

На правах рукописи



ФЕОКТИСТОВА ЕЛЕНА СЕРГЕЕВНА

**НЕСТАЦИОНАРНОЕ КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АБСОЛЮТНО
ТВЕРДОГО УДАРНИКА И МЕМБРАНЫ ПРИ УЧЕТЕ АДГЕЗИИ**

Специальность: 1.1.8.

«Механика деформируемого твёрдого тела»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

МОСКВА – 2025

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент **Оконечников Анатолий Сергеевич**

Официальные оппоненты: **Вильде Мария Владимировна**, д.ф.-м.н., профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

Хомченко Антон Васильевич, к.т.н., ведущий инженер-конструктор отдела динамической прочности ООО "АУРУС-АЭРО"

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Защита диссертации состоится 24 декабря 2025 года в 16:00 на заседании диссертационного совета 24.2.327.07 при ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» и на сайте:

https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=185999

Автореферат разослан «___» _____ 2025 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета



Сердюк Д.О.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Современная механика деформируемого твердого тела активно развивается в направлениях, связанных с изучением взаимодействия элементов конструкций в условиях сложных и быстро меняющихся внешних воздействий. Особое место среди таких задач занимает анализ нестационарных контактных процессов, возникающих при кратковременных ударах, резких механических воздействиях или при работе конструктивных элементов в режиме высокочастотной нагрузки. Особое внимание уделяется тонкостенным конструкциям, таким как мембраны и оболочки, обладающим высокой чувствительностью к локализованным внешним воздействиям.

Контактное взаимодействие между телами при ударе традиционно описывается с использованием моделей упругого или пластического деформирования. Однако в ряде случаев необходимо учитывать дополнительные эффекты, такие как адгезионное притяжение, возникающее до момента механического контакта, и продолжающие вносить свой вклад после него. Такие силы обусловлены межмолекулярными взаимодействиями и могут оказывать существенное влияние на динамику ударного процесса, особенно при взаимодействии с гибкими или тонкими телами, например, мембранами. Адгезия оказывает влияние не только на начальную фазу контакта, но и на характер распространения деформаций, их скорость и амплитуду.

Актуальность рассматриваемой диссертационной работы обусловлена необходимостью создания и анализа моделей, учитывающих адгезионное взаимодействие в условиях нестационарного контакта.

Целью диссертационной работы является анализ нестационарного контактного взаимодействия абсолютно твёрдого ударника с мембраной при учёте действия адгезионного притяжения, исследование прогибов мембраны и распределения контактного давления при различных скоростных режимах.

Основные результаты, выносимые на защиту:

- постановка задачи о нестационарном контакте жесткого ударника с неограниченной мембраной с учетом воздействия адгезии в плоской и осесимметричной постановках;
- разработан подход к решению задачи о нестационарном взаимодействии мембраны и ударника при учете адгезионного притяжения;
- построены и реализованы алгоритмы решения задачи о нестационарном взаимодействии мембраны и ударника при учете адгезионного притяжения;
- выполнена верификация результатов решения двух задач (без учета адгезионного притяжения и с учетом влияния адгезионных сил);
- построено аналитическое выражение для контактного давления на произвольном временном интервале.

Объектом исследования представляет собой бесконечную мембрану, деформируемую под действием контактного взаимодействия с абсолютно твердым ударником, а также подверженную влиянию адгезионных сил.

Предметом исследования являются контактное давление и перемещения бесконечной мембраны под действием ударника с учётом адгезионных сил, в том числе в сверхзвуковом и дозвуковом режимах, в плоской и осесимметричной постановках.

Методы исследования. При решении задачи используется подход основанный на точном решении нестационарной контактной задачи для мембраны и ударника без учета адгезии. Решение задачи без влияния адгезии проводится в нулевом приближении, при котором пренебрегаются инерционные силы в мембране. С помощью используемых допущений происходит переход от исходной начально-краевой задачи к задаче Коши. Данные задачи решаются как аналитически, так и с применением метода Рунге-Кутты.

Научная новизна работы состоит в исследовании влияния адгезионного притяжения на контактное взаимодействие мембраны с ударником в нестационарной постановке. Предложен новый алгоритм решения контактных задач под действием нестационарной нагрузки.

Практическая значимость. Полученные результаты могут быть использованы при расчётах элементов конструкций, подверженных кратковременным ударным воздействиям (например, защитные экраны, обшивки летательных аппаратов, чувствительные оболочки в сенсорах), так же, наличие адгезионных сил играет важную роль в исследованиях наноинженерии, биосовместимых покрытий, робототехники и сенсорики. Разработанные модели позволяют учитывать адгезионные эффекты в инженерной практике, что существенно расширяет область применимости классических контактных моделей.

Апробация работы осуществлялась на ведущих всероссийских и международных научных конференциях:

- Научная конференция «Зимняя школа механики» (2021г., 2023г.). Пермь;
- XL VII Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения» (2021г.). Москва;
- Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. Москва, (2021-2025г.);
- Всероссийская конференция молодых ученых-механиков. (3-12 сентября 2021 г.). Сочи, «Буревестник» МГУ. 2021г;
- Проблемы безопасности на транспорте. XII Международная научно-практическая конференция, посвященная 160-летию Белорусской железной дороги. Гомель. 2022;
- Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов. Международная научно-практическая конференция, посвященная 70-летию БелГУТа. Гомель. 2023;

- XIII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Санкт-Петербург, 21-25 августа 2023 года;
- Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (2021г- 2025г.). Москва.

Публикации. По теме диссертационного исследования опубликовано 16 научных работ, включая 2 статьи в журналах из перечня ВАК, 1 статья в коллективной монографии издательства Springer, а также тезисы в материалах научных форумов, конференций и семинаров.

Личный вклад автора. Ключевые положения диссертационной работы были разработаны автором самостоятельно или при непосредственном его участии, что подтверждается опубликованными результатами исследований.

