

На правах рукописи



Ли Шугуан

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЙ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ВЯЗКИХ  
ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ НА ОСНОВЕ МЕТОДА  
АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ГОМОГЕНИЗАЦИИ**

Специальность 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2020 г.

Работа выполнена на кафедре «Вычислительная математика и математическая физика» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Научный руководитель: **Димитриенко Юрий Иванович**,  
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Официальные оппоненты: **Кобельков Георгий Михайлович**,  
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная математика» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», г. Москва

**Борисов Виталий Евгеньевич**,  
кандидат физико-математических наук, научный сотрудник федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук» (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН), г. Москва

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт автоматизации проектирования РАН» (ИАП РАН), г. Москва

Защита диссертации состоится «25» декабря 2020 г., в 12:00 на заседании диссертационного совета Д 212.125.14 на базе федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО МАИ (НИУ) и на сайте МАИ по ссылке:

[https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT\\_ID=118411](https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=118411)

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2020 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
Д 212.125.14



В.Ю. Гидаспов

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Течение неньютоновских вязких жидкостей в пористых средах играет важную роль во многих технологических процессах современного промышленного производства, таких как производство композиционных материалов и конструкций методом RTM (пропитки жидким связующим под давлением). В то же время, качество композитных конструкций, полученных с помощью RTM-методов, в значительной степени зависит от параметров технологии изготовления: геометрических параметров конструкций, проницаемости и пористости сухого каркаса, давления пропитки, а также от реологии жидких связующих. Обычно жидкие связующие сильно неоднородны и состоят из крупных молекул, образующих сложные пространственные структуры. При течении таких жидких связующих, вязкость, как правило, оказывается неньютоновской. В этой связи, для улучшения и оптимизации таких технологий, чрезвычайно важной является задача адекватного моделирования течения неньютоновских вязких жидкостей в пористых композитных структурах (ПКС), имеющих сложную пространственную геометрическую форму пор.

Когда жидкость можно рассматривать как ньютоновскую, прямые расширения известного закона Дарси позволяют хорошо прогнозировать процесс течения в пористых средах. Однако исследование фильтрации неньютоновских жидкостей намного сложнее. Несколько результатов изложены в работах Shenoy A.V., Fadili A., Sochi T., Durst F. и Johnson D.L. с особым акцентом на течении неньютоновских жидкостей. В подавляющем большинстве работ (отметим работы таких авторов как Осколков А.П., Шарай Е.Ю., Ярославов А.О., Talwar K.K.) исследование процессов течения неньютоновских жидкостей в ПКС изучается в рамках феноменологической теории фильтрации. Действительно, законы фильтрации неньютоновских жидкостей в этих работах выглядят как модифицированные версии закона Дарси. Pearson J.R.A. показывает, что взаимосвязь между градиентом макро-давления и скоростью фильтрации аналогична определяющим соотношениям между напряжением сдвига и скоростью деформации.

В феноменологической теории фильтрации описание реальных процессов, происходящих внутри пор со сложной геометрией, является довольно грубым, что приводит к большим отклонениям при определении проницаемости. В таких ситуациях течение неньютоновских жидкостей в пористых средах становится затруднительным. Woods J.K. и Spelt P.D.M. обнаружили, что закон фильтрации неньютоновских вязких жидкостей зависит от сложной связи между микроструктурой волокна и реологией жидкостей. В связи с этим, важной частью исследования фильтрации является анализ локальных процессов течения неньютоновских жидкостей в отдельной поре с помощью решения уравнений движения неньютоновских жидкостей и вывод осредненных уравнений фильтрации «из первых принципов», а не на основе феноменологических теорий.

Такой подход к моделированию течения жидкости в ПКС получил название многомасштабного моделирования, под которым понимается совместное исследование течения жидких сред в отдельной поре и в пористой системе в целом.

Задачи первого типа называется локальными (микроскопическими), задачи второго типа – глобальными (макроскопическими). Математическое обоснование многомасштабного моделирования процесса фильтрации неньютоновских вязких жидкостей в пористой среде обычно производится с помощью теорий осреднения – приближенных (Р.И. Нигматулин, С.Г. Телетов, Ф.И. Франкль и др.) или асимптотических (Н.С. Бахвалов, Э. Санчес-Паленсия, Б.Е. Победря, Г.П. Панасенко, Ю.И. Димитриенко, Д.И. Бардзокас, А.Ю. Беляев и др.), основанных на асимптотическом анализе процессов в периодических структурах. До сих пор соответствующие исследования встречаются редко для неньютоновских вязких жидкостей. В частности, многомасштабное моделирование движения неньютоновской степенной жидкости в ПКС, состоящей из двумерной правильной геометрии, освещено в работах Auriault J.L., Orgeas L. и др. Однако многомасштабное моделирование неньютоновской вязкости в этих работах не рассматривается. Метод асимптотической гомогенизации (МАГ), предложенный Н.С. Бахваловым, позволяет получать математически обоснованные осредненные уравнения для гомогенизированных сред на основе асимптотического анализа точных исходных уравнений механики сплошных сред (МСС). Отметим, что задачи течения неньютоновской жидкости в рамках модели Карро (Carreau) в трехмерных ПКС, с использованием МАГ, ранее не рассматривались.

**Целью диссертационной работы** является разработка методики многомасштабного моделирования течения несжимаемых неньютоновских вязких жидкостей в периодических пористых средах.

**Предметом исследования** являются течения несжимаемой неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро в пористых средах.

**Методы исследования.** Результаты диссертационной работы получены с использованием МАГ в периодических пористых средах. Математическая модель течения неньютоновских вязких жидкостей основана на фундаментальных законах и определяющих соотношениях МСС. Нелинейный закон фильтрации разработан с помощью анизотропной нелинейной тензорной функции. Линеаризованный итерационный алгоритм и метод конечных элементов (МКЭ), основанный на вариационном принципе Хеллингера-Рейсснера, используются для численного решения локальных задач течения неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро в отдельной ячейке периодичности (ЯП).

**Основными задачами, решаемыми в работе,** являются:

1. Разработка физико-математической модели течения несжимаемых неньютоновских вязких жидкостей в пористых средах.
2. Применение МАГ для моделирования течения несжимаемой неньютоновской жидкости в рамках модели Карро в периодических пористых средах.
3. Постановка локальных задач течения несжимаемой неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро на ЯП пористых сред.
4. Разработка численного метода решения локальных задач в общей трехмерной постановке и линеаризованного итерационного алгоритма для решения нелинейных задач, вызванных неньютоновской вязкостью.
5. Разработка нелинейного закона фильтрации неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро в пористых средах.

6. Разработка алгоритма расчета эффективной неньютоновской вязкости, компонентов тензора проницаемости и пористости среды.

7. Численное исследование локальных течений неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро на ЯП пористых сред.

8. Численное исследование нелинейного закона фильтрации неньютоновской жидкости в рамках модели Карро и эффективной вязкости в ПКС в целом.

**Научная новизна** диссертационной работы включает в себя следующие основные научные результаты:

1. Разработаны физико-математическая модель течения несжимаемых неньютоновских вязких жидкостей и многомасштабная модель течения несжимаемой неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро в ПКС.

2. Разработан нелинейный закон фильтрации неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро в пористой среде в целом.

3. Разработаны алгоритмы численного решения локальных задач течения неньютоновской жидкости в рамках модели Карро на ЯП пористых сред, алгоритмы расчета эффективной вязкости и компонентов тензора проницаемости.

4. Получены результаты численного моделирования локальных задач течения неньютоновской жидкости в рамках модели Карро на ЯП двух типовых пористых структур, показавшие эффективность предложенного алгоритма.

5. Получены результаты численных расчетов пористости сред, эффективной вязкости и компонентов тензора проницаемости фильтрации неньютоновской жидкости в рамках модели Карро в пористых средах, на основе которых установлены эффекты влияния свойства неньютоновской вязкости жидкостей, градиента макродавления и анизотропии пористых сред на нелинейный закон фильтрации и эффективную вязкость неньютоновских вязких жидкостей.

**Достоверность и обоснованность научных результатов и выводов** гарантируются использованием теоретически обоснованного математического аппарата и фундаментальных законов МСС, а также подтверждены сравнением полученных результатов численного моделирования с известными результатами, полученными ранее другими исследователями.

**Теоретическая и практическая значимость** диссертационной работы включает следующие положения:

1. Дальнейшее развитие теоретических положений МАГ применительно к задачам механики неньютоновских вязких жидкостей в периодических пористых структурах.

