

УДК 532.252+536.248.2+532.517.3

## **Нелинейные особенности ламинарных течений жидкости на земле и в невесомости**

**Федюшкин А.И.<sup>1\*</sup>, Пунтус А.А.<sup>2\*\*</sup>**

<sup>1</sup>*Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН,  
проспект Вернадского, 101, корп.1, Москва, 119526, Россия*

<sup>2</sup>*Московский авиационный институт, МАИ,  
Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

*\*e-mail: [fai@ipmnet.ru](mailto:fai@ipmnet.ru),*

*\*\*e-mail: [artpuntus@yandex.ru](mailto:artpuntus@yandex.ru)*

### **Аннотация**

В работе приводятся результаты численного моделирования гидродинамики и теплопереноса и обсуждаются нелинейные особенности ламинарных течений.

**Ключевые слова:** численное моделирование, конвекция, симметрия течения, особенности ламинарных течений.

### **Введение**

Одной из особенностей проявления нелинейности ламинарных течений является закономерность нелинейной зависимости расслоения (температурного или концентрационного) от интенсивности перемешивания жидкости или газа, то есть существование максимума неоднородности в зависимости от безразмерных чисел, характеризующих интенсивность перемешивания той или иной задачи, например, от

числа Рэлея, Марангони, Рейнольдса (вибрационного или вращательного), Росби, Гартмана и т.д.). Эффект максимума расслоения рассмотрен в работах [1-4] и в данной работе рассматриваться не будет. В данной работе рассмотрены результаты численного моделирования гидродинамики и тепломассопереноса и обсуждаются особенности ламинарных течений при умеренных числах Рэлея и Рейнольдса следующих задач:

1. О влиянии естественно-конвективного течения на образование различных стационарных структур конвективного течения и появление противотоков основному течению в длинных горизонтальных слоях.

2. Задача о нарушении симметрии стационарного течения в плоском диффузоре.

3. Влияние вибраций на форму фронта кристаллизации

4. Влияние управляемых вибраций на тепломассоперенос в расплаве, форму фронта кристаллизации и на толщины пограничных слоев.

5. Изменение границы раздела при термокапиллярной конвекции.

### **1. Особенности течений при тепловой конвекции в горизонтальном слое, подогреваемом сбоку**

Рассматривается задача о тепловой конвекции несжимаемой жидкости в вытянутом по горизонтали слое в поле силы тяжести при боковом подводе тепла. Данная задача характеризуется тремя безразмерными числами Рэлея ( $Ra$ ), Прандтля ( $Pr$ ) и отношением сторон слоя ( $L/H \gg 1$ ), а также граничными условиями и отличается от задачи Рэлея-Бенара тем, что конвективное течение начинается

(теряет устойчивость) при сколь угодно малом значении числа Рэлея. В данной работе будут рассмотрены установившиеся ламинарные течения. Схема геометрии, граничные условия и структура течения при малых числах Рэлея показана на рис.1,2. На рис.2 показаны результаты моделирования в виде изолиний функции тока и изотерм для случая  $Ra=2 \cdot 10^5$ ,  $Pr= 5,8$ ,  $L/H=12.71$ , где структура течения еще имеет одновихревой характер, хотя изотермы поля температуры уже искривлены течением, профиль скорости отличен от параболического и величина градиента температуры по длине слоя переменна.

Во многих процессах и явлениях природы конвективные течения не описываются линейными приближениями и вследствие чего имеют свои особенности, которые нельзя экстраполировать из аналитических решений. В данной работе рассматриваются особенности конвективных течений в длинных горизонтальных слоях, связанные с изменением конвективной устойчивости течений, то есть с образованием той или иной устойчивой (или неустойчивой) температурной стратификации, которая получается (наводится естественно-конвективным течением) при определенных значениях чисел Рэлея, Прандтля и граничных условий. Особенности стационарных течений могут заключаться, например, в образовании крупномасштабной многоячейковой структуры с определенным волновым числом и периодом [5], например, таких как на рис.3, либо в образовании различных стационарных горизонтальных слоистых структур течения с противотоками внутри слоя (циркуляционные течения направленные навстречу основному), как на рис.4. Причинами особенностей течений с противотоками являются, во-первых, нелинейный характер зависимости скорости течения от

температуры, во-вторых, образование устойчивой стратификации температуры по вертикали слоя и в-третьих, влияние торцевых стенок. Следует отметить сложный характер данных течений в тонких пограничных слоях около вертикальных стенок с наличием стационарных вторичных вихрей, которые также входят в структуру формирования горизонтальных противотоков. Наводимая конвекцией устойчивая температурная стратификация по вертикали слоя с увеличением чисел Рэлея увеличивается и это способствует затягиванию ламинарного стационарного режима данных течений вплоть до значений числа Рэлея равного  $Ra=10^9$ , вычисленному по малому размеру  $H$ .

