

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

На правах рукописи



Богданов Илья Олегович

**ДВУХМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ
ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ В ПОРИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ СТРУКТУРАХ**

Специальность: 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор
Димитриенко Ю.И.

Москва, 2018 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
ВВЕДЕНИЕ.....	6
ГЛАВА 1. ДВУХМАСШТАБНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ В ПОРИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ	17
1.1 Математическая постановка задачи о движении несмешивающихся газа и слабосжимаемой жидкости в пористой среде	17
1.1.1 Геометрическая модель расчетной области и общие допущения.....	17
1.1.2 Общая постановка задачи.....	21
1.1.2.1 Система законов сохранения механики сплошной среды	21
1.1.2.2 Определяющие соотношения и уравнения состояния для газовой и жидкой фаз.....	22
1.1.2.3 Граничные и начальные условия.....	23
1.1.3 Система уравнений Навье-Стокса в безразмерной форме.....	25
1.1.4 Общая постановка задачи фильтрации в случае обобщенной модели слабосжимаемой жидкости	27
1.2 Применение метода асимптотического осреднения для постановки задач на ячейке периодичности	29
1.2.1 Общие положения метода асимптотического осреднения	29
1.2.2 Постановка локальных задач фильтрации газа и слабосжимаемой жидкости на ячейке периодичности.....	31
1.2.2.1 Постановка локальных задач на ячейке периодичности в случае фильтрации газов и классической модели слабосжимаемой жидкости.....	31
1.2.2.1.1 Асимптотические разложения	31
1.2.2.1.2 Локальные уравнения неразрывности и движения	31
1.2.2.1.3 Локальные уравнения состояния.....	33

1.2.2.1.4 Локальные граничные условия	34
1.2.2.1.5 Осреднение параметров.....	34
1.2.2.1.6 Общая постановка локальных задач на ячейке периодичности	35
1.2.2.2 Постановка локальных задач на ячейке периодичности в случае обобщенной модели слабосжимаемой жидкости	37
1.2.2.2.1 Асимптотические разложения в задаче фильтрации слабосжимаемой жидкости	37
1.2.2.2.2 Локальные уравнения неразрывности и движения	38
1.2.2.2.3 Локальные уравнения состояния.....	41
1.2.2.2.4 Локальные граничные условия.....	42
1.2.2.2.5 Осреднение параметров.....	42
1.2.2.2.6 Общая постановка локальных задач на ячейке периодичности	43
1.2.2.3 Постановка локальной задачи на ячейке периодичности с учетом трехмерной структуры пор.....	47
1.2.2.4 Физическая интерпретация локальной задачи	48
1.2.2.5 Сведение локальной задачи к задаче на 1/8 ячейки периодичности	48
1.2.3 Постановка глобальных задач фильтрации	51
1.2.3.1 Закон фильтрации Дарси	51
1.2.3.2 Постановка глобальной задачи фильтрации газа	52
1.2.3.2.1 Осредненное уравнение неразрывности.....	52
1.2.3.2.2 Нелинейное уравнение неустановившейся фильтрации газа в недеформируемой пористой среде	53
1.2.3.3 Постановка глобальной задачи фильтрации классической слабосжимаемой жидкости	54
1.2.3.4 Постановка глобальной задачи фильтрации обобщенной слабосжимаемой жидкости	55

1.2.3.5	Граничные и начальные условия в глобальной задаче	57
1.2.3.6	Уравнение движения поверхности раздела фаз.....	58
1.2.3.7	Метод введения динамических независимых координат в задаче фильтрации газа и слабосжимаемой жидкости.....	59
1.2.3.8	Общая постановка глобальной задачи фильтрации газа и слабосжимаемой жидкости в случае плоскопараллельного движения границы раздела фаз	64
1.3	Выводы по первой главе.....	67
ГЛАВА 2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛОКАЛЬНОЙ И ГЛОБАЛЬНОЙ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ.....		68
2.1	Численный метод решения локальной задачи	68
2.1.1	Вариационная формулировка локальной задачи	68
2.1.2	Метод конечных элементов для решения вариационной задачи.....	71
2.1.3	Численный метод определения характеристик пористой среды	74
2.2	Численный метод решения глобальной задачи.....	75
2.2.1	Вариационная формулировка глобальной задачи	75
2.2.2	Вариационная постановка задачи неустановившейся фильтрации в приращениях.....	77
2.2.3	Метод конечных элементов для решения глобальной задачи.....	78
2.2.4	Численный метод решения уравнения для определения положения границы раздела фаз	83
2.2.5	Общий алгоритм решения глобальной задачи фильтрации	84
2.3	Численный метод решения несимметричных глобальных СЛАУ.....	85
2.4	Выводы по второй главе.....	88
ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ.....		89

3.1 Разработка программного комплекса для двухмасштабного моделирования процессов фильтрации в пористых средах	89
3.1.1 Блок-схема программного комплекса и принципы работы с ним	89
3.1.2 Тестирование программного комплекса.....	92
3.2 Численное моделирование локальных процессов фильтрации.....	95
3.2.1 Численное моделирование локальных процессов фильтрации в трехканальной пористой структуре.....	95
3.2.2 Численное моделирование локальных процессов фильтрации в одноканальной пористой структуре.....	100
3.2.3 Численное моделирование локальных процессов фильтрации в тканевой структуре	106
3.2.4 Результаты расчета характеристик пористой среды	110
3.3 Численное моделирование процесса вытеснения газа из пористой среды слабосжимаемой жидкостью.....	111
3.3.1 Свойства фаз и характеристики пористой среды	111
3.3.2 Моделирование макроскопического процесса фильтрации на основе классической модели слабосжимаемой жидкости.....	112
3.3.3 Моделирование макроскопического процесса фильтрации на основе обобщенной модели слабосжимаемой жидкости	112
3.4 Выводы по третьей главе.....	117
ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ.....	119
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	121

ВВЕДЕНИЕ

Теория фильтрации – раздел гидромеханики, посвященный изучению движения жидкостей и газов через пористые среды. Под пористой средой в общем случае понимается твердое тело, содержащее систему сложным образом организованных пустот (пор), соединенных каналами. Основным свойством подобных систем является способность пропускать через себя жидкость и газ под воздействием внешних сил.

Основное внимание в данной работе сосредоточено на применении теории фильтрации для моделирования процессов производства композиционных материалов на базе методов LCM (Liquid Composite Molding), основанных на пропитке сухого наполнителя жидким связующим. Однако полученные в диссертации модели подходят для исследования процессов фильтрации в различных прикладных областях в рамках введенных в работе допущений.

Среди множества технологий изготовления композитов в последнее время все большее распространение получает метод пропитки армирующего наполнителя связующим в оснастке. Существует большое количество методов, основанных на данном подходе, но большая их часть являются вариациями метода RTM (Resin Transfer Moulding, метод инъекции смолы в закрытую форму) [94, 103].

Суть данной технологии состоит в следующем [19–21, 57]. В рамках RTM-процесса используется жесткая оснастка, состоящая из двух частей: матрицы и пуансона. Первоначально на матрицу выкладывается сухой раскроенный стекломатериал, в роли которого может выступать стеклоткань, стекломат или иной вид армирующего материала. Материал прижимается пуансоном к матрице, после чего под необходимым давлением в оснастку подается смола. В RTM могут использоваться различные типы смол: эпоксидные, полиэфирные, винилоэфирные. Инъекция продолжается до полной пропитки наполнителя, после чего ламинат застывает при нормальной или повышенной температуре.

Изделия, произведенные с использованием данной технологии, обладают высоким качеством и хорошими характеристиками. Полученный ламинат имеет низкое содержание воздушных включений, высокую долю наполнителя в пластике, ровную и гладкую поверхность. К преимуществам метода RTM также следует отнести низкую трудоемкость процесса изготовления, поскольку один рабочий может контролировать несколько инжекторных аппаратов.

Тем не менее, указанная технология имеет и недостатки. К ним можно отнести в первую очередь дорогостоящее оборудование, необходимость затрат на изготовление двухсторонней оснастки, а также подготовку квалифицированного персонала. При этом качество изделия, полученного в результате применения RTM-процесса, в значительной степени зависит от параметров технологии изготовления: характеристик оснастки и наполнителя, свойств связующего, давления пропитки, размеров изделия и т.д. При определенных значениях технологических параметров возможно образование застойных воздушных зон, приводящих к неполной пропитке или обеднению связующего в композитной конструкции. Принимая во внимание значительные финансовые затраты, с которыми связана рассматриваемая технология, чрезвычайно важной является задача адекватного моделирования течения жидкого связующего в пористых композитных структурах, имеющих сложную пространственную геометрическую форму, одновременно с движением газа (воздуха), вытесняемого жидкостью. Это подтверждается большим количеством публикаций, как в отечественной, так и зарубежной литературе, посвященных моделированию фильтрации, применительно к технологии RTM. Различные подходы к исследованию процесса движения связующего в наполнителе рассмотрены в публикациях Bechet E. [76], Di Fratta C. [82–84], Francucci G. [88], Gantois R. [89], Han K. [90], Klunker F. [93], Laurenzi S. [96], Li J. [97], Lim S.T. [98], Loudad R. [99] и других исследователей [100–102, 105–107, 111–113]. Влияние капиллярных эффектов на процесс движения смолы проанализировано в работе [114]. Вопросы численного моделирования формирования пустот в процессе пропитки рассмотрены в статье [77].

В подавляющем большинстве работ исследование процессов течения жидкостей в пористых структурах изучается в рамках феноменологической теории фильтрации, в основе которой лежит закон Дарси и его модификации. Здесь в первую очередь следует отметить работы Л.С. Лейбензона [49], М. Маскета [52], А.Э. Шейдеггера [71], И.А. Чарного [73], Г.И. Баренблатта [5], П.Я. Полубариновой-Кочиной [56] и др. Среди современных работ в области пористых систем можно выделить также [79–81, 86]. Вопросы двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей в пористой среде освещены во многих публикациях, среди которых [22, 43, 65]. Определение компонент тензора коэффициентов проницаемости на основе численного моделирования рассматривается в статье [2]. Исследование движения устойчивой границы раздела жидкостей при двухфазной фильтрации в пористых средах проводится в работе [13]. Описание течений слабосжимаемой жидкости в пористых средах при нелинейном законе фильтрации приводится в работе [50]. Моделирование фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей различной плотности, разделенных свободной границей в поро-упругом пространстве рассматривается в статье [15]. Применение закона Бринкмана для описания фильтрации вязкой жидкости через пористую среду приведено в работе [10]. Обоснование адсорбционных методов определения геометрических характеристик пористых тел подробно рассматривается в книге С. Грега [17].

Тем не менее, классические феноменологические подходы чаще всего основываются либо на экспериментальном определении коэффициентов проницаемости пористой среды, входящих в закон Дарси, либо на использовании различных эмпирических и приближенных соотношений для описания локального движения сред [49]. В этом случае получаются довольно грубые оценки реальных процессов, происходящих внутри пор со сложной геометрией, что приводит к большим отклонениям при определении проницаемости. В связи с этим важной частью исследования фильтрации является анализ локальных процессов пространственного течения жидкости в отдельно взятой поре с

помощью решения уравнений Навье-Стокса и вывод осредненных уравнений фильтрации «из первых принципов», а не на основе феноменологических теорий.

Такой подход к моделированию течений жидкостей в пористых структурах получил название *двухмасштабного моделирования*, под которым понимается совместное исследование течения жидких и газовых фаз в отдельных порах и в пористой среде в целом. Задачи первого рода называются *локальными*, задачи второго рода – *глобальными* (макроскопическими). Различные подходы многомасштабного моделирования движения связующего применительно к RTM-процессу освещены в работах [78, 87, 92, 95, 108–110]. Однако математическое обоснование взаимосвязи локальных и глобальных задач в этих работах не рассматривается.

Отметим, что движение жидкой и газовой фаз в пористой среде в общем случае описывается системой уравнений Навье-Стокса, в которой искомые функции имеют сложную область определения, представляющую собой поровое пространство со сложной внутренней геометрией. Решение задачи фильтрации в таком виде либо сильно осложнено, либо вовсе не представляется возможным. По этой причине математическое обоснование двухмасштабного моделирования процесса фильтрации жидкостей и газов в пористой системе обычно производится с помощью теорий осреднения [91]. Существуют различные методы осреднения: пространственное (Р.И. Нигматулин [53]), временное (С.Г. Телетов [66, 67]), пространственно-временное (Ф.И. Франкль [68, 69]) и пр. Однако многие пористые среды, в частности, наполнители в композиционных материалах, характеризуются тем, что в них всегда можно выделить повторяющуюся область, называемую ячейкой периодичности. В этом случае целесообразно применять метод асимптотического осреднения (МАО), предложенный Н.С. Бахваловым [8] и позже развитый Дж. Лионсом, Б.Е. Победрей [55], Г.П. Панасенко, Д.И. Бардзокасом [4], А. Бенсуссаном, Э. Санчес-Паленсией [61], А.Ю. Беляевым [9], Ю.И. Димитриенко [23] и другими исследователями. Основы применения МАО для исследования фильтрации газа в пористых системах рассматриваются в работах [11, 33, 34, 37, 38].

Метод асимптотического осреднения позволяет получать математически обоснованные осредненные уравнения для гомогенизированных сред на основе асимптотического анализа точных исходных уравнений механики сплошных сред («из первых принципов»). В рамках общей концепции МАО решение исходной задачи ищется в виде рядов по степеням малого параметра $\kappa \ll 1$, равного отношению характерных размеров ячейки периодичности и пористой среды. Это позволяет сформулировать последовательность взаимосвязанных локальных задач, описывающих микропроцессы в отдельной поре. Данные задачи, вообще говоря, являются интегро-дифференциальными за счет использования специального оператора осреднения и имеют специфические граничные условия периодичности на противоположенных гранях ячейки. Решение этих задач позволяет определить основные характеристики пористой среды (пористость и коэффициенты проницаемости), основываясь исключительно на геометрической форме пор. Наконец, применение оператора осреднения к локальным уравнениям приводит к постановке глобальной задачи фильтрации, определенной уже на «гомогенизированной» области и допускающей более простое решение по сравнению с исходной постановкой.

МАО хорошо себя зарекомендовал при решении задач механики композиционных материалов [28, 30, 35, 40–42], теории многослойных пластин [75], при моделировании динамических процессов в деформируемых пористых системах [45]. В тоже время следует констатировать, что локальные процессы фильтрации изучены значительно в меньшей степени.

Таким образом, диссертационная работа посвящена двухмасштабному моделированию процессов фильтрации жидкостей и газов в периодической пористой среде с использованием метода асимптотического осреднения. В частности, анализ локальных процессов применяется для определения параметров пористой системы (пористости и коэффициентов проницаемости), используемых в макроскопической постановке задачи о вытеснении газа из пористой среды слабосжимаемой жидкостью. Отметим, что задачи течения жидкостей,

вытесняющих газы в пористых структурах, с использованием метода асимптотического осреднения ранее не рассматривались.

Актуальность темы. Пористые среды имеют очень широкое распространение и отличаются большим разнообразием как среди естественных, так и среди искусственных материалов. Поэтому процессы фильтрации занимают важное место в самых различных дисциплинах.

Фильтрация играет важную роль в процессах жизнедеятельности организмов. Сюда следует отнести движение жидкостей в растениях, обмен веществами в клетках и тканях животных. В частности, фильтрация является одним из факторов, влияющих на перенос лекарственных средств через биологические мембраны.

В рамках модели пористой среды рассматриваются многие природные грунты. При таком подходе в данной области возникает большой класс задач, связанных с такими отраслями, как гидрология природных вод, ирригация и водоснабжение, борьба с эрозией почв и пр. Кроме того, теория фильтрации является основой подземной гидродинамики – науки о движении воды, нефти, газа, их смесей (флюидов) через горные породы, структура которых имеет пустоты в форме пор или трещин. Данная область получила особую актуальность с развитием нефтяной и газовой промышленности в связи с необходимостью решать задачи рационализации процессов разработки и эксплуатации месторождений, анализа изменения параметров пластов и др.

Исследование фильтрационных процессов необходимо также при разработке строительных материалов, производстве теплоизоляторов, изучении природных и искусственных очистных фильтров. В последнем случае особое место занимают вопросы движения жидкостей и газов в пористых материалах сетчатой структуры. В частности, к ним относятся комбинированные пористо-сетчатые материалы, имеющие сложным образом организованную трехмерную систему пор и каналов. Указанные материалы применяются для изготовления различных фильтроэлементов (фильтров) для очистки рабочих сред от механических примесей различной природы. В ракетно-космической отрасли

данные материалы находят все большее применение для изготовления так называемых сетчатых разделителей, применяемых в конструкции капиллярных заборных устройств для отбора топлива из баков летательных аппаратов [12, 54, 59]. Основной целью сетчатых разделителей является механическое разделение жидкой (топливо) и газовой фаз для предотвращения прорыва газа наддува в топливную магистраль и обеспечения многократного запуска жидкостного ракетного двигателя в условиях невесомости. В задачах такого рода особый интерес представляет исследование характера движения границы раздела «жидкость-газ» под воздействием капиллярных сил в областях возможного прорыва газа во внутреннюю полость заборного устройства в условиях полета летательного аппарата.

Таким образом, исследование локальных и глобальных процессов фильтрации жидкостей и газов в пористой среде с использованием асимптотической теории осреднения является актуальной проблемой и имеет практическое применение, в частности, при проектировании композиционных материалов на основе методов пропитки армирующего наполнителя связующим в оснастке.

Предметом настоящего исследования являются пространственные течения вязких слабосжимаемых жидкостей, вытесняющих газовую среду в пористых композитных структурах. Рассматриваются микро- и макрополя, описывающие процесс движения жидкой и газовой фаз как в пределах отдельных пор, так в периодической пористой системе в целом: компоненты вектора скорости, давление, плотность, а также параметры, характеризующие пористую среду – пористость и коэффициенты проницаемости. В глобальной постановке задачи фильтрации исследуется процесс вытеснения газа из порового пространства образца слабосжимаемой жидкостью с оценкой времени полного заполнения.

Целью диссертационной работы является разработка методики двухмасштабного моделирования пространственных течений жидкостей и газов в пористых композитных периодических структурах.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение следующих основных задач:

1. Разработка физико-математической модели слабосжимаемой жидкости и системы уравнений ее пространственного течения в пористой среде совместно с газовой средой.
2. Применение метода асимптотического осреднения для моделирования пространственного течения слабосжимаемой жидкости, вытесняющей газовую среду в пористой композитной структуре.
3. Постановка локальных задач пространственного течения жидкости и газа на ячейке периодичности композитной структуры.
4. Разработка численного метода решения локальных задач в общей трехмерной постановке и алгоритма расчета тензора проницаемости.
5. Постановка глобальной задачи течения жидкости, вытесняющей газ из пористой среды.
6. Разработка численного метода решения глобальной задачи течения жидкости, вытесняющей газ из пористой среды.
7. Численное исследование локальных пространственных течений жидкости и газа на ячейке периодичности типовых композитных структур.
8. Численное исследование макроскопических течений жидкости, вытесняющей газовую среду в типовой пористой композитной структуре.

Научная новизна диссертационной работы включает следующие основные положения:

1. Разработана физико-математическая модель слабосжимаемой жидкости и двухмасштабная модель пространственного течения слабосжимаемой жидкости, вытесняющей газовую среду в пористой композитной структуре.
2. Разработаны алгоритмы численного решения локальных задач пространственного течения жидкости и газа на ячейках периодичности композитных структур и алгоритм расчета тензора проницаемости.
3. Разработан численный алгоритм решения глобальной задачи течения жидкости, вытесняющей газ из пористой композитной структуры.

4. Получены результаты численного моделирования локальных пространственных течений жидкости и газа на ячейке периодичности типовых композитных структур, показавшие эффективность предложенного алгоритма решения локальных задач и вычисления тензора проницаемости пористых композитных структур.

5. Получены результаты численного моделирования макроскопического течения жидкого связующего, вытесняющего газовую среду в типовой пористой композитной структуре, показавшие эффективность предложенного алгоритма решения задач для рассмотренной модели слабосжимаемой жидкости.

Практическая значимость настоящей работы состоит в следующем:

1. Разработан программный комплекс для численного моделирования двухмасштабных процессов течения жидкостей и газов в пористых композитных структурах, реализующий разработанные физико-математические модели и алгоритмы численного решения локальных и макроскопических задач.

2. Численно получены результаты расчета тензора проницаемости типовых тканевых композитных структур.

Методы исследования. Результаты работы получены с использованием метода асимптотического осреднения периодических структур. Математическая модель течения основана на асимптотическом анализе системы уравнений Навье-Стокса и новой физико-математической модели слабосжимаемой жидкости.

Для численного решения локальных задач течения жидкостей и газов в отдельной ячейке периодичности применен метод конечных элементов, основанный на вариационном принципе Хеллингера-Рейсснера и новом типе конечного элемента.

Для численного решения нестационарных нелинейных макроскопических уравнений движения жидкости и газа предложен метод Ньютона-Рафсона в сочетании с методом конечных элементов.

На защиту вынесены следующие основные положения:

1. Физико-математическая модель слабосжимаемой жидкости и двухмасштабная модель пространственного течения слабосжимаемой жидкости,

вытесняющей газовую среду в пористой композитной структуре, полученная на основе системы уравнений Навье-Стокса.

2. Алгоритмы конечно-элементного решения локальных задач пространственного течения жидкости и газа на ячейках периодичности композитных структур и алгоритм расчета тензора проницаемости.

3. Алгоритм конечно-элементного решения глобальной задачи течения жидкости, вытесняющей газ из пористой композитной структуры.

4. Результаты численного моделирования локальных пространственных течений жидкости и газа на ячейке периодичности типовых композитных структур.

5. Результаты численного моделирования макроскопического течения жидкого связующего, вытесняющего газовую среду в типовой пористой композитной структуре.

Достоверность и обоснованность научных результатов и выводов гарантируется использованием теоретически обоснованного математического аппарата и фундаментальных законов механики сплошной среды, а также сравнением полученных результатов с известными аналитическими решениями.

Апробация результатов работы. Результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях и семинарах:

1. Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике», посвящённая 100-летию со дня рождения Героя Социалистического Труда, лауреата Ленинской и Государственной премий СССР, члена-корреспондента АН СССР, Заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, доктора технических наук В.И. Феодосьева. Москва, 17-19 мая 2016 г.

2. 6-я всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. Москва, 16-18 ноября 2016 г.

3. Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики» (FARM-2017). Москва, 24-27 октября 2017 г.

4. 2-я всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике». Москва, 22-23 ноября 2017 г.

5. Семинар им. А.А. Дородницына «Методы решения задач математической физики» ВЦ РАН ФИЦ ИУ РАН, 15 февраля 2018 г.

6. Научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов МГУ им. М.В. Ломоносова, 26 февраля 2018 г.

Публикации. Основные результаты отражены в 12 научных работах [11, 12, 27–32, 35, 40–42], в том числе в 5 статьях [27, 29, 30, 35, 42], включенных в перечень российских рецензируемых научных изданий.

Личный вклад соискателя состоит в следующем:

1. Все теоретические выкладки выполнены соискателем самостоятельно под руководством научного руководителя. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю. Заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

2. Соискатель выполнил разработку программного комплекса для двухмасштабного моделирования процессов течения жидкостей и газов в пористых средах.

3. На основе разработанного программного обеспечения соискателем выполнен ряд вычислительных экспериментов по моделированию локальных и глобальных процессов пространственного течения, а также определению характеристик пористых композитных структур.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения, списка использованной литературы. Работа изложена на 133 с., содержит 32 иллюстрации и 11 таблиц. Библиография включает 115 наименований.

ГЛАВА 1. ДВУХМАСШТАБНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ В ПОРИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

1.1 Математическая постановка задачи о движении несмешивающихся газа и слабосжимаемой жидкости в пористой среде

1.1.1 Геометрическая модель расчетной области и общие допущения

В рамках данного исследования рассматривается двухмасштабная модель пористой среды, состоящая из модели макроскопической расчетной области и модели микроструктуры пористой среды. На макроскопическом уровне моделируется процесс вытеснения газа из порового пространства слабосжимаемой жидкостью. Расчетная область для данного случая приведена на рисунке 1.1.

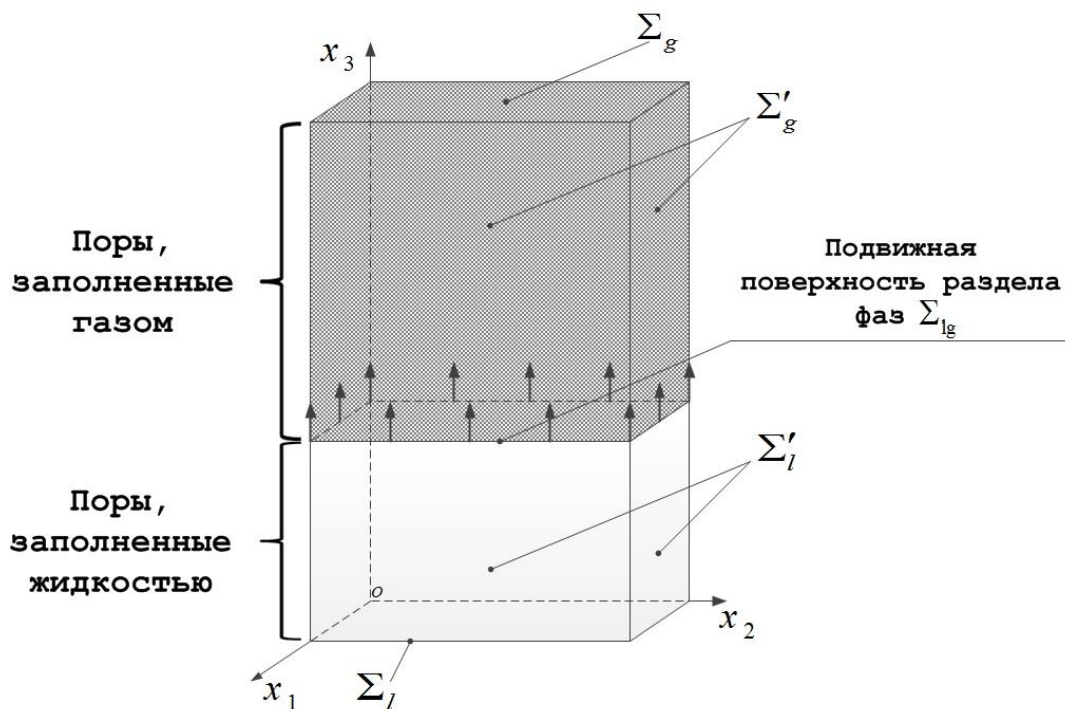


Рисунок 1.1 – Макроскопическая модель процесса вытеснения газа из порового пространства типовой композитной структуры слабосжимаемой жидкостью

Введем следующие обозначения. Пусть G_s – область, занимаемая твердым пористым скелетом, G_p – область, занимаемая пустотами, образованными порами, соединенными между собой каналами, а Σ_{sp} – поверхность раздела пор с твердым телом. Будем считать, что область $G = G_p \cup G_s$ представляет собой параллелепипед (см. рисунок 1.1). Предполагается, что можно выделить подобласти $V_l, V_g \subset G_p$ (и соответствующие им поверхности раздела с твердым телом Σ_{sl} и Σ_{sg}), поровое пространство которых заполнено жидкой и газовой фазами соответственно, причем $G_p = V_l \cup V_g$. Обозначим границу области, занятой жидкой фазой, с внешней средой как $\Sigma_l^e = \Sigma_l \cup \Sigma_l' \cup \Sigma_{lg}(t)$ и всю границу области, занятой газовой фазой, с внешней средой как $\Sigma_g^e = \Sigma_g \cup \Sigma_g' \cup \Sigma_{lg}(t)$, где $\Sigma_{lg}(t)$ – граница раздела жидкой и газовой фаз в пористой среде; Σ_l и Σ_g – соответственно нижняя и верхняя границы порового пространства G_p с внешней средой; Σ_l' и Σ_g' – соответственно совокупность всех боковых границ областей V_l и V_g с внешней средой.

Отметим, что в действительности граница раздела фаз Σ_{lg} имеет сложную структуру как на микроуровне, так и на макроуровне. На микроуровне граница представляет собой множество менисков, образующихся в капиллярах и порах. Искривление поверхности раздела в отдельно взятом канале зависит от свойств конкретных сред и характеризуется краевым углом смачивания ϑ [47, 48], который по соглашению отсчитывается внутрь жидкой фазы. При этом создается дополнительное (капиллярное) давление p_c , положительное для выпуклых менисков несмачивающей жидкости в капиллярах (в этом случае $\vartheta > \pi/2$ и твердый скелет называется *гидрофобным*) и отрицательное для вогнутых менисков смачивающей жидкости (в этом случае $\vartheta < \pi/2$ и твердый скелет называется *гидрофильным*). На макроуровне форма поверхности раздела может иметь произвольную, сколь угодно сложную форму.

С учетом сказанного, будем считать, что переходная область, в которой поры заполнены одновременно двумя фазами, мала и предполагается, что все поры полностью заполнены либо газом, либо жидкостью.

Примем следующие допущения, касающиеся свойств фаз:

1. Жидкость и газ являются изотропными линейно-вязкими сжимаемыми средами, причем жидкость считается слабосжимаемой.
2. Пористый скелет полагается недеформируемым, т.е. его движение не рассматривается.
3. Движение жидкости и газа является изотермическим.
4. Массовые силы отсутствуют.

Решение макроскопической задачи требует определения характеристик пористой среды – пористости и коэффициентов проницаемости. В данной работе для этого используется анализ микропроцессов, происходящих в пределах отдельных пор. В этом случае необходимо ввести модель микроструктуры пористой среды. В диссертации рассмотрено две геометрические модели такого рода. На рисунке 1.2, а показана модель изотропного порового пространства, образованного системой шаров, соединенных узкими цилиндрическими каналами, ориентированными вдоль каждой из координатных осей местной системы координат (см. рисунок 1.3). Данную модель далее будем называть «канально-пористой». На рисунке 1.2, б приведена система переплетенных волокон, пустоты между которыми представляют собой анизотропное поровое пространство. Данную модель далее будем называть «тканевой».

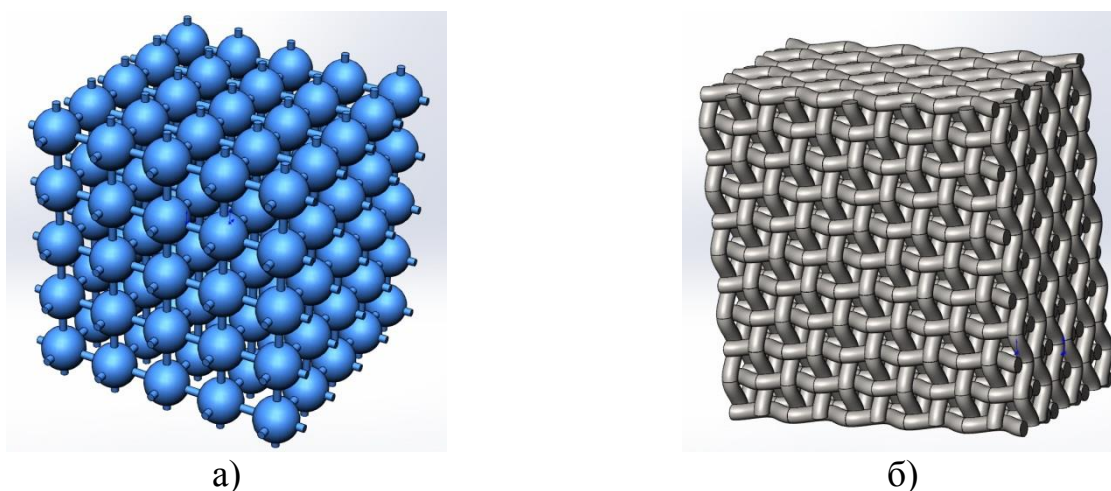


Рисунок 1.2 – Геометрические модели микроструктуры пористой среды: а – канально-пористая модель (показана система пор и каналов без твердого скелета); б – тканевая модель (показана система волокон твердого тела, поры представляют собой пустоты между волокнами)

Данные структуры удовлетворяют следующим допущениям:

1. Пористая среда обладает свойством периодичности.
2. В пористой системе отсутствуют тупиковые поры.
3. Ячейки периодичности имеют геометрическую и физическую симметрию относительно координатных плоскостей местной декартовой системы координат (см. рисунок 1.3, в, г).

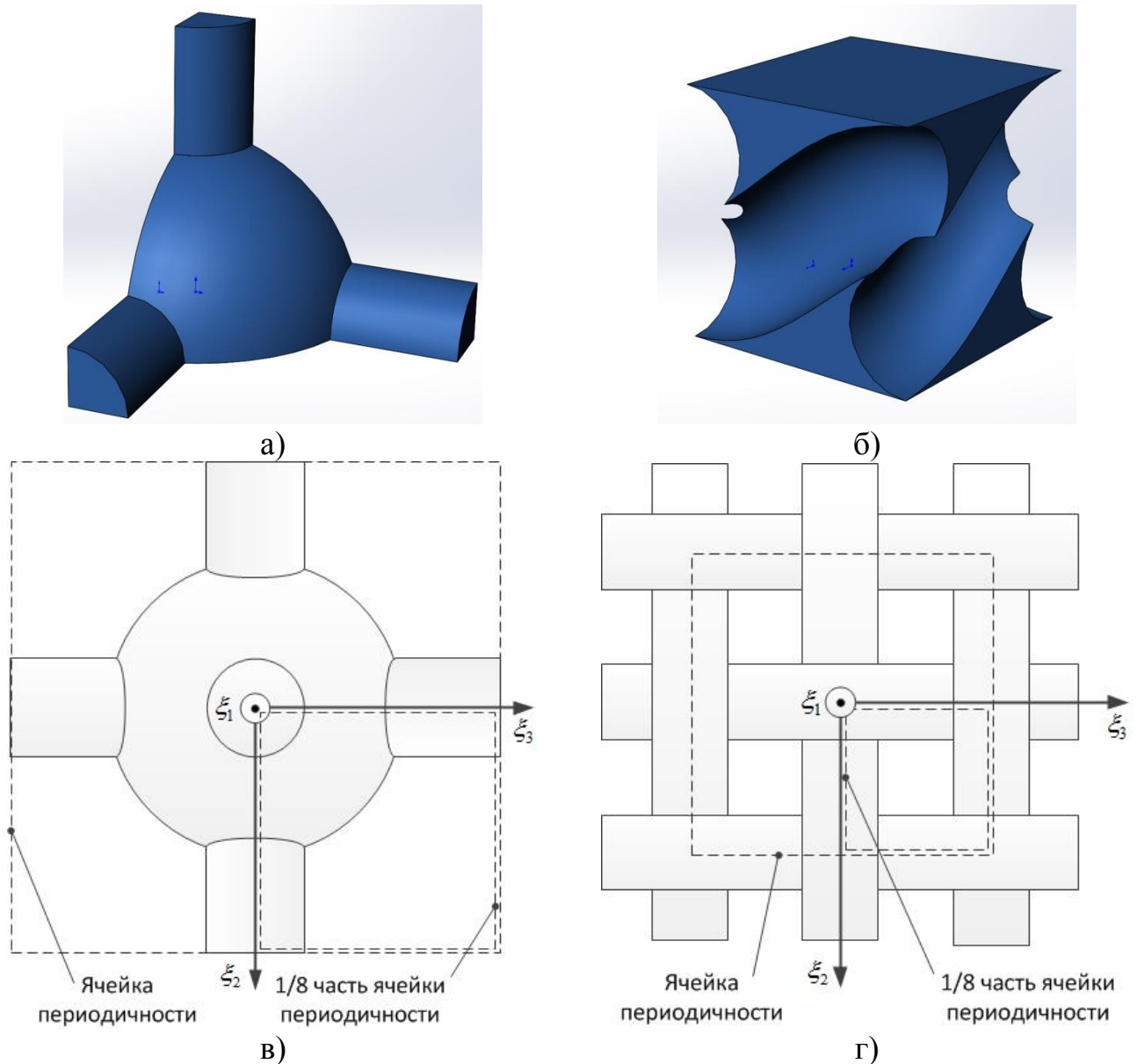


Рисунок 1.3 – Геометрические модели области ячейки периодичности, занятой порой: а – 1/8 часть поры для канально-пористой структуры; б – 1/8 часть поры для тканевой структуры; в – схема ячейки периодичности для канально-пористой структуры; г – схема расположения волокон в ячейке периодичности для тканевой структуры

Последнее допущение будет нами использовано позднее для постановки локальной задачи фильтрации на $1/8$ части ячейки периодичности, геометрические модели которых приведены на рисунке 1.3.

Далее будем использовать следующие обозначения для микроструктур: V_ξ – область, занятая ячейкой периодичности, $V_{\xi p}$ – область ячейки периодичности, занятая одной порой, $\Sigma_{\xi sp}$ – локальная граница поры с твердым скелетом.

1.1.2 Общая постановка задачи

1.1.2.1 Система законов сохранения механики сплошной среды

Полная система законов сохранения механики сплошной среды (МСС) в дивергентном виде в пространственном описании имеет вид [25]:

$$\frac{\partial \rho A_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes A_\alpha - B_\alpha) = \rho C_\alpha, \quad \alpha = \overline{1, 6}, \quad (1)$$

где

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \\ e + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \\ \eta \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{F}^T \end{pmatrix}; \quad B_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} \\ -\mathbf{q} \\ \theta \\ 0 \\ \rho \mathbf{F} \otimes \mathbf{v} \end{pmatrix}; \quad C_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + q_m \\ \frac{q_m + q^*}{\theta} \\ \theta \\ \mathbf{v} \\ 0 \end{pmatrix}$$

В системе (1): при $\alpha=1$ – уравнение неразрывности; $\alpha=2$ – уравнение движения; $\alpha=3$ – закон сохранения энергии (первый закон термодинамики); $\alpha=4$ – уравнение баланса энтропии (второй закон термодинамики); $\alpha=5$ – кинематическое уравнение; $\alpha=6$ – динамическое уравнение совместности деформаций; \mathbf{v} – вектор скорости; e – плотность внутренней энергии; η – плотность энтропии; \mathbf{u} – вектор перемещений; \mathbf{F} – градиент деформации; \mathbf{T} – тензор напряжений Коши; \mathbf{q} – вектор притока тепла; θ – абсолютная

температура; ρ – плотность; \mathbf{f} – плотность массовых сил; q_m – приток тепла за счет массовых источников; q^* – плотность внутреннего производства энтропии.

С учетом допущений п. 1.1.1 и системы (1) движение газовой и жидкой фаз в пористой структуре далее будет описываться системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}_m) &= 0, \\ \frac{\partial \rho_m \mathbf{v}_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_m - \mathbf{T}_m) &= 0, \\ m &= l, g, \end{aligned} \quad (2)$$

где индекс $m=l$ соответствует жидкой фазе, а $m=g$ – газовой фазе.

1.1.2.2 Определяющие соотношения и уравнения состояния для газовой и жидкой фаз

Дополним систему (2) определяющими соотношениями. В МСС показывается [14, 25, 63, 64], что для изотропной линейно-вязкой жидкости (газа) тензор напряжений имеет вид:

$$\mathbf{T}_m = -p_m \mathbf{E} + \mathbf{T}_{vm}(\mathbf{D}_m), \quad m = l, g \quad (3)$$

где p_m – давление, Па; $\mathbf{T}_{vm}(\mathbf{D}_m) = \lambda_m (\nabla \cdot \mathbf{v}_m) \mathbf{E} + 2\mu_m \mathbf{D}_m$ – тензор вязких напряжений; λ_m, μ_m – коэффициенты вязкости, Па·с; $\mathbf{D}_m = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{v}_m + \nabla \otimes \mathbf{v}_m^T)$ – тензор скоростей деформации, s^{-1} ; \mathbf{E} – метрический тензор.

В систему (2) также необходимо включить уравнения состояния фаз. Для случая газа используется уравнение состояния Менделеева-Клапейрона:

$$p_g = \rho_g R \theta_0, \quad (4)$$

где R – газовая постоянная, Дж/(кг·К); $\theta_0 = const$ – постоянная температура, К.

