На правах рукописи

Мхитарян Георгий Араикович

Математические модели и алгоритмы адаптивного тестирования в программном комплексе математической поддержки функционирования системы дистанционного обучения

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2021

Работа выполнена на кафедре «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель:	Наумов Андрей Викторович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»
Официальные оппоненты:	Махортов Сергей Дмитриевич, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой программирования и информационных технологий факультета компьютерных наук ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
	Ульянов Михаил Васильевич, доктор технических наук, профессор, в.н.с. ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, профессор кафедры алгоритмических языков ВМК МГУ, профессор кафедры ИУ-7 МГТУ им Н. Э. Баумана, профессор в департаменте программной инженерии факультета компьютерных наук НИУ ВШЭ
Ведущая организация:	Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской Академии Наук (ФИЦ ИУ РАН)

Защита состоится «_24_» __сентября___ 2021 г. в 10:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.04 Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4 или на сайте МАИ по адресу: https://mai.ru/

Автореферат разослан «____» ___________ 2021 г.

Учёный секретарь диссертационного совета
к.ф.-м.н. В.А.Рассказова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследования. Теоретические исследования в области математических моделей, описывающих компьютерное тестирование, играют огромную роль в современных системах дистанционного компьютерного обучения. Данные модели позволяют оценить не только характеристики тестируемых, но и качество материала, предоставляемого для проектирования тестов.

Исследования в области оценки результатов тестов развиваются с начала XX века, опираясь на работы Ч. Спирмена, изучавшего когнитивные тесты. Развитием идей Ч. Спирмена стали работы U. Yule, T.L. Kelley, F. Kuder, M. Richardson. В работах L. Guttman, M. Novick была сформулирована классическая теория тестирования, позволяющая оценивать такие параметры тестирования как сложность заданий или способности тестируемых.

С развитием вычислительных систем и появлением возможности активного их применения для формирования моделей тестирования и получения оценок параметров теста основной концепцией проектирования актуальных методов тестирования стала Item Response Theory (IRT, современная теория тестирования). Идеи IRT в своих работах с середины XX века развивали F.M. Lord, G. Rasch, P. Lazarsfeld, B.D. Wright, D. Andrich. Фундаментальной идеей современной теории тестирования является применение логистических функций для описания зависимости вероятности правильного ответа на тестовое задания от трудности тестового задания и способности испытуемого. В свою очередь IRT является основой парадигмы компьютерного адаптивного тестирования (CAT, computerized adaptive testing), которая предполагает адаптацию тестов под способности тестируемого. Основные принципы проектирования компьютерных адаптивных систем в конце XX века описаны в работе D. J. Weiss, G. G Kingsbury, а также в недавних работах W. J. Van der Linden, H. Wainer.

Современные проблемы теории тестирования рассматриваются в работах W. J. Van der Linden, J. Piton-Gonçalves, S. M. Aluísio, H.Y. Chong, M. Linacre, J.-P. Fox, Matthew D. Zeigenfuse, W. H. Batchelder, M. Steyvers, А.И. Кибзуна, А.В. Наумова, В.С. Аванесова, Л.С. Куравского, П.Н. Думина и др.

В настоящее время существуют различные подходы к построению и оценке характеристик тестов и испытуемых. В работах А.И. Кибзуна, А.В. Наумова, С.И. Панарина используются методы стохастического линейного и смешанного программирования. В работах Л.С. Куравского, П.Н. Думина, Г.А. Юрьева, рассмотрены модели, основанные на теории марковских процессов и стохастических дифференциальных уравнений.

Среди моделей, учитывающих временные показатели, выделяются многоуровневые модели G. Rasch и W. J. Van der Linden, которые позволяют получить оценки времени, затрачиваемого пользователем на чтение (G. Rasch) и решение тестового задания (W. J Van der Linden), благодаря предположению о случайности времени и о законе распределения соответствующей случайной величины: гамма или логнормальном. Проблемой использования данных моделей в прикладных задачах проектирования тестов, использующих временные показатели как критерия или ограничений, в первом случае является недостаточное концептуальное соответствие, во втором случае неудобство исследования логнормальных случайных величин в случае рассмотрения множества заданий.

В случае с применением данных моделей для адаптации системы компьютерного тестирования возникают проблемы вычислительного характера, что в итоге говорит о необходимости разработки:

- простых, но гибких в использовании моделей, описывающих или использующих время ответа на задания;
- эффективных численных методов и их реализаций в рамках систем компьютерного тестирования.

Таким образом, **актуальность темы диссертации** обусловлена необходимостью создания эффективных подходов к проектированию тестов с помощью адаптивных компьютерных процедур, учитывающих время выполнения тестовых заданий и изменения в состоянии испытуемых, т.е. адаптации контента систем компьютерного обучения в зависимости от изменяющихся характеристик пользователей системы.

Цель работы: разработка математических моделей и методов генерирования тестовых заданий, учитывающих время, затраченное на решение заданий пользователями в системах компьютерного обучения.

В процессе исследования решены **задачи**:

– создания модели времени ответа пользователя на задание, основанной на применении гамма-распределения;
– создания математической модели адаптивного тестирования, позволяющей генерировать индивидуальные тесты с ограничением на общее время выполнения;
– создания вероятностной модели генерации тестов для универсального испытуемого или группы испытуемых;
– создания модели генерации тестов с возможной приоритизацией временного параметра либо параметра сложности теста;
– разработки численных методов для оптимального решения задач, основанных на вышеперечисленных моделях;
– создания комплекса программ, реализующих данные численные методы;

– интеграции комплекса программ в архитектуру используемой системы компьютерного тестирования в продуктивной среде.

