4) выражается через лиувиллевы функции. Тем самым установлено, что задача о качении динамически симметричного шара по сфере под действием сил с потенциалом $V = V(u)$ интегрируется в лиувиллевых функциях при всех значениях параметров задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко сформулируем основные результаты диссертации.

1. В задаче о движении тяжелого тела вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости найдены в явном виде два дополнительных к интегралу энергии первых интеграла в случае, когда поверхность катящегося тела удовлетворяет условию Х. М. Муштари [49]. Получен общий вид поверхности, ограничивающей катящееся твердое тело, для которого справедливо условие Х. М. Муштари.
2. При помощи алгоритма Ковачича полностью исследован вопрос о существовании лиувиллевых решений в задаче о качении тяжелого тела вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости в случаях, когда катящееся тело представляет собой круглый диск, диск со смещенным центром масс, динамически симметричный тор, динамически симметричный параболоид вращения, динамически симметричный эллипсоид вращения, а также веретенообразное тело. Доказано, что задачи о качении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости круглого диска, диска со смещенным центром масс и динамически симметричного тора не интегрируются в лиувиллевых функциях. Доказано, что решение задачи о качении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости тяжелого динамически симметричного параболоида, центр масс которого расположен в фокусе образующей параболы, при любых значениях параметров задачи выражается через лиувиллевы функции. Доказано, что задача о качении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости веретенообразного тела может быть проинтегрирована в лиувиллевых функциях только в случае, указанном ранее в работе Х. М. Муштари [49]. Доказано, что для почти всех значений параметров задача о качении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости динамически симметричного эллипсоида не интегрируется в лиувиллевых функциях. Получены условия на параметры,

при выполнении которых задача о качении эллипсоида может быть проинтегрирована в лиувиллевых функциях.

3. Полностью исследован вопрос о существовании лиувиллевых решений в случае Гесса задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Доказано, что задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса интегрируется в лиувиллевых функциях только в двух случаях: если распределение масс в твердом теле соответствует случаю Лагранжа, или если постоянная интеграла площадей равна нулю.
4. При помощи алгоритма Ковачича доказано, что задачи о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения второго порядка, а также по циклоидальной поверхности вращения и по поверхности Бельтрами могут быть проинтегрированы в лиувиллевых функциях. Установлено, что в случае качения шара по тору решение задачи выражается с помощью функций Хейна (Гойна), а в случае качения шара по катеноиду решение задачи выражается в функциях Лежандра.
5. Полностью исследован вопрос о существовании лиувиллевых решений в задаче о качении без проскальзывания тела вращения по поверхности сферы, в случае, когда катящееся тело представляет собой неоднородный динамически симметричный шар. Доказано, что данная задача может быть проинтегрирована в лиувиллевых функциях.

Список литературы

- [1] *Аппельрот Г. Г.* По поводу §1 мемуара С. В. Ковалевской "Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe" // Математический сборник. 1892. Т. 16. Вып. 3. С. 483–507.
- [2] *Архангельский Ю. А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука. 1977.
- [3] *Афонин А.А.* О качении тяжелого шара по кольцу // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. 1995. № 5. С. 105–108.
- [4] *Афонин А.А.* Некоторые задачи о качении и скольжении твердых тел // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико – математических наук. Москва. 1997. 65 с.
- [5] *Беркович Л.М.* Родственные линейные дифференциальные уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 2. С. 191–201.
- [6] *Беркович Л.М.* Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". 2022. 464 с.
- [7] *Беркович Л.М.* Факторизация, преобразования и интегрируемость обыкновенных дифференциальных уравнений. 1. Линейные уравнения // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. Специальный выпуск. 2003. С. 5–43.
- [8] *Беркович Л.М.* Факторизация, преобразования и интегрируемость обыкновенных дифференциальных уравнений. 2. Нелинейные уравнения // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2003. № 4(30). С. 36–78.

- [9] *Бобылев Д.К.* О шаре с гироскопом внутри, катящимся по горизонтальной плоскости без скольжения // Математический сборник. 1892. Т. 16. Вып. 3. С. 544–581.
- [10] *Болотин С.В., Карапетян А.В., Кугушев Е.И., Трещев Д.В.* Теоретическая механика. М.: Издательский центр "Академия". 2010. 432 с.
- [11] *Болсинов А.В., Килин А.А., Казаков А.О.* Топологическая монодромия в неголономных системах // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 2. С. 203–227.
- [12] *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретической механики. Т. 2. М.: Наука. 1966.
- [13] *Бычков Ю.П.* О катании твердого тела по неподвижной поверхности // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29. Вып. 3. С. 573–583.
- [14] *Бычков Ю.П.* О движении тела вращения, ограниченного сферой, на сферическом основании // Прикладная математика и механика. 1966. Т. 30. Вып. 5. С. 934–935.
- [15] *Воронец П.В.* К задаче о движении твердого тела, катящегося без скольжения по данной поверхности под действием данных сил // Киевские Университетские Известия. 1910. Т. 50. Вып. 10. С. 101—111.
- [16] *Гашененко И. Н.* Кинематическое представление по Пуансо движения тела в случае Гесса // Механика твердого тела. Межведомственный сборник научных трудов. Киев: Украина. 2010. № 40. С. 12–20.
- [17] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука. 1971.
- [18] *Денева С.* Частные движения шара, катящегося по абсолютно шероховатому тору // Годишник на Софийския университет "Св. Климент Охридски".