Уравнение состояния для жидкой фазы можно получить, воспользовавшись уравнением сжимаемости [52, 71]:

$$\rho_l = \rho_{0l} e^{\beta(p_l - p_{0l})}, \quad (5)$$

где ρ_l – плотность жидкости, кг/м^3 ; β – коэффициент сжимаемости, Па^{-1} ; ρ_{0l} – плотность жидкости в начальный момент времени, кг/м^3 ; p_{0l} – гидростатическая часть давления в жидкости, отвечающая за изменение давления без изменения плотности жидкости, Па. Функция p_{0l} является в общем случае неизвестной переменной величиной. Модель слабосжимаемой жидкости, для которой p_{0l} – заданная константа, называем *классической*, обычно эта константа задается эмпирически для каждой задачи. В работе предложена *обобщенная модель слабосжимаемой жидкости*, в которой p_{0l} – неизвестная величина, которая определяется из решения отдельной вспомогательной задачи.

На практике часто не учитывают степени β выше первой в разложении в ряд Тейлора выражения (5), полагая

$$\rho_l \approx \rho_{0l} + \beta \rho_{0l} (p_l - p_{0l}). \quad (6)$$

Выражая давление через плотность в (6), приходим к искомому уравнению состояния для жидкой фазы:

$$p_l = p_{0l} + K \left(\frac{\rho_l}{\rho_{0l}} - 1 \right), \quad (7)$$

где $K = \frac{1}{\beta}$ – модуль объемного сжатия, Па.

1.1.2.3 Граничные и начальные условия

Систему (2) следует дополнить начальными и граничными условиями. На поверхностях раздела «твердое тело – жидкость» Σ_{sl} и «твердое тело – газ» Σ_{sg} ставятся граничные условия прилипания:

$$\mathbf{v}_l|_{\Sigma_{sl}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_g|_{\Sigma_{sg}} = \mathbf{0}. \quad (8)$$

На нижней Σ_l и верхней Σ_g гранях образца считаются заданными векторы напряжений:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_l|_{\Sigma_l} = -p_{le} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_g|_{\Sigma_g} = -p_{ge} \mathbf{n}, \quad (9)$$

где p_{le} , p_{ge} – внешние заданные давления, Па. На боковых гранях Σ'_l и Σ'_g задается условие непротекания и условия равенства нулю касательных напряжений:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_l|_{\Sigma'_l} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_g|_{\Sigma'_g} = 0; \\ \boldsymbol{\tau}_l \cdot \mathbf{T}|_{\Sigma'_l} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\tau}_l \cdot \mathbf{T}|_{\Sigma'_g} = \mathbf{0}, \quad l = 1, 2, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\boldsymbol{\tau}_l$ – векторы в касательной плоскости к поверхностям, образующие вместе с вектором нормали \mathbf{n} ортонормированный базис. На границе раздела фаз Σ_{lg} задаются условия для отсутствия скачков вектора напряжений и вектора скорости:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{T}_l - \mathbf{T}_g) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_l = \mathbf{v}_g, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_{lg}. \quad (11)$$

Предполагается, что переход материальных точек через поверхность раздела отсутствует, поэтому нормальная скорость D движения поверхности раздела определяется как:

$$D = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_l, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_{lg}. \quad (12)$$

Наконец, рассмотрим постановку начальных условий. В начальный момент времени $t = t_0$ для случая газа считаются заданными давление и скорость:

$$p_g|_{t=t_0} = p_{0g}, \quad \mathbf{v}_g|_{t=t_0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in V_g. \quad (13)$$

Для случая классической модели слабосжимаемой жидкости в начальный момент времени задаются плотность, давление и скорость:

$$\rho_l|_{t=t_0} = \rho_{0l}, \quad p_l|_{t=t_0} = p_{0l}, \quad \mathbf{v}_l|_{t=t_0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in V_l. \quad (14)$$

В случае обобщенной модели слабосжимаемой жидкости в начальный момент задаются только плотность и скорость:

$$\rho_l|_{t=t_0} = \rho_{0l}, \quad \mathbf{v}_l|_{t=t_0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in V_l. \quad (15)$$

1.1.3 Система уравнений Навье-Стокса в безразмерной форме

Подставляя определяющее соотношение (3) в систему (2) получаем систему уравнений Навье-Стокса для описания движения газа и слабосжимаемой жидкости в пористой среде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}_m) &= 0, \\ \frac{\partial \rho_m \mathbf{v}_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{v}_m + p_m \mathbf{E} - \lambda_m (\nabla \cdot \mathbf{v}_m) \mathbf{E} - \mu_m (\nabla \otimes \mathbf{v}_m + \nabla \otimes \mathbf{v}_m^T)) &= 0, \\ m = l, g. \end{aligned} \quad (16)$$

Несложно показать, что систему (16) можно представить в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla_i (\rho_m v_{mi}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho_m v_{mi}}{\partial t} + \nabla_j (\rho_m v_{mi} v_{mj}) &= -\nabla_i p_m + (\lambda_m + \mu_m) \nabla_i \nabla_j v_{mj} + \mu_m \nabla_j \nabla_j v_{mi}, \\ i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}, \quad m = l, g. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь и далее полагается, что по повторяющимся индексам идет суммирование.

Запишем систему (17) в безразмерном виде. Для этого введем безразмерные функции:

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{\hat{L}}, \quad \tilde{p}_m = \frac{p_m}{\hat{p}}, \quad \tilde{\rho}_m = \frac{\rho_m}{\hat{\rho}}, \quad \tilde{v}_{mi} = \frac{v_{mi}}{\hat{v}}, \quad (18)$$

где $\hat{L} = 1 \text{ м}$ – характерный размер всей области среды; $\hat{p} = 1 \text{ МПа}$ – характерное давление; $\hat{\rho}$ – характерная плотность, кг/м^3 ; $\hat{v} = 1/3600 \text{ м/с}$ – модуль вектора характерной скорости. Характерное время будем считать зависимой величиной, заданной в виде отношения

$$\hat{t} = \frac{\hat{L}}{\hat{v}} = 3600 \text{ с}. \quad (19)$$

Тогда безразмерное время определим следующим образом:

$$\tilde{t} = \frac{t}{\hat{t}}. \quad (20)$$

Подставляя (18) и (20) в систему (17) и уравнения состояния (4), (7), получаем (символ « \sim » далее опускаем, полагая, что функции приведены в безразмерной форме):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla_i (\rho_m v_{mi}) &= 0, \\ \frac{1}{\text{Eu}_m} \left(\frac{\partial \rho_m v_{mi}}{\partial t} + \nabla_j (\rho_m v_{mi} v_{mj}) \right) &= -\nabla_i p_m + (\lambda'_m + \mu'_m) \nabla_i \nabla_j v_{mj} + \mu'_m \nabla_j \nabla_j v_{mi}; \\ p_m &= A_m \rho_m + \delta_{mi} B(p_0); \\ i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}, \quad m = l, g, \end{aligned} \quad (21)$$

где введены обозначения:

$$A_m = \frac{R \hat{\rho}_g \theta_0}{\hat{p}_g} \delta_{mg} + \frac{\tilde{K}}{\rho_0} \delta_{ml} - \text{безразмерная константа};$$

$B(p_0) = p_0 - \tilde{K}$ – безразмерная константа для классической модели слабосжимаемой жидкости или функция переменного гидростатического давления в обобщенной модели слабосжимаемой жидкости;

$$\mu'_m = \frac{\mu_m \hat{v}_m}{\hat{L} \hat{p}_m} = \frac{1}{\text{Eu}_m \text{Re}_m} \quad \text{и} \quad \lambda'_m = \frac{\lambda_m \hat{v}_m}{\hat{L} \hat{p}_m} - \text{безразмерные коэффициенты вязкости};$$

$$\text{Eu}_m = \frac{\hat{p}_m}{\hat{\rho}_m \hat{v}_m^2} - \text{число Эйлера};$$

$$\text{Re}_m = \frac{\hat{\rho}_m \hat{v}_m \hat{L}}{\mu_m} - \text{число Рейнольдса}.$$

Если ввести малый безразмерный параметр $\kappa = \hat{l}/\hat{L}$, равный отношению характерного размера ячейки периодичности \hat{l} к характерному размеру пористой среды \hat{L} , то можно построить соотношения вида

$$\text{Eu}_m \kappa^k = \text{Eu}_m^0 = O(1), \quad \text{Re}_m \kappa^n = \text{Re}_m^0 = O(1), \quad (22)$$

где $k, n \in \mathbb{Z}$ – некоторые целые числа, которые соответствуют различным режимам течения фаз. Тогда безразмерный коэффициент вязкости μ'_m можно представить следующим образом:

$$\mu'_m = \frac{\mu_m \hat{v}_m}{\hat{L} \hat{p}_m} = \frac{\kappa^{k+n}}{\text{Eu}_m^0 \text{Re}_m^0} = \kappa^{k+n} \mu_m^0, \quad (23)$$

где $\mu_m^0 = \frac{1}{Eu_m^0 Re_m^0} = O(1)$ – главная часть безразмерной вязкости μ_m' . Примем также, что

$$\lambda_m' = \frac{\lambda_m \hat{v}_m}{\hat{L} \hat{p}_m} = \kappa^{k+n} \lambda_m^0, \quad (24)$$

где $\lambda_m^0 = O(1)$ – главная часть безразмерной вязкости λ_m' .

Для упрощения дальнейших выкладок условимся опускать индекс m для функций и величин, относящихся к конкретной фазе, там, где ясно из контекста о каких функциях идет речь.

1.1.4 Общая постановка задачи фильтрации в случае обобщенной модели слабосжимаемой жидкости

В силу того что для случая обобщенной слабосжимаемой жидкости система уравнений (21) включает в качестве неизвестной гидростатическое давление p_0 , входящее в уравнение состояния (7), то она является незамкнутой. Доопределим ее следующим образом. Представим неизвестные функции в аддитивном форме:

$$p = p_0 + p_1, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1, \quad v_i = v_{0i} + v_{1i}, \quad (25)$$

где ρ_0 и p_0 были введены ранее, а $\rho_1 \ll \rho_0$ в силу слабой сжимаемости жидкости. Подставим выражения (25) в систему (21) и разделим ее на две отдельные системы:

$$\begin{aligned} \nabla_i v_{0i} &= 0, \\ \frac{1}{Eu_l} \left(\frac{\partial \rho_0 v_{0i}}{\partial t} + \nabla_j (\rho_0 v_{0i} v_{0j}) \right) &= -\nabla_i p_0 + \kappa^2 (\lambda_l^0 + \mu_l^0) \nabla_i \nabla_j v_{0j} + \kappa^2 \mu_l^0 \nabla_j \nabla_j v_{0i}, \quad x_i \in V_l; \\ i &= \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3} \end{aligned} \quad (26)$$

и

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla_i (\rho_0 v_{1i} + \rho_1 v_{0i} + \rho_1 v_{1i}) = 0, \\
& \frac{1}{Eu_i} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 v_{1i} + \rho_1 v_{0i} + \rho_1 v_{1i}) + \\
& + \frac{1}{Eu_i} \nabla_j (\rho_0 (v_{0i} v_{1j} + v_{1i} v_{0j} + v_{1i} v_{1j}) + \rho_1 (v_{0i} v_{0j} + v_{0i} v_{1j} + v_{1i} v_{0j} + v_{1i} v_{1j})) = \\
& = -\nabla_i p_1 + \kappa^2 (\lambda_i^0 + \mu_i^0) \nabla_i \nabla_j v_{1j} + \kappa^2 \mu_i^0 \nabla_j \nabla_j v_{1i}, \\
& p_1 = \frac{\tilde{K}}{\rho_{0i}} \rho_1, \quad x_i \in V_i; \\
& i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Если выполняются обе системы (26) и (27), то автоматически выполняется и исходная система (21). Обе системы (26) и (27) являются замкнутыми: система (26) представляет собой постановку задачи о движении несжимаемой жидкости, относительно функций p_0, v_{0i} , а система (27) представляет собой постановку задачи относительно функций p_1, v_{1i} , в ней функции p_0, v_{0i} рассматриваются как входные данные.

Задачи (26) – (27) следует дополнить граничными условиями, которые строятся на основе условий, приведенных в п. 1.1.2.3 для области V_i , занятой жидкостью. На поверхности раздела «твердое тело – жидкость» Σ_{st} ставятся граничные условия прилипания:

$$\mathbf{v}_0|_{\Sigma_{st}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_1|_{\Sigma_{st}} = \mathbf{0}. \tag{28}$$

На нижней грани Σ_l образца считается заданным вектор напряжений:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_0|_{\Sigma_l} = -p_{0e} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_1|_{\Sigma_l} = -p_{1e} \mathbf{n}. \tag{29}$$

Здесь введены тензоры $\mathbf{T}_q, q=0,1$, такие что $\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}$, и внешние давления $p_{qe}, q=0,1$, для которых $p_{0e} + p_{1e} = p_{1e}$. На совокупности боковых граней Σ'_l задается условие непротекания и условия равенства нулю касательных напряжений:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_q|_{\Sigma'_l} = 0, \quad \boldsymbol{\tau}_I \cdot \mathbf{T}_q|_{\Sigma'_l} = \mathbf{0}, \quad I=1,2, \quad q=0,1 \tag{30}$$

где $\boldsymbol{\tau}_l$ – векторы в касательной плоскости к поверхностям, образующие вместе с вектором нормали \mathbf{n} ортонормированный базис. На границе раздела фаз Σ_{lg} задается условие:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_q = -p_{qlg} \mathbf{n}, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_{lg}, \quad q = 0, 1, \quad (31)$$

где $p_{qlg}, q = 0, 1$ – давления на границе раздела фаз, для которых $p_{0lg} + p_{1lg} = p_{lg}$ – истинное давление на границе раздела.

Наконец, рассмотрим постановку начальных условий. Для задачи (26) в начальный момент времени считается заданной скорость:

$$\mathbf{v}_0|_{t=t_0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in V_l. \quad (32)$$

В задаче (27) в начальный момент времени задается плотность и скорость:

$$\rho_1|_{t=t_0} = 0, \quad \mathbf{v}_1|_{t=t_0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in V_l. \quad (33)$$

1.2 Применение метода асимптотического осреднения для постановки задач на ячейке периодичности

1.2.1 Общие положения метода асимптотического осреднения

Суть метода асимптотического осреднения (МАО) состоит в следующем [4, 8, 9, 23, 55, 61]. Пусть \hat{l} – линейный размер ячейки периодичности V_ξ среды. В рамках МАО вводится малый параметр $\kappa = \hat{l}/\hat{L} \ll 1$ и два типа безразмерных координат: глобальные (медленные) $\tilde{x}_i = x_i/\hat{L}$ и локальные (быстрые) $\xi_i = x_i/\hat{l} = \tilde{x}_i/\kappa$. В этом случае все функции (обозначим их Θ), описывающие течение газа или жидкости в порах, можно считать квазипериодическими, т.е. зависящими от локальных ξ_i координат, глобальных \tilde{x}_i координат и времени t :

$$\Theta = \Theta(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi}, t), \quad \tilde{\mathbf{x}} \in V, \quad \boldsymbol{\xi} \in V_\xi.$$

Тогда дифференцирование этих функций осуществляется с помощью следующего правила:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{x}_i} \rightarrow \frac{1}{\kappa} \Theta_{/i} + \Theta_{,i}, \quad (34)$$

где введены обозначения для производных по глобальным и локальным координатам соответственно $\Theta_{,i} = \partial \Theta / \partial \tilde{x}_i$ и $\Theta_{/i} = \partial \Theta / \partial \xi_i$. Условие квазипериодичности заключается в том, что функции Θ медленно изменяются по аргументу \tilde{x}_i на расстояниях порядка \hat{L} и являются периодическими относительно аргумента ξ_j , т.е.:

$$\begin{aligned} \Theta\left(\xi_1 - \frac{1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) &= \Theta\left(\xi_1 + \frac{1}{2}, \xi_2, \xi_3\right), \\ \Theta\left(\xi_1, \xi_2 - \frac{1}{2}, \xi_3\right) &= \Theta\left(\xi_1, \xi_2 + \frac{1}{2}, \xi_3\right), \\ \Theta\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3 - \frac{1}{2}\right) &= \Theta\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3 + \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (35)$$

Далее для соотношений (35) будем использовать обозначение $\Theta = 0$.

В рамках МАО вводится операция осреднения функций по области $V_{\xi p}$:

$$\langle \Theta \rangle = \frac{1}{\varphi |V_{\xi}|} \int_{V_{\xi p}} \Theta dV, \quad (36)$$

где $\varphi = \frac{1}{|V_{\xi}|} \int_{V_{\xi p}} dV$ – пористость среды. Из (36), в частности, следует интегральное соотношение

$$\frac{1}{|V_{\xi}|} \int_{V_{\xi p}} \Theta dV = \varphi \langle \Theta \rangle. \quad (37)$$

Тогда, осредняя функции p_m , ρ_m , v_m , ($m = l, g$), получим:

$$\langle \rho_m v_{mi} \rangle = \bar{\rho}_m \bar{v}_{mi}; \quad \langle \rho_m \rangle = \bar{\rho}_m; \quad \langle p_m \rangle = \bar{p}_m. \quad (38)$$

где \bar{p}_m , $\bar{\rho}_m$, \bar{v}_m , – средние значения функций. Соотношения (38) следует понимать, как дополнительные условия, предъявляемые к локальным параметрам течения в $V_{\xi p}$, либо как обозначения для вычисленных осредненных функций.

1.2.2 Постановка локальных задач фильтрации газа и слабосжимаемой жидкости на ячейке периодичности

1.2.2.1 Постановка локальных задач на ячейке периодичности в случае фильтрации газов и классической модели слабосжимаемой жидкости

1.2.2.1.1 Асимптотические разложения

С учетом (23), (24) и (34), систему (21) можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \kappa^{-1} (\rho v_i)_{/i} + (\rho v_i)_{,i} = 0, \\
 & \frac{1}{Eu^0} \kappa^k \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \kappa^{-1} (\rho v_i v_j)_{/j} + (\rho v_i v_j)_{,j} \right) = \\
 & = -\kappa^{-1} p_{/i} - p_{,i} + \kappa^{k+n} (\lambda_m^0 + \mu_m^0) (\kappa^{-2} v_{j/ij} + \kappa^{-1} (v_{j/j,i} + v_{j/i,j}) + v_{j,ij}) + \\
 & + \kappa^{k+n} \mu_m^0 (\kappa^{-2} v_{i/jj} + 2\kappa^{-1} v_{i/j,j} + v_{i,jj}), \\
 & p = A_m \rho + \delta_{ml} B(p_{0l}); \\
 & i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}, \quad m = l, g.
 \end{aligned} \tag{39}$$

В соответствии с общей концепцией МАО решение задачи (39) ищется в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра κ :

$$\begin{aligned}
 v_i(\mathbf{x}, \xi, t) &= v_i^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) + \kappa v_i^{(1)}(\mathbf{x}, \xi, t) + O(\kappa^2), \\
 \rho(\mathbf{x}, \xi, t) &= \rho^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) + \kappa \rho^{(1)}(\mathbf{x}, \xi, t) + O(\kappa^2), \\
 p(\mathbf{x}, \xi, t) &= p^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) + \kappa p^{(1)}(\mathbf{x}, \xi, t) + O(\kappa^2).
 \end{aligned} \tag{40}$$

Процедура получения локальных задач фильтрации для классической модели слабосжимаемой жидкости и для газа совпадает. Поэтому далее рассматривать их будем совместно.

1.2.2.1.2 Локальные уравнения неразрывности и движения

Выполним подстановку (40) в уравнение неразрывности из системы (39). Группируя слагаемые при одинаковых степенях параметра κ , получаем:

$$\left(\rho^{(0)}v_i^{(0)}\right)_{,i} = 0 \quad (41)$$

– уравнение неразрывности нулевого уровня;

$$\left(\rho^{(0)}v_i^{(1)} + \rho^{(1)}v_i^{(0)}\right)_{,i} = -\frac{\partial\rho^{(0)}}{\partial t} - \left(\rho^{(0)}v_i^{(0)}\right)_{,i} \quad (42)$$

– уравнение неразрывности первого уровня.

Выполняя подстановку (40) в уравнение движения из (39), получаем выражение:

$$\begin{aligned} & \kappa^{-1}A_1^i + \kappa^0A_2^i + \kappa^1A_3^i + \\ & + \kappa^{k-1}A_4^i + \kappa^kA_5^i + \kappa^{k+1}A_6^i + \kappa^{k+2}A_7^i + \kappa^{k+3}A_8^i + \\ & + \kappa^{k+n-2}A_9^i + \kappa^{k+n-1}A_{10}^i + \kappa^{k+n}A_{11}^i + \kappa^{k+n+1}A_{12}^i = 0, \end{aligned} \quad (43)$$

где введены обозначения:

$$A_1^i = p_{/i}^{(0)};$$

$$A_2^i = p_{/i}^{(1)} + p_{,i}^{(0)};$$

$$A_3^i = p_{,i}^{(1)};$$

$$A_4^i = \frac{1}{Eu_m^0} \left(\rho^{(0)}v_i^{(0)}v_j^{(0)}\right)_{,j};$$

$$A_5^i = \frac{1}{Eu_m^0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho^{(0)}v_i^{(0)}\right) + \frac{1}{Eu_m^0} \left(\rho^{(0)}v_i^{(0)}v_j^{(1)} + \rho^{(0)}v_i^{(1)}v_j^{(0)} + \rho^{(1)}v_i^{(0)}v_j^{(0)}\right)_{,j} + \frac{1}{Eu_m^0} \left(\rho^{(0)}v_i^{(0)}v_j^{(0)}\right)_{,j};$$

$$\begin{aligned} A_6^i &= \frac{1}{Eu_m^0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho^{(0)}v_i^{(1)} + \rho^{(1)}v_i^{(0)}\right) + \frac{1}{Eu_m^0} \left(\rho^{(0)}v_i^{(1)}v_j^{(1)} + \rho^{(1)}v_i^{(0)}v_j^{(1)} + \rho^{(1)}v_i^{(1)}v_j^{(0)}\right)_{,j} + \\ & + \frac{1}{Eu_m^0} \left(\rho^{(0)}v_i^{(0)}v_j^{(1)} + \rho^{(0)}v_i^{(1)}v_j^{(0)} + \rho^{(1)}v_i^{(0)}v_j^{(0)}\right)_{,j}; \end{aligned}$$

$$A_7^i = \frac{1}{Eu_m^0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho^{(1)}v_i^{(1)}\right) + \frac{1}{Eu_m^0} \left(\rho^{(1)}v_i^{(1)}v_j^{(1)}\right)_{,j} + \frac{1}{Eu_m^0} \left(\rho^{(0)}v_i^{(1)}v_j^{(1)} + \rho^{(1)}v_i^{(0)}v_j^{(1)} + \rho^{(1)}v_i^{(1)}v_j^{(0)}\right)_{,j};$$

$$A_8^i = \frac{1}{Eu_m^0} \left(\rho^{(1)}v_i^{(1)}v_j^{(1)}\right)_{,j};$$

$$A_9^i = -\left(\lambda_m^0 + \mu_m^0\right)v_{j/i}^{(0)} - \mu_m^0v_{i/jj}^{(0)};$$

$$A_{10}^i = -\left(\lambda_m^0 + \mu_m^0\right)\left(v_{j/i,i}^{(0)} + v_{j/i,j}^{(0)} + v_{j/ij}^{(1)}\right) - \mu_m^0\left(2v_{i/j,j}^{(0)} + v_{i/jj}^{(1)}\right);$$

$$A_{11}^i = -\left(\lambda_m^0 + \mu_m^0\right)\left(v_{j,ij}^{(0)} + v_{j/j,i}^{(1)} + v_{j/i,j}^{(1)}\right) - \mu_m^0\left(v_{i,jj}^{(0)} + 2v_{i/j,j}^{(1)}\right);$$

$$A_{12}^i = -(\lambda_m^0 + \mu_m^0)v_{j,ij}^{(1)} - \mu_m^0 v_{i,jj}^{(1)}.$$

Возможны следующие варианты значений положительных целочисленных параметров k и n :

$$\begin{aligned} k=0, n=1; & \quad k=0, n=2; & \quad k=0, n=3; \\ k=1, n=0; & \quad k=1, n=1; & \quad k=1, n=2; \\ k=2, n=0; & \quad k=2, n=1; \end{aligned} \quad (44)$$

Другие сочетания значений чисел k и n приводят к повтору уравнений для одного из уже перечисленных сочетаний значений чисел k и n . Далее рассматривается случай $k=2$ и $n=0$, т.е.

$$\text{Eu}_m \gg O(1), \quad \text{Re}_m = O(1), \quad \mu'_m = \kappa^2 \mu_m^0, \quad \lambda'_m = \kappa^2 \lambda_m^0. \quad (45)$$

Наличие 2-го порядка малости в коэффициентах вязкости μ'_m и λ'_m является допущением рассматриваемой задачи и физически обосновывается малой вязкостью движущихся фаз. Указанный режим определяет медленное Стоксово (безынерционное) движение сред в пористой системе. Отметим, что случаи $k=0, n=1$ и $k=0, n=2$ соответствуют задачам, рассмотренным в работах [36] и [85].

Производя группировку слагаемых в (43) с одинаковыми степенями параметра κ , получаем:

$$p_{ii}^{(0)} = 0 \quad (46)$$

– уравнение движения нулевого уровня;

$$-p_{ii}^{(1)} + \mu^0 v_{i/jj}^{(0)} + (\lambda^0 + \mu^0) v_{j/ij}^{(0)} = p_i^{(0)} \quad (47)$$

– уравнение движения первого уровня.

1.2.2.1.3 Локальные уравнения состояния

Выполняя подстановку (40) в уравнения состояния жидкости из (39), получаем:

$$p^{(0)} = A_1 \rho^{(0)} + B \quad (48)$$

– уравнение состояния нулевого уровня;

$$p^{(1)} = A_l \rho^{(1)} \quad (49)$$

– уравнение состояния первого уровня.

Аналогично, выполняя подстановку (40) в уравнение состояния газа из (39), получаем:

$$p^{(0)} = A_g \rho^{(0)} \quad (50)$$

– уравнение состояния нулевого уровня;

$$p^{(1)} = A_g \rho^{(1)} \quad (51)$$

– уравнение состояния первого уровня.

1.2.2.1.4 Локальные граничные условия

Выполняя подстановку (40) в граничное условие прилипания (8) для жидкости и газа, получаем:

$$v_i^{(0)} \Big|_{\Sigma_{\xi sm}} = 0, \quad m = l, g \quad (52)$$

– граничные условия нулевого уровня;

$$v_i^{(1)} \Big|_{\Sigma_{\xi sm}} = 0, \quad m = l, g \quad (53)$$

– граничные условия первого уровня.

1.2.2.1.5 Осреднение параметров

Действуя оператором осреднения (36) на асимптотические разложения функций $\Theta = \{\rho v_i, \rho, p\}$, с учетом (38) получаем соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \rho^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) v_i^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) \rangle = \bar{\rho}(\mathbf{x}, t) \bar{v}_i(\mathbf{x}, t), \\ \langle \rho^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) v_i^{(1)}(\mathbf{x}, \xi, t) + \rho^{(1)}(\mathbf{x}, \xi, t) v_i^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) \rangle = 0; \\ \langle \rho^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) \rangle = \bar{\rho}(\mathbf{x}, t), \\ \langle \rho^{(1)}(\mathbf{x}, \xi, t) \rangle = 0; \\ \langle p^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) \rangle = \bar{p}(\mathbf{x}, t), \\ \langle p^{(1)}(\mathbf{x}, \xi, t) \rangle = 0. \end{array} \right. \quad (54)$$

1.2.2.1.6 Общая постановка локальных задач на ячейке периодичности

С учетом формул (41), (46), (48), (50), (52) и (54) получаем *локальную задачу нулевого уровня*:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho^{(0)} v_i^{(0)})_{/i} = 0, \\ p_{/i}^{(0)} = 0, \\ p^{(0)} = A_m \rho^{(0)} + \delta_{ml} B, \quad \xi_i \in V_{\xi p}; \\ \langle \rho^{(0)} v_i^{(0)} \rangle = \bar{\rho} \bar{v}_i, \quad \langle \rho^{(0)} \rangle = \bar{\rho}, \quad \langle p^{(0)} \rangle = \bar{p}; \\ \llbracket v_i^{(0)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket p^{(0)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket \rho^{(0)} \rrbracket = 0; \\ v_i^{(0)} = 0, \quad \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}; \\ i = \overline{1, 3}, \quad m = l, g. \end{array} \right. \quad (55)$$

С учетом формул (42), (47), (49), (51), (53) и (54) получаем *локальную задачу первого уровня*:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho^{(0)} v_i^{(1)} + \rho^{(1)} v_i^{(0)})_{/i} = -\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} - (\rho^{(0)} v_i^{(0)})_{/i}, \\ -p_{/i}^{(1)} + \mu^0 v_{i/ij}^{(0)} + (\lambda^0 + \mu^0) v_{j/ij}^{(0)} = p_{/i}^{(0)}, \\ p^{(1)} = A_m \rho^{(1)}, \quad \xi_i \in V_{\xi p}; \\ \langle \rho^{(0)} v_i^{(1)} + \rho^{(1)} v_i^{(0)} \rangle = 0, \quad \langle \rho^{(1)} \rangle = 0, \quad \langle p^{(1)} \rangle = 0; \\ \llbracket v_i^{(1)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket p^{(1)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket \rho^{(1)} \rrbracket = 0; \\ v_i^{(1)} = 0, \quad \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}; \\ i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad m = l, g. \end{array} \right. \quad (56)$$

Из уравнения движения и интегрального условия для давления $p^{(0)}$ в системе (55) следует, что

$$\begin{cases} p_{/i}^{(0)} = 0, \\ \langle p^{(0)} \rangle = \bar{p}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^{(0)}(\mathbf{x}, \xi) = C(\mathbf{x}), \\ \langle p^{(0)}(\mathbf{x}, \xi) \rangle = \bar{p}(\mathbf{x}); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^{(0)}(\mathbf{x}, \xi) = C(\mathbf{x}), \\ C(\mathbf{x}) = \bar{p}(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Таким образом, давление $p^{(0)}$ есть функция только глобальных координат:

$$p^{(0)}(\mathbf{x}, \xi) = \bar{p}(\mathbf{x}). \quad (57)$$

С учетом (57), уравнения состояния и интегрального условия для плотности $\rho^{(0)}$ получаем, что плотность также не зависит от локальных координат ξ :

$$\rho^{(0)}(\mathbf{x}, \xi) = \bar{\rho}(\mathbf{x}). \quad (58)$$

Локальная задача для вычисления функций $v_i^{(0)}$, $p^{(1)}$ и $\rho^{(1)}$ с учетом (55) и (56) может быть сформулирована следующим образом:

$$\begin{cases} v_{i/i}^{(0)} = 0, \\ -p_{/i}^{(1)} + \mu^0 v_{i/jj}^{(0)} + (\lambda^0 + \mu^0) v_{j/ij}^{(0)} = p_{,i}^{(0)}, \\ p^{(1)} = A_m \rho^{(1)}, \quad \xi_i \in V_{\xi p}; \\ \langle \rho^{(1)} \rangle = 0, \quad \langle p^{(1)} \rangle = 0, \quad \langle v_i^{(0)} \rangle = \bar{v}_i; \\ \llbracket v_i^{(0)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket p^{(1)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket \rho^{(1)} \rrbracket = 0; \\ v_i^{(0)} \Big|_{\Sigma_{\xi sp}} = 0; \\ i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad m = l, g. \end{cases} \quad (59)$$

Исключим далее из рассмотрения функцию плотности $\rho^{(1)}$, т.к. она однозначно вычисляется с помощью уравнения состояния для заданной среды при известном давлении $p^{(1)}$. Тогда, учитывая в (59) равенство нулю дивергенции скорости $v_i^{(0)}$, приходим к искомой постановке *локальной задачи на ячейке периодичности в нулевом приближении*:

$$\begin{cases} v_{i/i}^{(0)} = 0, \\ -p_{/i}^{(1)} + \mu^0 v_{i/jj}^{(0)} = p_{,i}^{(0)}, \quad \xi_i \in V_{\xi p}; \\ \langle p^{(1)} \rangle = 0, \quad \langle v_i^{(0)} \rangle = \bar{v}_i; \\ \llbracket v_i^{(0)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket p^{(1)} \rrbracket = 0; \\ v_i^{(0)} = 0, \quad \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}; \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases} \quad (60)$$

Отметим, что градиент давления $p_{,i}^{(0)}$ в системе (60) зависит только от глобальных координат x_i и рассматривается как «входные данные» локальной задачи фильтрации.

1.2.2.2 Постановка локальных задач на ячейке периодичности в случае обобщенной модели слабосжимаемой жидкости

1.2.2.2.1 Асимптотические разложения в задаче фильтрации слабосжимаемой жидкости

С учетом (23), (24) и (34), системы (26) – (27) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \kappa^{-1} v_{0i/i} + v_{0i,i} &= 0, \\ \frac{\rho_0}{Eu_l^0} \kappa^k \left(\frac{\partial v_{0i}}{\partial t} + \kappa^{-1} (v_{0i} v_{0j})_{/j} + (v_{0i} v_{0j})_{,j} \right) &= -\kappa^{-1} p_{0/i} - p_{0,i} + \\ + \kappa^{k+n} (\lambda_l^0 + \mu_l^0) (\kappa^{-2} v_{0j/ij} + \kappa^{-1} (v_{0j/j,i} + v_{0j/i,j}) + v_{0j,ij}) &+ \\ + \kappa^{k+n} \mu_l^0 (\kappa^{-2} v_{0i/jj} + 2\kappa^{-1} v_{0i/j,j} + v_{0i,jj}), \quad x_i \in V_l; & \\ i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3} & \end{aligned} \quad (61)$$

и

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \kappa^{-1} \left(\rho_0 v_{1i} + \rho_1 v_{0i} + \rho_1 v_{1i} \right)_{/i} + \left(\rho_0 v_{1i} + \rho_1 v_{0i} + \rho_1 v_{1i} \right)_{/i} = 0, \\
& \frac{1}{Eu_l^0} \kappa^k \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0 v_{1i} + \rho_1 v_{0i} + \rho_1 v_{1i} \right) + \\
& + \frac{1}{Eu_l^0} \kappa^k \left(\rho_0 \left(v_{0i} v_{1j} + v_{1i} v_{0j} + v_{1i} v_{1j} \right) + \rho_1 \left(v_{0i} v_{0j} + v_{0i} v_{1j} + v_{1i} v_{0j} + v_{1i} v_{1j} \right) \right)_{/j} + \\
& + \frac{1}{Eu_l^0} \kappa^{k-1} \left(\rho_0 \left(v_{0i} v_{1j} + v_{1i} v_{0j} + v_{1i} v_{1j} \right) + \rho_1 \left(v_{0i} v_{0j} + v_{0i} v_{1j} + v_{1i} v_{0j} + v_{1i} v_{1j} \right) \right)_{/j} = \quad (62) \\
& = -\kappa^{-1} p_{1/i} - p_{1,i} + \kappa^{k+n} \left(\lambda_l^0 + \mu_l^0 \right) \left(\kappa^{-2} v_{1j/i} + \kappa^{-1} \left(v_{1j/j,i} + v_{1j/i,j} \right) + v_{1i,jj} \right) + \\
& + \kappa^{k+n} \mu_l^0 \left(\kappa^{-2} v_{1i/jj} + 2\kappa^{-1} v_{1i/j,j} + v_{1i,jj} \right), \\
& p_1 = \frac{\tilde{K}}{\rho_0} \rho_1, \quad x_i \in V_l; \\
& i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}.
\end{aligned}$$

В соответствии с общей концепцией MAO решение систем (61) и (62) будем искать в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра κ , которые имеют вид, соответственно:

$$\begin{aligned}
v_{0i}(\mathbf{x}, \xi, t) &= v_{0i}^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) + \kappa v_{0i}^{(1)}(\mathbf{x}, \xi, t) + O(\kappa^2), \\
p_0(\mathbf{x}, \xi, t) &= p_0^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) + \kappa p_0^{(1)}(\mathbf{x}, \xi, t) + O(\kappa^2)
\end{aligned} \quad (63)$$

и

$$\begin{aligned}
v_{1i}(\mathbf{x}, \xi, t) &= v_{1i}^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) + \kappa v_{1i}^{(1)}(\mathbf{x}, \xi, t) + O(\kappa^2), \\
p_1(\mathbf{x}, \xi, t) &= p_1^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) + \kappa p_1^{(1)}(\mathbf{x}, \xi, t) + O(\kappa^2), \\
\rho_1(\mathbf{x}, \xi, t) &= \rho_1^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) + \kappa \rho_1^{(1)}(\mathbf{x}, \xi, t) + O(\kappa^2).
\end{aligned} \quad (64)$$

1.2.2.2.2 Локальные уравнения неразрывности и движения

Подставляя разложения (63) в уравнение неразрывности из (61), получаем:

$$v_{0i/i}^{(0)} = 0 \quad (65)$$

– уравнение неразрывности нулевого уровня;

$$v_{0i,i}^{(0)} + v_{0i/i}^{(1)} = 0 \quad (66)$$

– уравнение неразрывности первого уровня.

Подставляя разложения (63) в уравнение движения из (61), приходим к общему уравнению:

$$\begin{aligned} & \kappa^{-1} A_1^i + \kappa^0 A_2^i + \kappa^1 A_3^i + \\ & + \kappa^{k-1} A_4^i + \kappa^k A_5^i + \kappa^{k+1} A_6^i + \kappa^{k+2} A_7^i + \\ & + \kappa^{k+n-2} A_8^i + \kappa^{k+n-1} A_9^i + \kappa^{k+n} A_{10}^i + \kappa^{k+n+1} A_{11}^i = 0, \end{aligned} \quad (67)$$

где введены обозначения:

$$A_1^i = p_{0/i}^{(0)};$$

$$A_2^i = p_{0/i}^{(1)} + p_{0,i}^{(0)};$$

$$A_3^i = p_{0,i}^{(1)};$$

$$A_4^i = \frac{\rho_0}{Eu_l^0} (v_{0i}^{(0)} v_{0j}^{(0)})_{,j};$$

$$A_5^i = \frac{\rho_0}{Eu_l^0} \left(\frac{\partial v_{0i}^{(0)}}{\partial t} + (v_{0i}^{(0)} v_{0j}^{(1)} + v_{0i}^{(1)} v_{0j}^{(0)})_{,j} + (v_{0i}^{(0)} v_{0j}^{(0)})_{,j} \right);$$

$$A_6^i = \frac{\rho_0}{Eu^0} \left(\frac{\partial v_{0i}^{(1)}}{\partial t} + (v_{0i}^{(1)} v_{0j}^{(1)})_{,j} + (v_{0i}^{(0)} v_{0j}^{(1)} + v_{0i}^{(1)} v_{0j}^{(0)})_{,j} \right);$$

$$A_7^i = \frac{\rho_0}{Eu^0} (v_{0i}^{(1)} v_{0j}^{(1)})_{,j};$$

$$A_8^i = -(\lambda_l^0 + \mu_l^0) v_{0j/ij}^{(0)} - \mu_l^0 v_{0i/jj}^{(0)};$$

$$A_9^i = -(\lambda_l^0 + \mu_l^0) (v_{0j/j,i}^{(0)} + v_{0j/i,j}^{(0)} + v_{0j/ij}^{(1)}) - \mu_l^0 (2v_{0i/j,j}^{(0)} + v_{0i/jj}^{(1)});$$

$$A_{10}^i = -(\lambda_l^0 + \mu_l^0) (v_{0j,ij}^{(0)} + v_{0j/j,i}^{(1)} + v_{0j/i,j}^{(1)}) - \mu_l^0 (v_{0i,jj}^{(0)} + 2v_{0i/j,j}^{(1)});$$

$$A_{11}^i = -(\lambda_l^0 + \mu_l^0) v_{0j,ij}^{(1)} - \mu_l^0 v_{0i,jj}^{(1)}.$$

Аналогично п. 1.2.2.1.2 выберем режим течения $k=2$ и $n=0$. В этом случае, получаем:

$$p_{0/i}^{(0)} = 0 \quad (68)$$

– уравнение движения нулевого уровня;

$$-p_{0,i}^{(0)} - p_{0,i}^{(1)} + (\lambda_l^0 + \mu_l^0) v_{0j/ij}^{(0)} + \mu_l^0 v_{0i/jj}^{(0)} = 0 \quad (69)$$

– уравнение движения первого уровня.