В работе [1] личный вклад заключается в предложении гипотез, позволяющих упростить ход исследования процесса, в получении выражения для реакций мембраны, в формировании задачи Коши, а также в проведении расчетов.

В работе [2] личный вклад заключается в получении выражения для реакций мембраны, контактного давления и ширины пятна контакта в плоской и осесимметричной постановках как для сверхзвукового, так и для дозвукового этапов взаимодействия. Реализован алгоритм, в рамках которого решается контактная задача с учетом адгезии на произвольном временном интервале.

Структура и объем работы. Диссертация включает введение, три главы, заключение и список литературы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе диссертации подробно рассмотрено современное состояние исследований, посвящённых задачам контактного взаимодействия тел с учетом нестационарной нагрузки и дополнительных силовых факторов, в частности адгезионного притяжения. Выполнен систематический анализ литературных

источников, охватывающих как фундаментальные теоретические разработки в области механики деформируемого твёрдого тела, так и прикладные модели, используемые при анализе взаимодействия тонкостенных конструктивных элементов с внешними телами.

Актуальность рассмотрения нестационарных задач контактного взаимодействия обусловлена широким спектром технических применений: от микроэлектромеханических систем (MEMS) и биоинженерных конструкций до космических аппаратов, работающих в условиях резких внешних воздействий. При этом классическая теория упругого контакта, заложенная Герцем и развиваемая в работах Джонсона, Гринвуда, Кендалла и др., ориентирована преимущественно на стационарные или квазистатические задачи. Основные положения этой теории предполагают мгновенное установление контактного давления и игнорируют фазу сближения тел до начала физического контакта. Более того, такие модели, как правило, не применимы к тонким, растяжимым элементам — мембранам, характеризующимся высокой гибкостью и значительными прогибами даже при малых нагрузках.

Обзор включает статьи по применению численных методов, однако и в этих случаях постановки задач ограничиваются либо стационарными режимами, либо малым числом степеней свободы. Задачи с подвижной границей, определяемой по ходу взаимодействия, относятся к классу нелинейных задач с переменными границами и требуют особых алгоритмов согласования решений во внутренней и внешней зонах.

Согласно модели адгезионного взаимодействия Можи-Дагдейла, сила адгезионного давления существует при условии, что зазор между взаимодействующими телами не превышает некоторого максимального зазора

$h_{\max}$:

$$p_a(z) = \begin{cases} -p_0, & 0 < z \leq h_{\max} \\ 0, & z > h_{\max} \\ 0, & x \in \Omega_c(x, t) \end{cases}, \quad (1)$$

где $\Omega_c(x, t)$ - область механического контакта двух тел.

Постановка задачи. В данном разделе формулируется начально-краевая задача о нестационарном контактном взаимодействии бесконечной упругой мембраны с абсолютно твёрдым ударником при отсутствии адгезионного притяжения. Задача рассматривается в двух постановках: плоской и осесимметричной. Для обобщения решений была введена переменная ζ , которая принимает значение x или r в зависимости от постановки задачи.

Рассматривается бесконечная мембрана, расположенная в плоскости, которая под действием ударника деформируется в вертикальном направлении. Предполагается, что изгибная жёсткость мембраны пренебрежительно мала, вследствие чего реакция мембраны на нагрузку описывается волновым уравнением.

Форма абсолютно твёрдого ударника описывается функцией $f(\zeta)$ в системе координат связанной с его лобовой точкой. Ударник движется по нормали к мембране с начальной скоростью V_0 . В начальный момент времени между рассматриваемыми телами есть минимальный зазор h_0 . В процессе взаимодействия между ударником и мембраной возникает давление $p(\zeta, \tau)$ вызывающее прогибы мембраны $w(\zeta, \tau)$. Глубина внедрения лобовой точки штампа описывается функцией $h(\tau)$.

Для описания постановки задачи будем использовать оператор Лапласа, который принимает вид $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}$ и $\Delta = \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)$ для плоского и

осесимметричного случаев соответственно, а также систему безразмерных величин:

$$w = \frac{w'}{L}, \zeta = \frac{\zeta'}{L}, \tau = \frac{ct}{L}, p = \frac{p'L}{T},$$

где L – некоторый характерный линейный размер, τ – безразмерное время,

$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ – скорость распространения колебаний в мембране.

Уравнение нестационарных поперечных колебаний мембраны с учетом безразмерных величин:

$$\ddot{w}(\zeta, \tau) - \Delta w(\zeta, \tau) = p(\zeta, \tau) \quad (2)$$

$p(\zeta, \tau)$ из уравнений (2) содержит контактное давление $p_c(\zeta, \tau)$ и адгезионное воздействие $p_a(\zeta, \tau)$, распределенные на областях Ω_c и Ω_a соответственно:

$$p(\zeta, \tau) = \begin{cases} p_c(\zeta, \tau), & \zeta \in \Omega_c \\ -p_a(\zeta, \tau), & \zeta \in \Omega_a \end{cases} \quad (3)$$

Реакция мембраны также содержит две компоненты:

$$R(\tau) = R_c(\tau) + R_a(\tau),$$

$$R_c(\tau) = - \int_{\Omega_c} p_c(\zeta, \tau) J(\zeta) d\zeta, R_a(\tau) = \int_{\Omega_a} p_a(\zeta, \tau) J(\zeta) d\zeta, \quad (4)$$

где $J = J_{1,2}; J_1 = 1, J_2 = 2\pi\zeta$ – множители, связанные с якобианом для плоской и осесимметричной задач.

