УДК: 539.123.17

Классический спин в пространстве с кручением и без кручения

Р. И. Храпко

Рассматриваются операционные определения тензоров энергии-импульса и спина и уравнения, связывающие эти тензоры между собой в искривленном пространстве и в пространстве с кручением. Согласно таким определениям, эти тензоры однозначно локализуют энергию-импульс и спин. Определение тензора спина использовано, в качестве примера, при подсчете поглощения спина электромагнитной волны круговой поляризации в электропроводящей среде. Такое поглощение приводит к асимметричному тензору энергии-импульса этой среды. Рассматриваются и критикуются распространенные возражения против реальности классического тензора спина. Показывается бесполезность симметрирующей процедуры Белинфанте. Критикуется вывод метрического тензора энергии-импульса. Обращается внимание на аналогию между законами сохранения импульса и углового импульса, с одной стороны, и уравнениями движения дипольной частицы, с другой.

С начала 60-х годов прошлого века проф. Д.Д. Иваненко неоднократно выступал за использование картановского кручения в физике пространства-времени. Проблема кручения далека от разрешения и сейчас. В настоящей статье рассматривается эта проблема.

1. Тензор энергии-импульса

В электродинамике плотность 4-тока j^α является источником электромагнитного поля $F^{\alpha\beta}$ ввиду уравнений

$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} = -j^\alpha .$$

Аналогично этому, в эйнштейновской общей теории относительности тензор энергии-импульса $T^{\alpha\beta}$ является источником гравитации согласно уравнениям Эйнштейна

$$G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta} R/2 = \kappa T^{\alpha\beta} .$$

Поэтому мы согласны с точкой зрения [1], что, поскольку тензор энергии-импульса является источником гравитации, он является наблюдаемой величиной фундаментальной важности, не допускающей неоднозначности.

Герман Вейль [2, с. 297] писал: «Только общая теория относительности, которая допускает изменение мировой метрики, ведет к правильному определению энергии». Такая точка зрения является сейчас общепринятой. Например, Боголюбов и Ширков [3] пишут: «Структура тензора

$T^{\alpha\beta}$, который в нашем изложении не является даже однозначным, приобретает самостоятельный интерес лишь в последовательной теории, включающей учет гравитационных эффектов».

Однако, вопреки этому мнению, мы считаем, что наблюдаемость и однозначность тензора энергии-импульса не связаны с гравитацией. Например, Синг [4] пишет: «Мы наделяем среду симметричным тензором энергии… Он характеризует механические свойства вещества, такие, как натяжения и плотность… Мы заимствуем из статистической модели интерпретацию тензора энергии с помощью потоков и выдвигаем следующее требование:

(Поток 4-импульса сквозь трехмерную мишень $dV) = T^{\alpha\beta}dV_\beta$ ».

Таким образом, существует следующее операционное определение тензора энергии-импульса [5]. Если среда и (или) поле локально ограничены инфинитезимальным элементом dV_β, то этот элемент получает инфинитезимальный 4-импульс

$$dP^\alpha = T^{\alpha\beta}dV_\beta\,. \tag{1.1}$$

Пространственная часть тензора энергии-импульса $T^{\alpha\beta}$, тензор T^{ik}, называется тензором напряжений. $T^{ik}da_k$ есть *i*-я компонента силы, действующей на элемент поверхности da_k [6].

$$d\mathcal{F}^i = T^{ik}da_k\,. \tag{1.2}$$

Поэтому T^{ik} является плотностью потока импульса.

Интегрирование выражения (1.1) по замкнутой гиперповерхности в пространстве Минковского дает 4-импульс, который передается средой внутренней стороне границы $V = \partial\Omega$ 4-объема Ω, ограниченного этой гиперповерхностью, то есть 4-импульс, полученный средой от внешних источников в 4-объме Ω,

$$P^\alpha = \oint T^{\alpha\beta}dV_\beta = \int \partial_\beta T^{\alpha\beta}d\Omega.$$