Подставляя разложения (64) в уравнение неразрывности из (62), получаем:

$$\left(\rho_0 v_{li}^{(0)} + \rho_1^{(0)} (v_{0i}^{(0)} + v_{li}^{(0)})\right)_{,i} = 0 \quad (70)$$

– уравнение неразрывности нулевого уровня;

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_1^{(0)}}{\partial t} + \left(\rho_0 v_{li}^{(0)} + \rho_1^{(0)} (v_{0i}^{(0)} + v_{li}^{(0)})\right)_{,i} + \\ & + \left(\rho_0 v_{li}^{(1)} + \rho_1^{(1)} (v_{0i}^{(0)} + v_{li}^{(0)}) + \rho_1^{(0)} (v_{0i}^{(1)} + v_{li}^{(1)})\right)_{,i} = 0 \end{aligned} \quad (71)$$

– уравнение неразрывности первого уровня.

Подставляя разложения (64) в уравнение движения из (62), приходим к общему уравнению:

$$\begin{aligned} & \kappa^{-1} A_1^i + \kappa^0 A_2^i + \kappa^1 A_3^i + \\ & + \kappa^{k-1} A_4^i + \kappa^k A_5^i + \kappa^{k+1} A_6^i + \kappa^{k+2} A_7^i + \kappa^{k+3} A_8^i + \\ & + \kappa^{k+n-2} A_9^i + \kappa^{k+n-1} A_{10}^i + \kappa^{k+n} A_{11}^i + \kappa^{k+n+1} A_{12}^i = 0, \end{aligned} \quad (72)$$

где введены обозначения:

$$A_1^i = p_{li}^{(0)};$$

$$A_2^i = p_{li}^{(1)} + p_{li}^{(0)};$$

$$A_3^i = p_{li}^{(1)};$$

$$A_4^i = \frac{1}{Eu_l^0} B_{1/j}^{ij};$$

$$A_5^i = \frac{1}{Eu_l^0} \left(\frac{\partial C_1^i}{\partial t} + B_{1,j}^{ij} + B_{2/j}^{ij} \right);$$

$$A_6^i = \frac{1}{Eu_l^0} \left(\frac{\partial C_2^i}{\partial t} + B_{2,j}^{ij} + B_{3/j}^{ij} \right);$$

$$A_7^i = \frac{1}{Eu_l^0} \left(\frac{\partial C_3^i}{\partial t} + B_{3,j}^{ij} + B_{4/j}^{ij} \right);$$

$$A_8^i = \frac{1}{Eu_l^0} B_{4,j}^{ij};$$

$$A_9^i = -(\lambda_l^0 + \mu_l^0) v_{1j/ij}^{(0)} - \mu_l^0 v_{li/jj}^{(0)};$$

$$A_{10}^i = -(\lambda_l^0 + \mu_l^0) (v_{1j/j,i}^{(0)} + v_{1j/i,j}^{(0)} + v_{1j/ij}^{(1)}) - \mu_l^0 (2v_{li/j,j}^{(0)} + v_{li/jj}^{(1)});$$

$$A_{11}^i = -(\lambda_l^0 + \mu_l^0)(v_{1j,ij}^{(0)} + v_{1j/i,i}^{(1)} + v_{1j/i,j}^{(1)}) - \mu_l^0(v_{li,jj}^{(0)} + 2v_{li/j,j}^{(1)});$$

$$A_{12}^i = -(\lambda_l^0 + \mu_l^0)v_{1j,ij}^{(1)} - \mu_l^0 v_{li,jj}^{(1)};$$

$$B_1^{ij} = \rho_0(v_{0i}^{(0)}v_{1j}^{(0)} + v_{0i}^{(0)}v_{0j}^{(0)} + v_{li}^{(0)}v_{1j}^{(0)}) + \rho_1^{(0)}(v_{0i}^{(0)}v_{0j}^{(0)} + v_{0i}^{(0)}v_{1j}^{(0)} + v_{li}^{(0)}v_{0j}^{(0)} + v_{li}^{(0)}v_{1j}^{(0)});$$

$$B_2^{ij} = \rho_0(v_{0i}^{(0)}v_{1j}^{(1)} + v_{0i}^{(1)}v_{1j}^{(0)} + v_{li}^{(0)}v_{0j}^{(1)} + v_{li}^{(1)}v_{0j}^{(0)} + v_{li}^{(0)}v_{1j}^{(1)} + v_{li}^{(1)}v_{1j}^{(0)}) + \\ + \rho_1^{(0)}(v_{0i}^{(0)}v_{0j}^{(1)} + v_{0i}^{(1)}v_{0j}^{(0)} + v_{0i}^{(0)}v_{1j}^{(1)} + v_{0i}^{(1)}v_{1j}^{(0)} + v_{li}^{(0)}v_{0j}^{(1)} + v_{li}^{(1)}v_{0j}^{(0)} + v_{li}^{(0)}v_{1j}^{(1)} + v_{li}^{(1)}v_{1j}^{(0)}) + \\ + \rho_1^{(1)}(v_{0i}^{(0)}v_{0j}^{(0)} + v_{0i}^{(0)}v_{1j}^{(0)} + v_{li}^{(0)}v_{0j}^{(0)} + v_{li}^{(0)}v_{1j}^{(0)});$$

$$B_3^{ij} = \rho_0(v_{0i}^{(1)}v_{1j}^{(1)} + v_{li}^{(1)}v_{0j}^{(1)} + v_{li}^{(1)}v_{1j}^{(1)}) + \\ + \rho_1^{(0)}(v_{0i}^{(1)}v_{0j}^{(1)} + v_{0i}^{(1)}v_{1j}^{(1)} + v_{li}^{(1)}v_{0j}^{(1)} + v_{li}^{(1)}v_{1j}^{(1)}) + \\ + \rho_1^{(1)}(v_{0i}^{(0)}v_{0j}^{(1)} + v_{0i}^{(1)}v_{0j}^{(0)} + v_{0i}^{(0)}v_{1j}^{(1)} + v_{0i}^{(1)}v_{1j}^{(0)} + v_{li}^{(0)}v_{0j}^{(1)} + v_{li}^{(1)}v_{0j}^{(0)} + v_{li}^{(0)}v_{1j}^{(1)} + v_{li}^{(1)}v_{1j}^{(0)});$$

$$B_4^{ij} = \rho_1^{(1)}(v_{0i}^{(1)}v_{0j}^{(1)} + v_{0i}^{(1)}v_{1j}^{(1)} + v_{li}^{(1)}v_{0j}^{(1)} + v_{li}^{(1)}v_{1j}^{(1)});$$

$$C_1^i = \rho_0 v_{li}^{(0)} + \rho_1^{(0)}(v_{0i}^{(0)} + v_{li}^{(0)});$$

$$C_2^i = \rho_0 v_{li}^{(1)} + \rho_1^{(0)}(v_{0i}^{(1)} + v_{li}^{(1)}) + \rho_1^{(1)}(v_{0i}^{(0)} + v_{li}^{(0)});$$

$$C_3^i = \rho_1^{(1)}(v_{0i}^{(1)} + v_{li}^{(1)}).$$

Аналогично п. 1.2.2.1.2 выберем режим течения $k = 2$ и $n = 0$. В этом случае, имеем:

$$p_{1/i}^{(0)} = 0 \quad (73)$$

– уравнение движения нулевого уровня;

$$-p_{1,i}^{(0)} - p_{1/i}^{(1)} + (\lambda_l^0 + \mu_l^0)v_{1j/ij}^{(0)} + \mu_l^0 v_{li/jj}^{(0)} = 0 \quad (74)$$

– уравнение движения первого уровня.

1.2.2.2.3 Локальные уравнения состояния

Подставляя второе и третье разложения из (64) в уравнение состояния из системы (62), получаем:

$$p_1^{(0)} = \frac{\tilde{K}}{\rho_0} \rho_1^{(0)} \quad (75)$$

– уравнение состояния нулевого уровня;

$$p_1^{(1)} = \frac{\tilde{K}}{\rho_0} \rho_1^{(1)} \quad (76)$$

– уравнение состояния первого уровня.

1.2.2.2.4 Локальные граничные условия

Подставляя разложения для скоростей из (63) и (64) в граничные условия прилипания (28), получим:

$$v_{qi}^{(0)} \Big|_{\Sigma_{\xi st}} = 0, \quad q = 0, 1 \quad (77)$$

– граничное условие нулевого уровня;

$$v_{qi}^{(1)} \Big|_{\Sigma_{\xi st}} = 0, \quad q = 0, 1 \quad (78)$$

– граничное условие первого уровня.

1.2.2.2.5 Осреднение параметров

На основе соотношений (25) и (38) можно получить дополнительные интегральные условия:

$$\begin{aligned} \langle \rho_0 v_{0i} \rangle &= \rho_0 \bar{v}_{0i}, \quad \langle \rho_0 v_{1i} + \rho_1 v_{0i} + \rho_1 v_{1i} \rangle = \rho_0 \bar{v}_{1i} + \bar{\rho}_1 \bar{v}_{0i} + \bar{\rho}_1 \bar{v}_{1i}; \\ \langle \rho_1 \rangle &= \bar{\rho}_1; \\ \langle p_0 \rangle &= \bar{p}_0, \quad \langle p_1 \rangle = \bar{p}_1. \end{aligned} \quad (79)$$

Подставляя разложения (63) и (64) в (79), получаем:

$$\begin{cases} \langle \rho_0 v_{0i}^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) \rangle = \rho_0 \bar{v}_{0i}(\mathbf{x}, t), \\ \langle \rho_0 v_{0i}^{(1)}(\mathbf{x}, \xi, t) \rangle = 0; \\ \langle p_0^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) \rangle = \bar{p}_0(\mathbf{x}, t), \\ \langle p_0^{(1)}(\mathbf{x}, \xi, t) \rangle = 0. \end{cases} \quad (80)$$

– интегральные условия осреднения для первой задачи фильтрации слабосжимаемой жидкости;

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \rho_0 v_{li}^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) + \rho_1^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t)(v_{0i}^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) + v_{li}^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t)) \rangle = \rho_0 \bar{v}_{li}(\mathbf{x}, t) + \bar{\rho}_1(\mathbf{x}, t)(\bar{v}_{0i}(\mathbf{x}, t) + \bar{v}_{li}(\mathbf{x}, t)), \\ \langle \rho_0 v_{li}^{(1)}(\mathbf{x}, \xi, t) + \rho_1^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t)(v_{0i}^{(1)}(\mathbf{x}, \xi, t) + v_{li}^{(1)}(\mathbf{x}, \xi, t)) + \rho_1^{(1)}(\mathbf{x}, \xi, t)(v_{0i}^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) + v_{li}^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t)) \rangle = 0; \\ \langle p_1^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) \rangle = \bar{p}_1(\mathbf{x}, t), \\ \langle p_1^{(1)}(\mathbf{x}, \xi, t) \rangle = 0; \\ \langle \rho_1^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) \rangle = \bar{\rho}_1(\mathbf{x}, t), \\ \langle \rho_1^{(1)}(\mathbf{x}, \xi, t) \rangle = 0. \end{array} \right. \quad (81)$$

– интегральные условия осреднения для второй задачи фильтрации слабосжимаемой жидкости.

1.2.2.2.6 Общая постановка локальных задач на ячейке периодичности

Группируя соотношения (65), (68), (77) и (80) получаем *первую локальную задачу фильтрации слабосжимаемой жидкости нулевого уровня*:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{0i/i}^{(0)} = 0, \\ p_{0/i}^{(0)} = 0, \quad \xi_i \in V_{\xi p}; \\ \langle \rho_0 v_{0i}^{(0)} \rangle = \rho_0 \bar{v}_{0i}, \quad \langle p_0^{(0)} \rangle = \bar{p}_0; \\ \llbracket p_0^{(0)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket v_{0i}^{(0)} \rrbracket = 0; \\ v_{0i}^{(0)} = 0, \quad \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}; \\ i = \overline{1, 3}. \end{array} \right. \quad (82)$$

Группируя соотношения (66), (69), (78) и (80) получаем *первую локальную задачу фильтрации слабосжимаемой жидкости первого уровня*:

$$\begin{cases}
v_{0i,i}^{(0)} + v_{0i/i}^{(1)} = 0, \\
-p_{0,i}^{(0)} - p_{0i}^{(1)} + (\lambda_l^0 + \mu_l^0) v_{0j/ij}^{(0)} + \mu_l^0 v_{0i/jj}^{(0)} = 0, \xi_i \in V_{\xi p}; \\
\langle \rho_0 v_{0i}^{(1)} \rangle = 0, \langle p_0^{(1)} \rangle = 0; \\
\llbracket p_0^{(1)} \rrbracket = 0, \llbracket v_{0i}^{(1)} \rrbracket = 0; \\
v_{0i}^{(1)} = 0, \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}; i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}.
\end{cases} \quad (83)$$

Аналогично, группируя соотношения (70), (73), (75), (77) и (81) получаем *вторую локальную задачу фильтрации слабосжимаемой жидкости нулевого уровня*:

$$\begin{cases}
\left(\rho_0 v_{1i}^{(0)} + \rho_1^{(0)} (v_{0i}^{(0)} + v_{1i}^{(0)}) \right)_{,i} = 0, \\
p_{1i}^{(0)} = 0, \\
p_1^{(0)} = \frac{\tilde{K}}{\rho_0} \rho_1^{(0)}, \xi_i \in V_{\xi p}; \\
\langle \rho_0 v_{1i}^{(0)} + \rho_1^{(0)} (v_{0i}^{(0)} + v_{1i}^{(0)}) \rangle = \rho_0 \bar{v}_{1i} + \bar{\rho}_1 (\bar{v}_{0i} + \bar{v}_{1i}), \langle p_1^{(0)} \rangle = \bar{p}_1, \langle \rho_1^{(0)} \rangle = \bar{\rho}_1; \\
\llbracket p_1^{(0)} \rrbracket = 0, \llbracket \rho_1^{(0)} \rrbracket = 0, \llbracket v_{1i}^{(0)} \rrbracket = 0; \\
v_{1i}^{(0)} = 0, \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}; i = \overline{1,3}.
\end{cases} \quad (84)$$

Группируя соотношения (71), (74), (76), (78) и (81) получаем *вторую локальную задачу фильтрации слабосжимаемой жидкости первого уровня*:

$$\begin{cases}
\frac{\partial \rho_1^{(0)}}{\partial t} + \left(\rho_0 v_{1i}^{(0)} + \rho_1^{(0)} (v_{0i}^{(0)} + v_{1i}^{(0)}) \right)_{,i} + \left(\rho_0 v_{1i}^{(1)} + \rho_1^{(1)} (v_{0i}^{(0)} + v_{1i}^{(0)}) + \rho_1^{(0)} (v_{0i}^{(1)} + v_{1i}^{(1)}) \right)_{,i} = 0, \\
-p_{1,i}^{(0)} - p_{1i}^{(1)} + (\lambda_l^0 + \mu_l^0) v_{1j/ij}^{(0)} + \mu_l^0 v_{1i/jj}^{(0)} = 0, \\
p_1^{(1)} = \frac{\tilde{K}}{\rho_0} \rho_1^{(1)}, \xi_i \in V_{\xi p}; \\
\langle \rho_0 v_{1i}^{(1)} + \rho_1^{(0)} (v_{0i}^{(1)} + v_{1i}^{(1)}) + \rho_1^{(1)} (v_{0i}^{(0)} + v_{1i}^{(0)}) \rangle = 0, \langle p_1^{(1)} \rangle = 0, \langle \rho_1^{(1)} \rangle = 0; \\
\llbracket p_1^{(1)} \rrbracket = 0, \llbracket \rho_1^{(1)} \rrbracket = 0, \llbracket v_{1i}^{(1)} \rrbracket = 0; \\
v_{1i}^{(1)} = 0, \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}; i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}.
\end{cases} \quad (85)$$

Из уравнения движения в (82) получаем, что $p_0^{(0)}$ не зависит от локальных координат ξ_i :

$$p_0^{(0)} = p_0^{(0)}(\mathbf{x}) \quad (86)$$

Применяя оператор осреднения давления из (82) получаем, что

$$p_0^{(0)} = \bar{p}_0. \quad (87)$$

Тогда, присоединяя к уравнению неразрывности, граничному условию, выражениям осреднения и периодичности скорости из системы (82) уравнение равновесия жидкости, условия осреднения и периодичности давления из системы (83), а также учитывая равенство нулю дивергенции скорости, получаем искомую локальную задачу на ячейке периодичности в нулевом приближении:

$$\begin{cases} v_{0i/i}^{(0)} = 0, \\ -p_{0/i}^{(1)} + \mu_l^0 v_{0i/jj}^{(0)} = p_{0,i}^{(0)}, \quad \xi_i \in V_{\xi p}; \\ \langle p_0^{(1)} \rangle = 0, \quad \langle v_{0i}^{(0)} \rangle = \bar{v}_{0i}; \\ \llbracket p_0^{(1)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket v_{0i}^{(0)} \rrbracket = 0; \\ v_{0i}^{(0)} = 0, \quad \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}; \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases} \quad (88)$$

Неизвестными в этой системе являются функции $v_{0i}^{(0)}$, $p_0^{(1)}$, а градиент давления $p_{0,i}^{(0)}$ рассматривается как входные данные.

Аналогично, из уравнения движения в (84) получаем, что $p_1^{(0)}$ не зависит от локальных координат ξ_i :

$$p_1^{(0)} = p_1^{(0)}(\mathbf{x}) \quad (89)$$

Применяя оператор осреднения давления из (84) получаем, что

$$p_1^{(0)} = \bar{p}_1. \quad (90)$$

Следовательно, и $p_1^{(0)}$ не зависит от ξ_i . Тогда, присоединяя к уравнению неразрывности, граничному условию, выражениям осреднения и периодичности скорости из системы (84) уравнение равновесия жидкости, уравнение состояния, условия осреднения и периодичности давления из системы (85), получаем искомую локальную задачу на ячейке периодичности в нулевом приближении:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\left(\rho_0 v_{li}^{(0)} + \rho_1^{(0)} (v_{0i}^{(0)} + v_{li}^{(0)}) \right)_{,i} = 0, \\
-p_{1,i}^{(0)} - p_{1/i}^{(1)} + (\lambda_l^0 + \mu_l^0) v_{1j/ij}^{(0)} + \mu_l^0 v_{li/jj}^{(0)} = 0, \\
p_1^{(1)} = \frac{\tilde{K}}{\rho_0} \rho_1^{(1)}, \quad \xi_i \in V_{\xi p}; \\
\left\langle \rho_0 v_{li}^{(0)} + \rho_1^{(0)} (v_{0i}^{(0)} + v_{li}^{(0)}) \right\rangle = \rho_0 \bar{v}_{li} + \bar{\rho}_1 (\bar{v}_{0i} + \bar{v}_{li}), \quad \langle p_1^{(1)} \rangle = 0, \quad \langle \rho_1^{(1)} \rangle = 0; \\
\llbracket p_1^{(1)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket \rho_1^{(1)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket v_{li}^{(0)} \rrbracket = 0; \\
v_{li}^{(0)} = 0, \quad \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}; \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}.
\end{array} \right. \quad (91)$$

Неизвестными в этой системе являются функции $v_{li}^{(0)}$ и $p_1^{(1)}$, а функции $v_{0i}^{(0)}$ и $\rho_1^{(0)}$, а также градиент давления $p_{1,i}^{(0)}$ рассматриваются как входные данные.

Преобразуем уравнение неразрывности в системе (91). Поскольку $\rho_1^{(0)}$ и ρ_0 не зависят от ξ_i , то получаем

$$\left(\rho_0 v_{li}^{(0)} + \rho_1^{(0)} v_{0i}^{(0)} + \rho_1^{(0)} v_{li}^{(0)} \right)_{,i} = \rho_0 v_{li/i}^{(0)} + \rho_1^{(0)} v_{0i/i}^{(0)} + \rho_1^{(0)} v_{li/i}^{(0)} = 0. \quad (92)$$

Поскольку скорость $v_{0i}^{(0)}$ удовлетворяет уравнению несжимаемости (65), то (92) сводится к следующему:

$$v_{li/i}^{(0)} = 0, \quad (93)$$

а задача (91) окончательно принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l}
v_{li/i}^{(0)} = 0, \\
-p_{1/i}^{(1)} + \mu_l^0 v_{li/jj}^{(0)} = p_{1,i}^{(0)}, \\
p_1^{(1)} = \frac{\tilde{K}}{\rho_0} \rho_1^{(1)}, \quad \xi_i \in V_{\xi p}; \\
\langle \rho_1^{(1)} \rangle = 0, \quad \langle p_1^{(1)} \rangle = 0, \quad \langle v_{li}^{(0)} \rangle = \bar{v}_{li}; \\
\llbracket \rho_1^{(1)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket p_1^{(1)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket v_{li}^{(0)} \rrbracket = 0; \\
v_{li}^{(0)} = 0, \quad \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}; \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}.
\end{array} \right. \quad (94)$$

Таким образом, первая и вторая локальные задачи фильтрации слабосжимаемой жидкости (88) и (94) формально в точности совпадают не только между собой, но и с локальной задачей фильтрации газа (60). По этой причине дальнейший процесс поиска решения этих задач будет одинаковым.

1.2.2.3 Постановка локальной задачи на ячейке периодичности с учетом трехмерной структуры пор

Будем рассматривать далее трехмерную пористую структуру, у которой течение среды осуществляется вдоль одной из 3-х осей $O\xi_i$ (см. рисунок 1.3, в, г). Для решения локальных задач (60), (88) и (94) воспользуемся методом разделения переменных. В этом случае в силу линейности задач решение будем искать в виде линейных функций от входных данных, т.е. $p_i^{(0)}$:

$$p^{(1)}(\mathbf{x}, \xi) = -\sum_{\alpha=1}^3 P^{(\alpha)}(\xi) p_{,\alpha}^{(0)}(\mathbf{x}), \quad v_i^{(0)}(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{\mu_m^0} \sum_{\alpha=1}^3 W_i^{(\alpha)}(\xi) p_{,\alpha}^{(0)}(\mathbf{x}), \quad (95)$$

где введены функции $P^{(\alpha)}(\xi)$ и $W_i^{(\alpha)}(\xi)$, зависящие только от локальных координат ξ .

Подставив выражения (95) в локальные задачи (60), (88) и (94), после исключения градиента $p_i^{(0)}$ получим набор локальных задач для определения функций $P^{(\alpha)}(\xi)$ и $W_i^{(\alpha)}(\xi)$, которые не содержат констант, описывающих физические свойства сред, и не зависят от входных данных:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{i/i}^{(\alpha)} = 0, \\ P_{/i}^{(\alpha)} - W_{i/jj}^{(\alpha)} = \delta_i^{(\alpha)}, \quad \xi_i \in V_{\xi p}; \\ \langle P^{(\alpha)} \rangle = 0; \\ \llbracket W_i^{(\alpha)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket P^{(\alpha)} \rrbracket = 0; \\ W_i^{(\alpha)} = 0, \quad \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}; \\ i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}, \quad \alpha = \overline{1,3}. \end{array} \right. \quad (96)$$

Здесь введены функции, позволяющие учитывать вырожденный случай пористой системы, когда сквозные капилляры по одному из координатных направлений отсутствуют:

$$\delta_i^{(\alpha)} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq \alpha \text{ или при } i = \alpha \text{ } P_{,\alpha}^{(0)} = 0, \\ 1 & \text{при } i = \alpha \text{ и } P_{,\alpha}^{(0)} \neq 0. \end{cases}$$

Далее каждую из локальных задач (96) будем обозначать $L^{(\alpha)}$, $\alpha = \overline{1,3}$.

1.2.2.4 Физическая интерпретация локальной задачи

Из анализа системы (96) можно сделать следующие выводы. Каждая из задач $L^{(\alpha)}$, $\alpha = \overline{1,3}$ (96) представляет собой стационарную задачу течения некоторой фиктивной линейно-вязкой несжимаемой среды. Решение задач (96) зависит только от внутренней геометрии пор, поэтому их постановка применима для расчетов фильтрации любых газов и жидкостей в рамках сделанных ранее допущений.

Данные задачи обладают рядом особенностей. Во-первых, поскольку функция $p^{(1)}$ в выражении (40) представляет собой пульсацию давления p по отношению к среднему значению \bar{p} , т.к.

$$\kappa p^{(1)} = p - p^{(0)} + O(\kappa^2), \quad \langle p^{(0)} \rangle = \bar{p}, \quad \langle p^{(1)} \rangle = 0,$$

то функция $p^{(1)}$ может быть как положительной, так и отрицательной. Во-вторых, наличие условия $\langle p^{(1)} \rangle = 0$ делает задачу (96) интегро-дифференциальной, что вместе с условиями периодичности (35) в значительной степени отличает ее от классической задачи Стокса.

1.2.2.5 Сведение локальной задачи к задаче на 1/8 ячейки периодичности

Решение задачи (96) может быть упрощено, если воспользоваться следующей теоремой о продолжении решения [37], которая является аналогом теоремы из [39].

Пусть ячейка периодичности $V_{\xi p}$ 3D-структуры имеет зеркальную симметрию относительно координатных плоскостей $O_{\xi_1 \xi_2}$, $O_{\xi_1 \xi_3}$, $O_{\xi_2 \xi_3}$. Тогда решение $P^{(\alpha)}$, $W_i^{(\alpha)}$ задачи (96) получается с помощью симметричного или антисимметричного продолжения функций $\tilde{P}^{(\alpha)}$, $\tilde{W}_i^{(\alpha)}$, определенных в 1/8 ячейки периодичности $\tilde{V}_{\xi p}$ (в первом квадранте $\{\xi_i : 0 \leq \xi_i \leq 1/2\}$) (см. рисунок 1.4) и являющихся решениями следующих задач:

$$\begin{cases} \tilde{W}_{ii}^{(\alpha)} = 0, \\ \tilde{P}_{ii}^{(\alpha)} - \tilde{W}_{ij}^{(\alpha)} = \delta_i^{(\alpha)}, \xi_i \in V_{\xi_p}; \\ \tilde{W}_i^{(\alpha)} = 0, \xi_i \in \Sigma_{\xi_{sp}}; i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}, \alpha = \overline{1,3}. \end{cases} \quad (97)$$

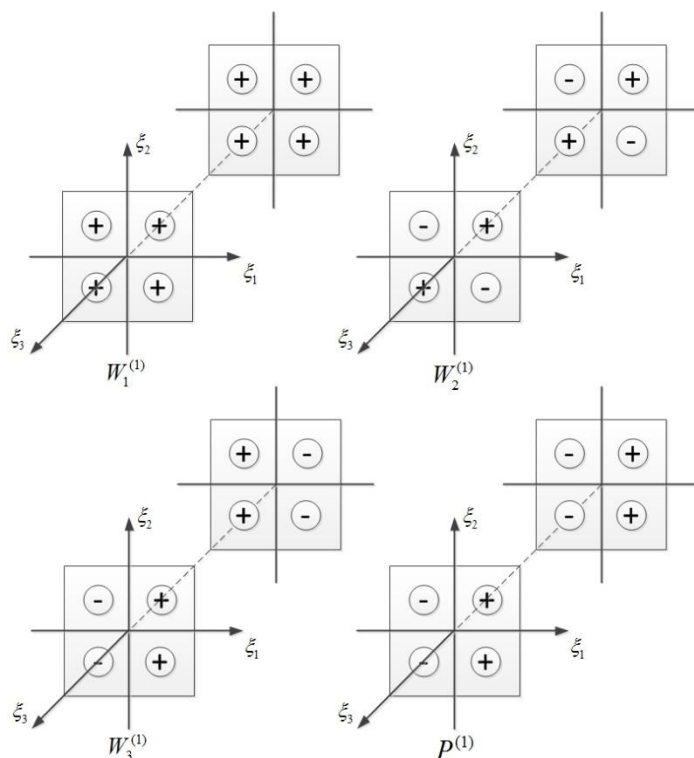


Рисунок 1.4 – Изменение знаков функций при симметричном или антисимметричном продолжении для локальной задачи $L^{(1)}$

Действительно, функции $\tilde{W}_i^{(\alpha)}$ и $\tilde{P}^{(\alpha)}$ удовлетворяют полной системе (96) в любой подобласти ячейки периодичности, полученной симметричным отражением подобласти \tilde{V}_{ξ_p} относительно координатных плоскостей, в чем можно убедиться непосредственной проверкой.

Изменение знаков функций $\tilde{W}_i^{(\alpha)}$, $\tilde{P}^{(\alpha)}$ для задачи $L^{(1)}$ при их симметричном или антисимметричном продолжении во всю ячейку периодичности осуществляется так, как показано на рисунке 1.4. Для задач $L^{(\alpha)}$, $\alpha = 2, 3$ продолжение осуществляется аналогичным образом с циклической перестановкой индексов и функций. Знак «+» на рисунке 1.4 означает, что при переходе из первого квадранта функция не изменяет знак (симметричное продолжение), а знак «-» – изменяет (антисимметричное продолжение). Тогда учитывая, что функции $\tilde{P}^{(\alpha)}$, $\alpha = \overline{1,3}$ антисимметричны хотя бы по одной из координат ξ_i , приходим к

выполнению интегрального условия осреднения для функций $P^{(\alpha)}$, $\alpha = \overline{1,3}$ в системе (96).

Используя принцип симметричного и антисимметричного продолжения решения системы (97), можно записать граничные условия на граничных плоскостях $1/8$ ячейки периодичности $\tilde{V}_{\xi p}$, удовлетворяющие условиям периодичности системы (96):

$$\xi_\beta = 0; \xi_\beta = \frac{1}{2} : \begin{cases} \tilde{W}_\gamma^{(\alpha)} (\delta_{\alpha\beta} + \delta_{\beta\gamma} - 2\delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma}) + \frac{\partial \tilde{W}_\gamma^{(\alpha)}}{\partial \xi_\beta} [1 - (\delta_{\alpha\beta} + \delta_{\beta\gamma} - 2\delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma})] = 0, \\ \tilde{P}^{(\alpha)} \delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \tilde{P}^{(\alpha)}}{\partial \xi_\beta} (1 - \delta_{\alpha\beta}) = 0; \alpha, \beta, \gamma = \overline{1,3}. \end{cases} \quad (98)$$

В явном виде данные условия выписываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi_1 = 0 \text{ и } \xi_1 = \frac{1}{2} : \quad & \frac{\partial \tilde{W}_1^{(1)}}{\partial \xi_1} = 0; \quad \tilde{W}_2^{(1)} = 0; \quad \tilde{W}_3^{(1)} = 0; \quad \tilde{P}^{(1)} = 0; \\ \xi_2 = 0 \text{ и } \xi_2 = \frac{1}{2} : \quad & \frac{\partial \tilde{W}_1^{(1)}}{\partial \xi_2} = 0; \quad \tilde{W}_2^{(1)} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{W}_3^{(1)}}{\partial \xi_2} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{P}^{(1)}}{\partial \xi_2} = 0; \\ \xi_3 = 0 \text{ и } \xi_3 = \frac{1}{2} : \quad & \frac{\partial \tilde{W}_1^{(1)}}{\partial \xi_3} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{W}_2^{(1)}}{\partial \xi_3} = 0; \quad \tilde{W}_3^{(1)} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{P}^{(1)}}{\partial \xi_3} = 0 \end{aligned} \quad (99)$$

– граничные условия для локальной задачи $L^{(1)}$;

$$\begin{aligned} \xi_1 = 0 \text{ и } \xi_1 = \frac{1}{2} : \quad & \tilde{W}_1^{(2)} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{W}_2^{(2)}}{\partial \xi_1} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{W}_3^{(2)}}{\partial \xi_1} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{P}^{(2)}}{\partial \xi_1} = 0; \\ \xi_2 = 0 \text{ и } \xi_2 = \frac{1}{2} : \quad & \tilde{W}_1^{(2)} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{W}_2^{(2)}}{\partial \xi_2} = 0; \quad \tilde{W}_3^{(2)} = 0; \quad \tilde{P}^{(2)} = 0; \\ \xi_3 = 0 \text{ и } \xi_3 = \frac{1}{2} : \quad & \frac{\partial \tilde{W}_1^{(2)}}{\partial \xi_3} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{W}_2^{(2)}}{\partial \xi_3} = 0; \quad \tilde{W}_3^{(2)} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{P}^{(2)}}{\partial \xi_3} = 0. \end{aligned} \quad (100)$$

– граничные условия для локальной задачи $L^{(2)}$;

$$\begin{aligned} \xi_1 = 0 \text{ и } \xi_1 = \frac{1}{2} : \quad & \tilde{W}_1^{(3)} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{W}_2^{(3)}}{\partial \xi_1} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{W}_3^{(3)}}{\partial \xi_1} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{P}^{(3)}}{\partial \xi_1} = 0; \\ \xi_2 = 0 \text{ и } \xi_2 = \frac{1}{2} : \quad & \frac{\partial \tilde{W}_1^{(3)}}{\partial \xi_2} = 0; \quad \tilde{W}_2^{(3)} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{W}_3^{(3)}}{\partial \xi_2} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{P}^{(3)}}{\partial \xi_2} = 0; \\ \xi_3 = 0 \text{ и } \xi_3 = \frac{1}{2} : \quad & \tilde{W}_1^{(3)} = 0; \quad \tilde{W}_2^{(3)} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{W}_3^{(3)}}{\partial \xi_3} = 0; \quad \tilde{P}^{(3)} = 0. \end{aligned} \quad (101)$$

– граничные условия для локальной задачи $L^{(3)}$.

1.2.3 Постановка глобальных задач фильтрации

1.2.3.1 Закон фильтрации Дарси

Запишем второе из выражений (95), в виде:

$$v_i^{(0)} = -\frac{1}{\mu_m^0} W_i^{(j)} p_{,j}^{(0)} \quad (102)$$

и произведем его осреднение:

$$\langle v_i^{(0)} \rangle = -\frac{1}{\mu_m^0} \langle W_i^{(j)} p_{,j}^{(0)} \rangle.$$

Учитывая условия осреднения в локальных задачах (60), (88) и (94), приходим к классическому закону фильтрации Дарси [5, 6, 49, 56, 73]:

$$\bar{w}_i = -\frac{K_i^j}{\mu^0} \bar{p}_{,j}, \quad (103)$$

где $\bar{w}_i = \varphi \langle v_i^{(0)} \rangle$ – скорость течения (фильтрации) [49], $K_i^j = \varphi \langle W_i^{(j)} \rangle = const$ – компоненты тензора проницаемости пористой среды. В векторной форме закон Дарси имеет вид:

$$\bar{\mathbf{w}} = -\frac{1}{\mu_m^0} \mathbf{K} \cdot \nabla_x \bar{p}. \quad (104)$$

Т.к. функции $W_\beta^{(\alpha)}$ для $\alpha \neq \beta$ являются антисимметричными (см. рисунок 1.4), то матрица $\mathbf{K} = (K_i^j)$ является диагональной. Если $K_1^1 = K_2^2 = K_3^3 = K$, то пористая среда является изотропной, в противном случае – анизотропной. Отметим, что безразмерные коэффициенты проницаемости K_i^j определяются только на основе данных о геометрии отдельно взятой поры в силу независимости компонент скорости $W_i^{(j)}$ от физических свойств среды, текущей по пористой системе.

1.2.3.2 Постановка глобальной задачи фильтрации газа

1.2.3.2.1 Осредненное уравнение неразрывности

Запишем локальное уравнение неразрывности первого уровня (42) в векторной форме:

$$\nabla_{\xi} \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(1)} + \rho^{(1)} \mathbf{v}^{(0)}) = -\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} - \nabla_x \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)}), \quad (105)$$

где ∇_{ξ} и ∇_x – операторы Гамильтона по безразмерным локальным и глобальным координатам соответственно. Применим к (105) оператор осреднения (36):

$$\langle \nabla_{\xi} \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(1)} + \rho^{(1)} \mathbf{v}^{(0)}) \rangle = -\left\langle \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} \right\rangle - \langle \nabla_x \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)}) \rangle \quad (106)$$

или

$$\frac{1}{\varphi |V_{\xi}|} \int_{V_{\xi p}} \nabla_{\xi} \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(1)} + \rho^{(1)} \mathbf{v}^{(0)}) dV = -\frac{1}{\varphi |V_{\xi}|} \int_{V_{\xi p}} \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} dV - \frac{1}{\varphi |V_{\xi}|} \int_{V_{\xi p}} \nabla_x \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)}) dV. \quad (107)$$

Для преобразования первого слагаемого в левой части (107) применим формулу Остроградского-Гаусса [24], которая в общем случае имеет вид:

$$\int_{V_{\xi p}} \nabla_{\xi} \cdot {}^k \mathbf{\Omega} dV = \int_{\Sigma_{\xi sp}} \mathbf{n} \cdot {}^k \mathbf{\Omega} dV, \quad (108)$$

где ${}^k \mathbf{\Omega}$ – некоторый тензор k -го ранга, \mathbf{n} – вектор нормали. Область $V_{\xi p}$ в нашем случае не зависит от времени, что дает возможность вынести производную по времени в первом слагаемом в правой части (107) за знак интеграла:

$$\frac{\partial \langle \rho^{(0)} \rangle}{\partial t} + \nabla_x \cdot \langle \rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)} \rangle = -\frac{1}{\varphi |V_{\xi}|} \int_{\Sigma_{\xi sp}} \mathbf{n} \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(1)} + \rho^{(1)} \mathbf{v}^{(0)}) dV. \quad (109)$$

Наконец, учитывая соотношения (54) и граничные условия (52) и (53) на поверхности $\Sigma_{\xi sg}$, приходим к уравнению:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) = 0 \quad (110)$$

Далее умножая (110) на пористость $\varphi = const$, окончательно получаем:

$$\frac{\partial \varphi \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{w}}) = 0, \quad (111)$$

где введена скорость фильтрации газа

$$\bar{\mathbf{w}} = \varphi \bar{\mathbf{v}}. \quad (112)$$

В компонентном виде можем записать

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \bar{w}_i) = 0, \quad (113)$$

где по повторяющимся индексам идет суммирование.