В данной работе получены результаты для различных значений чисел Рэлея ( $0 < Ra < 10^{10}$ ), Прандтля ( $10^{-2} < Pr < 16$ ), удлинений ( $1 < L/H < 20$ ) и типов граничных условий. На боковых стенках были заданы постоянные значения температуры  $T_1$  и  $T_2$  ( $T_1 < T_2$ ), для скорости - условие прилипания. На горизонтальных стенках были рассмотрены случаи следующих граничных условий: для скорости – условие прилипания или условие проскальзывания (свободная поверхность), для температуры – условие теплоизоляции (рис.2,4), либо задана температура (рис.3).

Численное решение уравнений Навье-Стокса осуществлялось двумя независимыми численными методами: конечноразностным (МКР) и методом контрольных объемов (МКО). Результаты расчетов, полученные разными методами, сравнивались между собой, а также сравнивались с экспериментальными данными [6, 7], расхождение экспериментальных и расчетных локальных значений скорости и температуры не превосходило 2-3% (рис.5).

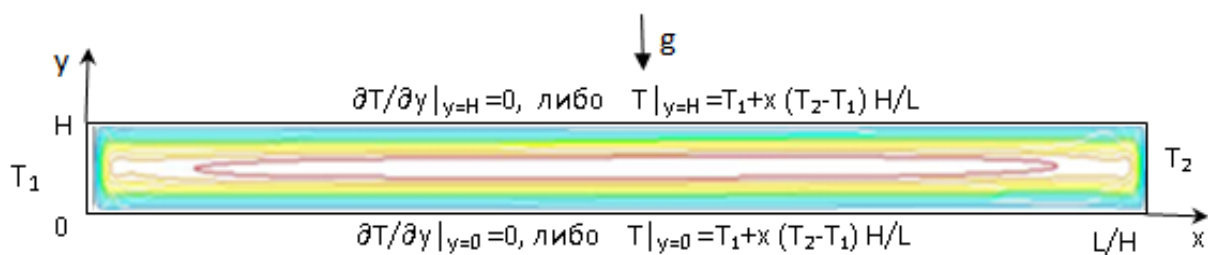


Рис.1. Схема расчетной области, граничные условия и изолинии функции тока одно вихревого течения при малом числе Рэлея.

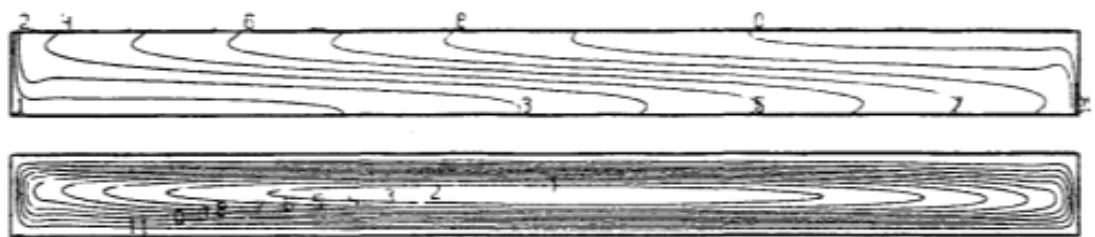


Рис. 2. Изотермы (вверху) и изолинии функции тока (внизу) при  $Ra=2 \cdot 10^5$ ,  $Pr= 5.8$ ,  $L/H=12.71$ ,  $(\partial T/\partial y|_{y=0, H=0} =0)$

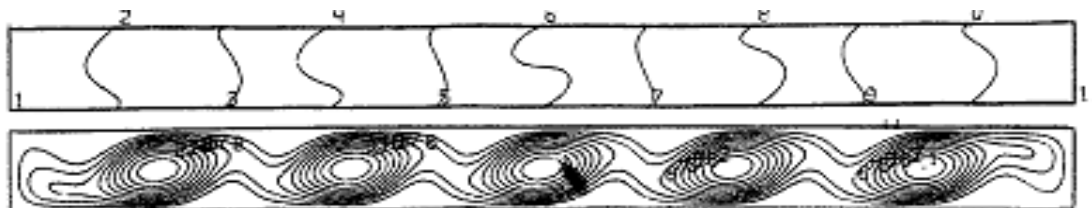


Рис. 3. Изотермы (вверху) и изолинии функции тока (внизу) при  $Ra=2 \cdot 10^5$ ,  $Pr= 0.01$ ,  $L/H=12.71$  ( $T|_{y=0, y=H}=T_1+x(T_2-T_1)H/L$ ).

При числах Прандтля меньше единицы толщина температурного слоя становится больше динамического, а при фиксированном профиле температуры на горизонтальных границах структура течения приобретает многоячейковый характер, как изображено на рис.3. Показано, что изменение структуры течения влияет на тепломассоперенос вдоль слоя.

Влияние числа Рэлея на структуру течения при одинаковых параметрах можно увидеть, сравнив результаты моделирования для воды при  $Ra=2 \cdot 10^5$  (рис.2) и при

$Ra=5.8 \cdot 10^8$  (рис.4, 5). При  $Ra=2 \cdot 10^5$  течение имеет одновихревую структуру, которая начинает меняться при  $Ra > 10^6$  с образованием противотоков внутри слоя. При увеличении числа Рэлея интенсивность и количество вторичных течений в центре слоя (противотоков) увеличивается.