Объектом исследования является математическое и программное обеспечение систем дистанционного обучения.

Предметом исследования являются математические модели, используемые для адаптации систем дистанционного обучения под изменяющийся контингент пользователей, и программные средства, реализующие поддержку адаптивных свойств систем с применением данных моделей.

Область исследования формулируется согласно пунктам паспорта специальности 05.13.18:

– разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений;
– реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.
– комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Методологические основы и методы исследования: для решения поставленных задач использовались методы математического моделирования, теории оптимизации, стохастического программирования, статистического анализа и численные методы.

На защиту выносятся следующие научные результаты:

– вероятностные модели времени ответа пользователя на задание системы, основанные на дискретном и гамма-распределении;
– математические модели генерации тестов с учетом вероятностных критериев, основанных на использовании случайного времени как параметра модели;
– численные методы определения оптимальных наборов тестовых заданий;
– комплекс программ, реализующий численные методы;
– архитектура модуля генерирования тестов в активно функционирующей среде компьютерного тестирования.

Научная новизна. Получены новые результаты:

– вероятностные модели описания времени ответа на задания системы компьютерного тестирования (гамма, дискретная);
– математические модели для создания теста с ограничением на время выполнения;
– численные методы решения задач подбора оптимального множества тестов;

– пакет прикладных программ для придания адаптивных свойств системам дистанционного обучения и компьютерного тестирования

Практическая значимость диссертационной работы заключается в возможности создания принципиально новых инструментов для проектирования тестов в системах компьютерного тестирования, адаптации наборов тестовых заданий под изменяющийся контингент пользователей с учётом реальных показателей их работы в системе, а также создания программного комплекса в виде отдельного универсального интегрируемого внешнего модуля.

Достоверность результатов исследования подтверждается:

– оценкой адекватности полученных результатов наблюдениям с помощью статистических критериев согласия,
– практической реализацией и успешным применением системы математической поддержки функционирования, созданной на основе разработанного подхода,
– вычислительными экспериментами, подтвердившими эффективность и преимущества созданных численных методов и применения вероятностных моделей.

Апробация. Теоретические основы и практические результаты работы представлены на следующих научных мероприятиях: VII Международная аэрокосмическая декада (Алушта, 2014); Региональный этап Всероссийского конкурса прорывных проектов в области IT-технологий «IT-Прорыв» в рамках Международной недели авиакосмических технологий «Aerospace Science Week» (Москва, 2014); Международная научная конференция «Образование, наука и экономика в вузах и школах. Интеграция в международное образовательное пространство». (Горис, Армения, 2015); XVI Международный форум «Формирование современного информационного общества – проблемы, перспективы, инновационные подходы», (Санкт-Петербург, 2015); X Международная научно-практическая конференция «Современные информационные технологии и ИТ-образование» (Москва, 2015); 14-я Международная конференция "Авиация и космонавтика - 2015" (Москва, 2015); XLII Международная молодёжная научная конференция Гагаринские чтения – 2016 (Москва, 2016); VIII традиционная всероссийская молодежная летняя школа «Управление, информация и оптимизация» (Санкт-Петербург, 2016); XI Международная научно-практическая конференция «Современные информационные технологии и ИТ-образование» (Москва, 2016); 4-я Всероссийская научно-техническая конференция Суперкомпьютерные Технологии (СКТ-2016) (Геленджик, 2016); VIII Международная научно-практическая конференция «Информационные технологии в образовании «ИТО-Саратов-2016» (Саратов, 2016); XII Международная научно-практическая конференция «Современные информационные технологии и ИТ-образование» (Москва, 2017); XLIV Международная молодёжная научная конференция Гагаринские чтения – 2018 (Москва, 2018); XII Международная конференция по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ'2018) (Алушта, 2018); V Международная конференция «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования» (Москва, 2018); XIII Международная научно-практическая конференция «Современные информационные технологии и ИТ-образование» (Москва, 2018); XXIV Международная научная конференция "Системный анализ, управление и навигация" (Евпатория, 2019).

Работа поддержана грантами РФФИ (проекты №18-07-00617, №17-07-00203, №15-07-02914, №14-07-00006).

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация содержит введение, 3 главы, заключение и список используемой литературы. Работа состоит из 95 страниц, включая 13 рисунков, 20 таблиц и список литературы, содержащий 153 наименования.

Во введении обоснована актуальность проблемы, сформулированы цель и задачи исследования, определены объект, предмет и методы исследования, дана общая характеристика работы. Далее проанализированы основные современные методы и модели тестирования и времени ответа пользователя, указаны их преимущества и недостатки, сделан вывод о необходимости развития и применения ряда новых технологий.

В первой главе «Математические модели времени ответа пользователя на задание» приводится описание моделей времени ответа пользователя на тестовые задания в системах дистанционного обучения. Рассматриваются классические подходы тестирования с использованием компьютерных тестов, а также тестирование с использованием сложных технических систем. Описываются основные математические модели времени ответа пользователя на задания. Рассматривается модель Ван дер Линдена, как одна из основных при анализе времени ответа тестируемого. В данной модели время ответа T_{ij} на i-е задание j-го студента имеет логнормальное распределение.

Использование дискретного распределения предполагает, что рассматривается модель случайного времени ответа θ_i некого универсального пользователя на задание i. В такой модели индивидуальные особенности всех пользователей учитываются в единой модели, отражающей особенности всей тестируемой группы.