Значит, дивергенция $\partial_\beta T^{\alpha\beta}$ равна 4-импульсу, который образуется в единице 4-объема за счет внешних источников, другими словами, это плотность внешней 4-силы,

$$f^\alpha = \partial_\beta T^{\alpha\beta},$$

которая действует на среду со стороны внешних объектов и через среду передается гиперповерхности. Например, если средой является электромагнитное поле с тензором энергии-импульса Максвелла

$$\underset{e}{T}^{\alpha\beta} = -F^\alpha{}_\nu F^{\beta\nu} + g^{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4, \tag{1.3}$$

то дивергенцией тензора энергии-импульса является сила Лоренца с обратным знаком,

$$\partial_\beta \underset{e}{T}^{\alpha\beta} = -F^{\alpha\nu}j_\nu,$$

потому что сила Лоренца $F^{\alpha\nu}j_\nu$ действует на токи со стороны поля, а $-F^{\alpha\nu}j_\nu$ действует на поле со стороны токов, которые являются внешними объектами по отношению к полю.

Если

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0, \tag{1.4}$$

то среда находится в равновесии сама по себе в отношении импульса. Мы говорим, что она замкнута в отношении импульса.

2. Тензор спина

Симметричен ли тензор энергии-импульса? Как видно, тензор энергии-импульса электромагнитного поля (1.3) симметричен. Однако следует принять во внимание и другие возможности. Рассмотрим некую упругую среду, диэлектрик или электропроводник. Пусть эта среда объемно поглощает поток электронов (фотонов, нейтрино), который имеет круговую поляризацию. Очевидно, что при поглощении этого потока спиновый момент импульса, приносимый потоком, поглощается средой. Поэтому эта среда испытывает вращающее механическое воздействие, распределенное по объему. В результате, любой объем V этой среды прикладывает к своей границе $a = \partial V$, расположенной внутри среды или на ее краю, вращающий момент сил:

$$\tau^{ij} = 2\oint r^{[i}T^{j]k}\,da_k .$$

Применяя теорему Стокса, находим

$$\tau^{ij} = 2\oint r^{[i}T^{j]k}\,da_k = 2\int \partial_k (r^{[i}T^{j]k})dV = 2\int (-T^{[ij]} + r^{[i}f^{j]})dV.$$

Ввиду однородности поглощенного спина, второе слагаемое справа легко элиминировать, выбрав в качестве начала радиус-вектора подходящую точку в середине объема, V. Однако первое слагаемое, содержащее антисимметричную часть тензора напряжений, характеризует специфическое механическое состояние среды, которое возникает при поглощении спина.

Рассмотрим это состояние среды. Пусть

$$T^{yx} = -T^{xy} = 1. \tag{2.1}$$

Выделим из среды единичный кубик со сторонами, ориентированными перпендикулярно координатным осям. На среду, прилегающую снаружи к стороне кубика с ковариантными координатами $(da_x = 1, 0, 0)$, действует сила, $d\mathcal{F}^y = T^{yx}da_x = 1,$ а на среду, прилегающую к стороне $(0, da_y = 1, 0)$ кубика, действует сила $d\mathcal{F}^x = T^{xy}da_y = -1.$ В результате, обе силы пытаются вращать окружающую кубик среду в положительную сторону вокруг оси z. Поэтому окружающая среда испытывает момент сил

$$d\tau^{xy} = x\,d\mathcal{F}^y - y\,d\mathcal{F}^x = 2 = -2T^{[xy]}.$$

По мере увеличения размера кубика, момент сил будет увеличиваться. В этом выражается тот факт, что $-2T^{[xy]}$ является дивергенцией момента плотности потока импульса в соответствии с равенством

$$2\partial_k(r^{[i}T^{j]k}) = -2T^{[ij]}.$$

Естественно, рассматриваемое состояние объясняется поглощением средой внешнего потока спина. Мы введем специальное обозначение для плотности потока спина $\Upsilon^{ijk} = \Upsilon^{[ij]k}$. Оно означает, что поток спина через площадку da_k равен

$$d\Sigma^{ij} = \Upsilon^{ijk}da_k. \tag{2.2}$$

Поэтому закон сохранения момента импульса требует

$$-2T^{[ij]} = -\partial_k\Upsilon^{ijk}.$$

(Нам пришлось обозначить спин буквой Σ потому что буква S использована далее для обозначения кручения связности системы координат пространства.)

