

На правах рукописи

Борщев Никита Олегович



**МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕПЛОВОЙ МОДЕЛИ
МНОГОРАЗОВОГО ЭЛЕМЕНТА КОНСТРУКЦИИ СПУСКАЕМОГО
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С УЧЕТОМ СВОЙСТВА
АНИЗОТРОПИИ**

05.07.03 – Прочность и тепловые режимы летательных аппаратов

Автореферат диссертации на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Москва – 2021

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель к.т.н., доцент
Антонов Виктор Алексеевич

Официальные оппоненты: Семена Николай Петрович,
доктор технических наук,
федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт космических исследований Российской академии наук»,
заведующий лабораторией

Савченкова Наталья Михайловна,
кандидат технических наук, доцент
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «МЭИ»,
доцент кафедры «Тепломассообменные процессы и установки»

Ведущая организация Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт проблем точной механики и управления Российской академии наук» (ИПТМУ РАН), г. Саратов

Защита диссертации состоится 10 июня 2021 года в 14.00 на заседании диссертационного совета Д212.125.10, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»,

Волоколамское ш., д. 4, г. Москва, А-80, ГСП-3, 125993

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», <https://mai.ru/events/defence>

Автореферат разослан «___» _____ 2021 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
к.т.н., доцент



Денискина Антонина Робертовна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования.

При создании новых образцов ракетно-космической техники, функционирование которых сопровождается интенсивными процессами тепломассопереноса, особое внимание уделяется исследованию их теплофизическим характеристикам, тепловому проектированию и экспериментальной отработке тепловых режимов.

Повышенное внимание к указанным исследованиям связано прежде всего с ужесточением условий теплового нагружения конструкции во время эксплуатации, уменьшением температурных допусков на целевую аппаратуру, повышенными требованиями к надёжности, прочности, экономии топливно-энергетических ресурсов.

Создание современной космической техники требует большого объема экспериментальных исследований, включающих тепло-вакуумные испытания. Важным моментом является создание эффективных методов диагностики и идентификации теплообменных процессов на основе экспериментальных данных и результатов испытаний.

Важное место в исследовании теплообменных процессов заняла методология решения обратных задач теплопроводности (ОЗТ). Решение обратной задачи заключается в определении краевых условий или коэффициентов уравнения (физических свойств вещества) для заданного распределения температур в пространстве и во времени.

Методы обратных задач теплопроводности дают возможность исследовать сложные нестационарные процессы теплопереноса в элементах конструкции, обладают высокой информативностью и позволяют принимать обоснованные решения для проектирования ракетно-космической техники. В настоящее время методы исследований, основывающиеся на принципах решения обратных задач теплопроводности, находят всё более широкое применение. Большой вклад в разработку методов и алгоритмов решения обратных задач теплообмена внесли академик А. Н. Тихонов, Е. А. Сенкевич, О. М. Алифанов, С. В. Резник, В. Ф. Формалев, А. К. Алексеев, Е. А. Артюхин, В. Н. Елисеев, И. С. Кабанихин, Л. А. Коздоба, Ю. М. Мацевитый, Ю. В. Полежаев, В. М. Юдин, А. Г. Яголой, J. V. Beck, G. Chaven, Y. Jarny.

Подходы к параметрической идентификации коэффициентов математических моделей, базирующиеся на методах решения некорректных задач широко анализировались в нашей стране, а также в других странах и показали свою эффективность при разработках и исследованиях в космической, авиационной, автомобильной отраслях техники, металлургии, энергетике и т.д.

В настоящей работе рассматривается комплексный подход к определению теплофизических характеристик твёрдых материалов в целях обеспечения уточнения физико-математических моделей расчёта теплонагруженных конструкций ракетно-космической техники на всех этапах эксплуатации.

Комплексный подход включает два этапа:

1. Решается обратная граничная задача идентификации радиационного теплообмена по воспроизведению теплового аэродинамического падающего потока на конструкцию активного стыковочного агрегата (АСА). Решение данной задачи позволяет получить данные для разработки и создания экспериментального стенда, позволяющего имитировать условия спуска возвращаемого аппарата. Результатом тепловой обработки АСА на созданном стенде является температурное поле стыковочного агрегата.

2. По полученному температурному полю решается обратная задача по поиску компонентов тензора теплопроводности.

Степень разработанности темы исследования.

Существует ряд работ и исследований в области теплового проектирования конструкций ракетно-космической техники, выполненных из композиционных материалов. Такие материалы обладают явно выраженной анизотропией. Значительный вклад в исследование теплового состояния анизотропных твёрдых тел внесли Формалев В.Ф. и Колесник С.А., в работах которых расчеты проводились в декартовой системе координат при заданных граничных условиях первого рода (заданных температурах).

В диссертации рассмотрена реальная конструкция АСА, исследуемая в граничных условиях второго рода (падающий тепловой поток). Задача решена в цилиндрической системе координат в связи с осевой симметричностью АСА.

Цели и задачи исследования.

Цель – разработка методики по определению компонентов тензора теплопроводности анизотропного материала шпангоута стыковочного агрегата спускаемого аппарата по данным теплофизического эксперимента.

Для достижения цели поставлены и решены следующие **основные задачи**:

1. Проанализировать существующие математические модели распространения тепловых потоков в сплошной однородной анизотропной среде с целью создания обобщённой математической модели для идентификации компонентов тензора теплопроводности, удовлетворяющей инженерным требованиям.

2. Разработать алгоритм решения обратной задачи параметрической идентификации математической модели распространения тепловых потоков в сплошной однородной анизотропной среде.

3. Модернизировать численный метод для реализации параметрической идентификации математической модели теплопереноса тепловых потоков в анизотропных твёрдых телах, позволяющего вычислить компоненты тензора теплопроводности.

4. Решить обратную задачу радиационного теплопереноса по воспроизведению теплового аэродинамического падающего потока на конструкцию АСА для создания специального экспериментального стенда, позволившего имитировать тепловую аэродинамическую нагрузку лучистым тепловым диффузным потоком.

5. Выбрать проектные параметров ИК-имитаторов стенда для моделирования аэродинамического теплового нагрева шпангоута лучистым тепловым диффузным потоком.

Научная новизна исследования.

Научную новизну работы определяют методы исследования тепловой модели многообразного элемента конструкции спускаемого космического аппарата с учетом свойства анизотропии, а именно:

1. Обобщённая математическая модель шпангоута стыковочного агрегата, позволяющая провести идентификацию компонентов симметричного тензора теплопроводности.

2. Алгоритм решения задачи параметрического определения компонентов вектора теплопроводности элемента шпангоута АСА, позволяющий определить ориентацию вектора теплопроводности в обеспечении уточнённого теплового состояния конструкции.

3. Проектные параметры ИК-имитаторов стенда (задаваемые на них тепловые потоки, их геометрические характеристики и расположение в пространстве) для воспроизведения условий эксплуатации АСА на основе решения обратной задачи радиационного теплопереноса стохастическим методом моделирования Монте-Карло.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Теоретическая значимость заключается в том, что полученные выводы дополняют теорию теплового проектирования изделий ракетно-космической техники с явно выраженной анизотропией теплопроводности. Основные теоретические результаты могут стать основой для дальнейшего изучения теплового состояния конструкций спускаемых космических аппаратов при сверхкритическом тепловом нагружении.

Практическая значимость:

1. Методика по определению компонент симметричного тензора теплопроводности элемента шпангоута АСА.

2. Разработка прикладного программного обеспечения по определению ориентации главных осей тензора теплопроводности для материалов с явно выраженной анизотропией.

3. Выбор тепловой мощности ИК-имитаторов и их пространственного расположения для экспериментального стенда по моделированию внешнего теплосилового нагружения шпангоута АСА.

Методология и методы исследования.

При решении поставленных задач использовались метод итерационной регуляризации, а также метод регуляризации А. Н. Тихонова, градиентный метод сопряжённых направлений, метод переменных направлений с экстраполяцией В. Ф. Формалева, программная среда Fortran для решения поставленной задачи, стохастический метод Монте-Карло для моделирования тепловой лучистой нагрузки, программная среда «Therm» для оценки теплового состояния объекта.

Положения, выносимые на защиту.

1. Обобщённая математическая модель шпангоута стыковочного агрегата.

2. Алгоритм идентификации симметричного тензора теплопроводности шпангоута активного стыковочного агрегата по данным замеров температур.

3. Обобщённая методика идентификации симметричного тензора теплопроводности шпангоута активного стыковочного агрегата по данным замеров температур.

4. Проектные параметры ИК-имитаторов стенда для моделирования аэродинамического теплового нагрева шпангоута активного стыковочного агрегата многоразовых спускаемых космических аппаратов лучистым тепловым диффузным потоком.

Степень достоверности и апробация результатов.

Достоверность результатов подтверждается строгой постановкой задачи исследования с принятыми допущениями, чёткой формулировкой применяемых формализованных описаний, результатами программной реализации и хорошей сходимостью результатов теоретического исследования симметричного тензора теплопроводности шпангоута АСА с их реальными значениями.