Предполагается, что задание i решало J_i пользователей. На основе времени, потребовавшегося им для ответа, были построены гистограммы времени ответа универсального пользователя на $i-$ое задание, с помощью которых была выбрана дискретная модель распределения времени ответа на $i-$ое задание по имеющимся статистическим данным работы СДО МАИ CLASS.NET различных разделов курса по математическому анализу.

Третья модель времени, предложенная в работе, предполагает, что время ответа пользователя описывается законом гамма-распределения. Для описания случайного времени ответа на $i-$ое задание используется распределение со следующей плотностью:

$$f(t_i, \kappa_i, \lambda) = t_i^{\kappa_i - 1} \frac{e^{-t/\lambda}}{\lambda^{\kappa_i}\Gamma(\kappa_i)},$$

где $\Gamma(\kappa)$ – гамма-функция Эйлера.

Основными преимуществами данной модели являются:

1. плотность распределения близка по структуре к плотности логнормального распределения;
2. сумма случайных величин с одинаковым параметром λ является гамма-распределенной.

Эти особенности модели позволили во второй главе диссертации рассмотреть постановку задачи формирования ограниченного по времени теста с квантильным критерием и предложить эффективный алгоритм ее решения.

Во второй главе «Методы и алгоритмы формирования адаптивных тестов с учетом времени ответов пользователей» приведены постановки оптимизационных задач для адаптации функционирования СДО на основе анализа времени ответа пользователя на задания системы, а также методы и алгоритмы их решения.

В разделе 2.1 рассмотрена задача определения некоторого набора заданий приблизительно равных по суммарной сложности с ограничением на время выполнения.

Пусть существует множество $Z = (z_1, \dots, z_I)$ из I заданий, разделённых на M различных типов $Z_m, m = 1, \dots, M$. Для обозначения принадлежности задания к определенному типу введём матрицу A размерности $I \times M$:

$$A = \|a_{im}\|, a_{im} = \begin{cases} 1, & z_i \in Z_m, \\ 0, & z_i \notin Z_m. \end{cases}$$

Данная матрица определяет принадлежность задания z_i к типу $Z_m, m = 1, \dots, M$, если $a_{im} = 1$.

Каждое из заданий имеет определенную различную сложность, которую, например, можно определить с помощью метода максимального правдоподобия, примененного к модели Раша. Введем вектор $u \in \mathbb{R}^I$, координаты которого $u_i, i = 1, \dots, I$, обозначают принадлежность задания i к формируемому набору таким образом, что:

$$u_i = \begin{cases} 1, & \text{если задача } i \text{ попала в тестовый набор;} \\ 0, & \text{если задача } i \text{ не попала в тестовый набор.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Тестовым набором будут считаться k заданий, для которых $u_i = 1$. Предположим, что для каждого задания известна её сложность, введём вектор $w \in \mathbb{R}^I$, i-ая координата которого является сложностью задания i и будет обозначена как w_i.

Требуется составить множество индивидуальных тестовых наборов из k задач, принадлежащих различным типам, учитывая, что $k \leq M$. При этом изначально задаётся суммарная сложность теста, обозначаемая c, которая вычисляется с помощью анализа сложности каждого задания на основе экспертной оценки. Предусмотрим, что возможно отклонение от данной требуемой суммарной сложности на какое-либо малое число в большую либо меньшую сторону. Обозначим такое число ε. Основываясь на описанной модели и введенных обозначениях, сформулируем следующую задачу:

$$U_* = \underset{u}{\mathrm{Argmin}}|c - w^T u| \tag{2.2}$$

$$e_I^T u = k \tag{2.3}$$

$$c - w^T u \geq -\varepsilon \tag{2.4}$$

$$c - w^T u \leq \varepsilon \tag{2.5}$$

$$A^T u \geq e_m \tag{2.6}$$

где $e_I^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^I, e_I^{\mathrm{T}} = (1, \dots, 1), e_m \in \mathbb{R}^M, e_M^{\mathrm{T}} = (1, \dots, 1), (\cdot)^{\mathrm{T}}$- операция транспонирования.

Функция в (2.2) является критериальной в исследуемой задаче. В данной постановке целью исследования является поиск оптимальных наборов заданий, удовлетворяющих ограничениям (2.3 – 2.6) при условии, что задано фиксированное отклонения ε от заданной сложности c подобранного набора заданий. Ограничение (2.3) значит, что в наборе должно быть ровно k заданий. Ограничения (2.4) и (2.5) обозначают границы выбора набора заданий в тесте в зависимости от отклонения от требуемой суммарной сложности. Ограничение (2.6) отвечает за то, чтобы среди всех заданий в тесте было хотя бы одно задание каждого типа, так как данная задача решается при условии, что $k \geq M$. Данная задача решается стандартными пакетами решения задач линейного программирования.

В развитии этой модели предлагается учесть вероятностное ограничение на время выполнения пользователем заданий теста.

Пусть в тестировании участвуют J пользователей. Обозначим через T_{ji} случайное время, которое потребуется пользователю $j, j = 1, \dots, J$ на решение i-ой задачи, где $i = 1, \dots, I$. Рассмотрим матрицу T размерности $J \times I$: $T = \|T_{ji}\|$.