Проведем аналогичное рассуждение для тензора 4-спина $\Upsilon^{\alpha\beta\kappa}$.

$$J^{\alpha\beta} = \oint(2r^{[\alpha}T^{\beta]\kappa} + \Upsilon^{\alpha\beta\kappa})dV_\kappa = \int(-2T^{[\alpha\beta]} + 2r^{[\alpha}\partial_\kappa T^{\alpha]\kappa} + \partial_\kappa\Upsilon^{\alpha\beta\kappa})d\Omega$$

представляет собой полный момент 4-импульса (орбитальный + спиновый), получаемый средой в 4-объеме Ω, в том случае, когда среде присуща пара $(T^{\alpha\kappa}, \Upsilon^{\alpha\beta\kappa})$. Мы говорим, что среда замкнута или находится в равновесии в отношении спина, если

$$\partial_\kappa\Upsilon^{\alpha\beta\kappa} - 2T^{[\alpha\beta]} = 0. \tag{2.3}$$

3. Пример поглощения спина проводящей средой

В качестве примера рассмотрим плоскую электромагнитную волну круговой поляризации [7],

$$\breve{\mathbf{E}} = \exp[i(\breve{k}z - t)](\mathbf{x} + i\mathbf{y}), \quad \breve{\mathbf{B}} = -i\breve{k}\breve{\mathbf{E}},$$

$$\breve{k} = \sqrt{\breve{\varepsilon}} = k' + ik'', \quad \breve{\varepsilon} = 1 + i\gamma, \quad k'^2 - k''^2 = 1, \quad 2k'k'' = \gamma, \quad 2k'^2 = k^2 + 1, \quad 2k$$

распространяющуюся в электропроводнике при $z > 0$. Здесь k, ε, γ - волновое число, диэлектрическая постоянная и коэффициент электропроводности. Значок breve отмечает комплексные вектора и числа. Для простоты записи скорость света $c = 1$ и частота $\omega = 1$.
В пространстве при $z < 0$ будут существовать падающая волна

$$\breve{\mathbf{E}}_1 = (1 + \breve{k})\exp[i(z - t)](\mathbf{x} + i\mathbf{y})/2, \quad \breve{\mathbf{B}}_1 = -i\mathbf{E}_1$$

и отраженная волна

$$\breve{\mathbf{E}}_2 = (1 - \breve{k})\exp[i(-z - t)](\mathbf{x} + i\mathbf{y})/2, \quad \breve{\mathbf{B}}_2 = i\breve{\mathbf{E}}_2.$$

Подсчитаем поток спина в пространстве, используя выражение, которое содержалось в статье, направленной в ЖЭТФ 27 января 1999 года,

$$\underset{em}{\Upsilon}^{xyz} = A^{[x}\partial^{|z|}A^{y]} + \Pi^{[x}\partial^{|z|}\Pi^{y]}, \quad \partial^z = -\partial_z. \tag{3.1}$$

Здесь A^i, Π^i - магнитный и электрический векторные потенциалы. Для пространства перед проводником имеем:

$$\breve{\mathbf{A}}_0 = -\int (\breve{\mathbf{E}}_1 + \breve{\mathbf{E}}_2) dt = -i(\breve{\mathbf{E}}_1 + \breve{\mathbf{E}}_2), \quad \breve{\mathbf{\Pi}}_0 = \int (\breve{\mathbf{B}}_1 + \breve{\mathbf{B}}_2) dt = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2.$$

Вычисляя усредненную по времени плотность потока спина в пространстве перед проводником, получаем короткий результат:

$$< \underset{em}{\Upsilon}{}_0{}^{xyz} >= \Re(\overline{A}_0{}^{[x}\partial^{|z|}\breve{A}_0{}^{y]} + \overline{\Pi}_0{}^{[x}\partial^{|z|}\breve{\Pi}_0{}^{y]})/2 = k'.$$

Здесь черточка означает комплексное сопряжение.