2. Разработан программный комплекс для численного моделирования многомасштабных процессов фильтрации неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро в пористых средах, реализующий разработанные физико-математические модели локальных процессов в отдельных ЯП и алгоритмы численных решений нелинейного закона фильтрации и эффективной вязкости в периодической пористой системе в целом.

3. Получены численные результаты расчета компонентов тензора проницаемости для двух типовых пористых структур, установлены эффекты влия-

ния реологических свойств жидкостей, градиента макродавления и анизотропии пористых сред на нелинейный закон фильтрации и эффективную вязкость.

**Личный вклад:**

1. Все теоретические выкладки выполнены соискателем самостоятельно под руководством научного руководителя. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, непосредственно принадлежащий соискателю. Заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

2. Соискателем лично была разработана компьютерная программа многомасштабного моделирования процессов фильтрации неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро в пористых средах. Лично, соискателем выполнен ряд вычислительных экспериментов, для моделирования локальных процессов фильтрации и расчета нелинейного закона фильтрации, а также проанализированы влияния неньютоновской вязкости, градиента макродавления и анизотропии пористых сред на скорость фильтрации и эффективную вязкость.

**На защиту вынесены следующие основные положения:**

1. Физико-математическая модель течения и многомасштабная модель процессов фильтрации неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро в ПКС, полученная на основе фундаментальных законов МСС и определяющих соотношений неньютоновской вязкости с помощью МАГ.

2. Линеаризованный итерационный алгоритм конечно-элементного решения локальных задач фильтрации неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро на ЯП пористых сред, алгоритмы расчета пористости сред, эффективной вязкости жидкости и компонентов тензора проницаемости.

3. С помощью анизотропной нелинейной тензорной функции разработан нелинейный закон фильтрации неньютоновских вязких жидкостей в пористых средах.

4. Результаты численного моделирования локальных задач течений неньютоновской жидкости в рамках модели Карро на ЯП двух типовых ПКС.

5. Результатами численного моделирования проверен нелинейный закон фильтрации неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро в ПКС, что подчеркивает влияние неньютоновской вязкости и анизотропии ПКС на нелинейный закон фильтрации.

**Апробация работы.** Результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях и семинарах:

1. Международная конференция и выставка «Ключевые тренды в композитах: наука и технологии». Москва, 05 – 08 декабря 2018 г.

2. IV Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (СКТеММ'19). Москва, 19 – 21 июня 2019 г.

3. Международная конференция «Математика в приложениях» в честь 90-летия С.К. Годунова. Новосибирск, Россия, 4 – 10 августа 2019 г.

4. Международный форум «Ключевые тренды в композитах: наука и технологии». Москва, 20 – 21 ноября 2019 г.

5. Международная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики». Москва, 10 – 12 декабря 2019 г.

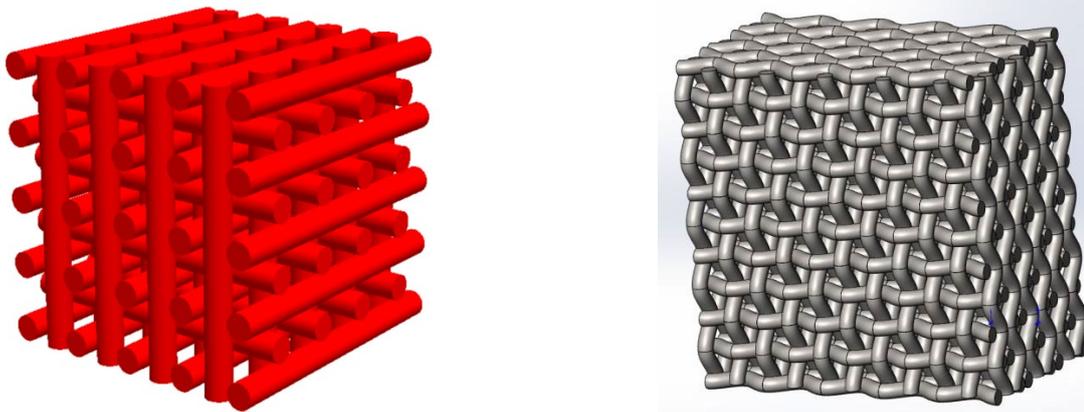
**Публикации.** Основные результаты отражены в 8 научных работах, в том числе в 2 статьях, включенных в перечень российских рецензируемых научных изданий, и 5 научных публикаций, включенных в международные базы данных Scopus или Web of Science.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа изложена на 123 страницах и состоит из введения, трех глав, заключения, и списка литературы из 117 наименований. Работа содержит 34 иллюстрации и 17 таблиц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** рассматривается актуальность темы диссертации, описана степень её разработанности, сформулированы цели и задачи исследования, представлены методы исследования, результаты выносимые на защиту, научная новизна, практическая значимость, достоверность и обоснованность научных результатов, указан личный вклад соискателя и описана структура работы.

В **первой главе** диссертации сформулированы основные допущения математической модели: предполагается, что на макроуровне ПКС представляет собой область (см. Рис. 1), заполненную неньютоновской вязкой жидкостью.



**Рис.1.** – Модели ПКС, где моделируется течение неньютоновской жидкости.

Жидкость считается изотропной несжимаемой неньютоновской вязкой средой, причем пористый скелет является недеформируемым и его движение не рассматривается, движение неньютоновской вязкой жидкости является изотермическим, массовые силы отсутствуют.

Рассматривается движение несжимаемой неньютоновской жидкости в пористых средах, описываемое системой уравнений:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} \right) &= \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad \mathbf{T} = -p\delta + \sigma, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность;  $\mathbf{v}$  – скорость;  $\mathbf{T}$  – тензор напряжений;  $p$  – давление;  $\delta$  – символ Кронекера;  $\sigma$  – тензор вязких напряжений;  $\otimes$  – тензорное произведение;  $\nabla$  – набла оператор.

Дополним систему (1) определяющими соотношениями неньютоновской жидкости. Для этой цели могут быть рассмотрены модели  $A_I$  и  $A_V$  фойгтовских изотропных вязких сред. Таким образом, тензор вязких напряжений можно представить в виде квазилинейной функции от тензора скоростей деформации  $\mathbf{D}$ :

$$\sigma = 2\mu(\mathbf{D})\mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \mathbf{v}^T), \quad (2)$$

где  $\mu(\mathbf{D})$  – коэффициент неньютоновской вязкости зависящий от  $II(\mathbf{D})$  – второго инварианта тензора скоростей деформации:  $II(\mathbf{D}) = \sqrt{2\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}}$ .

Рассмотрим модель Карро (Carreau), в которой зависимость коэффициента вязкости  $\mu(II)$  имеет степенной вид

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = \left(1 + \lambda^2 II(\mathbf{D})^2\right)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (3)$$

Здесь  $\mu_0$ ,  $\mu_\infty$ ,  $\lambda$  и  $n$  – материальные коэффициенты:  $\mu_0$  – вязкость с нулевой скоростью сдвига,  $\mu_\infty$  – вязкость с бесконечной скоростью сдвига,  $n$  – степенной индекс,  $\lambda$  – постоянная времени, введенная Карро. Поэтому отклонение  $n$  от единицы указывает на степень отклонения от ньютоновского поведения. При  $n < 1$ , жидкость является псевдопластической, вязкость которой уменьшается при увеличении напряжений сдвига, а для  $n > 1$  жидкость является дилатантной, вязкость которой увеличивается при увеличении напряжений сдвига. Очевидно, что при  $\mu_0 = \mu_\infty$  или  $\lambda = 0$  или  $n = 1$ , жидкость является ньютоновской.

Тогда введем безразмерную форму:

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v_0}, \quad \hat{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \hat{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{x_0}, \quad t_0 = \frac{x_0}{v_0}, \quad \hat{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (4)$$

где  $v_0$  – модуль вектора характерной скорости, м/с;  $p_0$  – характерное давление, Па;  $x_0$  – характерный размер всей области среды, м;  $t_0$  – характерное время, с.

Система уравнений для течения несжимаемой неньютоновской жидкости в рамках модели Карро переписывается в безразмерной форме (символ  $\hat{\phantom{x}}$  далее опускаем):

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \\ \frac{1}{Eu} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \frac{1}{Eu Re} \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}), \\ \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \mathbf{v}^T), \\ \mu = s + (1-s) \left(1 + Cu^2 II(\mathbf{D})^2\right)^{(n-1)/2}, \quad II(\mathbf{D}) = \sqrt{2\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}}, \quad s = \mu_\infty / \mu_0, \end{cases} \quad (5)$$

где введены обозначения безразмерных параметров:  $Eu = \frac{p_0}{\rho v_0^2}$  – число Эйлера,

$Re = \frac{\rho v_0 x_0}{\mu_0}$  – число Рейнольдса,  $Cu = \frac{\lambda v_0}{x_0}$  – число Карро (Carreau).