- Факультет по математика и информатика. Книга 2 — Механика. 1991. Т. 85. С. 131–141.
- [19] *Денева С.* Качение шара по абсолютно шероховатому тору // Годишник на Софийския университет "Св. Климент Охридски". Факультет по математика и информатика. Книга 2 — Механика. 1992. Т. 86. С. 123–132.
- [20] *Добронравов В.В.* Основы механики неголономных систем. М.: Высшая школа. 1970.
- [21] *Жарков А.Ю.* Реализация на языке FORMAC алгоритма Ковачича для исследования обыкновенных дифференциальных уравнений // Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна: 1987. 10 с. Е-11-87-455.
- [22] *Жуковский Н. Е.* Локсодромический маятник Гесса // Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1893. Т. 5. Вып. 2. С. 37–45.
- [23] *Жуковский Н.Е.* О гироскопическом шаре Д.К. Бобылева // Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1893. Т. 6. Вып. 1. С. 11–17.
- [24] *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит. 2001.
- [25] *Зиглин С.Л.* Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела // Труды Московского математического общества. 1980. Т. 41. С. 287–303.
- [26] *Зиглин С.Л.* Ветвление решений и несуществование дополнительного первого интеграла в задаче о движении несимметричного тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Доклады АН СССР. 1980. Т. 251. № 4. С. 786–790.

- [27] *Зиглин С.Л.* Самопересечение комплексных сепаратрис и несуществование интегралов в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы // Прикладная математика и механика. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 564–566.
- [28] *Зиглин С.Л.* Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике I // Функциональный анализ и его приложения. 1982. Т. 16. Вып. 3. С. 30–41.
- [29] *Зиглин С.Л.* Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике II // Функциональный анализ и его приложения. 1983. Т. 17. Вып. 1. С. 8–23.
- [30] *Зиглин С.Л.* Об отсутствии дополнительного первого интеграла в одной задаче динамики твердого тела // Доклады АН СССР. 1987. Т. 292. № 4 С. 804–807.
- [31] *Зиглин С.Л.* Расщепление сепаратрис и несуществование первых интегралов в системах дифференциальных уравнений типа гамильтоновых с двумя степенями свободы // Известия АН СССР. Математика. 1987. Т. 51. № 1. С. 1088–1103.
- [32] *Зиглин С.Л.* О неинтегрируемости ABC – течения при $A = B$ // Функциональный анализ и его приложения. 1996. Т. 30. Вып. 2. С. 80–81.
- [33] *Зиглин С.Л.* Об отсутствии дополнительного первого интеграла в частном случае задачи Г. К. Сулова // Успехи математических наук. 1997. Т. 52. № 2. С. 167–168.
- [34] *Зиглин С.Л.* Об отсутствии вещественно-аналитического первого интеграла в некоторых задачах динамики // Функциональный анализ и его приложения. 1997. Т. 31. Вып. 1. С. 3–11.

- [35] *Зиглин С.Л.* Аналитическое доказательство неинтегрируемости ABC – течения при $A = B = C$ // Функциональный анализ и его приложения. 2003. Т. 37. № 3. С. 77–80.
- [36] *Зобова А.А.* О сопряжении решений двух интегрируемых задач: качение тела с остриём по плоскости // Автоматика и телемеханика. 2007. Вып. 8. С. 156–162.
- [37] *Зобова А.А.* Качественный анализ движения тела вращения на шероховатой плоскости // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико – математических наук. М.: 2008. 102 с.
- [38] *Ицкович М.О.* О движении по горизонтальной плоскости тел, имеющих с ней одну или две точки соприкосновения // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико – математических наук. М.: 2017. 126 с.
- [39] *Капланский И.* Введение в дифференциальную алгебру. М.: Издательство иностранной литературы. 1959.
- [40] *Ковалев А. М.* Подвижный годограф угловой скорости в решении Гесса задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку // Прикладная математика и механика. 1968. Т. 32. Вып. 6. С. 1111–1118.
- [41] *Ковалев А. М.* О движении тела в случае Гесса // Механика твердого тела. Межведомственный сборник научных трудов. Киев: Украина. 1969. No 1. С. 12–27.
- [42] *Ковалев А. М., Кириченко В. В.* Годограф вектора кинетического момента в решении Гесса // Механика твердого тела. Межведомственный сборник научных трудов. Киев: Украина. 2004. No 34. С. 9–20.
- [43] *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Издательство Московского университета. 1980.

- [44] *Лобас Л.Г.* Рівняння руху тора та малых коливань мотоцикла коло стаціонарного руху по площині // Прикладна механіка. 1962. Т. 8. Вып. 2.
- [45] *Лобас Л.Г.* Зведення до квадратур рівнянь руху тора по площині // Прикладна механіка. 1963. Т. 9. Вып. 4. С. 409–415.
- [46] *Маркеев А.П.* Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука. 1992.
- [47] *Млодзеевский Б. К., Некрасов П. А.* Об условиях существования асимптотических периодических движений в задаче Гесса // Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1893. Т. 6. Вып. 1. С. 43–52.
- [48] *Мордухай – Болтовской Д. Д.* Об интегрировании в конечном виде линейных дифференциальных уравнений. Варшава: Типография Варшавского учебного округа. 1910.
- [49] *Муштари Х.М.* О катании тяжелого твердого тела вращения по неподвижной горизонтальной плоскости // Математический сборник. 1932. Т. 39. № 1-2. С. 105-126.
- [50] *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука. 1967.
- [51] *Некрасов П. А.* К задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Математический сборник. 1892. Т. 16. Вып. 2. С. 508–517.
- [52] *Некрасов П. А.* Аналитическое исследование одного случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Математический сборник. 1896. Т. 18. Вып. 2. С. 161–274.