Уравнение движения ударника имеет вид:

$$m\ddot{h} = R(\tau) \quad (5)$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned} w|_{\tau=0} = \frac{\partial w}{\partial \tau}|_{\tau=0} &= 0; \\ h(0) = -h_0, \dot{h}(0) &= V_0; (h_0 \geq 0). \end{aligned} \quad (6)$$

Граничные условия предполагают свободное проскальзывание между ударником и мембраной, а также ограниченной возмущений на бесконечности:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} w(\zeta, \tau) = 0, \mathbf{p} = (0, p(\zeta, \tau))^T. \quad (7)$$

Условия контакта ударника и мембраны:

$$\begin{aligned} \Omega_c : w(\zeta, \tau) &= h(\tau) - h_0 - f(\zeta), \quad p_c(\zeta, \tau) > 0, \quad \zeta \in \Omega_c, \\ c(\tau) : w(c, \tau) &= h(\tau) - h_0 - f(c), \quad p_c(c, \tau) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $c(\tau)$ - граница области контакта.

Условие возникновения адгезионной силы:

$$\begin{aligned} 0 \leq w(\zeta, \tau) - h(\tau) - f(\zeta) &\leq h_{\max}, \\ p(\zeta, \tau) &= p_0 \leq 0, \quad \zeta \in \Omega_a. \end{aligned} \quad (9)$$

Условие возникновения области прилипания Ω_p :

$$\begin{aligned} w(\zeta, \tau) - h(\tau) - f(\zeta) &= 0, \\ w(\zeta, \tau) \leq 0, p(\zeta, \tau) &= 0, \quad \zeta \in \Omega_p. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, формулы (2)–(10) описывают постановку задачи о нестационарном контакте мембраны с ударником с учетом влияния адгезии как в плоской, так и в осесимметричной постановках.

Во второй главе рассматривается задачи о нестационарном контактном взаимодействии абсолютно твёрдого ударника с бесконечной мембраной без учета адгезионных сил. Рассматриваемая постановка задачи вытекает из (2)–(10), в которых необходимо положить $p_a(\zeta, \tau) = 0$ а также отсутствие зазора между ударником и мембраной в начальный момент времени $h_0 = 0$. В этой главе с

помощью введенных допущений исходная начально-краевая задача сводится к задаче Коши. Проводится анализ различных режимов взаимодействия и выведены выражения для распределения давления и перемещений.

Сверхзвуковой и дозвуковой режимы. Одной из ключевых особенностей нестационарных контактных задач, связанных с взаимодействием твёрдого тела и упругой мембраны, является характер распространения области контакта во времени. В процессе контактного взаимодействия будем учитывать два режима взаимодействия:

1. **Сверхзвуковой режим** — это ситуация, при которой скорость расширения границы зоны контакта превышает скорость распространения упругих возмущений в мембране.
2. **Дозвуковой режим** — наблюдается в том случае, когда скорость распространения контакта меньше скорости звука в мембране.

Каждый из этих режимов характеризуется различной структурой давления и различными законами распространения границы зоны контакта. На сверхзвуковом режиме деформация мембраны совпадает с формой штампа. На границе области контакта будут отсутствовать прогибы мембраны, что приводит формулу (8) к следующему виду:

$$\begin{aligned} h(\tau) + f(c(\tau)) &= 0; p_c(c, \tau) = 0 \\ c(\tau) &= -f^{-1}(h). \end{aligned} \tag{11}$$

Соответствующие прогибы мембраны:

$$w(\zeta, \tau) = h(\tau) - f(\zeta), \zeta \in [0, c(\tau)] \tag{12}$$

На дозвуковом режиме, напротив, прогибы мембраны возникают вне области контакта штампа с мембраной и граница области контакта определяется согласно (8).

На дозвуковом этапе будем решать задачу в нулевом приближении пренебрегая вкладом инерционных сил в прогибы мембраны. Данное допущение приводит к следующим следствиям:

- Следствие 1: на дозвуковом режиме перемещения вне зоны контакта имеют вид линейной функции, носитель которой определяется скоростью распространения волн в мембране.
- Следствие 2: производная функции нормальных перемещений мембраны на границе контакта совпадает с производной функции формы ударника в этой же точке.

Прогибы мембраны на дозвуковом режиме будут описываться следующим образом:

$$\begin{aligned} w(\zeta, \tau) &= f(\zeta)H[c(\tau) - \zeta] + w_M(\zeta, \tau)\{H(\tau - \zeta) - H[c(\tau) - \zeta]\}, \\ w_M(\zeta, \tau) &= f'[c(\tau)][\zeta - c(\tau)] + h(\tau) + f[c(\tau)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Описанные выше свойства позволяют описать процесс деформирования мембраны для обоих режимов взаимодействия. Тогда, подставляя выражения (12) и (13) в уравнение движения мембраны (2), получим выражение для контактного давления и реакции мембраны $R(\tau)$. Подставляя последнюю в уравнение движения штампа (5), получим соответствующие задачи Коши.

Плоская постановка задачи

Осесимметричная постановка задачи

Структура давления на дозвуковом режиме:

$\begin{aligned} p(\zeta, \tau) &= Q(\zeta, \tau)H(c - \zeta) + P(\tau)\delta(\tau - \zeta); \\ Q(\zeta, \tau) &= \ddot{h}(\tau) - f''(\zeta); \\ P(\tau) &= f'(\tau). \end{aligned}$	$\begin{aligned} p(\zeta, \tau) &= Q(\zeta, \tau)H(c - \zeta) + P(\tau)\delta(c - \zeta); \\ Q(\zeta, \tau) &= \ddot{h}(\tau) - f''(\zeta); \\ P(\tau) &= \dot{h}(\tau)\dot{c}(\tau) + f'(\tau). \end{aligned}$
---	---

Структура давления на сверхзвуковом режиме:

$$\left. \begin{aligned} p(\zeta, \tau) &= Q(\zeta, \tau)H(c - \zeta) + P(\tau)\delta(c - \zeta), \\ Q(\zeta, \tau) &= \ddot{h}(\tau) - f''(\zeta), \\ P(\tau) &= \dot{h}(\tau)\dot{c}(\tau) + f'(c). \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} p(\zeta, \tau) &= Q(\zeta, \tau)H(c - \zeta) + P(\tau)\delta(c - \zeta), \\ Q(\zeta, \tau) &= \ddot{h}(\tau) - f''(\zeta) - \frac{f'(\zeta)}{\zeta}, \\ P(\tau) &= \dot{h}(\tau)\dot{c}(\tau) + f'(c). \end{aligned} \right.$$