Обозначим общее время, выделяемое пользователям на выполнение теста через t. Это время определятся экспертом. Тогда в случае непрерывной модели распределения модели получим следующее дополнительное вероятностное ограничение в задаче формирования тестов с заданной суммарной сложностью:

$$P\left(Tu \leq t_f\right) \geq \alpha, \qquad (2.7)$$

где $t_f \in \mathbb{R}^N, t_f = (t, \dots, t)^{\mathrm{T}}$. Условие (2.7) обозначает, что с заданной вероятностью α за требуемое время все тестируемые будут иметь возможность выполнить выданный вариант теста.

В разделе 2.2 рассмотрена задача формирования ограниченного по времени теста с логнормальным распределением для группы испытуемых.

Пусть случайное время ответа пользователя на задание системы дистанционного обучения описывается логнормальным распределением, тогда в ограничении (2.7) задачи (2.2) - (2.7) элементы матрицы T являются логнормально распределёнными случайными величинами с плотностью распределения (1.2).

Рассмотрим постановку задачи с ограничением в виде (2.7) при условии, что $k \geq M$, то есть число заданий в тесте совпадает с количеством типов заданий или для некоторых типов количество заданий больше одного.

Сформулированную задачу возможно решить, используя доверительный метод, но из-за особенностей свойств логнормального распределения возникают сложности в применении известных методов. Так как количество всех возможных наборов по k заданиям из общего числа I конечно и равно C_I^k, простейшим является решение задачи полным перебором всех возможных наборов заданий и последующая проверка выполнения ограничений (2.3) - (2.6). Условие (2.7) проверяется методом Монте-Карло. Данный способ требует большого количества вычислений, поэтому для ускорения процесса перебора предлагается алгоритм, основанный на идее метода ветвей и границ.

Алгоритм 2.1

Пусть общее число заданий I разделено на M типов, $I_m -$ число заданий m-ого типа, тогда

$$\sum_{m=1}^{M} I_m = I, \qquad m = 1, \dots, M.$$

Рассмотрим следующий *алгоритм ускоренного поиска* допустимых решений задачи:

1. Выбрать и зафиксировать задачу из I_1 задач первого типа; задать $s = 1$ счётчик уровня дерева, $s = 1, \dots, k$.
2. Построить дерево наборов заданий, проведя ветви к задачам следующего типа и суммируя сложности задач вдоль ветви;
3. Проверяя выполнение условия (2.5) на каждом уровне $s < M$ дерева, отсечь ветви, которые не удовлетворяют условиям. При удовлетворении условиям повторить п.2, $s := s + 1$. При достижении последнего уровня $s = M$ перейти к п.4.

4. Проверить на уровне $s = M$ выполнение условий (2.3) - (2.6), а также условия (2.7) методом Монте-Карло.
5. Если $s = M$, перейти к п.1 и повторить алгоритм для следующего задания первого типа. Если $s > M$, перейти к п.6.
6. Достроить дерево наборов заданий, проведя ветви к $C_{(I-M)}^{(k-M)}$ комбинациям, проверить выполнение условий (2.3) - (2.5) и (2.7). Перейти к п.1 и повторить алгоритм для следующего задания первого типа.

В разделе 2.3 рассмотрена задача формирования ограниченного по времени теста для универсального пользователя с дискретным распределением времени в вероятностном ограничении.

Особенностью использования дискретного распределения является то, что задача формирования тестов решается не для всей группы студентов, а для некоторого универсального пользователя. В такой модели индивидуальные особенности всех пользователей учитываются в единой модели универсального пользователя.

Пусть $\Theta^{\mathrm{T}} = (\Theta_1, \dots, \Theta_i)$, $i = 1, \dots, I$, где Θ_i - случайное время необходимое универсальному пользователю для решения i-го задания. Тогда вместо ограничения (2.7) в задаче (2.2) - (2.7) в случае дискретного распределения будет использовано следующее ограничение:

$$P(\Theta u \leq t) \geq \alpha. \tag{2.8}$$

Случайные величины Θ_i, $i = 1, \dots, I$, являются независимыми и их распределения выбираются на основе построенных гистограмм.

В случае дискретной модели распределения времени ответа на задание исходная задача с вероятностными ограничениями сводится к детерминированной задаче целочисленного программирования:

$$U_* = \underset{u, \delta_1, \dots, \delta_D \in \{0,1\}}{\mathrm{Argmin}} |c - w^T u| \tag{2.9}$$

$$e_I^T u = k \tag{2.10}$$

$$c - w^T u \geq -\varepsilon \tag{2.11}$$

$$c - w^T u \leq \varepsilon \tag{2.12}$$

$$(\theta^d)^T u - t \leq (\nu(\theta^d) - t)\delta_d, \tag{2.13}$$

$$p^T \delta \leq 1 - \alpha \tag{2.14}$$

$$A^T u \geq e_m \tag{2.15}$$

где

$$d = 1, \dots, D, \qquad D = \prod_{i=1}^{I} L_i, \qquad i = 1, \dots, I;$$

$$\nu(\theta^d) = (\theta^d)^T e, \qquad e = (1, \dots, 1), \qquad e \in \mathbb{R}^I;$$

$$p = (p_1, \dots, p_D), \qquad p_d = P(\Theta = \theta^d) = \prod_{i=1}^{I} P(\Theta_i = \theta_i^d),$$

$$\delta = (\delta_1, \dots, \delta_D);$$

$\theta^d \in \mathbb{R}^I, d = 1, \dots, D$ – реализация случайного вектора Θ; $p \in \mathbb{R}^D$ является вектором со значениями, равными вероятностям появления соответствующей реализации дискретной случайной величины Θ_i; $\delta \in \{0, 1\}^D$ – вектор булевых переменных, с помощью которых организуется перебор доверительных множеств; L_i – число возможных реализаций случайных величин $\Theta_i, i = 1, \dots, I$.