На поверхностях раздела «твердое тело – жидкость»  $\Sigma$  характеризует граничное условие прилипания:

$$\mathbf{v}|_\Sigma = 0. \quad (6)$$

В начальный момент времени  $t = t_0$  считается заданным давление:

$$p|_{t=t_0} = p_0. \quad (7)$$

Задается условие равенства нулю касательных напряжений:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}|_\Sigma = 0, \quad (8)$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор нормали.

В задаче вводится малый безразмерный параметр  $\kappa = l_0/x_0 \ll 1$ , равный отношению характерных размеров ЯП  $l_0$  и всей ПКС  $x_0$ , что позволяет построить соотношения вида:

$$Eu\kappa^e = Eu^0 = O(1), \text{Re}\kappa^r = \text{Re}^0 = O(1), Cu^0\kappa^c = Cu, Cu^0 = O(1), \quad (9)$$

где  $e, r, c \in Z$  – некоторые целые числа, которые соответствуют различным режимам течения жидкости. В настоящей работе рассматривается режим течения  $e = 2, r = 0$  и  $c = 0$ . В этом случае:

$$Eu \gg O(1), \text{Re} = O(1) \text{ и } Cu = O(1). \quad (10)$$

Наличие 2-го порядка малости в неньютоновской вязкости  $\mu$  является допущением рассматриваемой задачи и физически обосновывается малой вязкостью движущейся жидкости. Указанный режим определяет медленное Стоксово (безынерционное) движение среды в пористой системе.

В рамках МАГ вводится два типа безразмерных координат: глобальные  $\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{x_0} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$  и локальные  $\xi = \frac{\mathbf{x}}{l_0} = \frac{\hat{\mathbf{x}}}{\kappa} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . В этом случае все функции (обозначим их  $f$ ), описывающие течение жидкости в порах, можно считать квазипериодическими, т.е. зависящими от локальных  $\xi$ , глобальных  $\hat{\mathbf{x}}$  координат и времени  $t$ . Дифференцирование этих функций осуществляется с помощью следующего правила:  $\nabla f \rightarrow \nabla_x f + \frac{1}{\kappa} \nabla_\xi f$ . Вводится операция  $\langle f \rangle = \frac{1}{\varphi_p} \int f dV$  осреднения функций по области  $V_{\hat{\varphi}}$ , занятой порой, где  $\varphi_p = \int_{V_{\hat{\varphi}}} dV$  – пористость среды.

Решение системы уравнений (5)-(8) ищется в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра  $\kappa$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{x}, \xi) + \kappa \mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x}, \xi) + \kappa^2 \mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{x}, \xi) + \dots, \\ p &= p^{(0)}(\mathbf{x}, \xi) + \kappa p^{(1)}(\mathbf{x}, \xi) + \kappa^2 p^{(2)}(\mathbf{x}, \xi) + \dots. \end{aligned} \quad (11)$$

Чтобы получить асимптотическое разложение вязкости  $\mu$ , необходимо найти асимптотическое разложение тензора скоростей деформации  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{D} = \kappa^{-1} \mathbf{D}_\xi^{(0)} + \kappa^0 (\mathbf{D}_\xi^{(1)} + \mathbf{D}_x^{(0)}) + \kappa^1 (\mathbf{D}_\xi^{(2)} + \mathbf{D}_x^{(1)}) + O(\kappa^3), \quad (12)$$

где  $\mathbf{D}_\xi^{(k)} = \frac{1}{2} (\nabla_\xi \otimes \mathbf{v}^{(k)} + \nabla_\xi \otimes \mathbf{v}^{(k)T})$  и  $\mathbf{D}_x^{(k)} = \frac{1}{2} (\nabla_x \otimes \mathbf{v}^{(k)} + \nabla_x \otimes \mathbf{v}^{(k)T})$ .

На основе (12) и определяющего соотношения (3) получается асимптотическое разложение неньютоновской вязкости:

$$\mu = \mu^{(0)}(\mathbf{x}, \xi) + \kappa \mu^{(1)}(\mathbf{x}, \xi) + \kappa^2 \mu^{(2)}(\mathbf{x}, \xi) + \dots, \quad (13)$$

где  $\mu^{(0)} = s + (1-s) \left(1 + Cu_0^2 \kappa^{2c-2} Y^{(0)}\right)^{\frac{n-1}{2}}$  и  $Y^{(0)} = 2\mathbf{D}_\xi^{(0)} \cdot \mathbf{D}_\xi^{(0)}$ ,

$$\mu^{(1)} = s + (1-s) \left(1 + Cu_0^2 \kappa^{2c-1} Y^{(1)}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$
 и  $Y^{(1)} = 4\mathbf{D}_\xi^{(0)} \cdot \mathbf{D}_x^{(0)} + 2\mathbf{D}_\xi^{(1)} \cdot \mathbf{D}_\xi^{(1)}$ .

Подставляя эти разложения в систему (5) для выбранного ранее режима течения и выполняя группировку слагаемых при одинаковых степенях параметра  $\kappa$ , получаются локальные задачи фильтрации нулевого и первого уровней для несжимаемой неньютоновской вязкой жидкости на ЯП:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\xi} \cdot \mathbf{v}^{(0)} = 0, \\ \nabla_{\xi} p^{(0)} = 0, \\ \mathbf{v}^{(0)}|_{\Sigma_{\bar{\xi}g}} = 0, \\ \langle p^{(0)}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\xi}, t) \rangle = \bar{p}. \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\xi} \cdot \mathbf{v}^{(1)} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}^{(0)} = 0, \\ -\nabla_{\mathbf{x}} p^{(0)} - \nabla_{\xi} p^{(1)} + \frac{1}{Eu^0 \text{Re}^0} \nabla_{\xi} \cdot \sigma_{\xi}^{(0)} = 0, \\ \sigma_{\xi}^{(0)} = 2\mu^{(0)} \mathbf{D}_{\xi}^{(0)}, \\ \mathbf{D}_{\xi}^{(0)} = \frac{1}{2} (\nabla_{\xi} \otimes \mathbf{v}^{(0)} + \nabla_{\xi} \otimes \mathbf{v}^{(0)T}), \\ \mu^{(0)} = s + (1-s) \left( 1 + Cu_0^2 Y^{(0)} \right)^{\frac{n-1}{2}}, Y^{(0)} = 2\mathbf{D}_{\xi}^{(0)} \cdot \mathbf{D}_{\xi}^{(0)}, \\ \langle \mathbf{v}^{(1)} \rangle = \bar{\mathbf{v}}, \langle p^{(1)} \rangle = \bar{p}, \langle \mu^{(0)} \rangle = \bar{\mu}, \\ \llbracket \mathbf{v}^{(1)} \rrbracket = 0, \llbracket p^{(1)} \rrbracket = 0, \\ \mathbf{v}^{(1)} = 0, \bar{\xi} \in \Sigma_{\bar{\xi}}. \end{array} \right. \quad (14)$$

Здесь  $\llbracket \cdot \rrbracket$  обозначены условия периодичности на противоположных гранях ЯП  $V_{\bar{\xi}p}$ .  $\Sigma_{\bar{\xi}}$  — часть поверхности  $\Sigma$  в ЯП. Тогда,  $\bar{\mathbf{v}}$ ,  $\bar{p}$  и  $\bar{\mu}$  представляют собой средние значения функций, а соотношения, их содержащие, следует понимать, как дополнительные условия, предъявляемые к локальным параметрам течения в  $V_{\bar{\xi}p}$ , либо как обозначения для вычисленных осредненных функций.