Реакция мембраны:

$$\left. \begin{aligned} R(\tau) &= R_Q + R_P, \\ R_Q &= -2 \left\{ \ddot{h}(\tau)c(\tau) - f'[c(\tau)] \right\}, \\ R_P &= -2 \left\{ \dot{h}(\tau)\dot{c}(\tau) + f'[c(\tau)] \right\}. \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} R(\tau) &= R_Q + R_P, \\ R_Q &= -2\pi \left\{ \frac{\ddot{h}(\tau)c(\tau)}{2} - f'[c(\tau)] \right\} c(\tau), \\ R_P &= -2\pi \left\{ \dot{h}(\tau)\dot{c}(\tau) + f'[c(\tau)] \right\} c(\tau). \end{aligned} \right.$$

Задача Коши на дозвуковом режиме

$$\left. \begin{aligned} \ddot{h}(\tau) &= \frac{2}{m + 2c(\tau)} f'(c(\tau)), \\ \dot{h}(0) &= V_0, h(0) = 0. \end{aligned} \right| \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{h}(\tau) &= \frac{2\pi}{m + \pi c^2(\tau)} f'(c(\tau)); \\ \dot{h}(0) &= V_0, h(0) = 0. \end{aligned} \right| \quad (15)$$

Задача Коши на сверхзвуковом режиме

$$\left. \begin{aligned} \dot{h}(\tau) &= \frac{mV_0}{m + 2c(\tau)}, \\ h(0) &= 0 \end{aligned} \right| \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{h}(\tau) &= -2\pi \frac{\dot{h}(\tau)\dot{c}(\tau)c(\tau)}{(m + \pi c^2(\tau))}, \\ \dot{h}(0) &= V_0, h(0) = 0. \end{aligned} \right| \quad (17)$$

Таким образом, исследование нестационарной контактной задачи сводится к решению задач Коши (14), (16) и (15), (17) в зависимости от постановки задачи. Ниже представлены примеры расчетов. В расчетах использовался ударник параболической формы $f(\zeta) = -k\zeta^2$. Параметры, принятые для расчёта: $V_0 = 2$, $k = 1$, $m = 1$.

В ходе решения задачи были построены графики глубины внедрения ударника (рис. 1) и изменение положения границы области контакта (рис. 2). Данные графические результаты включают в себя решения как на сверхзвуковом, так и на дозвуковом режимах взаимодействия. Решения были построены для задач в плоской и осесимметричной постановках.

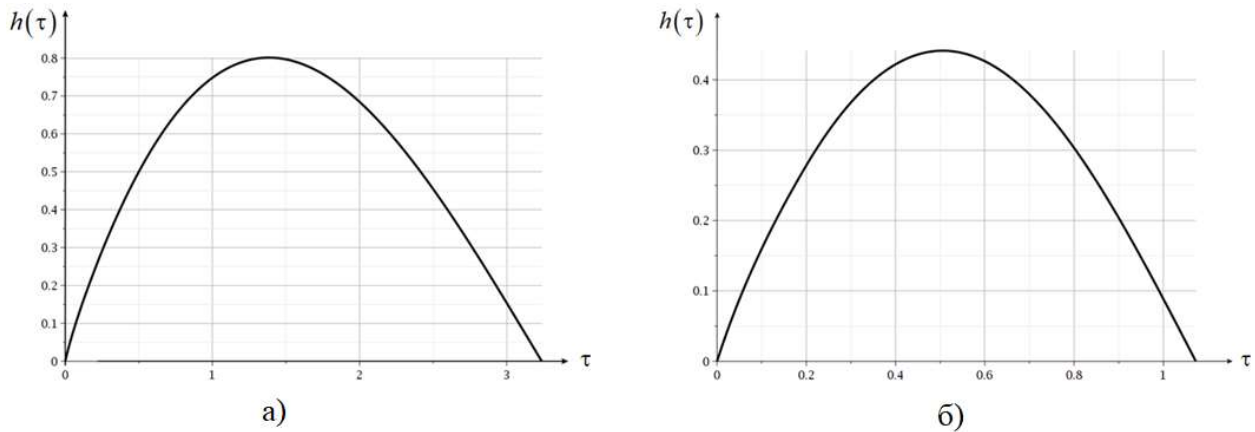


Рис. 1 – Глубина внедрения ударника в мембрану: а) – плоская постановка задачи; б) – осесимметричная постановка задачи.

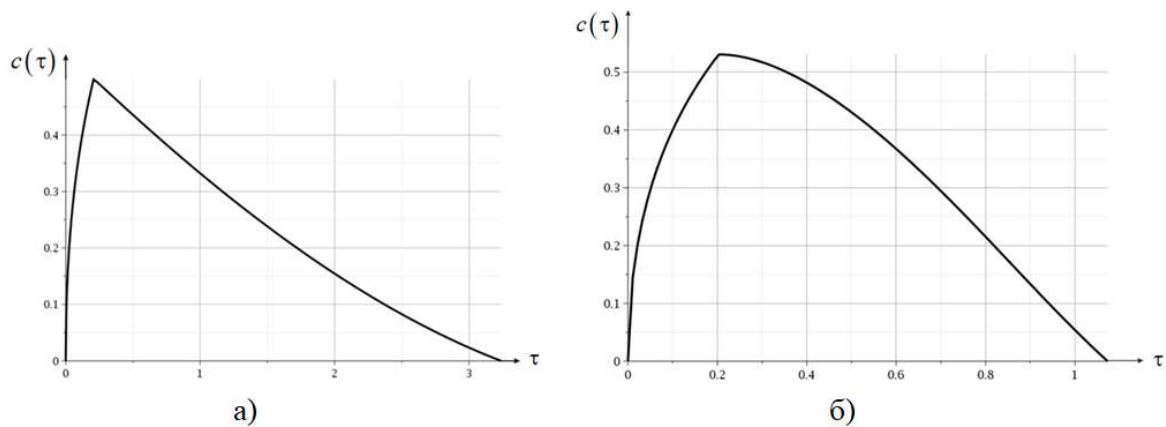


Рис. 2 – Изменение границ области контакта: а) – плоская постановка задачи; б) – осесимметричная постановка задачи.

