

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ КОМПОНОВКИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Маркин Л.В.

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия  
e-mail: markinl@list.ru*

Рассматривается вопрос автоматизации проектирования компоновок авиационно-космической техники. Показано, что сложность этого процесса обусловлена сложностью представления в ЭВМ информации о геометрической форме компонуемых объектов авиакосмической техники. Задача автоматизированной компоновки описана как оптимизационная задача математического программирования с конкретными критериями оптимизации и ограничениями. Приведенный в статье анализ существующих методов автоматизированной компоновки показывает, что они реализованы лишь для объектов простейших геометрических форм — примитивов. Предложен метод автоматизированной компоновки, основанный на математическом аппарате нормальных уравнений, что позволяет создавать интеллектуальные алгоритмы компоновки, сводя позиционную задачу размещения объектов к геометрической. Описаны способы получения нормальных уравнений плоских и пространственных объектов и их возможности в задачах автоматизированной компоновки.

*Ключевые слова:* автоматизированное проектирование, автоматизированная компоновка, геометрические модели компонуемых объектов, оптимизация размещения объектов в пространстве, плотное размещение, условия взаимного непересечения, нормальные уравнения компонуемых объектов.

### Введение

При автоматизации проектирования любой техники на результат проектирования оказывает существенное влияние качество компоновки. Развитие современной авиационно-космической техники, рост требований к ней и повышение плотности компоновки заставляют конструкторов постоянно совершенствовать методы автоматизации проектирования. Даже первые опыты компьютеризации процесса проектирования при решении отдельных частных задач показали их высокую эффективность. Работы по автоматизации размещения не составляли исключения. Первые публикации по раскрою материалов методами линейного программирования относятся к 60-м годам прошлого века и связаны с именами Л.В. Канторовича и В.А. Залгаллера. Однако переход от 2D-объектов к 3D-объектам и усложнение формы размещаемых объектов от линейных полос до реальных объектов современной техники вызвали лавинообразное усложнение математического описания процесса размещения. Несмотря на то, что исследованию этого вопроса посвящены труды многих замечательных ученых,

задача далека от своего разрешения. Дополнительные сложности, связанные с решением этой задачи, заключаются в следующем:

— необходимость оперирования с геометрической информацией, представление которой в ЭВМ является отдельной и весьма непростой задачей;

— неочевидность алгоритма решения задачи оптимального размещения. Если для проектанта при решении этой проблемы достаточно интуиции, которая подсказывает, куда и что можно «подпихнуть» (а на самом деле интуиция — это сплав прошлого опыта, ассоциативного мышления и пространственного воображения), то компьютер этими замечательными человеческими качествами не обладает и поэтому нуждается в других механизмах мышления, которые должны быть переданы ему человеком посредством специального математического и программного обеспечения.

Что касается первой проблемы — представления геометрических образов в ЭВМ, то эта сложнейшая проблема с различных аспектов исследовались в трудах отечественных ученых: К.И. Валькова, Ю.И. Денискина, Г.С. Иванова, И.И. Котова,

В.Е. Михайленко, В.А. Осипова, В.С. Полозова, А.Б. Похвалинского, В.Л. Рвачева, Н.Н. Рыжова, Е.А. Стародетко, С.А. Фролова, В.И. Якунина и др., а также зарубежных — Поля де Кательджо, Роберта Фергюсона (Robert Fergusson), Стивена Кунса (Steven Coons), Пьера Безье (Pierre Bezier), Шарля Эрмитта (Charles Hermite), Исаака Шенберга (Isaac Jacob Schoenberg), Карла де Бура (Carl de Boor), Кена Версприла (Ken Versprille), Юджина Ли (Eugene Lee), Стива Гейнзберга (Steve Ginsberg) и др. В их трудах содержатся как классические, так и компьютерно-ориентированные методы задания, расчета и воспроизведения геометрических форм.

Разумеется, такое обилие методов ориентировано на описание геометрической формы разнородных технических объектов. Нам представляется наиболее рациональным для решения технических задач классификатор геометрических объектов, предложенный О.И. Семенковым—В.А. Осиповым [1], в основе которого лежит структура синтеза геометрических объектов из составляющих их элементов. Этот классификатор подразделяет все геометрические объекты (ГО) на две большие группы — геометрические объекты сложной технической формы и геометрические объекты сложной технической структуры. Объекты первой группы ограничиваются отсеками поверхностей, каждая из которых описана достаточно сложными аналитическими уравнениями или системами уравнений. К ним относятся фюзеляжи самолетов, кузова автомоби-

лей, корпуса судов, лопадки турбин и т.п. Объекты второй группы представляют собой объединенные на основе теоретико-множественных операций (объединение, пересечение, отрицание) ГО, как правило, относительно простых геометрических форм. Проведенные исходя из специфики решаемых задач исследования по геометрическим моделям компоновки показали целесообразность увеличения количества таких групп до четырех (рис. 1) [2].

Обилие геометрических форм объектов в технике, строительстве, дизайне и т.п. требует библиотеки методов геометрического моделирования, наиболее адаптированных для описания конкретных особенностей формы геометрических объектов. Поэтому, помимо классификации геометрических объектов, существуют и системы классификации методов геометрического моделирования (рис. 2).