Из систем (14) получаем, что  $p^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) = p^{(0)}(\mathbf{x}, t)$  не зависит от локальных координат  $\xi$ . Таким образом, системы (14) сводятся к локальной задаче, зависящей от скорости нулевого уровня  $\mathbf{v}^{(0)}$  и давления первого уровня  $p^{(1)}$ , в следующей форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\xi} \cdot \mathbf{v}^{(0)} = 0, \\ -\nabla_{\mathbf{x}} p^{(0)} - \nabla_{\xi} p^{(1)} + \frac{1}{Eu^0 \text{Re}^0} \nabla_{\xi} \cdot \sigma_{\xi}^{(0)} = 0, \\ \sigma_{\xi}^{(0)} = 2\mu^{(0)} \mathbf{D}_{\xi}^{(0)}, \\ \mathbf{D}_{\xi}^{(0)} = \frac{1}{2} (\nabla_{\xi} \otimes \mathbf{v}^{(0)} + \nabla_{\xi} \otimes \mathbf{v}^{(0)T}), \\ \mu^{(0)} = s + (1-s) \left( 1 + Cu_0^2 Y^{(0)} \right)^{\frac{n-1}{2}}, Y^{(0)} = 2\mathbf{D}_{\xi}^{(0)} \cdot \mathbf{D}_{\xi}^{(0)}, \\ \langle p^{(1)} \rangle = 0, \llbracket \mathbf{v}^{(0)} \rrbracket = 0, \llbracket p^{(1)} \rrbracket = 0, \\ \mathbf{v}^{(0)}|_{\Sigma_{\bar{\xi}}} = 0. \end{array} \right. \quad (15)$$

В системе (15), градиент давления  $\nabla_{\mathbf{x}} p^{(0)}$  рассматривается как один из “входных данных”. Для более подробного описания опишем задачу в виде тензорных компонентов и введём обозначения для производных по глобальным и локальным координатам соответственно,  $f_{,i} = \partial f / \partial \hat{x}_i$ ,  $f_{,i} = \partial f / \partial \xi_i$ . В этом случае, в силу нелинейности системы (15) ее решение можно представить в виде нелинейных функций от “входных данных”, т.е.  $p_{,i}^{(0)}$ :

$$p^{(1)}(\mathbf{x}, \xi) = \sum_{\alpha=1}^3 q^{(\alpha)}(\xi, p_{,\alpha}^{(0)}(\mathbf{x})), \quad v_i^{(0)}(\mathbf{x}, \xi) = \sum_{\alpha=1}^3 w_i^{(\alpha)}(\xi, p_{,\alpha}^{(0)}(\mathbf{x})), \quad \mu^{(0)}(\mathbf{x}, \xi) = \sum_{\alpha=1}^3 \phi^{(\alpha)}(\xi, p_{,\alpha}^{(0)}(\mathbf{x})), \quad (16)$$

где введены функции  $q^{(\alpha)}$ ,  $w_i^{(\alpha)}$  и  $\phi^{(\alpha)}$ , нелинейно зависящие от не только локальных координат  $\xi$ , и но градиента давления  $p_{,\alpha}^{(0)}(\mathbf{x})$ .

Подставляя выражения (16) в систему (15), получим набор локальных задач для определения функций  $q^{(\alpha)}$ ,  $w_i^{(\alpha)}$  и  $\phi^{(\alpha)}$ , которые не только содержат реологические свойства жидкости, и но зависят от “входных данных”  $p_i^{(0)}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{i/i}^{(\alpha)} = 0, \\ -q_{/i}^{(\alpha)} + \frac{1}{Eu^0 Re^0} \tau_{ij/j}^{(\alpha)} = p_{,\alpha}^{(0)}, \\ \tau_{ij}^{(\alpha)} = 2\phi^{(\alpha)} \varepsilon_{ij}^{(\alpha)}, \varepsilon_{ij}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} (w_{i/j}^{(\alpha)} + w_{j/i}^{(\alpha)T}), \\ \phi^{(\alpha)} = s + (1-s) (1 + Cu_0^2 Z^{(\alpha)})^{\frac{n-1}{2}}, Z^{(\alpha)} = 2\varepsilon_{ij}^{(\alpha)} \varepsilon_{ji}^{(\alpha)}, \\ \langle q^{(\alpha)} \rangle = 0, \llbracket w_i^{(\alpha)} \rrbracket = 0, \llbracket q^{(\alpha)} \rrbracket = 0, \\ w_i^{(\alpha)}|_{\Sigma_\xi} = 0, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}, \alpha = \overline{1,3}. \end{array} \right. \quad (17)$$

Согласно допущению микроструктуры, область расчета может быть дополнительно уменьшена, и локальная задача (17) будет дополнительно упрощена, если воспользоваться следующей теоремой о продолжении решения.

**Теорема 1.** Пусть ЯП  $V_{\xi\bar{\varphi}}$  трехмерной структуры имеет зеркальную симметрию относительно координатных плоскостей  $O_{\xi_1\xi_2}$ ,  $O_{\xi_1\xi_3}$ ,  $O_{\xi_2\xi_3}$ . Тогда решение  $w_i^{(\alpha)}$ ,  $q^{(\alpha)}$ ,  $\phi^{(\alpha)}$  задачи (17) получается с помощью симметричного или антисимметричного продолжения функций  $\tilde{v}_i^{(\alpha)}$ ,  $\tilde{p}^{(\alpha)}$ ,  $\tilde{\mu}^{(\alpha)}$  определенных в 1/8 области ЯП  $V_{\xi\bar{\varphi}}$  и являющихся решениями следующих локальных задач  $L^{(\alpha)}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}_{i/i}^{(\alpha)} = 0, \\ -\tilde{p}_{/i}^{(\alpha)} + \frac{1}{Eu^0 Re^0} \tilde{\sigma}_{ij/j}^{(\alpha)} = p_{,\alpha}^{(0)}, \\ \tilde{\sigma}_{ij}^{(\alpha)} = 2\tilde{\mu}^{(\alpha)} \tilde{D}_{ij}^{(\alpha)}, \\ \tilde{D}_{ij}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} (\tilde{v}_{i/j}^{(\alpha)} + \tilde{v}_{j/i}^{(\alpha)T}), \\ \tilde{\mu}^{(\alpha)} = s + (1-s) (1 + Cu_0^2 \tilde{Y}^{(\alpha)})^{\frac{n-1}{2}}, \\ \tilde{Y}^{(\alpha)} = 2\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)} \tilde{D}_{ji}^{(\alpha)}, \\ \tilde{v}_i^{(\alpha)}|_{\Sigma_{\bar{\varphi}}} = 0. \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla_\xi \cdot \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} = 0, \\ -\nabla_\xi \tilde{p}^{(\alpha)} + \frac{1}{Eu^0 Re^0} \nabla_\xi \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(\alpha)} = \nabla_x p^{(0)}, \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(\alpha)} = 2\tilde{\mu}^{(\alpha)} \tilde{\mathbf{D}}^{(\alpha)}, \\ \tilde{\mathbf{D}}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} (\nabla_\xi \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} + \nabla_\xi \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)T}), \\ \tilde{\mu}^{(\alpha)} = s + (1-s) (1 + Cu_0^2 \tilde{Y}^{(\alpha)})^{\frac{n-1}{2}}, \\ \tilde{Y}^{(\alpha)} = 2\tilde{\mathbf{D}}^{(\alpha)} \cdot \tilde{\mathbf{D}}^{(\alpha)}, \\ \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}|_{\Sigma_{\bar{\varphi}}} = 0. \end{array} \right. \quad (18)$$

с граничными условиями на противоположенных гранях 1/8 ЯП:

$$\xi_j = 0 \text{ и } \xi_j = \frac{1}{2} : \left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}_i^{(\alpha)} (\delta_{aj} + \delta_{ji} - 2\delta_{aj}\delta_{ji}) + \frac{\partial \tilde{v}_i^{(\alpha)}}{\partial \xi_j} [1 - (\delta_{aj} + \delta_{ji} - 2\delta_{aj}\delta_{ji})] = 0 \\ \tilde{p}^{(\alpha)} \delta_{aj} + \frac{\partial \tilde{p}^{(\alpha)}}{\partial \xi_j} (1 - \delta_{aj}) = 0 \end{array} \right. , \alpha, i, j = \overline{1,3}. \quad (19)$$

Каждая из задач (18) представляет собой стационарную задачу течения некоторой фиктивной несжимаемой неньютоновской вязкой среды. Решение  $\tilde{v}_i^{(\alpha)}$  и  $\tilde{p}^{(\alpha)}$  задач зависит от не только внутренней геометрией пор, и но “входных данных”  $p_{,\alpha}^{(0)}$ . Поэтому:

$$\tilde{v}_i^{(\alpha)} = \tilde{v}_i^{(\alpha)}(\xi, p_{,\alpha}^{(0)}), \quad \tilde{p}^{(\alpha)} = \tilde{p}^{(\alpha)}(\xi, p_{,\alpha}^{(0)}). \quad (20)$$

После решения серии задач  $L^{(\alpha)}$  (18) численным методом для всех  $\alpha$  проинтегрируем  $\tilde{v}_i^{(\alpha)}$  по областям, занятым неньютоновской вязкой жидкостью. В результате получается скорость фильтрации  $\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle$  задачи (15). Тогда нелинейный закон фильтрации, связанный со скоростью  $\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle$  и градиентом макродавления  $\nabla_x p^{(0)}$  написан в следующем виде:

$$\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = F(\nabla_x p^{(0)}). \quad (21)$$