Также было получено решение для контактного давления в различные моменты времени (рис. 3) – (рис.5).

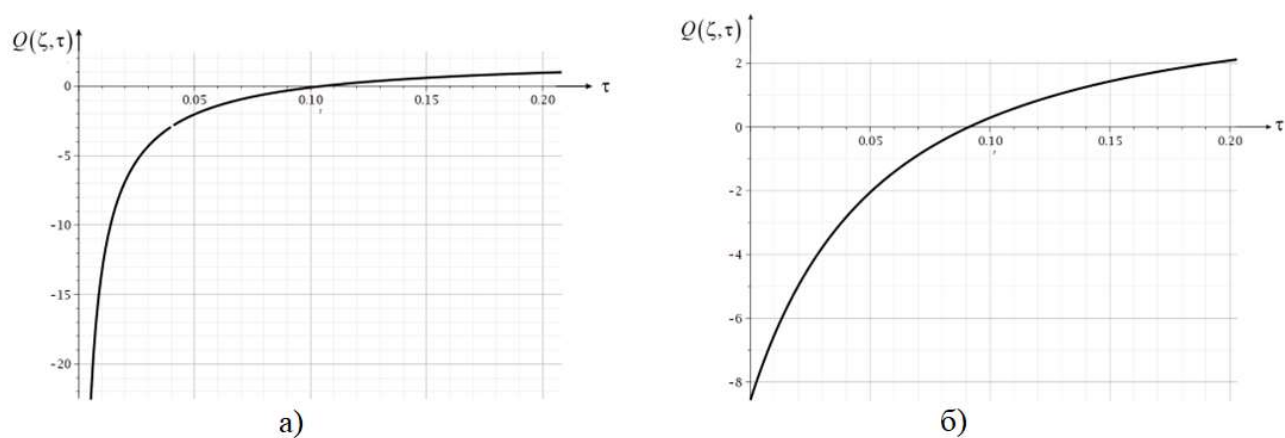


Рис. 3 – График распределенного давления $Q(\zeta, \tau)$: а) – плоская постановка задачи; б) – осесимметричная постановка задачи.

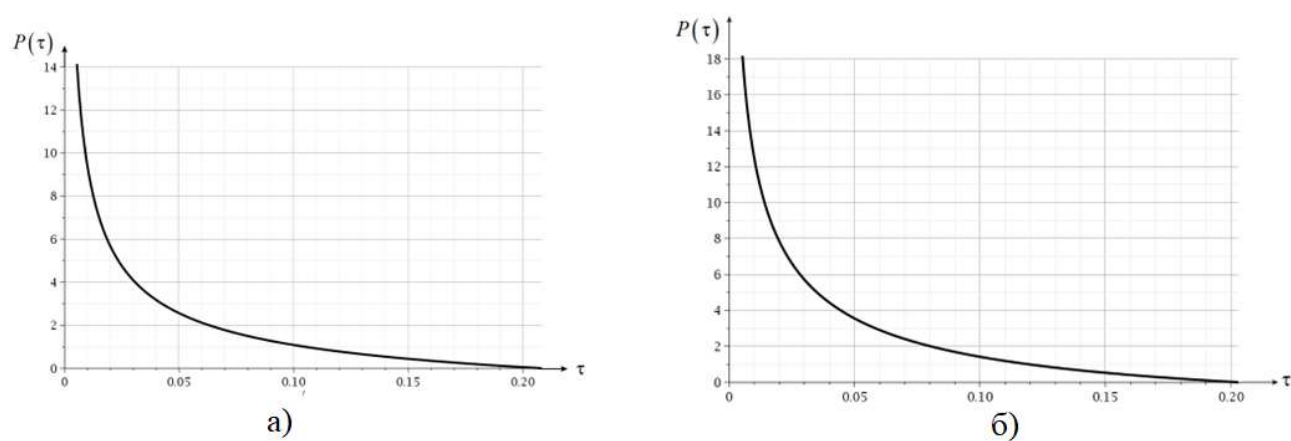


Рис. 4 – График сосредоточенного давления $P(\tau)$: а) – плоская постановка задачи; б) – осесимметричная постановка задачи.

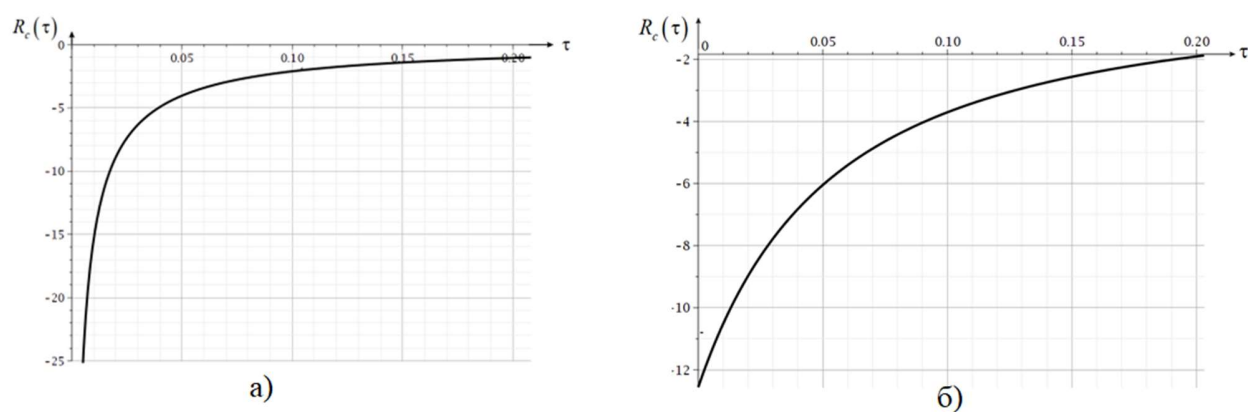


Рис. 5 – Реакция мембраны $R_c(\tau)$: а) – плоская постановка задачи; б) – осесимметричная постановка задачи.