Результаты работы неоднократно докладывались и обсуждались на международных и всероссийских конференциях и заседаниях: 16-я Международная конференция «Авиация и космонавтика» – г. Москва, 2017; 17-я Международная конференция «Авиация и космонавтика» – г. Москва, 2018; 15-я Российская конференция по теплофизическим свойствам веществ – г. Москва, 2018; 7-я Российская национальная конференция по теплообмену – г. Москва, 2018; 18-я Международная конференция «Авиация и космонавтика» – г. Москва, 2019; 44-е академические чтения по космонавтике – г. Москва, 2020 г.

По материалам диссертации опубликовано 7 работ, в которых отражены основные положения исследования, в том числе 4 статьи в ведущих научных изданиях, включённых в перечень рецензируемых изданий ВАК и международные системы цитирования Web of Science и Scopus, а также тезисы докладов конференций.

Результаты работы внедрены в АО НПО «Энергомаш» в части создания алгоритма и методики по определению ориентации вектора теплопроводности. Отдельные разделы работы используются в учебном процессе ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» при чтении лекций по дисциплине «Конструирование и расчёт аппаратов систем обеспечения жизнедеятельности», а также при проведении курсового и дипломного проектирования.

Структура и объем работы.

Диссертация включает в себя введение, пять глав, заключение, список сокращений и условных обозначений, список литературы, два приложения. Общий объем работы составляет 154 страницы, включая 58 рисунков, 1 таблицу и список литературы из 98 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении отражена актуальность темы исследования, сформулированы цели и задачи работы. Показаны новизна, а также достоверность и обоснованность результатов. Кратко охарактеризованы методы исследования. Представлены теоретическая и практическая значимость работы.

В первой главе проведён анализ построения тепловых физико-математических моделей твёрдых тел с явно выраженной анизотропией. Рассмотрены основные виды кристаллографических систем, для которых характерен тот или иной вид анизотропии. Даны основные определения «прямой» и «обратной» задач теплопроводности, а также приведены основные численные методы решения «прямых» задач теплопроводности, такие как метод тепловых балансов или изотермических узлов и метод конечных элементов. Описаны основные виды обратных задач теплообмена и их отличие от прямых.

Стыковочный агрегат выбран с целью апробацию разрабатываемого алгоритма по определению коэффициентов симметричного тензора теплопроводности его металлической части. Он предназначен для стыковки транспортного корабля со станцией (рисунок 1).

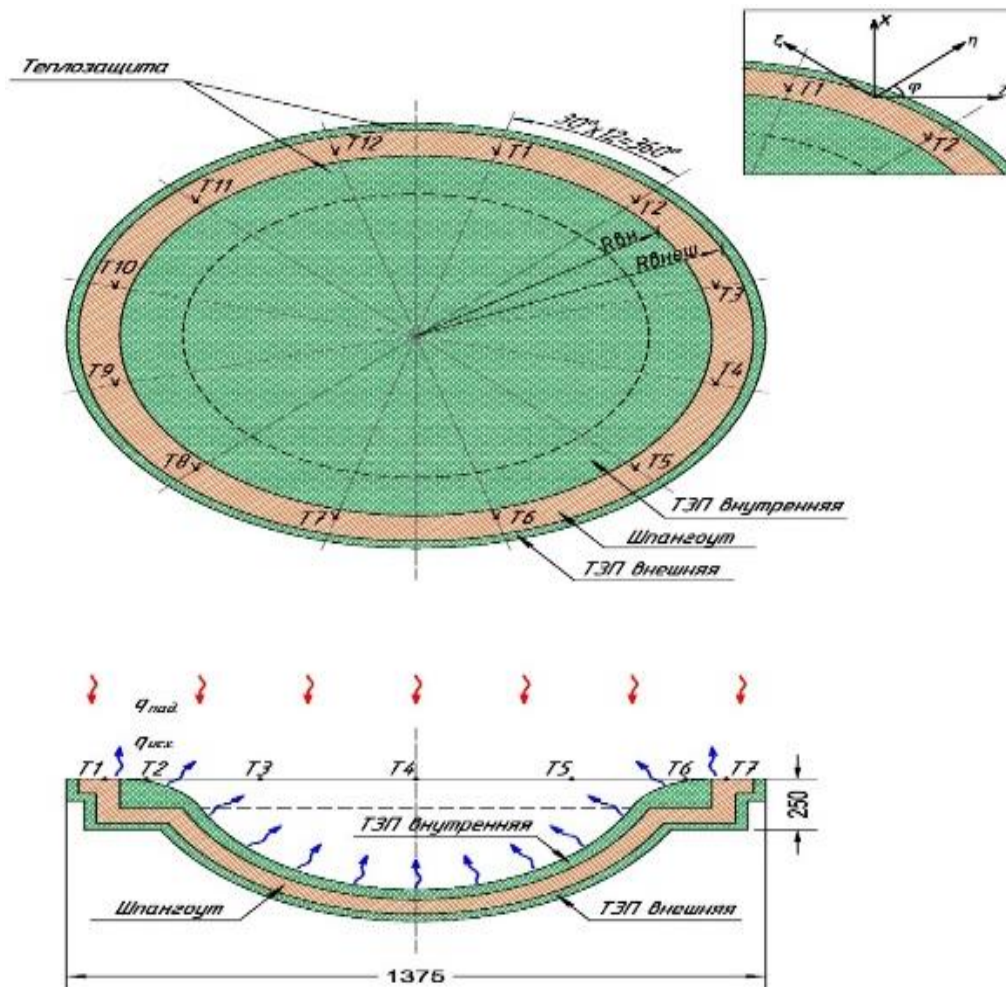


Рисунок 1 – Расчётная схема АСА

При спуске в плотных слоях атмосферы Земли на АСА воздействует аэродинамический тепловой поток (приходящие стрелки). Одновременно происходит излучение тепловой энергии (уходящие стрелки) в атмосферу.

По торцу стыковочного агрегата (рисунок 1) расположен шпангоут шириной 200 мм. На корабль и стыковочный агрегат нанесено теплоизолирующее покрытие для предотвращения перегрева при прохождении плотных слоёв атмосферы. На переднюю часть шпангоута теплоизоляция не наносится, т.к. этой частью шпангоута стыковочного агрегата транспортный корабль сопрягается при стыковке со станцией.

При спуске корабля в плотных слоях атмосферы на него воздействует аэродинамический тепловой поток, достигающий 70 кВт/м². Под воздействием теплового потока температурное поле шпангоута изменяется в широком диапазоне, что может приводить к значительной его деформации.

При проведении термосиловых испытаний на передний торец шпангоута симметрично установлены 12 термопар. По данным термопар идентифицировать его тепловая математическая модель шпангоута для нахождения ориентации главных осей теплопроводности относительно выбранной системы координат (рисунок 1).

Для идентификации теплофизических характеристик разработана математическая модель, позволяющая определить компоненты тензора теплопроводности материала по данным теплофизического эксперимента. Поскольку исследуемый элемент конструкции спроектирован как многоразовый и в самой конструкции есть неучтённые в физико-математической тепловой модели клеевые стыки с теплозащитным покрытием, то целесообразно рассматривать данную конструкцию как анизотропную, стоит также сказать, что в природе «чисто» изотропных материалов нет в принципе. Уровень анизотропии зависит от ориентации волокон, кристаллической решётки материала и уровня нагрева. Также следует отметить, что для апробации разрабатываемого алгоритма необходимо провести сравнение полученных результатов с материалом, теплофизические характеристики которого хорошо изучены.

Принимаются следующие допущения:

1. В силу симметрии конструкции распределение температурного поля по конструкции будет тоже симметрично. Принимаем граничные условия второго рода (тепловой поток на границе тел) и рассматриваем постановку задачи в цилиндрических криволинейных координатах при наличии симметричного тензора теплопроводности в декартовых координатах.

2. Так как оба боковых торца теплоизолированы, то целесообразно принять двумерную постановку задачи при нулевом перетекании тепла вдоль по радиусу шпангоута.

Запишем рассматриваемую постановку задачи в виде

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta z}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \right) = C(T) \rho \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \tau}; z \in [0; l_z], \theta \in [0; \pi], \tau > 0.$$

Граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
& - \left[\lambda_{\theta z}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \frac{\lambda_{\theta\theta}(T)}{r} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \right] = 0, z \in [0; l_z], \theta = 0, \tau > 0; \\
& \left[\lambda_{\theta z}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial r} + \frac{\lambda_{\theta\theta}(T)}{r} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \right] = 0, z \in [0; l_z], \theta = \pi, \tau > 0; \\
& \left[\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \right] = q_{\text{эф}}(T^4) - q_{\text{к}}(T), z = l_z, \theta \in [0; \pi], \tau > 0; \\
& - \left[\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \right] = 0, z = 0, \theta \in [0; \pi], \tau > 0,
\end{aligned}$$

где $C(T)$ – удельная теплоемкость материала, $\frac{\text{Дж}}{\text{кгК}}$;

ρ – плотность материала, $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$;

$\lambda_{\theta\theta}(T), \lambda_{\theta z}(T), \lambda_{zz}(T)$ – компоненты тензора теплопроводности, $\frac{\text{Вт}}{\text{мК}}$;

T – температура, К;

q_i – тепловой удельный поток, $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$.

