

## **Математическое моделирование отрывных и нестационарных течений**

С.А. Попов

*В статье обоснована необходимость применения 13-моментной системы уравнений Г.Грэда для описания нестационарных течений вязкого теплопроводного газа. Приведены сравнительные результаты численного решения задачи о поперечном обтекании кругового цилиндра на основе уравнений Навье-Стокса и Грэда. Выдвинута гипотеза об отсутствии различных веток решения уравнений Грэда.*

В последние годы главное направление исследований в области вычислительной гидродинамики сосредоточено на моделировании нестационарных течений вязкого теплопроводного газа без использования каких-либо моделей турбулентности. Изучение этого класса течений имеет большую самостоятельную научную ценность, поскольку позволяет разобраться в физических механизмах переходных процессов внутри газовых потоков. Знание этих механизмов, в свою очередь, может быть использовано в других областях динамики газа и жидкости, например, при создании новых математических моделей турбулентности. К таким течениям можно отнести формирование приведенного в движение потока около неподвижного тела, качественное изменение характера течения за телом с образованием организованного движения, имеющего периодический характер, разрушение нестационарного периодического движения и т.п.

Интерес в этой области стимулируется значительной практической необходимостью, а также существенным прогрессом в области создания быстродействующих компьютеров очередного нового поколения. В связи с этим ведутся разработки, как новых моделей, так и новых подходов к численному решению, пригодных для описания этого класса течений. Однако в настоящее время моменты при которых происходят качественные изменения характера решений определяются не достаточно точно, а достоверность получаемых результатов вызывает значительные сомнения, когда речь идет о образовании вторичных вихревых структур в периодических нестационарных потоках.

### **Уровни описания газовых потоков**

Изучать течение газа, его взаимодействие с обтекаемыми поверхностями, можно на различных уровнях описания, в частности, на молекулярном, кинетическом либо на газодинамическом уровне [1]. Каждый из подходов имеет право на существование, но в то же время применим для своего ограниченного круга задач.

Молекулярный уровень описания, основанный на законах классической или квантовой механики, требует невероятных вычислительных ресурсов и является излишне полным. К тому же на этом уровне имеется проблема, связанная с заданием начальных данных.

В основе кинетического уровня описания лежит интегро-дифференциальное уравнение Л.Больцмана [2] для так называемой одночастичной функции распределения молекул газа по скоростям  $f(\vec{r}, \vec{\xi}, t)$ . Характеристики этого уравнения чрезвычайно просты, а для интегральной части уравнения могут быть использованы надежные методы численного интегрирования, например метод трапеций или формула Симпсона. Многомерность функции распределения и необходимость интегрирования этого уравнения с очень малым шагом по пространству (порядка длины свободного пробега молекул  $\sim 10^{-5}$  см) сводит все перечисленные преимущества на нет. Тем не менее, в ВЦ РАН были разработаны как регулярные, так и статистические [3, 4] методы решения кинетического уравнения Больцмана. Мы остановимся только на рассмотрении регулярных методов. В области больших и умеренных чисел Кнудсена применимо прямое численное интегрирование уравнения Больцмана [5, 6, 7] и его моделей [8, 9]. В других работах [10, 11] изложен метод решения кинетического уравнения, имеющий применение при малых числах Кнудсена. Все перечисленные методы требуют больших объемов оперативной памяти RAM и высокой скорости выполнения арифметических операций. Поэтому эти методы до сих пор не получили широкого распространения в инженерной практике. Зато с помощью применения асимптотических и моментных методов уравнение Больцмана сводится к более простым уравнениям.

Асимптотические методы основаны на разложении функции распределения по некоторому малому параметру и применимы в двух крайних случаях: когда этот параметр очень мал [12], либо когда он очень велик. Известны два классических варианта этих методов, в которых роль малого параметра играет число Кнудсена  $Kn$ . Это метод Гильберта и метод Чепмена - Энскога. В методе Гильберта [13] последовательность функций разложения  $f^n$  можно вычислить поочередно при помощи алгоритма, состоящего из цепочки решений некоторого интегрального уравнения Фредгольма и неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных типа гидродинамических уравнений Эйлера. В методе Чепмена - Энскога [12, 14] функцию распределения  $f$  вычисляют как функционал гидродинамических переменных. Затем при помощи этой функции определяют напряжения и поток тепла также в виде функционалов гидродинамических переменных и получают последовательность гидродинамических уравнений высшего порядка, т.е. уравнений Эйлера, Навье-Стокса, Барнетта и т.д. Однако при использовании любых уравнений этой последовательности встает довольно тонкий вопрос о конечных скоростях

распространения звуковых возмущений. В настоящее время асимптотическая теория находит свое применение в различных численных методах решения уравнения Больцмана.

Моментные методы основаны на использовании общего уравнения переноса и разложении функции распределения по полиномам [15]. Подставляя в общее уравнение переноса различные молекулярные признаки, получают бесконечную цепочку моментных уравнений. Выбор полиномов связан, главным образом, с математическими удобствами. Если пользоваться декартовой системой координат, скоростей молекул, то более всего подходят полиномы Эрмита, в полярной системе скоростных координат более удобным оказывается разложение по полиномам Сонина. Чтобы получить замкнутую систему с конечным числом уравнений, приходится аппроксимировать функцию распределения конечным числом членов ряда. Ограничиваясь членами третьего порядка, получают так называемое двадцатимоментное приближение, поскольку аппроксимирующая функция содержит двадцать моментов, не все из которых имеют ясный физический смысл. Представляя в функции распределения моменты третьего порядка в виде их свертки по двум индексам, получают тринадцатимоментную систему уравнений Г.Грэда. Моментные методы наиболее универсальны и имеют, вероятно, более широкий диапазон применимости, поскольку позволяют в принципе замкнуть систему макроскопических уравнений при произвольных числах Кнудсена  $Kn$ . Эта теория находит ограниченное применение в различных численных методах, только на уровне законов сохранения, т.е. не далее чем для консервативных гидродинамических параметров. Полная система моментных уравнений в виду их чрезвычайной сложности до сих пор не использовалась.

Газодинамический уровень описания основан на модели сплошной среды, согласно которой газ ведет себя как континуум [1], а его математическое описание дается зависимостями макроскопических характеристик от координат и времени. Основными уравнениями этого уровня в настоящее время считаются уравнения Навье-Стокса. Эти уравнения надежно зарекомендовали себя при решении огромного множества задач. Прогресс в создании разностных методов и схем для решения уравнений Эйлера и Навье – Стокса очевиден. С середины прошлого века эта область сформировалась в самостоятельную отрасль знания: - CFD (Computational Fluid Dynamics – вычислительная гидромеханика). В ее рамках разрабатывались самые передовые разностные схемы, которые использовались в других областях, например в кинетической теории газов. К настоящему моменту имеется большое количество литературы по CFD, в том числе описывающей современное состояние вопроса [16, 17]. Так исторически сложилось, что развитие схем для решения уравнений вязкой газовой динамики шло по двум основным направлениям. Первый путь проходил через решение уравнений Эйлера [18] к уравнениям Навье - Стокса. Поэтому он может быть назван газодинамическим путем. Второй путь шел от решения уравнений Н-С для несжимаемой среды к моделям слабосжимаемых сред. Этот путь, по сути, может быть назван

гидродинамическим. Пути существенно различаются, но оба находят достойное применение. Остановим наше внимание только на первом пути. В его рамках обобщение на случай уравнений Навье – Стокса осуществляется добавлением к уравнениям Эйлера вязких членов с их последующей независимой от конвективных членов разностной аппроксимацией. Могут использоваться, например, симметричные разностные аппроксимации второго порядка точности, как явные, так и неявные [16].