Результаты численного анализа подтвердили адекватность предложенной модели. Были получены закономерности, отражающие физику нестационарного контактного взаимодействия.

В третьей главе рассматривается обобщённая постановка задачи о нестационарном контактном взаимодействии ударника с бесконечной мембраной, при котором дополнительно учитывается адгезионное притяжение между телами. В данной главе описаны подход к решению задачи и соответствующий алгоритм решения для плоского случая.

Рассматривается задача (2) – (10) при отсутствии исходного зазора $h_0 = 0$. Данную постановку задачи разделим на две путем введения следующего обозначения:

$$w(\zeta, \tau) = w_I(\zeta, \tau) + w_{II}(\zeta, \tau).$$

Постановка задачи I

Постановка задачи II

Уравнение движения мембраны

$$\ddot{w}_I(\zeta, \tau) - w_I''(\zeta, \tau) = p_c(\zeta, \tau).$$

$$\ddot{w}_{II}(\zeta, \tau) - w_{II}''(\zeta, \tau) = p_a(\zeta, \tau).$$

Начальные условия

$$w_I|_{\tau=0} = \frac{\partial w_I}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0.$$

$$w_{II}|_{\tau=0} = \frac{\partial w_{II}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0.$$

Граничные условия

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} w_I(\zeta; \tau) = 0,$$

$$\mathbf{p} = (0, p_c(\zeta, \tau))^T.$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} w_{II}(\zeta, \tau) = 0,$$

$$\mathbf{p} = (0, p_a(\zeta, \tau))^T.$$

Уравнение движения ударника:

$$m\ddot{h} = R_c(\tau) + R_a(\tau).$$

Задача I решается по аналогии с задачей из главы 2 где адгезия учитывается в реакции мембраны на штамп. Задача II описывает воздействие адгезии вне области контакта.

Метод решения. Алгоритм решения задачи реализован для плоского случая с использованием метода итераций.

На каждом временном интервале выполняется следующая последовательность операций:

- Шаг 1. Решается задача I с предварительно определенным носителем адгезионного притяжения, а следовательно, с известной силой $R_a(\tau)$.

Сверхзвуковой режим:

$$\dot{h}(\tau) = \frac{r(\tau) + mV_0}{m + 2c(\tau)},$$

$$h(0) = 0,$$

$$r(\tau) = 2p_0 \int_0^{\tau} a_2(t) - a_1(t) dt.$$

Дозвуковой режим:

$$\ddot{h}(\tau) = 2 \frac{f'(c(\tau)) + p_0(a_2(\tau) - a_1(\tau))}{m + 2c(\tau)},$$

$$\dot{h}(0) = V_0,$$

$$h(0) = 0.$$

- Шаг 2. Определяется глубина внедрения штампа, контактное давление и перемещение $w_I(\zeta, \tau)$, согласно алгоритму для нестационарных задач без учета адгезии.
- Шаг 3. Перемещения от действия адгезионной силы определяются согласно решению задачи II:

$$w_{II}(\zeta, \tau) = -\frac{p_0}{2} \int_0^{\tau} \int_0^{\infty} H(\xi - a_1(t)) H(a_2(t) - \xi) H(\tau - t - |\zeta - \xi|) d\xi dt.$$

- Шаг 4. Определяем области адгезионного притяжения на i-м шаге.

На шаге 4 итерация завершается и происходит переход к п.1 на новом шаге по времени.

Для подтверждения адекватности построенной модели и иллюстрации влияния адгезионного взаимодействия на динамику контактного процесса была решена контактная задача для ударника и мембраны при учете адгезии в плоской постановке.

Для расчётной задачи использовался параболический ударник с формой $f(\zeta) = -\zeta^2$, массой $m=1$, начальная скорость ударника $V_0 = 2$, максимальная глубина действия адгезии $h_{\max} = 1$. Предполагается отсутствие зазора между мембраной и ударником в начальный момент времени $h(0) = 0$. Вследствие этого, начальные значения границ области контакта и носителя адгезионного притяжения имеет вид:

$$c(0) = 0, a_1(0) = 0, a_2(0) = 1.$$

В ходе решения были получены следующие графические результаты:

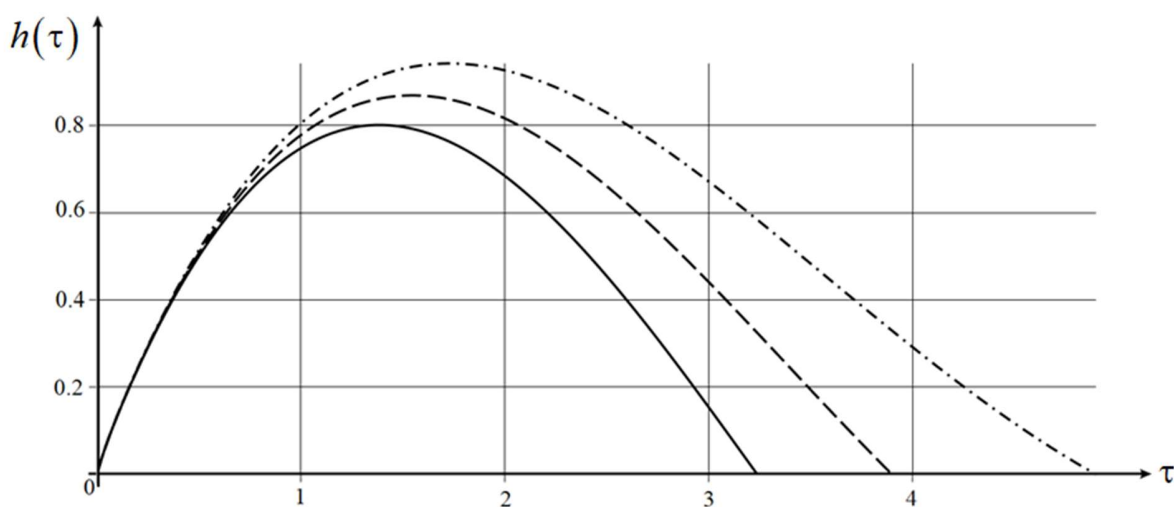


Рис. 6 – Зависимость глубины внедрения ударника в мембрану от времени.

Сплошная линия – задача без влияния адгезионной силы, пунктирная линия – задача при влиянии адгезионного притяжения $p_0 = 0.1$, штрихпунктирная линия – задача при влиянии адгезионного притяжения $p_0 = 0.2$.

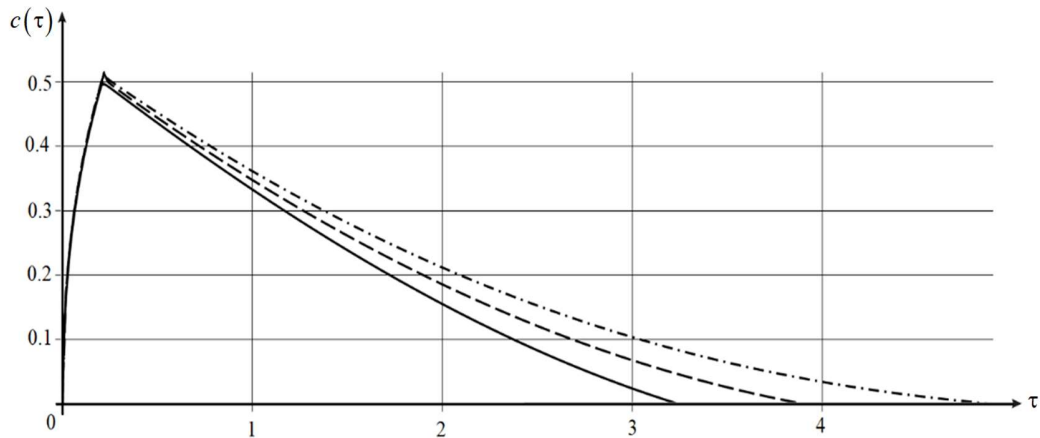


Рис. 7 – Изменение границы области контакта во времени. Сплошная линия – задача без влияния адгезионной силы, пунктирная линия – задача при влиянии адгезионного притяжения $p_0 = 0.1$, штрихпунктирная линия – задача при влиянии адгезионного притяжения $p_0 = 0.2$.

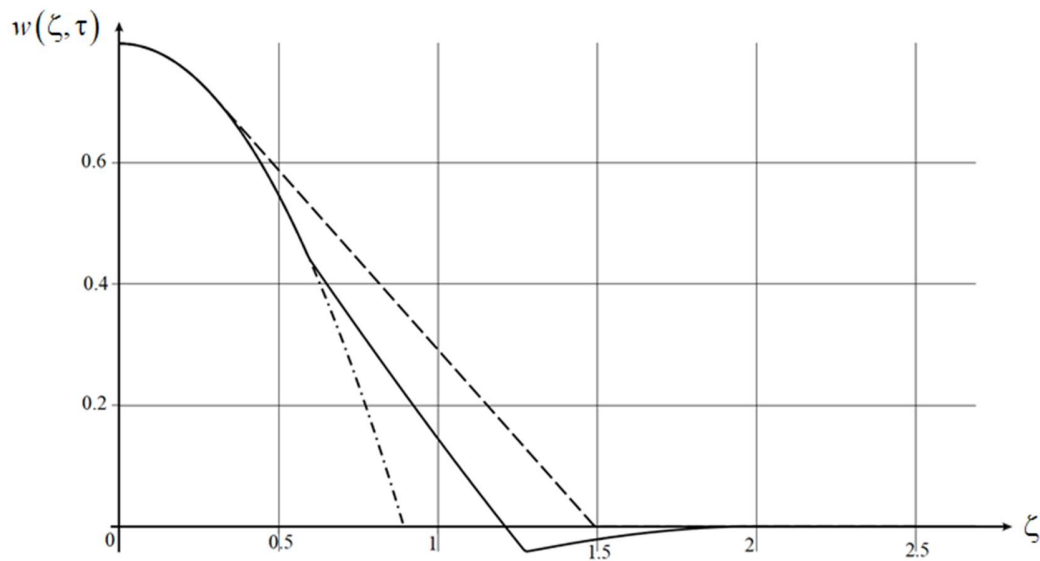


Рис. 8 – Распределение прогибов мембраны $w(\zeta, \tau)$ в зависимости от величины адгезионного притяжения при одинаковой глубине внедрения ударника ($h = 0.797$). Сплошная линия – задача при влиянии адгезионного притяжения $p_0 = 0.2$, штриховая линия – задача без влияния адгезионной силы, штрихпунктирная линия форма ударника.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе выполнено комплексное исследование нестационарного контактного взаимодействия мембраны и абсолютно твёрдого ударника, включая как безадгезионные, так и адгезионные модели. Разработана математическая постановка задачи, условия контакта и адгезионного притяжения.

Построен численный алгоритм решения задачи, основанный на разложении исходной модели на два этапа — контактный и адгезионный.

Проведён анализ корректности и устойчивости метода, подтверждённый серией численных расчётов.