**Скульптурные методы**, помимо дизайна, широко применяются и в технике (авиа-, судо- и автостроении), когда форма поверхности корректируется не только по эстетическим соображениям, но и на основании данных аэродинамического или гидродинамического эксперимента. Реализация этого метода основана на довольно многочисленной библиотеке методов аппроксимации поверхностей с использованием классических сплайнов, В-сплайнов, NURBS, поверхностей Кунса, Эрмита, Лагранжа, Безье и т.п. В итоге мы получаем ана-

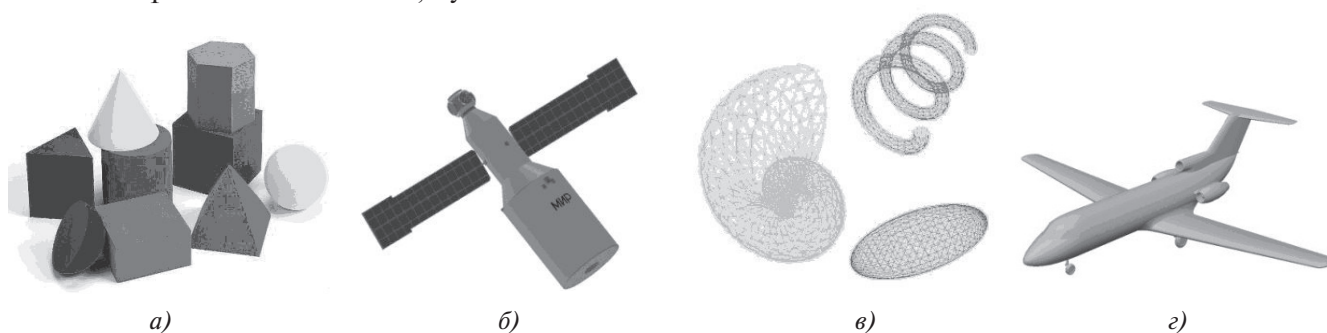


Рис. 1. Классификация геометрических объектов по уровню сложности: а — примитивы; б — объекты сложных технических структур; в — объекты сложных технических форм; г — объекты сложных технических форм и структур



Рис. 2. Классификация методов моделирования геометрических объектов

литическое выражение геометрической формы этих объектов с той или иной степенью точности.

**Методы аналитической аппроксимации** используются для описания формы объектов, состоящих из сложных поверхностей второго и более высоких порядков. Поскольку прямая вычислительная обработка поверхностей объекта столь сложной геометрической формы затруднена, он аппроксимируется участками поверхностей более низкого порядка (плоскостями, цилиндрами, сферами и т.п.) (рис. 3).

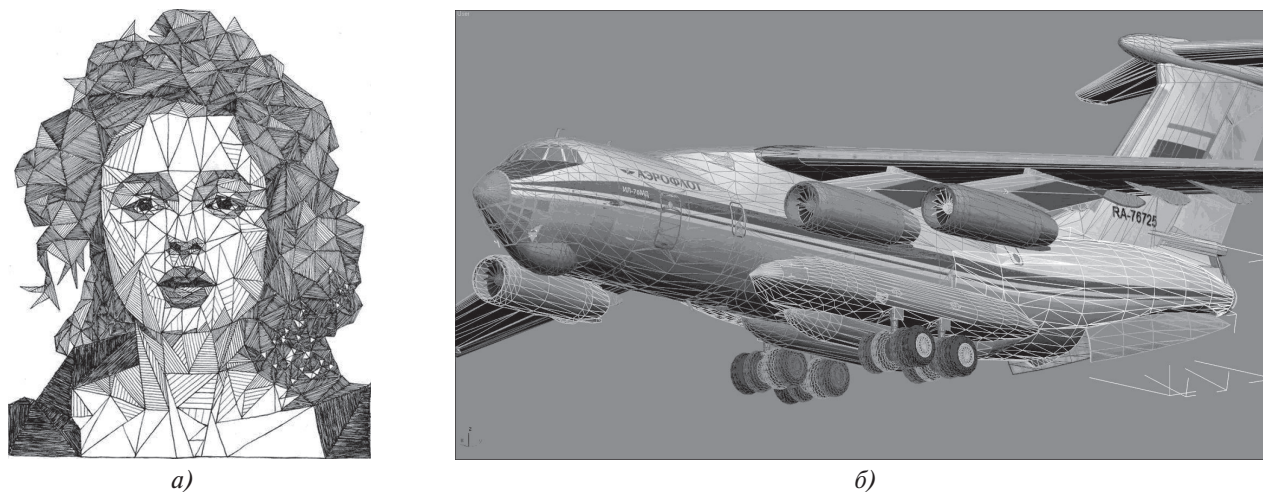


Рис. 3. Пример объектов очень сложной геометрической формы, полученной методом аналитической аппроксимации: *а* — биологического; *б* — технического

**Точные методы моделирования** трехмерных объектов представляют собой совокупность следующих известных методов, которые можно отнести к классическим методам прикладной геометрии: кинематического, параметрического, проволочно-каркасного, кусочно-аналитического, алгебро-логического (метод R-функций), метода «разложения на элементы», метода конструктивной геометрии элементарных объемов.

Именно сложность геометрической формы компоновочных объектов в авиакосмической технике стала камнем преткновения в исследованиях многих ученых при разработке «эрзац-мышления» для решения ЭВМ задач размещения. При этом обнаружилось, что методы, которые прекрасно работают в несложных с точки зрения геометрии задачах — раскрой плоских прямоугольных заготовок, разводка печатных плат, где достигаются результаты зачастую оптимальные, перестают работать в задачах с относительно сложной геометрией (например в задаче размещения оборудования в техотсеке летательного аппарата). Однако в таких задачах перестает эффективно работать и интуиция человека, но уже по другой причине — проектанту просто невозможно удержать в голове массу требований, о ко-

торых необходимо помнить в процессе компоновки при решении задач большой размерности. Здесь уже можно позавидовать ЭВМ, которая обладает свойством быстро получать количественные характеристики размещения и «ничего не забывать» в процессе работы. Кроме того, ЭВМ в процессе работы может и оптимизировать получаемый результат.

С математической точки зрения задача размещения геометрических объектов может быть сфор-

мулирована как оптимизационная задача следующего вида.

Пусть имеется  $N$  компоновочных объектов  $T_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) и область размещения  $\Omega$ . Требуется разместить эти объекты с учетом заданных ограничений в области  $\Omega$  таким образом, чтобы функция цели компоновки  $\Phi(X)$  достигала экстремума, т.е. определить

$$\text{Extr } \Phi(X) \text{ при } X \subset \Omega,$$

где  $X$  — некоторая переменная, определяющая параметры размещения.