Фактически алгоритм нахождения значения тензорной функции (21) сводится к вычислению скоростей  $\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle$  по заданным значениям  $\nabla_x p^{(0)}$  и определяющим соотношениям жидкостей. Тензорная функция (21) может быть указана, если имеется информация о типе геометрической симметрии ЯП композита, типе анизотропии волокон и матрицы, и типе реологических свойств жидкости. Ввиду того, что основное допущение симметрии принято, решение всех задач  $L^{(\alpha)}$  (18) будет иметь указанный тип симметрии. Это означает, что тензорная функция (21) также должна иметь данную симметрию. Но перечисленные выше преобразования и тождественные преобразования образуют группу ортотропии, следовательно, скорость  $\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle$  будет тензорной функцией, независимой от группы ортотропии. Тогда, для такой тензорной функции можно использовать представление ее в тензорном базисе группы ортотропии, которое имеет вид:

$$\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = \sum_{\alpha=1}^3 \chi^{(\alpha)}(I_1^p, I_2^p, I_3^p) \mathbf{e}_\alpha \quad \text{или} \quad \langle v_i^{(0)} \rangle = \sum_{\alpha=1}^3 \chi^{(\alpha)}(I_1^p, I_2^p, I_3^p) \delta_{i\alpha}. \quad (22)$$

где  $\chi^{(\alpha)}$  скалярные функции от инвариантов градиента давления:  $I_i^p = \partial p^{(0)} / \partial x_i$ .

Эти функции  $\chi^{(\alpha)}$  фактически и представляют собой искомую эффективную проницаемость неньютоновской вязкой жидкости в пористых средах. Зная значения  $\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle$  и  $\nabla_x p^{(0)}$ , функции  $\chi^{(\alpha)}$  вычисляются следующим образом. Для ортогональных полей запишем формулы (21) в явном виде:

$$\chi^{(\alpha)}(I_1^p, I_2^p, I_3^p) = \tilde{\chi}^{(\alpha)}(|I_1^{p(\alpha)}|, |I_2^{p(\alpha)}|, |I_3^{p(\alpha)}|) I_\alpha^p = \tilde{\chi}^{(\alpha)} p_{,\alpha}^{(0)}. \quad (23)$$

Для пористых сред с различными структурами, очевидно, что  $\chi^{(1)} = \chi^{(2)} = \chi^{(3)}$  описывает проницаемость изотропной пористой среды и проницаемость анизотропной пористой среды, когда  $\chi^{(1)} \neq \chi^{(2)} \neq \chi^{(3)}$ .

На основе (22) получаем закон фильтрации со следующей формой:

$$\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = \left( \sum_{\alpha=1}^3 \tilde{\chi}^\alpha \mathbf{e}_\alpha^2 \right) \nabla_x p^{(0)}, \quad (24)$$

где  $\mathbf{e}_\alpha^2 = \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha$  – диадный базис,  $\mathbf{K} = \sum_{\alpha=1}^3 \tilde{\chi}^{(\alpha)} \mathbf{e}_\alpha^2$  – тензор проницаемости.

Из анализа локальных задач (18) видно, что направление скорости  $\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle$  противоположно направлению градиента давления  $\nabla_x p^{(0)}$ , поэтому

$$\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = -\mathbf{K} \cdot \nabla_x p^{(0)}, \quad (25)$$

где  $\mathbf{K} = K_j^i$  тензорная функция, зависящая от модуля  $|\nabla_x p^{(0)}|$  вектора  $\nabla_x p^{(0)}$ .

Фактически, выражение (25) является формулировкой нелинейного закона фильтрации неньютоновской вязкой жидкости в пористых средах. Тогда, матрица  $\mathbf{K} = \text{diag}(K_1^1, K_2^2, K_3^3)$  является диагональной. Согласно выражению (25), тензор проницаемости записывается следующим образом:  $\mathbf{K} = \text{diag}(\tilde{\chi}^{(1)}, \tilde{\chi}^{(2)}, \tilde{\chi}^{(3)})$ .

Отсюда, получена глобальная задача фильтрации неньютоновской вязкой жидкости:

$$\begin{cases} \nabla_x \cdot \langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = -\mathbf{K} \nabla_x p^{(0)}. \end{cases} \quad (26)$$

При этом, основное различие между нелинейным законом фильтрации и законом Дарси состоит в том, что тензор проницаемости зависит от реологического свойства жидкости и “входных данных”  $\nabla_x p^{(0)}$ .

Аналогично, в сочетании с выражениями (16)-(18), эффективная вязкость  $\langle \mu \rangle$ , связанная с градиентом макродавления  $p_{,\alpha}^{(0)}$  представима в следующем виде:

$$\langle \mu \rangle = \sum_{\alpha=1}^3 \langle \phi^{(\alpha)}(I_1^{p(\alpha)}, I_2^{p(\alpha)}, I_3^{p(\alpha)}) \rangle = \sum_{\alpha=1}^3 \langle \tilde{\mu}^{(\alpha)}(|I_1^{p(\alpha)}|, |I_2^{p(\alpha)}|, |I_3^{p(\alpha)}|) p_{,\alpha}^{(0)} \rangle = \sum_{\alpha=1}^3 \langle \mu^{(\alpha)} \rangle. \quad (27)$$

Эффективная вязкость описывает характеристики вязкости в ПКС в целом.

Во **второй главе** диссертации предложены численные алгоритмы решения локальных задач, нелинейного закона фильтрации и эффективной вязкости неньютоновской жидкости в рамках модели Карро в пористых средах.

В работе показано, что локальная задача фильтрации (18) эквивалентна следующей вариационной формулировке:

$$\begin{aligned} \int_{V^{(e)}} (\nabla_{\xi} \cdot \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) \cdot \delta \tilde{p}^{(\alpha)} dV &= 0, \\ \int_{V^{(e)}} \tilde{\mathbf{T}}^{(\alpha)} \cdot \delta \tilde{\mathbf{D}}^{(\alpha)} dV &= \int_{\Sigma^{(e)}} \tilde{\mathbf{s}}^{(\alpha)} \cdot \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} d\Sigma + \int_{V^{(e)}} \mathbf{f}^{(\alpha)} \cdot \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} dV. \end{aligned} \quad (28)$$

где  $\mathbf{f}^{(\alpha)} = p_{,\alpha}^{(0)}$ ,  $\tilde{\mathbf{T}}^{(\alpha)} = -\tilde{p}^{(\alpha)} \boldsymbol{\delta} + \frac{1}{Eu^0 Re^0} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(\alpha)}$  – локальный тензор напряжений;  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(\alpha)} = 2\tilde{\mu}^{(\alpha)} \tilde{\mathbf{D}}^{(\alpha)}$  – локальный вязкий тензор напряжений;  $\tilde{\mathbf{s}}^{(\alpha)} = \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{T}}^{(\alpha)}$  – локальные компоненты вектора усилий;  $\delta \tilde{p}^{(\alpha)}$ ,  $\delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}$  и  $\delta \tilde{\mathbf{D}}^{(\alpha)}$  – вариации пульсации давления, скорости и компоненты тензора скоростей деформаций, соответственно.

Для триангуляции расчетной области был предложен 10-и узловый конечный элемент в форме тетраэдра с 34 степенями свободы: по 3 компоненты скорости  $\tilde{v}_i^{(\alpha)}$  в каждом узле и по одному значению давления  $\tilde{p}^{(\alpha)}$  в каждой вершине тетраэдра. Поскольку задача (18) нелинейная, то для ее решения применялся итерационный алгоритм. Согласно этому методу в системе (18) тензор вязких напряжений линеаризовался следующим образом:

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{(\alpha)\{m\}} = 2\tilde{\mu}^{(\alpha)\{m-1\}} \tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{m\}} = 2 \left[ s + (1-s) \left( 1 + Cu^0 \tilde{Y}^{(\alpha)\{m-1\}} \right)^{\frac{n-1}{2}} \right] \tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{m\}}, \quad (29)$$

где  $\tilde{Y}^{(\alpha)\{m-1\}} = 2\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{m-1\}} \tilde{D}_{ji}^{(\alpha)\{m-1\}}$ ,  $\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{m\}} = \frac{1}{2} \left( \tilde{v}_{i/j}^{(\alpha)\{m\}} + \tilde{v}_{j/i}^{(\alpha)\{m\}T} \right)$ .  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(\alpha)\{m\}}$  и  $\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{m\}}$  – значения тензора вязких напряжений  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(\alpha)\{0\}}$  и тензора скорости деформации  $\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)\{0\}}$  на  $m$ -м шаге итерационного цикла, а  $\tilde{\mu}^{(\alpha)\{m\}}$  – неньютоновская вязкость на  $m$ -м шаге

итерации. Обозначим также  $\tilde{v}_i^{(\alpha)\{m\}}$  и  $\tilde{p}^{(\alpha)\{m\}}$  – значения скорости  $\tilde{v}_i^{(\alpha)\{0\}}$  и давления  $\tilde{p}^{(\alpha)\{0\}}$  на  $m$ -м шаге итерационного цикла.