1.2.3.2.2 Нелинейное уравнение неустановившейся фильтрации газа в недеформируемой пористой среде

Подставляя закон Дарси (104) в осредненное (глобальное) уравнение неразрывности (111), получаем уравнение неустановившейся фильтрации в неизменяемой пористой среде в общей нелинейной постановке [6, 49, 73]:

$$\frac{\partial \varphi \bar{\rho}}{\partial t} - \nabla_x \cdot \left(\frac{1}{\mu_g} \bar{\rho} \mathbf{K} \cdot \nabla_x \bar{p} \right) = 0. \quad (114)$$

Для получения уравнения относительно глобального давления \bar{p} воспользуемся уравнением состояния (50). Применяя к нему операцию осреднения и учитывая соотношения (54), приходим к глобальному уравнению состояния, которые можно записать следующим образом:

$$\bar{\rho} = \frac{1}{A_g} \bar{p} \quad (115)$$

Подставляя (115) в (114) приходим к уравнению вида:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \nabla_x \cdot (\mathbf{A}'_g \cdot \nabla_x \bar{p}) = 0, \quad (116)$$

где введена матрица коэффициентов

$$\mathbf{A}'_g(\bar{p}) = \frac{\bar{p}}{\varphi\mu_g^0} \mathbf{K}.$$

В компонентной форме данное уравнение запишется в виде

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A'_{gij} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \right) = 0, \quad (117)$$

где

$$A'_{gij}(\bar{p}) = \frac{\bar{p}}{\varphi\mu_g^0} K_{ij}.$$

1.2.3.3 Постановка глобальной задачи фильтрации классической слабосжимаемой жидкости

Процедура получения глобального уравнения фильтрации для случая классической модели слабосжимаемой жидкости та же, что и для газа. После осреднения локального уравнения неразрывности и подстановки закона Дарси получится уравнение:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \nabla_x \cdot \left(\frac{1}{\varphi\mu_i^0} \bar{\rho} \mathbf{K} \cdot \nabla_x \bar{p} \right) = 0. \quad (118)$$

Для получения уравнения относительно глобального давления \bar{p} воспользуемся уравнением состояния (48). Применяя к нему операцию осреднения и учитывая соотношения (54), приходим к глобальному уравнению состояния, которые можно записать следующим образом:

$$\bar{\rho} = \frac{1}{A_t} \bar{p} - \frac{B}{A_t} \quad (119)$$

Подставляя (119) в (118) приходим к уравнению вида:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \nabla_x \cdot (\mathbf{A}'_t \cdot \nabla_x \bar{p}) = 0, \quad (120)$$

где введена матрица коэффициентов

$$\mathbf{A}'(\bar{p}) = \frac{1}{\varphi\mu_l^0} (\bar{p} - p_{0l} + \tilde{K}) \mathbf{K}.$$

В компонентной форме данное уравнение запишется в виде

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A'_{ij} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \right) = 0, \quad (121)$$

где

$$A'_{ij}(\bar{p}) = \frac{1}{\varphi\mu_l^0} (\bar{p} - p_{0l} + \tilde{K}) K_{ij}.$$

1.2.3.4 Постановка глобальной задачи фильтрации обобщенной слабосжимаемой жидкости

Запишем локальное уравнение неразрывности первого уровня (66) в векторной форме:

$$\nabla_x \cdot \mathbf{v}_0^{(0)} + \nabla_\xi \cdot \mathbf{v}_0^{(1)} = 0 \quad (122)$$

Применяя оператор осреднения (36) к уравнению (122) с учетом выражения осреднения скорости из (88) и того факта, что для всякой периодической функции $\langle \nabla_\xi \Theta \rangle = 0$, получаем осредненное уравнение движения несжимаемой части жидкости:

$$\nabla_x \cdot \bar{\mathbf{w}}_0 = 0, \quad (123)$$

где $\bar{\mathbf{w}}_0 = \varphi \langle \mathbf{v}_0^{(0)} \rangle$ – скорость фильтрации несжимаемой части жидкости. Подставляя закон фильтрации Дарси (104), окончательно получаем уравнение для расчета поля гидростатического давления слабосжимаемой жидкости:

$$\nabla_x \cdot (\mathbf{K} \cdot \nabla_x \bar{p}_0) = 0. \quad (124)$$

Аналогично, запишем уравнение неразрывности первого уровня (71) в векторной форме:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_1^{(0)}}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1^{(0)} + \rho_1^{(0)} (\mathbf{v}_0^{(0)} + \mathbf{v}_1^{(0)})) + \\ & + \nabla_\xi \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1^{(1)} + \rho_1^{(1)} (\mathbf{v}_0^{(0)} + \mathbf{v}_1^{(0)}) + \rho_1^{(0)} (\mathbf{v}_0^{(1)} + \mathbf{v}_1^{(1)})) = 0. \end{aligned} \quad (125)$$

Применяя оператор осреднения (36) к уравнению (125), с учетом того, что для всякой периодической функции $\langle \nabla_\xi \Theta \rangle = 0$, получаем осредненное уравнение движения сжимаемой части жидкости:

$$\frac{\partial \varphi \bar{\rho}_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla_x \cdot \bar{\mathbf{w}}_1 + \nabla_x \cdot (\bar{\rho}_1 (\bar{\mathbf{w}}_0 + \bar{\mathbf{w}}_1)) = 0, \quad (126)$$

где $\bar{\mathbf{w}}_1 = \varphi \langle \mathbf{v}_1^{(0)} \rangle$ – скорость фильтрации сжимаемой части жидкости. С учетом (123) это уравнение можно записать так:

$$\frac{\partial \varphi \bar{\rho}_1}{\partial t} + \nabla_x \cdot ((\rho_0 + \bar{\rho}_1) \bar{\mathbf{w}}_1) + \bar{\mathbf{w}}_0 \cdot \nabla_x \bar{\rho}_1 = 0. \quad (127)$$

Подставляя в (127) закон фильтрации Дарси, получаем:

$$\mu_l^0 \frac{\partial \varphi \bar{\rho}_1}{\partial t} = \nabla_x \cdot ((\rho_0 + \bar{\rho}_1) \mathbf{K} \cdot \nabla_x \bar{p}_1) + (\mathbf{K} \cdot \nabla_x \bar{p}_0) \cdot \nabla_x \bar{p}_1. \quad (128)$$

Для получения уравнения относительно глобального давления \bar{p} воспользуемся уравнениями состояния из системы (84). Применяя к нему операцию осреднения, приходим к глобальному уравнению состояния:

$$\bar{p}_1 = \frac{\tilde{K}}{\rho_0} \bar{\rho}_1 \quad (129)$$

После подстановки (129) в (128) получаем уравнение:

$$\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial t} = \nabla_x \cdot \left(\frac{1}{\varphi \mu_l^0} (\bar{p}_1 + \tilde{K}) \mathbf{K} \cdot \nabla_x \bar{p}_1 \right) + \frac{1}{\varphi \mu_l^0} (\mathbf{K} \cdot \nabla_x \bar{p}_0) \cdot \nabla_x \bar{p}_1. \quad (130)$$

Далее, используя выражение для давления из (25), уравнение (130) можно переписать относительно искомого давления \bar{p} :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \nabla_x \cdot (\mathbf{A}'_l \cdot \nabla_x \bar{p}) = f'_l, \quad (131)$$

где введены следующие обозначения:

$$\mathbf{A}'_i(\bar{p}, \bar{p}_0) = \frac{1}{\varphi\mu'_i} (\bar{p} - \bar{p}_0 + \tilde{K}) \mathbf{K};$$

$$f'_i = \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial t}.$$

В компонентной форме имеем:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A'_{ij} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \right) = f'_i, \quad (132)$$

где

$$A'_{ij}(\bar{p}, \bar{p}_0) = \frac{1}{\varphi\mu'_i} (\bar{p} - \bar{p}_0 + \tilde{K}) K_{ij}.$$

Здесь функция гидростатического давления \bar{p}_0 является решением задачи (124).

1.2.3.5 Граничные и начальные условия в глобальной задаче

Конкретизируем граничные и начальные условия для глобальной задачи [51]. На нижней Σ_l и верхней Σ_g гранях образца считается заданным перепад внешних макроскопических давлений:

$$\bar{p}_l|_{\Sigma_l} = p_{el}, \quad \bar{p}_g|_{\Sigma_g} = p_{eg}. \quad (133)$$

На боковых гранях задается условие непротекания, которое с учетом закона фильтрации Дарси (104), имеет вид:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla_x \bar{p}_l|_{\Sigma'_l} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla_x \bar{p}_g|_{\Sigma'_g} = 0. \quad (134)$$

На границе раздела фаз Σ_{lg} задаются условия отсутствия скачков следующих функций:

$$\bar{p}_l = \bar{p}_g, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_{lg}. \quad (135)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{A}'_l \cdot \nabla_x \bar{p}_l - \mathbf{A}'_g \cdot \nabla_x \bar{p}_g) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_{lg}. \quad (136)$$

В начальный момент времени $t = t_0$ для случая газа считаются заданным давлением:

$$\bar{p}_g|_{t=t_0} = p_{0g}. \quad (137)$$

Для случая классической модели слабосжимаемой жидкости в начальный момент времени задаются плотность и давление:

$$\bar{\rho}_l|_{t=t_0} = \rho_{0l}, \quad \bar{p}_l|_{t=t_0} = p_{0l}. \quad (138)$$

В случае обобщенной модели слабосжимаемой жидкости в начальный момент задается только плотность:

$$\bar{\rho}_l|_{t=t_0} = \rho_{0l}. \quad (139)$$

В задаче расчета поля гидростатического давления \bar{p}_0 (124) граничные условия на поверхностях Σ_l , Σ_{lg} и Σ'_l формулируются следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{p}_0|_{\Sigma_l} &= p_{0e}, \quad \bar{p}_0|_{\Sigma_{lg}} = p_{0lg}(t), \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla_x \bar{p}_0|_{\Sigma'_l} &= 0. \end{aligned} \quad (140)$$

1.2.3.6 Уравнение движения поверхности раздела фаз

В силу наличия подвижной границы раздела фаз необходимо дополнить постановку макроскопической задачи уравнением, описывающим ее движение. Пусть $F(\mathbf{x}, t) = 0$ – неявное уравнение гладкой межфазной поверхности в актуальной конфигурации. Тогда для произвольного момента времени $t > t_0$ положение поверхности раздела фаз можно определить из решения задачи [25]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}}_{\Sigma_m} \cdot \nabla_x F + D_0 |\nabla_x F| &= 0, \\ F(\mathbf{x}, t_0) &= F_0, \end{aligned} \quad (141)$$

где D_0 – скорость фазового превращения, в нашем случае $D_0 = 0$. В (141) будем считать, что скорость $\bar{\mathbf{v}}_{\Sigma_m}$ рассматривается относительно жидкой фазы, т.е. для $m = l$, и далее обозначается как $\bar{\mathbf{v}}_{\Sigma}$.

Также положим, что уравнение поверхности можно представить в явном виде:

$$F(\mathbf{x}, t) = x_3 - f(x_1, x_2, t) = 0. \quad (142)$$

Тогда подставляя (142) в (141), приходим к задаче:

$$\begin{aligned} \varphi \frac{\partial f}{\partial t} + \bar{w}_{z1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \bar{w}_{z2} \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \bar{w}_{z3}, \\ f(x_1, x_2, 0) &= f_0(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (143)$$

Наконец, подставляя в (143) закон фильтрации Дарси (103), окончательно получаем задачу для определения положения границы раздела фаз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} - a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} &= F, \\ f(x_1, x_2, 0) &= f_0(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (144)$$

где введены обозначения

$$a_1(x_1, x_2, t) = \frac{K_1^1}{\varphi \mu_1^0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1}, \quad a_2(x_1, x_2, t) = \frac{K_2^2}{\varphi \mu_1^0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2}, \quad F(x_1, x_2, t) = -\frac{K_3^3}{\varphi \mu_1^0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3}.$$

1.2.3.7 Метод введения динамических независимых координат в задаче фильтрации газа и слабосжимаемой жидкости

Рассматриваемая задача вытеснения газа из пористой среды слабосжимаемой жидкостью имеет много общего с классической двухфазной задачей Стефана [60, 72], описывающей изменение фазового состояния вещества. Основной особенностью задач данного класса является наличие заранее неизвестных границ раздела взаимодействующих сред, положение и форма которых изменяется с течением времени.

Существует два основных подхода для численного решения задач данного типа [60]. Первый основывается на методах без явного выделения границ раздела фаз – методах сквозного счета (fixed domain methods). Однако решение рассматриваемой задачи фильтрации на основе уравнений (124) и (131) осложняется тем, что необходима информация о точной форме области, занятой жидкой фазой, поскольку в ней дополнительно решается задача расчета поля

гидростатического давления \bar{p}_0 . Поэтому методы сквозного счета в данном случае неприемлемы или трудно реализуемы.

Ко второму подходу относятся методы с явным выделением границ раздела на каждом временном слое (variable domain methods). Среди них хорошо себя зарекомендовали методы, в основе которых лежит идея введения новых динамических независимых координат или динамически адаптивных сеток в исходных координатах. Сюда, в частности, следует отнести метод выпрямления фронта, в рамках которого вводится такое преобразование координат, при котором задача решается в фиксированной области.

Очевидно, что в рамках настоящей работы наиболее применим последний подход. В связи с этим введем новые динамические координаты:

$$X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = \frac{x_3}{\alpha x_3 + \beta}. \quad (145)$$

Обратная зависимость для (145) имеет вид:

$$x_1 = X_1, x_2 = X_2, x_3 = \frac{\beta X_3}{1 - \alpha X_3}. \quad (146)$$

Очевидно, что $X_3(0) = 0$. Коэффициенты α и β определяются из условий:

$$\begin{aligned} X_3(L) &= L, \\ X_3(x_3) &= f_0(x_1, x_2) \text{ при } x_3 = f(x_1, x_2, t). \end{aligned} \quad (147)$$

После подстановки (147) в (145) находим:

$$\alpha(x_1, x_2, t) = \frac{f - f_0}{f_0(f - L)}, \quad \beta(x_1, x_2, t) = \frac{f(f_0 - L)}{f_0(f - L)}. \quad (148)$$

Для некоторой произвольной дифференцируемой функции $\Theta(X_i(x_j, t), t)$ выражения для производных $\partial\Theta/\partial x_i$, $i = \overline{1,3}$ можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Theta}{\partial x_1} &= \frac{\partial \Theta}{\partial X_1} + X_3(L - X_3) \left(\frac{1}{f(f-L)} \frac{\partial f}{\partial X_1} - \frac{1}{f_0(f_0-L)} \frac{\partial f_0}{\partial X_1} \right) \frac{\partial \Theta}{\partial X_3}, \\
\frac{\partial \Theta}{\partial x_2} &= \frac{\partial \Theta}{\partial X_2} + X_3(L - X_3) \left(\frac{1}{f(f-L)} \frac{\partial f}{\partial X_2} - \frac{1}{f_0(f_0-L)} \frac{\partial f_0}{\partial X_2} \right) \frac{\partial \Theta}{\partial X_3}, \\
\frac{\partial \Theta}{\partial x_3} &= \frac{((f_0 - f)X_3 + (f - L)f_0)^2}{f_0 f (f_0 - L)(f - L)} \frac{\partial \Theta}{\partial X_3}
\end{aligned} \tag{149}$$

Если ввести матрицу преобразования

$$\mathbf{Q}(\mathbf{X}, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & X_3(L - X_3) \left(\frac{1}{f(f-L)} \frac{\partial f}{\partial X_1} - \frac{1}{f_0(f_0-L)} \frac{\partial f_0}{\partial X_1} \right) \\ 0 & 1 & X_3(L - X_3) \left(\frac{1}{f(f-L)} \frac{\partial f}{\partial X_2} - \frac{1}{f_0(f_0-L)} \frac{\partial f_0}{\partial X_2} \right) \\ 0 & 0 & \frac{((f_0 - f)X_3 + (f - L)f_0)^2}{f_0 f (f_0 - L)(f - L)} \end{pmatrix}, \tag{150}$$

то соотношения (149) можно записать в тензорной форме

$$\nabla_x \Theta = \mathbf{Q}(\mathbf{X}, t) \cdot \nabla_X \Theta, \tag{151}$$

где $\nabla_x \Theta = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \Theta}{\partial x_3} \right)^T$ и $\nabla_X \Theta = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial X_1} \quad \frac{\partial \Theta}{\partial X_2} \quad \frac{\partial \Theta}{\partial X_3} \right)^T$.

Рассмотрим вычисление вторых производных вида $\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(A_{\alpha\alpha} \frac{\partial \Theta}{\partial x_\alpha} \right)$, где

$A_{\alpha\alpha} = A_{\alpha\alpha}(\Theta)$, $\alpha = \overline{1,3}$ – компоненты, являющиеся дифференцируемыми функциями аргумента Θ . Тогда вторые производные можно представить в явном виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left(A_{\gamma\gamma} \frac{\partial \Theta}{\partial x_\gamma} \right) &= \frac{\partial}{\partial X_\gamma} \left(A_{\gamma\gamma} \frac{\partial \Theta}{\partial X_\gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial X_\gamma} \left(A_{\gamma\gamma} Q_{\gamma 3} \frac{\partial \Theta}{\partial X_3} \right) + \frac{\partial}{\partial X_3} \left(A_{\gamma\gamma} Q_{\gamma 3} \frac{\partial \Theta}{\partial X_\gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial X_3} \left(A_{\gamma\gamma} Q_{\gamma 3}^2 \frac{\partial \Theta}{\partial X_3} \right) - \\
&\quad - A_{\gamma\gamma} \frac{\partial Q_{\gamma 3}}{\partial X_3} \frac{\partial \Theta}{\partial X_\gamma} - A_{\gamma\gamma} Q_{\gamma 3} \frac{\partial Q_{\gamma 3}}{\partial X_3} \frac{\partial \Theta}{\partial X_3}, \quad \gamma = 1, 2, \\
\frac{\partial}{\partial x_3} \left(A_{33} \frac{\partial \Theta}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial}{\partial X_3} \left(A_{33} Q_{33}^2 \frac{\partial \Theta}{\partial X_3} \right) - A_{33} Q_{33} \frac{\partial Q_{33}}{\partial X_3} \frac{\partial \Theta}{\partial X_3}.
\end{aligned} \tag{152}$$

Производные компонент матрицы преобразования $\mathbf{Q}(\mathbf{X}, t)$ из (152) также выражаются через функции $f(X_1, X_2, t)$ и $f_0(X_1, X_2)$:

$$\frac{\partial Q_{\gamma 3}}{\partial X_3} = (L - 2X_3) \left(\frac{1}{f(f-L)} \frac{\partial f}{\partial X_\gamma} - \frac{1}{f_0(f_0-L)} \frac{\partial f_0}{\partial X_\gamma} \right), \quad \gamma = 1, 2, \quad (153)$$

$$\frac{\partial Q_{33}}{\partial X_3} = \frac{2(f-f_0)^2}{f_0 f (f_0-L)(f-L)} X_3 - \frac{2(f-f_0)}{f(f_0-L)}.$$

Наконец, производные по времени в новой системе координат можно представить в виде:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \left(\frac{X_3(L-X_3)}{f(L-f)} \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial \Theta}{\partial X_3} \quad (154)$$

или в тензорной форме

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{d}^T \cdot \nabla_X \Theta, \quad (155)$$

где введен вектор

$$\mathbf{d}^T(\mathbf{X}, t) = \left(0 \quad 0 \quad \frac{X_3(L-X_3)}{f(L-f)} \frac{\partial f}{\partial t} \right). \quad (156)$$

Полученные ранее уравнения (116), (124) и (131) можно записать в общей форме:

$$c_m \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \nabla_x \cdot (\mathbf{A}'_m \cdot \nabla_x \bar{p}) = f'_m, \quad (157)$$

где

$$c_m = \begin{cases} 0, & m=0, \\ 1, & m=l, \\ 1, & m=g; \end{cases} \quad \mathbf{A}'_m = \begin{cases} \mathbf{K}, & m=0, \\ \frac{1}{\varphi \mu_l^0} (\bar{p} - \bar{p}_0 + \tilde{K}) \mathbf{K}, & m=l, \\ \frac{1}{\varphi \mu_g^0} \bar{p} \mathbf{K}, & m=g; \end{cases} \quad f'_m = \begin{cases} 0, & m=0, \\ \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial t}, & m=l, \\ 0, & m=g. \end{cases}$$

Очевидно, что уравнение (120) для классической модели слабосжимаемой жидкости получается из уравнения для обобщенной модели, полагая в нем $\bar{p}_0 = const$. Тогда в новой системе динамических координат уравнения (157) записываются в общем случае в виде:

$$c_m \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \nabla_x \cdot (\mathbf{A}_m \cdot \nabla_x \bar{p}) - \mathbf{b}_m^T \cdot \nabla_x \bar{p} = f_m, \quad (158)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_m &= \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A}'_m \cdot \mathbf{Q}, \\ \mathbf{b}_m &= - \left(c_m \mathbf{d} + \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A}'_m \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial X_3} \cdot \mathbf{e}_3 \right), \quad \mathbf{e}_3^T = (0 \ 0 \ 1), \\ f_m &= \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial t} + \mathbf{d}^T \cdot \nabla_x \bar{p}_0. \end{aligned}$$

Рассмотрим, наконец, уравнение движения поверхности раздела фаз (144) в динамических координатах. Первоначально отметим, что из замены координат следует, что уравнение поверхности $x_3 = f(x_1, x_2, t)$ в новых координатах записывается в виде

$$X_3 = f_0(X_1, X_2). \quad (159)$$

Тогда подставляя соотношения для производных (149) в коэффициенты и правую часть уравнения (144), с учетом (159) получаем:

$$\begin{aligned} a_\gamma(X_1, X_2, t) &= \frac{K_\gamma^\gamma}{\varphi \mu_l^0} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial X_\gamma} + \left(\frac{\partial f_0}{\partial X_\gamma} - \frac{f_0(f_0 - L)}{f(f - L)} \frac{\partial f}{\partial X_\gamma} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial X_3} \right), \quad \gamma = 1, 2, \\ F(X_1, X_2, t) &= - \frac{K_3^3}{\varphi \mu_l^0} \frac{f_0(f_0 - L)}{f(f - L)} \frac{\partial \bar{p}}{\partial X_3}. \end{aligned} \quad (160)$$

При этом справедливы соотношения для производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial x_\gamma} &= \frac{\partial f(X_1, X_2, t)}{\partial X_\gamma}, \quad \gamma = 1, 2, \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial t} &= \frac{\partial f(X_1, X_2, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (161)$$

После подстановки выражений (160) и (161) в уравнение (144) и группировки слагаемых относительно производных f по пространственным динамическим координатам, приходим к общему нелинейному уравнению для определения положения границы раздела фаз в момент времени $t > 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \mathbf{a}^T \cdot \nabla_x f - (\nabla_x f)^T \cdot \mathbf{B} \cdot \nabla_x f = F, \quad (162)$$

где введены обозначения

$$\mathbf{a}^T(\bar{p}) = \left(\frac{K_1^1}{\varphi\mu_1^0} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial X_1} + \frac{\partial f_0}{\partial X_1} \frac{\partial \bar{p}}{\partial X_3} \right) \quad \frac{K_2^2}{\varphi\mu_1^0} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial X_2} + \frac{\partial f_0}{\partial X_2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial X_3} \right) \right),$$

$$\mathbf{B}(\bar{p}, f) = \begin{pmatrix} -\frac{K_1^1}{\varphi\mu_1^0} \frac{f_0(f_0-L)}{f(f-L)} \frac{\partial \bar{p}}{\partial X_3} & 0 \\ 0 & -\frac{K_2^2}{\varphi\mu_1^0} \frac{f_0(f_0-L)}{f(f-L)} \frac{\partial \bar{p}}{\partial X_3} \end{pmatrix},$$

$$F(\bar{p}, f) = -\frac{K_3^3}{\varphi\mu_1^0} \frac{f_0(f_0-L)}{f(f-L)} \frac{\partial \bar{p}}{\partial X_3}.$$

1.2.3.8 Общая постановка глобальной задачи фильтрации газа и слабосжимаемой жидкости в случае плоскопараллельного движения границы раздела фаз

Примем допущение о плоскопараллельном движении границы раздела фаз, для которого:

$$\begin{aligned} x_3 = f_0 = const, \quad t = 0; \\ x_3 = f(t), \quad t > 0. \end{aligned} \quad (163)$$

Тогда матрица преобразования (150) приобретает симметричный вид:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{X}, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{((f_0 - f)X_3 + (f - L)f_0)^2}{f_0 f (f_0 - L)(f - L)} \end{pmatrix}. \quad (164)$$

Вектор \mathbf{b}_m из уравнения (158) в явном виде определяется как

$$\mathbf{b}_m^T = \left(0 \quad 0 \quad -\left(c_m d_3 + A'_{m33} Q_{33} \frac{\partial Q_{33}}{\partial X_3} \right) \right), \quad (165)$$

Тогда на основе полученных ранее уравнений (158), а также граничных и начальных условий получаем окончательную формулировку глобальной задачи неустановившейся фильтрации газа и слабосжимаемой жидкости в динамических

независимых переменных при плоскопараллельном движении границы раздела фаз:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \nabla_x \cdot (\mathbf{A}_m \cdot \nabla_x \bar{p}) - \mathbf{b}_m^T \cdot \nabla_x \bar{p} = f_m, \quad m = l, g \quad (166)$$

– общее уравнение неустановившейся фильтрации фаз в динамических координатах;

$$\begin{aligned} \bar{p}|_{\Sigma_g} &= p_{eg}, \quad \bar{p}|_{\Sigma_l} = p_{el}; \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_l \cdot \nabla_x \bar{p}|_{\Sigma_l} &= 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_g \cdot \nabla_x \bar{p}|_{\Sigma_g} = 0; \\ \bar{p}_l &= \bar{p}_g, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{A}_l \cdot \nabla_x \bar{p}_l - \mathbf{A}_g \cdot \nabla_x \bar{p}_g) = 0, \quad \mathbf{X} \in \Sigma_{lg} \end{aligned} \quad (167)$$

– граничные условия;

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_l &= \rho_{0l}, \quad \mathbf{X} \in V_l, \quad t = 0, \\ \bar{p}_g &= p_{0g}, \quad \mathbf{X} \in V_g, \quad t = 0 \end{aligned} \quad (168)$$

– начальные условия;

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} = F(t, f(t), \bar{p}) &= -\frac{K_3^3}{\varphi \mu_l^0} \frac{f_0(f_0 - L)}{f(f - L)} \frac{\partial \bar{p}}{\partial X_3}, \\ f(0) &= f_0 \end{aligned} \quad (169)$$

– задача для определения положения границы раздела фаз Σ_{lg} в новой системе координат;

$$\nabla_x \cdot (\mathbf{A}_0 \cdot \nabla_x \bar{p}_0) + \mathbf{b}_0^T \cdot \nabla_x \bar{p}_0 = 0 \quad (170)$$

– уравнение для расчета поля гидростатического давления в жидкости;

$$\begin{aligned} \bar{p}_0|_{\Sigma_l} &= p_{0e}, \quad \bar{p}_0|_{\Sigma_{lg}} = p_{0lg}(t), \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \nabla_x \bar{p}_0|_{\Sigma_l} &= 0 \end{aligned} \quad (171)$$

– граничные условия для уравнения (170).

Описание коэффициентов уравнения (166) и его правой части приведены в таблице 1.1.

Обратим внимание, что уравнение для гидростатического давления (170) стационарное. Однако сама функция \bar{p}_0 есть функция времени из-за граничного условия (171) на границе раздела Σ_{lg} и подвижности самой системы координат.

Таблица 1.1 – Коэффициенты макроскопических нелинейных уравнений неустановившейся фильтрации сред в динамических переменных при плоскопараллельном движении границы границы раздела фаз

Классическая модель слабосжимаемой жидкости	Обобщенная модель слабосжимаемой жидкости	Газ
$\mathbf{A}_l(\bar{p}, f) = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A}'_l \cdot \mathbf{Q},$ $\mathbf{A}'_l(\bar{p}) = \frac{1}{\varphi \mu_l^0} (\bar{p} - p_0 + \tilde{K}) \cdot \mathbf{K}$	$\mathbf{A}_l(\bar{p}, \bar{p}_0, f) = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A}'_l \cdot \mathbf{Q},$ $\mathbf{A}'_l(\bar{p}, \bar{p}_0) = \frac{1}{\varphi \mu_l^0} (\bar{p} - \bar{p}_0 + \tilde{K}) \mathbf{K}$	$\mathbf{A}_g(\bar{p}, f) = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A}'_g \cdot \mathbf{Q},$ $\mathbf{A}'_g(\bar{p}) = \frac{\bar{p}}{\varphi \mu_g^0} \mathbf{K}$
$\mathbf{b}_l^T(\bar{p}, f) = \left(0 \quad 0 \quad - \left(d_3 + A'_{l33} Q_{33} \frac{\partial Q_{33}}{\partial X_3} \right) \right)$	$\mathbf{b}_l^T(\bar{p}, \bar{p}_0, f) = \left(0 \quad 0 \quad - \left(d_3 + A'_{l33} Q_{33} \frac{\partial Q_{33}}{\partial X_3} \right) \right)$	$\mathbf{b}_g^T(\bar{p}, f) = \left(0 \quad 0 \quad - \left(d_3 + A'_{g33} Q_{33} \frac{\partial Q_{33}}{\partial X_3} \right) \right)$
$f_l = 0$	$f_l(\bar{p}_0, f) = \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial t} + \mathbf{d}^T \cdot \nabla_x \bar{p}_0$	$f_g = 0$

1.3 Выводы по первой главе

В первой главе диссертации разработана физико-математическая модель слабосжимаемой жидкости и двухмасштабная модель пространственного течения слабосжимаемой жидкости, вытесняющей газовую среду в пористой композитной структуре.

На основе метода асимптотического осреднения сформулированы локальные задачи пространственного течения слабосжимаемой жидкости и газа в ячейках периодичности пористой композитной структуры. Показано, что локальные задачи фильтрации слабосжимаемой жидкости (классической и обобщенной) формально в точности совпадают не только для каждой из двух моделей, но и с локальной задачей фильтрации газа. Каждая из локальных задач представляет собой стационарную задачу течения некоторой фиктивной линейно-вязкой несжимаемой среды, а их решение зависит только от внутренней геометрии пор. Таким образом, их постановка применима для расчетов фильтрации любых газов и жидкостей в рамках сделанных в работе допущений и позволяет определить основные характеристики пористой среды – пористость и коэффициенты проницаемости, – основываясь только на информации о геометрической форме пор.

Осреднение локальных уравнений позволило получить глобальную задачу течения жидкости, вытесняющей газ из пористой композитной структуры. Введение новых динамических независимых переменных, в свою очередь, позволило свести данную задачу к задаче, решаемой в фиксированной области с явно заданной границей раздела фаз.

ГЛАВА 2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛОКАЛЬНОЙ И ГЛОБАЛЬНОЙ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ

2.1 Численный метод решения локальной задачи

2.1.1 Вариационная формулировка локальной задачи

На основе вариационного принципа Хеллингера-Рейсснера построим вариационную формулировку локальной задачи фильтрации. Для этого рассмотрим определяющее соотношение (3). Выполнив для него обезразмеривание с учетом (18), (23) и (24), получим:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \kappa^2 \lambda_m^0 (\nabla_k v_k) \delta_{ij} + \kappa^2 \mu_m^0 (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i). \quad (172)$$

С учетом правила дифференцирования (34) имеем:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \kappa^2 \lambda_m^0 \left(v_{k,k} + \frac{1}{\kappa} v_{k/k} \right) \delta_{ij} + \kappa^2 \mu_m^0 \left(v_{i,j} + \frac{1}{\kappa} v_{i/j} + v_{j,i} + \frac{1}{\kappa} v_{j/i} \right). \quad (173)$$

Представляя функции, входящие в (173), в виде асимптотических разложений и производя группировку слагаемых при одинаковых степенях параметра κ , получаем:

$$T_{ij}^{(0)} = -p^{(0)} \delta_{ij} \quad (174)$$

– определяющее соотношение нулевого уровня;

$$T_{ij}^{(1)} = -p^{(1)} \delta_{ij} + \lambda_m^0 v_{k,k}^{(0)} \delta_{ij} + \mu_m^0 (v_{i/j}^{(0)} + v_{j/i}^{(0)}). \quad (175)$$

– определяющее соотношение первого уровня.

Используя далее соотношения (95) и вводя аналогичное соотношение для компонент тензора напряжений

$$T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\sum_{\alpha=1}^3 T_{ij}^{(\alpha)}(\boldsymbol{\xi}) p_{,\alpha}^{(0)}(\mathbf{x}), \quad (176)$$

а также учитывая равенство нулю дивергенции скорости $W_{k/k}^{(\alpha)} = 0$ и записывая определяющее соотношение для 1/8 ячейки периодичности, получаем:

$$\tilde{T}_{ij}^{(\alpha)} = -\tilde{P}^{(\alpha)} \delta_{ij} + 2\tilde{D}^{(\alpha)}, \quad \tilde{D}^{(\alpha)} = \frac{1}{2}(\tilde{W}_{i/j}^{(\alpha)} + \tilde{W}_{j/i}^{(\alpha)}). \quad (177)$$

Дифференцируя (177) и вновь учитывая нулевую дивергенцию скорости $\tilde{W}_i^{(\alpha)}$, приходим к соотношению:

$$\tilde{T}_{ij/j}^{(\alpha)} = -\tilde{P}_{/j}^{(\alpha)} \delta_{ij} + \tilde{W}_{i/jj}^{(\alpha)}. \quad (178)$$

Правая часть выражения (178) с точностью до знака совпадает с левой частью уравнения равновесия из системы (97). Поэтому последнее переписывается в виде:

$$\tilde{T}_{ij/j}^{(\alpha)} = -\delta_i^{(\alpha)}. \quad (179)$$

Введем теперь кинематически возможное поле скоростей $\delta\tilde{\mathbf{W}}^{(\alpha)}$, как векторное поле, удовлетворяющее граничным условиям 1-го рода на части поверхности ячейки периодичности $\tilde{W}_i^{(\alpha)} = 0$, $\xi_i \in \Sigma_{\xi sp}$, и вариацию давления $\delta\tilde{P}^{(\alpha)}$. Умножая скалярно уравнение равновесия (179) на $\delta\tilde{W}_i^{(\alpha)}$, а уравнение неразрывности из (97) на $\delta\tilde{P}^{(\alpha)}$ и интегрируя полученные соотношения по произвольной подобласти $V^{(e)} \subset \tilde{V}_{\xi p}$ 1/8 ячейки периодичности, приходим к уравнениям:

$$\begin{cases} \int_{V^{(e)}} \tilde{W}_{ii}^{(\alpha)} \delta\tilde{P}^{(\alpha)} dV = 0, \\ \int_{V^{(e)}} \tilde{T}_{ij/j}^{(\alpha)} \delta\tilde{W}_i^{(\alpha)} dV = - \int_{V^{(e)}} \delta_i^{(\alpha)} \delta\tilde{W}_i^{(\alpha)} dV. \end{cases} \quad (180)$$

Т.к. $\tilde{W}_{ii}^{(\alpha)} = \tilde{D}_{ii}^{(\alpha)}$, то первое уравнение в (180) запишется в виде:

$$\int_{V^{(e)}} \tilde{D}_{ii}^{(\alpha)} \delta\tilde{P}^{(\alpha)} dV = 0. \quad (181)$$

Для преобразования второго уравнения воспользуемся формулой [24]:

$$(\nabla_{\xi} \cdot \tilde{\mathbf{T}}^{(\alpha)}) \cdot \delta\tilde{\mathbf{W}}^{(\alpha)} = \nabla_{\xi} \cdot (\tilde{\mathbf{T}}^{(\alpha)} \cdot \delta\tilde{\mathbf{W}}^{(\alpha)}) - \tilde{\mathbf{T}}^{(\alpha)} \cdot (\delta\nabla_{\xi} \otimes \tilde{\mathbf{W}}^{(\alpha)})^T. \quad (182)$$

Несложно показать, что в координатной форме формула (182) переписывается следующим образом:

$$\tilde{T}_{ij/j}^{(\alpha)} \delta \tilde{W}_i^{(\alpha)} = (\tilde{T}_{ij}^{(\alpha)} \delta \tilde{W}_i^{(\alpha)})_{/j} - \tilde{T}_{ij}^{(\alpha)} \delta \tilde{W}_{i/j}^{(\alpha)} \quad (183)$$

Подставляя (183) в (180), получаем:

$$\int_{V^{(e)}} (\tilde{T}_{ij}^{(\alpha)} \delta \tilde{W}_i^{(\alpha)})_{/j} dV - \int_{V^{(e)}} \tilde{T}_{ij}^{(\alpha)} \delta \tilde{W}_{i/j}^{(\alpha)} dV = - \int_{V^{(e)}} \delta_i^{(\alpha)} \delta \tilde{W}_i^{(\alpha)} dV. \quad (184)$$

Для преобразования первого слагаемого в левой части (184) применим формулу Остроградского-Гаусса (108), которая в координатной форме для нашего случая имеет вид:

$$\int_{V^{(e)}} (\tilde{T}_{ij}^{(\alpha)} \delta \tilde{W}_i^{(\alpha)})_{/j} dV = \int_{\Sigma^{(e)}} n_j (\tilde{T}_{ij}^{(\alpha)} \delta \tilde{W}_i^{(\alpha)}) d\Sigma, \quad (185)$$

где n_j – компоненты вектора нормали к поверхности $\Sigma^{(e)}$. Второе слагаемое преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{V^{(e)}} \tilde{T}_{ij}^{(\alpha)} \delta \tilde{W}_{i/j}^{(\alpha)} dV &= \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} (\tilde{T}_{ij}^{(\alpha)} \delta \tilde{W}_{i/j}^{(\alpha)} + \tilde{T}_{ji}^{(\alpha)} \delta \tilde{W}_{j/i}^{(\alpha)}) dV = \\ &= \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \tilde{T}_{ij}^{(\alpha)} (\delta \tilde{W}_{i/j}^{(\alpha)} + \delta \tilde{W}_{j/i}^{(\alpha)}) dV = \int_{V^{(e)}} \tilde{T}_{ij}^{(\alpha)} \delta \tilde{D}_{ij}^{(\alpha)} dV. \end{aligned} \quad (186)$$

С учетом (185) и (186) уравнение (184) принимает вид:

$$\int_{V^{(e)}} \tilde{T}_{ij}^{(\alpha)} \delta \tilde{D}_{ij}^{(\alpha)} dV = \int_{\Sigma^{(e)}} S_i^{(\alpha)} \delta \tilde{W}_{i/j}^{(\alpha)} d\Sigma + \int_{V^{(e)}} \delta_i^{(\alpha)} \delta \tilde{W}_i^{(\alpha)} dV, \quad (187)$$

где $S_i^{(\alpha)} = n_j \tilde{T}_{ij}^{(\alpha)}$ – компоненты вектора усилий на поверхности $\Sigma^{(e)}$ области $V^{(e)} \subset \tilde{V}_{\xi p}$.

Таким образом, вариационная постановка [73] задачи (97) окончательно принимает вид:

$$\begin{cases} \int_{V^{(e)}} \tilde{D}_{ii}^{(\alpha)} \delta \tilde{P}^{(\alpha)} dV = 0, \\ \int_{V^{(e)}} \tilde{T}_{ij}^{(\alpha)} \delta \tilde{D}_{ij}^{(\alpha)} dV = \int_{\Sigma^{(e)}} S_i^{(\alpha)} \delta \tilde{W}_i^{(\alpha)} d\Sigma + \int_{V^{(e)}} \delta_i^{(\alpha)} \delta \tilde{W}_i^{(\alpha)} dV, \quad \xi_i \in V_{\xi p}. \end{cases} \quad (188)$$

Отметим, что на всей границе области течения $\tilde{V}_{\xi p}$ в соответствии с граничными условиями из задачи (97) работа вектора поверхностных усилий обращается в ноль.

2.1.2 Метод конечных элементов для решения вариационной задачи

Численное решение системы вариационных уравнений (188) произведем на основе метода конечных элементов (МКЭ) [7, 44, 62, 115]. Для триангуляции расчетной области будем использовать десяти узловой конечный элемент (КЭ) в форме тетраэдра (см. рисунок 2.1) с 34 степенями свободы: по 3 компоненты скорости $\tilde{W}_i^{(\alpha)}$ в каждом узле и по одному значению давления $\tilde{P}^{(\alpha)}$ в каждой вершине тетраэдра.

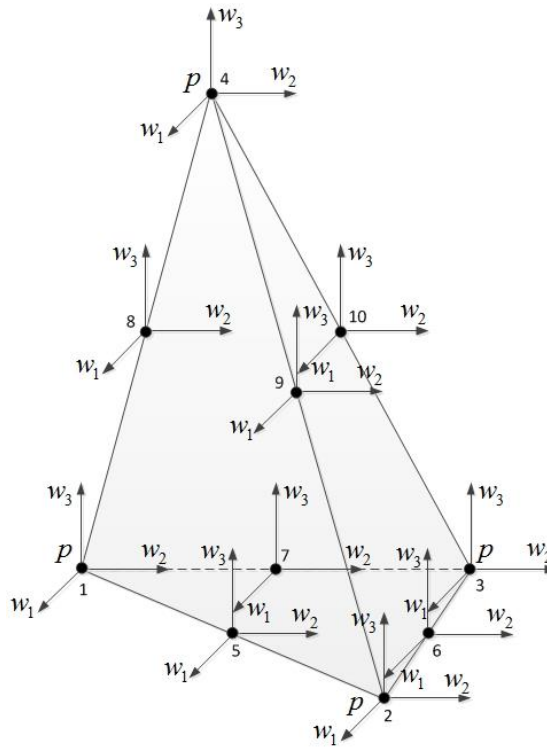


Рисунок 2.1 – Десяти узловой тетраэдральный конечный элемент с 34 степенями свободы

В каждом КЭ будем использовать квадратичную аппроксимацию функций по скоростям и линейную по давлению:

$$\{W\} = [N_w] \{w\}, \quad P = [N_p]^T \{p\}, \quad (189)$$

$\begin{matrix} 3 \times 1 & 3 \times 30 & 30 \times 1 & 1 \times 4 & 4 \times 1 \end{matrix}$

где $\{W\} = (\tilde{W}_1^{(\alpha)}, \tilde{W}_2^{(\alpha)}, \tilde{W}_3^{(\alpha)})^T$ – координатный столбец скоростей на данном конечном элементе; $\{w\}$ – координатный столбец скоростей в узлах конечного элемента;

$\{p\}$ – координатный столбец давлений $P = \tilde{P}^{(\alpha)}$ в вершинах конечного элемента.