Таким образом, математическая постановка задачи размещения включает три компонента:

- 1) выбор функции цели  $\Phi(X)$ ;
- 2) выбор переменной  $X$ ;
- 3) выбор и формализация ограничений.

Основным геометрическим условием рационального размещения объектов является условие рационального размещения в области  $\Omega$  некоторого множества компоновочных объектов  $\{T_i\}_1^n$  (где  $n$  достаточно велико) или наибольшего количества множеств объектов  $\{\{T_i\}_1^n\}_1^m$  (где  $m$  достаточно велико).

В данном случае приходится говорить о рациональном, а не об оптимальном размещении объектов, так как в силу астрономического количества вариантов компоновки (ее многовариантности) достижение глобального экстремума функции цели компоновки практически исключается [3]. Размещение компонуемых объектов может производиться при следующих условиях, накладываемых на область размещения:

- 1) область  $\Omega$  имеет заданные формы и размеры;
- 2) область  $\Omega$  имеет подвижные границы.

В практике компонования реальных технических объектов реализуется первое условие (второе условие характерно для случая рационального раскроя материала), поэтому во всех дальнейших случаях будем рассматривать область  $\Omega$  с неподвижными границами.

Очевидно, что в геометрическом плане основным критерием оптимизации размещения является оптимизация коэффициента заполнения пространства  $K_V$  (иногда его называют коэффициентом плотности компоновки):

$$K_V = \sum_{i=1}^n V_{к.о} / V_{отс},$$

где  $\sum_{i=1}^n V_{к.о}$  — сумма объемов  $n$  скомпонованных объектов;

$V_{отс}$  — объем отсека, в котором производится компоновка.

Условие максимальной плотности компоновки записывается как

$$Extr_{K_V \rightarrow 1} V(X) \text{ при } X \subset \Omega. \quad (1)$$

Выражение (1) представляет собой желание приблизить объем скомпонованных объектов к общему объему отсека, но не является самым удобным для проведения дальнейших компоновочных расчетов. Поэтому дальнейшей детализацией выражения (1), необходимой для оптимизации по  $K_V$ , является переход от минимизации по объему к минимизации по расстоянию между объектами. Оптимизация по  $K_V$  достигается максимально компактным (в идеале — плотным) размещением компонуемых объектов, фундаментальное понятие которого введено Ю.Г. Стояном и Н.И. Гилем [4]. Напомним, что компонуемые объекты  $T_1$  и  $T_2$  (в

качестве одного из них может выступать область размещения  $\Omega$ ) называются плотнорасположенными по направлению  $\rho_{1,2}$  (рис. 4), если расстояние

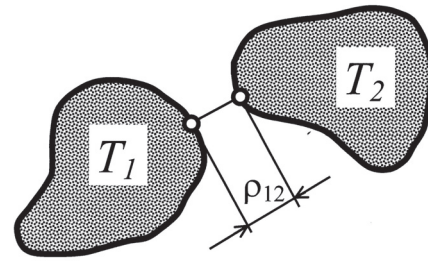


Рис. 4. Минимальное расстояние  $\rho_{1,2}$  между размещенными объектами

между ними  $\rho_{1,2}(T_1, T_2) = 0$ . Таким образом, условие компактного размещения может быть записано в виде

$$\forall T_{i,j} \left[ T_{i,j} \in \left\{ \{T\}_{I_1}^n \right\}_1^m \rightarrow \rho_{i,j}(T_i, T_j) \rightarrow \min \right],$$

т.е. расстояние между всеми компонуемыми объектами должно быть минимальным.

Было бы значительным упрощением считать, что максимальная плотность размещения является единственным критерием эффективности компоновки. В жизни все значительно сложнее [4, 5] — приходится учитывать и много других требований: заданную центровку, удобство обслуживания, взаимную совместимость объектов и т.п., но в данной статье мы ограничимся лишь чисто геометрическими требованиями к размещению.

Вторым геометрическим условием оптимизации размещения является математическая запись обеспечения условия взаимного непересечения (УВН) компонуемых объектов, которое записывается в виде

$$\forall T_{i,j} \left[ T_{i,j} \in \left\{ \{T\}_{I_1}^n \right\}_1^m \rightarrow T_i \cap T_j = \emptyset \right],$$

т.е. пересечение между собой любых компонуемых объектов образует пустое множество.

Однако, умея определять кратчайшее расстояние  $\rho_{1,2}$  между уже размещенными объектами, мы не приблизились к решению задачи их рационального размещения. Мы как бы молчаливо предполагаем, что это уже кто-то сделал за нас — но ведь это самостоятельная область исследований. Конечно, и для этого случая разработаны соответствующие



шие модели размещения, приведенные на рис. 5 (для упрощения восприятия проиллюстрирован лишь плоский вариант).

дыдущий, если хуже — забывается текущий. В любом случае мы сохраняем так называемое рекордное значение параметров компоновки (хотя на

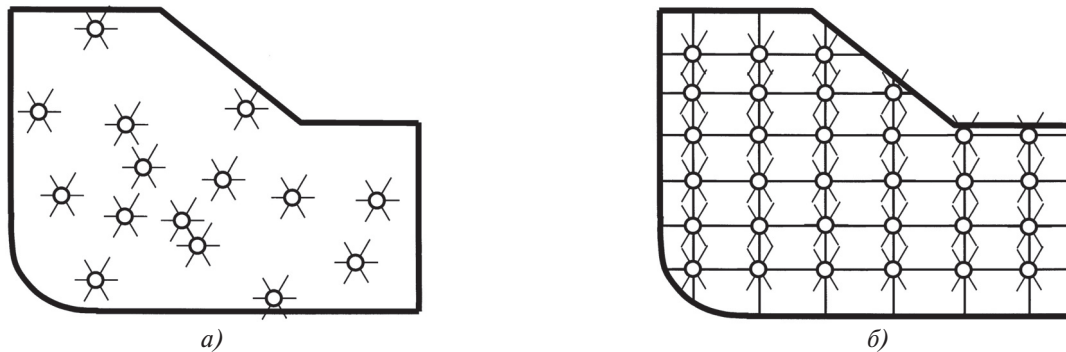


Рис. 5. Геометрические модели размещения объектов: *a* — случайным образом; *б* — по регулярной решетке