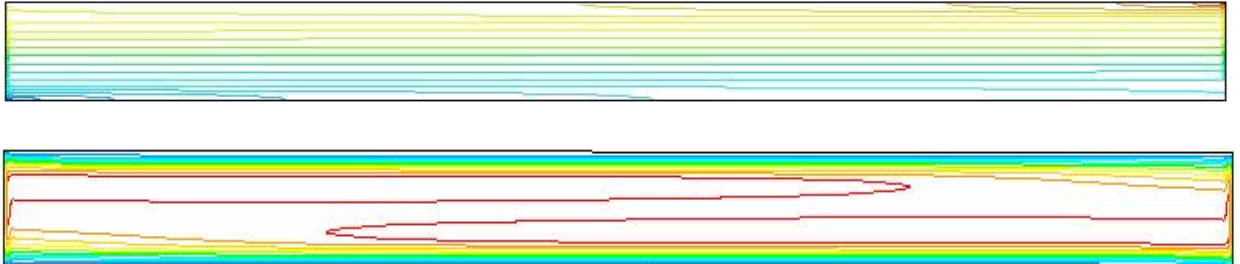


Рис. 4. Изотермы (вверху) и изолинии функции тока (внизу) при  $Ra=5.8 \cdot 10^8$ ,  $Pr=5.8$ ,  $L/H=12.71$ ,  $(\partial T/\partial y|_{y=0, H=0} = 0)$

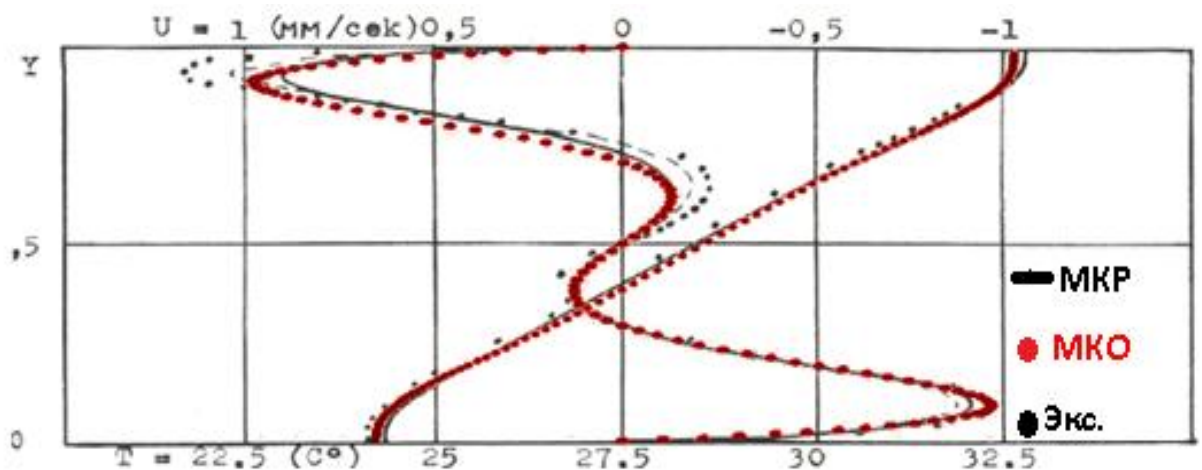


Рис.5. Профили скорости и температуры в среднем вертикальном сечении, полученные методами МКР и МКО в сравнении с экспериментальными данными [6] ( $Ra=1.2 \cdot 10^8$ ,  $Pr=5.8$ ,  $L/H=12.71$ ),  $(\partial T/\partial y|_{y=0, H=0} = 0)$ .

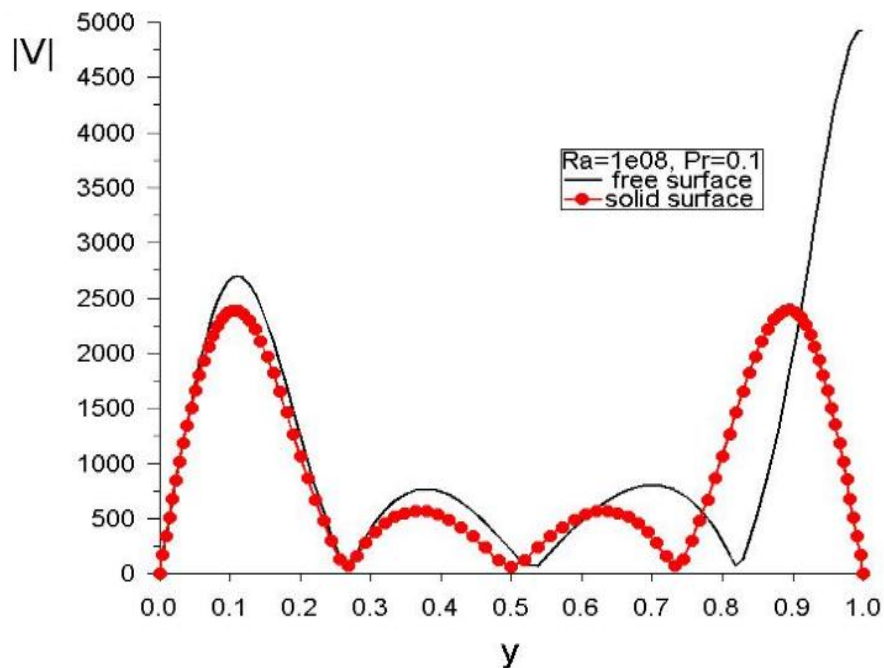


Рис.6. Профили модуля скорости в среднем вертикальном сечении при свободной и твердой верхней поверхности слоя, ( $Ra=1.7 \cdot 10^7$ ,  $Pr= 0.1$ ,  $L/H=12.71$ ),