Однако при описании течений на гидродинамическом уровне имеется ряд особенностей. Прежде всего, обратимся к закону трения Стокса, первоначально носившему эмпирический характер. Позднее этот закон был получен более строгим путем из основного кинетического уравнения на основе асимптотической теории. А в этой теории имеет место довольно тонкий вопрос о конечных скоростях распространения звука. Диффузия типа Навье-Стокса маскирует конечную скорость его распространения [12]. Сложность этого закона в настоящее время не дает возможности его полной проверки для всех возможных режимов течения. Здесь и далее речь идет только о нестационарных процессах, ибо в установившихся потоках сплошной среды (числа Кнудсена  $Kn \leq 0.01$ ) справедливость этого закона вне всяких сомнений [19]. Тем не менее, именно закон Стокса, как будет показано в следующем разделе, посвященном анализу характеристик систем дифференциальных уравнений, приводит к нарушению общего физического принципа причинности [20]. Принцип причинности устанавливает в физике причинно-следственную связь между явлениями и допустимыми пределами влияния физических событий друг на друга. Он исключает влияние данного события на все происшедшие, а также требует отсутствия взаимного влияния событий, пространственное расстояние между которыми столь велико, а временной интервал между ними столь мал, что они не могут быть связаны сигналом (в газовой динамике звуковым).

Наша работа имеет цель устранить нарушение принципа причинности при описании нестационарных течений на газодинамическом уровне. С другой стороны нельзя не отметить существующее белое пятно, имеющее место на стыке кинетического и газодинамического уровней описания течений вязкого газа. Оба недостатка устранимы, если в качестве основных уравнений газодинамического уровня принять тринадцатимоментное приближение Г.Грэда. На основе анализа широкого спектра характеристических методов, нами разработан новый обобщенный метод решения гиперболических систем дифференциальных уравнений любой степени сложности [21]. Этот метод основан на аппроксимации соотношений между полными дифференциалами газодинамических переменных. Разработанный метод был применен к решению уравнений Г.Грэда.

## Анализ характеристик уравнений Навье-Стокса, Эйлера и Грэда

В качестве первой системы уравнений, описывающих движение вязкого газа, могут быть рассмотрены общие нестационарные уравнения Навье-Стокса (Н-С). Для дальнейшего анализа запишем эту систему в переменных  $\rho, u, v, p$ , в случае 2D в матричной форме:

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{Q}}{\partial x} + B \frac{\partial \vec{Q}}{\partial y} = \vec{H}, \quad (1)$$

где  $\vec{Q}$  и  $\vec{H}$  - векторы независимых переменных и правых частей уравнений,  $A$  и  $B$  - так называемые Якобиевы матрицы коэффициентов:

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ q_x \\ q_y \end{bmatrix}; \quad \vec{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_x \\ f_y \\ uf_x + vf_y \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ q_x \\ q_y \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & \frac{1}{\rho} & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma p - (\gamma - 1)\tau_{xx} & (\gamma - 1)\tau_{xy} & u & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{kT}{\rho} & 0 & 0 & -\frac{k}{R\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (2)$$

$$B = \begin{bmatrix} v & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & (\gamma-1)\tau_{xy} & \gamma p - (\gamma-1)\tau_{yy} & v & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{kT}{\rho} & 0 & 0 & -\frac{k}{R\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

На самом деле 2D случай не ограничивает общности дальнейшего анализа. В этой системе давление  $P$ , плотность  $\rho$  и температура  $T$  связаны уравнением состояния:

$$p = \rho RT,$$

$R$  - универсальная газовая постоянная, компоненты тензора напряжений  $\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{bmatrix}$  связаны с компонентами тензора скоростей деформации через закон трения Стокса, а компоненты вектора теплового потока  $\vec{q}$  связаны с градиентом температуры  $\vec{\nabla}T$  через закон Фурье. Здесь и далее  $\mathbf{u}$ ,

$\mathbf{v}$  - компоненты вектора скорости  $\vec{v} = \vec{i}u + \vec{j}v$ ,  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  - отношение удельных теплоемкостей,  $\mu$  - коэффициент динамической вязкости и  $k$  - коэффициент теплопроводности. В приведенной форме записи уравнения Н-С представляют собой систему квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка с тремя независимыми переменными. Элементы матриц  $A$  и  $B$ , а также компоненты вектора  $\vec{H}$  здесь суть функции от  $x, y, t$  и компонент вектора  $\vec{Q}$ .

Постановка задачи Коши [22] приводит к следующей характеристической форме  $Q = |-\lambda L + n_x A + n_y B|$  для уравнений Н-С:

$$\begin{vmatrix}
-\lambda + un_x + vn_y & \rho n_x & \rho n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\lambda + un_x + vn_y & 0 & \frac{n_x}{\rho} & -\frac{n_x}{\rho} & -\frac{n_y}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\lambda + un_x + vn_y & \frac{n_y}{\rho} & 0 & -\frac{n_x}{\rho} & -\frac{n_y}{\rho} & 0 & 0 \\
0 & [\gamma p - (\gamma - 1)\tau_{xx}]n_x + (\gamma - 1)\tau_{xy}n_y & [\gamma p - (\gamma - 1)\tau_{yy}]n_y + (\gamma - 1)\tau_{xy}n_x & -\lambda + un_x + vn_y & 0 & 0 & 0 & n_x & n_y \\
0 & \frac{4\mu}{3}n_x & -\frac{2\mu}{3}n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mu n_y & \mu n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{2\mu}{3}n_x & \frac{4\mu}{3}n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{kT}{\rho}n_x & 0 & 0 & -\frac{k\rho}{R}n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{kT}{\rho}n_y & 0 & 0 & -\frac{k\rho}{R}n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix} = 0$$

Здесь  $\lambda = -\frac{\Phi_t}{n}$  - нормальная скорость перемещения кривой  $\varphi(x, y, t) = \psi(x, y) - t = 0$ ,  $\vec{\nabla}\varphi \neq 0$ ,  $n = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}$ , а  $(n_x, n_y)$  - единичный вектор нормали к этой кривой,  $L$  - некоторая диагональная матрица. Следует заметить, что поверхности  $S\{\varphi(x, y, t) = 0\}$  из пространства  $R_3$  можно рассматривать как движущиеся кривые  $\psi(x, y) = t$  в плоскости  $R_2$ . Хорошо видно, что эта характеристическая форма равна нулю тождественно, т.е. вне зависимости от вида поверхности  $S$ . Следовательно, для этих уравнений любая поверхность  $S$  является *характеристической*, а задача Коши либо не имеет решения, либо имеет бесконечно много решений. В том числе характеристиками уравнений Н-С являются и плоскости  $t = const$ . Скорость перемещения кривых, лежащих в плоскостях  $t = const$ , бесконечно велика.

В частном случае невязкой  $\mu = 0$  и нетеплопроводной  $k = 0$  среды уравнения Н-С (2) переходят в систему уравнений Эйлера, описывающую движение идеального газа. Приравняв нулю характеристическую форму этой системы, получают следующее характеристическое уравнение

$$(\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y)^2 \left[ (\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y)^2 - \frac{\gamma p}{\rho} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) \right] = 0. \quad (3)$$

Это дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка относительно неизвестной функции  $\varphi(x, y, t)$ . Характеристические поверхности  $S$ , являющиеся решением этого уравнения играют роль “фронта волны”, т.е. на этих поверхностях решения уравнения Эйлера могут претерпевать разрывы, например, разрыв вторых производных. На таких разрывах значения вторых производных различны с разных сторон поверхности. Так как на свободных

поверхностях вторые производные однозначно определяются данными Коши, то такая неоднозначность возможна только на характеристиках.