Эта плотность потока спина, падающая на проводник из пространства, постепенно поглощается в проводнике и потому является функцией z при $z > 0.$ Для вычисления потока спина в проводнике нельзя применять формулу (3.1), потому что наличие электрических токов лишает электрический векторный потенциал Π^i однозначного смысла. В проводнике следует использовать формулу

$$\underset{em}{\Upsilon}{}^{xyz} = 2A^{[x}\partial^{|z|}A^{y]}, \quad \mathbf{A} = -\int \mathbf{E} dt,$$

приведенную в статье для «Писем в ЖЭТФ» 14 мая 1998 года. По этой формуле получается

$$< \underset{em}{\Upsilon}{}^{xyz} >= \Re(\overline{A}^{[x}\partial^{|z|}\breve{A}^{y]}) = k'\exp(-2k''z).$$

$$-\partial_z < \underset{em}{\Upsilon}{}^{xyz} >= 2k'k''\exp(-2k''z) = \gamma\exp(-2k''z).$$

Наличие дивергенции тензора спина, означает, что проводник подвержен воздействию объемной плотности вращающего момента сил, $d\tau^{xy}/dV,$ которая создает в жестком проводнике механические напряжения, характеризующиеся антисимметричной частью тензора напряжений:

$$d\tau^{xy}/dV = -\partial_z \underset{em}{\Upsilon}{}^{xyz} = -2T^{[xy]}, \quad T^{[yx]} = \gamma\exp(-2k''z)/2, \quad T^{[xy]} = -\gamma\exp(-2k''z)/2$$

Обратите внимание, что это как раз то состояние среды, которое рассматривалось выше (2.1). Таким образом, электромагнитная волна в проводнике совместно с самим проводником образуют среду, замкнутую относительно спина в согласии с формулой (2.3). При этом, как легко проверить, дифференцируя выражение (3.1),

$$d\tau^{xy}/dV = -\partial_z \underset{em}{\Upsilon}{}^{xyz} = 2j^{[x}A^{y]},$$

так что $2j^{[x}A^{y]}$ является вращающим аналогом силы Лоренца. Оказывается, электромагнитное поле воздействует на токи не только силой $j_k F^{ik},$ но и вращающим моментом силы $2j^{[i}A^{k]}.$

4. Популярные возражения против тензора спина

Несмотря на очевидные соображения, представленные в разделах 2 и 3, тензор спина электродинамики (3.1) не признан научным сообществом и даже не известен. Больше того, принято отрицать реальность тензора спина вообще [8]. Самым ярким возражением против тензора спина является провозглашаемая симметрия тензора энергии-импульса материи [9]. В популярной монографии [10] можно прочитать: "Все тензоры энергии-импульса, рассмотренные выше, были симметричны. То, что это не могло быть иначе, видно из следующего …" (стр.141). В [10] отсутствует понятие тензора спина, а известная несимметрия канонического тензора энергии-импульса, входящего, между прочим, в пару с каноническим тензором спина,

$$\left(\underset{c}{T}^{\alpha\beta} = \partial^{\alpha} A_{\sigma} \frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_{\beta} A_{\sigma})} - g^{\alpha\beta}\Lambda, \quad \underset{c}{\Upsilon}^{\alpha\beta\kappa} = -2A^{[\alpha}\delta_{\sigma}^{\beta]} \frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_{\kappa} A_{\sigma})} \right), \tag{4.1}$$

рассматривается как причина нарушения закона сохранения момента импульса, подлежащая устранению. На стр. 505 [10] можно прочитать:

> "При каждом способе построения тензора энергии-импульса получающееся выражение должно удовлетворять закону сохранения энергии и импульса. Однако канонический тензор часто не симметричен по своим индексам, и закон сохранения момента импульса в этих случаях нарушается."