$$(\partial T/\partial y|_{y=0, H=0} = 0).$$

Если горизонтальная граница свободная, это сказывается на симметричности течения в слое, но не оказывает влияния на появление вторичных течений. На рис. 6 представлены профили безразмерных модулей скоростей в среднем вертикальном сечении для случаев свободной (сплошная черная линия) и твердой верхней границы (красная линия с маркером), ( $Ra=10^8$ ,  $Pr= 0.1$ ,  $L/H=12.71$ ) при теплоизолированных горизонтальных границах. Противотоки существуют и при наличии свободной границы и в жидкостях с малыми числами Прандтля.

## 2. Влияние вибраций на ширину пограничного слоя

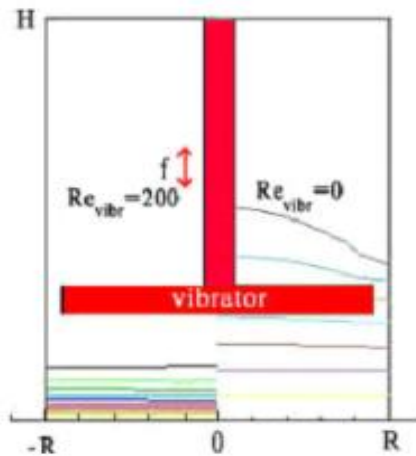


Рис. 7. Изотермы в

расплаве  $\text{NaNO}_3$  ( $Pr=5.43$ )

(справа – без вибраций, слева -

с вибрациями  $Re_{vibr}=200$ )

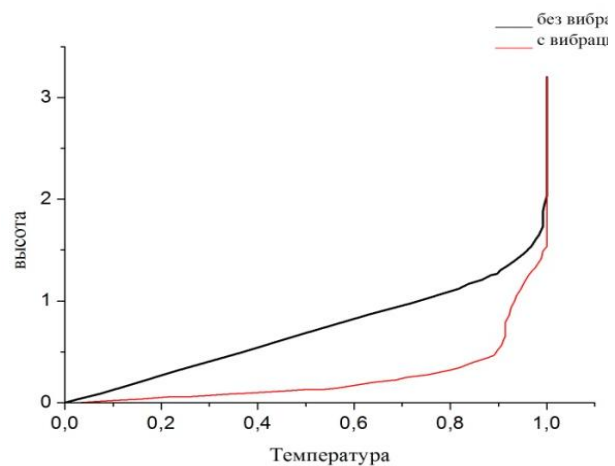
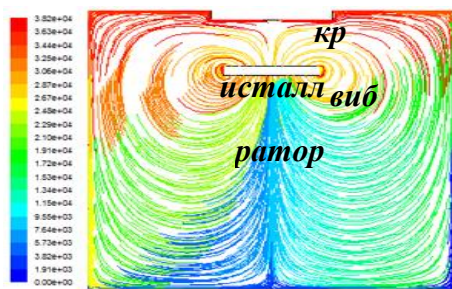


Рис. 8. Вертикальные профили

температуры ( $\Gamma=0.75$ ) в расплаве  $\text{NaNO}_3$

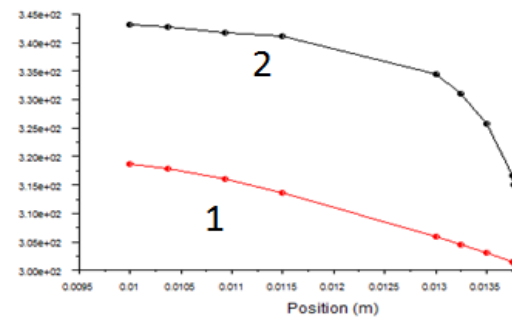
( $Pr=5.43$ ) (линия 1 – без вибраций, 2 - с

вибрациями  $Re_{vibr}=200$ )



а)

е  
м  
п  
е  
р  
а  
т  
у  
р  
а

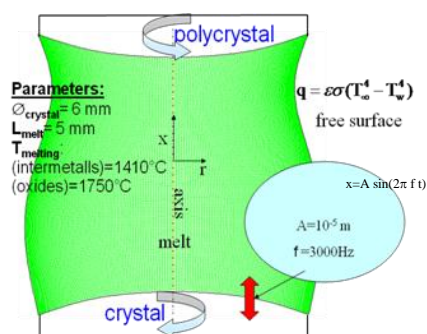


б)