Такой “фронт волны”, например, возникает на границе, за которой в момент времени  $t$  нет возмущений. Решение, описывающее возмущение, тождественно обращается в нуль по одну сторону этой поверхности и не равно нулю по другую ее сторону.

Итак, характеристические поверхности  $S$  (с уравнением  $\varphi = 0$ ) в пространстве  $R_3$ , а также соответствующие им семейства кривых  $\psi(x, y) = t$  на плоскости  $R_2$  дают многообразия, на которых возможны разрывы, или фронты волны, связанные с движением среды. Например, полагая в уравнении (3)  $\varphi_t = \tau$ ,  $\varphi_x = \xi$ ,  $\varphi_y = \eta$ , мы можем получить характеристическую поверхность

$$\tau + u\xi + v\eta = 0, \quad (4)$$

отвечающую первому множителю этого уравнения. Соответствующая полость локального конуса нормалей с фиксированной вершиной, например  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = y_0 = 0$ , и при фиксированных значениях  $\rho, u, v, P$  в пространстве  $\xi, \eta, \tau$  является плоскостью. Проекция связанного с ней луча на плоскость  $R_2$  дает не что иное, как линию тока рассматриваемого течения. Сами лучи, которые в пространстве  $R_3$  задаются дифференциальными уравнениями  $\frac{dx}{dt} = u$ ,  $\frac{dy}{dt} = v$ , дают скорость течения одновременно с линией тока.

Второму множителю в уравнении (3) соответствует характеристическое многообразие

$$(\tau + u\xi + v\eta)^2 - \frac{\gamma P}{\rho} (\xi^2 + \eta^2) = 0, \quad (5)$$

т.е. квадратичная полость конуса нормалей. Направления лучей, или бихарактеристик, которые задаются отношением  $dt : dx : dy$ , снова представляют собой “скорости распространения” или лучевые скорости для разрывов. Лучи, на которых  $t$  является параметром, как легко проверить, удовлетворяют уравнению Монжа [22]

$$\left(\frac{dx}{dt} - u\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - v\right)^2 = \frac{\gamma P}{\rho}.$$

В гидродинамике величина  $\frac{\gamma P}{\rho}$  представляет собой скорость звука. Следовательно, это уравнение утверждает: относительная скорость распространения разрывов равна скорости звука.

В заключение необходимо сделать два замечания относительно рассмотренных систем уравнений Эйлера и Н-С. С математической точки зрения эти уравнения не попадают ни под один из известных типов дифференциальных уравнений. Уравнения Эйлера могут обладать вещественными, по крайней мере, в большей части пространства характеристиками. Но здесь имеет место наличие двух кратных характеристических поверхностей  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1^2 \mathcal{Q}_2 \mathcal{Q}_3$ . Поэтому под

определение *вполне гиперболической* системы [22] эти уравнения не подходят. Для уравнений Н-С все семейство поверхностей  $\Phi = const$  состоит из характеристик. Это является причиной того, как было показано выше, что скорость распространения возмущений бесконечно велика, что уже *противоречит общему принципу причинности*. Напротив, уравнения Эйлера, согласуясь с этим принципом, совсем лишены таких важных физических свойств как вязкость и теплопроводность. Естественно, возникает вопрос: существуют ли уравнения, учитывающие свойства реальной среды и в то же время удовлетворяющие этому важному физическому принципу?

В качестве другой системы уравнений, описывающей движение вязкого газа, могут быть приняты уравнения Г.Грэда [15]. Эти уравнения на основе метода моментов и разложения функции распределения по полиномам Эрмита были получены из основного кинетического уравнения газов Л.Больцмана. Не останавливаясь на подробностях их вывода, пренебрегая действием поля внешних сил  $X = Y = 0$ , запишем эту систему на случай 2D. Общий вид системы по-прежнему удовлетворяет матричному уравнению (1), но вектора независимых переменных и правых частей системы, а также матрицы коэффициентов выглядят намного сложнее:

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \\ p_{xx} \\ p_{xy} \\ p_{yy} \\ q_x \\ q_y \end{bmatrix}; \quad \bar{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{6\rho}{m} B_1^{(2)} p_{xx} \\ -\frac{6\rho}{m} B_1^{(2)} p_{xy} \\ -\frac{6\rho}{m} B_1^{(2)} p_{yy} \\ -\frac{2\rho}{m} B_1^{(2)} q_x \\ -\frac{2\rho}{m} B_1^{(2)} q_y \end{bmatrix}; \quad (6)$$

$$A = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & \frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3}p + \frac{2}{3}p_{xx} & \frac{2}{3}p_{xy} & u & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}p + \frac{7}{3}p_{xx} & -\frac{2}{3}p_{xy} & 0 & u & 0 & 0 & \frac{8}{15} & 0 \\ 0 & 2p_{xy} & p + p_{xx} & 0 & 0 & u & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & p_{yy} - \frac{2}{3}(p + p_{xx}) & \frac{4}{3}p_{xy} & 0 & 0 & 0 & u & -\frac{4}{15} & 0 \\ -\frac{p(5p+7p_{xx})}{2\rho^2} & \frac{16}{5}q_x & \frac{2}{5}q_y & \frac{5(p+p_{xx})}{2\rho} & \frac{p-p_{xx}}{\rho} & -\frac{p_{xy}}{\rho} & 0 & u & 0 \\ -\frac{7p}{2\rho^2}p_{xy} & \frac{7}{5}q_y & \frac{7}{5}q_x & \frac{5p_{xy}}{2\rho} & -\frac{p_{xy}}{\rho} & \frac{p-p_{yy}}{\rho} & 0 & 0 & u \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} v & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}p_{xy} & \frac{5}{3}p + \frac{2}{3}p_{yy} & v & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3}p_{xy} & p_{xx} - \frac{2}{3}(p + p_{yy}) & 0 & v & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{15} \\ 0 & p + p_{yy} & 2p_{xy} & 0 & 0 & v & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}p_{xy} & \frac{4}{3}p + \frac{7}{3}p_{yy} & 0 & 0 & 0 & v & 0 & \frac{8}{15} \\ -\frac{7p}{2\rho^2}p_{xy} & \frac{7}{5}q_y & \frac{7}{5}q_x & \frac{5p_{xy}}{2\rho} & 0 & \frac{p-p_{xx}}{\rho} & -\frac{p_{xy}}{\rho} & v & 0 \\ -\frac{p(5p+7p_{yy})}{2\rho^2} & \frac{2}{5}q_x & \frac{16}{5}q_y & \frac{5(p+p_{yy})}{2\rho} & 0 & -\frac{p_{xy}}{\rho} & \frac{p-p_{yy}}{\rho} & 0 & v \end{bmatrix}.$$

Здесь принято:  $q_i = \frac{1}{2}S_i$  и  $R = \frac{k}{m}$ . Параметр  $B_1^{(2)}$  может быть определен из совпадения решений систем уравнений Н-С и Грэда на решении задачи Куэтта  $B_1^{(2)} = \frac{m}{6\mu} \frac{p}{\rho}$ . Температура может быть определена из уравнения состояния:  $p = \rho RT$  идеального газа.

Для получения некоторых важных сведений о поведении решений этой системы уравнений также необходимо проанализировать свойства ее характеристик. Поверхностный анализ

чрезвычайно громоздкой характеристической формы этих уравнений показывает, что она тождественно не равна нулю и не содержит кратных множителей.