Осуществлялась проверка сходимости на  $m$ -м шаге итерации, если  $\|(X^{\{m+1\}} - X^{\{m\}})/X^{\{m\}}\|_{\infty} \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon \leq 10^{-5}$  является очень малым числом, то  $X = \tilde{v}_i^{(\alpha)}, \tilde{p}^{(\alpha)}, \tilde{\mu}^{(\alpha)}$ , а итерационный процесс завершается.

В соответствии с итерационным алгоритмом (29), система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), может быть переписана в виде:

$$\begin{aligned} [G] \begin{bmatrix} \tilde{v}^{(\alpha)\{m\}} \\ \tilde{p}^{(\alpha)\{m\}} \end{bmatrix} &= 0, \\ [G] \begin{bmatrix} \tilde{p}^{(\alpha)\{m\}} \end{bmatrix} - \frac{1}{Eu^0 \text{Re}^0} [K^{(\alpha)\{m-1\}}] \begin{bmatrix} \tilde{v}^{(\alpha)\{m\}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{f}^{(\alpha)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

где  $[G] = \int_{V^{(e)}} [B]^T [N_p] dV$ ,  $[B] = \frac{1}{2} [I_d] [S] [N_v]$ ,  $I_d = \text{diag}(2, 2, 2, 1, 1, 1)$ ,

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}^{(\alpha)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_V^{(\alpha)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{f}_\Sigma^{(\alpha)} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{f}_V^{(\alpha)} \end{bmatrix} = \int_{V^{(e)}} [N_v]^T \begin{bmatrix} \tilde{f}^{(\alpha)} \end{bmatrix} dV, \quad \begin{bmatrix} \tilde{f}_\Sigma^{(\alpha)} \end{bmatrix} = \int_{\Sigma^{(e)}} [N_v]^T \begin{bmatrix} \tilde{s}^{(\alpha)} \end{bmatrix} d\Sigma,$$

$$\begin{bmatrix} K^{(\alpha)\{m-1\}} \end{bmatrix} = \int_{V^{(e)}} [B]^T \left( 2 [N_\mu] \begin{bmatrix} \tilde{R}^{(\alpha)\{m-1\}} \end{bmatrix} \right) [B] dV, \quad \mathbf{S}^T = \begin{bmatrix} \partial/\partial \xi_1 & 0 & 0 & \partial/\partial \xi_2 & 0 & \partial/\partial \xi_3 \\ 0 & \partial/\partial \xi_2 & 0 & \partial/\partial \xi_1 & \partial/\partial \xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial \xi_3 & 0 & \partial/\partial \xi_2 & \partial/\partial \xi_1 \end{bmatrix}.$$

Здесь  $[N_v]$ ,  $[N_p]$  и  $[N_\mu]$  – матрицы функций формы;  $\begin{bmatrix} \tilde{R}^{(\alpha)} \end{bmatrix}$  – координатный столбец неньютоновских вязкостей в узлах:

$$\begin{bmatrix} R^{(\alpha)} \end{bmatrix}^T = s + (1-s) \left( 1 + Cu_0^2 \begin{bmatrix} \tilde{Y}^{(\alpha)} \end{bmatrix}^T \right)^{\frac{n-1}{2}}, \quad \tilde{Y}_i^{(\alpha)} = \left( [B] \begin{bmatrix} \tilde{v}^{(\alpha)i} \end{bmatrix} \right)^T \left( [B] \begin{bmatrix} \tilde{v}^{(\alpha)i} \end{bmatrix} \right),$$

где  $\begin{bmatrix} \tilde{v}^{(\alpha)i} \end{bmatrix}$  – координатный столбец скоростей в  $i$ -ом узле конечного элемента.

С учетом соотношения для коэффициентов проницаемости и эффективной вязкости из (24) и (27) можно получить следующие формулы для численного расчета параметров пористой среды:

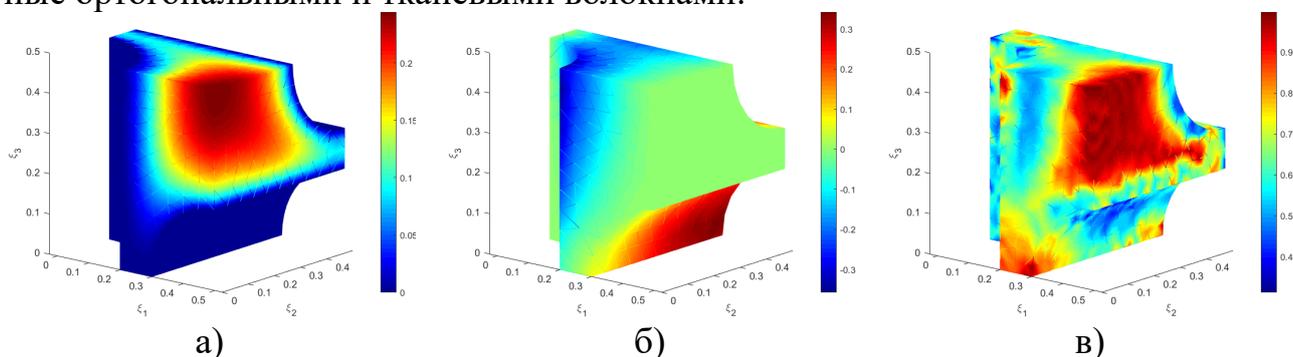
$$K_i^J = 8 \sum_{e=1}^E \left( \int_{V^{(e)}} [\tilde{N}_v] \det[J] dL_1 dL_2 dL_3 \right) \begin{bmatrix} \tilde{v}_i^{(j)} \end{bmatrix}^{(e)}, \quad \varphi = 8 \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} |\det[J]| dL_1 dL_2 dL_3, \quad (31)$$

$$\langle \mu^{(\alpha)} \rangle = \frac{8}{\varphi} \sum_{e=1}^E \left( \int_{V^{(e)}} [N_\mu] \det[J] dL_1 dL_2 dL_3 \right) \begin{bmatrix} \tilde{R}^{(\alpha)} \end{bmatrix}, \quad (32)$$

где  $|\det[J]|$  – модуль определителя матрицы Якоби  $L_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$  –  $L$ -координаты.