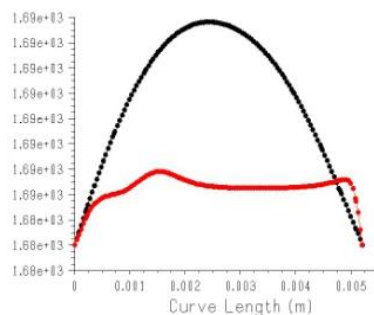
Рис. 9. Метод Чохральского ( $A=0.4\text{мм}$ ,  $f=20\text{Гц}$ )

а) - треки течения расплава на момент  $400T=20\text{сек}$ . б) - вертикальные профили температуры между кристаллом и вибратором (1 - без вибраций, 2 - с вибрациями)





а)



б)

Рис. 10 . Метод зонной плавки кремния ( $A=0.01\text{mm}$ ,  $f= 3000\text{Hz}$ )

а) – схема модели. б) – вертикальные профили температуры ( $r=0.5 R$ ) (1 - без вибраций, 2 - с вибрациями)

Изучение воздействия вибраций на жидкие среды проводится около 200 лет и из-за важности и многообразия гидродинамических явлений, возникающих при вибрационных воздействиях, данные исследования актуальны до настоящего времени.

В данной работе обобщаются результаты математического моделирования конвективного теплопереноса, и анализ влияния вибраций на динамические и тепловые пограничные слои в расплавах и на форму фронта кристаллизации при выращивании монокристаллов методами Бриджмена, Чохральского и плавающей зоны. Рассмотрены управляемые гармонические вибрационные воздействия на расплав, создаваемые либо частью границы этого жидкого объема или погруженным в расплав вибратором, с учетом и без учета следующих факторов: излучения, вращения, гравитационной и термокапиллярной конвекции. Подробные постановки задач описаны в работах [8-10]. Показано, что вибрации могут интенсифицировать

перемешивание, тепломассообмен в расплаве, а также выглаживать фронт кристаллизации, и уменьшать толщины пограничных слоев.

На рис. 7 и рис.8 показаны изотермы и профили температуры в расплаве  $\text{NaNO}_3$  ( $Pr=5.43$  – число Прандтля) (в правых частях рисунков – без вибраций, в левых – с вибрациями  $Re_{vibr}=200$ , где  $Re_{vibr}=A\omega R/\nu$  – число Рейнольдса вибрационное,  $A$  – амплитуда,  $\omega=2\pi f$  и  $f$  – частоты,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $R$  – радиус кристалла). На рис. 9 и рис.10 показаны вертикальные профили температуры для метода Чохральского и зонной плавки с воздействием и без воздействия вибраций на расплав. Результаты для метода Бриджмена (рис. 7,8), Чохральского (рис.9) и зонной плавки (рис.10) показано уменьшение толщин пограничных слоев для разных вариантов вибрационного воздействия, разных конфигураций расположения вибратора, свойств жидкостей [8], что подтверждает общую закономерность данного факта.

### **3. Влияние вибраций на форму фронта кристаллизации**

На рис. 11 для  $\text{NaNO}_3$  (а,б) и для воды (в, г) показано влияние на форму фронта кристаллизации вибраций. Результаты математического моделирования показали, что вибрационным воздействием возможно получать более плоский фронт кристаллизации при выращивании кристаллов методом Бриджмена с погруженным вибратором.

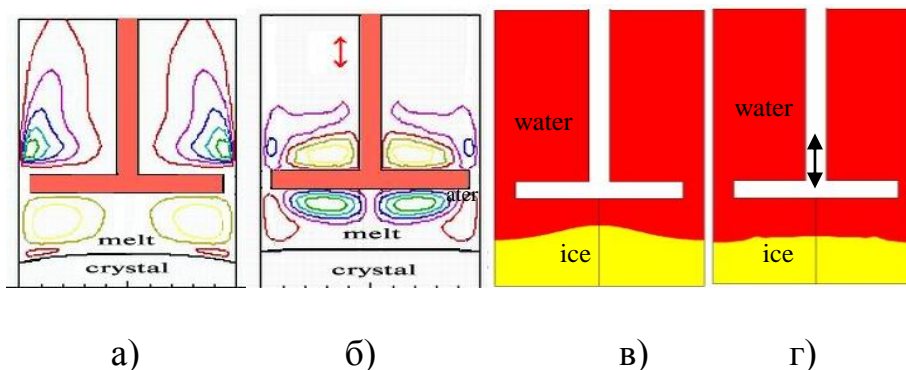


Рис 11 Метод Бриджмена с погруженным вибратором (задача Стефана)

а), б) – функция тока ( $\text{NaNO}_3$ ), а) -  $f=0$ , б) - с вибрациями ( $A=0.1\text{mm}$ ,  $f=50\text{Hz}$ ),  
 в), г) – граница раздела фаз вода-лёд, в) –  $f=0$ , г) – с вибрациями, ( $A=0.1\text{mm}$ ,  $f=30\text{Hz}$ )

#### 4. Нарушение симметрии стационарного течения в плоском диффузоре в невесомости

Рассматривается ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости течение между в плоском диффузоре (рис. 12). Целью данного численного моделирования является определение диапазонов существования несимметричных стационарных течений. Другие режимы течения в более широком диапазоне чисел Рейнольдса рассмотрен в работах [11, 12].