Матрицы функций формы $[N_w]$ и $[N_p]$ имеют следующий вид:

$$[N_w]_{3 \times 30} = \begin{bmatrix} N_{w1} & 0 & 0 & N_{w2} & 0 & 0 & \dots & N_{w10} & 0 & 0 \\ 0 & N_{w1} & 0 & 0 & N_{w2} & 0 & \dots & 0 & N_{w10} & 0 \\ 0 & 0 & N_{w1} & 0 & 0 & N_{w2} & \dots & 0 & 0 & N_{w10} \end{bmatrix},$$

$$[N_p]_{1 \times 4}^T = (L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4),$$

где

$$\begin{aligned} N_{w1} &= (2L_1 - 1)L_1, & N_{w2} &= (2L_2 - 1)L_2, & N_{w3} &= (2L_3 - 1)L_3, & N_{w4} &= (2L_4 - 1)L_4, & N_{w5} &= 4L_1L_2, \\ N_{w6} &= 4L_2L_3, & N_{w7} &= 4L_1L_3, & N_{w8} &= 4L_1L_4, & N_{w9} &= 4L_2L_4, & N_{w10} &= 4L_3L_4. \end{aligned} \quad (190)$$

В последней формуле $L_i, i = \overline{1,4}$ – L -координаты.

Введем координатный столбец скоростей деформаций:

$$\{D\}_{1 \times 6}^T = (D_{11}^{(\alpha)} \quad D_{22}^{(\alpha)} \quad D_{33}^{(\alpha)} \quad D_{12}^{(\alpha)} \quad D_{13}^{(\alpha)} \quad D_{23}^{(\alpha)}).$$

Тогда с учетом (189) $\{D\} = [L]\{W\} = [L][N_w]\{w\} = [B]\{w\}$, где матричный оператор дифференцирования $[L]$ выписывается в виде:

$$[L]^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_3} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_3} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}.$$

Вариации компонент вектора скоростей и тензора скоростей деформаций, а также давления P имеют вид:

$$\begin{aligned} \{ \delta W \}_{3 \times 1} &= [N_w]_{3 \times 30} \{ \delta w \}_{30 \times 1}, \\ \delta P &= [N_p]_{1 \times 4}^T \{ \delta p \}_{4 \times 1}, \\ \{ \delta D \}_{6 \times 1} &= [B]_{6 \times 30} \{ \delta w \}_{30 \times 1}. \end{aligned} \quad (191)$$

Введем координатный столбец напряжений:

$$\{T\}_{1 \times 6}^T = (T_{11}^{(\alpha)} \quad T_{22}^{(\alpha)} \quad T_{33}^{(\alpha)} \quad T_{12}^{(\alpha)} \quad T_{13}^{(\alpha)} \quad T_{23}^{(\alpha)}),$$

который на основании определяющих соотношений (177) связан с координатным столбцом скоростей деформаций линейным соотношением:

$$\{T\}_{6 \times 1} = - \left[\tilde{N}_p \right]_{6 \times 4} \{p\}_{4 \times 1} + 2 \{D\}_{6 \times 1}, \quad (192)$$

где $\left[\tilde{N}_p \right]$ – матрица, образованная диадным умножением столбцов:

$$\left[\tilde{N}_p \right]_{6 \times 4} = \{I_0\}_{6 \times 1} \left[N_p \right]_{1 \times 4}^T,$$

где $\{I_0\}^T = (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$.

Введем, наконец, координатный столбец внешних усилий $\{S\}^T = (S_1^{(\alpha)} \ S_2^{(\alpha)} \ S_3^{(\alpha)})$ на поверхности тела.

Тогда, подставляя (189), (191) и (192) в систему (188) и производя группировку слагаемых с вариациями $\{\delta p\}$ и $\{\delta w\}$, получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для каждого отдельного конечного элемента:

$$\begin{cases} \left[K \right]_{30 \times 30} \{w\}_{30} - \left[R \right]_{30 \times 4} \{p\}_4 = \{f\}_{30}, \\ \left[R \right]_{4 \times 30}^T \{w\}_{30} = 0, \end{cases} \quad (193)$$

где введены следующие локальные матрицы и векторы правой части:

$$\begin{aligned} \left[K \right]_{30 \times 30} &= 2 \int_{V^{(e)}} \left(\left[B \right]_{30 \times 6}^T \left[B \right]_{6 \times 30} \right) dV, & \left[R \right]_{30 \times 4} &= \int_{V^{(e)}} \left(\left[B \right]_{30 \times 6}^T \left[\tilde{N}_p \right]_{6 \times 4} \right) dV, \\ \{f_\Sigma\}_{30 \times 1} &= \int_{\Sigma^{(e)}} \left(\left[N_w \right]_{30 \times 3}^T \{S\}_{3 \times 1} \right) d\Sigma, & \{f_V\}_{30 \times 1} &= \int_{V^{(e)}} \left(\left[N_w \right]_{30 \times 3}^T \{\delta\}_{3 \times 1} \right) dV, \\ \{f\}_{30 \times 1} &= \{f_\Sigma\}_{30 \times 1} + \{f_V\}_{30 \times 1}. \end{aligned} \quad (194)$$

Отметим, что при построении глобальной СЛАУ суммарные векторы правых частей $\{f_\Sigma\}$, соответствующие вектору поверхностных усилий $\{S\}$, обращаются в ноль, т.к. все внутренние стороны конечного элемента при суммировании перечисляются дважды, но знак у вектора $\{S\}$ при этом меняется из-за изменения знака вектора нормали на этих сторонах. На тех сторонах конечного элемента, которые лежат на внешней границе области $\tilde{V}_{\xi p}$, работа вектора $\{S\}$ обращается в ноль в силу граничных условий задачи.

2.1.3 Численный метод определения характеристик пористой среды

Решение локальной задачи фильтрации на $1/8$ ячейки периодичности позволяет произвести расчет характеристик пористой системы, основываясь только на геометрической форме пор. Действительно, применим метод конечных элементов для вычисления коэффициентов проницаемости и пористости, входящие в закон Дарси (103). Учитывая симметричность функций $W_\beta^{(\alpha)}$ при $\alpha = \beta$, для коэффициентов проницаемости имеем:

$$K_i^j = \varphi \frac{1}{|V_\xi|} \int_{V_{\xi p}} W_i^{(j)} dV = \frac{8}{|V_\xi|} \int_{\tilde{V}_{\xi p}} \tilde{W}_i^{(j)} dV = 8 \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} \tilde{W}_i^{(j)} dV, \quad (195)$$

$$\varphi = \int_{V_{\xi p}} dV = 8 \int_{\tilde{V}_{\xi p}} dV = 8 \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} dV.$$

где E – количество конечных элементов.

Введем матрицу функций формы:

$$[N_w]^T = (N_{w1} \quad N_{w2} \quad \dots \quad N_{w10}), \quad (196)$$

где N_{wi} , $i = \overline{1,10}$ определены в (190). Тогда

$$\tilde{W}_i^{(j)} = \underset{1 \times 10}{[N_w]^T} \underset{10 \times 1}{\{w_i^{(j)}\}} \quad (197)$$

Таким образом, приходим к следующим формулам для расчета коэффициентов проницаемости и пористости:

$$K_i^j = 8 \sum_{e=1}^E \left(\int_{V^{(e)}} \underset{1 \times 10}{[N_w]^T} |\det[\mathbf{J}]| dL_1 dL_2 dL_3 \right) \underset{10 \times 1}{\{w_i^{(j)}\}^{(e)}}, \quad (198)$$

$$\varphi = 8 \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} |\det[\mathbf{J}]| dL_1 dL_2 dL_3,$$

где $|\det[\mathbf{J}]|$ – модуль определителя Якобиевой матрицы, L_i , $i = \overline{1,4}$ – L -координаты.

2.2 Численный метод решения глобальной задачи

2.2.1 Вариационная формулировка глобальной задачи

Рассмотрим уравнение (166):

$$\nabla_x \cdot (\mathbf{A}_m \cdot \nabla_x \bar{p}) + \mathbf{b}_m^T \cdot \nabla_x \bar{p} + f_m = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t}, \quad m = l, g \quad (199)$$

и сформулируем для него вариационную постановку [26, 74]. Введем специальные классы:

- 1) скалярных переменных полей $\mathcal{G}(\mathbf{X}, t)$, определенных в области $V \cup \partial V$ пористой среды, $\forall t > 0$, непрерывно-дифференцируемых один раз по X_i и t всюду в области V , за исключением, быть может, границы раздела Σ_{lg} , и удовлетворяющих нулевому граничному условию на частях Σ_l и Σ_g поверхности ∂V области V :

$$\mathcal{G}|_{\Sigma_l \cup \Sigma_g} = 0; \quad (200)$$

- 2) стационарных скалярных полей $\beta(\mathbf{X})$, определенных в области V .

Тогда умножая (199) на \mathcal{G} и интегрируя по области V , получим

$$\int_V \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \nabla_x \cdot (\mathbf{A}_m \cdot \nabla_x \bar{p}) - \mathbf{b}_m^T \cdot \nabla_x \bar{p} - f_m \right) \mathcal{G} dV = 0. \quad (201)$$

Для начального условия

$$\bar{p} = p_0, \quad \mathbf{X} \in V, \quad t = 0 \quad (202)$$

можем записать:

$$\int_V (\bar{p}' - p_0) \beta dV = 0, \quad (203)$$

где $\bar{p}' = \bar{p}(\mathbf{X}, 0)$. Вычитая (203) из (201), получаем:

$$\int_V \mathcal{G} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} dV - \int_V \mathcal{G} \nabla_x \cdot (\mathbf{A}_m \cdot \nabla_x \bar{p}) dV - \int_V \mathcal{G} \mathbf{b}_m^T \cdot \nabla_x \bar{p} dV - \int_V \mathcal{G} f_m dV - \int_V \beta (\bar{p}' - p_0) dV = 0. \quad (204)$$

Преобразуем второй интеграл в (204):

$$\begin{aligned}
& \int_V \mathcal{G} \nabla_X \cdot (\mathbf{A}_m \cdot \nabla_X \bar{p}) dV = \int_V \nabla_X \cdot (\mathcal{G} \mathbf{A}_m \cdot \nabla_X \bar{p}) dV - \int_V \nabla_X \mathcal{G} \cdot \mathbf{A}_m \cdot \nabla_X \bar{p} dV = \\
& = \int_{V_l} \nabla_X \cdot (\mathcal{G} \mathbf{A}_l \cdot \nabla_X \bar{p}) dV + \int_{V_g} \nabla_X \cdot (\mathcal{G} \mathbf{A}_g \cdot \nabla_X \bar{p}) dV - \int_V \nabla_X \mathcal{G} \cdot \mathbf{A}_m \cdot \nabla_X \bar{p} dV = \\
& = \int_{\Sigma_l^e} n_l \cdot (\mathcal{G} \mathbf{A}_l \cdot \nabla_X \bar{p}) d\Sigma + \int_{\Sigma_g^e} n_g \cdot (\mathcal{G} \mathbf{A}_g \cdot \nabla_X \bar{p}) d\Sigma - \int_V \nabla_X \mathcal{G} \cdot \mathbf{A}_m \cdot \nabla_X \bar{p} dV.
\end{aligned} \tag{205}$$

С силу того что на поверхностях Σ_l и Σ_g выполняется условие (200), на боковых поверхностях образца – условие непротекания (134), а на границе раздела – условие (136), получаем:

$$\int_V \mathcal{G} \nabla_X \cdot (\mathbf{A}_m \cdot \nabla_X \bar{p}) dV = - \int_V \nabla_X \mathcal{G} \cdot \mathbf{A}_m \cdot \nabla_X \bar{p} dV. \tag{206}$$

Будем называть нестационарное поле $\bar{p}(\mathbf{X}, t)$ ($\mathbf{X} \in V$, $t > 0$) *допустимым*, если оно является один раз непрерывно-дифференцируемым по X_i в $V \cup \partial V$ и по t , за исключением, быть может, границы раздела Σ_{lg} , и удовлетворяет граничному условию (133). *Допустимым* стационарным полем $\bar{p}'(\mathbf{X})$ будем называть произвольное скалярное поле в V .

Выберем \mathcal{G} и β в виде

$$\mathcal{G} = \delta \bar{p}, \quad \beta = \delta \bar{p}'. \tag{207}$$

Тогда получаем

$$\int_V \delta \bar{p} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} dV + \int_V \nabla_X \delta \bar{p} \cdot \mathbf{A}_m \cdot \nabla_X \bar{p} dV - \int_V \delta \bar{p} (\mathbf{b}_m^T \cdot \nabla_X \bar{p}) dV - \int_V \delta \bar{p} f_m dV - \int_V \delta \bar{p}' (\bar{p}' - p_0) dV = 0. \tag{208}$$

В силу произвольности вариаций $\delta \bar{p}$ и $\delta \bar{p}'$, получаем искомую вариационную формулировку задачи:

$$\begin{cases} \int_V \delta \bar{p} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} dV = - \int_V \nabla_X \delta \bar{p} \cdot \mathbf{A}_m \cdot \nabla_X \bar{p} dV + \int_V \delta \bar{p} (\mathbf{b}_m^T \cdot \nabla_X \bar{p}) dV + \int_V \delta \bar{p} f_m dV, \\ \int_V \delta \bar{p}' (\bar{p}' - p_0) dV = 0. \end{cases} \tag{209}$$

В случае уравнения (170) для расчета поля гидростатического давления поступим аналогично. Введем специальный класс скалярных переменных полей

$\mathcal{G}_0(\mathbf{X}, t)$, определенных в $V_i \cup \Sigma_i^e$, $\forall t > 0$, непрерывно-дифференцируемых один раз по X_i и удовлетворяющих нулевому граничному условию на частях Σ_i и Σ_{lg} поверхности Σ_i^e области V_i :

$$\mathcal{G}_0|_{\Sigma_i \cup \Sigma_{lg}} = 0. \quad (210)$$

Тогда умножая (170) на \mathcal{G}_0 и интегрируя по области V_i , получим:

$$\int_{V_i} (\nabla_x \cdot (\mathbf{A}_0 \cdot \nabla_x \bar{p}) + \mathbf{b}_0^T \cdot \nabla_x \bar{p}) \mathcal{G}_0 dV = 0. \quad (211)$$

Далее выполняя преобразование первого слагаемого в (211) аналогично выкладкам, приведенным в (205), учитывая, что на поверхностях Σ_i и Σ_{lg} выполняется условие (210), а на боковых поверхностях образца – условие непротекания из (171), и полагая

$$\mathcal{G}_0 = \delta \bar{p}_0, \quad (212)$$

получаем искомую вариационную постановку для расчета поля гидростатического давления:

$$\int_{V_i} \nabla_x \delta \bar{p}_0 \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \nabla_x \bar{p}_0 dV - \int_{V_i} \delta \bar{p}_0 (\mathbf{b}_0^T \cdot \nabla_x \bar{p}_0) dV = 0. \quad (213)$$

2.2.2 Вариационная постановка задачи неустановившейся фильтрации в приращениях

Уравнения фильтрации газа и слабосжимаемой жидкости, рассматриваемые в данной работе, являются нелинейными, поэтому их решение основывается на использовании итерационного процесса Ньютона-Рафсона [1, 7, 46]. При этом предполагается, что давление в момент времени t уже рассчитано и требуется определить давление в момент времени $t + \tau$, где τ – шаг по времени. В соответствии с общей концепцией метода Ньютона-Рафсона новое приближение давления определяется как

$$\bar{p}^{(n+1)(i)} = \bar{p}^{(n+1)(i-1)} + \Delta\bar{p}^{(i)}, \quad (214)$$

где $\bar{p}^{(n+1)(i-1)}$ – распределение давления в конце $(i-1)$ -й итерации, $\Delta\bar{p}^{(i)}$ – приращение давления на i -й итерации и n – индекс по времени. При этом $\bar{p}^{(n+1)(0)} = \bar{p}^{(n)}$. Тогда, подставляя (214) в вариационное уравнение (209) и группируя слагаемые относительно приращений, получаем искомую вариационную постановку в приращениях:

$$\begin{aligned} & \int_V \delta\bar{p} \left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial t} \right)^{(n+1)(i)} dV + \int_V \nabla_x \delta\bar{p} \cdot \mathbf{A}_m^{(n+1)(i-1)} \cdot \nabla_x \Delta\bar{p}^{(i)} dV - \int_V \delta\bar{p} \left(\mathbf{b}_m^{(n+1)(i-1)T} \cdot \nabla_x \Delta\bar{p}^{(i)} \right) dV = \\ & = - \int_V \nabla_x \delta\bar{p} \cdot \mathbf{A}_m^{(n+1)(i-1)} \cdot \nabla_x \bar{p}^{(n+1)(i-1)} dV + \int_V \delta\bar{p} \left(\mathbf{b}_m^{(n+1)(i-1)T} \cdot \nabla_x \bar{p}^{(n+1)(i-1)} \right) dV + \int_V \delta\bar{p} f_m^{(n+1)(i-1)} dV, \end{aligned} \quad (215)$$

где все коэффициенты уравнения соответствуют давлению $\bar{p}^{(n+1)(i-1)}$.

Постановка (215) требует решения вариационной задачи (213) для расчета гидростатического давления на каждой итерации метода Ньютона-Рафсона. Поэтому уравнение (213) целесообразно переписать в виде:

$$\int_{V_i} \nabla_x \delta\bar{p}_0 \cdot \mathbf{A}_0^{(n+1)(i-1)} \cdot \nabla_x \bar{p}_0^{(n+1)(i-1)} dV - \int_{V_i} \delta\bar{p}_0 \left(\mathbf{b}_0^{(n+1)(i-1)T} \cdot \nabla_x \bar{p}_0^{(n+1)(i-1)} \right) dV = 0. \quad (216)$$

2.2.3 Метод конечных элементов для решения глобальной задачи

Для численного решения глобальной задачи будем использовать тетраэдральный симплекс-элемент. Введем вектор значений давления $\bar{p}^{(n+1)(i-1)}$ на предыдущей итерации и вектор приращений значения нестационарного поля давления $\Delta\bar{p}^{(i)}$ в узлах конечного элемента:

$$\begin{aligned} \{P\}_{1 \times 4}^{(n+1)(i-1)T} &= \left(P_1^{(n+1)(i-1)} \quad P_2^{(n+1)(i-1)} \quad P_3^{(n+1)(i-1)} \quad P_4^{(n+1)(i-1)} \right), \\ \{\Delta P\}_{1 \times 4}^{(i)T} &= \left(\Delta P_1^{(i)} \quad \Delta P_2^{(i)} \quad \Delta P_3^{(i)} \quad \Delta P_4^{(i)} \right), \end{aligned} \quad (217)$$

а также вектор вариаций давления

$$\{\delta P\}_{1 \times 4}^T = \left(\delta P_1 \quad \delta P_2 \quad \delta P_3 \quad \delta P_4 \right). \quad (218)$$

Введем также матрицу функций формы

$$[N] = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{pmatrix}, N_i = L_i, i = \overline{1,4}. \quad (219)$$

Здесь L_i – L -координаты. Тогда давление, приращение давления и вариация давления на конечном элементе могут быть представлены следующим образом

$$\bar{p}^{(n+1)(i-1)} = [N]_{1 \times 4} \{P\}_{4 \times 1}^{(n+1)(i-1)}, \quad (220)$$

$$\Delta \bar{p}^{(i)} = [N]_{1 \times 4} \{\Delta P\}_{4 \times 1}^{(i)}$$

$$\delta \bar{p} = [N]_{1 \times 4} \{\delta P\}_{4 \times 1} \quad (221)$$

Аналогично, для стационарного поля давления \bar{p}' и его вариации $\delta \bar{p}'$ можно получить

$$\bar{p}' = [N]_{1 \times 4} \{P'\}_{4 \times 1}, \quad (222)$$

$$\delta \bar{p}' = [N]_{1 \times 4} \{\delta P'\}_{4 \times 1}, \quad (223)$$

где введены вектор значений стационарного поля давления в узлах конечного элемента

$$\{P'\}_{1 \times 4}^T = (P'_1 \quad P'_2 \quad P'_3 \quad P'_4) \quad (224)$$

и вектор вариаций стационарного поля давления в узлах конечного элемента

$$\{\delta P'\}_{1 \times 4}^T = (\delta P'_1 \quad \delta P'_2 \quad \delta P'_3 \quad \delta P'_4). \quad (225)$$

Далее введем векторы градиента нестационарного поля давления, градиента приращения давления, а также градиент вариации давления:

$$\begin{aligned}
\left\{ \mathbf{g} \right\}_{1 \times 3}^{(n+1)(i-1)T} &= \left(\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial X_1} \right)^{(n+1)(i-1)} \quad \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial X_2} \right)^{(n+1)(i-1)} \quad \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial X_3} \right)^{(n+1)(i-1)} \right), \\
\left\{ \Delta \mathbf{g} \right\}_{1 \times 3}^{(i)T} &= \left(\left(\frac{\partial \Delta \bar{p}}{\partial X_1} \right)^{(i)} \quad \left(\frac{\partial \Delta \bar{p}}{\partial X_2} \right)^{(i)} \quad \left(\frac{\partial \Delta \bar{p}}{\partial X_3} \right)^{(i)} \right), \\
\left\{ \delta \mathbf{g} \right\}_{1 \times 3}^T &= \left(\frac{\partial \delta \bar{p}}{\partial X_1} \quad \frac{\partial \delta \bar{p}}{\partial X_2} \quad \frac{\partial \delta \bar{p}}{\partial X_3} \right).
\end{aligned} \tag{226}$$

После подстановки соотношений (220) – (223) в (226) получаем выражения для градиентов:

$$\begin{aligned}
\left\{ \mathbf{g} \right\}_{3 \times 1}^{(n+1)(i-1)} &= [B] \left\{ P \right\}_{4 \times 1}^{(n+1)(i-1)}, \\
\left\{ \Delta \mathbf{g} \right\}_{3 \times 1}^{(i)} &= [B] \left\{ \Delta P \right\}_{4 \times 1}^{(i)}, \\
\left\{ \delta \mathbf{g} \right\}_{3 \times 1} &= [B] \left\{ \delta P \right\}_{4 \times 1},
\end{aligned} \tag{227}$$

где введена матрица производных функций формы:

$$[B]_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial X_1} & \frac{\partial N_2}{\partial X_1} & \frac{\partial N_3}{\partial X_1} & \frac{\partial N_4}{\partial X_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial X_2} & \frac{\partial N_2}{\partial X_2} & \frac{\partial N_3}{\partial X_2} & \frac{\partial N_4}{\partial X_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial X_3} & \frac{\partial N_2}{\partial X_3} & \frac{\partial N_3}{\partial X_3} & \frac{\partial N_4}{\partial X_3} \end{pmatrix}.$$

Преобразуем интегралы, входящие в вариационную постановку (215).

Первый интеграл примет вид:

$$\int_V \delta \bar{p} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} \right)^{(n+1)(i)} dV = \left\{ \delta P \right\}_{1 \times 4}^T [C]_{4 \times 4} \left(\frac{\partial \left\{ P \right\}}{\partial t} \right)^{(n+1)(i)}_{4 \times 1},$$

где введена матрица

$$[C]_{4 \times 4} = \int_V [N]_{4 \times 1}^T [N]_{1 \times 4} dV. \tag{228}$$

Второй интеграл в левой части и первый интеграл в правой части (215) соответственно примут вид

$$\int_V \nabla_x \delta \bar{p} \cdot \mathbf{A}_m^{(n+1)(i-1)} \cdot \nabla_x \Delta \bar{p}^{(i)} dV = \{\delta P\}_{1 \times 4}^T [K_{m1}]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} \{\Delta P\}_{4 \times 1}^{(i)},$$

$$\int_V \nabla_x \delta \bar{p} \cdot \mathbf{A}_m^{(n+1)(i-1)} \cdot \nabla_x \bar{p}^{(n+1)(i-1)} dV = \{\delta P\}_{1 \times 4}^T [K_{m1}]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} \{P\}_{4 \times 1}^{(n+1)(i-1)},$$

где введены симметричные матрицы $[A_m]_{3 \times 3}^{(n+1)(i-1)} \equiv \mathbf{A}_m^{(n+1)(i-1)}$ и

$$[K_{m1}]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} = \int_V [B]_{4 \times 3}^T [A_m]_{3 \times 3}^{(n+1)(i-1)} [B]_{3 \times 4} dV. \quad (229)$$

Далее введем вектор значений коэффициентов на конечном элементе

$\{b_m\}_{3 \times 1}^{(n+1)(i-1)} \equiv \mathbf{b}_m^{(n+1)(i-1)}$. Тогда следующие интегралы запишутся в виде:

$$\int_V \delta \bar{p} \left(\mathbf{b}_m^{(n+1)(i-1)T} \cdot \nabla_x \Delta \bar{p}^{(i)} \right) dV = \{\delta P\}_{1 \times 4}^T [K_{m2}]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} \{\Delta P\}_{4 \times 1}^{(i)},$$

$$\int_V \delta \bar{p} \left(\mathbf{b}_m^{(n+1)(i-1)T} \cdot \nabla_x \bar{p}^{(n+1)(i-1)} \right) dV = \{\delta P\}_{1 \times 4}^T [K_{m2}]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} \{P\}_{4 \times 1}^{(n+1)(i-1)},$$

где введена несимметричная матрица

$$[K_{m2}]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} = \int_V [N]_{4 \times 1}^T \{b_m\}_{1 \times 3}^{(n+1)(i-1)T} [B]_{3 \times 4} dV. \quad (230)$$

Наконец, преобразуем последний интеграл

$$\int_V f_m^{(n+1)(i-1)} \delta \bar{p} dV = \{\delta P\}_{1 \times 4}^T \{F_m\}_{4 \times 1}^{(n+1)(i-1)},$$

где введен вектор, отличный от нуля только для обобщенной модели слабосжимаемой жидкости:

$$\{F_l\}_{4 \times 1}^{(n+1)(i-1)} = \int_V f_l^{(n+1)(i-1)} [N]_{4 \times 1}^T dV = [C]_{4 \times 4} \left(\frac{\partial \{P_0\}_{4 \times 1}}{\partial t} \right)^{(n+1)(i)} + \int_V [N]_{4 \times 1}^T \{d\}_{1 \times 3}^{(n+1)(i-1)T} [B]_{3 \times 4} dV \{P_0\}_{4 \times 1}^{(n+1)(i-1)}, \quad (231)$$

где $\{d\}_{3 \times 1}^{(n+1)(i-1)} \equiv \mathbf{d}^{(n+1)(i-1)}$.

Подставляя полученные соотношения в вариационную постановку (215), получаем дифференциальное уравнение

$$[C]_{4 \times 4} \left(\frac{\partial \{P\}_{4 \times 1}}{\partial t} \right)^{(n+1)(i)} + [K_m]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} \{\Delta P\}_{4 \times 1}^{(i)} = -[K_m]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} \{P\}_{4 \times 1}^{(n+1)(i-1)} + \{F_m\}_{4 \times 1}^{(n+1)(i-1)}, \quad (232)$$

где введена, вообще говоря, несимметричная матрица

$$[K_m]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} = [K_{m1}]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} - [K_{m2}]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)}. \quad (233)$$

Решение системы (232) может быть осуществлено методом конечных разностей. Пусть t_n – значение времени на n -ом временном слое, t_{n+1} – значение времени на следующем временном слое, $\tau = t_{n+1} - t_n$ – шаг по времени. Тогда конечно-разностный аналог системы (232) можно получить, используя метод Эйлера с левыми разностями [1]. В этом случае, с учетом соотношения (214), имеем:

$$\left(\frac{\partial \{P\}}{\partial t} \right)_{4 \times 1}^{(n+1)(i)} = \frac{\{P\}_{4 \times 1}^{(n+1)(i-1)} + \{\Delta P\}_{4 \times 1}^{(i)} - \{P\}_{4 \times 1}^{(n)}}{\tau} \quad (234)$$

Тогда после подстановки (234) в (232) получаем локальную СЛАУ для каждого отдельного конечного элемента

$$\begin{aligned} [A_m]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} \{\Delta P\}_{4 \times 1}^{(i)} &= \{R_m\}_{4 \times 1}^{(n+1)(i-1)}, \\ \{P\}_{4 \times 1}^{(n+1)(i)} &= \{P\}_{4 \times 1}^{(n+1)(i-1)} + \{\Delta P\}_{4 \times 1}^{(i)}, \end{aligned} \quad (235)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} [A_m]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} &= [K_m]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} + \frac{1}{\tau} [C]_{4 \times 4}, \\ \{R_m\}_{4 \times 1}^{(n+1)(i-1)} &= -[A_m]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} \{P\}_{4 \times 1}^{(n+1)(i-1)} + \frac{1}{\tau} [C]_{4 \times 4} \{P\}_{4 \times 1}^{(n)} + \{F_m\}_{4 \times 1}^{(n+1)(i-1)}. \end{aligned} \quad (236)$$

Применение метода конечных элементов для решения задачи (216) для гидростатического давления жидкости осуществляется аналогично. Введем вектор значений гидростатического давления жидкости в узлах конечного элемента и вектор вариаций гидростатического давления:

$$\begin{aligned} \{P_0\}_{1 \times 4}^{(n+1)(i-1)T} &= (P_{01}^{(n+1)(i-1)} \quad P_{02}^{(n+1)(i-1)} \quad P_{03}^{(n+1)(i-1)} \quad P_{04}^{(n+1)(i-1)}), \\ \{\delta P_0\}_{1 \times 4}^T &= (\delta P_{01} \quad \delta P_{02} \quad \delta P_{03} \quad \delta P_{04}). \end{aligned} \quad (237)$$

Тогда для функции \bar{p}_0 и ее вариации $\delta\bar{p}_0$, а также вектора градиента имеют место соотношения:

$$\bar{p}_0^{(n+1)(i-1)} = [N]_{1 \times 4} \{P_0\}_{4 \times 1}^{(n+1)(i-1)}, \quad (238)$$

$$\delta\bar{p}_0 = [N]_{1 \times 4} \{\delta P_0\}_{4 \times 1}, \quad (239)$$

$$\{g_0\}_{3 \times 1}^{(n+1)(i-1)} = [B]_{3 \times 4} \{P_0\}_{4 \times 1}^{(n+1)(i-1)}, \quad (240)$$

$$\{\delta g_0\}_{3 \times 1} = [B]_{3 \times 4} \{\delta P_0\}_{4 \times 1}. \quad (241)$$

Далее, вводя обозначения $[A_0]_{3 \times 3}^{(n+1)(i-1)} \equiv \mathbf{A}_0^{(n+1)(i-1)}$ и $\{b_0\}_{3 \times 1}^{(n+1)(i-1)} \equiv \mathbf{b}_0^{(n+1)(i-1)}$ и подставляя выражения (238)–(241) в (216), получаем искомую СЛАУ для каждого отдельного конечного элемента:

$$[K_0]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} \{P_0\}_{4 \times 1}^{(n+1)(i-1)} = \{0\}_{4 \times 1}, \quad (242)$$

где введены матрицы

$$[K_0]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} = [K_{01}]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} - [K_{02}]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)}, \quad (243)$$

$$[K_{01}]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} = \int_V [B]^T_{4 \times 3} [A_0]_{3 \times 3}^{(n+1)(i-1)} [B]_{3 \times 4} dV, \quad [K_{02}]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} = \int_V [N]^T_{4 \times 1} \{b_0\}_{1 \times 3}^{(n+1)(i-1)T} [B]_{3 \times 4} dV.$$

К данной системе следует присоединить граничные условия первого рода на поверхностях Σ_i и Σ_{lg} из (171).

2.2.4 Численный метод решения уравнения для определения положения границы раздела фаз

В задаче требуется определение положения границы раздела $f(t)$ на каждой итерации метода Ньютона-Рафсона, что необходимо для расчета матрицы \mathbf{Q} и вектора \mathbf{d} , отвечающих за преобразование системы координат. Поэтому уравнение (169) запишем в виде, удобном для итераций, полагая:

$$f^{(n+1)(i)} \left(f^{(n+1)(i)} - L \right) \left(\frac{df}{dt} \right)^{(n+1)(i)} = \frac{f_0 (L - f_0) K_3^3}{\varphi \mu_i^0} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial X_3} \right)^{(n+1)(i-1)} \quad (244)$$

То есть новое положение границы определяется на основе предыдущего приближения градиента давления на границе.

Далее, применяя метод Эйлера с левыми разностями [1], имеем:

$$\left(\frac{df}{dt} \right)^{(n+1)(i)} = \frac{f^{(n+1)(i)} - f^{(n)}}{\tau} \quad (245)$$

и, следовательно, исходное уравнение представляется в виде кубического уравнения:

$$\left(f^{(n+1)(i)} \right)^3 + a^{(n)} \left(f^{(n+1)(i)} \right)^2 + b^{(n)} f^{(n+1)(i)} + g^{(n+1)(i-1)} = 0, \quad (246)$$

где введены коэффициенты

$$\begin{aligned} a^{(n)} &= -(L + f^{(n)}), \\ b^{(n)} &= L f^{(n)}, \\ g^{(n+1)(i-1)} &= \frac{\tau f_0 (f_0 - L) K_3^3}{\varphi \mu_i^0} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial X_3} \right)^{(n+1)(i-1)}. \end{aligned}$$

Решая уравнение (246), например, на основе метода Ньютона [46], относительно функции $f^{(n+1)(i)}$, получаем новое приближение для положения границы раздела фаз.

2.2.5 Общий алгоритм решения глобальной задачи фильтрации

Общий алгоритм решения глобальной задачи о вытеснении газа из недеформируемой пористой среды слабосжимаемой жидкостью в нелинейной постановке приведен на рисунке 2.2.

Как видно из приведенной схемы, после задания всех необходимых входных параметров задачи начинается итерационный процесс Ньютона-Рафсона, в котором последовательно вычисляется поле гидростатического давления при заданном положении границы раздела фаз, рассчитывается очередное

приближение давления и определяется уточненное положение границы раздела. Если сходимость достигнута, то рассчитанное давление и положение границы раздела принимаются за истинные значения на данном шаге по времени, после чего вычисляется распределение компонент скорости фильтрации по закону Дарси и, если процесс решения не окончен, начинается расчет нового шага.

2.3 Численный метод решения несимметричных глобальных СЛАУ

Как было показано ранее, глобальные СЛАУ, полученные как для локальных задач, так и для глобальной задачи фильтрации, имеют несимметричную и сильно разреженную матрицу. Решение систем такого рода имеет определенные сложности. При этом применение так называемой трансформации Гаусса

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

не решает проблем. Матрица $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ является симметричной и положительно определенной, но имеет значительно увеличенное число обусловленности и сниженную разреженность, что влечет за собой рост объема требуемой памяти.

В связи с этим для решения глобальных несимметричных СЛАУ был выбран устойчивый алгоритм бисопряженных градиентов (BiCGSTAB – Biconjugate Gradient Stabilized) [16, 104]. Данный метод относится к семейству проекционных методов подпространств Крылова для несимметричных и знакопеременных задач.

Идея проекционных методов основывается на том, что решение системы линейных алгебраических уравнений вида $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ищется итерационным методом [70] в некоторых подпространствах пространства \mathbb{R}^n . Пусть имеется два подпространства $K \subset \mathbb{R}^n$ и $L \subset \mathbb{R}^n$. Требуется найти решение $\mathbf{x} \in K$, оптимальное относительно L . Это эквивалентно условию ортогональности невязки \mathbf{r} подпространству L : $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x} \perp L$. Если \mathbf{V} и \mathbf{W} – матрицы, столбцы которых

представляют собой базисные векторы подпространств K и L , то итерационный процесс может быть построен по формуле $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{V}(\mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{r}^k$.

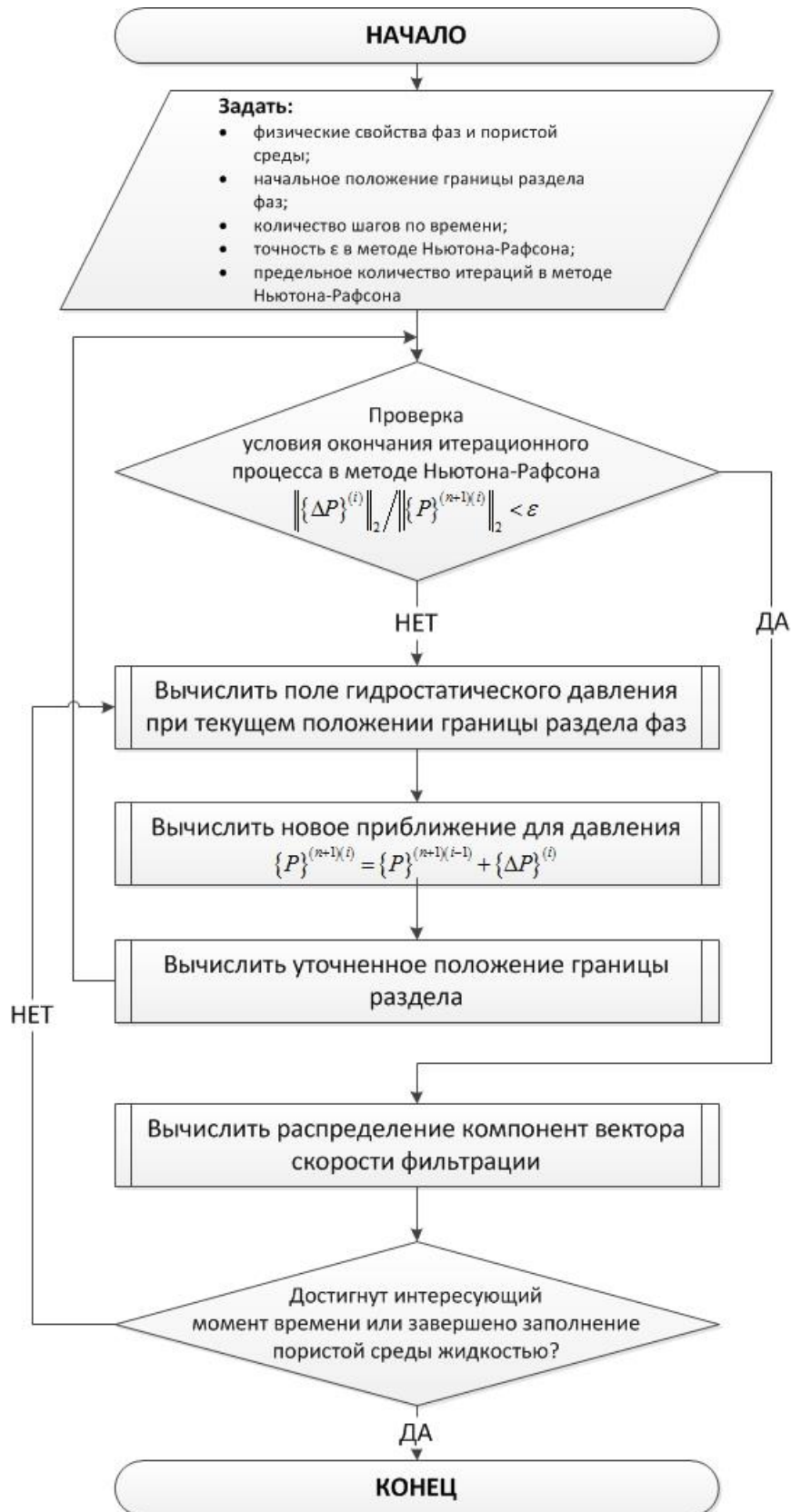


Рисунок 2.2 – Общий алгоритм решения глобальной задачи о вытеснении газа из недеформируемой пористой среды слабосжимаемой жидкостью

Наибольшей эффективности вычислительных алгоритмов удается достигнуть, если в качестве подпространства K выбрать подпространство Крылова [3]. Для некоторого целого положительного числа m подпространством Крылова $K_m(\mathbf{A}, \mathbf{v})$ называется множество всевозможных линейных комбинаций векторов $\{\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{A}^2\mathbf{v}, \dots, \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{v}\}$. Как правило, полагают $\mathbf{v} = \mathbf{r}^0$, где \mathbf{r}^0 – невязка начального приближения. Отметим, что выбор $m=1$ дает медленную сходимость и на сегодняшний день широкое распространение получили итерационные методы с размерностью подпространства больше единицы.

Методы подпространств Крылова имеют ряд преимуществ, среди которых [16]:

1. Численная устойчивость.
2. Эффективность для систем с разреженными матрицами большой размерности.
3. Методы применимы для решения систем с несимметричными матрицами.

Метод BiCGSTAB построен на основе квадратичного метода сопряженных градиентов (CGS) [16], но лишен его недостатков, таких как рост влияния ошибок округления и нестабильность невязки.