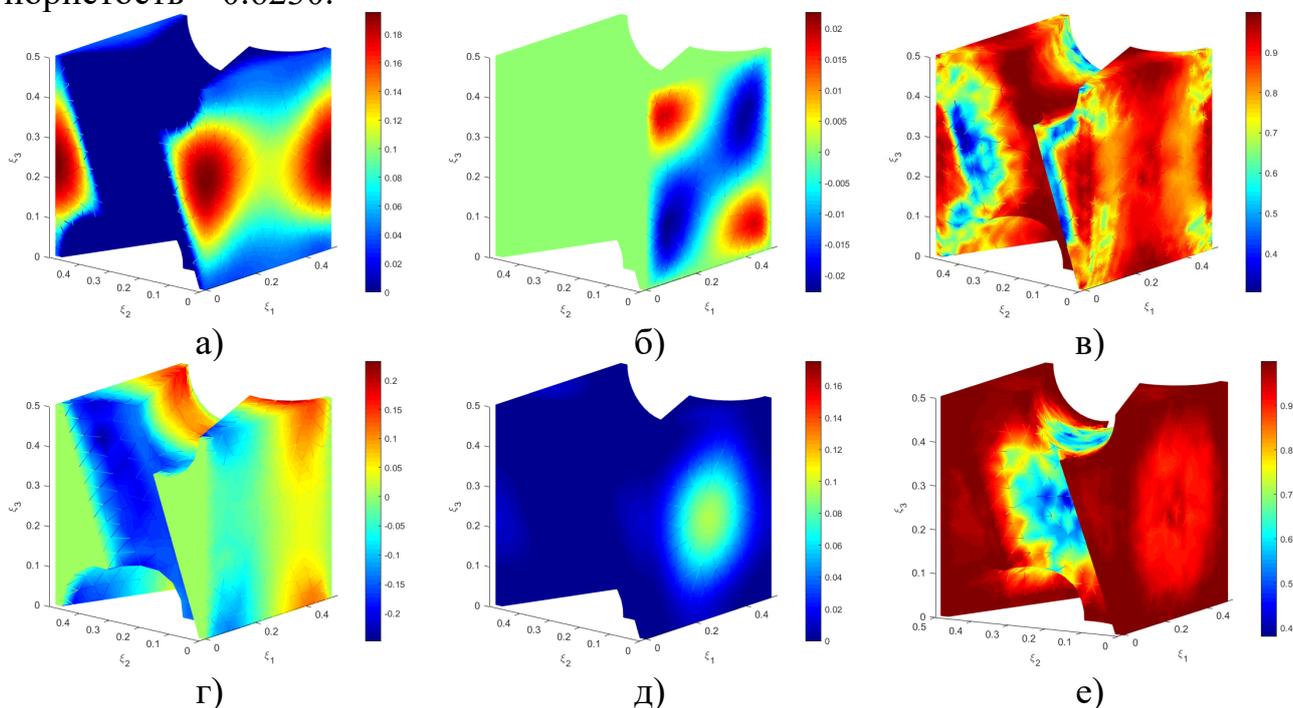
В третьей главе дается краткое описание разработанного программного комплекса для численного моделирования локального процесса, нелинейного закона фильтрации и эффективной вязкости неньютоновских вязких жидкостей в ПКС. Выполнено тестирование разработанных численных алгоритмов и программного обеспечения, результаты которого подтвердили корректность расчетов, получаемых с помощью разработанного комплекса программ. В качестве примера, в вычислительном эксперименте используется бензол ( $C_6H_6$ ):  $1/(Eu^0 \text{Re}^0) = 0.0652$ .

В первой части третьей главы рассматривается численное моделирование локального процесса течения неньютоновской жидкости в рамках модели Карро в ЯП пористых сред. В случае моделирования локальных процессов фильтрации рассматриваем две геометрические модели 1/8 части ЯП: поры, образованные ортогональными и тканевыми волокнами.



**Рис.2.** – Распределение решений локальной задачи  $L^{(1)}$  при  $n = 0.25$ :  
а – компонента  $\tilde{v}_1^{(1)}$ ; б – компонента  $\tilde{v}_2^{(1)}$ ; в – вязкость  $\tilde{\mu}^{(1)}$ .

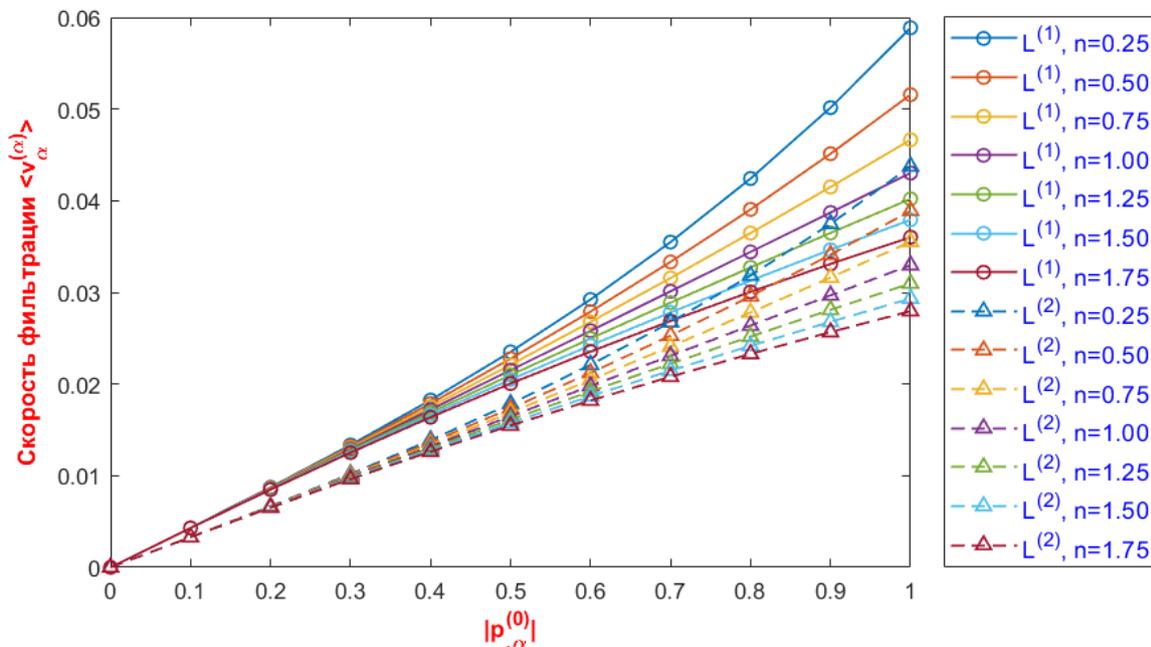
Примеры распределения микрополей компонент  $\tilde{v}_1^{(1)}$  и  $\tilde{v}_2^{(1)}$  вектора скорости, и неньютоновской вязкости  $\tilde{\mu}^{(1)}$ , полученные при решении локальной задачи  $L^{(1)}$  для ортогональной структуры с безразмерным радиусом волокна 0.2, когда  $n = 0.25$  и  $|p_{,1}^{(0)}| = 1$ , приведены на Рис.2. Коэффициент проницаемости  $K_1^1$  в данном случае получился равным 0.1150, эффективная вязкость  $\langle \mu^{(1)} \rangle = 0.7196$  и пористость – 0.6230.



**Рис.3.** – Распределение решений локальных задач  $L^{(1)}$  и  $L^{(2)}$  при  $n = 0.25$ :  
а – компонента скорости  $\tilde{v}_1^{(1)}$ ; б – компонента скорости  $\tilde{v}_3^{(1)}$ ; в – вязкость  $\tilde{\mu}^{(1)}$ ;  
г – давление  $\tilde{p}^{(1)}$ ; д – компонента скорости  $\tilde{v}_2^{(2)}$ ; е – вязкость  $\tilde{\mu}^{(2)}$ .

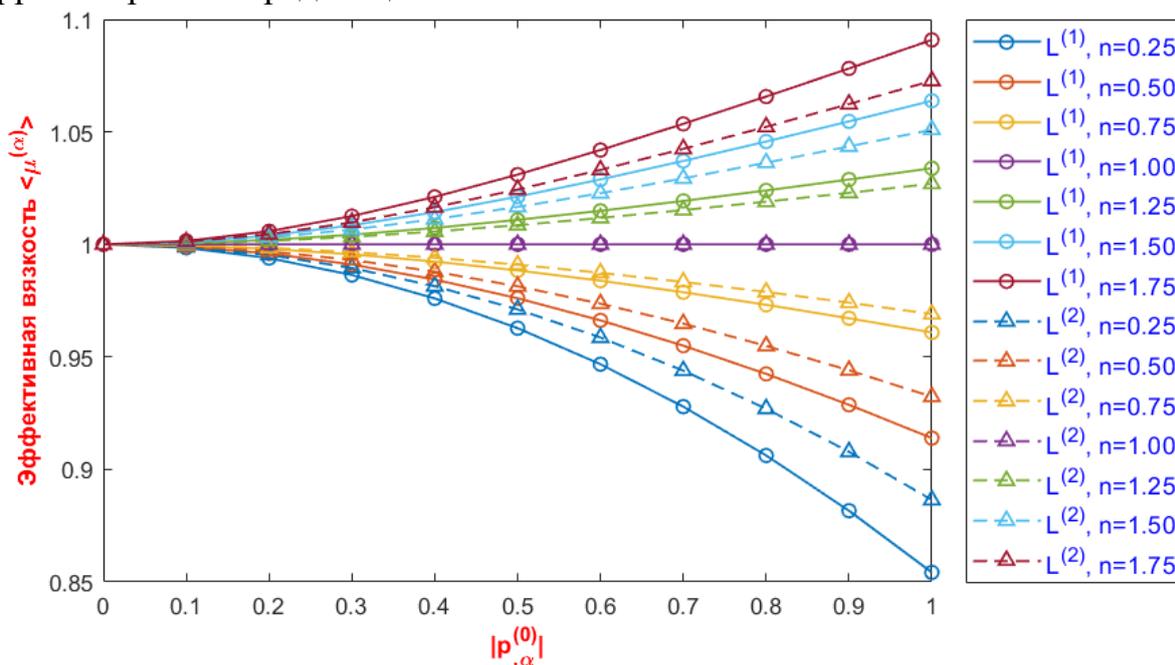
Примеры распределения микрополей компонент  $\tilde{v}_1^{(1)}$ ,  $\tilde{v}_3^{(1)}$  и  $\tilde{v}_2^{(2)}$  вектора скорости, пульсации давления  $\tilde{p}^{(1)}$  и неньютоновских вязкостей  $\tilde{\mu}^{(1)}$  и  $\tilde{\mu}^{(2)}$ , получен-

ные при решении локальных задач  $L^{(1)}$  и  $L^{(2)}$  для тканевой структуры с безразмерным радиусом волокон 0.12 при  $n=0.25$ ,  $p_{,1}^{(0)}=1$  и  $p_{,2}^{(0)}=1$ , приведены на Рис.3. Коэффициенты проницаемости  $K_1^1$  и  $K_2^2$  для случая данной геометрии поры оказались соответственно равными 0.0589 и 0.0438, эффективные вязкости  $\langle \mu^{(1)} \rangle$  и  $\langle \mu^{(2)} \rangle$  соответственно равны 0.8542 и 0.8864 при пористости 0.6340.