- [53] *Новиков М. А.* О стационарных движениях твердого тела при существовании частного интеграла Гесса // Известия РАН. Механика твердого тела. 2018. No. 3. С. 28–37.
- [54] *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. М.: ГИТТЛ. 1950.
- [55] *Сохоян Р.С., Меликджанян Д.Ю., Ишханян А.М.* Новые решения общего уравнения Гойна в виде рядов по гипергеометрическим функциям // Известия НАН Армении. Физика. 2005. Т. 40. № 6. С. 391–398.
- [56] *Харламов П. В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 502–507.
- [57] *Харламов П. В.* Лекции по динамике твердого тела. Новосибирск: Изд-во Новосибирского ун-та. 1965.
- [58] *Хованский А.Г.* Топологическая теория Галуа. Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде. М.: Изд-во МЦНМО. 2008.
- [59] *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1897. Т. 9. Вып. 1. С. 10–16.
- [60] *Черняков Г.А.* Исследование задачи о движении тяжелого тела вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости методом Ковачича // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико – математических наук. М.: 2016. 148 с.
- [61] *Acosta – Humanez P., Blazquez – Sanz D.* Non – Integrability of some hamiltonian systems with rational potential // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. 2008. Vol. 10. No. 2–3. P. 265–293.

- [62] *Acosta – Humanez P.B., Alvarez – Ramirez M., Blazquez – Sanz D., Delgado J.* Non – Integrability criterium for normal variational equations around an integrable subsystem and an example: the Wilberforce Spring – Pendulum // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. 2013. Vol. 33. No. 3. P. 965–986.
- [63] *Acosta – Humanez P.B., Alvarez – Ramirez M., Delgado J.* Non – Integrability of Some Few Body Problems in Two Degrees of Freedom // Qualitative Theory of Dynamical Systems. 2009. Vol. 8. Issue 2. P. 209–239.
- [64] *Airy G.B.* On the intensity of Light in the Neighbourhood of a Caustic // Transactions of the Cambridge Philosophical Society. 1838. Vol. 6. P. 379–402.
- [65] *Appell P.* Sur l'intégration des équations du mouvement d'un corps pesant de revolution roulant par une arête circulaire sur un plane horizontal; cas particulier du cerceau // Rendiconti del circolo matematico di Palermo. 1900. V. 14. P. 1–6.
- [66] *Bahr K.A.* FORMAC 73 User's Manual. Darmstadt: GMD/IFV. 1973.
- [67] *Baldassarri F., Dwork B.* On second order linear differential equations with algebraic solutions // American Journal of Mathematics. 1979. Vol. 101. P. 42–76.
- [68] *Baldassarri F.* On second order linear differential equations with algebraic solutions on algebraic curves // American Journal of Mathematics. 1980. Vol. 102. P. 517–535.
- [69] *Bardin B.S., Maciejewski A. J., Przybylska M.* Integrability of generalized Jacobi Problem // Regular and Chaotic Dynamics. 2005. Vol. 10. P. 437–461.
- [70] *Bass H., Buium A., Cassidy P.J. (eds)* The selected works of Ellis Kolchin with commentary. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society. 1999.

- [71] *Batista M.* Steady motion of a rigid disk of finite thickness on a horizontal plane // International Journal of Non - Linear Mechanics. 2006. Vol. 41. Issue 4. P. 605–621.
- [72] *Batista M.* Integrability of the Motion of a Rolling Disk of Finite Thickness on a Plane // International Journal of Non - Linear Mechanics. 2006. Vol. 41. Issues 6-7. P. 850–859.
- [73] *Batista M.* The Nearly Horizontally Rolling of a Thick Disk on a Rough Plane // Regular and Chaotic Dynamics. 2008. Vol. 13. No. 4. P. 344–354.
- [74] *Borisov A.V., Ivanova T.B., Kilin A.A., Mamaev I.S.* Nonholonomic rolling of a ball on the surface of a rotating cone // Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 97. Issue 2. P. 1635–1648.
- [75] *Borisov A.V., Mamaev I.S., Bizyaev I.A.* The Jacobi integral in nonholonomic mechanics // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. Vol. 20. Issue 3. P. 383–400.
- [76] *Borisov A.V., Mamaev I.S., Kilin A.A.* Rolling of a ball on a surface: new integrals and hierarchy of dynamics // Regular and Chaotic Dynamics. 2002. Vol. 7. Issue 2. P. 201–219.
- [77] *Churchill R.C and Rod D.L.* Geometrical Aspects of Ziglin's Non – integrability Theorem for Complex Hamiltonian Systems // Journal of Differential Equations. 1988. Vol. 76. P. 91–114.
- [78] *Churchill R.C and Rod D.L.* On the Determination of Ziglin Monodromy Groups // SIAM Journal of Mathematical Analysis. 1991. Vol. 22. № 6. P. 1790–1802.
- [79] *Combot T.* Non – integrability of the equal mass n – body problem with non – zero angular momentum // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2012. Vol. 114. P. 319–340.