Метод размещения случайным образом, показанный на рис. 5, *a*, предусматривает хаотичное разбрасывание объектов в пределах размещаемого пространства (например с помощью генератора случайных чисел) с последующей проверкой этого варианта компоновки на УВН и по другим критериям качества компоновки. Размещение по регулярной решетке (рис. 5, *б*) предусматривает последовательное перемещение объектов по определенным фиксированным точкам и оценку качества компоновки в каждой из них. Никакое — не то что оптимальное, а даже более-менее приемлемое компоновочное — решение таким образом найдено не будет, последующая проверка на УВН тут же хоронит эти надежды. Геометрические модели УВН — это тема отдельного, очень непростого разговора с читателем. Если же с УВН все обошлось, то выбирается следующий подлежащий к размещению объект, и все начинается сначала. Необходимо очень много переборов, чтобы выйти на хотя бы какой-то не противоречащий здравому смыслу вариант размещения. Запоминаются все параметры этого размещения (расположение объектов и коэффициент эффективности), и новый вариант сравнивается с предыдущим сохраненным (если он был). Если текущий вариант окажется лучше, то забывается пре-

практике их сохраняют несколько — например, три самых лучших).

К решению этой непростой проблемы приблизились представители харьковской научной школы Ю.Г. Стоян и Н.И. Гиль, построив годограф функции плотного размещения (ГФПР) [6]. Геометрическая интерпретация этого метода показана на рис. 6, *a*. ГФПР — это траектория движения размещаемого объекта, в каждой точке которой он остается плотноразмещенным относительно области запрета. Фиксация размещаемого объекта в любой точке, по определению, обеспечивает выполнение УВН и является допустимой. Возникает вопрос — а в какой же конкретной точке ГФПР нам следует остановиться, если все они одинаково допустимы? Здесь нам необходимо принять какое-нибудь дополнительное решающее правило — например, что точкой фиксации должна быть точка траектории с минимальным значением координат  $x$  и  $y$  (рис. 6, *б*).

Размещенный таким образом объект сам становится областью запрета, и для следующего подлежащего размещению объекта (2 на рис. 6, *б*) строится свой годограф с учетом уже размещенного объекта 1. И так до тех пор, пока мы не разместим

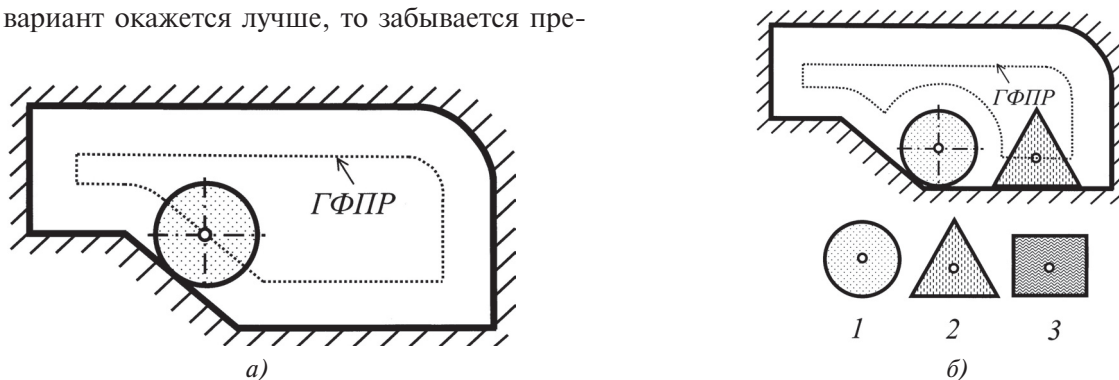


Рис. 6. Размещение объекта с использованием годографа функции плотного размещения (ГФПР): *a* — размещение первого объекта; *б* — размещение последующих объектов

все объекты. Казалось бы, таким образом, мы решили все наши проблемы и с местом размещения объекта, и с УВН с областями запрета и другими объектами. Но не все так просто:

- построение ГФПР для сложных пространственных объектов (фактической их пространственной эквидистанты) иногда является неразрешимой геометрической задачей;

- остается нерешенным вопрос о выборе точки размещения объекта в пределах ГФПР по другим критериям компоновки (например центровке);

- большой проблемой является выбор последовательности объектов, подлежащих размещению. На языке геометрии это называется «метризация пространства перестановок». Понятно, что для  $N$  размещаемых объектов необходимо построить  $N!$  (факториал) очень непростых функций возможных траекторий.

Таким образом, и здесь не удалось уйти от перебора, а метод ГФПР, эффективно работающих в задачах плоского раскроя, оказывается «лекарством хуже болезни» для сложных пространственных компоновок. И это притом, что при обсуждении этого метода мы тактично умолчали о возможном угле поворота  $\varphi$  объекта вокруг своей оси в процессе размещения, что резко увеличит как сложность построения ГФПР, так и количество возможных переборов.

Именно по этим причинам задача автоматизации размещения, по-видимому, не имеет однозначного алгоритма решения, эффективного во всех случаях и на все времена. Поэтому в известных методах решения задач размещения отсутствие интуиции у ЭВМ подменяется «крутым перебором». К глубокому сожалению, такой «перебор переборов» оказывается не под силу даже современным ЭВМ, вычислительные возможности которых кажутся неисчерпаемыми. И еще один вопрос, который представляется нам принципиальным — о степени автоматизации решения задач размещения на ЭВМ. Различают *автоматические* методы компоновки, при которых мы получаем на выходе уже готовое, сгенерированное ЭВМ компоновочное решение, и *автоматизированные* методы, которые не только не исключают, но, наоборот, подразумевают активное включение проектанта в процесс получения решения. Нам представляется, что в обозримом будущем не удастся отдать решение этой сложной задачи полностью на откуп ЭВМ и разрабатываемые идеи и методы должны предусматривать для проектанта возможность влиять на получаемый результат, отсекая заведомо неработоспособные и неэффективные варианты.