Рис. 12. Схема расчетной области и сетка для плоского диффузора с углом раствора  $\beta=4^\circ$  и длиной 0.495 метра

Геометрическая модель диффузора следующая: угол раствора диффузора равен  $\beta=4^\circ$ , входная граница имеет форму дуги  $l_{in}$ , выходная граница имеет форму в виде дуги  $l_{out}$ . Длина диффузора составляет  $L=r_{out}-r_{in}=0.495$  м.

Моделирование задачи осуществляется на основе численного решения системы нестационарных уравнений Навье–Стокса для несжимаемой вязкой жидкости. В качестве граничных условий, на входе в диффузор  $l_{in}$  (на расстоянии от начала координат  $r_{in}=0.005$  м), задан постоянный положительный расход  $Q$ , на выходе  $l_{out}$  (на расстоянии от начала координат  $r_{out}=0.5$  м) задано давление  $P=0$ , на верхней и нижней границах для скорости ставится условие прилипания:  $V=0$ . Начальные значения скорости и давления были нулевые. Численные решения анализировались на стационарном или на установившемся колебательном режиме течения. Число Рейнольдса на входе в диффузор определено, как  $Re=U_{in}l_{in}/\nu$ , где  $l_{in}$  – длина дуги, а  $U_{in}$  – скорость на входе в диффузор, направленная по нормали к границе, соответствующая расходу  $Q$ . Дискретизация двумерных уравнений Навье–Стокса осуществлялась методом контрольных объёмов, второго и третьего порядка точности. На рис. 12 показана схема расчетной области и одна из используемых в данных расчетах, неравномерная, расчетная сетка с числом узлов не менее  $10^5$ , со сгущением около входной границы и продольных стенок диффузора.

Результаты расчетов, установившихся стационарных несимметричных течений представлены на рис. 13 и рис. 14. Эти результаты подтверждают то, что при  $Re>Re^*$  происходит нарушение симметрии в структуре течения, кроме этого у стенок образуются вихревые структуры с возвратными течениями, как это известно

из литературы. Численные расчеты показали, что при увеличении значения числа Рейнольдса выше критического  $Re > 269$  происходит срыв пограничного слоя и на определенном расстоянии от входа в диффузор, вблизи продольных стенок диффузора формируются слабые вторичные возвратные течения. В данных областях вектор скорости меняет направление, возникают дополнительные составляющие у азимутальных компонент скорости, нарушающие симметрию потока, заданную на входе в диффузор (во всех расчетах на входе в диффузор задавался постоянный поток по нормали к дуге  $l_{in}$ ). По длине диффузора структура течения изменяется, перестраиваясь от одно-модового к много-модовому несимметричному течению (рис. 14), о наличии которых говорилось в работах [13, 14]. Данное течение может оставаться стационарным до определенного критического значения числа Рейнольдса, зависящего от угла раствора диффузора. Численные расчеты показали, что течение в диффузоре для  $\beta = 4^\circ$  перестает быть симметричным, оставаясь стационарным в узком диапазоне чисел Рейнольдса  $349 > Re > 279$ . В данном диапазоне чисел Рейнольдса результаты расчетов согласуются с аналитическими решениями работы [14]. На рис. 13 представлены стационарные изолинии горизонтальной компоненты для числа Рейнольдса  $Re = 279$  из которого видно нарушение симметрии течения и остаются неизменными во времени, при этом сохраняется несимметричность потока.

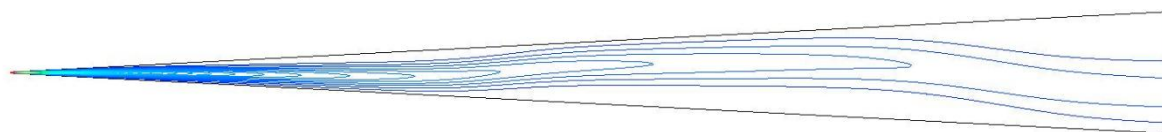


Рис. 13. Изолинии горизонтальной компоненты скорости  $Re = 279$

На стенках диффузора существуют участки с очень слабыми вторичными возвратными вихрями (рис. 13). Об асимметрии течения нагляднее говорят профили компонент вектора скорости, изображенные на рис. 14 для различных поперечных сечений ( $r=0.1, 0.2, 0.3$  и  $0.4$  м) для числа Рейнольдса  $Re = 279$ . Следует отметить, что изменение направления вектора скорости от радиального происходит в основном только в пристеночных областях и вдали от входа в диффузор (рис. 13).

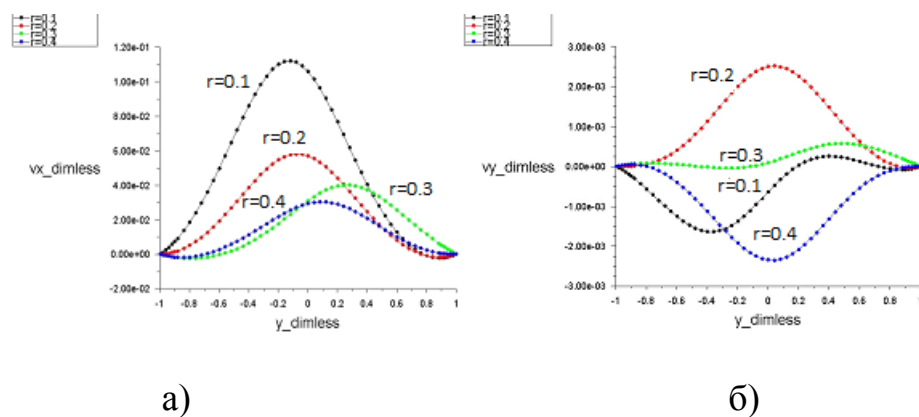


Рис. 14. Безразмерные профили горизонтальных (а) и вертикальных (б) компонент вектора скорости для  $Re = 279$  (в сечениях:  $r = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  м).