Рассмотрим определение эквивалентности задач (Кибзун, Наумов, Норкин, 2013).

Определение 1. Две задачи оптимизации вида $\Phi(u) \to \inf\limits_{u \in U}$ эквивалентны, если выполнены условия:

1. либо обе эти задачи имеют допустимые решения (с конечными значениями целевых функций), либо обе не имеют таких решений;
2. если эти задачи имеют допустимые решения, то оптимальные значения их целевых функций (конечные или бесконечные) совпадают;
3. если оптимальные значения их целевых функций конечны, то эти значения в обеих задачах либо достигаются, либо не достигаются;
4. если оптимальные значения достигаются, то по оптимальному решению одной задачи с помощью явно указанного алгоритма восстанавливается оптимальное решение другой.

Теорема 1. Задача (2.2) - (2.6) с вероятностным ограничением (2.8) эквивалентна задаче (2.9) - (2.15) целочисленного программирования в смысле определения 1.

Ограничения (2.13) и (2.14) обеспечивают выполнение ограничения под знаком вероятности в (2.8) для реализаций случайного вектора Θ, суммарная вероятность которого больше или равна α. Если $\delta_d = 0$, то для реализации θ^d выполняется ограничение $(\theta^d)^T u \leq t$; если $\delta_d = 1$, то ограничение $(\theta^d)^T u \leq \nu(\theta^d)$ оказывается пассивным. Оптимальный вектор $\delta \in \{0, 1\}^D$ обеспечивает выбор оптимального доверительного множества.

В разделе 2.4 рассмотрена задача формирования теста с квантильным критерием.

Пусть в отличие от модели формирования теста с логнормальным временем распределения общее время на выполнение теста неизвестно. Обозначим его через φ. Тогда для того, чтобы за некоторое оптимальное время все тестируемые могли выполнить выданный вариант теста с заданной вероятностью α, рассмотрим функцию квантили:

$$\Phi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi \in R^1 \colon \mathrm{P}\{\max_{j=\overline{1,J}} T_j\, u \leq \varphi\} \geq \alpha\}, \qquad (2.16)$$

где $T_j - j$-я строка матрицы T.

Основываясь на описанной модели и введенных обозначениях, сформулируем задачу квантильной оптимизации:

$$u_\alpha = \operatorname{Arg} \min_{u\in\{0;1\}^I} \left(\frac{\gamma|c - w^T u|}{\varepsilon} + \frac{(1-\gamma)\Phi_\alpha(u)}{2700}\right), \tag{2.17}$$

$$\varphi_\alpha = \min_{u\in\{0;1\}^I} \left(\frac{\gamma|c - w^T u|}{\varepsilon} + \frac{(1-\gamma)\Phi_\alpha(u)}{2700}\right), \tag{2.18}$$

$$c - w^T u \le \varepsilon, \tag{2.19}$$

$$w^T u - c \le \varepsilon, \tag{2.20}$$

$$A^T u \ge e_M, \tag{2.21}$$

$$e_I{}^T u = k, \tag{2.22}$$

где $(\cdot)^T$ - операция транспонирования, $e_I \in R^I,\ e_I = (1, \dots, 1)^T,\ e_M \in R^M$, $e_M = (1, \dots, 1)^T$, $\alpha \in (0{,}1)$ - заданный уровень доверительной вероятности, $\gamma \in [0; 1)$ – весовой коэффициент, $\frac{1}{2700}$ – коэффициент нормировки, величина обратная количеству секунд в 1 академическом часе.

Критериальная функция задачи в (2.16) представляет из себя сумму двух нормированных безразмерных величин. Первое слагаемое является отклонением сложности теста от заданного уровня c, нормированного маскимально допустимым уровнем отклонения ε. Второе слагаемое представляет из себя время выполнения теста, которое не может быть превышено с заданным уровнем доверительной вероятности α. Это время нормируется максимально допустимым временем выполнения теста. С помощью весового коэффициента γ можно регулировать важность каждого слагаемого критерия.

Модель Ван дер Линдена, рассмотренная в разделе 2.2, не позволяет получить точное решение, так как для задач квантильной оптимизации известны лишь методы поиска гарантирующих решений, поэтому дискретизируем логнормальную модель времени, и вместо матрицы T будем использовать матрицу Θ размерности $J \times I$:

$$\Theta = \left\|\Theta_{ji}\right\|,$$

все элементы которой являются независимыми случайными величинами с заданными дискретными распределениями.

Тогда вместо функции квантили (2.17) в задаче (2.17)-(2.22) в случае дискретного распределения будет использована следующая функция квантили:

$$\Phi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi :\ \mathrm{P}\{\max_{j=\overline{1,J}} \Theta_j\, u \le \varphi\} \ge \alpha\} \tag{2.23}$$

где Θ_j - j-я строка матрицы Θ, $j = 1, \dots, J$.