Получены качественно новые результаты, демонстрирующие влияние адгезии на форму контактного давления, глубину проникновения ударника, длительность контакта и структуру прогиба мембраны. Показано, что учет адгезионного притяжения существенно меняет динамику, обеспечивая более точное воспроизведение реальных условий взаимодействия тел на микро- и макроуровне.

Разработанная модель может использоваться при анализе поведения гибких конструктивных элементов под действием кратковременных нагрузок, в задачах биомеханики, наномеханики и при проектировании высокоточных сенсорных систем. Методика решения адаптируема к различным геометриям, включая осесимметричные постановки, и может быть расширена на случаи с неоднородностями, пластичностью или термомеханическим воздействием.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах из перечня ВАК:

1. Кириенков А.А., Оконечников А.С., Феоктистова Е.С. Нестационарная контактная задача для штампа и мембраны в осесимметричной постановке // Труды МАИ. – 2024. – № 138. – URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=182658>.
2. Оконечников А.С., Федотенков Г.В., Феоктистова Е.С. Контактная задача для мембраны и ударника в нестационарной постановке // Труды МАИ. – 2025. – № 140. – URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184056>.

Статьи в журналах, индексируемых Scopus:

3. Okonechnikov A. S., Fedotenkov G. V., Feoktistova E.S. Transient interaction of a rigid indenter with a membrane accounting for adhesive forces // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Vol.40. – № 4. – P. 489–498. DOI: 10.1134/S1995080219040115.

Прочие публикации по теме диссертации:

4. Оконечников А.С., Федотенков Г.В., Феоктистова Е.С. Нестационарный контакт жесткого штампа с мембраной при учете влияния сил адгезионного притяжения // Тезисы в сборнике: «XXII Зимняя школа по механике сплошных сред Пермь, 22 – 26 марта 2021г.» Тезисы докладов /ПФИЦ УрО РАН. – Электронные данные. – Пермь, 2021. – 362 с.
5. Оконечников А.С., Феоктистова Е.С. Нестационарное контактное взаимодействие жесткого штампа с бесконечной мембраной с учетом адгезионных сил // В сборнике: XLVII Гагаринские чтения. Сборник трудов Международной молодежной научной конференции. Секция "Механика и моделирование материалов и технологий", 20–23 апреля 2021 г. Москва, 2021. С. 150.
6. Оконечников А.С., Федотенков Г.В., Феоктистова Е.С. Нестационарный контакт жёсткого штампа с мембраной при учете адгезии // Материалы XXVII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова – 17–21 мая 2021 года., Т. 2. – С. 70-71.

7. Оконечников А.С., Федотенков Г.В., Феоктистова Е.С. Нестационарный контакт штампа с тонкостенными элементами конструкций при учете адгезии // «Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 20–26 апреля 2021 года. Тезисы докладов. — Москва: Издательство Московского университета, 2021. — 223, [1] с. — (Электронное издание сетевого распространения)».
8. Оконечников А.С., Федотенков Г.В., Феоктистова Е.С. Нестационарное взаимодействие мембраны с жёстким ударником при учете сил адгезионного давления // «Всероссийская конференция молодых ученых-механиков YSM-2021, посвященная 60-летию первого полета человека в космос. Тезисы докладов (3 – 12 сентября 2021 г., Сочи, «Буревестник» МГУ). – М.: Издательство Московского университета, 2021. – 161 с. – (Электронное издание сетевого распространения).»
9. Оконечников А.С., Федотенков Г.В., Феоктистова Е.С. О влиянии адгезии на нестационарный контакт жесткого штампа с мембраной // XII Международная научно-практическая конференция, посвященная 160-летию Белорусской железной дороги. Проблемы безопасности на транспорте, 24–25 ноября 2022г – 232 с.
10. Михайлова Е.Ю., Оконечников А.С., Феоктистова Е.С. Нестационарный контакт жесткого ударника с мембраной: сверхзвуковой режим // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 4–23 апреля 2023 г. Тезисы докладов. — Москва: Издательство Московского университета, 2023. — 181 с.
11. Оконечников А.С., Федотенков Г.В., Феоктистова Е.С. Нестационарная контактная задача о взаимодействии жесткого ударника с мембраной на сверхзвуковом этапе взаимодействия // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред Материалы XXIX Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. Москва, 15–19 мая 2023 г. Издательство: Общество с ограниченной ответственностью "ТРП"
12. Оконечников А.С., Федотенков Г.В., Феоктистова Е.С. Контактная задача в нестационарной постановке о взаимодействии Жесткого ударника и

мембраны на сверхзвуковом режиме // Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов : материалы Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 70-летию БелИИЖТа – БелГУТа (Гомель, 16–17 ноября 2023 г.) : в 2 ч. Ч. 2 / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т трансп.; под общ. ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2023. – 395 с. ISBN 978-985-891-128-7 (ч. 2)

13. Оконечников А.С., Федотенков Г.В., Феоктистова Е.С. Контактное взаимодействие жесткого штампа с мембраной на этапе сверхзвукового режима // XIII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Санкт-Петербург, 21-25 августа 2023 года.
14. Оконечников А.С., Федотенков Г.В., Феоктистова Е.С. Нестационарный контакт жесткого штампа с мембраной на произвольном этапе взаимодействия // XXIII Зимняя школа по механике сплошных сред 13-17 февраля 2023г., Пермь
15. Оконечников А.С., Федотенков Г.В., Феоктистова Е.С. Нестационарная контактная задача жесткого штампа и мембраны при учете адгезии // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред Материалы XXX Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова, 20-24 мая 2024 г. Москва, 2024 Издательство: Общество с ограниченной ответственностью "ТРП"
16. Оконечников А.С., Федотенков Г.В., Феоктистова Е.С. Оценка влияния формы штампа в нестационарных контактных задачах для мембраны // «Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 2024 год. Тезисы докладов. — Москва: Издательство Московского университета, 20 марта — 4 апреля, (Электронное издание сетевого распространения)» с.123-124.