Компоненты тензора теплопроводности в цилиндрической системе координат связаны с декартовой следующими соотношениями при переходе к двумерной постановке задачи:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\theta\theta}(T) &= \lambda_{xx} \sin^2 \theta - 2\lambda_{xy}(T) \sin(\theta) \cos(\theta); \\
\lambda_{\theta z}(T) &= -\lambda_{xz}(T) \sin \theta; \\
\lambda_{zz}(T) &= \lambda_{zz}(T).
\end{aligned}$$

В качестве критерия адекватности расчётной модели реальному процессу в работе предлагается среднеквадратичный функционал невязки, характеризующий среднеквадратичное отклонение рассчитанных температур, полученных в ходе решения прямой задачи теплопроводности в точках установки термопар от экспериментально измеренных температур

$$S(\lambda_p) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K ([T(\lambda^{(n)}) - \tilde{T}]^2 d\tau.$$

В работе используется метод безусловной минимизации функционала $S(\lambda_p)$ с помощью метода сопряженных градиентов, как наиболее точного метода первого порядка точности, позволяющего достичь требуемой сходимости за минимальное число итераций.

Последовательный алгоритм метода сопряжённых градиентов можно представить в следующем виде

$$\vec{\lambda}^{n+1} = \vec{\lambda}^n + \Delta \vec{\lambda}^{n+1},$$

где $\Delta \vec{\lambda}^{n+1} = -\beta_{\text{кр}}^{(n)}$.

Направление спуска определяется из:

$$\begin{aligned}
\vec{p}^n &= \text{grad}S(\vec{\lambda}^n) + \beta_n \vec{p}^{n-1}; \\
\beta_0 &= 0, p^{(0)} = \text{grad}S(\lambda^{(0)});
\end{aligned}$$

$$\beta_n = \frac{|\text{grad}S(\lambda^{(n)})|^2}{|\text{grad}S(\lambda^{(n-1)})|^2}$$

Критерием останова итерационного процесса является выражение

$$|\text{grad}S(\lambda^{(0)})| = \sqrt{\left\{ \sum_{p=1}^3 \left[\frac{\partial S(\lambda^{(n)})}{\partial \lambda_p} \right]^2 \right\}} \leq \delta_{sum},$$

где δ_{sum} – погрешность входных данных, вычисленная в той же метрике, что и целевой функционал.

Частью итерационных алгоритмов решения обратных задач является вычисление градиента функционала невязки. Выражение для градиента можно получить, представив искомую зависимость в параметрическом виде

$$\lambda_{\theta\theta}(T) \approx \sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta\theta} N_m(T), \lambda_{\theta z}(T) \approx \sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta z} N_m(T), \lambda_{zz}(T) \approx \sum_{m=1}^M \lambda_m^{zz} N_m(T),$$

где $N_m(T)$ – базисные функции, описывающие зависимость искомого теплофизических характеристик от температуры. Для вывода компонент градиента целевого функционала составим обобщённый функционал Лагранжа

$$\begin{aligned} L(\lambda_p) = & \frac{1}{2} \int_0^{\tau_{max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [T(z_j, \theta_k, \tau) - \tilde{T}]^2 d\tau + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{\tau_{max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \frac{\psi(z_j, \theta_k, \tau)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta z}(T) \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} \right) - c(T) \rho \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \tau} d\tau \end{aligned}$$

При этом получены следующие выражения для составляющих градиента функционала невязки:

– для первой компоненты тензора теплопроводности:

$$\frac{\partial \delta I}{\partial \lambda_m^{zz}} = - \int_0^{\tau_{max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \psi(z_j, \theta_k, \tau) \frac{\partial}{\partial z} \left[\sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{\partial (T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau))}{\partial z} \right] d\tau;$$

– для второй компоненты тензора теплопроводности:

$$\frac{\partial \delta I}{\partial \lambda_m^{\theta z}} = - \int_0^{\tau_{max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \frac{\psi(z_j, \theta_k, \tau)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{\partial (T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau))}{\partial \theta} \right] d\tau;$$

– для третьей компоненты тензора теплопроводности:

$$\frac{\partial \delta I}{\partial \lambda_m^{\theta\theta}} = -2 \int_0^{\tau_{max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \frac{\psi(z_j, \theta_k, \tau)}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[\sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{\partial (T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau))}{\partial \theta} \right] d\tau;$$

где $\psi(\theta, z, \tau)$ – множитель Лагранжа, полученный при решении сопряженной задачи по поиску вариации температур.

При решении поставленной задачи методом регуляризации А.Н. Тихоновым функционал невязки примет следующий вид

$$\begin{aligned}
L(\lambda_p) = & \frac{1}{2} \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [T(z_j, \theta_k, \tau) - \tilde{T}]^2 d\tau + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \frac{\Psi(z_j, \theta_k, \tau)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta z}(T) \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} \right) - C(T) \rho \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \tau} + \\
& + \frac{1}{2} \gamma(\delta) \left\| \lambda_m^{\theta\theta^2} + \lambda_m^{z\theta^2} + \lambda_m^{zz^2} \right\| d\tau.
\end{aligned}$$

Для отыскания корня обобщённой невязки на каждом итерационном шаге используется метод хорд для решения нелинейных алгебраических уравнений.

Таким образом, компоненты градиента целевого функционала невязки будут иметь следующие выражения, немногим отличающиеся от предыдущих.

Постановка задачи для вариации этого поля температур при возмущении искомым характеристикам на малую величину имеет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) \right] + \\
& + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(\theta, z, \tau) \right) = \frac{C(T)}{1 + \bar{\Delta}} \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \tau}.
\end{aligned}$$

Граничные условия будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(\theta, z, \tau) + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \frac{1}{r} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) + \right. \\
& \left. + \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \frac{\lambda_{\theta\theta}(T)}{r} \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \right] = 0, \\
& z \in [0; l_z], \theta = 0, \tau > 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(\theta, z, \tau) + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \frac{1}{r} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) + \\
& + \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \frac{\lambda_{\theta\theta}(T)}{r} \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} = 0, z \in [0; l_z], \theta = \pi, \tau > 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(\theta, z, \tau) + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) + \right. \\
& \left. + \lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \right] = 0, z = 0, \theta \in [0; \pi], \tau > 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(\theta, z, \tau) + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) + \\
& + \lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} = -4\varepsilon\sigma T^3 \Delta T(\theta, z, \tau) - \alpha_k(T) \Delta T(\theta, z, \tau) - \\
& - \frac{d\alpha_k(T)}{dT} \Delta T(\theta, z, \tau), z = l_z, \theta \in [0; \pi], \tau > 0.
\end{aligned}$$

При решении задачи методом итерационной регуляризации в качестве параметра регуляризации используется номер итерации, то есть на каждой последующей итерации среднеквадратичный функционал невязки должен быть

минимален. Для этого целесообразно выбрать шаг спуска при использовании рассматриваемого метода оптимизации. Запишем для этого целевой функционал невязки на следующей итерации

$$S(\lambda_p) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [T(\lambda^{(n)}, z_j, \theta_k, \tau) + \alpha_s \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) - \tilde{T}]^2 d\tau.$$

Дифференцируя полученное выражение по α_s , получим выражение для шага спуска α_s

$$\alpha_s = \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \frac{[T(\lambda^{(n)}, z_j, \theta_k, \tau) - \tilde{T}]}{\Delta T(z_j, \theta_k, \tau)} d\tau.$$

В третьей главе рассматривается модернизация численного метода для реализации параметрической идентификации математической модели теплопереноса тепловых потоков в анизотропных твёрдых телах, позволяющего вычислить компоненты тензора теплопроводности.

Одним из наиболее универсальных методов численного решения краевых задач в двумерной постановке для анизотропных твёрдых тел является метод переменных направлений, модернизированный путём создания нового шаблона для реализации постановки задачи.

Коэффициенты математической модели при решении краевых задач вычисляются путём линейной интерполяции таблично заданных функций, что существенно уменьшает время вычислений. Если исходные табличные данные задаются с большой дискретностью, предварительно осуществляется их интерполяция базисными функциями с целью построения последующей линейной интерполяции.