Приведем без вывода алгоритм данного метода [16, 104]:

1. Вычисляется невязка $\mathbf{r}^0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^0$, где \mathbf{x}^0 – начальное приближение (обычно $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$).
2. Вычисляется вектор $\tilde{\mathbf{r}}^0$, для которого $(\mathbf{r}^0, \tilde{\mathbf{r}}^0) \neq 0$ (обычно полагают $\tilde{\mathbf{r}}^0 = \mathbf{r}^0$).
3. Полагается $\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}^0$.
4. Устанавливается счетчик итераций $k = 0$.
5. Вычисляется коэффициент $\alpha_k = (\mathbf{r}^k, \tilde{\mathbf{r}}^0) / (\mathbf{A}\mathbf{p}_k, \tilde{\mathbf{r}}^0)$.
6. Вычисляется вектор $\mathbf{s}_k = \mathbf{r}^k - \alpha_k \mathbf{A}\mathbf{p}_k$.
7. Вычисляется коэффициент $\omega_k = (\mathbf{A}\mathbf{s}_k, \mathbf{s}_k) / (\mathbf{A}\mathbf{s}_k, \mathbf{A}\mathbf{s}_k)$.
8. Находится новое приближение $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{p}_k + \omega_k \mathbf{s}_k$.

9. Рассчитывается невязка $\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{s}_k - \omega_k \mathbf{A} \mathbf{s}_k$. Если $\|\mathbf{r}^{k+1}\| < \varepsilon$, то алгоритм завершается.

10. Вычисляется коэффициент $\beta_k = \frac{(\mathbf{r}^{k+1}, \tilde{\mathbf{r}}^0)}{(\mathbf{r}^k, \tilde{\mathbf{r}}^0)} \cdot \frac{\alpha_k}{\omega_k}$.

11. Вычисляется вектор $\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{r}^k + \beta_k \mathbf{p}_k - \omega_k \mathbf{A} \mathbf{p}_k$.

12. Полагается $k = k + 1$ и выполняется переход к шагу 5.

2.4 Выводы по второй главе

Во второй главе диссертации сформулированы вариационные постановки локальной и глобальной задач течения жидкой и газовой фаз. На основе метода конечных элементов разработаны численные алгоритмы решения локальных вариационных задач в общей трехмерной постановке и алгоритм расчета тензора проницаемости, а также алгоритм численного решения глобальной вариационной задачи течения жидкости, вытесняющей газ из пористой композитной структуры. В силу нелинейности глобальной задачи фильтрации для ее численного решения использовался метод Ньютона-Рафсона, с помощью которого получена вариационная постановка в приращениях. Рассмотрен общий итерационный алгоритм решения глобальной задачи о течении жидкости, вытесняющей газ из пористой композитной структуры.

ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

3.1 Разработка программного комплекса для двухмасштабного моделирования процессов фильтрации в пористых средах

3.1.1 Блок-схема программного комплекса и принципы работы с ним

Для двухмасштабного моделирования процессов фильтрации в пористых периодических системах был разработан программный комплекс, упрощенная блок-схема которого приведена на рисунке 3.1. Для разработки использовались среда MS Visual Studio 2015, кроссплатформенный фреймворк Qt, а также СУБД [18] PostgreSQL. Программирование велось на языке C++ [58] (на основе стандарта C++14).

Комплекс представляет собой множество модулей, большая часть которых реализована в виде библиотек динамической компоновки. Рассмотрим основные из них.

1. *Управляющий модуль* – отвечает за подготовку входных данных задач, первоначальную инициализацию (выбор типа конечных элементов, типов решателей СЛАУ и метода конечных элементов), запуск конкретных решателей, управление итерационным процессом, выгрузку результатов расчетов.

2. *Модуль решателей СЛАУ* – отвечает за сборку и хранение глобальной СЛАУ в формате CSR [3], а также осуществляет непосредственное ее решение на основе метода сопряженных градиентов или стабилизированного метода бисопряженных градиентов.

3. *Модуль типов конечных элементов* – отвечает за вычисление локальной матрицы и локального вектора для данного типа конечного элемента.

4. *Модуль решателя локальной задачи фильтрации* – реализует численное решение локальной задачи фильтрации на основе соотношений (193) – (194), а также расчет характеристик пористой среды на основе соотношений (198).

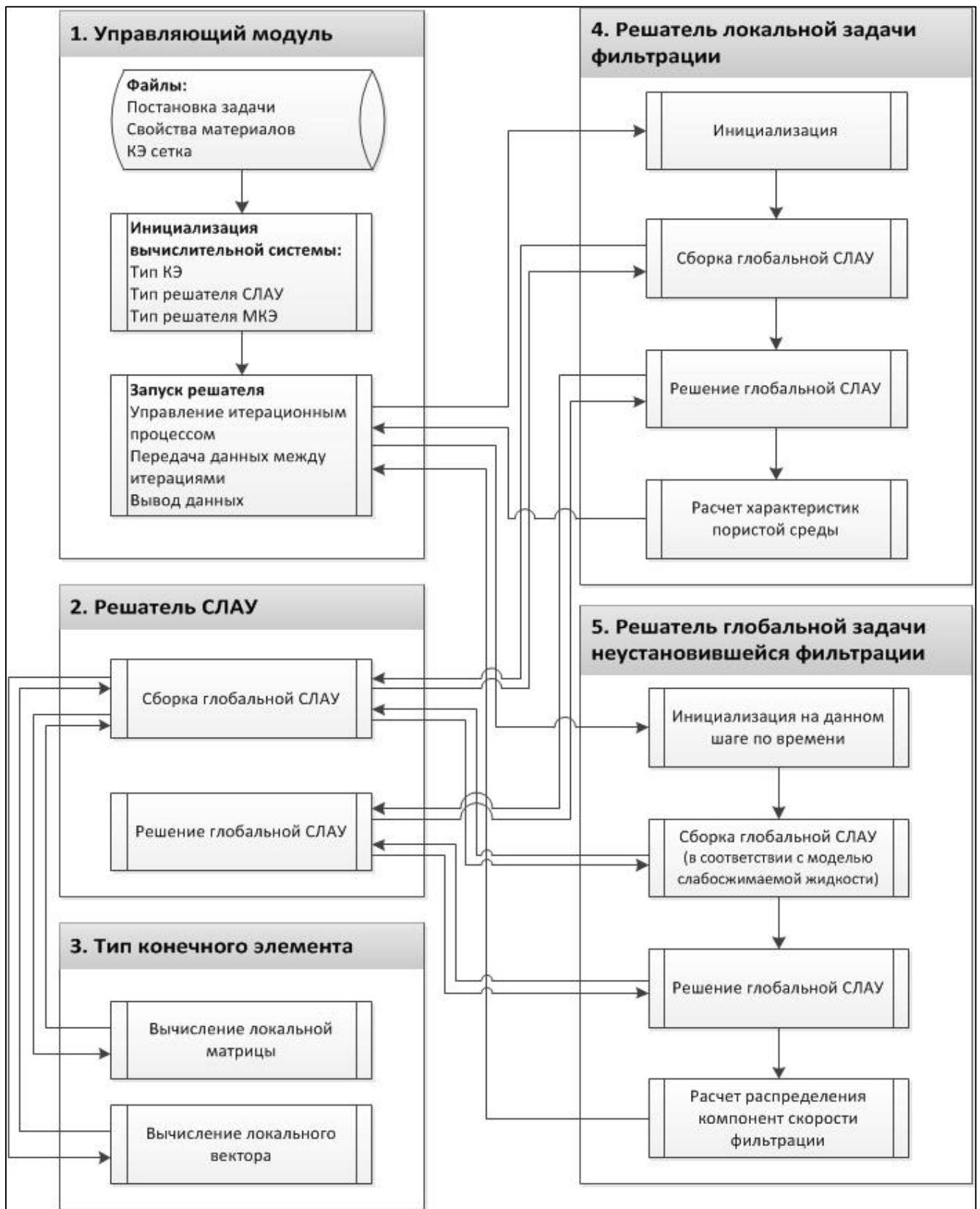


Рисунок 3.1 – Блок-схема программного комплекса для моделирования локальных и глобальных процессов фильтрации

5. *Модуль решателя глобальной задачи неустановившейся фильтрации* – реализует численное решение глобальной задачи фильтрации (235), (242), (246) на основе метода Ньютона-Рафсона.

Рассмотрим основные принципы работы комплекса. Управляющий модуль получает на вход следующие основные файлы в формате XML: файл постановки задачи, файл свойств материалов, файл конечно-элементной сетки. На основе этих данных производится первоначальная инициализация вычислительной системы, в рамках которой выбирается конкретный тип конечного элемента, тип решателя СЛАУ и тип решателя метода конечных элементов. После этого производится запуск итерационного процесса (в случае стационарной задачи – выполняется только один шаг по времени) для данного решателя с выводом результатов на данной итерации при необходимости.

Конкретные решатели локальной и глобальной задач реализованы однотипно. Первоначально выполняется инициализация решателя, после которой запускается процесс сборки глобальной СЛАУ на основе выбранного пользователем типа конечного элемента. После этого производится ее решение на основе выбранного метода. Когда процесс решения окончен, начинается стадия постпроцессинга, в рамках которой осуществляется вычисление дополнительных параметров или полей: характеристик пористой среды в случае решателя локальной задачи и распределения полей компонент скорости фильтрации – в случае решателя глобальной задачи. Для решателя глобальной задачи имеется возможность изменения процесса сборки глобальной СЛАУ в зависимости от выбранной модели слабосжимаемой жидкости (классической или обобщенной).

Вывод распределений искомых полей, полученных в ходе решения локальной и глобальной задач, осуществлялся в формате MV, для чтения которого использовался визуализатор MeshViewer, разработанный на кафедре «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Решатель глобальной задачи фильтрации, кроме того, производит выгрузку графиков распределения средних по сечению давления и скорости в зависимости от продольной координаты в формате CSV.

3.1.2 Тестирование программного комплекса

Для проверки работоспособности программного комплекса рассмотрим аналитическое решение задачи (96) при $\alpha = 1$ для случая течения в одноканальной структуре, $1/8$ ячейки периодичности которой представлена на рисунке 3.2.

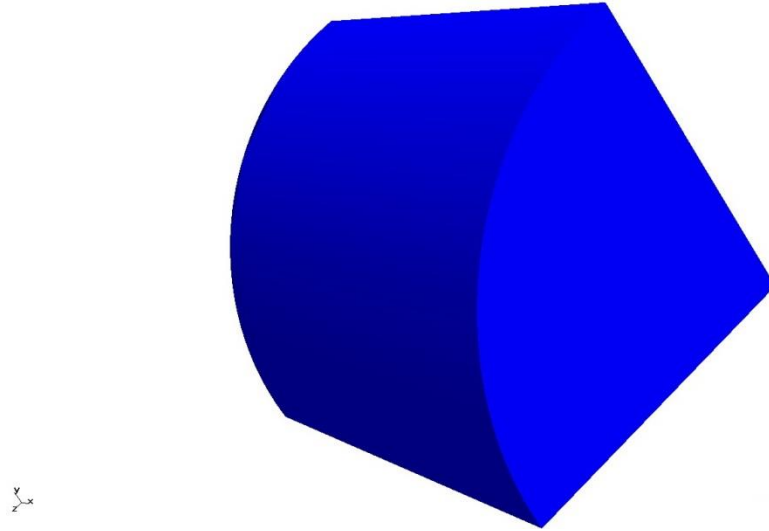


Рисунок 3.2 – $1/8$ часть одноканальной цилиндрической структуры для тестовой задачи

Для капилляров малого радиуса можно предположить, что линии тока вязкой медленно движущейся несжимаемой жидкости параллельны оси ξ_1 . В этом случае вектор скорости имеет вид $W^{(1)} = (W_1^{(1)}, 0, 0)$, что соответствует классической задаче Пуазейля [4]. Задачу (96) для данного случая можно записать в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{1/1}^{(1)} = 0, \\ P_{/1}^{(1)} - W_{1/jj}^{(1)} = 1, \\ P_{/2}^{(1)} = 0, \\ P_{/3}^{(1)} = 0, \quad \xi_i \in V_{\xi p}; \\ \langle P^{(1)} \rangle = 0; \quad \llbracket W_1^{(1)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket P^{(1)} \rrbracket = 0; \\ W_1^{(1)} = 0, \quad \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}. \end{array} \right. \quad (247)$$

Из первого уравнения в (247) следует, что $W_1^{(1)} = W_1^{(1)}(\xi_2, \xi_3)$. Из третьего и четвертого уравнений получаем, что $P^{(1)} = P^{(1)}(\xi_1)$. Из второго уравнения следует, что $P^{(1)}$ – линейная функция, т.к. $P_{/1}^{(1)}$ не может зависеть от ξ_1 . В силу условия

периодичности $\llbracket P^{(1)} \rrbracket = 0$ получаем, что $P^{(1)} = C = const$. Наконец, из условия осреднения $\langle P^{(1)} \rangle = 0$ приходим к выражению $P^{(1)} = 0$. Тогда система (247) сводится к следующему виду:

$$\begin{cases} W_{1/1}^{(1)} = 0, \\ -W_{1/jj}^{(1)} = 1, \quad \xi_i \in V_{\xi p}; \\ \llbracket W_1^{(1)} \rrbracket = 0; \\ W_1^{(1)} = 0, \quad \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}. \end{cases} \quad (248)$$

Задача на $1/8$ ячейки периодичности в цилиндрической системе координат на основе (248) может быть сформулирована следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\tilde{W}_1^{(1)} r) = 0, \\ -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\tilde{W}_1^{(1)}}{dr} \right) = 1, \\ \tilde{W}_1^{(1)}(R) = 0, \end{cases} \quad (249)$$

где R – радиус канала. На основе (249) получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{W}_1^{(1)}}{dr} = r, \\ \tilde{W}_1^{(1)}(R) = 0, \end{cases} \quad (250)$$

решая которую, приходим к искомой формуле для распределения первой компоненты скорости:

$$\tilde{W}_1^{(1)}(r) = -\frac{R^2 - r^2}{2}. \quad (251)$$

Продолжая (251) во всю ячейку периодичности и применяя оператор осреднения (36), получаем аналитические выражения для пористости и коэффициента проницаемости:

$$K_1^1 = \frac{\pi R^4}{4}, \quad \varphi = \pi R^2. \quad (252)$$

Параметры численного расчета представлены в таблице 3.1, результаты приведены на рисунках 3.3, 3.4 и в таблице 3.2.

Таблица 3.1 – Параметры численного расчета распределения модуля компоненты скорости $\tilde{W}_1^{(1)}$ в одноканальной цилиндрической структуре

Параметр	Значение
<i>Геометрические параметры</i>	
Радиус канала	0,3
<i>Параметры конечно-элементной сетки</i>	
Число конечных элементов	10 678
Число узлов	16 141
Число поверхностных конечных элементов	1 776

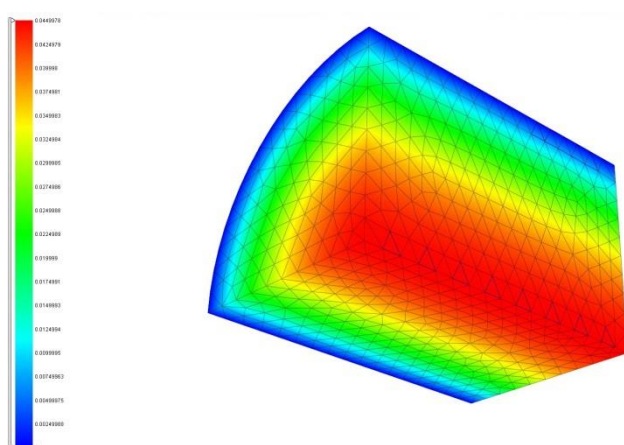


Рисунок 3.3 – Распределение компоненты скорости $\tilde{W}_1^{(1)}$ в одноканальной цилиндрической структуре

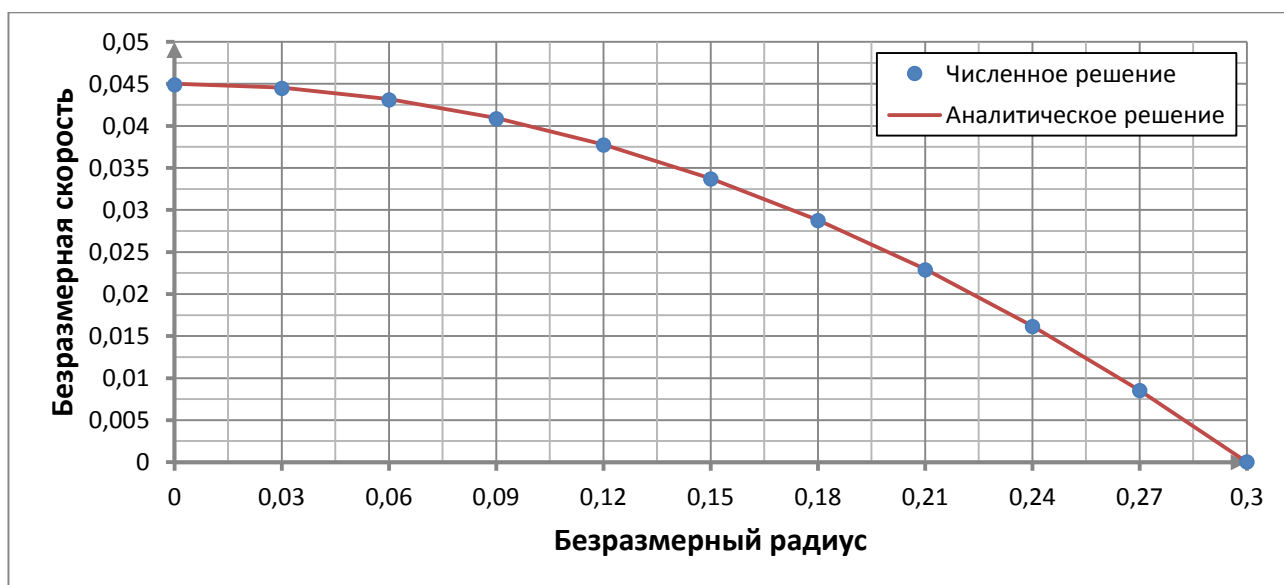


Рисунок 3.4 – Сравнение численных и аналитических результатов для распределения модуля компоненты скорости $\tilde{W}_1^{(1)}$ в одноканальной цилиндрической структуре

Таблица 3.2 – Сравнение численных и аналитических результатов для распределения модуля компоненты скорости $\tilde{W}_1^{(1)}$ в одноканальной цилиндрической структуре

Радиус	Численное решение	Аналитическое решение	Относительная погрешность, %
0	0,044885	0,045	0,26
0,03	0,044434	0,04455	0,26
0,06	0,043086	0,0432	0,26
0,09	0,04084	0,04095	0,27
0,12	0,037697	0,0378	0,27
0,15	0,033654	0,03375	0,28
0,18	0,028711	0,0288	0,31
0,21	0,022867	0,02295	0,36
0,24	0,016126	0,0162	0,46
0,27	0,008482	0,00855	0,80
0,3	0	0	—

Из рисунка 3.4 и таблицы 3.2 видно, что относительная погрешность численных результатов не превышает 1%. Из (252) аналитическое значение коэффициента проницаемости равно $K_1^1 = 6.362 \cdot 10^{-3}$, пористости – $\varphi = 0,283$. Численное значение коэффициента проницаемости составило $K_1^1 = 6.362 \cdot 10^{-3}$, пористости – $\varphi = 0,282$. Таким образом, имеет место хорошее согласование численных и аналитических результатов.

3.2 Численное моделирование локальных процессов фильтрации

3.2.1 Численное моделирование локальных процессов фильтрации в трехканальной пористой структуре

Рассмотрим процесс фильтрации в изотропной канално-пористой структуре, приведенной на рисунке 1.2, а. Введем в качестве характеристики геометрии порового пространства величину χ , равную отношению безразмерного

радиуса цилиндрических каналов R_k к безразмерному радиусу сферической части поры R_n . Численное моделирование локальных процессов фильтрации проводилось при различных радиусах каналов и пор для случая течения вдоль оси ξ_1 (задача $L^{(1)}$). Параметры расчетов представлены в таблице 3.3, минимальные и максимальные значения пульсации давления и компонент скорости приведены в таблице 3.4 и на рисунках 3.5–3.7, картины соответствующих полей – на рисунках 3.8 – 3.15.

Таблица 3.3 – Параметры численных расчетов задачи фильтрации $L^{(1)}$ в трехканальной пористой структуре различной конфигурации

Параметр	Значение			
	Расчет 1	Расчет 2	Расчет 3	Расчет 4
<i>Геометрические параметры</i>				
Безразмерный радиус сферической части поры, R_n	0,3	0,3	0,2	0,2
Безразмерный радиус каналов, R_k	0,05	0,1	0,05	0,1
Значение параметра $\chi = R_k/R_n$	0,167	0,333	0,25	0,5
<i>Параметры конечно-элементной сетки</i>				
Количество вершинных узлов / общее количество	8 940 / 63 297	8 554 / 61 638	6 643 / 44 757	7 474 / 50 807
Количество КЭ	42 159	41 730	27 868	32 011
Количество поверхностных КЭ	6 518	5 602	7 208	7 698

Из анализа приведенных результатов можно сделать следующие выводы. Характер распределения пульсации давления $\tilde{P}^{(1)}$ во всех расчетах имеет в целом схожую структуру. Максимальное значение пульсации давления, как видно из рисунков 3.8, 3.10, 3.12 и 3.14, приходится на область соединения цилиндрического канала со сферической порой. При этом, как следует из таблицы 3.4 и рисунка 3.5, наибольшее среди всех максимальных значений наблюдается в расчете 1 при $\chi=0,167$, т.е. в случае относительно большого радиуса сферической части поры с достаточно узкими каналами, а наименьшее – в расчете 4 при $\chi=0,5$, т.е. в случае сферы малого радиуса с относительно широкими каналами. Отсюда можно сделать предположение, что пульсация

давления тем больше, чем больше радиус сферической части поры и меньше радиус ее цилиндрической части.

Таблица 3.4 – Минимальные и максимальные значения давления и компонент скорости в трехканальной пористой структуре для задачи $L^{(1)}$

№ расчета	$\chi = R_{\kappa} / R_n$	Параметр	Значение	
			минимальное	максимальное
1	0,167	$\tilde{P}^{(1)}$	0	0,409
		$\tilde{W}_1^{(1)}, \times 10^3$	0	3,139
		$\tilde{W}_2^{(1)}, \times 10^4$	- 4,696	2,834
		$\tilde{W}_3^{(1)}, \times 10^4$	- 4,806	1,902
2	0,333	$\tilde{P}^{(1)}$	0	0,381
		$\tilde{W}_1^{(1)}, \times 10^3$	0,197	8,177
		$\tilde{W}_2^{(1)}, \times 10^4$	- 11,091	1,280
		$\tilde{W}_3^{(1)}, \times 10^4$	- 10,744	1,195
3	0,25	$\tilde{P}^{(1)}$	- 0,072	0,275
		$\tilde{W}_1^{(1)}, \times 10^3$	-0,282	2,458
		$\tilde{W}_2^{(1)}, \times 10^4$	- 3,290	6,095
		$\tilde{W}_3^{(1)}, \times 10^4$	- 3,179	7,131
4	0,5	$\tilde{P}^{(1)}$	- 0,047	0,243
		$\tilde{W}_1^{(1)}, \times 10^3$	- 0,048	6,454
		$\tilde{W}_2^{(1)}, \times 10^4$	- 6,836	2,089
		$\tilde{W}_3^{(1)}, \times 10^4$	- 5,650	3,128

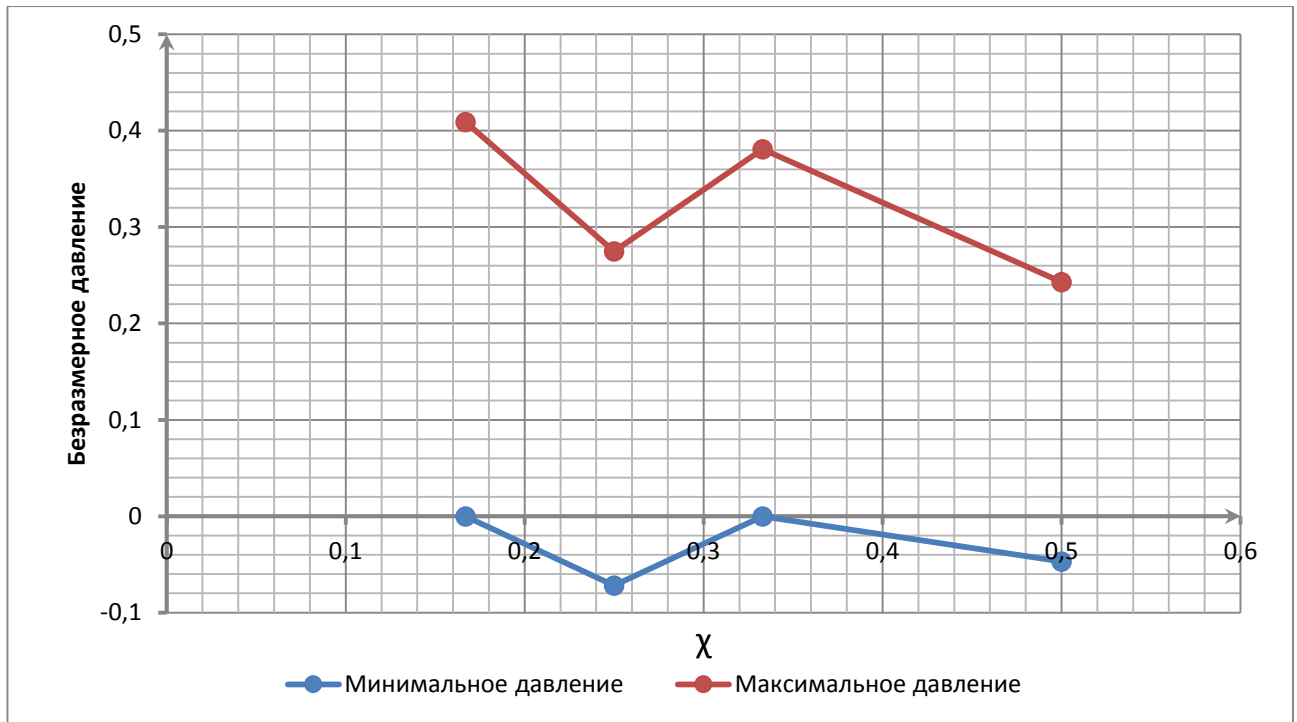


Рисунок 3.5 – Минимальные и максимальные значения давления $\tilde{P}^{(1)}$ при различных значениях параметра χ

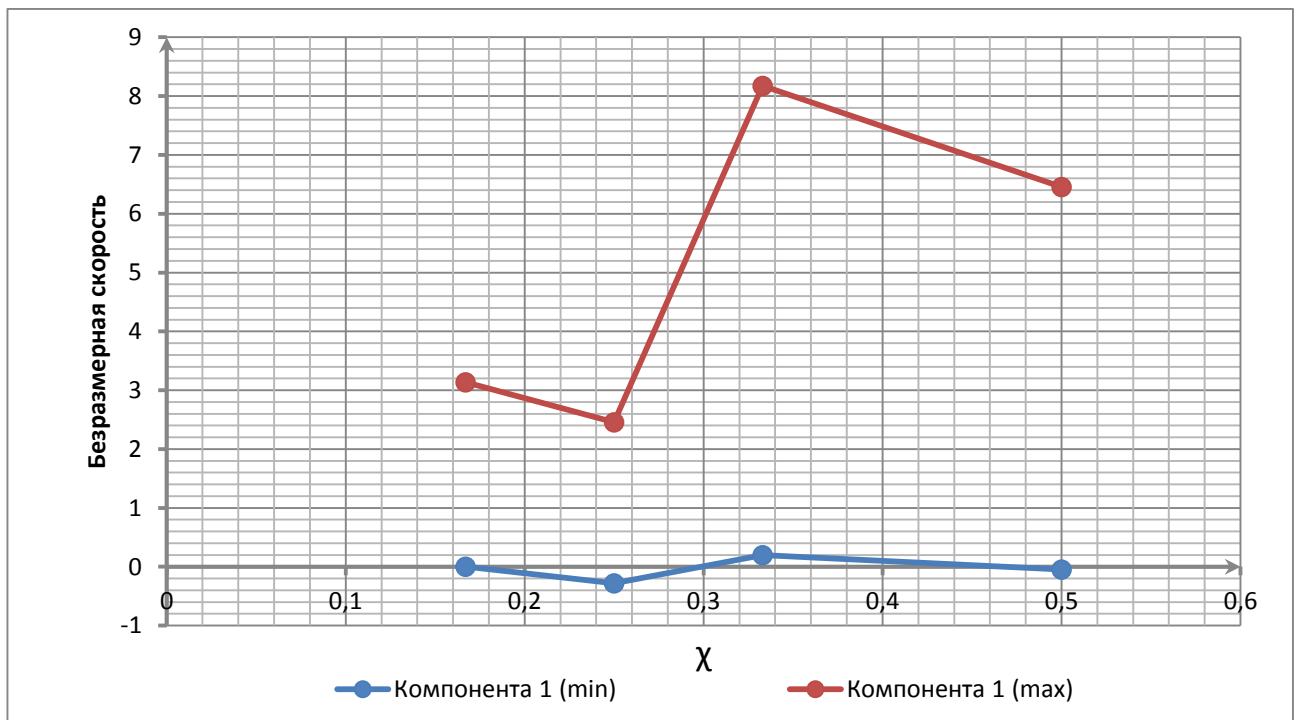


Рисунок 3.6 – Минимальные и максимальные значения компоненты $\tilde{W}_1^{(1)} \cdot 10^3$ скорости при различных значениях параметра χ

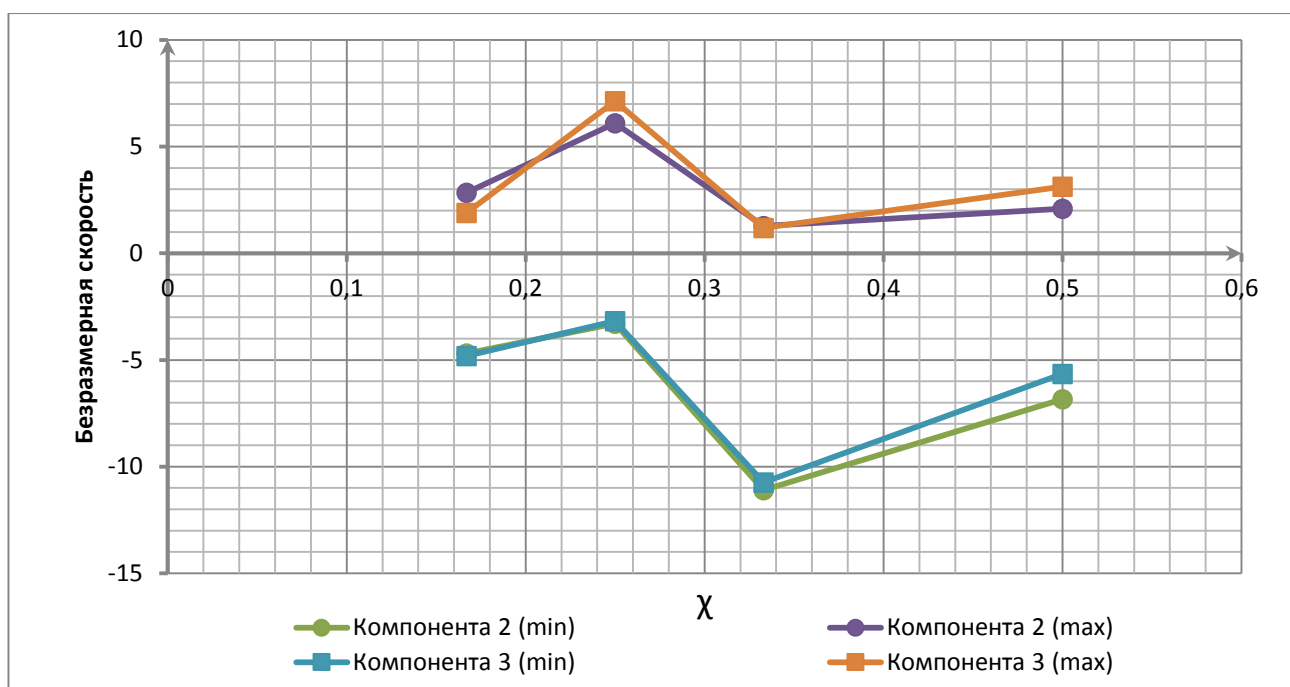


Рисунок 3.7 – Минимальные и максимальные значения компонент $\tilde{W}_2^{(1)} \cdot 10^4$ и $\tilde{W}_3^{(1)} \cdot 10^4$ скорости при различных значениях параметра χ

Максимальное значение компоненты скорости $\tilde{W}_1^{(1)}$, как видно из рисунков 3.9 а, 3.11 а, 3.13 а и 3.15 а, достигается на оси ξ_1 цилиндрической части поры. При этом чем уже канал, тем ближе максимум к области соединения капилляра со сферической частью поры. Чем больше радиус цилиндрической части, тем меньше характер течения в ней отличается от течения в чисто одноканальной структуре. Как следует из таблицы 3.4 и рисунка 3.6, наибольшее среди всех максимальных значений имеет место в расчете 2 при $\chi = 0,333$, а наименьшее – в расчете 3 при $\chi = 0,25$. Исходя из этого, можно сделать вывод, что с ростом радиуса канала компонента скорости $\tilde{W}_1^{(1)}$ также претерпевает рост.

На рисунках 3.9 б, в, 3.11 б, в, 3.13 б, в и 3.15 б, в видно, что компоненты скорости $\tilde{W}_2^{(1)}$ и $\tilde{W}_3^{(1)}$ имеют локальные минимумы в зоне соединения канала со сферической частью поры, причем наименьшие среди всех минимальных значения, как следует из таблицы 3.4 и рисунка 3.7, достигаются в расчете 2 при $\chi = 0,333$, а наибольшие – в расчете 3 при $\chi = 0,25$.

3.2.2 Численное моделирование локальных процессов фильтрации в одноканальной пористой структуре

В работе было исследовано влияние побочных каналов на процесс течения среды в пористой структуре. С этой целью производилось сравнение результатов расчета 1 (см. таблицу 3.4) с результатами расчета процесса движения фазы в поре с аналогичными параметрами, но не имеющей каналов по побочным направлениям течения. Параметры расчета для данной структуры приведены в таблице 3.5, результаты сравнения – в таблице 3.6, распределения параметров – на рисунках 3.16 и 3.17.

Как следует из таблицы 3.6, минимальные и максимальные значения пульсации давления $\tilde{P}^{(1)}$ и компонент скорости $\tilde{W}_i^{(1)}$, $i = \overline{1,3}$ в рассматриваемых случаях отличаются слабо. По этой причине влияние побочных каналов на процесс течения следует признать незначительным.

Таблица 3.5 – Параметры численного расчета задачи фильтрации $L^{(1)}$ в одноканальной пористой структуре

Параметр	Значение
<i>Геометрические параметры</i>	
Радиус сферической части поры	0,3
Радиус цилиндрической части поры	0,05
<i>Параметры конечно-элементной сетки</i>	
Количество вершинных узлов / общее количество	6 626 / 47 711
Количество КЭ	32 272
Количество поверхностных КЭ	4 376

Таблица 3.6 – Сравнение минимальных и максимальных значений пульсации давления и компонент скорости в одноканальной пористой структуре с результатами, полученными в случае трехканальной структуры из расчета 1

Параметр	Значение для одноканальной структуры		Значение для трехканальной структуры из расчета 1	
	минимальное	максимальное	минимальное	максимальное
$\tilde{P}^{(1)}$	0	0,384	0	0,409
$\tilde{W}_1^{(1)}, \times 10^3$	- 0,0353	3,148	0	3,139
$\tilde{W}_2^{(1)}, \times 10^4$	- 5,068	1,631	- 4,696	2,834
$\tilde{W}_3^{(1)}, \times 10^4$	- 4,982	1,890	- 4,806	1,902

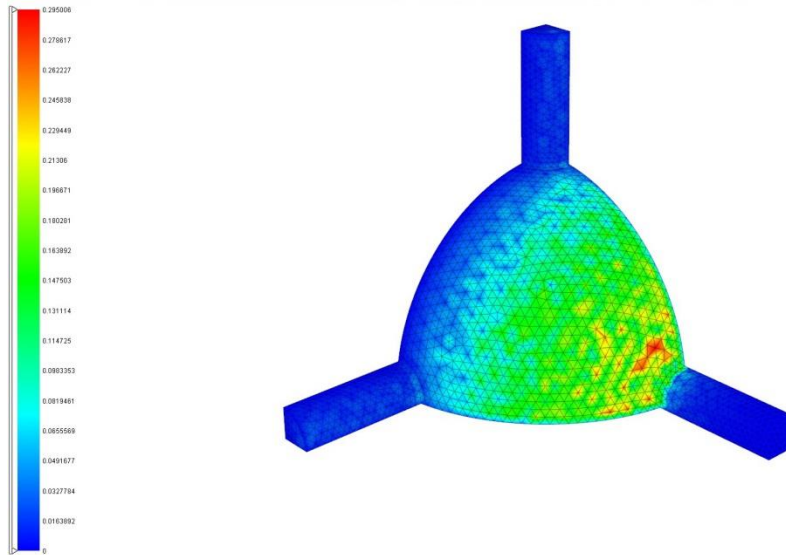


Рисунок 3.8 – Распределение давления $\tilde{P}^{(1)}$ в локальной задаче $L^{(1)}$ для пористой структуры в расчете 1

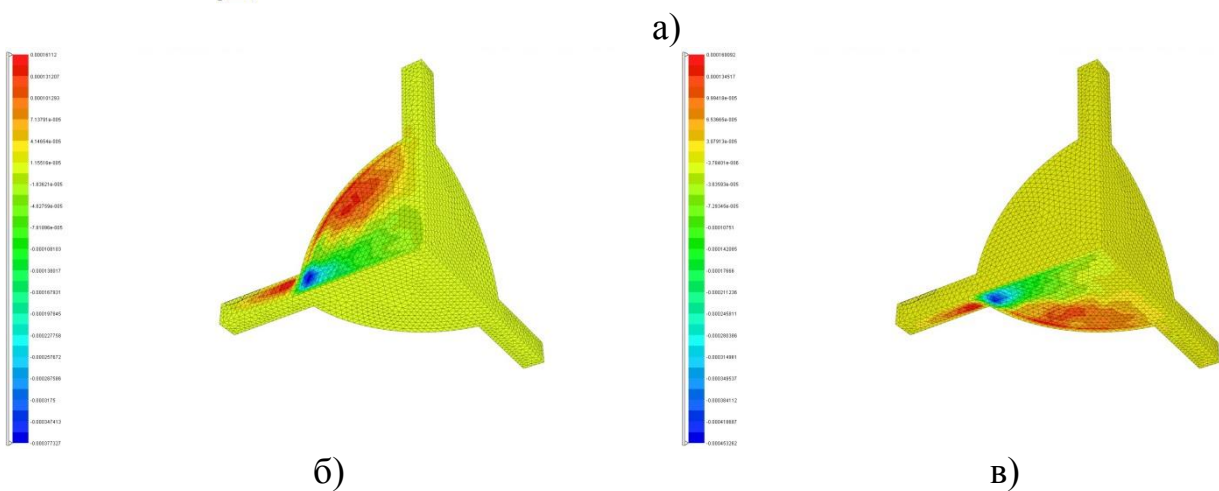
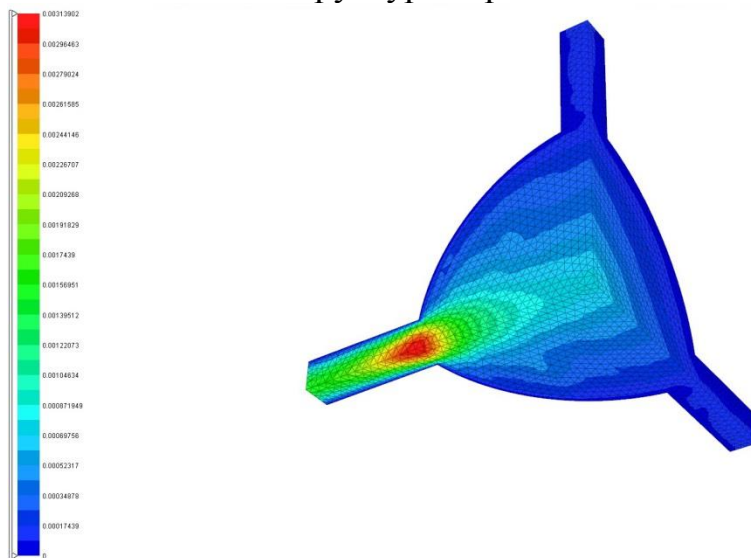


Рисунок 3.9 – Распределение компонент скорости в локальной задаче $L^{(1)}$ для пористой структуры в расчете 1:

а – компонента $\tilde{W}_1^{(1)}$; б – компонента $\tilde{W}_2^{(1)}$; в – компонента $\tilde{W}_3^{(1)}$

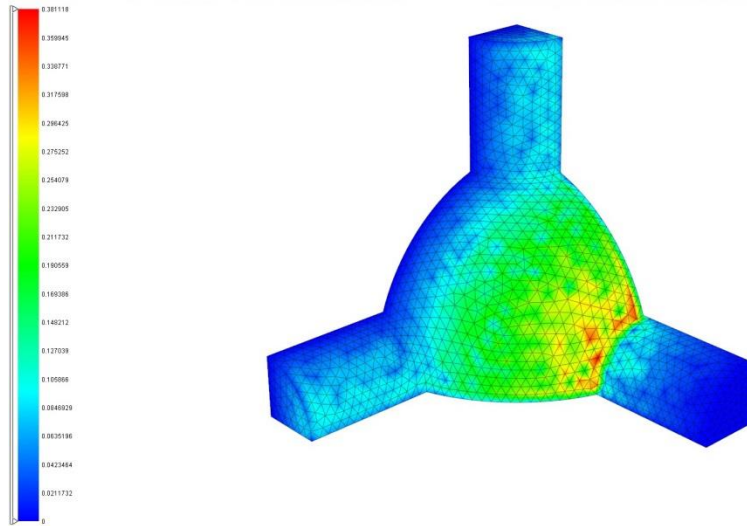


Рисунок 3.10 – Распределение давления $\tilde{P}^{(1)}$ в локальной задаче $L^{(1)}$ для пористой структуры в расчете 2

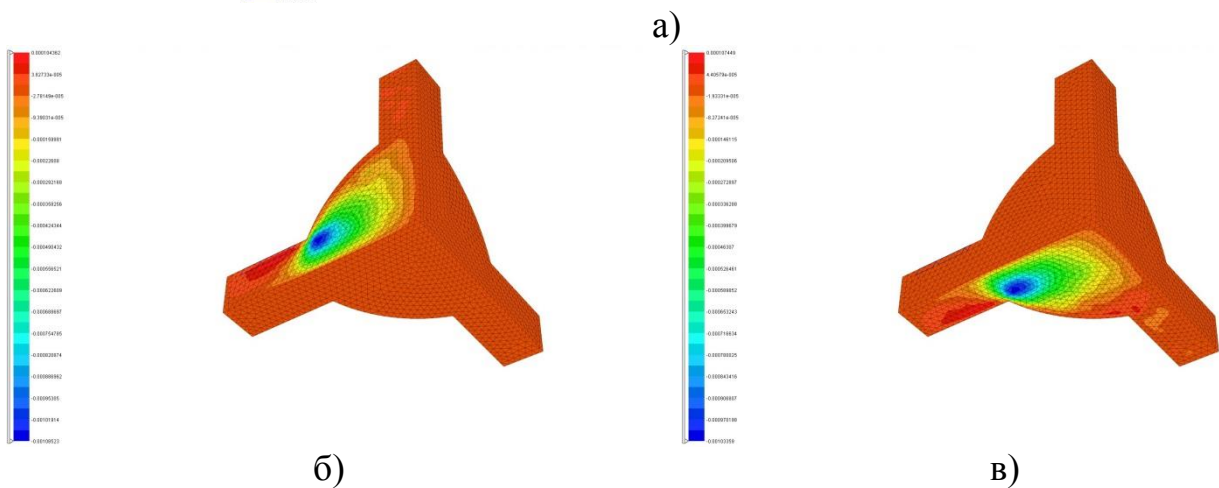
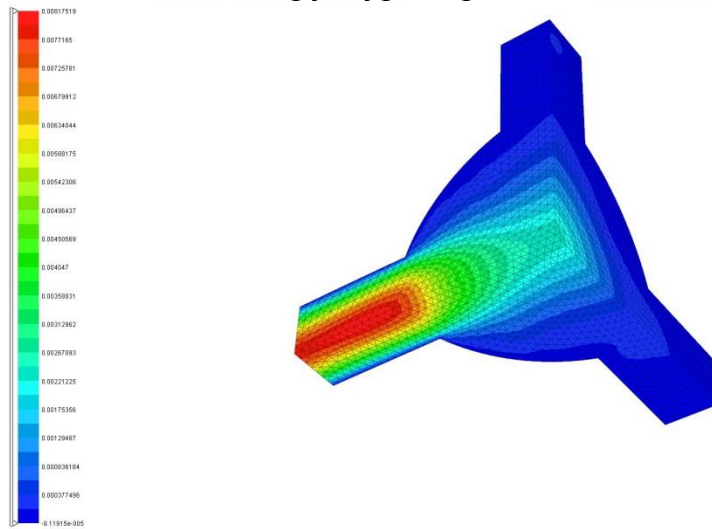


Рисунок 3.11 – Распределение компонент скорости в локальной задаче $L^{(1)}$ для пористой структуры в расчете 2:
 а – компонента $\tilde{W}_1^{(1)}$; б – компонента $\tilde{W}_2^{(1)}$; в – компонента $\tilde{W}_3^{(1)}$

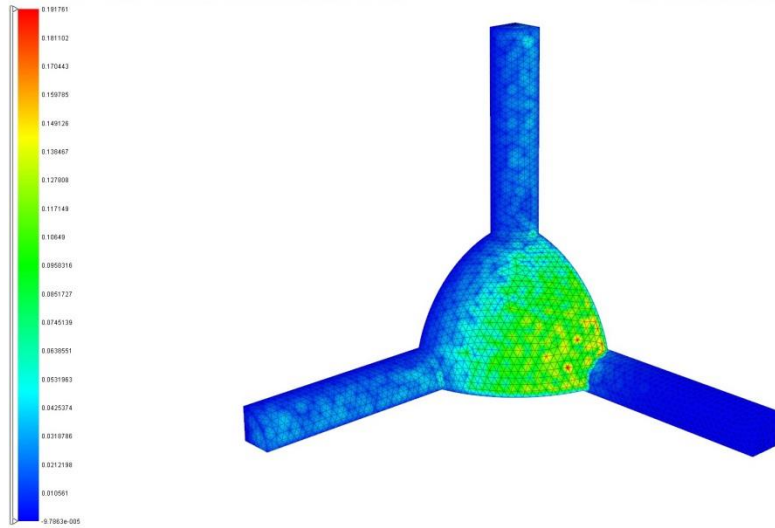
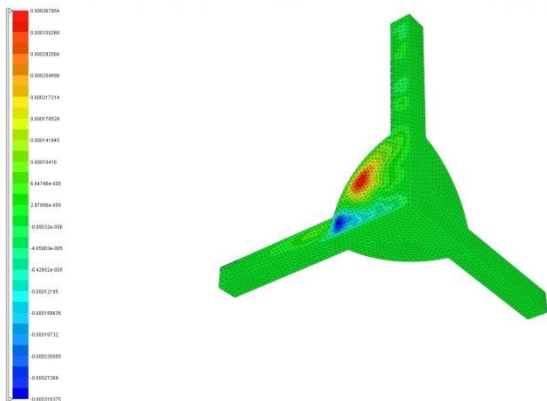
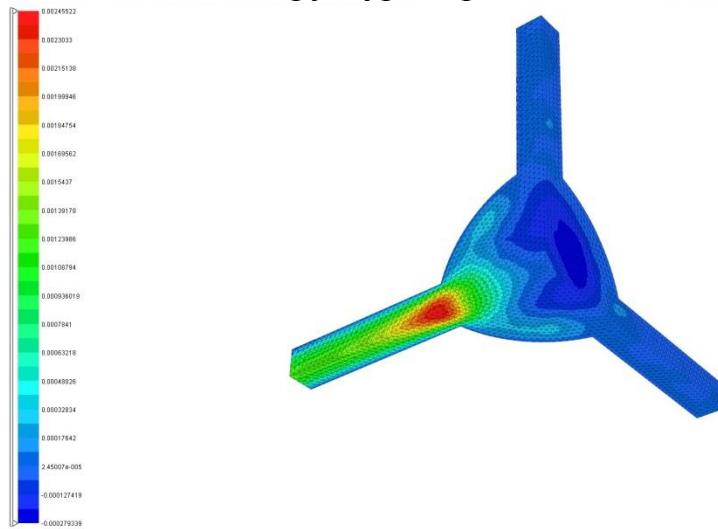
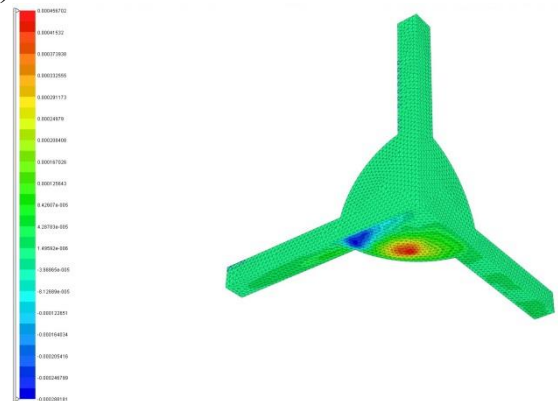


Рисунок 3.12 – Распределение давления $\tilde{P}^{(1)}$ в локальной задаче $L^{(1)}$ для пористой структуры в расчете 3



а)



б)

в)

Рисунок 3.13 – Распределение компонент скорости в локальной задаче $L^{(1)}$ для пористой структуры в расчете 3:

а – компонента $\tilde{W}_1^{(1)}$; б – компонента $\tilde{W}_2^{(1)}$; в – компонента $\tilde{W}_3^{(1)}$

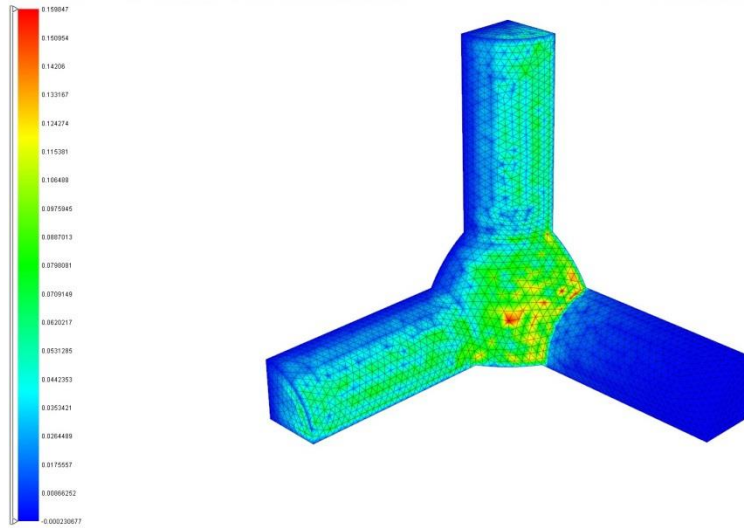


Рисунок 3.14 – Распределение давления $\tilde{P}^{(1)}$ в локальной задаче $L^{(1)}$ для пористой структуры в расчете 4

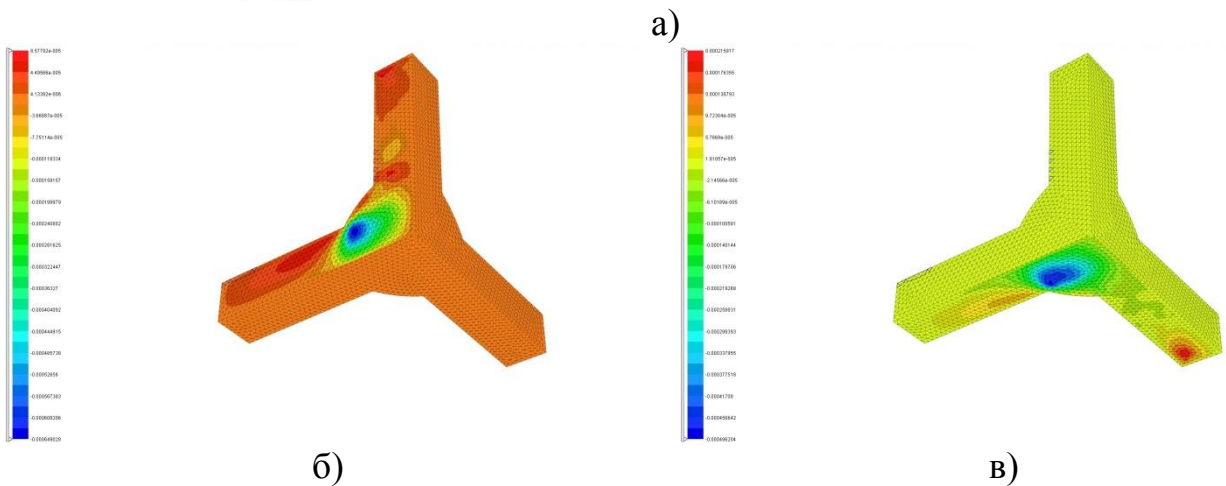
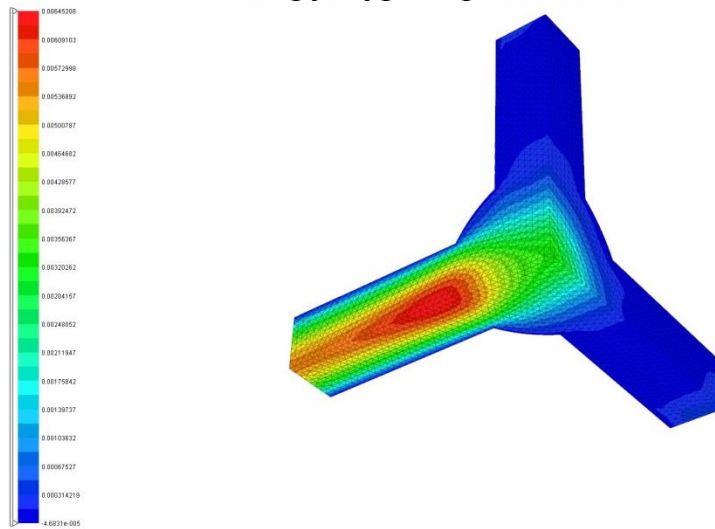


Рисунок 3.15 – Распределение компонент скорости в локальной задаче $L^{(1)}$ для пористой структуры в расчете 4:

а – компонента $\tilde{W}_1^{(1)}$; б – компонента $\tilde{W}_2^{(1)}$; в – компонента $\tilde{W}_3^{(1)}$

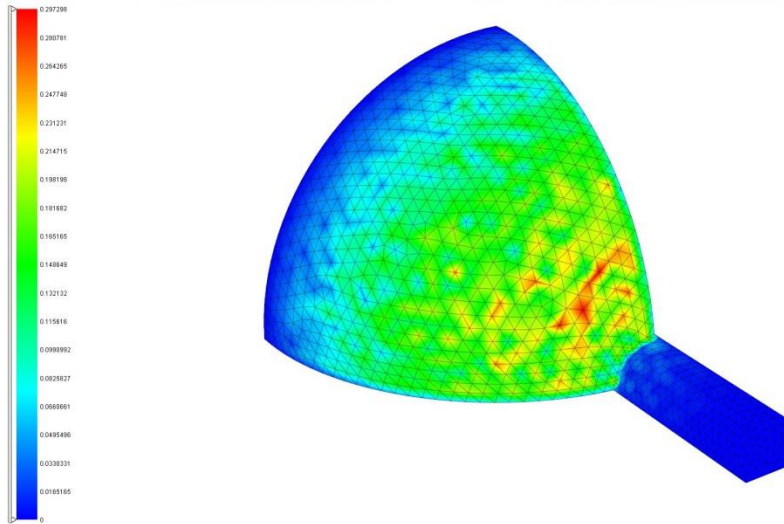
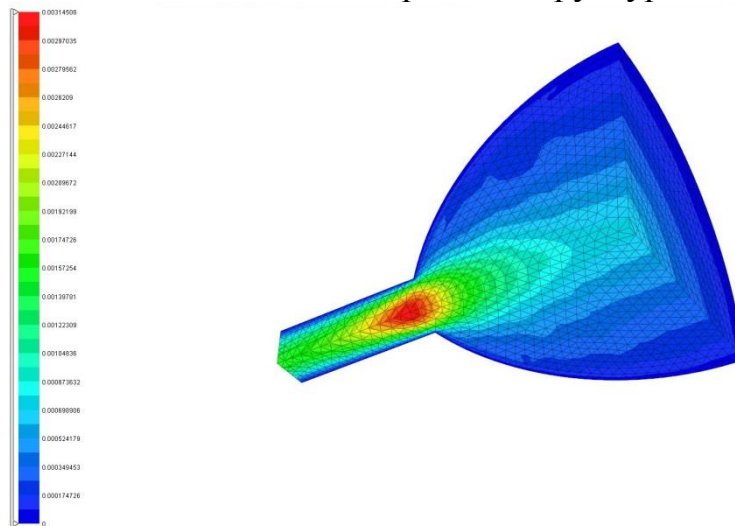
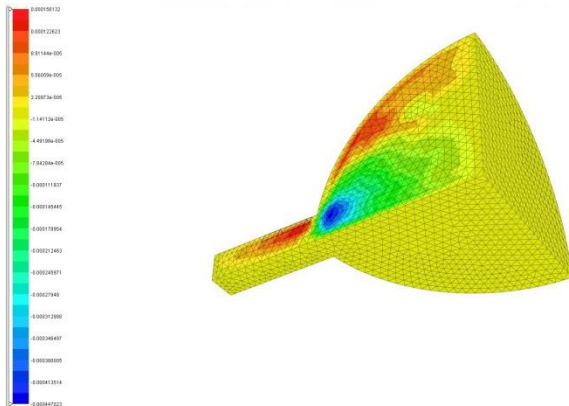


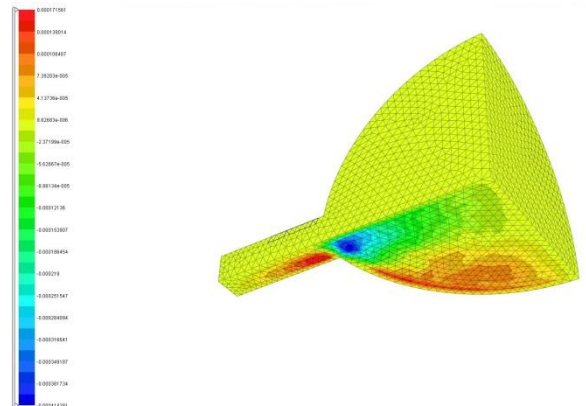
Рисунок 3.16 – Распределение давления $\tilde{P}^{(1)}$ в локальной задаче $L^{(1)}$ для одноканальной пористой структуры



а)



б)



в)

Рисунок 3.17 – Распределение компонент скорости в локальной задаче $L^{(1)}$ для одноканальной пористой структуры:
 а – компонента $\tilde{W}_1^{(1)}$; б – компонента $\tilde{W}_2^{(1)}$; в – компонента $\tilde{W}_3^{(1)}$

3.2.3 Численное моделирование локальных процессов фильтрации в тканевой структуре

Рассмотрим процесс фильтрации в тканевой структуре, приведенной на рисунке 1.2, б. Пористая среда в этом случае является анизотропной, поэтому в данном случае рассматривалось численное моделирование локальных процессов фильтрации для случая течения в нормальном (задача $L^{(1)}$) и тангенциальном (задача $L^{(3)}$) направлениях относительно плоскости волокон (задача $L^{(2)}$ тождественна задаче $L^{(3)}$). Параметры расчетов представлены в таблице 3.7, минимальные и максимальные значения пульсации давления и компонент скорости приведены в таблице 3.8, картины соответствующих полей – на рисунках 3.18 – 3.21.

Таблица 3.7 – Параметры численных расчетов задач фильтрации $L^{(1)}$ и $L^{(3)}$ в тканевой структуре

Параметр	Значение	
	Задача $L^{(1)}$	Задача $L^{(3)}$
<i>Геометрические параметры</i>		
Радиус волокна	0,125	0,125
<i>Параметры конечно-элементной сетки</i>		
Количество вершинных узлов / общее количество	11 865 / 81 125	10 286 / 69 821
Количество КЭ	51 258	43 682
Количество поверхностных КЭ	12 276	11 136

Из рисунков 3.18 и 3.20 следует, что максимумы и минимумы давлений $\tilde{P}^{(1)}$ и $\tilde{P}^{(3)}$, полученные в результате решения локальных задач $L^{(1)}$ и $L^{(3)}$ соответственно, приходятся на области переплетения волокон на границе с твердым телом. При этом максимальные значения давлений, как следует из таблицы 3.8, оказались в целом соизмеримыми при течении среды как в нормальном, так и в тангенциальном направлениях.

Таблица 3.8 – Минимальные и максимальные значения давления и компонент скорости в тканевой структуре для задач $L^{(1)}$ и $L^{(3)}$

Локальная задача	Параметр	Значение	
		минимальное	максимальное
$L^{(1)}$	$\tilde{P}^{(1)}$	-0,198	0,201
	$\tilde{W}_1^{(1)}, \times 10^{-2}$	-0,00198	1,425
	$\tilde{W}_2^{(1)}, \times 10^{-3}$	-1,367	1,370
	$\tilde{W}_3^{(1)}, \times 10^{-3}$	-1,362	1,336
$L^{(3)}$	$\tilde{P}^{(3)}$	-0,242	0,231
	$\tilde{W}_1^{(3)}, \times 10^{-3}$	-1,117	1,127
	$\tilde{W}_2^{(3)}, \times 10^{-3}$	-1,847	1,834
	$\tilde{W}_3^{(3)}, \times 10^{-2}$	-0,00116	1,186

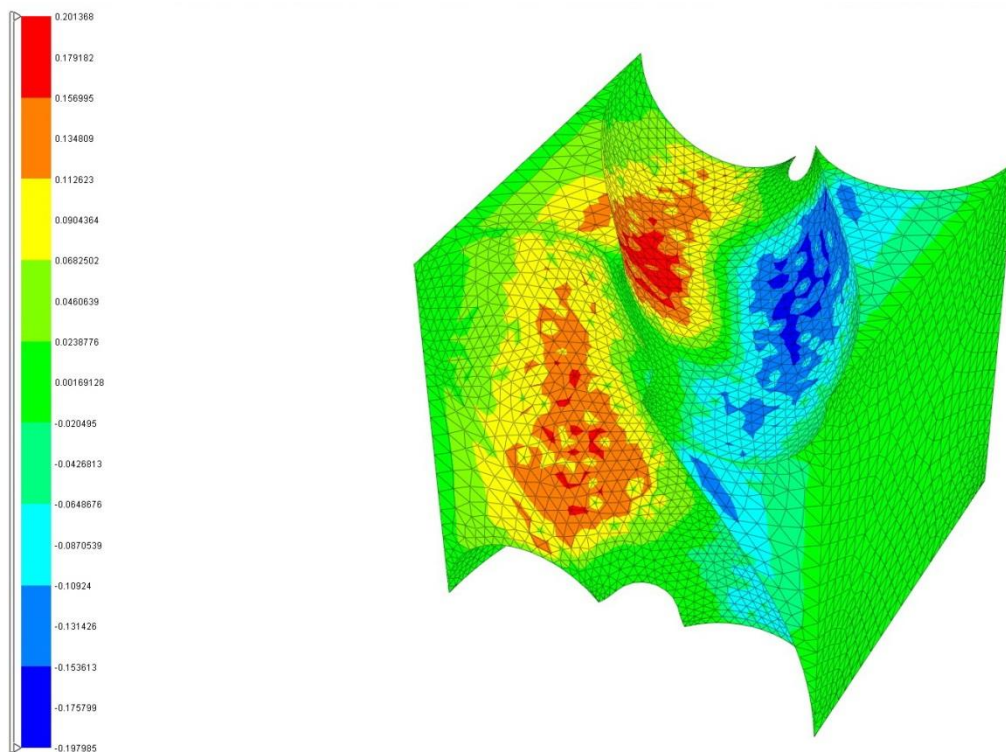


Рисунок 3.18 – Распределение давления $\tilde{P}^{(1)}$ в локальной задаче $L^{(1)}$ для тканевой структуры

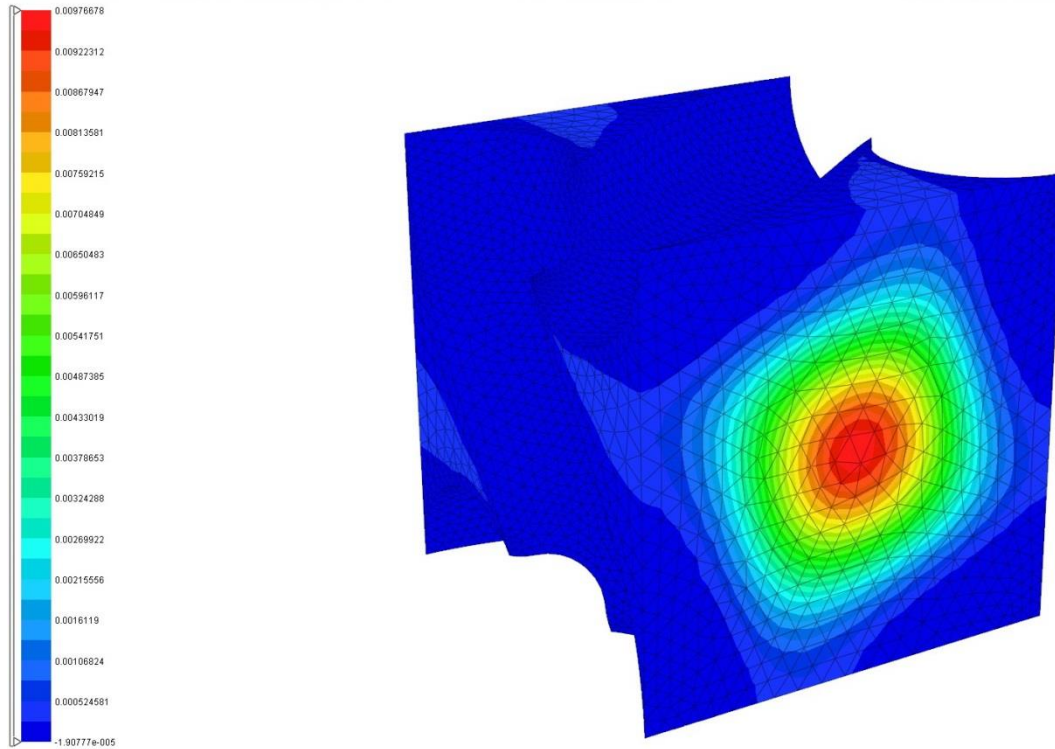


Рисунок 3.19 – Распределение компоненты скорости $\tilde{W}_1^{(1)}$ в локальной задаче $L^{(1)}$ для тканевой структуры

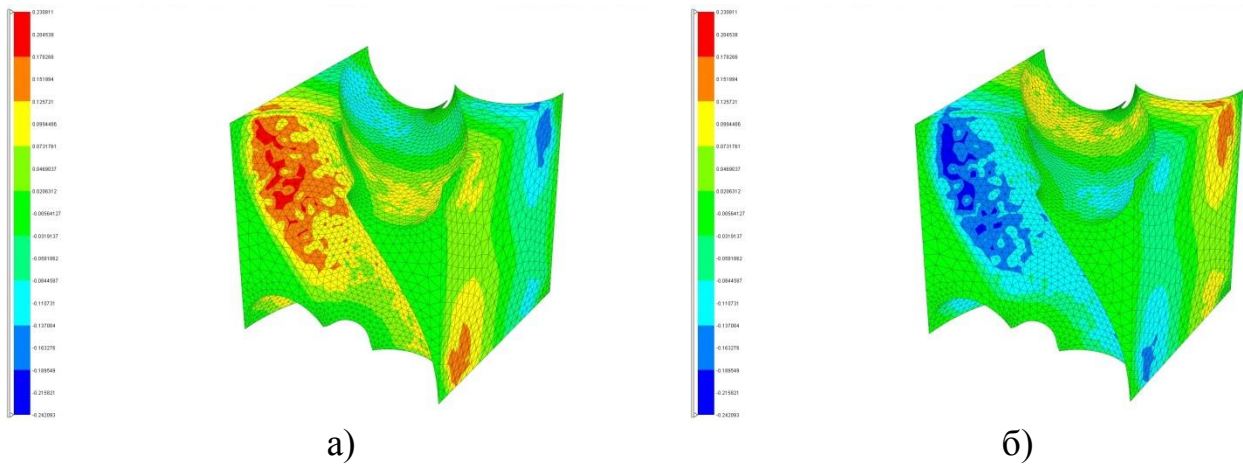


Рисунок 3.20 – Распределение давления $\tilde{P}^{(3)}$ в локальной задаче $L^{(3)}$ для тканевой структуры:
а – вид спереди; б – вид сзади

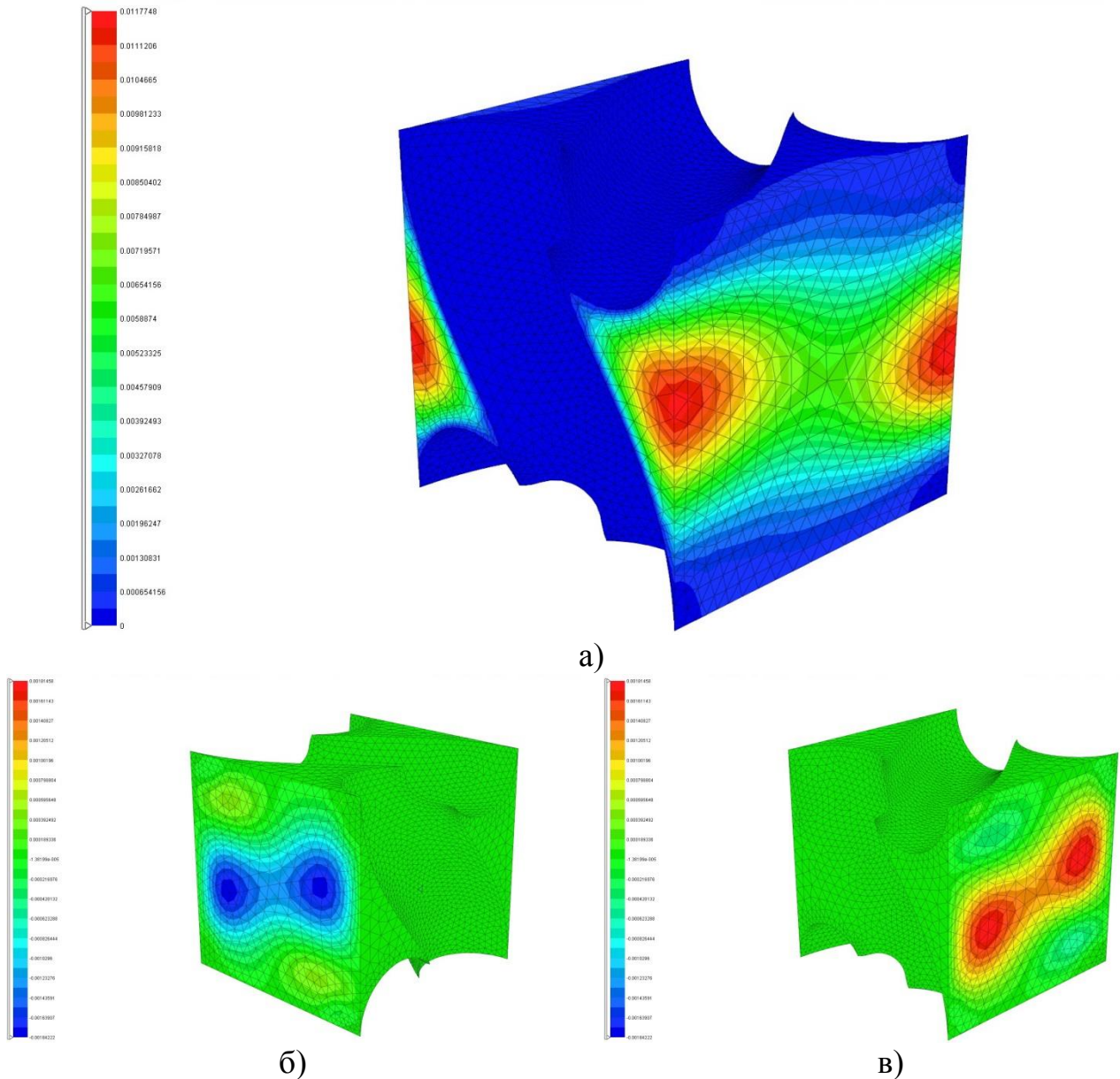


Рисунок 3.21 – Распределение компонент скоростей в локальной задаче $L^{(3)}$ для тканевой структуры:
 а – компонента $\tilde{W}_3^{(3)}$; б – компонента $\tilde{W}_2^{(3)}$ (вид слева); в – компонента $\tilde{W}_2^{(3)}$ (вид справа)

Максимум компоненты скорости $\tilde{W}_1^{(1)}$, распределение которой представлено на рисунке 3.19, находится на оси $1/8$ ячейки периодичности, вдоль которой происходит течение среды. Максимум компоненты скорости $\tilde{W}_3^{(3)}$, распределение которой представлено на рисунке 3.21 а, приходится на внутренние, наиболее узкие области переплетения волокон. Как следует из таблицы 3.8, значение компоненты $\tilde{W}_1^{(1)}$ несколько больше значения компоненты $\tilde{W}_3^{(3)}$.

Компоненты скорости $\tilde{W}_2^{(1)}$, $\tilde{W}_3^{(1)}$ в задаче $L^{(1)}$ и $\tilde{W}_1^{(3)}$ в задаче $L^{(3)}$ различных минимумов и максимумов на поверхностях $1/8$ ячейки периодичности не имеют,

они достигаются во внутренней области. Компонента $\tilde{W}_2^{(3)}$, распределение которой приведено на рисунке 3.21, б, в, имеет локальные минимумы и максимумы на противоположенных гранях $1/8$ ячейки периодичности.

3.2.4 Результаты расчета характеристик пористой среды

Рассмотрим результаты вычисления характеристик пористых сред на основе соотношений (198). Расчеты производились для всех рассмотренных ранее структур. Результаты для трехканальной пористой структуры приведены в таблице 3.9, результаты для тканевой структуры – в таблице 3.10.

Таблица 3.9 – Результаты расчета пористости и коэффициентов проницаемости для случая трехканальной пористой структуры

Радиус сферической части поры	Радиус цилиндрической части поры	$\chi = R_x/R_n$	Пористость	Безразмерный коэффициент проницаемости, $\times 10^5$
0,3	0,05	0,167	0,123	3,629
0,3	0,1	0,333	0,152	13,229
0,2	0,05	0,25	0,048	0,657
0,2	0,1	0,5	0,092	10,3599

Таблица 3.10 – Результаты расчета пористости и коэффициентов проницаемости для случая тканевой структуры с радиусом волокон $R = 0,125$

Задача	Пористость	Безразмерный коэффициент проницаемости, $\times 10^3$
$L^{(1)}$	0,555	2,047
$L^{(3)}$	0,555	1,385

Так же получены результаты для одноканальной структуры с радиусом сферической части 0,3 и радиусом цилиндрической части 0,05: пористость составила $\varphi = 0,116$, безразмерный коэффициент проницаемости $K_1^1 = 3,149 \cdot 10^{-5}$. Сравнивая данные результаты с результатами из таблицы 3.9 для аналогичной

структуры, можно констатировать, что побочные каналы слабо влияют на коэффициент проницаемости пористого материала. Отличие коэффициента проницаемости K_1^1 для одноканальной структуры от соответствующего коэффициента для трехканальной структуры составляет 13,2 %.

3.3 Численное моделирование процесса вытеснения газа из пористой среды слабосжимаемой жидкостью

3.3.1 Свойства фаз и характеристики пористой среды

Для моделирования макроскопических процессов вытеснения газа из пористой среды слабосжимаемой жидкостью рассматривался образец размером $0,5 \text{ м} \times 0,15 \text{ м} \times 0,02 \text{ м}$, модель которого приведена на рисунке 1.1. Предполагалось, что форсунки расположены линейно по ширине образца, благодаря чему фронт движется плоскопараллельно относительно своего начального положения, локализованного в точке $x_3 = 0,05 \text{ м}$.

Наполнитель представлял собой стеклоткань, уложенную в несколько слоев. Поэтому в качестве модели микроструктуры пористой среды использовалась тканевая модель, приведенная на рисунке 1.2, б. Характеристики для указанной модели были рассчитаны ранее в ходе решения локальных задач фильтрации и представлены в таблице 3.10. Малый параметр задачи был принят равным $\kappa = 1 \cdot 10^{-4}$.

Процесс пропитки полагался изотермическим при температуре $\theta_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. В качестве связующего рассматривалась ненасыщенная полиэфирная смола со следующими свойствами: вязкость $\mu_l = 0,2 \text{ Па} \cdot \text{с}$; коэффициент сжимаемости $\beta = 2,2 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{Н}$. В роли газа был принят воздух с вязкостью $\mu_g = 1,81 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$.

Начальные и граничные условия задачи имели вид:

$$\begin{aligned} \bar{p}_l|_{t=t_0} &= \bar{p}_g|_{t=t_0} = 10^5 \text{ Па}, \\ \bar{p}_l|_{\Sigma_l} &= 10^6 \text{ Па}, \quad \bar{p}_g|_{\Sigma_g} = 10^5 \text{ Па}. \end{aligned}$$

Т.е. перепад давления составлял 0,9 МПа . Шаг по времени был равен 27 с .

3.3.2 Моделирование макроскопического процесса фильтрации на основе классической модели слабосжимаемой жидкости

Графики распределения средних по сечению макроскопического давления \bar{p} и компоненты \bar{w}_3 макроскопической скорости фильтрации в зависимости от продольной координаты для различных моментов времени и для соответствующих положений границы раздела фаз в случае классической модели слабосжимаемой жидкости показаны на рисунках 3.22 и 3.23, соответственно. График оценки времени полного заполнения приведен на рисунке 3.26. В соответствии с данным графиком полное заполнение образца потребует 2447,53 с или 40,8 мин.

3.3.3 Моделирование макроскопического процесса фильтрации на основе обобщенной модели слабосжимаемой жидкости

Графики распределения средних по сечению макроскопического давления \bar{p} и компоненты \bar{w}_3 макроскопической скорости фильтрации в зависимости от продольной координаты для различных моментов времени и для соответствующих положений границы раздела фаз в случае обобщенной модели слабосжимаемой жидкости показаны на рисунках 3.24 и 3.25, соответственно. График оценки времени полного заполнения приведен на рисунке 3.26. В соответствии с данным графиком полное заполнение образца потребует 2429,75 с или 40,5 мин.

Таким образом, в условиях рассмотренной задачи классическая и обобщенная модели слабосжимаемой жидкости дают достаточно близкие результаты, поэтому при расчетах можно использовать обе модели. При этом обобщенная модель является более обоснованной, поскольку в ней не делается

никаких дополнительных допущений касательно выбора гидростатического давления, которое определяется в ходе решения отдельной вспомогательной задачи.