В случае дискретной модели распределения времени ответа на задание задача примет вид:

$$u^* = \underset{u\in\{0;1\}^I, \delta\in\{0;1\}^D, \varphi\geq 0}{\text{Arg min}} (\gamma \frac{|c-w^T u|}{\varepsilon} + (1-\gamma)\frac{\varphi}{2700}), \tag{2.24}$$

$$\theta_d u - \bar{\varphi} \leq (\theta_d e_I)\delta_d, \tag{2.25}$$

$$c - w^T u \leq \varepsilon, \tag{2.26}$$

$$w^T u - c \leq \varepsilon, \tag{2.27}$$

$$A^T u \geq e_M, \tag{2.28}$$

$$e_I{}^T u = k, \tag{2.29}$$

$$p^T \delta \leq 1 - \alpha, \tag{2.30}$$

где

$$d = 1, \ldots, D, D = \prod_{j=1}^{J} \prod_{i=1}^{I} L_{ji},$$

$$p = (p_1, \ldots, p_D), p_d = P(\Theta = \theta_d) = \prod_{j=1}^{J} \prod_{i=1}^{I} P(\Theta_{ji} = \theta_{ji}^d),$$

$$\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_D),$$

$e_I \in \mathrm{R}^\mathrm{I}$, $e_I = (1, \ldots, 1)^\mathrm{T}$, $e_M \in R^M$, $e_M = (1, \ldots, 1)^T, \bar{\varphi} = (\varphi, \ldots, \varphi)^T, (\cdot)^T$ - транспонирование; θ_d, $d = 1, \ldots, D$ - реализация случайной матрицы Θ, $p \in R^D$ - вектор со значениями, равными вероятностям появления соответствующей реализации θ_d дискретной случайной матрицы Θ, $\delta \in \{0,1\}^D$ - вектор булевых переменных, с помощью которых организуется перебор α-доверительных множеств, L_{ji} - число возможных реализаций случайной величины Θ_{ji}.

Теорема 2. Задача (2.17) – (2.22) с функцией квантили (2.23) эквивалентна в смысле определения 1 задаче (2.24) – (2.30) смешанного целочисленного программирования.

Сформулированная задача (2.24) - (2.30) требует перебрать 2^I комбинаций вектора u при достаточно большом количестве ограничений, зависящем от частоты дискретизации случайного времени, количества заданий и студентов.

В разделе 2.5 рассмотрена задача формирования ограниченного по времени теста с гамма-распределением времени ответа пользователя на задания.

Основной проблемой использования логнормальной модели времени ответа пользователя на задания является сложность определения суммарного времени выполнения теста в ограничении (2.7), т.к. вычисление свёртки является трудоёмкой задачей, поэтому в алгоритме 2.1 используется метод Монте-Карло для проверки ограничения (2.7).

Для использования гамма-распределения сначала требуется решить задачу подбора распределения для каждого задания в тесте.

Алгоритм 2.2 Пусть $t_i,\ i = 1, \dots, I$ – время ответа универсального пользователя на задание i, где I – число заданий, из которых формируется тест; $t_{ji},\ i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, I_i$ – реализация времени ответа пользователя j, затраченное им на решение задачи i, где I_i – число пользователей, решавших задачу i.

Опишем по шагам алгоритм подбора параметров гамма-распределений случайных величин $t_i,\ i = 1, \dots, I$.

0) Обнулим значения искомых параметров и некоторых счетчиков алгоритма. Положим $\lambda^* = 0$, где λ^* – искомое значение параметра гамма-распределения, который одинаков для всех задач; $\kappa_i^* = 0$, где κ_i^* – искомое значение второго параметра распределения для i -го задания; $S = 0$, где S – число задач, для которых принимается гипотеза о гамма-распределении времени ответа пользователя; $m = 0$, где m – счетчик. Выберем уровень доверительной вероятности $1 - \alpha$ для проверки статистических гипотез.

1) Для всех $i = 1, \dots, I$ по выборке объема I_i методом максимального правдоподобия находим оценки $\widehat{\lambda}_i$ параметра λ. Среди полученных значений находим минимальное $\widehat{\lambda}_{min}$ и максимальное $\widehat{\lambda}_{max}$ значения. Для варьирования параметра λ выберем шаг

$$h = \frac{\widehat{\lambda}_{max} - \widehat{\lambda}_{min}}{L},$$

где L – выбранное заранее число шагов дискретизации по λ. Положим $\lambda_m = 0$.

2) Положим $m := m + 1$, а $\lambda_m = \lambda_{m-1} + h$. Для каждого $i = 1, \dots, I$ по выборке $t_{ij},\ i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, I_i$ определяем оценку второго параметра гамма-распределения

$$\widehat{\kappa_\iota} = \frac{\overline{t_{\iota J}}}{\lambda_m},$$

где $\overline{t_{\iota J}}$ – выборочное математическое ожидание.

3) Для всех $i = 1, \dots, I$ на выбранном уровне доверительной вероятности $1 - \alpha$ проверяем с помощью критерия Пирсона гипотезу H_0: $t_i \sim \Gamma(\widehat{\kappa_\iota^*}, \lambda_m)$. Если число принятых гипотез S' больше S, то полагаем $S = S'$, $\lambda^* = \lambda_m,\ \kappa_i^* = \widehat{\kappa_\iota}\ i = 1, \dots, I$.

4) Если $m \le L - 1$, то перейти к шагу 2. Иначе завершить работу алгоритма.

Полученная модель распределения позволяет предложить эффективный алгоритм решения актуальной задачи формирования теста для универсального пользователя так, чтобы его сложность минимально отличалась от заданного экспертом уровня сложности и при этом минимизировалось время выполнения теста, которое гарантировано не будет превышено с заданным уровнем доверительной вероятности.