1) характеристики переноса вычисляются по распределению функции и на предыдущем временном слое, где они известны

$$\tilde{\lambda}_j^n \equiv \lambda^n(T_j^k); \quad \tilde{\lambda}_i^n \equiv C^n(T_j^k);$$

2) приводится усреднение по характеристикам между двумя узлами i и $(i+1)$:

$$\tilde{\lambda}_{j\pm 1/2}^n = \frac{1}{2} [\tilde{\lambda}^n(T_j^{k+1}) - \tilde{\lambda}^n(T_{j\pm 1/2}^{k+1/2})];$$

$$\tilde{\lambda}^n(T_p^{k+1/2}) = 2\lambda^n(T_p^k) - \lambda^n\left(T_p^{k-\frac{1}{2}}\right) + O(\tau^2), p = i, i \pm 1, n = zz, z\theta, \theta\theta;$$

3) приводится усреднение по функции и между двумя узлами i и $(i+1)$:

$$C_{i,j}^{k+1} \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k}{\tau} = \Lambda_{zz} T^{k+\frac{1}{2}} + 2\Lambda_{z\theta} T^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_{\theta\theta} T^{k+\frac{1}{2}};$$

$$\Lambda_{zz} T^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h_z} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j}}{2} \frac{T_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i-1,j}}{2} \frac{T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} \right)$$

$$\Lambda_{z\theta} \tilde{T}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{2}{2rh_z} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j-1}}{2} \frac{\tilde{T}_{i+1,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i+1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} \right) -$$

$$- \frac{2}{2rh_z} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j-1}}{2} \frac{\tilde{T}_{i-1,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} \right);$$

$$\Lambda_{\theta\theta} \tilde{T}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{r^2 h_\theta} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{ij+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{ij}}{2} \frac{\tilde{T}_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{ij} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j-1}}{2} \frac{T_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} \right)$$

$$\tilde{T}_{p,j+1}^{k+\frac{1}{2}} = 2T_{p,j+1}^k - T_{p,j+1}^{k-\frac{1}{2}} + O(\tau^2), p = i-1, i, i+1;$$

$$\tilde{\lambda}(T^{k+1}) = 2\lambda(T^k) - \lambda\left(T^{k-\frac{1}{2}}\right).$$

Для аппроксимации граничных условий со вторым порядком разложим значения составляющих векторов тепловых потоков на границах $z=0$, $z=l_z$, $\theta = 0$, $\theta = \pi$ в окрестности этих границ в ряды Тейлора до вторых производных включительно, получим:

$$\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,1}^{k+1/2} = \lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,0} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) \frac{h_z}{2} + O(h_z^2);$$

$$\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,j-1}^{k+1/2} = \lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,j} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) \frac{h_z}{2} + O(h_z^2).$$

Откуда с использованием дифференциального уравнения и конечно-разностной аппроксимации левых частей в последних соотношениях центральными разностями находим:

$$\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,0}^{k+1/2} = \lambda_{zz}(T) \frac{T_{i,1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2\left(\frac{h_z}{2}\right)} + O\left(\frac{h_z^2}{4}\right) -$$

$$\frac{h_z}{2} \left[C(T) \rho \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) \right] \Big|_{0,j}^{k+\frac{1}{2}} + O(h_z^2);$$

$$\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,j}^{k+1} = \lambda_{zz}(T) \frac{T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2\left(\frac{h_z}{2}\right)} + O\left(\frac{h_z^2}{4}\right) -$$

$$\frac{h_z}{2} \left[C(T) \rho \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) \right] \Big|_{0,j}^{k+\frac{1}{2}} + O(h_z^2).$$

Подставляя в краевые условия и аппроксимируя дифференциальные операторы, получим для подсхемы:

$$\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{2} \frac{T_{i,1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2\left(\frac{h_z}{2}\right)} + \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,0}}{2r_i} \frac{\tilde{T}_{i,1} + \tilde{T}_{i,0}}{2\left(\frac{h_\theta}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{h_z}{2} \left[\tilde{C} \frac{T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,0}^k}{\frac{\tau}{2}} - \frac{1}{h_\theta} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0}}{2} \frac{T_{i+1,0}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i-1,0}}{2} \frac{T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} \right) - \frac{2}{2rh_\theta} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i,0}}{2} \frac{T_{i+1,1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i+1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,0}}{2} \frac{T_{i+1,1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i+1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} \right) \right] + O(h_z^2 + h_\theta^2) = \\
& = \sum_{i=1}^N q^{\text{пад}} - (\varepsilon_{i,j} \sigma T_{i,0}^{4k} + 4\varepsilon_{i,j} \sigma T_{i,j0}^{3k} \times \\
& \times (T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,0}^k) - \alpha_\kappa(T_{i,j}^k) T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}} - \alpha_\kappa(T_{i,j}^k) T_c; \quad i = 0, \dots, I, j = J; \\
& \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j-1}}{2} \frac{T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{2 \left(\frac{h_z}{2} \right)} - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j}}{2r_i} \frac{\tilde{T}_{i,1} + \tilde{T}_{i,0}}{2 \left(\frac{h_\theta}{2} \right)} \\
& - \frac{h_z}{2} \left[\tilde{C} \frac{T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^k}{\frac{\tau}{2}} - \frac{1}{h_\theta} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2} \frac{T_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i-1,j}}{2} \frac{T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} \right) - \frac{2}{2rh_\theta} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j-1}}{2} \frac{T_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i+1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j-1}}{2} \frac{T_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} \right) \right] + O(h_z^2 + h_\theta^2 + \tau) = 0; \quad i = 0, \dots, I, j = J.
\end{aligned}$$

Таким образом, конечно-разностная задача сводится к системе линейных алгебраических дифференциальных уравнений (СЛАУ) с трехдиагональными матрицами (порядок аппроксимации отброшен):

$$b_1 T_1^{k+1/2} - c_1 T_2^{k+1/2} = d_1; \quad j = 1, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$a_j T_{j-1}^{k+1/2} + b_j T_j^{k+1/2} - c_j T_{j+1}^{k+1/2} = d_j$$

$$a_{j-1} T_{j-2}^{k+1/2} + b_{j-1} T_{j-1}^{k+1/2} = d_{j-1}, \quad i = J - 1, k = 0, 1, 2, \dots$$

Запишем вид схемы на целом временном слое:

$$C_{i,j}^{k+1} \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^{k-1/2}}{\frac{\tau}{2}} = \Lambda_{zz} T^{k+1} + 2\Lambda_{z\theta} T^{k+1} + \Lambda_{\theta\theta} T^{k+1},$$

$$\begin{aligned} \text{где } \Lambda_{zz} T^{k+1} &= \frac{1}{h_z} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j}}{2} \frac{\tilde{T}_{i+1,j}^{k+1} - T_{i,j}^{k+1}}{h_z} - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i-1,j}}{2} \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i-1,j}^{k+1}}{h_z} \right); \\ \Lambda_{z\theta} T^{k+1} &= \frac{2}{2h_\theta} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j+1}}{2} \frac{\tilde{T}_{i+1,j+1}^{k+1} - T_{i-1,j-1}^{k+1}}{2h_z} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{2h_\theta} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j-1}}{2} \frac{\tilde{T}_{i+1,j11}^{k+1} - T_{i-1,j-1}^{k+1}}{2h_z} \right) \right); \\ \Lambda_{\theta\theta} T^{k+1} &= \frac{1}{r^2 h_\theta} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2} \frac{T_{i,j+1}^{k+1} - T_{i,j}^{k+1}}{h_\theta} - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j-1}}{2} \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j-1}^{k+1}}{h_\theta} \right). \end{aligned}$$

Аналогично запишем аппроксимацию граничных условий составляющих векторов тепловых потоков на границах $z=0$, $z=l_z$, $\theta = 0$, $\theta = \pi$ для целого временного слоя, получим:

$$\begin{aligned} \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{0,j+1}^{k+1} &= \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{0,j}^{k+1} + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial \theta} \right) \frac{h_\theta}{2} + O(h_\theta^2); \\ \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{i-1,j}^{k+1} &= \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{i,j}^{k+1} + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial \theta} \right) \frac{h_\theta}{2} + O(h_\theta^2). \end{aligned}$$

Откуда с использованием дифференциального уравнения и конечно-разностной аппроксимации левых частей в последних соотношениях центральными разностями находим:

$$\begin{aligned} \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{0,j}^{k+1} &= \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{T_{1,j}^{k+1} - T_{0,j}^{k+1}}{2 \left(\frac{h_\theta}{2}\right)} + O\left(\frac{h_\theta^2}{4}\right) - \\ &- \frac{h_\theta}{2} \left[c(T) \rho \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta z}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) \right] \Big|_{0,j}^{k+1} + O(h_\theta^2); \\ \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{i,j}^{k+1} &= \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i-1,j}^{k+1}}{2 \left(\frac{h_\theta}{2}\right)} + O\left(\frac{h_\theta^2}{4}\right) + \\ &+ \frac{h_\theta}{2} \left[c(T) \rho \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta z}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) \right] \Big|_{i,j}^{k+1} + O(h_\theta^2). \end{aligned}$$