Чтобы иметь хоть какие-то сведения о характеристиках полной 2D системы уравнений Грэда, придадим системе координат соответствующее поступательное движение таким образом, чтобы обратить в нуль  $u$  и  $v$  в рассматриваемой точке, а соответствующим вращением добиться равенства нулю величины  $p_{xy}$ . Для упрощения задачи будем находить характеристики приближенно, считая напряжения и тепловой поток малыми. Точнее будем считать  $p_{ij}$  и  $q_i$  равными нулю, если только они не стоят под знаком производной. Поскольку оказывается, что корни при этом не теряются, упрощенная система имеет девять семейств характеристик, то худшее, на что можно рассчитывать при таком упрощении, это то, что два различных характеристических направления совпадут между собой. В других отношениях зависимость непрерывна. Система уравнений (6) при сделанных предположениях значительно упроститься. Ее характеристическое уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$\varphi_t^3 \left[ 25\varphi_t^6 - 165\varphi_t^4 \left( \varphi_x^2 + \varphi_y^2 \right) \frac{p}{\rho} + 257\varphi_t^2 \left( \varphi_x^2 + \varphi_y^2 \right)^2 \frac{p^2}{\rho^2} - 105 \left( \varphi_x^2 + \varphi_y^2 \right)^3 \frac{p^3}{\rho^3} \right] = 0.$$

Из которого для нормальной скорости распространения фронта волны возмущения (6) получим тройной корень  $\lambda = 0$ , три других значения определяются уравнением

$$25\lambda^6 - 165 \frac{p}{\rho} \lambda^4 + 257 \frac{p^2}{\rho^2} \lambda^2 - 105 \frac{p^3}{\rho^3} = 0,$$

откуда

$$\lambda^2 = \frac{7}{5} \frac{p}{\rho}; \quad \lambda^2 = \frac{1}{5} (13 \pm \sqrt{94}) \frac{p}{\rho}. \quad (7)$$

В произвольной системе координат, в которой  $u$  и  $v$  не равны нулю величину  $\lambda$  нужно заменить через  $-\lambda + n_x u + n_y v$ . Как и в случае уравнений Эйлера, характеристика  $\lambda = 0$  является траекторией жидкой частицы, которая в нашем случае 2D течений является еще дважды характеристикой. Помимо этого имеются еще три звуковые характеристики. Двум из них соответствуют звуковые скорости большие адиабатического значения для одноатомного газа

$\lambda^2 = \frac{5}{3} \frac{p}{\rho}$ , следующему из уравнений Эйлера. Третья звуковая скорость меньше этого значения. Из

того, что характеристики являются вещественными, по крайней мере, в большей части области течения, а также учитывая наличие кратных характеристик, можно сделать вывод о том, что уравнения Грэда по своим свойствам характеристик похожи на уравнения Эйлера. Это заключение сохранило бы свою силу и в любой произвольной системе координат в силу инвариантности характеристических направлений относительно произвольного преобразования координат. Но имело место еще предположение о малости напряжений и теплового потока.

Таким образом, несмотря на наличие кратных характеристик, для уравнений Грэда вполне может быть рассмотрена постановка задачи Коши с начальными данными. Во всех усеченных видах эта система может считаться гиперболической. Конечность нормальных скоростей распространения звуковых возмущений не противоречит общему физическому принципу причинности. Мы не исключаем, что в самом общем виде система уравнений Грэда может иметь и вполне гиперболический тип. Уравнения во всех рассматриваемых вариантах содержат закон трения в самом общем виде. Этот закон получен строгим аналитическим путем из общего и физически более глубокого уравнения кинетической теории газов Л.Больцмана. А посему эти уравнения могут быть приняты за основные уравнения гидродинамического уровня описания.

### **Моделирование нестационарных потоков на основе усеченных уравнений Грэда**

До настоящего момента эти уравнения считались более чем чрезвычайно сложными в применении [23]. Теперь ситуация выглядит иначе, ибо разработанный нами численный метод [21] решения гиперболических систем уравнений позволяет, в принципе, построить разностную схему и для полной системы уравнений Грэда. Однако с методической стороны, целесообразно вначале применить его к системе уравнений более простого вида. Из общей системы (6) возьмем полностью первые семь уравнений, а компоненты вектора теплового потока свяжем с градиентом температуры посредством закона Фурье  $\vec{q} = -k\vec{\nabla}T$ . Построенную таким образом модель будем называть далее усеченными уравнениями Грэда. Именно в таком виде эти уравнения внедрены в исследовательский комплекс программ кафедры 105 Аэродинамики ЛА. Этот комплекс создавался с 2001г. и предназначен для получения точных численных решений уравнений Эйлера, Навье-Стокса и Грэда на случай различных типов 2D течений. Первые две системы уравнений решаются на основе метода расщепления матричных коэффициентов или метода расщепления векторов потоков, уравнения же Грэда решаются на основе разработанного нами метода полных дифференциалов [21]. Этот метод является родственным с используемыми при решении уравнений Эйлера и Н-С. Поэтому разработанный комплекс программ имеет ряд привлекательных сторон. Все явления и процессы должны познаваться в сравнении. Умея решать уравнения Грэда, мы получаем редкую возможность сравнивать между собой решения систем уравнений, являющихся представителями двух различных теорий. Весьма существенно, что такое сравнение может быть выполнено максимально корректным образом, т.е. в рамках одного или родственных методов, на основе единых разностных схем и на одних и тех же расчетных сетках.

### **Обтекание кругового цилиндра на основе Н-С и Грэда. Кривая сопротивления.**

Рассмотрим применение разработанного программного комплекса к решению одной плоской классической задачи. Основную цель нашего исследования направим на поиск отличий,

которые могут дать уравнения Г.Грэда по отношению к классическим уравнениям Навье–Стокса в области потоков сплошной среды. Смоделируем обтекание кругового цилиндра, расположенного поперек потока. Результаты многочисленных экспериментальных работ по обтеканию цилиндра отражены в книге Здравковича [24]. В ней описаны методики проведения экспериментальных исследований, особенности обработки результатов экспериментов, приведены локальные аэродинамические характеристики. Коэффициент силы сопротивления цилиндра в зависимости от числа Рейнольдса изменяется довольно сложным образом, как бы намекая нам на то, что в потоке происходит нечто интересное и сложное. Эта зависимость приведена на рис.10. Когда число Рейнольдса  $Re$  очень мало, поток вполне стационарен, скорость в любой точке потока постоянна и он плавно обтекает цилиндр. Однако ни распределение скорости, ни распределение давления не похожи на эти распределения в потенциальном потоке. Давление, к примеру, при  $Re = 0.1$  изменяется по линейному закону. Вязкий как мед поток увлекает за собой цилиндр, см. также рис.9 случаи (a) и (b), величина коэффициента сопротивления при этом очень велика, см. рис. 10  $Re = 0.1$  и  $Re = 0.4$ . Видно, что оба уравнения в области малых чисел  $Re$  дают близкие результаты. На первый взгляд это довольно простой тип течений, однако именно эти режимы являются самыми сложными для экспериментальных исследований. Если немного увеличить скорость потока, так, чтобы число Рейнольдса стало больше четырех, мы увидим качественное изменение потока. За цилиндром возникнут вихри. Картины полей скорости и давления для исследуемых уравнений приведены на рис.1 и 2. Из них видно, что решения этой задачи при  $Re = 10.5$  на основе уравнений Н-С и Грэда снова близки друг к другу.