Розенфельд заявлял, что симметрия тензора энергии-импульса – это не вопрос выбора, а требование эйнштейновской теории гравитации, которая последовательна лишь с симметричным тензором энергии-импульса [11]. Поэтому канонический тензор стараются насильственно симметрировать с помощью процедуры Белинфанте [12], и тем самым каноническую пару (4.1) превращают в пару, которая считается *эквивалентной* ей, но состоит из симметричного тензора энергии-импульса и равного нулю тензора спина:

$$(\underset{s}{T}^{\alpha\beta}, \quad 0).$$

В основе знаменитой процедуры Белинфанте лежит странное убеждение, что, вопреки формулам типа (1.1), (2.2), физическое содержание тензоров пары $(T^{\alpha\beta}, \Upsilon^{\alpha\beta\kappa})$ не меняется при добавлении к ним произвольной пары $(\Delta T^{\alpha\beta}, \Delta\Upsilon^{\alpha\beta\kappa})$, которая удовлетворяет законам сохранения (1.4), (2.3)

$$\partial_{\beta} T^{\alpha\beta} = 0, \quad \partial_{\kappa}\Upsilon^{\alpha\beta\kappa} - 2T^{[\alpha\beta]} = 0, \tag{4.2}$$

то есть

$$\partial_{\beta}(\Delta T^{\alpha\beta}) = 0, \quad \partial_{\kappa}(\Delta\Upsilon^{\alpha\beta\kappa}) - 2\Delta T^{[\alpha\beta]} = 0. \tag{4.3}$$

Пара $(\Delta T^{\alpha\beta}, \Delta\Upsilon^{\alpha\beta\kappa})$ обычно строится на основе произвольного тензора, антисимметричного по первой паре индексов, $\Delta\Upsilon^{\alpha\beta\kappa} = \Delta\Upsilon^{[\alpha\beta]\kappa}$:

$$\left(\Delta T^{\alpha\beta} \overset{def}{=} \partial_{\kappa}(\Delta\Upsilon^{\alpha\beta\kappa} - \Delta\Upsilon^{\beta\kappa\alpha} + \Delta\Upsilon^{\kappa\alpha\beta})/2, \quad \Delta\Upsilon^{\alpha\beta\kappa} \right). \tag{4.4}$$

Такая пара называется парой Белинфанте. При ее добавлении возникает множество пар, рассматриваемых как эквивалентные [1],

$$\left(\underset{c}{T}^{\alpha\beta}+\partial_\kappa(\Delta\Upsilon^{\alpha\beta\kappa}-\Delta\Upsilon^{\beta\kappa\alpha}+\Delta\Upsilon^{\kappa\alpha\beta})/2,\quad \underset{c}{\Upsilon}^{\alpha\beta\kappa}+\Delta\Upsilon^{\alpha\beta\kappa}\right). \tag{4.5}$$

Из этого множества теоретики "рукой" выбирают пару, содержащую равный нулю тензор спина и, как им кажется, симметричный тензор энергии-импульса.

$$\left(\underset{B}{T}^{\alpha\beta}=\underset{c}{T}^{\alpha\beta}-\partial_\kappa(\underset{c}{\Upsilon}^{\alpha\beta\kappa}-\underset{c}{\Upsilon}^{\beta\kappa\alpha}+\underset{c}{\Upsilon}^{\kappa\alpha\beta})/2,\quad 0\right), \tag{4.6}$$

Такая пара тензоров возникает, если в паре Белинфанте положить

$$\Delta\Upsilon^{\alpha\beta\kappa}=-\underset{c}{\Upsilon}^{\alpha\beta\kappa}.$$

Однако тензор $\underset{B}{T}^{\alpha\beta}=\underset{c}{T}^{\alpha\beta}-\partial_\kappa(\underset{c}{\Upsilon}^{\alpha\beta\kappa}-\underset{c}{\Upsilon}^{\beta\kappa\alpha}+\underset{c}{\Upsilon}^{\kappa\alpha\beta})/2$, который мы назовем тензором Белинфанте, оказывается отнюдь не симметричным.