- [80] *Combot T.* Non – integrability of a self – gravitating Riemann liquid ellipsoid // Regular and Chaotic Dynamics. 2013. Vol. 18. P. 497–507.
- [81] *Combot T. and Sanabria C.* A Symplectic Kovacic’s Algorithm in Dimension 4 // Proceedings of the 2018 ACM International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, July 16–19, 2018, New York, USA. 2018. P. 143–150.
- [82] *Combot T., Maciejewski A.J., Przybylska M.* Non-integrability of a model of elastic dumbbell satellite // Nonlinear Dynamics. 2021. Vol. 106. P. 125–146.
- [83] *Dalla Via M., Fasso F., Sansonetto N.* On the Dynamics of a Heavy Symmetric Ball that Rolls Without Sliding on a Uniformly Rotating Surface of Revolution // Journal of Nonlinear Science. 2022. Vol. 32. Article 84.
- [84] *Duval A.* The Kovacic Algorithm with applications to special functions // Differential Equations and Computer Algebra. M. Singer (ed). London: Academic Press. 1991. P. 113–130.
- [85] *Duval A., Loday – Richaud M.* Kovacic’s algorithm and its application to some families of special functions // Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing. 1992. Vol. 3. P. 211–246.
- [86] *Duval G., Maciejewski A. J.* Jordan obstruction to the integrability of Hamiltonian systems with homogeneous potentials // Annales de l’Institut Fourier. 2009. T. 59. No. 7. P. 2839–2890.
- [87] *Fasso F., Ramos A., Sansonetto N.* The Reaction – Annihilator Distribution and the Nonholonomic Noether Theorem for Lifted Actions // Regular and Chaotic Dynamics. 2007. Vol. 12. Issue 6. P. 579–588.
- [88] *Fasso F., Sansonetto N.* On Some Aspects of the Dynamics of a Ball in a Rotating Surface of Revolution and of the Kasamawashi Art // Regular and Chaotic Dynamics. 2022. Vol. 27. Issue 4. P. 409–423.

- [89] *Ferrer S., Mondéjar F.* On the non-integrability of the Stark – Zeeman Hamiltonian system // Communications in Mathematical Physycs. 1999. Vol. 208. No. 1. P. 55–63.
- [90] *Filipuk G., Ishkhanyan A., Derezhinski J.* On the Derivatives of the Heun Functions // Journal of Contemporary Mathematical Analysis. 2020. Vol. 55. No. 3. P. 200–207.
- [91] *Fuchs L.* Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie // Journal für die Reine und Angewandte Matematik. 1876. Bd. 81. Heft 2. S. 97–142.
- [92] *Fuchs L.* Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen. Zweite Abhandlung // Journal für die Reine und Angewandte Matematik. 1878. Bd. 85. Heft 1. S. 1–25.
- [93] *Gallop E. G.* On the Rise of a Spinning Top // Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 19. Part 3. P. 356–373.
- [94] *Hess W.* Ueber die Euler’schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // Mathematische Annalen. 1890. Bd. 37. Heft 2. S. 153–181.
- [95] *Ishkhanyan A., Suominen K.–A.* New solutions of Heun’s general equation // Journal of Physics A: Mathematical and General. 2003. Vol. 36. P. L81–L85.
- [96] *Ishkhanyan T.A., Shahverdyan T.A., Ishkhanyan A.M.* Expansions of the Solutions of the General Heun Equation Governed by Two – Term Recurrence Relations for Coefficients // Advances in High Energy Physics. 2018. Vol. 2018. Article ID: 4263678.

- [97] *Jordan C.* Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique // Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. 1877. Bd. 84. Heft 2-3. S. 89–215.
- [98] *Kholmskaya A.G.* On a disk rolling within a sphere // Regular and Chaotic Dynamics. 1998. Vol. 3. No. 1. P. 86–92.
- [99] *Kimura T.* On Riemann's Equations which are Solvable by Quadratures // Funkcialaj Ekvacioj. 1969. Vol. 12. P. 269–281.
- [100] *Kolchin E.R.* Algebraic matrix groups and the Picard – Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations // Annals of Mathematics. 1948. Vol. 49. No. 1. P. 1–42.
- [101] *Kolchin E.R.* Galois theory of differential fields // American Journal of Mathematics. 1953. Vol. 75. P. 753–824.
- [102] *Kolchin E.R.* Differential Algebra and Algebraic Groups. New York – London: Academic Press. 1973. 446 p.
- [103] *Korteweg D.J.* Über eine ziemlich verbreitete unrichtige Behandlungsweise eines Problemes der rollenden Bewegung, über die Theorie dieser Bewegung, und ins besondere über kleine rollende Schwingungen um eine Gleichgewichtslage // Nieuw Archief voor Wiskunde. Tweede Reeks. 1899. Deel. IV. S. 130–155.
- [104] *Korteweg D.* Extrait d'une lettre à M. Appell // Rendiconti del circolo mathematico di Palermo. 1900. Vol. 14. P. 7–8.
- [105] *Kovacic J.* An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations // Journal of Symbolic Computation. 1986. V. 2. P. 3–43.
- [106] *Kowalevski S.* Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Acta Mathematica. 1889. Vol. 12. No. 1. P. 177–232.