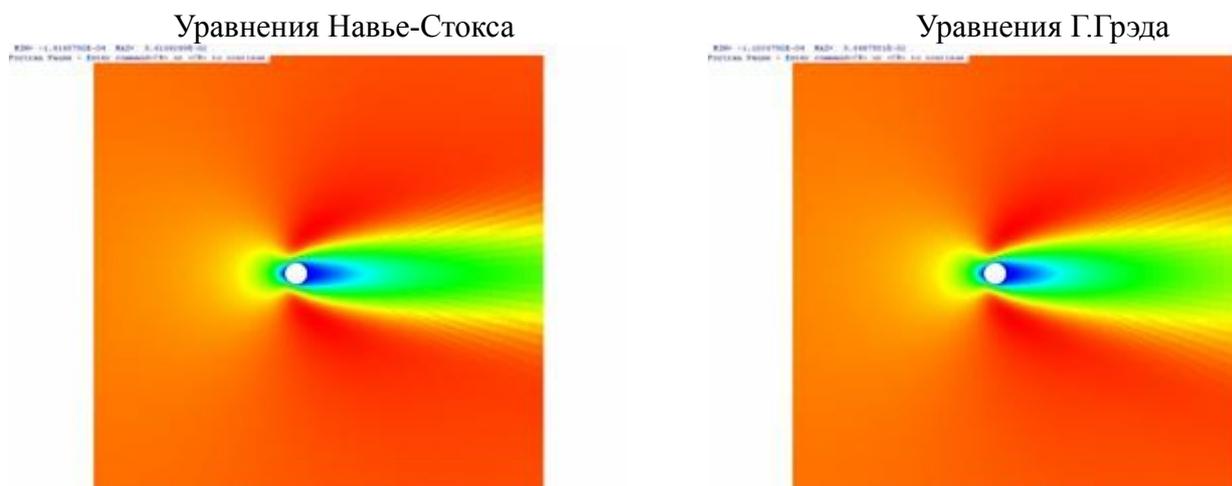


Рис.1. Продольная компонента скорости  $v_x$ ,  $Re=10.5$



Рис.2. Давление  $p$ ,  $Re=10.5$

Распределение давления вдоль поверхности цилиндра в сравнении с данными экспериментов также приведено на рис.3. Расчетная зависимость лежит где-то между экспериментальными кривыми для чисел  $Re = 10.5$  и  $Re = 11.2$ . Расхождение самих экспериментальных данных между этими числами Рейнольдса свидетельствует о наличии каких-то переходных процессов в потоке, так что в целом совпадение с данными экспериментов можно считать весьма неплохим. Хотя для этих режимов мы пока не натолкнулись на различия в решении двух уравнений, в то же время программный модуль уравнений Грэда на порядок более сложный, чем для уравнений Н-С, был нами протестирован на качество. На самом деле, судя по рис.1 область отрыва имеет завышенные размеры, в связи с чем возникает естественное желание улучшить результаты расчетов.

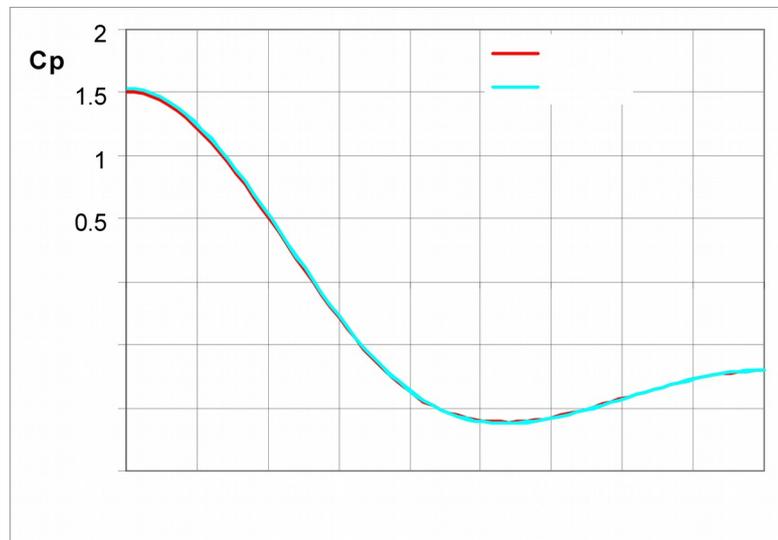


Рис.3. Распределение давления вдоль цилиндра

Это достигается измельчением сетки, а в данной задаче мы всегда оценивали по приближенной зависимости толщину пограничного слоя (в тех случаях, когда о нем можно говорить) на  $\frac{1}{2}$  условной длине. Сетка при этом строилась такой, чтобы на этом расстоянии внутри пограничного слоя оказалось не менее 50 сеточных узлов. Таким образом, дальнейшее улучшение сетки связано

только с переходом на другую топологию, например, на сетки СН-типа для лучшего разрешения области в следе за цилиндром. На другой вариант улучшения результатов наводит следующий расчетный случай.

Еще увеличим скорость потока, так, чтобы число Рейнольдса стало больше 40. Характер движения претерпит кардинальное изменение. Один из вихрей за цилиндром становится настолько длинным, что он отрывается и плывет вниз по течению вместе с жидкостью. При этом жидкость за цилиндром снова закручивается и возникает новый вихрь. Эти вихри поочередно отслаиваются то с одной, то с другой стороны, и в какой-то момент поток выглядит приблизительно так, как показано на рис.9 случай (d). Такой поток вихрей называется вихревой дорожкой Кармана. Она всегда появляется в экспериментах в потоке при  $Re > 40$ . При превышении этого порогового значения скорость в любой точке изменяется со временем, а стационарное решение отсутствует. Такие точки в пространстве параметров задачи, при которых происходят качественные изменения характера решений, получили название точек бифуркации, а соответствующие им значения параметров – критических значений. Возникает вопрос о том, как отреагируют наши программные коды на эти точки. Ответ на этот вопрос приведен на рис.4 и 5, а также на рис.10.