На рис. 14 показаны безразмерные профили компонент вектора скорости для воздуха  $Re = 279$  и для воды  $Re = 299$  в четырех вертикальных сечениях:  $r = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  м. Данные профили не изменяются во времени, хотя не являются симметричными. Данные результаты говорят о существовании стационарных несимметричных течений в диффузоре при указанных числах Рейнольдса.

## 5. Изменение границы раздела при термокапиллярной конвекции

В работе на основе численного моделирования показано влияние термокапиллярной, гравитационной конвекций на деформацию границы раздела в

двухслойной системе "воздух-вода" при внезапном нагреве. Математическая модель основана на системе уравнений Навье-Стокса для двухфазной системы «газ-жидкость» (рис.15а). Моделирование изменения формы границы раздела «газ-жидкость» выполнялось, используя модель жидких объемов (*VOF – Volume Of Fluid метод*) с использованием подробных динамических сеток.

При мгновенном изменении разницы температур между вертикальными стенками, на поверхности раздела возникает термокапиллярная конвекция. На рис. 15а показаны положение границы «воздух - вода» в момент времени  $t=5$  сек ( $Ma = 10^6$ ,  $Ra=0$ ). Вследствие этого поверхность раздела искривляется и осциллирует во времени. Воздух и вода прогреваются. Следует отметить тот факт, что данный режим является неустойчивым, и поскольку отсутствуют сила тяжести и сила напряжения на всех боковых стенках области, то при малейших возмущениях поверхность раздела может изменить положение (от горизонтального до вертикального). На рис. 15б,в показаны изменения поверхности на квазистационарном режиме в моменты времени: б)  $t=13$ сек, в)  $t=15.9$ сек.

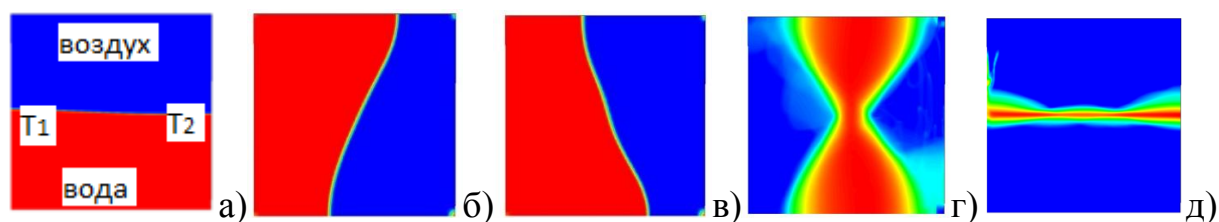


Рис. 15. а) Схема расчетной области и форма интерфейса «воздух-вода» в разные моменты времени ( $Ma = 10^6$ ,  $Ra=0$ ): а)  $t=5$  сек б)  $t=13$ сек, в)  $t=15.9$ сек; г-д) - изолинии осреднённых по времени максимумов среднеквадратичных отклонений от среднего положения интерфейса: (г)  $Ra = 0$ ,  $t=15$ сек, д)  $Ra = 10^7$ ,  $t=5$ сек).

Следует отметить, что гравитационная конвекция ( $Ra = 10^7$ ) при наличии термокапиллярной конвекции ( $Ma = 10^6$ ), обладает стабилизирующим фактором для положения свободной границы. На рис. 15г,д показаны статистические данные в виде изолиний максимальных по пространству среднеквадратичных отклонений изменения поверхности раздела от среднего для двух случаев: г) -  $Ra = 0$  и д) -  $Ra = 10^7$  (осреднённые по времени за первые 15сек (а) и 5 сек (б), соответственно). На рис.15г,д видны диапазоны отклонений поверхности от среднестатистических положений поверхности раздела.

### **Заключение**

На примерах пяти различных гидродинамических задач показано существование стационарных (или квазистационарных) режимов ламинарных течений, у которых структуры и характеристики нелинейно зависят от величин определяющих параметров и существенно отличаются от аналитических решений, не учитывающих нелинейные особенности течений. Аналогов нет.

*Данная работа выполнена по теме государственного задания № госрегистрации*

*АААА-А17-117021310375-7.*

### **Библиографический список**

1. Полежаев В.И. Федюшкин А.И. Гидродинамические эффекты концентрационного расслоения в замкнутых объемах // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1980. № 3. С. 11 - 18.