В третьей главе «Программный комплекс адаптации системы дистанционного обучения» рассмотрен программный комплекс, включающий в себя модели и алгоритмы рассмотренные в главах 1 и 2.

Программный комплекс реализован как веб-приложение на языке python с использованием БД PostgreSQL и состоит из 2 программных модулей:

1. моделирование времени;
2. задачи адаптации: генерирования тестов, проверка компрометации.

Модуль моделирования времени отвечает за обработку данных и прогнозирование времени, затрачиваемом студентами на задания. Здесь реализованы модели с логнормальным распределением для каждого пользователя, дискретным и гамма-распределением для универсального, описанные в 1 главе. Модуль получает на вход список пользователей, список заданий, начало выполнения задания, конец выполнения задания, время выполнения задания.

После получения этих данных модуль проводит вычисления оценок параметров распределений для всех моделей времени ответа при помощи оценок, описанных в 1 главе.

Модуль моделирования времени после обработки данных формирует список пользователей, заданий и оценок параметров распределений.

На вход модуль получает следующие данные от СДО: список групп пользователей или список пользователей, тип теста (с ограничением или без ограничения по времени), список заданий, общее время на выполнение теста (при условии наличия ограничения), количество заданий в тесте, сложность теста по выбранной нормированной шкале

В результате модуль формирует наборы тестов, в зависимости от входных параметров.

Для простейшей интеграции в СДО был разработан графический интерфейс:

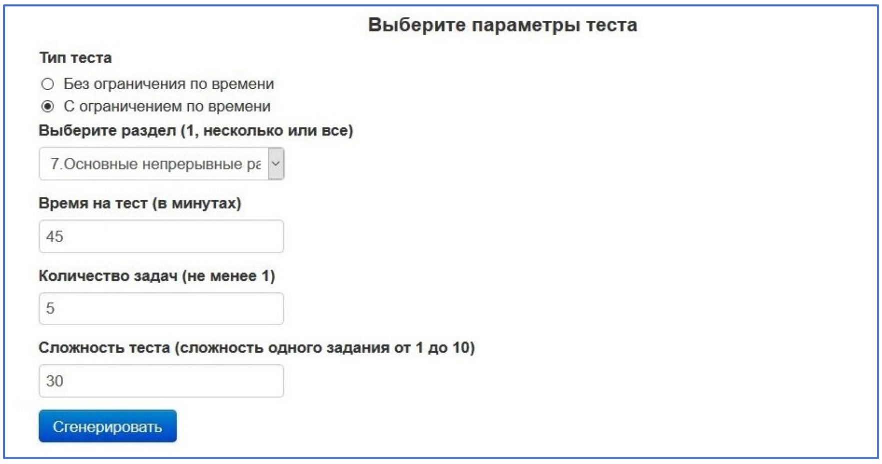

Рис.3 Интерфейс генератора тестов

Взаимодействие между модулями обеспечивается посредством http-запросов через Rest API.

Заключение

В заключении подведены итоги работы, отражены основные результаты диссертации.

Основные результаты работы, выносимые на защиту

1) Дискретная вероятностная модель описания времени ответа на задание для универсального пользователя; [3, 5, 17-19]
2) Модель гамма-распределения для описания времени ответа на задание для пользователя СДО с алгоритмом подбора параметров распределения; [7]
3) Вероятностные постановки задач формирования ограниченных по времени тестов для универсального пользователя и группы пользователей; [3, 5, 7, 12, 17-19]
4) Алгоритмы и численные методы оценки параметров распределений и решения задач формирования ограниченных по времени тестов в рассмотренных постановках;[3, 5, 7]
5) Комплекс программ, реализующих численные методы и вычисления по предложенным моделям, и архитектура модуля генерирования тестов в активно функционирующей среде компьютерного тестирования. [1, 2, 4, 6, 8-11, 13-16, 20-22]

Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК и международных индексируемых базах

1) Кибзун А.И., Мартюшова Я.Г., Мхитарян Г.А., Наумов А.В., Рыбалко А.А., Архитектура и технологии адаптации СДО МАИ как комплекса электронных учебников по математическим дисциплинам // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2016. Т. 12. № 3-2. С. 68-74.
   Kibzun A., Martiushova I., Mkhitaryan G., Naumov A., Rybalko A. System architecture and technologies of adaptation of LMS MAI CLASS.NET as set of electronic math textbooks // CEUR Workshop Proceedings Selected Papers of the 11th International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education, SITITO 2016. 2016. С. 164-171. (Scopus)
2) Naumov A.V., Mkhitaryan G.A., Rybalko A.A., Software set of intellectual support and security of LMS MAI CLASS.NET // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2016. Т. 9. № 4. С. 129-140. (Scopus)

3) Наумов А.В., Мхитарян Г.А. О задаче вероятностной оптимизации для ограниченного по времени тестирования // Автоматика и телемеханика. 2016. № 9. С. 124-135.

Naumov A.V., Mkhitaryan G.A., On the problem of probabilistic optimization of time-limited testing // Automation and Remote Control. 2016. Т. 77. № 9. С. 1612-1621. (Scopus, WoS)

4) Мартюшова Я.Г., Мещеряков Е.А., Мхитарян Г.А. Организация автоматизированной рейтинговой формы контроля в электронных учебниках СДО МАИ CLASS.NET // Современные информационные технологии и ИТ-образование Сборник научных трудов II Международной научной конференции и XII Международной научно-практической конференции. Под редакцией В.А. Сухомлина. 2017. С. 133-138.