Откуда по аналогии находим:

$$\begin{aligned} &\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{0,j+1} - (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{0,j-1}}{2h_z} \frac{T_{0,j+1}^{k+1} - T_{0,j}^{k+1}}{2} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{1,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j}}{r} \frac{T_{1,j}^{k+1} - T_{0,j}^{k+1}}{2h_\theta} + \\ &+ \frac{h_\theta}{2} \left[\tilde{c} \frac{T_{0,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{0,j}^k}{\frac{\tau}{2}} - \frac{1}{h_z} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2} \frac{T_{0,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{0,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j-1}}{2} \frac{T_{0,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{0,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} \right) - \frac{2}{2rh_\theta} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{1,j} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j}}{2} \frac{T_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{0,j+1}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{1,j-1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j-1} \frac{T_{i+1,1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i+1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2h_z}}{2} + O(h_z^2 + h_\theta^2 + \tau) = 0; j = 0, \dots, J; i = 0; \\
& - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{I,j+1} - (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{I,j-1} \frac{T_{I,j+1}^{k+1} - T_{I,j}^{k+1}}{2}}{2h_z} - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I-1,j} \frac{T_{I,j}^{k+1} - T_{I-1,j}^{k+1}}{2h_\theta}}{r} - \\
& - \frac{h_\theta}{2} \left[\tilde{C} \frac{T_{I,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{I,j}^k}{\frac{\tau}{2}} - \frac{1}{h_z} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j} \frac{T_{I,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{I,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2}}{h_z} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j-1} \frac{T_{I,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{I,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z}}{2} - \frac{2}{2rh_\theta} \left(\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I-1,j} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I-1,j} \frac{T_{I-1,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{I-1,j+1}^{k+\frac{1}{2}}}{2}}{\frac{2h_z}{2}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I,j-1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I-1,j-1} \frac{T_{I,j-1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{I-1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{2}}{\frac{2h_z}{2}} \right) \right] + O(h_z^2 + h_\theta^2 + \tau) = 0; j = 0, \dots, J; i = I.
\end{aligned}$$

Таким образом, также на целом временном слое получаем СЛАУ:

$$\begin{aligned}
b_1 T_1^{k+1} - c_1 T_2^{k+1} &= d_1; i = 1, k = 0, 1, 2, \dots; \\
a_i T_{i-1}^{k+1} + b_i T_i^{k+1} - c_i T_{i+1}^{k+1} &= d_i; \\
a_{i-1} T_{i-2}^{k+1} + b_{i-1} T_{i-1}^{k+1} &= d_{j-1}, j = J - 1, k = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

СЛАУ решаются методом прогонки.

В четвертой главе представлены результаты решения граничной обратной задачи радиационного теплопереноса для создания экспериментального стенда по моделированию аэродинамического теплового нагрева шпангоута лучистым тепловым диффузным потоком с помощью ИК-имитаторов. В качестве исходных данных для решения граничной обратной задачи радиационного теплопереноса использовано распределение аэродинамических потоков, полученных моделированием прохождения спускаемого аппарата через плотные слои атмосферы (рисунок 2).

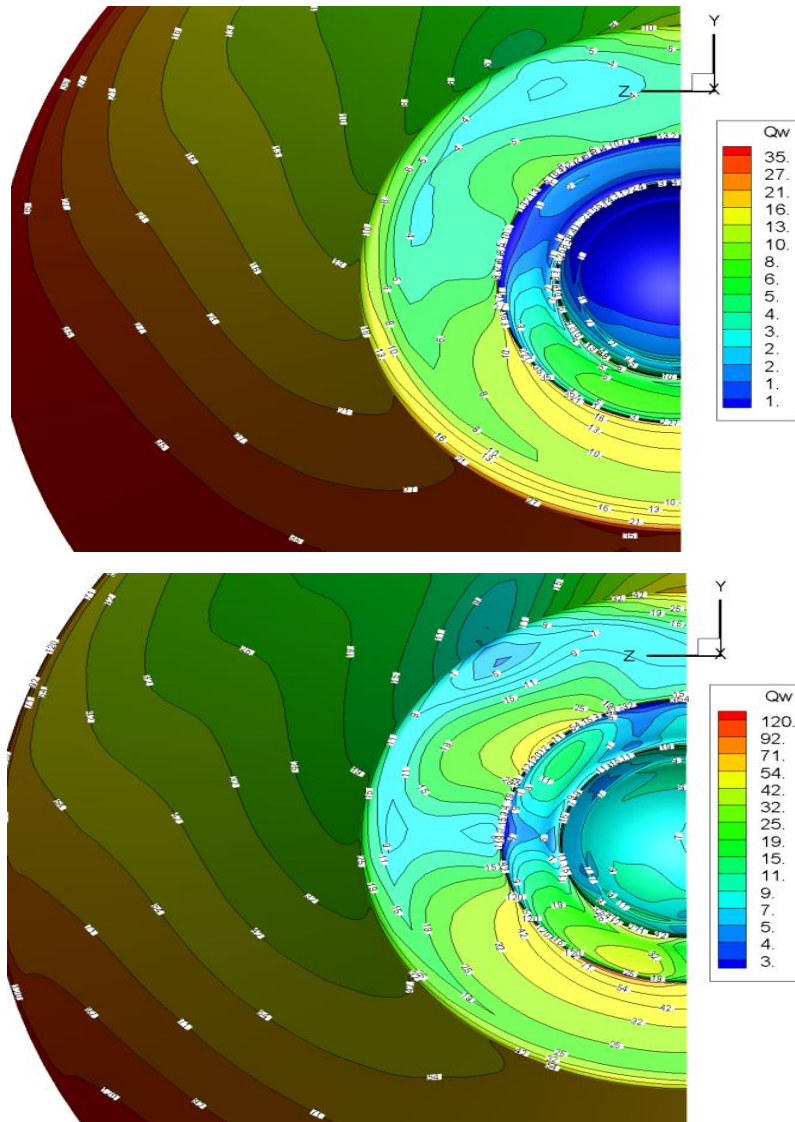


Рисунок 2 – Распределения тепловых потоков по конструкции корабля

Считаем, что конструкция стыковочного агрегата и распределение тепловых потоков имеет плоскость симметрии, поэтому на рисунке 2 показана только половина спускаемого аппарата. Основной нагреваемой зоной является титановый шпангоут. Согласно математической модели тепловые потоки на титановый шпангоут зависят от угловой координаты ω (угол, отсчитываемый от оси симметрии корабля по часовой стрелке). В диапазоне $\omega = 0 \div 90^\circ$ тепловые потоки описываются функцией для диапазона $\omega = 90 \div 180$:

$$q = (q_1 - q_3) \cdot \cos \omega + q_3;$$

$$q = (q_2 - q_3) \cdot \cos \left(2\omega - \frac{3}{2}\pi \right) + q_3.$$

По результатам математического моделирования решаем задачу имитации аэродинамического теплового потока падающим лучистым тепловым потоком от ИК-имитаторов. Для имитации лучистых тепловых потоков использовались 11 излучателей. Мощности излучателей, схема их размещения и распределение тепловых потоки приведены на рисунке 3. Помимо излучателей целесообразно использовать также 4 отражателя с теми же геометрическими размерами (400x150)

с теплоизолированными обратными поверхностями (на рисунке 3 изображены серым цветом).

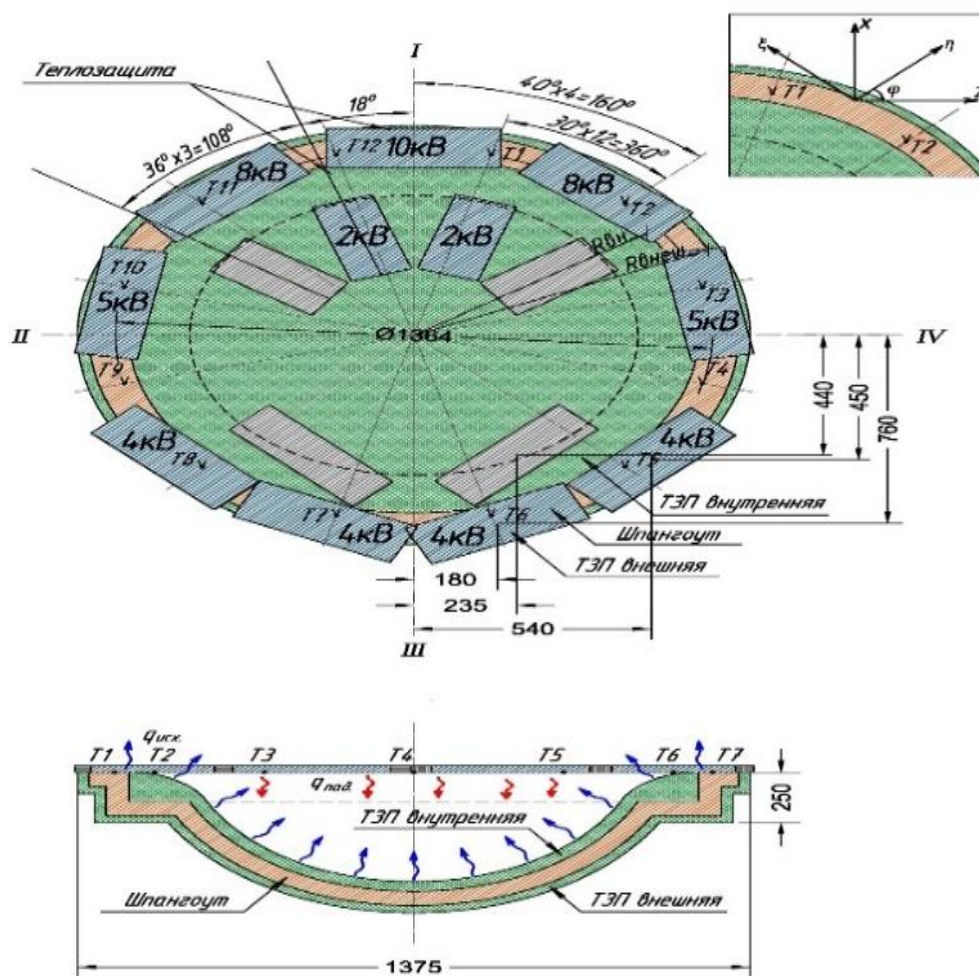


Рисунок 3 – Схема размещения ИК-имитаторов (слева) и распределения падающей тепловой лучистой нагрузки по элементам конструкции

На рисунке 4 приведены результаты сравнения угловых распределений тепловых потоков от имитаторов с заданными распределениями для каждой из трёх зон (красным цветом показан падающий аэродинамический тепловой поток, синим – лучистый падающий тепловой поток).