- [107] *Kowalevski S.* Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // *Acta Mathematica*. 1890. Vol. 14. No. 1. P. 81–93.
- [108] *Leine R.I.* Experimental and theoretical investigation of the energy dissipation of a rolling disk during its final stage of motion // *Archive of Applied Mechanics*. 2009. Vol. 79. P. 1063–1082.
- [109] *Lindelöf E.* Sur le mouvement d'un corps de revolution roulant sur un plan horizontal // *Acta Societatis Scientiarum Fennicae*. 1895. T. XX. № 10. P. 1–18.
- [110] *Liouville J.* Premier Mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique // *Journal de l'École Royale Polytechnique*. 1833. T. XIV. Cahier 22. P. 124–148.
- [111] *Liouville J.* Second Mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique // *Journal de l'École Royale Polytechnique*. 1833. T. XIV. Cahier 22. P. 149–193.
- [112] *Liouville J.* Note sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique // *Journal für die Reine und Angewandte Matematik*. 1833. Bd. 10. Heft 4. S. 347–359.
- [113] *Liouville J.* Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendentes // *Journal für die Reine und Angewandte Matematik*. 1835. Bd. 13. Heft 2. S. 93–118.
- [114] *Liouville J.* Mémoire sur la classification des transcendentes et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients // *Journal de Mathématique pures et appliquées*. 1837. T. 2. P. 56–105. 1838. T. 3. P. 523–547.

- [115] *Liouville J.* Mémoire sur l'intégration d'une classe d'Équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites // Journal de Mathématique pures et appliquées. 1839. T. 4. P. 423–456.
- [116] *Liouville J.* Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati // Journal de Mathématique pures et appliquées. 1841. T. 6. P. 1–13.
- [117] *Liouville R.* Sur la rotation des solides // Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. 1895. T. 120. P. 903–906.
- [118] *Lützen J.* Joseph Liouville, 1809–1882, Master of Pure and Applied Mathematics. New York. Springer-Verlag. 1990.
- [119] *Ma D., Liu C., Zhao Z., Zhang H.* Rolling friction and energy dissipation in a spinning disc // Proceedings of the Royal Society A. 2014. Vol. 470. Issue 2169. P. 1–22.
- [120] *Maciejewski A.J., Strelcyn J.M., Szydłowski M.* Non-integrability of Bianchi VIII Hamiltonian system // Journal of Mathematical Physics. 2001. Vol. 42. No. 4. P. 1728–1743.
- [121] *Maciejewski A.J., Przybylska M.* Non-integrability of ABC -flow // Physics Letters A. 2002. Vol. 303. Issue 4. P. 265–272.
- [122] *Maciejewski A.J., Przybylska M.* Non-integrability of the Suslov problem // Regular and Chaotic Dynamics. 2002. Vol. 7. No. 1. P. 73–80.
- [123] *Maciejewski A.J., Przybylska M.* Non-integrability of restricted two body problems in constant curvature spaces // Regular and Chaotic Dynamics. 2003. Vol. 8. No. 4. P. 413–430.
- [124] *Maciejewski A. J., Przybylska M.* Non-integrability of the problem of a rigid satellite in gravitational and magnetic fields // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2003. Vol. 87. P. 317–351.

- [125] *Maciejewski A. J., Przybylska M.* Non-integrability of the Generalized Two Fixed Centres Problem // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2004. Vol. 89. Issue 2. P. 145–164.
- [126] *Maciejewski A.J., Przybylska M., Weil J.A.* Non-integrability of the generalized spring-pendulum problem // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 2004. Vol. 37. No. 7. P. 2579–2597.
- [127] *Maciejewski A. J., Przybylska M.* Differential Galois approach to the non – integrability of the heavy top problem // *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*. 2005. Vol. 14. No. 1. P. 123–160.
- [128] *Maciejewski A.J., Przybylska M.* Differential Galois theory and integrability // *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. 2009. Vol. 6. No. 8. P. 1357–1390.
- [129] *Maciejewski A.J., Przybylska M.* Non-integrability of three body problem // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2011. Vol. 110. Issue 1. P. 17–30.
- [130] *Maciejewski A.J., Przybylska M.* Overview of the differential Galois integrability conditions for non-homogeneous potentials // *Banach Center Publications*. 2011. Vol. 94. P. 221–232.
- [131] *Maciejewski A.J., Przybylska M., Yoshida H.* Necessary conditions for the existence of additional first integrals for Hamiltonian systems with homogeneous potential // *Nonlinearity*. 2012. Vol. 25. No. 2. P. 255–277.
- [132] *Maciejewski A.J., Przybylska M., Simpson L., Szumiński W.* Non-integrability of the dumbbell and point mass problem // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2013. Vol. 117. Issue 3. P. 315–330.
- [133] *Maier R.S.* On reducing the Heun equation to the hypergeometric equation // *Journal of Differential Equations*. 2005. Vol. 213. Issue 1. P. 171–203.

- [134] *Maier R.S.* The 192 solutions of the Heun equation // Mathematics and Computation. 2007. Vol. 76. № 258. P. 811–843.
- [135] *Morales – Ruiz J. J., Simó C.* Picard – Vessiot Theory and Ziglin’s Theorem // Journal of Differential Equations. 1994. Vol. 107. P. 140–162.
- [136] *Morales – Ruiz J. J., Simó C.* Non – integrability criteria for hamiltonians in the case of Lamé normal variational equations // Journal of Differential Equations. 1996. Vol. 129. P. 111–135.
- [137] *Morales – Ruiz J. J.* Differential Galois Theory and Non – Integrability of Hamiltonian Systems. Progress in Mathematics. Vol. 179. Basel: Birkhäuser. 1999.
- [138] *Morales – Ruiz J. J., Ramis J. P.* Galoisian obstructions to integrability of hamiltonian systems I // Methods and Applications of Analysis. 2001. Vol. 8. P. 33–95.
- [139] *Morales – Ruiz J. J., Ramis J. P.* Galoisian obstructions to integrability of hamiltonian systems II // Methods and Applications of Analysis. 2001. Vol. 8. P. 97–112.
- [140] *Morales – Ruiz J. J., Ramis J. P.* Integrability of Dynamical Systems through Differential Galois theory: a practical guide // Contemporary Mathematics. 2010. Vol. 509. P. 143–220.
- [141] *Morales – Ruiz J. J.* Picard – Vessiot Theory and Integrability // Journal of Geometry and Physics. 2015. Vol. 87. P. 314–343.
- [142] *Motsepe K.A., Shatalov M.Y., Joubert S.V.* Application of the Heun functions to rotor vibratory gyroscope, their numerical computation and accuracy estimation // Applied Mathematics and Computation. 2014. Vol. 239. P. 47–55.