5) Наумов А.В., Мхитарян Г.А., Черыгова Е.Е. Стохастическая постановка задачи формирования теста заданного уровня сложности с минимизацией квантили времени выполнения // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2019. № 2 (176). С. 37-46.

6) Мхитарян Г.А., Мартюшова Я.Г., Кибзун А.И., Жарков Е.А. Основные междисциплинарные аспекты разработки и программной реализации электронных учебников для студентов технических университетов. // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2019. Т. 15. № 2. С. 507-515

7) Босов А. В., Мхитарян Г.А., Наумов А.В., А. П. Сапунова Использование модели гамма-распределения в задаче формирования ограниченного по времени теста в системе дистанционного обучения // Информатика и ее применения», Т. 13, № 4, 2019, С. 11-17 (Scopus).

8) Mkhitaryan G.A., Kibzun A.I., Martyushova Ya.G., Zharkov E.A. Interdisciplinary aspects of development and software implementation of electronic textbooks for students of technical universities Modern Information Technologies and IT-Education. SITITO'2018. Communications in Computer and Information Science, vol. 1201. Springer, Cham (2020), pp. 110-120 (Scopus, WoS)

Публикации по теме диссертации в других изданиях:

9) Кибзун А.И., Мхитарян Г.А., Наумов А.В. Проблемы дистанционного электронного обучения в вузах по математическим курсам // Труды Международной научной конференции «Образование, наука и экономика в вузах и школах. Интеграция в международное образовательное пространство. Горис. 28 сентября-2 октября 2015», с. 454-457

10) Кибзун А.И., Мхитарян Г.А., Наумов А.В. Проблемы дистанционного электронного обучения в вузах по математическим курсам // XVI Международный форум «Формирование современного информационного общества – проблемы, перспективы, инновационные подходы», Санкт-Петербург, 1-5 июня, 2015 г., с.69-70
11) Кибзун А.И., Наумов А.В., Мхитарян Г.А. Особенности и технологии разработки системы дистанционного обучения математическим дисциплинам CLASS.NET // «Современные информационные технологии и ИТ-образование» Том 1 (№ 11). – 2015 г., (ISSN 2411-1473). С. 153-156.
12) Мхитарян Г.А. О задаче вероятностной оптимизации для формирования ограниченного по времени теста и добавлении нового функционала в СДО МАИ CLASS.NET // 14-я Международная конференция "Авиация и космонавтика - 2015". Тезисы, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). 2015. С. 435-437.
13) Мхитарян Г.А., Рыбалко А.А., Принципы реализации программного комплекса интеллектуальной поддержки и обеспечения безопасности функционирования СДО МАИ CLASS.NET // Гагаринские чтения - 2016 Сборник тезисов докладов XLII Международной молодёжной научной конференции. 2016., Т.3, С. 70-71.
14) Кибзун А.И., Мхитарян Г.А., Наумов А.В., Современные компьютерные технологии в разработке и эксплуатации системы дистанционного обучения CLASS.NET по математическим дисциплинам // Суперкомпьютерные технологии (СКТ-2016) Материалы 4-й Всероссийской научно-технической конференции. В 2-х томах. 2016. С. 251-255.
15) Наумов А.В., Кибзун А.И., Мартюшова Я.Г., Осокин А.В., Жарков Е.А., Мхитарян Г.А. Использование СДО МАИ CLASS.NET при проведении очных занятий по математическим дисциплинам с адаптированием системы под уровень знаний пользователей // Информационные технологии в образовании "ИТО-Саратов-2016" Материалы VIII Международной научно-практической конференции. 2016. С. 268-276.
16) Мхитарян Г.А., Рыбалко А.А., Принципы реализации программного комплекса интеллектуальной поддержки и обеспечения безопасности функционирования СДО МАИ // Сборник НИРС МАИ - 2016 Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). Москва, 2017. С. 161-171.
17) Мхитарян Г.А., Черыгова Е.Е. О задаче квантильной оптимизации ограниченного по времени тестирования //Гагаринские чтения - 2018 Сборник тезисов докладов XLIV Международной молодёжной научной конференции. 2018. С. 375-376.

18) Черыгова Е.Е., Наумов А.В., Мхитарян Г.А Задача формирования теста заданного уровня сложности с минимальным временем выполнения. // Авиация и космонавтика - 2018 Тезисы 17-ой Международной конференции. 2018. С. 480-481.
19) Мхитарян Г.А., Наумов А.В., Черыгова Е.Е. О задаче квантильной оптимизаци ограниченного по времени тестирования для одного пользователя // Материалы XII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ'2018) 2018. С. 736-737.
20) Мхитарян Г.А., Мартюшова Я.Г., Кибзун А.И., Жарков Е.А. Междисциплинарные аспекты разработки и программной реализации электронных учебников для студентов технических университетов // Современные информационные технологии и ИТ-образование, Россия, 2018. URL: http://it-edu.oit.cmc.msu.ru/index.php/SITITO/sitito2018/paper/view/787
21) Жарков Е.А., Кибзун А.И., Мхитарян Г.А., Наумов А.В. Технологии создания и эксплуатации системы дистанционного обучения МАИ CLASS.NET // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования тезисы докладов Пятой Международной конференции, посвящённой 95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева. Российский университет дружбы народов. 2018. С. 449-450.
22) Мхитарян Г.А., Жарков Е.А. Архитектура современных адаптивных систем дистанционного обучения на примере СДО МАИ CLASS.NET // Системный анализ, управление и навигация. Тезисы докладов. 2019. С. 124-125.