Сравнительный анализ расчётной внешней тепловой аэродинамической нагрузки на АСА при использовании пространственно-временной модели (ПВМ) и при лучистом теплообмене с использованием кварцевых галогеновых ламп (КГЛ) показал следующее:

1) в зонах повышенного нагрева шпангоута тепловая нагрузка, полученная по ПВМ выше, чем при лучистом нагреве на 12%, а в зонах минимального нагрева ниже на 45%;

2) в зонах нагрева тора ТЗП тепловая нагрузка, полученная по ПВМ выше, чем при лучистом нагреве на 9%, а в зонах минимального нагрева ниже на 50%;

3) в зонах нагрева сферы ТЗП тепловая нагрузка при расчёте по ПВМ ниже, чем при лучистом нагреве на 45%.

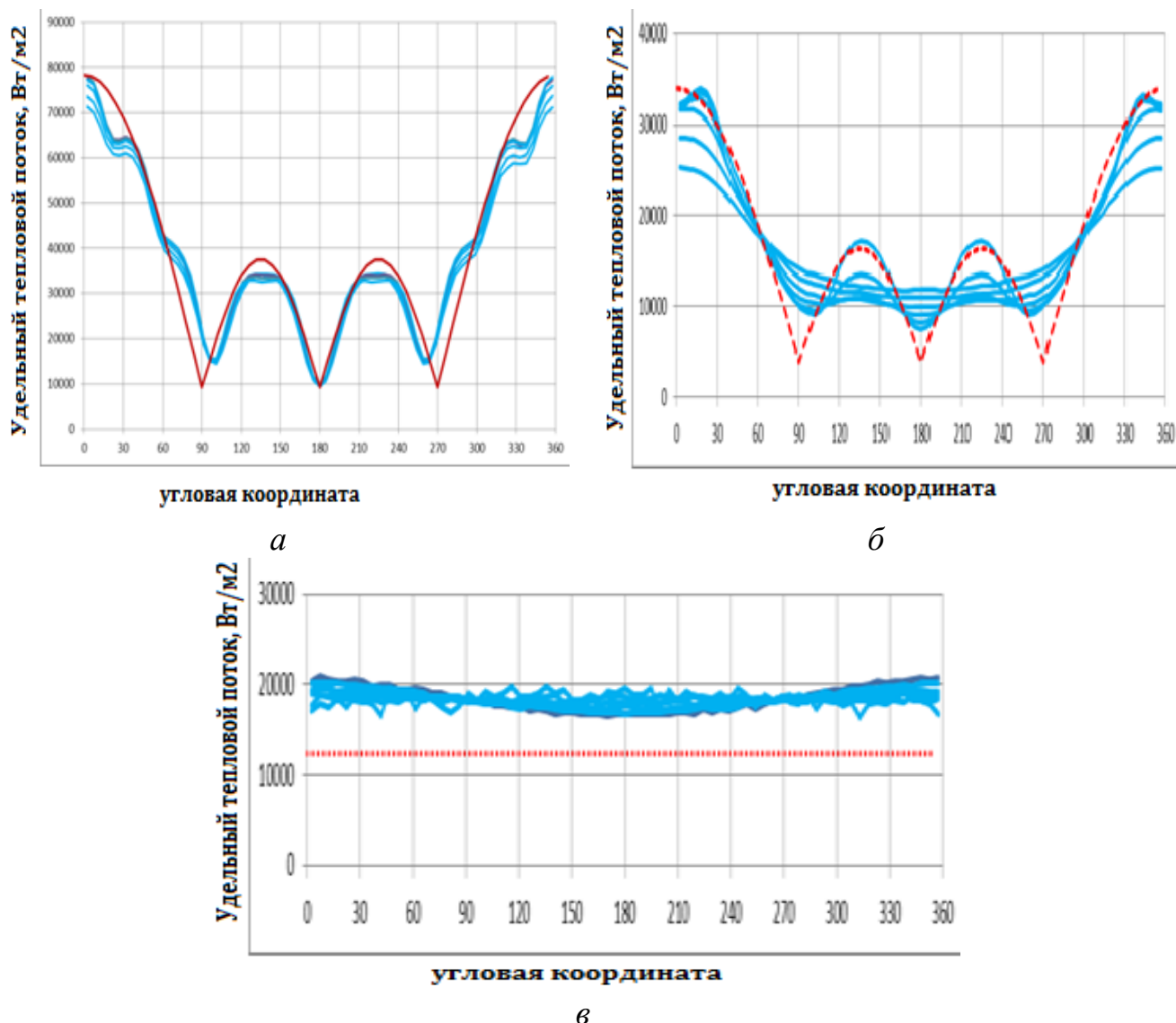


Рисунок 4 – Распределение тепловых потоков от имитаторов
a – для шпангоута; *б* – для кольца ТЗП; *в* – для сферы ТЗП

Вид экспериментальной установки приведён на рисунке 5. АСА стоит вертикально по отношению к ИК-имитаторам и подвержен лучисто-конвективному тепловому воздействию. Источниками излучения являются КГЛ, установленные на ИК-отражателях. Поскольку габариты бокса, где находится установка, много больше объекта испытаний, то АСА обтекается свободным тепловым потоком.

На рисунке 6 приведены результаты экспериментальной тепловой отработки для условий проведения теплостатического эксперимента (ТСИ) при расчётных тепловых мощностях с ИК-имитаторов в зонах установки термопар ($T_{п_i}$ – номер термопары).