На современном этапе развития техники именно так и происходит. Проектант по своему разумению интерактивно размещает объекты в какой-либо САПРовской системе и просит ее определить, имеется ли пересечение размещенных объектов. Такой расчет происходит внутри системы, его иллюстрация схематично представлена на рис. 7. Система разбивает поверхность объекта на отдельные элементарные отсеки плоскости (фасеты) и по известным из аналитической геометрии формулам проверяет их пересечение или взаимное расстояние друг от друга. Понятно, что без переборных алгоритмов не обошлось и здесь, но каждая фирма-разработчик САПРовских систем имеет свое ноу-хау — фирменные алгоритмы, оптимизирующие этот процесс. Большим преимуществом этого метода является и то, что многие стандартные операции удалось перевести на аппаратный уровень и отдать на исполнение графическому акселератору компьютера (а современный графический акселератор — это более миллиарда транзисторов!!!).

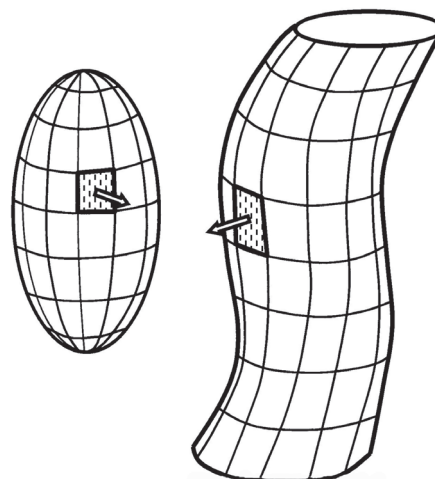


Рис. 7. Иллюстрация метода определения УВН в современных САПРовских системах

Итогом всего сказанного является то, что современная компьютерная графика решила проблему описания, инженерного анализа и визуализации геометрических объектов практически любой сложности — желающие убедиться в этом могут посмотреть на современные компьютерные игры. Но пока не удалось решить проблему такого геометрического описания объектов, которое обладало бы свойством «компоуемости», т.е. решало бы проблему их рационального размещения в пространстве по заданным критериям и определение УВН.

Поэтому нам кажется чрезвычайно актуальной разработка идей и методов, позволяющих если не совсем избежать, то хотя бы свести к минимуму

«дурной» перебор вариантов размещения. Далее будет описан один из таких перспективных подходов, являющийся нашей оригинальной разработкой.

В основе методологического аппарата, позволяющего автоматизировать процесс компонования объектов сложной геометрической формы, нам представляется целесообразным использование аппарата нормальных уравнений, понятие которого было введено академиком В.Л. Рвачевым [7]. Согласно данному им определению, нормальное уравнение геометрического объекта  $F$  (в терминах В.Л. Рвачева — «чертежа») представляет собой частный случай бесчисленного множества  $R$ -функций этого объекта в пространстве  $\mathfrak{R}^n$  (где  $n$  — размерность геометрического объекта), определяемый уравнением

$$\omega = \rho(A, L) = \inf_{N \in F} \|A - N\| = \inf_{N(x_N, y_N, z_N) \in F} \sqrt{(x_A - x_N)^2 + (y_A - y_N)^2 + (z_A - z_N)^2},$$

единственным для всякого геометрического объекта (чертежа). Термин «нормальное уравнение» выбран по аналогии с известным из аналитической геометрии термином «нормальное уравнение прямой» с ключевым словом «нормаль», так как именно по нормали определяется кратчайшее расстояние от точки к прямой.

Использование понятийного аппарата нормальных уравнений и раскрытие их геометрического смысла позволяет создать методологическую основу для геометрического моделирования компоновочных задач. Геометрический смысл нормального уравнения представлен на рис. 8.

Пусть в пространстве имеется произвольно расположенная поверхность, ограничивающая объект  $F$  и описываемая уравнением  $F(x, y, z) = 0$ . Предположим, что этой поверхности можно определенным образом поставить в соответствие некоторое уравнение  $f(x, y, z) = 0$ , являющееся нормальным урав-

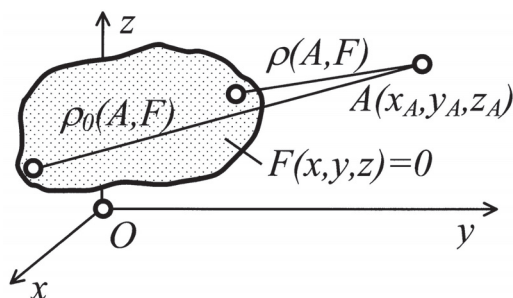


Рис. 8. Геометрическая интерпретация нормального уравнения пространственного объекта  $F$

нением этого объекта. Если в пространстве имеется некоторая точка  $A(x_A, y_A, z_A)$ , то кратчайшее расстояние в пространстве от точки  $A$  до объекта  $F$  в соответствии с определением нормального уравнения объекта будет определяться равенством  $\rho(A, F) = f(x_A, y_A, z_A)$ .

Таким образом, значение нормальной функции в некоторой точке пространства  $A$  равно минимальному расстоянию от этой точки  $A$  до объекта  $F$ , т.е. для определения кратчайшего расстояния от точки до объекта нам достаточно поставить координаты этой точки вместо соответствующих переменных в нормальном уравнении объекта.

Академиком В.Л. Рвачевым также введено понятие верхней нормальной функции

$$\rho(A, F) = \sup_{N \in F} \|A - N\|,$$

геометрический смысл которой в возможности определения расстояния от точки  $A$  до наиболее удаленной от нее точки объекта  $F$  (рис. 8).