- [143] *Noether F.* Über rollende Bewegung einer Kugel auf Rotationsflächen. Leipzig: Teubner. 1909.
- [144] *Pepin P. Th.* Sur les équations linéaires du second ordre // Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. 1876. T. 82. P. 1323–1326.
- [145] *Pepin P. Th.* Méthode pour obtenir les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires du seconde ordre // Atti dell'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei. V. 34. P. 243-388.
- [146] *Picard E.* Sur les équations différentielles linéaires et les groupes algébriques de transformations // Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. 1887. T. 1. P. A1–A15.
- [147] *Picard E.* Traité d'Analyse. Paris: Gauthier – Villars. 1895.
- [148] *van der Put M., Singer M.F.* Galois Theory of Linear Differential Equations. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Vol. 328. Berlin, Heidelberg: Springer–Verlag. 2003.
- [149] *Ramos A.* Poisson Structures for reduced non – holonomic systems // Journal of Physics A: Mathematical and General. 2004. Vol. 37. P. 4821–4842.
- [150] *Ritt J.F.* Integration in finite terms. Liouville's theory of elementary methods. New York. Columbia University Press. 1948.
- [151] *Ronveaux A.* Heun's Differential Equations. Oxford. Oxford University Press. 1995.
- [152] *Routh E. J.* The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies: Being Part II of a Treatise on the Whole Subject. Cambridge: Cambridge University Press. 2013.

- [153] *Shahverdyan T.A., Red'kov V.M., Ishkhanyan A.M.* Expansions of the Solutions of the General Heun Equation in Terms of the Incomplete Beta Functions // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2016. Vol. 19. No. 4. P. 395–402.
- [154] *Singer M.F.* Liouvillian solutions of n -th order homogeneous linear differential equations // American Journal of Mathematics. 1981. Vol. 103. P. 661–682.
- [155] *Singer M.F.* Solving Homogeneous Linear Differential Equations in Terms of Second Order Linear Differential Equations // American Journal of Mathematics. 1985. Vol. 107. P. 663–696.
- [156] *Stachowiak T., Szuminski W.* Non – integrability of restricted double pendula // Physics Letters A. 2015. Vol. 379. Issues 47–48. P. 3017–3024.
- [157] *Szuminski W.* A new model of variable – length coupled pendulums: from hyperchaos to superintegrability // Nonlinear Dynamics. 2024. Vol. 112. P. 4117–4145.
- [158] *Tsygvintsev A.* The meromorphic non–integrability of the three-body problem // Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. 2001. Vol. 537. P. 127–149.
- [159] *Tsygvintsev A.* Non–existence of new meromorphic first integrals in the planar three–body problem // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2003. Vol. 86. Issue 3. P. 237–247.
- [160] *Tsygvintsev A.* On some exceptional cases in the integrability of the three-body problem // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2007. Vol. 99. Issue 1. P. 23–29.
- [161] *Vessiot E.* Sur l'intégration des équations différentielles linéaires // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. 1892. Serie 3. T. 9. P. 197–280.

- [162] *Бардин Б.С., Кулешов А.С.* Алгоритм Ковачича и его применение в задачах классической механики. М.: Изд-во МАИ. 2020.
- [163] *Бардин Б.С., Кулешов А.С.* Применение алгоритма Ковачича для исследования случая Гесса в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // Динамические системы. 2020. Т. 10. № 2. С. 197–204.
- [164] *Ифраимов С.В., Кулешов А.С.* О движении саней Чаплыгина по выпуклой поверхности // Автоматика и телемеханика. 2013. № 8. С. 80–90. Перевод: *Ifraimov S.V., Kuleshov A.S.* On the Motion of Chaplygin's Sledge over Convex Surface // Automation and Remote Control. 2013. Vol. 74. № 8. P. 1297–1306.
- [165] *Ицкович М.О., Кулешов А.С.* Лиувиллевы решения в задаче о качении эллипсоида вращения по абсолютно шероховатой плоскости // Аналитическая механика, устойчивость и управление. Труды XI Международной Четаевской конференции. Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ. 2017. Том 1. С. 214–224.
- [166] *Косенко И.И., Кулешов А.С., Шишков А.А.* Задача о качении шара по поверхности вращения и её численный анализ // Труды МАИ. 2024. № 136. <https://trudymai.ru/published.php?ID=180666>
- [167] *Кулешов А.С.* О первых интегралах уравнений движения тяжелого тела вращения на абсолютно шероховатой плоскости // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2002. № 68. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша. 19 с.
- [168] *Кулешов А.С.* О первых интегралах уравнений симметричного гиростата на абсолютно шероховатой плоскости // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2003. № 47. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша. 20 с.
- [169] *Кулешов А.С.* Первые интегралы в задаче о качении тела вращения по шероховатой плоскости // Доклады РАН. 2003. Т. 391. № 3. С. 340–342. Перевод: *Kuleshov A.S.* First Integrals in the Problem of Rolling a Body of