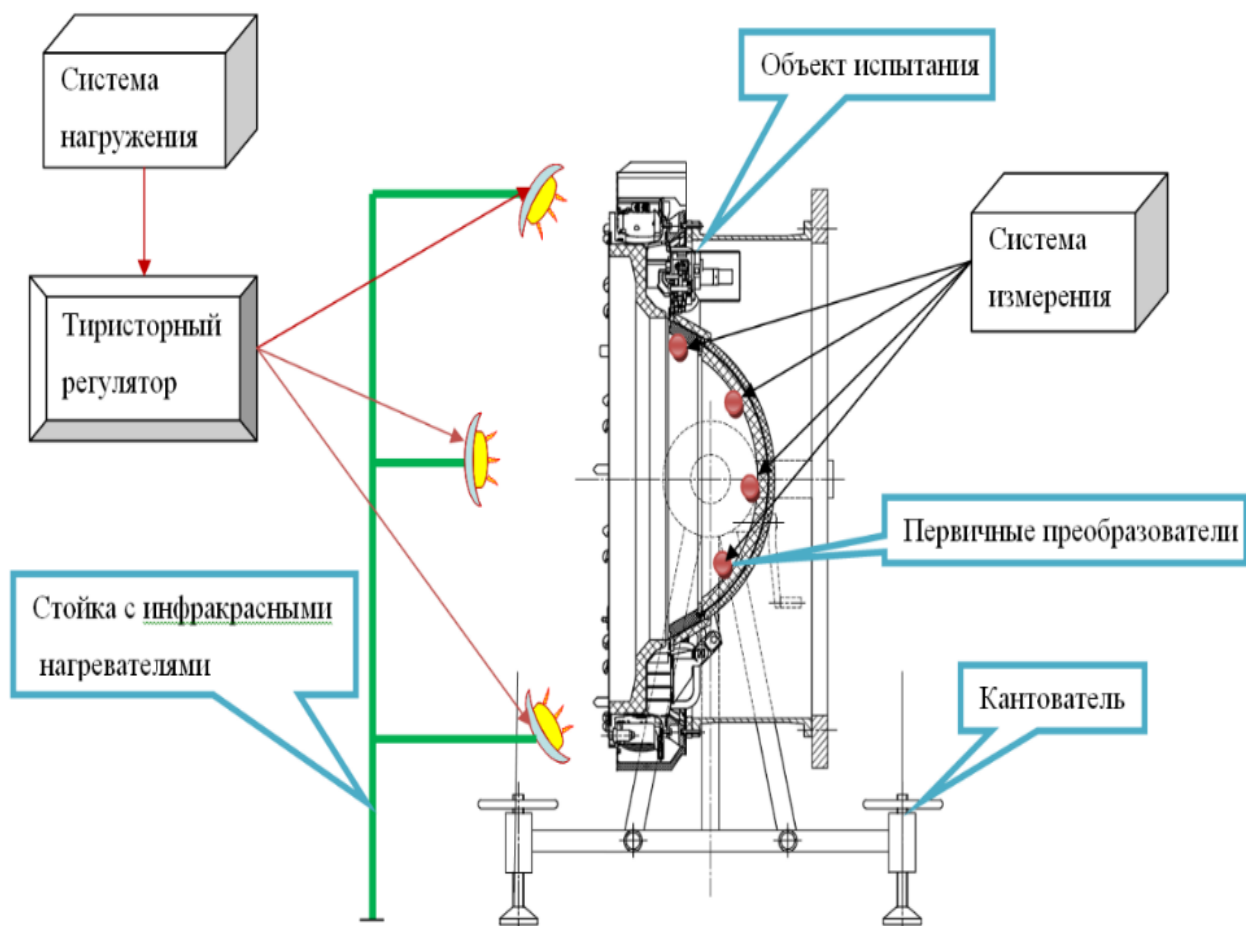


Рисунок 5 – Вид экспериментальной установки

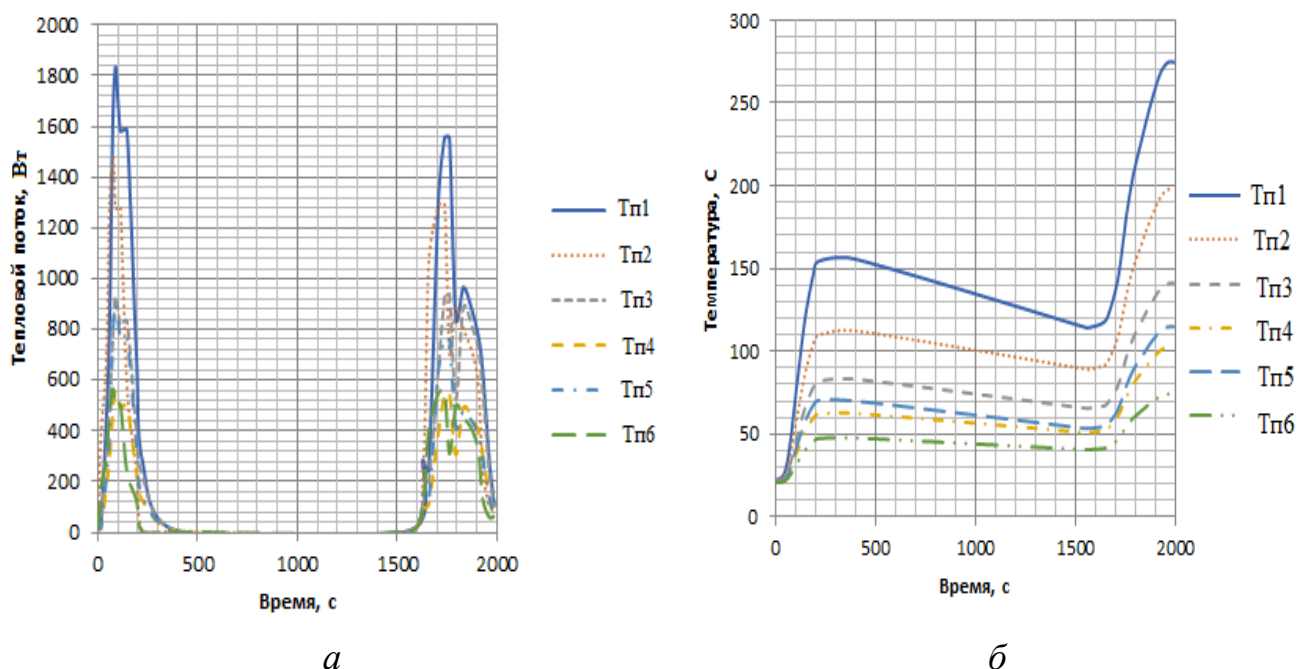


Рисунок 6 – Результаты экспериментальной тепловой обработки для условий проведения теплостатического эксперимента:

а – полная тепловая нагрузка на узлы, в которых располагаются датчики температур; *б* – значения нестационарного температурного поля в зоне установки термопар

В пятой главе представлены результаты моделирования температурного режима конструкции на примере элемента металлического шпангоута АСА для двух расчётных методов регуляризации среднеквадратичной ошибки.

На рисунке 7 представлены результаты моделирования температурного поля методом итерационной регуляризации в зависимости от номера итерации в местах установки датчиков температур ($T_{пi}$ – номер термопары).

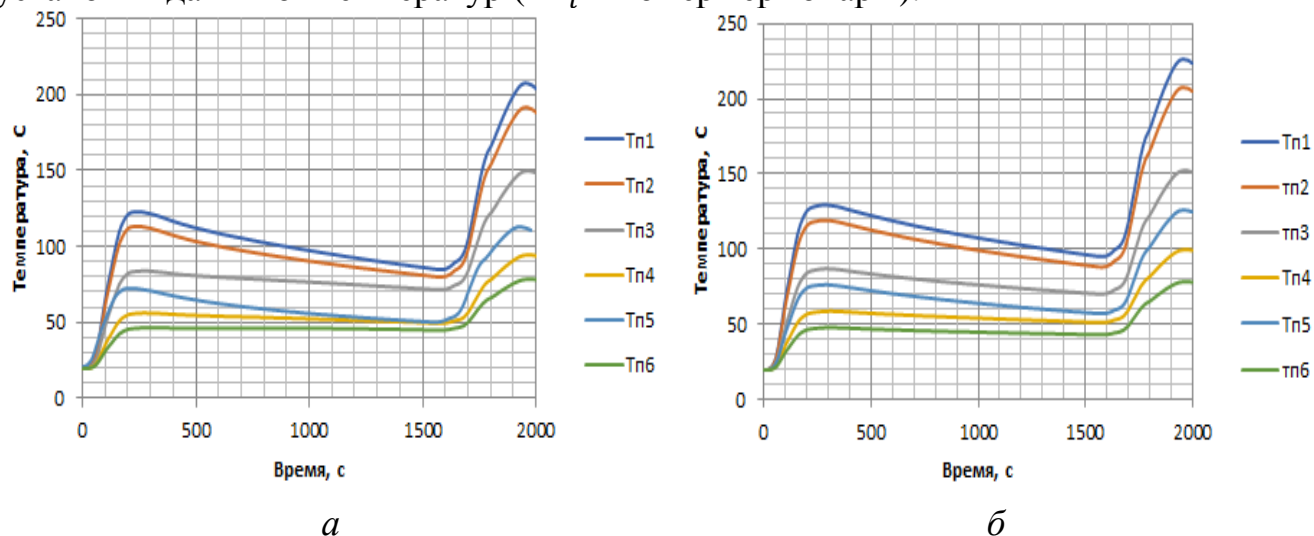


Рисунок 7 – Температурное поле на:
а – 1-й итерации; *б* – 6-й итерации

На рисунке 8 представлены результаты моделирования температурного поля методом регуляризации А. Н. Тихонова в зависимости от номера итерации в местах установки датчиков температур ($T_{пi}$ – номер термопары).

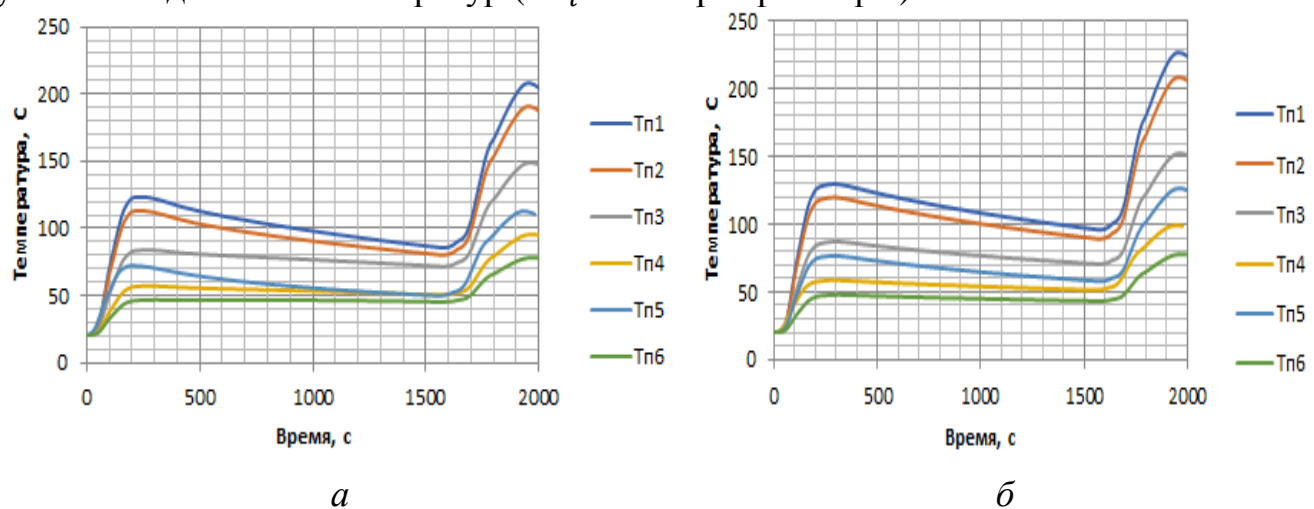


Рисунок 8 – Температурное поле на:
а – 1-й итерации; *б* – 6-й итерации

Для оценки динамики сходимости итерационного процесса приведены графические зависимости нерегуляризуемых невязок для двух рассматриваемых методов регуляризации в зависимости от номера итерации (рисунок 9).