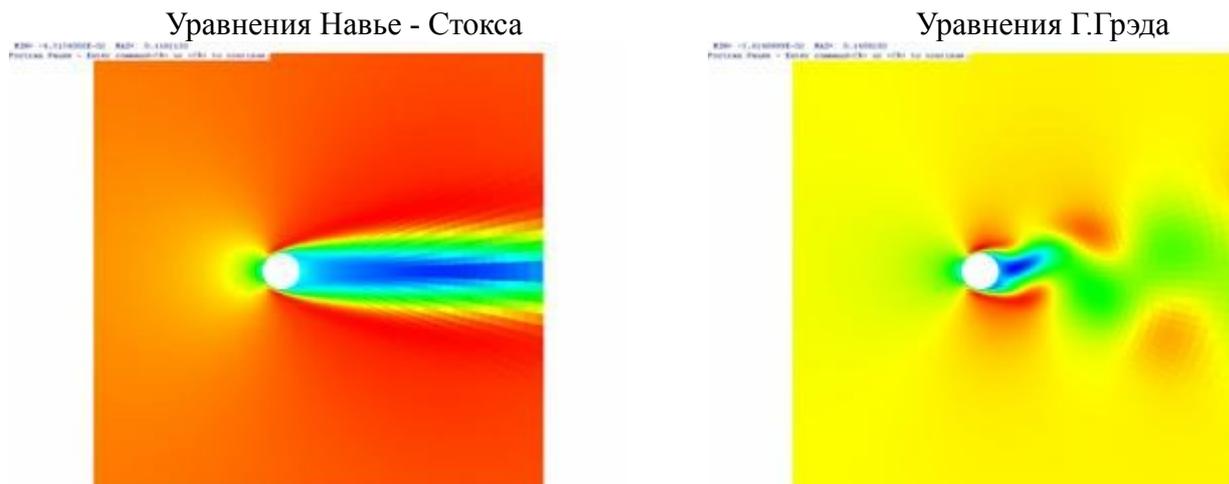


Рис.4. Продольная компонента скорости  $v_x$ ,  $Re=484$

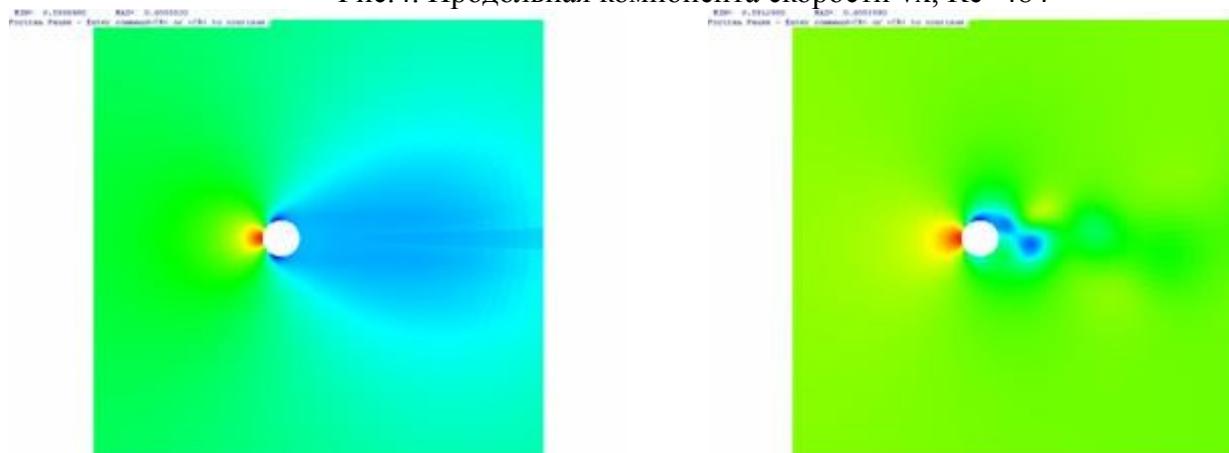


Рис.5. Давление  $p$ ,  $Re=484$

Описанная дорожка Кармана не образовалась в потоке, разрешенном на основе уравнений Навье - Стокса не только при числе  $Re = 107$ , но и даже в области зарождения турбулентных ядер на фоне регулярного попеременного движения при  $Re = 484$ . А вот в потоке, полученном на основе уравнений Грэда эта дорожка образуется раньше, примерно при  $Re = 60$ , см. также рис.10. Насколько случаен этот результат и не связан ли он, например, с какими-то эффектами разностной схемы или ошибками аппроксимации? Для уравнений Н-С понижение точности представления чисел при  $Re = 484$  привело к неожиданному результату. Дорожка Кармана образовалась в потоке, см. рис.6. При этом число Струхалия оказалось равным  $Sh = 0.21$ , против расчетов по Грэду  $Sh = 0.2$ .

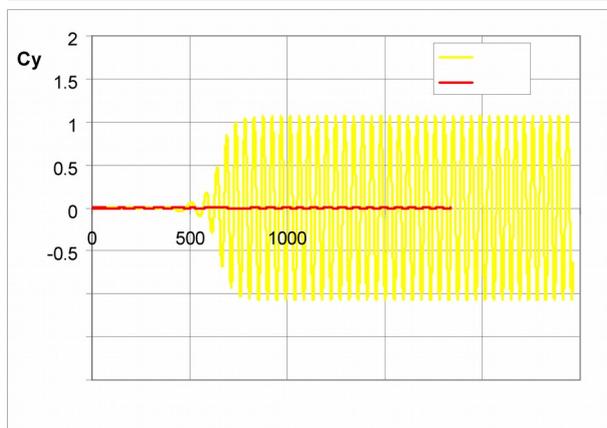
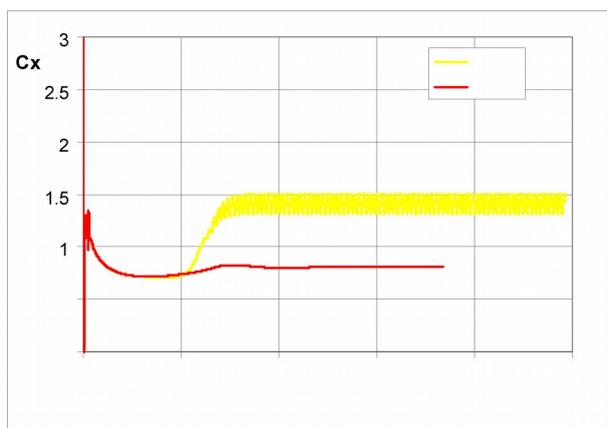


Рис.6. Коэффициенты сил, уравнения Навье-Стокса

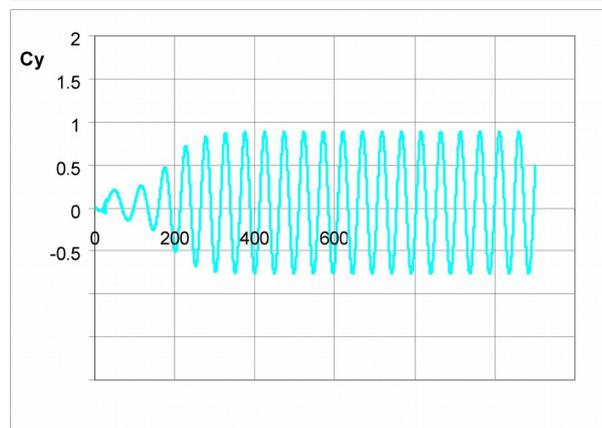
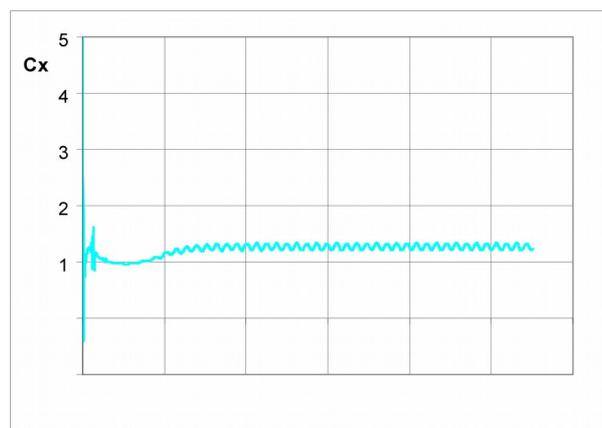


Рис.7. Коэффициенты сил, уравнения Г.Грэда

Экспериментальное значение числа Струхалия лежит в диапазоне  $Sh = 0.18 - 0.21$ , т.о. наш расчет дает близкие к эксперименту результаты.

Для уравнений Грэда на поставленный вопрос в настоящее время строгий ответ не найден, но мы считаем результат закономерным. Дело здесь в том, что либо на поверхности тела, либо в области соприкосновения соседних вихрей постоянно возникают возмущения. Эти возмущения имеют даже не акустическую природу, а природу более глубокую. Это какие-то виды движения внутри течения, т.е. течения более высокого порядка малости. Именно они могут быть ответственными за качественное изменение картин обтекания. Из анализа характеристик, приведенного в этой работе, следует, что уравнения Грэда, имея гиперболическую природу,

способны в принципе физически правильно описывать все процессы более высокого порядка в потоке, чем уравнения Навье-Стокса. В последних все возмущения распространяются бесконечно быстро. В уравнениях же Грэда имеется даже не одна “звуковая” скорость. Хотя мы можем показать, что с точки зрения акустики скорость звука строго одна, именно та, которая определяется как  $c = \sqrt{\gamma RT}$ . Так что никаких дефектов эти уравнения не содержат, при этом описывают внутренние вторичные движения в потоке, которые могут служить своего рода спусковым механизмом, приводящим к кардинальным изменениям в основном потоке.