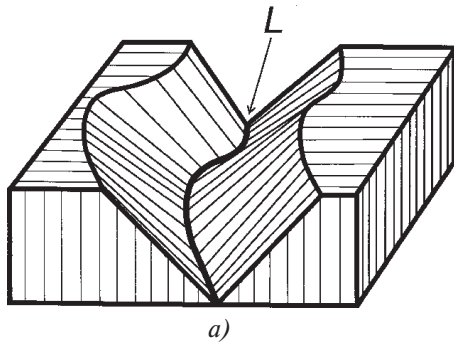
Использование аппарата нормальных уравнений в задачах автоматизированной компоновки чрезвычайно интересно — такой объект как бы сам определяет расстояние и направление до интересующей нас точки. Эти возможности можно сравнить с появлением у заблудившегося в лесу грибника GPS-навигатора, в любой точке леса показывающего направление и расстояние до точки выхода из леса.

Однако возникает вопрос — а откуда возьмутся у нас эти нормальные уравнения. Говоря о проблеме построения нормальных уравнений компоновочных объектов, необходимо отметить, что В.Л. Рвачевым в работах [7, 8] предложен метод построения нормального уравнения плоского объекта, который с заданной точностью аппроксимируется конечным числом дуг окружностей и отрезков прямых, для чего выводится нормальное уравнение отрезка и дуги окружности на плоскости, а также нормальное уравнение отрезка в гиперпространстве  $\mathfrak{R}^n$ . Кроме того, приводится методика построения уравнений (в том числе и нормальных) плоских фигур, ограниченных прямыми или дугами окружностей. Общая методология построения таких уравнений состоит в построении предикатных уравнений таких фигур с последующей заменой функций трехзначной логики  $X_1 \wedge X_2$  и  $X_1 \vee X_2$  символами  $R$ -операций. Если полученное при этом выражение  $\omega(x)$  приравнять к нулю, то уравнение  $\omega(x) = 0$  опишет границы рассматриваемого многоугольника, а неравенства  $\omega(x) > 0$  и  $\omega(x) < 0$  опре-

делят соответственно внутренность и внешность данной плоской фигуры.

Однако прямое использование разработанных В.Л. Рвачевым методов построения нормальных уравнений пространственных геометрических объектов чрезвычайно затруднено для практического использования из-за необходимости ручного построения алгебрологических моделей объектов и значительного объема вычислений.

Представляется чрезвычайно актуальной задача построения нормальных уравнений объектов в автоматизированном режиме, что позволит проектировщику работать с привычными для него конструктивами (параллелепипедами, сферами, цилиндрами, конусами и т.п.). Такие конструктивы легко узнаваемы в конструкторской документации, из которой однозначно выявляются их размеры, взаимное расположение и логика вхождения друг в друга.



этой плоскости  $z = 0$  по этой кривой), то часть песка через этот пропил высыплется, образовав овраг, крутизна склонов которого будет  $45^\circ$  по отношению к плоскости  $z = 0$ . Поверхность этого оврага и будет графиком нормальной функции кривой  $L$ . Метрические соотношения, определяющие использование нормальной функции  $z = N(x, y)$ , показаны на рис. 9, б. Так, кратчайшее расстояние  $\rho(A, M)$  от точки  $A$  до кривой  $L$  в точке  $M$  определится как значение нормальной функции  $z = \omega(x, y)$  в этой точке  $A$ , причем  $z_N = \rho(A, M)$ . Такая геометрическая интерпретация позволила нам значительно упростить построение нормальных уравнений плоских и пространственных примитивов.

Геометрическая интерпретация нормальной функции некоторых элементарных геометрических объектов (примитивов) дает аппарат для построе-

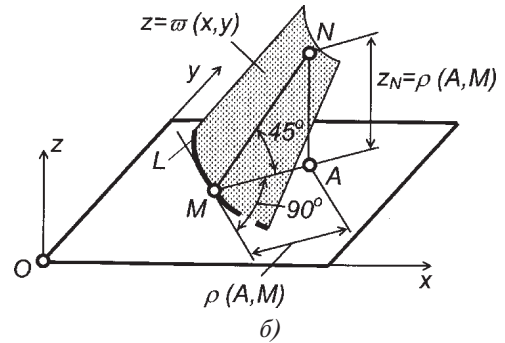


Рис. 9. Геометрическая интерпретация нормального уравнения объекта: а — нормальная функция плоской кривой  $L$ ; б — метрические соотношения для нормальной функции плоской кривой  $L$

Универсальные методы построения нормальных уравнений, к сожалению, отсутствуют, известны лишь частные случаи построения нормальных уравнений для геометрических объектов весьма ограниченного класса.

Для построения нормальных уравнений плоских и пространственных геометрических примитивов нами принят подход, основанный на геометрической интерпретации нормального уравнения объекта. Поскольку график нормальной функции любого объекта имеет размерность  $n+1$ , где  $n$  — размерность самого объекта, графически возможно изобразить нормальную функцию только плоского объекта. Так, график нормальной функции некоторой плоской кривой  $L$  представлен на рис. 9, а. Его можно интерпретировать физически как поверхность, образованную следующим образом. Если на координатную плоскость  $z = 0$  насыпать слой песка и удалить из этой плоскости все точки, принадлежащие плоской кривой  $L$  (т.е. сделать «пропил»

нормальных уравнений этих объектов. Как уже отмечалось, универсальные методы построения нормальных уравнений объектов отсутствуют, но, учитывая, что нормальная функция плоских объектов трехмерна и, следовательно, доступна для зрительного восприятия, можно на основании чертежа этой функции подобрать все ее составляющие, которые можно связать посредством R-операций. Однако нам представляется целесообразным использование R-операций такого вида, которые могут быть при построении нормальных уравнений реализованы R-дизъюнкциями и R-конъюнкциями, выбранными соответственно по формуле «max - min» [ 6 ], т.е.

$$a_{\vee} b = \frac{1}{2} [a + b + |a - b|] = \max(a, b);$$

$$a_{\wedge} b = \frac{1}{2} [a + b - |a - b|] = \min(a, b),$$

что значительно упрощает программную реализацию выведенных нормальных уравнений объектов



обращением к стандартному математическому обеспечению ЭВМ.