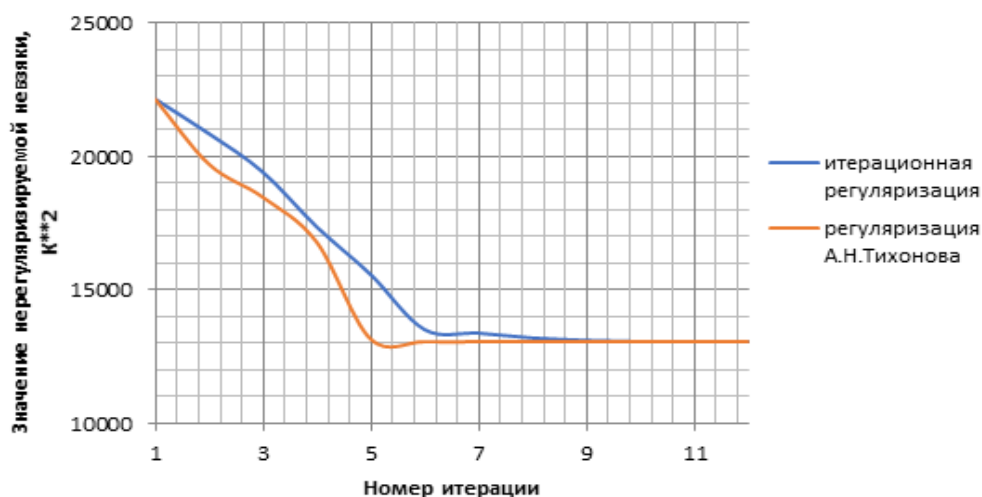


Рисунок 9 – Значения нерегуляризуемого функционала невязки при решении задачи идентификации методами регуляризации А. Н. Тихонова и итерационной регуляризации

Анализ графических зависимостей показывает, что сходимость итерационного процесса при одинаковых начальных приближениях выше у метода регуляризации А. Н. Тихонова. Это объясняется тем, что среднеквадратичная ошибка регуляризуется при использовании этого метода на уже на первой итерации, а метод итерационной регуляризации работает, начиная со второй.

Результаты расчётов компонент симметричного тензора теплопроводности приведены на рисунке 10.

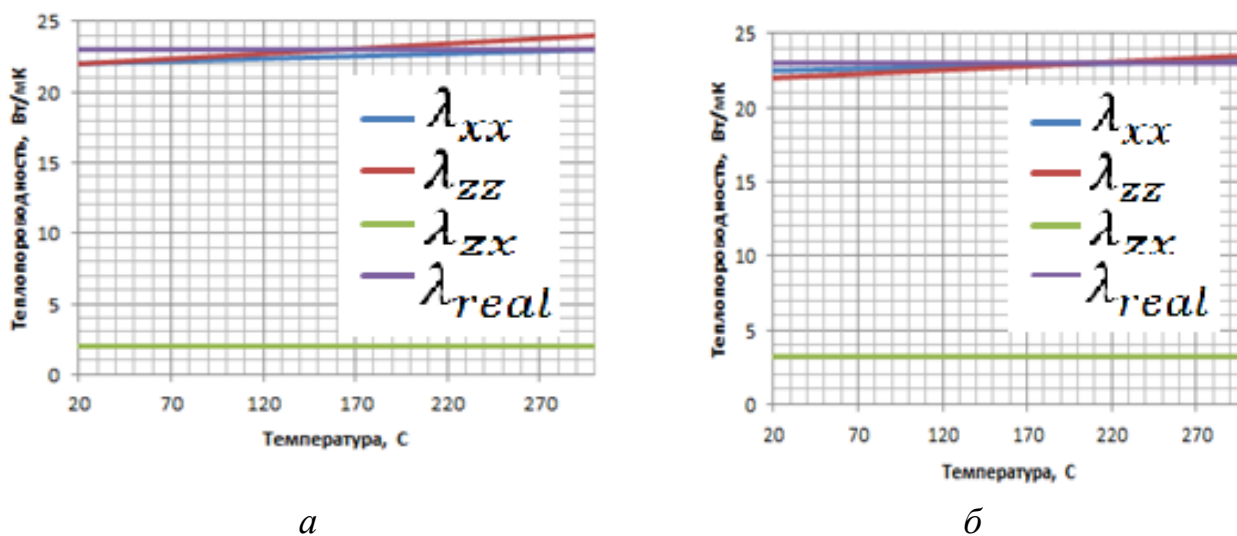


Рисунок 10 – Значения восстановленного симметричного тензора теплопроводности:

- а – методом итерационной регуляризации;
- б – методом регуляризации А. Н. Тихонова

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработаны алгоритм и методика по идентификации симметричного тензора теплопроводности анизотропного материала шпангоута активного стыковочного агрегата космического спускаемого аппарата, основанные на параметрической идентификации тепловой физико-математической модели распространения тепловых потоков в анизотропной среде методом итерационной регуляризации и методом регуляризации А. Н. Тихонова.

1. Модернизирован численный метод для реализации параметрической идентификации математической модели теплопереноса тепловых потоков в анизотропных твёрдых телах, позволяющий вычислить компоненты тензора теплопроводности. Отличительной особенностью модернизации является получение аналитических зависимостей для компонентов градиента целевого функционала невязки.

2. Проведён анализ эффективности разработанного алгоритма с помощью вычислительного эксперимента, и сделаны выводы о влиянии выбранного метода регуляризации на сходимость и точность решения обратной задачи нестационарной теплопроводности. Показано, что для исследуемого материала, относительная погрешность не превосходит 14% при решении задачи методом итерационной регуляризации и 4,5 % при решении задачи методом А.Н. Тихонова по сравнению с реальным значением теплопроводности титана.

3. Решена обратная задача радиационного теплопереноса энергии методом Монте-Карло по воспроизведению тепловой аэродинамической падающей нагрузки лучистым тепловым диффузным потоком для формирования натуральных условий проведения экспериментальной тепловой отработки активного стыковочного агрегата космического спускаемого аппарата.

4. Выбраны проектные параметры стенда, а именно тепловые мощности, задаваемые на ИК-имитаторах и их пространственное расположение, по воспроизведению условий спуска спускаемого аппарата в атмосфере, позволяющего проводить экспериментальную тепловую отработку изделий многоразовых спускаемых аппаратов.

5. Разработанная методика может быть использована при проектировании теплограждающих конструкций спускаемых космических аппаратов, выполненных из композиционных нетерморазлагающихся материалов.

В качестве следующего этапа развития научных исследований по данной тематике могут рассматриваться обратные задачи идентификации для высокопористых терморазлагающихся композиционных теплозащитных материалов при сверхкритических уровнях температур, которые могут наблюдаться при входе космического аппарата в плотные слои атмосферы различных планет.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в рецензируемых научных изданиях:

1. Борщев, Н. О. Разработка модели внешних тепловых воздействий на космический аппарат / Н. О. Борщев, А. Е. Сорокин, А. Е. Белявский // СТИН. – 2019, № 9. – С. 31–34.
2. Борщев, Н. О. Алгоритм параметрического определения теплофизических характеристик покрытий / Н. О. Борщев, А. Е. Сорокин, А. Е. Белявский // СТИН. – 2019, – № 9. – С. 34–37.
3. Борщев, Н. О. Алгоритм определения тензора теплопроводности методом регуляризации Тихонова А. Н. в сферических координатах / Н. О. Борщев, А. Е. Сорокин, А. Е. Белявский // СТИН. – 2020, № 2. – С. 25–27.
4. Расчет нестационарного температурного поля титановых изделий ракетно-космической техники, подверженных лучисто-конвективному нагреву / Н. О. Борщев, Д. К. Винокуров, О. А. Юранев, А. Е. Белявский, А. Е. Сорокин // Титан. – 2020, № 1(67). – С. 43 – 48.

Другие публикации:

1. Борщев, Н. О., Антонов, В. А. Моделирование аэродинамического теплового нагрева автономного спускаемого аппарата лучистым нагревом для условий теплостатических испытаний / Н. О. Борщев, В. А. Антонов // Труды 7-й российской национальной конференции по теплообмену (РНКТ-7). – 2018. – Москва: МЭИ.
2. Борщев, Н. О., Антонов, В. А. Теоретическое исследование тепловых режимов автономного спускаемого аппарата в плотных слоях атмосферы Земли для условий теплостатических испытаний / Н. О. Борщев, В. А. Антонов // Труды 7-й российской национальной конференции по теплообмену(РНКТ-7). – 2018. – Москва: МЭИ
3. Борщев, Н. О. Оценка влияния теплофизических процессов на объект в условиях тепловакуумных испытаний / Н. О. Борщев, В. А. Антонов, И. А. Протопопов // Тезисы докладов 17-й международной конференции «Авиация и космонавтика». – 2017. – Москва: МАИ.