- Revolution Over a Rough Plane // Doklady Physics. 2003. Vol. 48. № 7. P. 385–387.
- [170] *Кулешов А.С.* О первых интегралах уравнений движения тяжелого тела вращения на шероховатой плоскости // Механика твердого тела. Межведомственный сборник научных трудов. 2004. Т. 34. С. 72–79.
- [171] *Кулешов А.С.* Первые интегралы в задаче о движении параболоида вращения по шероховатой плоскости // Доклады РАН. 2005. Т. 400. № 1. С. 46–48. Перевод: *Kuleshov A.S.* First Integrals in the Problem of the Motion of a Paraboloid of Revolution over a Rough Plane // Doklady Physics. 2005. Vol. 50. № 1. P. 37–39.
- [172] *Кулешов А.С.* О первых интегралах уравнений движения симметричного гиростата на абсолютно шероховатой плоскости // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. № 1. С. 40–45. Перевод: *Kuleshov A.S.* First Integrals of the Equations of Motion of a Symmetric Gyrostat on a Perfectly Rough Plane // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2006. Vol. 70. № 1. P. 36–41.
- [173] *Кулешов А.С.* Применение алгоритма Ковачича для исследования движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. 2021. Т. 202. С. 10–42.
- [174] *Кулешов А.С.* О приведении некоторых систем классической механики к системам Лиувилля // Труды МАИ. 2023. № 128. <https://trudymai.ru/published.php?ID=171383>
- [175] *Кулешов А.С., Добрынин Д.С., Черняков Г.А.* Исследование задачи о движении тяжёлого тела вращения по шероховатой плоскости методом Ковачича // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теорети-

- ческой и прикладной механики: сборник докладов (Казань, 20–24 августа 2015 г.). Казань: Изд-во Казанского университета. 2015. С. 2160–2161.
- [176] *Кулешов А.С., Ифраимов С.В.* О движении стержня по выпуклой поверхности // Вестник Санкт – Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2013. № 2. С. 105–110.
- [177] *Кулешов А.С., Ицкович М.О.* Несуществование лиувиллевых решений в задаче о движении эллипсоида вращения по абсолютно шероховатой плоскости // Вестник Санкт – Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4(62). № 2. С. 291–299. Перевод: *Kuleshov A.S., Itskovich M.O.* Nonexistence of Liouvillian Solutions in the Problem of Motion of a Rotationally Symmetric Ellipsoid on a Perfectly Rough Plane // Vestnik. St. Petersburg University. 2017. Vol. 50. № 2. P. 173–179.
- [178] *Кулешов А.С., Зуева Д.С.* К задаче о движении тела вращения по сфере // Динамические системы. 2018. Т. 8. № 1. С. 23–30.
- [179] *Кулешов А.С., Катасонова В.А.* О существовании лиувиллевых решений в задаче о качении динамически симметричного шара по сфере // Вестник Санкт – Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. Т. 5(63). № 4. С. 670–677. Перевод: *Kuleshov A.S., Katasonova V.A.* Existence of Liouvillian Solutions in the Problem of Rolling Motion of a Dynamically Symmetric Ball on a Perfectly Rough Sphere // Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. 2018. Vol. 51. № 4. P. 407–412.
- [180] *Кулешов А.С., Катасонова В.А.* О существовании лиувиллевых решений в задаче о качении тела вращения по сфере // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4-х томах. Т. 1. Общая и прикладная механика. Уфа: РИЦ БашГУ. 2019. С. 110–111.

- [181] *Кулешов А.С., Лобанова Е.В.* Анализ интегрируемого случая Гесса в задаче о движении шара по гладкой горизонтальной плоскости // Труды МАИ. 2024. № 135. <https://trudymai.ru/published.php?ID=179675>
- [182] *Кулешов А.С., Соломина Д.В.* Применение алгоритма Ковачича для исследования задачи о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. Труды XX Международной конференции, Нижний Новгород, 23 – 27 ноября 2020 года. Нижний Новгород: Издательство ННГУ. 2020. С. 228–233.
- [183] *Кулешов А.С., Соломина Д.В.* Применение алгоритма Ковачича для исследования задачи о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения // Проблемы информатики. 2021. № 1. С. 15–24.
- [184] *Кулешов А.С., Соломина Д.В.* Лиувиллевы решения в задаче о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения // Вестник Санкт – Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8(66). № 4. С. 653–660. Перевод: *Kuleshov A.S., Solomina D.V.* Liouvillian Solutions in the Problem of Rolling of a Heavy Homogeneous Ball on a Surface of Revolution // Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. 2021. Vol. 54. № 4. P. 405–410.
- [185] *Кулешов А.С., Черняков Г.А.* Применение алгоритма Ковачича для исследования задачи о движении тяжелого тела вращения по абсолютно шероховатой плоскости // Вестник Санкт – Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2013. № 4. С. 93–102.
- [186] *Кулешов А.С., Черняков Г.А.* О качении параболоида вращения по неподвижной абсолютно шероховатой плоскости // Вестник Санкт – Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2014. Т. 1. № 4. С. 624–631.