Нормальные уравнения плоских примитивов формируются по следующей схеме:

1) на основании некоторых эмпирических представлений о графике функции  $z = f(x, y)$  строится функция  $f(x, y)$ ;

2) плоскость  $\mathcal{R}^2$  разбивается на «области однородности» функции  $f(x, y)$ ;

3) в каждой из областей однородности доказывается «нормальность» функции  $f(x, y)$  методом линий равного уровня.

Такой прием (предварительной геометрической интерпретации нормальной функции примитива) позволяет строить нормальные уравнения и более сложных примитивов. Так, приведенная на рис. 10 достаточно очевидная нормальная функция плоского прямоугольника с вершинами в точках 1 ( $a, c$ ); 2 ( $b, c$ ); 3 ( $b, d$ ) и 4 ( $a, d$ ) позволяет нам построить нормальное уравнение прямоугольника в виде

$$\sqrt{[\max(x, a) - \min(x, b)]^2 + [\max(y, c) - \min(y, d)]^2}.$$

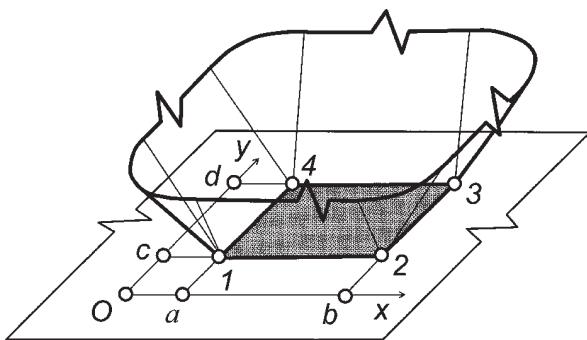


Рис. 10. Нормальная функция плоского прямоугольника

Таким образом, нами были построены нормальные уравнения плоских примитивов. Заметим, что несколько непривычная в их уравнениях символика  $\min^2(a)$  расшифровывается как  $\min^2(a) = [\min(a)]^2$ .

Сразу оговоримся, что автор не претендует на авторство таких хрестоматийных нормальных уравнений объектов, как «прямая» или «окружность». Включение этих уравнений в перечень плоских примитивов было стремлением автора показать, что использованные приемы построения нормальных уравнений объектов позволяют достичь известных, заведомо правильных результатов.

Построение нормальных уравнений пространственных объектов связано с дополнительными сложностями. Прежде всего необходимо отметить, что нормальные уравнения плоских примитивов представляют собой нормальные уравнения бесконечных цилиндров, направляющие которых параллельны оси  $Oz$ , а образующие представляют собой плоские примитивы, описанные этими уравнениями (рис. 11).

Другим приемом построения нормальных уравнений пространственных объектов является использование операции «вращение», что позволяет на основании уравнений плоских примитивов формировать нормальные уравнения тел вращения. Если при этом плоский примитив имеет нормальное уравнение  $f(x, y) = 0$ , то при его вращении вокруг оси  $Oy$  нормальное уравнение тела вращения  $F(x, y, z)$  будет иметь вид

$$F(x, y, z) \equiv f(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0,$$

а при вращении образующей относительно оси  $Ox$

$$F(x, y, z) \equiv f(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0.$$

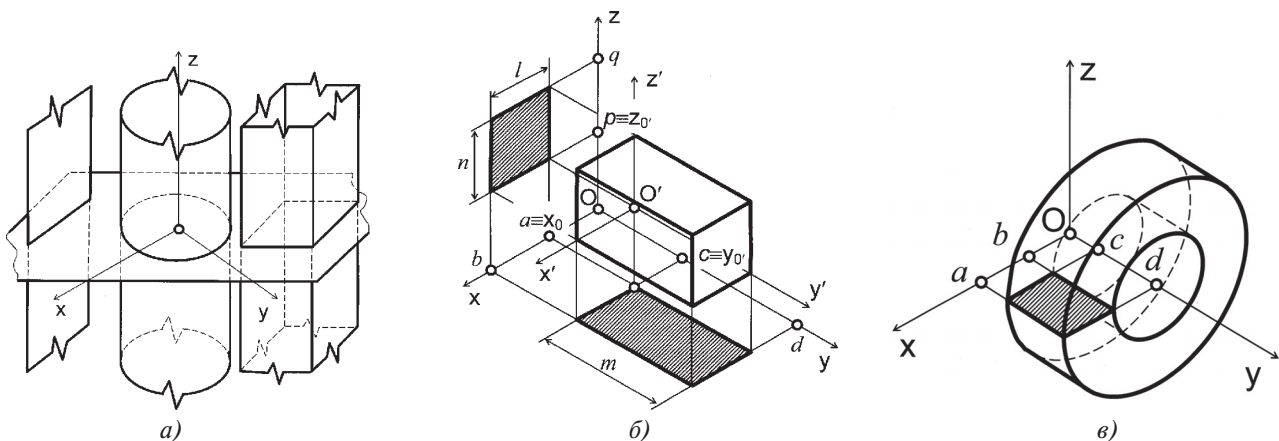


Рис. 11. Приемы построения нормальных уравнений пространственных объектов: а — как бесконечного цилиндра; б — вращением плоского примитива; в — методом аналогии

Примером построения нормального уравнения тела вращения является вывод нормального уравнения объекта типа «шайба» (рис. 11,б), исходным для построения которого является нормальное уравнение прямоугольника, подвергнутого вращению относительно оси  $Oy$ . При этом нормальное уравнение «шайбы» будет иметь вид

$$\left\{ \left[ \max(a, \sqrt{x^2 + z^2}) - \min(b, \sqrt{x^2 + z^2}) \right]^2 + [\max(y, c) - \min(y, d)]^2 \right\}^{1/2} = 0.$$

Следующим приемом, используемым для построения некоторых нормальных уравнений (например прямоугольного параллелепипеда), является метод «анalogии», в соответствии с которым увеличение размерности нормальной функции объекта не должно ничего менять в самой структуре этой нормальной функции. Именно таким образом мы осуществили «переход» от нормального уравнения прямоугольника к нормальному уравнению прямоугольного параллелепипеда (рис. 11,в), которое будет иметь вид

$$\left\{ [\max(a, x) - \min(b, x)]^2 + [\max(y, c) - \min(y, d)]^2 + [\max(q, z) - \min(q, z)]^2 \right\}^{1/2} = 0.$$

Разумеется, как и в случае плоских примитивов, автор не претендует на авторство нормальных уравнений таких классических объектов, как плоскость или сфера.