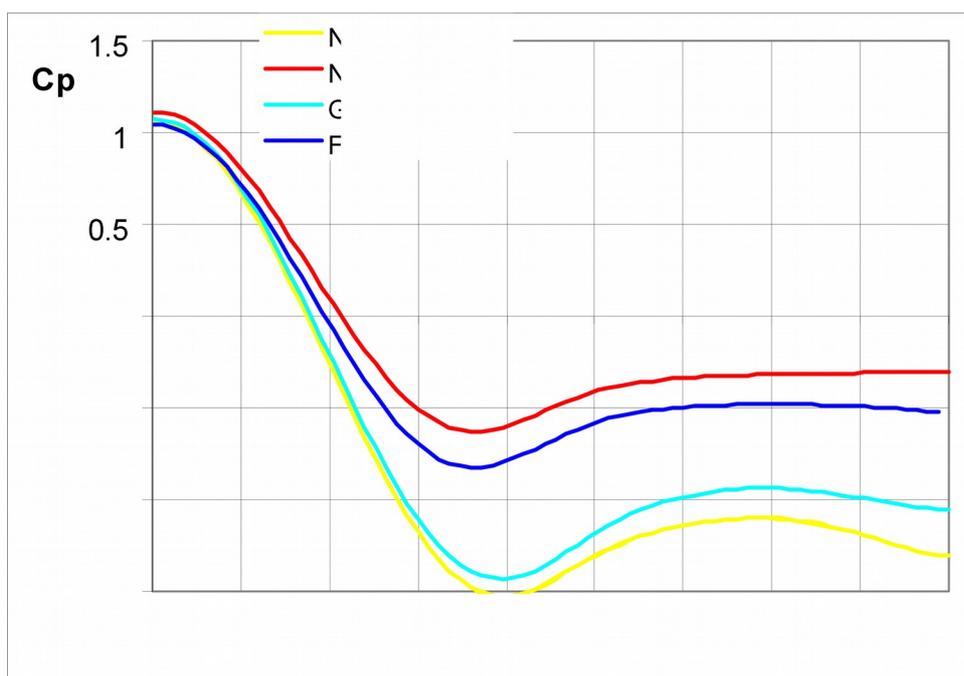
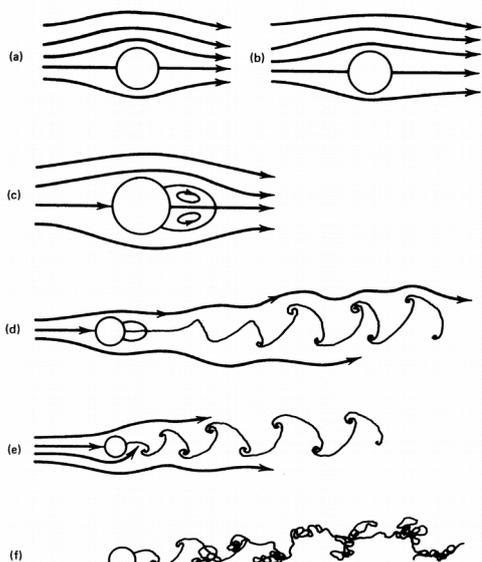


Рис.8. Распределение давления,  $Re = 484$ .

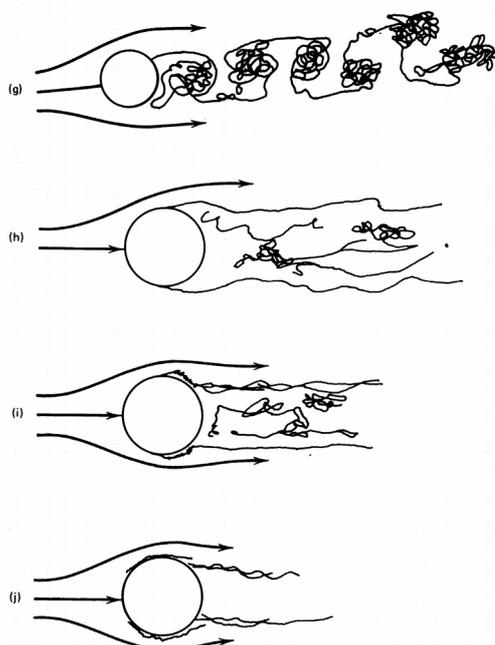
Эту гипотезу нам предстоит проверить в будущем. До сих пор внесение возмущений в поток моделировалось либо численными ошибками, либо задавалось аналитически. В настоящих расчетах размеры вихрей явно преувеличены. Более корректные результаты будут получены позже с переходом на сетки СН-топологии и на разностные схемы более высокого порядка аппроксимации по времени. Мы считаем, что для подобного класса задач и корректного расчета волновых структур гидродинамической природы наиболее подходящими являются схемы третьего порядка аппроксимации по всем переменным. Именно они способны разрешить волновые процессы внутри гидродинамических потоков. Осредненное распределение давления для исследуемых уравнений при  $Re = 484$  представлено на рис.8, где дополнительно нанесен расчет по Fluent 6.2.16, см. также рис.10.

Числу Рейнольдса  $Re = 2.77 \cdot 10^4$  соответствует ламинарный характер движения внутри пограничного слоя на поверхности цилиндра и полностью турбулентный поток в следе за цилиндром. Все замечания, сделанные ранее, остаются в силе и в этой области потока. Только здесь могут потребоваться разностные схемы еще более высокого порядка точности, основанные на идеях TD метода и быстрых преобразованиях Фурье. Расчетная сетка в этой области должна

разрешать самые малые характерные масштабы турбулентности. В то же время, интересно отметить, что этому режиму течения в наших расчетах характерно наличие сразу нескольких мод колебаний коэффициента нормальной силы  $C_y$ .



**Figure 14.15** Flow regimes for a cylinder: (a)  $Re = 0$ , symmetrical; (b)  $0 < Re < 4$ ; (c)  $4 < Re < 40$ , attached vortices; (d)  $40 < Re < 60-100$ , von Kármán vortex street; (e)  $60-100 < Re < 200$ , alternate shedding; (f)  $200 < Re < 400$ , vortices unstable to spanwise bending.



**Figure 14.15 (continued)** (g)  $400 < Re$ , vortices turbulent at birth; (h)  $Re < 3 \times 10^5$ , laminar boundary layer separates at  $80^\circ$ ; (i)  $3 \times 10^5 < Re < 3 \times 10^6$ , separated region becomes turbulent, reattaches, and separates again at  $120^\circ$ ; (j)  $3 \times 10^6 < Re$ , turbulent boundary layer begins on front and separates on back.

Рис.9. Режимы обтекания кругового цилиндра.