- [187] *Кулешов А.С., Черняков Г.А.* Исследование задачи о движении тяжелого тела вращения по абсолютно шероховатой плоскости с помощью алгоритма Ковачича // Итоги науки и техники. Серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2018. Т. 145. С. 3–85. Перевод: *Kuleshov A.S., Chernyakov G.A.* Investigation of the motion of a heavy body of revolution on a perfectly rough plane by the Kovacic algorithm // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 245. No. 4. P. 417–497.
- [188] *Кулешов А.С., Шишков А.А.* Об интегрируемости в квадратурах задачи о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения второго порядка // Вестник Санкт – Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11(69). № 2. С. 347–353. Перевод: *Kuleshov A.S., Shishkov A.A.* On the Integrability in Quadratures of the Problem of Rolling a Heavy Homogeneous Ball on a Surface of Revolution of the Second Order // Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. 2024. Vol. 57. № 2. P. 236–240.
- [189] *Кулешов А.С., Шишков А.А.* О качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения второго порядка и по тору // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. Труды XXIII Международной конференции, Нижний Новгород, 13 – 16 ноября 2023 года. Нижний Новгород: Издательство ННГУ. 2023. С. 93–97.
- [190] *Bardin B.S., Kuleshov A.S.* Application of the Kovacic algorithm for the investigation of motion of a heavy rigid body with a fixed point in the Hess case // ZAMM. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2022. Vol. 102. № 11.
- [191] *Chernyakov G.A., Kuleshov A.S.* Investigation of the problem of motion of a heavy dynamically symmetric body on a perfectly rough plane by the Kovacic algorithm // Proceedings of the XLI Summer School – Conference "Advanced

- Problems in Mechanics (APM – 2013)". Saint – Petersburg (Repino), July 1–6, 2013. SPb: Polytechnical University Publishing House. 2013. P. 310–320.
- [192] *Chernyakov G.A., Kuleshov A.S.* Motion of a dynamically symmetric paraboloid on a perfectly rough plane // Proceedings of the XLII Summer School – Conference "Advanced Problems in Mechanics (APM – 2014)". Saint – Petersburg (Repino), June 30 – July 5, 2014. SPb: Polytechnical University Publishing House. 2014. P. 177–183.
- [193] *Chernyakov G.A., Kuleshov A.S.* Investigation of the Problem of Motion of a Heavy Dynamically Symmetric Body on a Perfectly Rough Plane by the Kovacic Algorithm // ENOC 2014 – Proceedings of 8th European Nonlinear Dynamics Conference. Vienna: Institute of Mechanics and Mechatronics, Vienna University of Technology. 2014. P. 453–458.
- [194] *Dobrynin D.S., Kuleshov A.S.* Solvable Cases in the Problem of Motion of a Heavy Rotationally Symmetric Ellipsoid on a Perfectly Rough Plane // Procedia IUTAM. 2016. Vol. 19. P. 161–168.
- [195] *Karapetyan A.V., Kuleshov A.S.* Steady motions of nonholonomic systems // Regular and Chaotic Dynamics. 2002. Vol. 7. № 1. P. 81–117.
- [196] *Karapetyan A.V., Kuleshov A.S.* The Routh theorem for mechanical systems with unknown first integrals // Theoretical and Applied Mechanics. 2017. Vol. 44. № 2. P. 169–180.
- [197] *Kuleshov A.S.* On the Generalized Chaplygin Integral // Regular and Chaotic Dynamics. 2001. Vol. 6. № 2. P. 227–232.
- [198] *Kuleshov A.S.* On the first integrals of equations of motions of a heavy rotational symmetric body on a perfectly rough plane // Proceedings of the XXXI Summer School – Conference «Advanced Problems in Mechanics». St. Petersburg Polytechnical University Publishing. 2003. P. 213–220.

- [199] *Kuleshov A.S.* First Integrals of Equations of Motion of a Heavy Rotational Symmetric Body on a Perfectly Rough Plane // Proceedings of the IUTAM Symposium on Multiscale Problems in Multibody System Contacts. Stuttgart, Germany, February 20–23, 2006. Springer. P. 103–110.
- [200] *Kuleshov A.S.* Application of the Kovacic algorithm to the Problem of Motion of a Heavy Rigid Body with a Fixed Point in a Hess Case // IEEE Proceeding of 2020 15th International Conference «Stability and Oscillations of Nonlinear Control System» (Pyatnitskiy's Conference). IEEE. 2020. P. 1–2.
- [201] *Kuleshov A.S., Dobrynin D.S.* Motion of a Rotationally Symmetric Ellipsoid on a Fixed Perfectly Rough Horizontal Plane // Proceeding of the IEEE International Conference on Mechanics «Seventh Polyakhov's Reading». IEEE. 2015. P. 1–4.
- [202] *Kuleshov A.S., Katasonova V.A.* Existence of Liouvillian Solutions in the Problem of Motion of a Rotationally Symmetric Body on a Sphere // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. № 030015. P. 030015-1–030015-5.
- [203] *Kuleshov A.S., Katasonova V.A.* Liouvillian Solutions in the Problem of Motion of a Dynamically Symmetric Body on a Sphere // IEEE Proceeding of 2018 14th International Conference «Stability and Oscillations of Nonlinear Control System» (Pyatnitskiy's Conference). IEEE. 2018. P. 1–3.
- [204] *Kuleshov A.S., Solomina D.V.* Application of the Kovacic algorithm to the Problem of Rolling of a Heavy Homogeneous Ball on a Surface of Revolution // MMST 2020. Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. Communications in Computer and Information Sciences. 2021. Vol. 1413. P. 169–177.