Эти нормальные уравнения являются теми кирпичиками, из которых могут быть сформированы нормальные уравнения гораздо более сложных (с геометрической точки зрения) пространственных объектов.

## Выводы

1. Автоматизированная компоновка изделий авиационной техники, имеющей сложные формы, направленная на получение компактных сборок, в настоящее время является нерешенной задачей.

2. Использование аппарата нормальных уравнений компоновочных объектов позволяет перейти от переборных алгоритмов автоматизированного размещения к интеллектуальным.

3. Предложены методы формирования нормальных уравнений достаточно широкого набора плоских и пространственных примитивов.

## Библиографический список

1. Семенков О.И. Автоматизация проектно-конструкторских работ и технологической подготовки производства в машиностроении. Т. 1. — Минск: Высшая школа, 1976. — 352 с.
2. Аведьян А.Б., Бибиков С.Ю., Маркин Л.В. и др. Компоновка самолетов /Под ред. М.Ю.Куприкова. — М.: Изд-во МАИ, 2012. — 296 с.
3. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. — Киев: Наукова думка, 1986. — 268 с.
4. Ситу Л., Хтун Н.Н., Маркин Л.В. Рецепторные геометрические модели в задачах автоматизированной компоновки технического отсека легкого самолета // Электронный журнал «Труды МАИ». 2011. №47. URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=26825>
5. Ньн Н.Х., Маркин Л.В., Соседко А.А. Применение рецепторных геометрических моделей в задачах автоматизированной компоновки авиационной техники // Электронный журнал «Труды МАИ». 2014. №72. URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=47438>
6. Стоян Ю.Г., Гиль Н.И. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. — Киев: Наукова думка, 1976. — 249 с.
7. Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. — Киев: Техника, 1967. — 213 с.
8. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. — Киев: Наукова думка, 1982. — 552 с.

## GEOMETRIC MODELS OF AUTOMATED LAYOUT AIRCRAFTS

Markin L.V.

Moscow Aviation Institute (National Research University),  
MAI, 4, Volokolamskoe shosse, Moscow, A-80, GSP-3, 125993, Russia  
e-mail: markinl@list.ru

## Abstract

The article reviews a problem of layout design automation for aerospace engineering. It is shown that the complexity of this process is stipulated by the difficulty of information representation concerning geometric shape of an object being arranged in the computer.

The article presents the main types of geometric models describing the shape of objects being arranged, their classification and application areas. We describe an automated layout problem as a problem of placement of a certain group of objects of specified sizes and shapes within a confined space. The task of automated layout is formulated as mathematical programming optimization problem of for maximum allocation tightness of objects being arranged. We present optimization criterion of this process that is space factor of a space being arranged by objects allocated inside it, as well as limitations of this optimization problem.

The article also describes well-known methods of automated layout. Powered by article analysis shows that they are implemented only for objects of simple geometric shapes - primitives. Proposed a method for automated layout, based on mathematical formalism of normal equations. The concept of objects normal equations was introduced by V.L. Rvachev. This article describes the original methods of normal equations building for both flat and tridimensional objects. It is shown that application of normal equations of objects being arranged allows you to create intelligent layout algorithms, reducing in terms of geometry the position problem of allocation of objects being arranged to the metric one. The paper shows additional options of objects normal equations for automated layout problems, such as equidistant object building. We display the problems that should be solved for a wide use of normal equations apparatus in automated layout practice.

**Keywords:** computer-aided design, automated layout, geometric models, optimization, and tight allocation, normal equations.

## References

1. Semenov O.I. *Avtomatizatsiya proektno-konstruktorskikh rabot i tekhnologicheskoi podgotovki proizvodstva v mashinostroenii* (Research and Development Work Automation and Technological Preparation of Production in Mechanical Engineering), Minsk, Vysshaya shkola, 1976, vol. 1, 352 p.
2. Aved'yan A.B., Bibikov S.Yu., Markin L.V. *Komponovka samoletov* (Planes layout), Moscow, MAI, 2012, 296 p.
3. Stoyan Yu.G., Yakovlev S.V. *Matematicheskie modeli i optimizatsionnye metody geometricheskogo proektirovaniya* (Mathematical models and optimization methods for geometric design), Kiev, Naukova dumka, 1986, 268 p.
4. Sithu L., Htun N.N., Markin L.V. *Elektronnyi zhurnal «Trudy MAI»*, 2011, no. 47, available at: <http://www.mai.ru/science/trudy/eng/published.php?ID=26825> (accessed 20.10.2011).
5. Nyi N.H., Markin L. V., Sosedko A. A. *Elektronnyi zhurnal «Trudy MAI»*, 2014, no. 72, available at: <http://www.mai.ru/science/trudy/eng/published.php?ID=47438> (accessed 27.01.2014).
6. Stoyan Yu.G., Gil' N.I. *Metody i algoritmy razmeshcheniya ploskikh geometricheskikh ob'ektov* (Methods and algorithms for the placement of flat geometric objects), Kiev, Naukova dumka, 1976, 249 p.
7. Rvachev V.L. *Geometricheskie prilozheniya algebry logiki* (Geometric applications of Boolean algebra), Kiev, Tekhnika, 1967, 213 p.
8. Rvachev V.L. *Teoriya R-funktsii i nekotorye ee prilozheniya* (The R-functions theory and some of its applications), Kiev, Naukova dumka, 1982, 552 p.