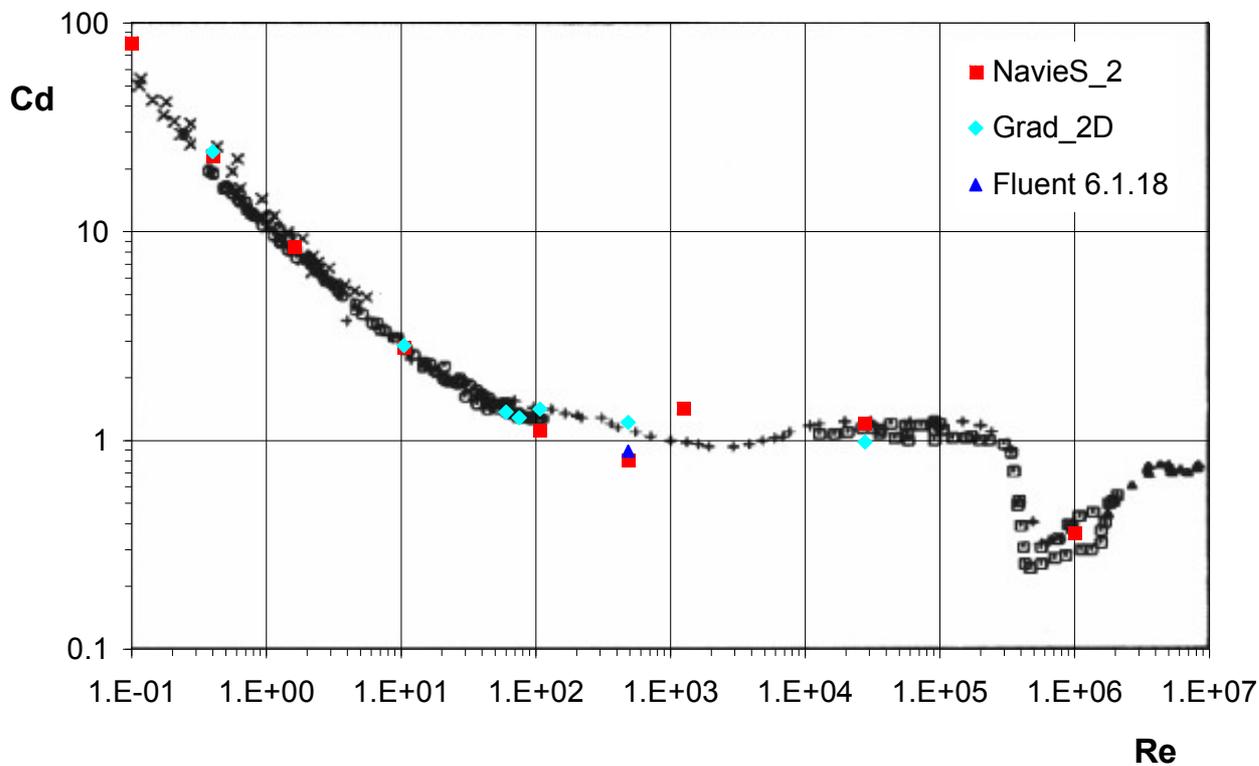


Рис.10. Кривая сопротивления для цилиндра, сравнение с экспериментом [24].

По своим ресурсам задача в этом диапазоне чисел Рейнольдса может оказаться неподъемной для современных компьютерных мощностей. Этот же вывод относится и к кризисным режимам течения, при которых пограничный слой на самом цилиндре становится турбулентным, а его сопротивление падает.

В стационарных установившихся потоках уравнения Грэда дают близкие с уравнениями Навье-Стокса результаты. В нестационарных потоках решения отличаются. Проведенные численные эксперименты позволяют выдвинуть гипотеза о существовании различных веток решения уравнений Н-С и отсутствия таковых у уравнений Грэда до чисел Рейнольдса  $Re = 500$ . Во время расчетов был выполнен сравнительный анализ потребных ресурсов. В результате которого установлено, что время расчетов в среднем при использовании усеченных уравнений Г.Грэда в 3.5 раза больше, чем при использовании уравнений Н-С.

### Список литературы

1. *Бондарев Е.Н., Дубасов В.Т., Рыжов Ю.А., Свирицевский С.Б., Семенчиков Н.В.* Аэрогидромеханика. – М.: Машиностроение, 1993, 608 с.
2. *Больцман Л.* Лекции по теории газов. Пер. – ГИТТЛ, 1953, 554 с.
3. *Bird G.A.* Molecular Gas Dynamics and Direct Simulation of Gas Flows. – Oxford, Clarendon Press, 1994, 458с.
4. *Яницкий В.Е.* Стохастические модели совершенного газа из конечного числа частиц. – Сообщения по прикладной математике, М.: ВЦ АН СССР, 1988, 56 с.
5. *Аристов В.В., Черемисин Ф.Г.* Прямое численное моделирование кинетического уравнения Больцмана. – М.: ВЦ АН РАН, 1992, 192 с.
6. *Аристов В.В., Мамедова И.Г.* Параллельные алгоритмы для решения кинетического уравнения Больцмана. – ЖВМиМФ, 1996, N 2, С.138-146.
7. *Аристов В.В., Забелюк С.А.* Получение решений для уравнения Больцмана на многопроцессорных компьютерах. – Математическое моделирование, 2002, т. 14, N 8, С.5-9.
8. *Шахов Е.М.* Метод исследования движения разреженного газа. – М.: Наука, 1974, 208 с.
9. *Хлопков Ю.И., Шахов Е.М.* Кинетические модели и их роль в исследовании течений разреженного газа. – Сб. Численные методы в динамике разреженных газов, 1977б Вып. 3, С.37-80.
10. *Ларина И.Н., Рыков В.А.* Метод численного решения уравнения Больцмана при малых числах Кнудсена. – Математическое моделирование, 2000, т. 12, N 6, С.109-114.
11. *Ларина И.Н., Рыков В.А.* Метод второго порядка точности для решения уравнения Больцмана. – Математическое моделирование, 2002, т. 14, N 8, С.96-101.

12. *Грэд Г.* Асимптотическая теория уравнения Больцмана. – Механика, 1964, вып. N 2, С.43-108.
  13. *Hilbert D.* Math. Ann. – 1912, 72, 562.
  14. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. – М.: Наука, 1967, 440 с.
  15. *Грэд Г.* О кинетической теории разреженных газов. – Механика, 1952, вып. N 4, С.71-97, вып. N 5, С.61-96.
  16. *Chung T.J.* Computational Fluid Dynamics. – Cambridge University Press, 2002, 1012с.
  17. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001, 608с.
  18. *Пинчуков В.И., Шу Ч.-В.* Численные методы высоких порядков для задач аэрогидродинамики. – Н., Изд-во СО РАН, 2000, 232с.
  19. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1974, 712 с.
  20. *Бондаренко Ю.А.* Математические модели и численные методы для решения задач нестационарной газовой динамики. Обзор зарубежной литературы. – РФЯЦ-ВНИИЭФб 88 – 2003, 53с.
  21. *Попов С.А.* Моделирование течений сжимаемого газа на основе метода полных дифференциалов. – Математическое моделирование, 2005, том 17, N 3, С.99-119.
  22. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. Перев. с англ. - М.: Мир, 1964, 830 с.
  23. *Елизарова Т.Г.* Математические модели и численные методы в динамике газа и жидкости. – М.: Физический факультет МГУ, Ч.1, 2005, 120 с.
  24. *Zdravkovich M.M.* Flow around Circular Cylinders. Volume I. – Oxford University Press, 2003, 674 p.
- 

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

*Попов Сергей Александрович, кафедра Аэродинамики ЛА Московского авиационного института (Государственного технического университета), ст. преподаватель.*

*E-mail: [aerospacenet@mtu-net.ru](mailto:aerospacenet@mtu-net.ru)*

#### ***The Mathematical Modeling of Separation and Unsteady Flows***

*S.A. Popov*

*The subject of this article is to prove the need of application of H.Grad thirteen-momentum system of equations to describe the heat-conducting viscous gas unsteady flow. The numerical results for the*

*crossflow about a circular cylinder obtained from Navier-Stokes and H.Grad equations are compared. The hypothesis that H.Grad equations have no bifurcation of solution is offered.*