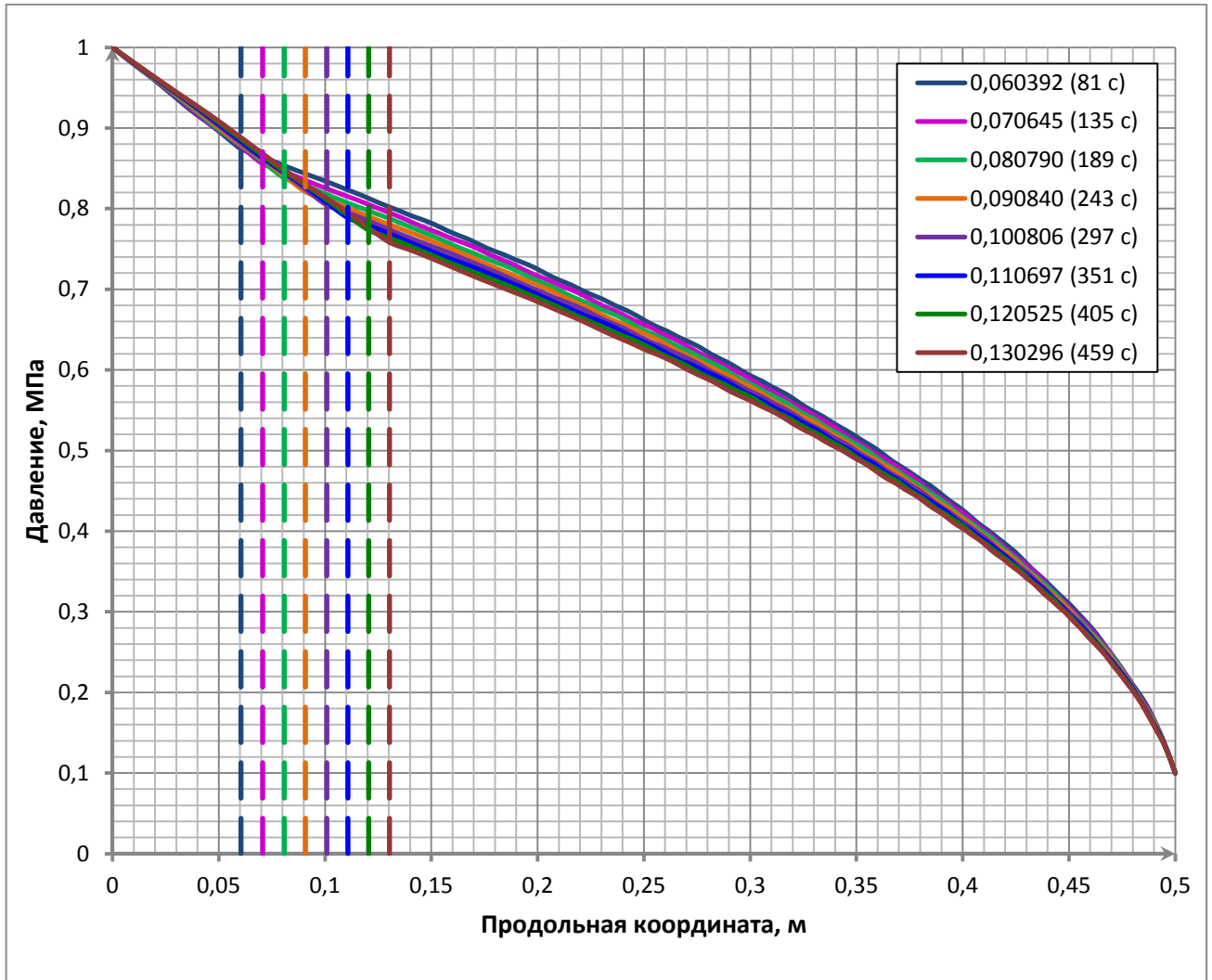


Рисунок 3.22 – Графики распределения среднего по сечению макроскопического давления \bar{p} в зависимости от продольной координаты для различных моментов времени и для соответствующих положений границы раздела фаз в случае классической модели слабосжимаемой жидкости

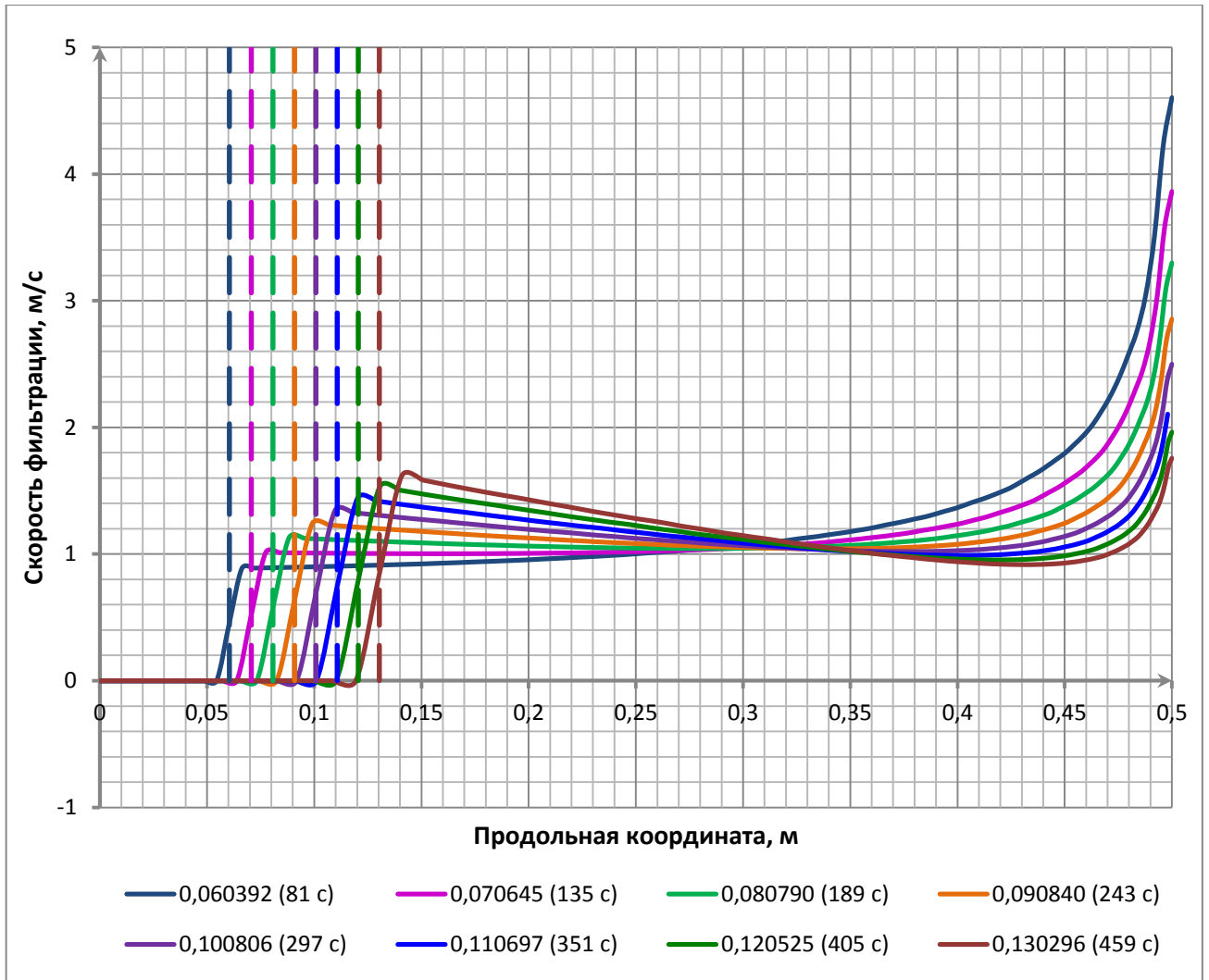


Рисунок 3.23 – Графики распределения средней по сечению компоненты \bar{w}_3 макроскопической скорости фильтрации в зависимости от продольной координаты для различных моментов времени и для соответствующих положений границы раздела фаз в случае классической модели слабосжимаемой жидкости

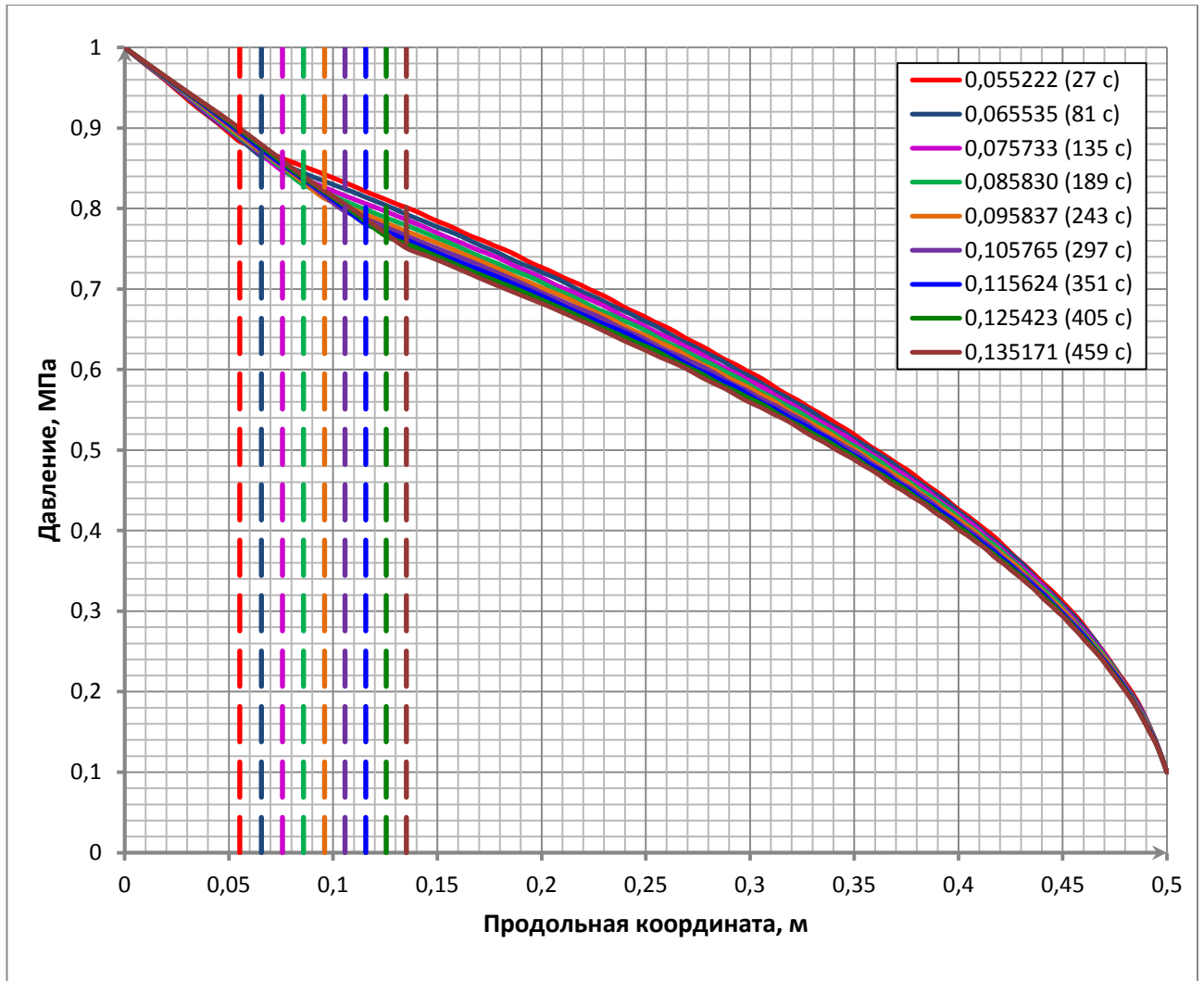


Рисунок 3.24 – Графики распределения среднего по сечению макроскопического давления \bar{p} в зависимости от продольной координаты для различных моментов времени и для соответствующих положений границы раздела фаз в случае обобщенной модели слабосжимаемой жидкости

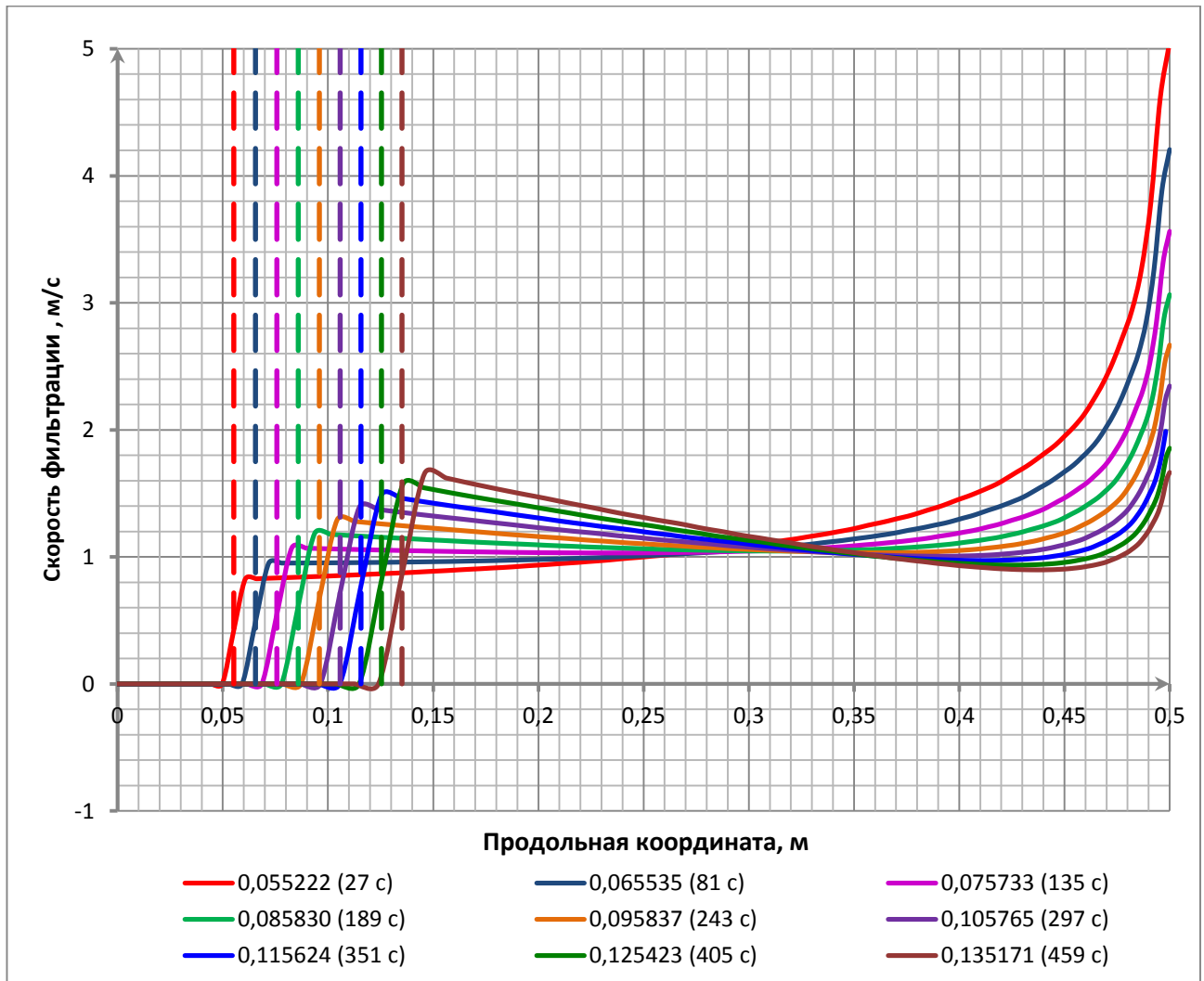


Рисунок 3.25 – Графики распределения средней по сечению компоненты \bar{w}_3 макроскопической скорости фильтрации в зависимости от продольной координаты для различных моментов времени и для соответствующих положений границы раздела фаз в случае обобщенной модели слабосжимаемой жидкости

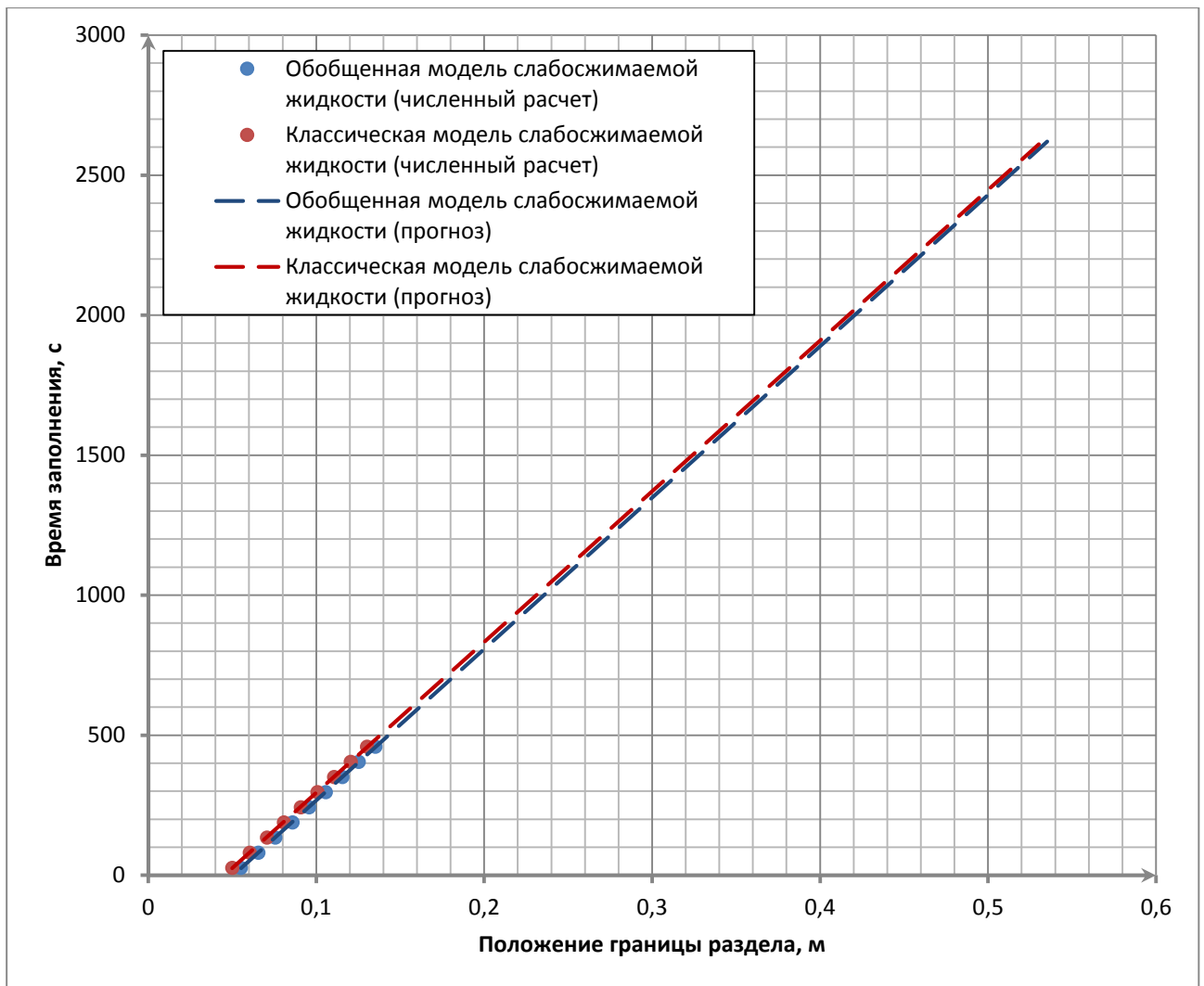


Рисунок 3.26 – Оценка времени полного заполнения пористой среды жидкостью в случае использования классической и обобщенной моделей слабосжимаемой жидкости

3.4 Выводы по третьей главе

Разработан программный комплекс для численного моделирования двухмасштабных процессов фильтрации в пористых средах. Комплекс позволяет производить решение локальных задач фильтрации и определение основных характеристик пористой среды – пористости и коэффициентов проницаемости. Тестирование комплекса на задаче Пуазейля о фильтрации в одноканальной структуре показало хорошее согласование численного и аналитического решений.

Разработанное программное обеспечение позволяет также проводить моделирование макроскопических процессов фильтрации на основе классической и обобщенной моделей слабосжимаемой жидкости. Данное моделирование дает возможность определить характер макроскопических полей давлений и скоростей фильтрации, а также оценить время полного заполнения порового пространства жидкой фазой.

Получены результаты численного моделирования локальных пространственных течений жидкости и газа на ячейке периодичности типовых композитных структур – со сферическими порами, соединенными каналами, и на основе тканевых структур. Данные результаты показали эффективность предложенного алгоритма решения локальных задач и вычисления тензора проницаемости пористых сред. Выполнен анализ влияния побочных каналов на процесс течения среды в поре посредством сравнения минимальных и максимальных значений давления и скорости, а также коэффициентов проницаемости, полученных в ходе решения локальных задач. Показано, что побочные каналы оказывают слабое влияние на процесс течения фаз внутри поры, а также на значения параметров пористой среды в целом.

Получены результаты численного моделирования макроскопического течения жидкого связующего, вытесняющего газовую среду в типовой пористой композитной структуре. Данные результаты показали эффективность предложенного алгоритма решения задач для рассмотренной в работе модели слабосжимаемой жидкости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

1. Разработана физико-математическая модель слабосжимаемой жидкости и двухмасштабная модель пространственного течения слабосжимаемой жидкости, вытесняющей газовую среду в пористой композитной структуре.
2. На основе метода асимптотического осреднения сформулированы локальные задачи пространственного течения слабосжимаемой жидкости и газа в ячейках периодичности и глобальная задача течения жидкости, вытесняющей газ из пористой композитной структуры.
3. Показано, что постановки локальных задач фильтрации газа и слабосжимаемой жидкости формально в точности совпадают и каждая из них представляет собой стационарную задачу течения некоторой фиктивной линейно-вязкой несжимаемой среды, а их решение зависит только от внутренней геометрии пор. Полученные локальные задачи применимы для расчетов фильтрации любых газов и жидкостей в рамках сделанных в работе допущений и позволяют производить расчет тензора проницаемости пористой среды, основываясь только на информации о геометрической форме пор.
4. Сформулированы вариационные постановки локальной и глобальной задач течения жидкой и газовой фаз, с помощью которых разработаны численные алгоритмы решения локальных задач в общей трехмерной постановке и алгоритм расчета тензора проницаемости, а также алгоритм численного решения глобальной задачи течения жидкости, вытесняющей газ из пористой композитной структуры.
5. Получены результаты численного моделирования локальных пространственных течений жидкости и газа на ячейке периодичности типовых композитных структур – со сферическими порами, соединенными каналами, и на основе тканевых структур, показавшие эффективность предложенного алгоритма решения локальных задач и вычисления тензора проницаемости пористых сред.

6. Получены результаты численного моделирования макроскопического течения жидкого связующего, вытесняющего газовую среду в типовой пористой композитной структуре, показавшие эффективность предложенного алгоритма решения задач для предложенной модели слабосжимаемой жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров : Учеб. пособие. М.: Высш. шк., 1994. 544 с.
2. Арсеньев-Образцов С.С. Определение тензора коэффициентов проницаемости численным моделированием течения флюида на цифровой модели пористой среды // Труды российского государственного университета нефти и газа им. И.М. Губкина. М.: Российский государственный университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) имени И.М. Губкина, 2015. №4. С. 64-77.
3. Баландин М.Ю., Шурина Э.П. Методы решения СЛАУ большой размерности. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. 70 с.
4. Бардзокас Д.И., Зобнин А.И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. М.: Едиториал УРСС, 2003. 376 с.
5. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.
6. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика: Учебник для вузов. М.: Недра, 1993. 416 с.
7. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов: Пер. с англ. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.
8. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 352 с.
9. Беляев А.Ю. Усреднение в задачах теории фильтрации. М.: Наука, 2004. 200 с.
10. Бодунов Н.М., Бреховских П.В. Фильтрация вязкой жидкости через пористую среду с использованием закона Бринкмана: сб. докл.

Всероссийской научно-практической конф. с междунар. уч.: в 2-х томах. Казань: Академия наук Республики Татарстан, 2016. С. 644–650.

11. Богданов И.О. Математическое моделирование локальных газодинамических процессов в пористых периодических средах // Молодежный научно-технический вестник. 2015. №12. 22 с.
12. Богданов И.О. Математическое моделирование локальных процессов фильтрации в пористо-сетчатых материалах // Молодежный научно-технический вестник. 2015. №11. 27 с.
13. Боронин И.А., Шевляков А.А. Компьютерное моделирование движения устойчивой границы раздела жидкостей при двухфазной фильтрации в пористых средах // Сб. тр. конф «Управление большими системами (УБС'2016)». Москва: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2016, с. 42-49.
14. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике : Учеб. пособие. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. 296 с.
15. Гальцев О.В., Гальцева О.А. Математическое моделирование процесса фильтрации жидкостей в пористой среде различной геометрии // Научные ведомости белгородского государственного университета. Серия: математика. Физика. Белгород: Белгородский государственный национальный исследовательский университет, 2015. № 23. С. 116-127.
16. Горбаченко В.И. Вычислительная линейная алгебра с примерами на МАТЛАВ: Учеб. пособие. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 320 с.
17. Грег С., Синг К. Адсорбция, удельная поверхность, пористость. 2-е изд. М.: Мир, 1984. 306 с.
18. Дейт К.Дж. Введение в системы баз данных : пер. с англ. М. Издательский дом «Вильямс», 2001. 1072 с.
19. Джоган О.М., Костенко О.П. Методы изготовления деталей из композиционных материалов пропиткой в оснастке. Ч. 1. Методы пропитки под давлением // Вопросы проектирования и производства

- конструкций летательных аппаратов. Харьков: ХАИ. 2011. №4 (68). С. 111–125.
20. Джоган О.М., Костенко О.П. Методы изготовления деталей из композиционных материалов пропиткой в оснастке. Ч. 2. Методы вакуумной пропитки // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. Харьков: ХАИ. 2012. №1 (69). С. 80–92.
21. Джоган О.М., Костенко О.П. Практическая классификация методов изготовления деталей из полимерных композиционных материалов пропиткой в оснастке // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. Харьков: ХАИ. 2013. №1 (73). С. 21–32.
22. Диль Д.О., Бубенчиков А.М. Двухфазная фильтрация в анизотропном пространстве // Вестник томского государственного университета. 2013. № 6(26). С. 70–78.
23. Димитриенко Ю.И. Механика композиционных материалов при высоких температурах. М.: Машиностроение, 1997. 368 с.
24. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды : Учеб. пособие : В 4 т. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. Т. 1: Тензорный анализ. 559 с.
25. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды : Учеб. пособие : В 4 т. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. Т. 2: Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред. 559 с.
26. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды : Учеб. пособие : В 4 т. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2013. Т. 4: Основы механики твердых тел. 623 с.
27. *Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Конечно-элементный метод решения трехмерных задач теории устойчивости упругих конструкций // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 6(69). С. 73-92.*

28. *Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Математическое моделирование фильтрации в армирующем наполнителе при производстве композиционных материалов на основе технологии RTM // Сб. тр. 2-й всероссийской научно-технической конференции «Механика и математическое моделирование в технике». Москва, 22–23 ноября 2017 г., МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике, РАН. Москва, Изд.-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. С. 243–247.*
29. *Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Многомасштабное моделирование процессов фильтрации в пористых средах // Инженерный журнал: наука и инновации. 2018. № 3(75). 19 с.*
30. *Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Многомасштабное моделирование процессов фильтрации жидкого связующего в композитных конструкциях, изготавливаемых методом RTM // Математическое моделирование и численные методы. 2017. № 2(14). С. 3–27.*
31. *Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Разработка численного метода решения трехмерных задач теории устойчивости упругих конструкций // Сб. тр. всероссийской научно-технической конференции «Механика и математическое моделирование в технике», посвящённой 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева. Москва, 17–19 мая 2016 г., МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике, РАН.*
32. *Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Трёхмерный конечно-элементный анализ устойчивости упругих композитных конструкций // Сб. тр. 6-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред»: в 2-х томах. Т.1. Москва, 16–18 ноября 2016 г., ИПРИМ РАН. Москва: ИПРИМ РАН, 2016. С. 59–73.*

33. Димитриенко Ю.И., Глазиков М.Л. Моделирование процессов фильтрации в периодических пористых средах // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2003. №1. С. 59–71.
34. Димитриенко Ю.И., Глазиков М.Л. Численный расчет проницаемости и процессов фильтрации в пористых средах // Аэрокосмические технологии: Труды Всероссийской научно-технической конференции 2002 г. М., 2002. С. 132–137.
35. *Димитриенко Ю.И., Захарова Ю.В., Богданов И.О. Математическое и численное моделирование процесса фильтрации связующего в тканевом композите при RТМ методе изготовления // Университетский научный журнал. 2016. №19. С. 33–43.*
36. Димитриенко Ю.И., Иванов М.Ю. Моделирование нелинейных динамических процессов переноса в пористых средах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2008. №1. С. 39–56.
37. Димитриенко Ю.И., Левина А.И., Боженик П. Конечно-элементное моделирование локальных процессов переноса в пористых средах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2003. № 3. С.90–104.
38. Димитриенко Ю.И., Левина А.И., Галицын А.А. Конечно-элементное моделирование локальных газодинамических процессов в трехмерных пористых структурах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. Спец. вып. «Математическое моделирование». С. 50–65.
39. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Метод конечных элементов для решения локальных задач механики композиционных материалов : Учеб. пособие. М.: Изд.-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 66 с.
40. *Димитриенко Ю.И., Шпакова Ю.В., Богданов И.О., Сборщиков С.В. Математическое и численное моделирование газодинамических процессов в композиционном материале при отверждении // Тр. Междунар. конф., посв. 90-летию со дня рожд. акад. Г.И. Марчука, «Актуальные проблемы*

вычислительной и прикладной математики». Новосибирск, 19–23 октября 2015 г., Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН. Новосибирск: Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 2015. С. 224–229.

41. *Димитриенко Ю.И., Шпакова Ю.В., Богданов И.О., Сборщиков С.В. Моделирование влияния технологии изготовления на прочностные свойства конструкций из тканевых композиционных материалов // Сб. докл. XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, 20–24 августа 2015 г. Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2015. С. 4357–4358.*
42. *Димитриенко Ю.И., Шпакова Ю.В., Богданов И.О., Сборщиков С.В. Моделирование процесса многоуровневой фильтрации жидкого связующего в тканевом композите при RTM-методе изготовления // Инженерный журнал: Наука и инновации. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. № 12(48). 7 с.*
43. Евстигнеев Д.С., Савченко А.В. Моделирование двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей в пористой гидрофильной среде // ИНТЕРЭКСПО ГЕО-СИБИРЬ. Новосибирск: Сибирский государственный университет геосистем и технологий, 2015. Т. 2, № 3. С. 64–69.
44. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
45. Иванов М.Ю. Математическое моделирование динамических процессов в деформируемых пористых системах с фазовыми превращениями: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. М., 2014. 158 с.
46. Калиткин Н.Н. Численные методы / под ред. А.А. Самарского. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1978. 512 с.
47. Капиллярные системы отбора жидкости из баков космических аппаратов / В.В. Багров [и др.] М.: УНПЦ «ЭНЕРГОМАШ», 1997. 328 с.
48. Лабунцов Д.А., Ягов В.В. Механика двухфазных систем : Учеб. пособие для вузов. М.: Издательство МЭИ, 2000. 374 с.

49. Лейбензон Л.С. Движения природных жидкостей и газов в пористой среде. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. 244 с.
50. Леонтьев Н.Е. Об описании течений слабосжимаемой жидкости в пористых средах при нелинейном законе фильтрации // Известия российской академии наук. Механика жидкости и газа. М.: ФГУП Академический научно-издательский, производственно-полиграфический и книгораспространительский центр «Наука», 2013. № 3. С. 132-137.
51. Леонтьев Н.Е. Основы теории фильтрации: учеб. пособие. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическим факультете МГУ, 2009. 88 с.
52. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 628 с.
53. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. Ч. I, II. 2 кн.
54. Применение комбинированных пористо-сетчатых материалов в конструкции внутрибаковых устройств двигательных установок космических аппаратов, верхних ступеней ракет-носителей и разгонных блоков / В.Б. Сапожников [и др.] // Вестник сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М.Ф. Решетнева. 2011. № 3. С 122–126.
55. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.
56. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. Изд. 2-е. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. 664 с.
57. Постнова М.В., Постнов В.И. Опыт развития безавтоклавных методов формования ПКМ // Труды ВИАМ. 2014. №4. 6 с.
58. Прата С. Язык программирования C++. Лекции и упражнения, 6-е изд.: Пер. с англ. М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2012. 1248 с.

59. Развитие идей профессора В.М. Поляева по применению пористо-сетчатых материалов для внутрибаковых устройств, обеспечивающих многократный запуск жидкостных ракетных двигателей / В.Б. Сапожников [и др.] // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2006. № 2. С. 78–88.
60. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
61. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний : Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 472 с.
62. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов : Пер. с англ. М.: Мир, 1979. 392 с.
63. Седов Л.И. Механика сплошной среды: в 2 т. М.: Наука, 1970. Т. 1, 492 с.
64. Седов Л.И. Механика сплошной среды: в 2 т. М.: Наука, 1970. Т. 2, 568 с.
65. Сухинов А.И., Григорян Л.А., Сухинов А.А. Математическое моделирование фильтрации двухфазной сжимаемой жидкости на основе модифицированного адаптивного метода минимальных поправок // Вестник донского государственного технического университета. Ростов-на-Дону: Донской государственный технический университет, 2016. №3(86). С. 96-109.
66. Телетов С.Г. Вопросы гидродинамики двухфазных смесей // Вестник МГУ. Сер. математики. 1958. № 2.
67. Телетов С.Г. Вопросы гидродинамики двухфазных смесей // Котлотурбостроение. Тр. ЦКТИ, вып. 59, ОНТИ. 1965.
68. Франкль Ф.И. К теории движения взвешенных частиц // ДАН СССР. 1953. Т. 92, № 2.
69. Франкль Ф.И. Уравнения энергии для движения жидкостей с взвешенными наносами // ДАН СССР. 1955. Т. 102, № 5.
70. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы: Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 448 с.

71. Шейдеггер А.Э. Физика течения жидкостей через пористые среды. М.: Государственное научно-техническое издательство нефтяной и горно-топливной литературы, 1960. 249 с.
72. Цыпкин Г.Г. Течения с фазовыми переходами в пористых средах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 232 с.
73. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. М.: Государственное научно-техническое издательство нефтяной и горно-топливной литературы, 1963. 397 с.
74. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
75. Яковлев Д.О. Моделирование процессов деформирования многослойных тонких термоупругих пластин на основе метода асимптотической гомогенизации: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. М., 2016. 97 с.
76. Bechet E., Ruiz E., Trochu F. Adaptive mesh generation for mold filling problems in resin transfer molding // *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2003. V.34(9). P. 813–834.
77. Breard J., Saouab A., Bouquet G. Numerical simulation of void formation in LCM // *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2003; V.34(3). P. 517–523.
78. Chen X., Zhang Y., Yan S. Two-dimensional simulations of resin flow in dual-scale fibrous porous medium under constant pressure // *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 2013. Vol. 32(22). P. 1757–1766.
79. Collins R.E. Flow of fluids through porous materials. Research And Engineering Consultants, Inc, 1990. 270 p.
80. Coutelieis F.A., Delgado J.M.P.Q. Transport Processes in Porous Media. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012. 236 p.
81. Delgado J.M.P.Q., de Lima A.G.B., da Silva M.V. Numerical analysis of heat and mass transfer in porous media. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012. P. 316.

82. Di Fratta C., Klunker F., Ermanni P. A methodology for flow-front estimation in LCM processes based on pressure sensors // *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2013. V.47. P. 1–11.
83. Di Fratta C., Koutsoukis G., Klunker F., Ermanni P. Fast method to monitor the flow front and control injection parameters in resin transfer molding using pressure sensors // *Journal of Composite Materials*. 2015. V.50(21). P. 2941–2957.
84. Di Fratta C, Koutsoukis G, Klunker F, Trochu P., et al. Characterization of anisotropic permeability from flow front angle measurements // *Polymer Composites*. 2015. V.37(7). P. 2037–2052.
85. Dimitrienko Yu.I. Dynamic Transport Phenomena in Porous Polymer Materials Under Impulse Thermal Effects // *Journal of Transport in Porous Media*. 1999. V. 35. P. 299–326.
86. Dimitrienko Yu.I. Simulation of local transfer in periodic porous media // *European Journal of Mechanics – B/Fluids*. 2013. V.37. P. 174–179.
87. Dostert P., Efendiev Y., Hou T.Y. Multiscale finite element methods for stochastic porous media flow equations and application to uncertainty quantification // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2008. V.197(43-44). P. 3445–3447.
88. Francucci G., Rodriguez E.S., Moran J. Novel approach for mold filling simulation of the processing of natural fiber reinforced composites by resin transfer molding // *Journal of Composite Materials*. 2014. Vol. 48(2). P. 191–200. DOI: 10.1177/0021998312469992.
89. Gantois R., Cantarel A., Dusserre G., Felices J.N., Schmidt F. Mold filling simulation of resin transfer molding combining BEM and level set method // *Applied Mechanics and Materials*. 2011; V.62. P. 57–65.
90. Han K., Jiang S., Zhang C., Wang B. Flow modeling and simulation of SCRIMP for composites manufacturing // *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2000; V.31(1). P. 79–86.

91. Hornung U. Homogenization and Porous Media. Springer-Verlag New York, 1997. 279 p.
92. Jenny P., Lee S.H., Tchelepi H.A. Multi-scale finite-volume method for elliptic problems in subsurface flow simulation // Journal of Computational Physics. 2003; V.187(1). P. 47–67.
93. Klunker F., Aranda S., Surjoseputro W., Wu W., et al. Modelling the resin infusion process, part I: flow modelling and numerical investigation for constant geometries // Journal of Plastics Technology. 2011. V.7. P. 179–200.
94. Kruckenberg T.M., Paton R. Resin transfer moulding for aerospace structures. Springer Netherlands, 1998. 522 p.
95. Kuentzer N., Simacek P., Advani S.G., Walsh S. Permeability characterization of dual scale fibrous porous media // Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. 2006. V.37(11). P. 2057–2068.
96. Laurenzi S., Marchetti M. Advanced composite materials by resin transfer molding for aerospace applications // Composites and Their Properties, Prof. Ning Hu (Ed.), InTech. 2012. DOI: 10.5772/48172.
97. Li J., Fu X., Zhang C., Wang R.L.B. Optimal injection design for resin transfer molding with in situ permeability measurement and process simulation // Journal of Composite Materials. 2009. V.43(16). P. 1695–1712.
98. Lim S.T., Lee W.II. An analysis of the three-dimensional resin-transfer mold filling process // Composites Science and Technology. 2000. V.60(7). P. 961–975.
99. Loudad R., Saouab A., Beauchene P., Agogue R., Desjoyeaux B. Numerical modeling of vacuum-assisted resin transfer molding using multilayer approach // Journal of Composite Materials. 2017. V.51(24). P. 3441–3452.
100. Matsuzaki R., Kobayashi S., Todoroki A., Mizutani Y. Flow control by progressive forecasting using numerical simulation during vacuum-assisted resin transfer molding // Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. 2013. V.45. P.79–87.

101. Modi D., Johnson M., Long A., et al. Analysis of pressure profile and flow progression in the vacuum infusion process // *Composites Science and Technology* 2009. V.69(9). P. 1458–1464.
102. Park C.H., Lee W. Modeling void formation and unsaturated flow in liquid composite molding processes: a survey and review // *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 2011. V.30(11). P. 957–977.
103. Potter K. *Resin Transfer Moulding*. Springer Netherlands, 1997. 264 p.
104. Saad Y. *Iterative methods for sparse linear systems*, 2003. 547 c.
105. Simacek P., Advani S.G. Desirable features in mold filling simulations for liquid molding processes // *Polymer Composites*. 2004. V.25(4). P. 355–367.
106. Song Y.S. Mathematical analysis of resin flow through fibrous porous media // *Applied Composite Materials* 2006. V.13(5). P. 335–343.
107. Tan H., Pillai K.M. Numerical simulation of reactive flow in liquid composite molding using flux-corrected transport (FCT) based finite element/control volume (FE/CV) method // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2010. V.53(9–10). P. 2256–2260.
108. Tan H., Pillai K.M. Multiscale modeling of unsaturated flow in dual-scale fiber preforms of liquid composite molding I: Isothermal flows // *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2012. V.43(1). P. 1–13.
109. Tan H., Pillai K.M. Multiscale modeling of unsaturated flow in dual-scale fiber preforms of liquid composite molding II: Non-isothermal flows // *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2012. 43(1): P.14–28.
110. Tan H., Pillai K.M. Multiscale modeling of unsaturated flow in dual-scale fiber preforms of liquid composite molding III: Reactive flows // *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2012. V.43(1). P. 29–44.
111. Trochu F., Ruiz E., Achim V., Soukane S. Advanced numerical simulation of liquid composite molding for process analysis and optimization // *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2006. V.37(6). P. 890–902.

112. Yang B., Tang Q., Wang S., Jin T., Bi F. Three-dimensional numerical simulation of the filling stage in resin infusion process // *Journal of Composite Materials*. 2016. V.50(29). P. 4171–4186.
113. Yang J., Jia Y., Ding Y., He H., Shi T., An L. Edge effect in RTM processes under constant pressure injection conditions // *Journal of Applied Polymer Science*. 2010. V.118(2). P. 1014–1019.
114. Yeager M., Hwang W.R., Advani S.G. Prediction of capillary pressure for resin flow between fibers // *Composites Science and Technology*. 2016. V.126. P. 130–138.
115. Zienkiewicz O.C, Taylor R.L., Zhu J.Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals: Seventh Edition*. Butterworth-Heinemann, 2013. 756 p.