2. Nikitin S.A., Polezhaev V.I. Fediushkin A.I. Mathematical simulation of impurity distribution in space processing experiments with semiconductors // *Advances in Space Research*, 1981, vol. 1, pp. 37 - 40.
3. Пшеничников А.Ф. Пинягин А.Ю., Полежаев В.И. и др. Термоконцентрационная конвекция в прямоугольной области при боковых потоках тепла и массы. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. - 53 с.
4. Полежаев В.И. и др. Конвективные процессы в невесомости. - М.: Наука, 1991. – 240 с.
5. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. - М.: Наука, 1972. – 392 с.
6. Кирдяшкин А.Г. Полежаев В.И., Федюшкин А.И. Тепловая конвекция в горизонтальном слое при боковом подводе тепла. *Гидроаэромеханика и космические исследования*. - М.: Наука, 1985. С. 170 - 187.
7. Кирдяшкин А.Г., Полежаев В.И., Федюшкин А.И. Тепловая конвекция в горизонтальном слое при боковом подводе тепла // *Прикладная механика и техническая физика*. 1983. № 6. С. 122 - 128.
8. Федюшкин А.И., Иванов К.А. Гидродинамика и теплообмен при вибрационных воздействиях на расплав в процессах выращивания монокристаллов. – М: ИПРИМ РАН, 2014. - 107 с.
9. Fedyushkin A., Borago N., Polezhayev V., Zharikov Ye. The influence of vibration on hydrodynamics and heat-mass transfer during crystal growth // *Journal of Crystal Growth*, 2005, vol. 275, pp. 1557 - 1563.

10. Fedyushkin A. The gravitation, rotation and vibration - controlling factors of the convection and heat – mass transfer // Proc. Of 4th International Conference on Computational Heat and Mass Transfer (ICCHMT 2005), Paris, FRANCE, 2005, pp. 948 - 951.
11. Федюшкин А.И. Течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском диффузоре: переход от симметричного к несимметричному и от стационарного к нестационарным режимам течения. - М.: ИПРИМ РАН, 2014. - 42 с.
12. Федюшкин А.И. Переход течений вязкой несжимаемой жидкости в плоском диффузоре от симметричного к несимметричному и к нестационарному режимам // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2016. Т. 17. URL: <http://chemphys.edu.ru/issues/2016-17-3/articles/638/>
13. Пухначев В.В. Симметрии в уравнениях Навье-Стокса // Успехи механики. 2006. Т. 4, № 1. С. 6 – 76.
14. Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакшев С.А. Регулярно продолжаемые по числу Рейнольдса решения задачи Джефффри – Гамеля // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2004. № 1. С. 15 – 32.
15. Пивоваров Д.Е. Численное исследование конвективного теплообмена в наклонном продольном слое воздуха // Труды МАИ. 2013. № 68. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=41694>
16. Polezhaev V.I., Myakshina M.N., Nikitin S.A. Heat transfer due to buoyancy-driven convective interaction in enclosures: Fundamentals and applications // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2012, vol. 55, no. 1–3, pp. 156 – 165.

17. Graaf J.D., Held E.V.D. The relation between the heat transfer and the convection phenomena in enclosed plane air layers // Applied Scientific Research, 1953, vol. 3, no. 6, pp. 393 – 409.
18. Котельников В.А., Котельников М.В., Платонов М.А. Эффузия нейтрального газа в вакуум // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=93312>
19. Лебедев Р.В., Лившиц С.А. Стационарное течение реологически сложной жидкости в бесконечном щелевом канале // Труды МАИ. 2011. № 44. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=25016>
20. Arnold J.N., Catton I., Edwards D.K. Experimental Investigation of Natural Convection in Inclined Rectangular Regions of Differing Aspect Ratios // Journal of Heat Transfer, 1976, vol. 98, no.1, pp. 67 – 71.
21. Buchberg H., Catton I., Edwards D.K. Natural Convection in Enclosed Spaces - A Review of Application to Solar Energy Collection // Journal of Heat Transfer, 1976, vol. 98, no. 2, pp. 182 – 188.
22. Inaba H., Fukuda T. An Experimental Study of Natural Convection in an Inclined Rectangular Cavity Filled With Water at Its Density Extremum // Journal of Heat Transfer, 1984, vol. 106, no.1, pp. 109 – 115.
23. Symons J.G., Peck M.K. Natural Convection Heat Transfer Through Inclined Longitudinal Slots // Journal of Heat Transfer, 1984, vol. 106, no. 4, pp. 824 – 829.
24. Ozoë H., Sayama H., Churchill S.W. Natural convection patterns in a long inclined rectangular box heated from below: Part I. Three-directional photography // International Journal of Heat and Mass Transfer, 1977, vol. 20, no. 2, pp. 123 – 129.

25. Azwadi C.S.N., Fairus M.Y.M., Syahrullail S. Virtual Study of Natural Convection Heat Transfer in an Inclined Square Cavity // Journal of Applied Sciences, 2010, vol. 10, no. 4, pp. 331 – 336.
26. Munir F.A., Sidik N.A.C., Ibrahim N.I.N. Numerical Simulation of Natural Convection in an Inclined Square Cavity // Journal of Applied Sciences, 2011, vol. 11, no. 2, pp. 373 – 378.