**Рис.4.** – Нелинейные зависимости задач  $L^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1,2$  между скоростью фильтрации  $\langle v_{\alpha}^{(\alpha)} \rangle$ , градиентом давления  $|p_{,\alpha}^{(0)}|$  и степенным индексом  $n$ .

В второй части третьей главы рассматриваются нелинейный закон фильтрации и эффективная вязкость неньютоновской жидкости в рамках модели Карро в пористой среде в целом.



**Рис.5.** – Нелинейные зависимости задач  $L^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1,2$  между эффективной вязкостью  $\langle \mu^{(\alpha)} \rangle$ , градиентом давления  $|p_{,\alpha}^{(0)}|$  и степенным индексом  $n$ .

В случае расчета компонентов тензора проницаемости и эффективной вязкости рассматривается геометрическая модель тканевой структуры.

В вычислительном эксперименте проводились исследования влияния реологических свойств (степенных индексов  $n$ ) и градиентов давления  $p_{,\alpha}^{(0)}$  на скорость фильтрации  $\langle v_{\alpha}^{(\alpha)} \rangle$ ,  $\alpha = 1, 2$  и эффективную вязкость  $\langle \mu^{(\alpha)} \rangle$ . На Рис.4 показаны связи между скоростью  $\langle v_{\alpha}^{(\alpha)} \rangle$  и значениями  $|p_{,\alpha}^{(0)}|$  и индексом  $n$  для разных локальных задач  $L^{(\alpha)}$ . Из результатов расчётов следует, что при увеличении значений  $|p_{,\alpha}^{(0)}|$ , скорость  $\langle v_{\alpha}^{(\alpha)} \rangle$  существенно увеличивается для любых  $n$ , и под воздействием конкретных значений  $|p_{,\alpha}^{(0)}|$ , а при увеличении значений  $n$ , скорость  $\langle v_{\alpha}^{(\alpha)} \rangle$  уменьшается. С увеличением значения  $|p_{,\alpha}^{(0)}|$ , влияние степенного индекса  $n$  на скорость  $\langle v_{\alpha}^{(\alpha)} \rangle$  также увеличивается. Кроме того, также продемонстрировано влияние анизотропии тканевой структуры на скорость  $\langle v_{\alpha}^{(\alpha)} \rangle$ . При тех же условиях скорость  $\langle v_1^{(1)} \rangle$  больше, чем скорость  $\langle v_2^{(2)} \rangle$ .

На Рис.5 показана взаимосвязь между эффективной вязкостью  $\langle \mu^{(\alpha)} \rangle$ ,  $\alpha = 1, 2$  и значениями градиента макродавления  $|p_{,\alpha}^{(0)}|$  при различных степенных индексах  $n$  для локальных задач  $L^{(\alpha)}$ . Из результатов расчётов, представленных на Рис.5, следует, что при увеличении значений  $|p_{,\alpha}^{(0)}|$ , вязкость  $\langle \mu^{(\alpha)} \rangle$  дилатантной жидкости значительно увеличивается, а вязкость  $\langle \mu^{(\alpha)} \rangle$  псевдопластичной жидкости значительно уменьшается. И для конкретных значений  $|p_{,\alpha}^{(0)}|$ , при увеличении значений  $n$ , вязкость  $\langle \mu^{(\alpha)} \rangle$  жидкости увеличивается. Кроме того, когда значение  $|p_{,\alpha}^{(0)}|$  увеличивается, влияние значений  $n$  на вязкость  $\langle \mu^{(\alpha)} \rangle$  увеличивается.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. Разработаны физико-математическая модель течения несжимаемых неньютоновских вязких жидкостей и многомасштабная модель течения несжимаемой неньютоновской жидкости в рамках модели Карро в пористой среде.

2. На основе метода асимптотической гомогенизации сформулированы локальные задачи течения несжимаемой неньютоновской жидкости в рамках модели Карро в ячейке периодичности и нелинейный закон фильтрации с помощью анизотропных нелинейных тензорных функций.

3. Сформулированы вариационные постановки локальных задач, с помощью которых разработаны численные итерационные алгоритмы решения локальных задач в общей трехмерной постановке и алгоритм расчета компонентов тензора проницаемости, и эффективной вязкости жидкости и пористости сред.

4. Получены результаты численного моделирования локальных течений несжимаемой неньютоновской жидкости в рамках модели Карро на ячейке периодичности двух типовых пористых структур, показавшие эффективность предложенного алгоритма решения локальных задач, компонентов тензора проницаемости и эффективной вязкости жидкостей.

5. Получены результаты численного расчета нелинейного закона фильтрации неньютоновской жидкости в рамках модели Карро в пористых средах. Результаты расчётов показали, что коэффициенты проницаемости нелинейно зависят от степенного индекса и градиента макродавления. При увеличении значения градиента давления, скорость фильтрации увеличивается. Под действием фиксированного градиента давления, с увеличением степенного индекса скорость фильтрации уменьшается. При увеличении значения градиента давления, влияние степенного индекса на скорость фильтрации увеличивается.

6. Получены результаты численного расчета эффективной вязкости в пористой среде в целом. Результаты показывают, что эффективная вязкость нелинейно зависит от степенного индекса модели Карро и градиента макродавления. При увеличении степенного индекса, эффективная вязкость увеличивается. При увеличении значения градиента давления, эффективная вязкость псевдопластичной жидкости уменьшается, а эффективная вязкость дилатантной жидкости увеличивается. При увеличении значения градиента давления, влияние степенного индекса на эффективную вязкость также увеличивается.

#### **ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОТРАЖЕНЫ В РАБОТАХ**

1. **Димитриенко Ю.И., Ли Шугуан, Конечно-элементное моделирование неизотермического стационарного течения неньютоновской жидкости в сложных областях // Математическое моделирование и численные методы. 2018. № 2(18). С. 70–95.**
2. **Димитриенко Ю.И., Ли Шугуан, Моделирование проницаемости неньютоновских жидкостей в трехмерных композитных структурах на основе метода асимптотической гомогенизации // Математическое моделирование и численные методы. 2019. № 3(23). С. 19–38.**
3. **Dimitrienko Yu.I., Li S.G., Modeling of Non-Newtonian resin flows in Composite Microstructures // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. IOP Publishing, 2019, Vol. 683(1): 012008.**
4. **Dimitrienko Yu.I., Li S.G., Mathematical Simulation of local transfer for non-Newtonian fluid in porous fabrics // Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing, 2019, Vol. 1392(1): 012023.**
5. **Димитриенко Ю.И., Ли Шугуан, Simulation of non-Newtonian fluid flows in composite microstructures // Международная конференция «Математика в приложениях» в честь 90-летия С.К. Годунова. Новосибирск, С. 4 – 10 августа 2019 г., 2019. С. 259.**
6. **Li S.G., Numerical analysis for fourth-order compact conservative difference scheme to solve the 3D Rosenau-RLW equation // Computers & Mathematics with Applications. 2016. Vol. 72(9). P. 2388-2407.**
7. **Li S.G., Wu X.G.,  $L^\infty$  error bound of conservative compact difference scheme for the generalized symmetric regularized long-wave (GSRLW) equations // Computational and Applied Mathematics. 2018. Vol. 37(3). P. 2816-2836.**
8. **Li S.G., Numerical study of a conservative weighted compact difference scheme for the symmetric regularized long wave equations // Numerical Methods for Partial Differential Equations. 2019 Vol. 35(1). P. 60-83.**