Провозглашаемая эквивалентность всех пар множества (4.5) между собой подчеркивается даже терминологией. Переход от канонической пары (4.1) к множеству (4.5) называют калибровкой и говорят, что пара (4.6) прокалибрована на спин, равный нулю [1, p. 73]. При этом утверждается, что полученный в (4.6) тензор энергии-импульса симметричен и дает полное описание материи, поскольку тензор спина целиком абсорбируется в него. Другими словами, делается вывод [13], что компонента $\underset{s}{T}^{k0}$ симметричного тензора энергии-импульса ответственна как за орбитальный, так и за спиновый момент импульса согласно простой формуле

$$J^{ik}=L^{ik}+S^{ik}=\int 2x^{[i}\,\underset{s}{T}^{k]0}\,dV\,. \tag{4.7}$$

Разумеется, это рассуждение ошибочно с начала до конца даже, если закрыть глаза на недопустимость каких-либо добавок к тензорам энергии-импульса и спина в силу равенств типа (1.1), (2.2).

Во-первых, следует понимать, что каноническая пара (4.1) на самом деле не удовлетворяет, вообще говоря, законам сохранения (4.2). Эта пара, получаемая из лагранжевого формализма, согласно теореме Нетер, удовлетворяет законам (4.2) лишь в случае свободного поля, которое ни с чем не взаимодействует и потому не наблюдаемо и не физично. Наблюдение импульса и спина поля предполагает взаимодействие поля с источниками этого поля, причем критерием адекватности тензоров служат их дивергенции. Именно дивергенции определяют 4-импульс и спин, которыми поле обменивается с источниками в процессе наблюдения. Поэтому канонические тензоры нельзя использовать при расчете наблюдения, коль скоро им приписываются равенства (4.2).

Во-вторых, если равенства (4.2) игнорируются (в присутствии источников), то оказывается, что канонические тензоры (4.1), вообще говоря, противоречат реальности. Действительно, например, из канонического лагранжиана электромагнетизма

$$\underset{c}{\Lambda} = -F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} / 4, \quad F_{\alpha\beta} = 2\partial_{[\alpha} A_{\beta]} \tag{4.8}$$

получается каноническая пара

$$\underset{c}{T}^{\alpha\beta} = -\partial^{\alpha} A_{\sigma} F^{\beta\sigma} + g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} / 4, \quad \underset{c}{\Upsilon}^{\alpha\beta\kappa} = -2A^{[\alpha} F^{\beta]\kappa}, \tag{4.9}$$

не удовлетворяющая (4.2):

$$\partial_{\beta} \underset{c}{T}^{\alpha\beta} = -\partial^{\alpha} A_{\sigma} j^{\sigma}, \quad \partial_{\kappa} \underset{c}{\Upsilon}^{\alpha\beta\kappa} - 2\underset{c}{T}^{[\alpha\beta]} = 2A^{[\alpha} j^{\beta]}.$$

Видно, что дивергенция канонического тензора энергии-импульса равна не силе Лоренца $-F^{\alpha\beta} j_{\beta}$, а неподобающей величине $-\partial^{\alpha} A_{\beta} j^{\beta}$. Эта пара противоречит опыту. Например, в постоянном однородном магнитном поле $B_x = B, \quad B_y = B_z = 0$, для которого

$$F_{yz} = F^{yz} = -B, \quad A_y = zB/2, \quad A_z = yB/2,$$

тензор напряжений предсказывает неверное нулевое значение давления поля поперек силовых линий:

$$\underset{c}{T}^{yy} = \underset{c}{T}^{zz} = 0.$$

Поэтому бессмысленно использовать каноническую пару для чего-либо дельного.

В-третьих, добавление пары Белинфанте (4.4) к канонической паре вовсе не приводит, вообще говоря, не только к истинной паре тензоров, но даже к паре с симметричным тензором энергии-импульса. Например, в электродинамике добавление пары Белинфанте

$$\left(\Delta \underset{e}{T}^{\alpha\beta} = \partial_{\kappa}(A^{\alpha} F^{\beta\kappa}), \quad \Delta \underset{e}{\Upsilon}^{\alpha\beta\ \alpha\beta\kappa} = 2A^{[\alpha} F^{\beta]\kappa}\right) = (\partial_{\kappa} A^{\alpha} F^{\beta\kappa} - A^{\alpha} j^{\beta}, \quad 2A^{[\alpha} F^{\beta]\kappa}) \tag{4.10}$$

к канонической паре электромагнетизма (4.9) дает несимметричный тензор энергии-импульса из-за члена $-A^{\alpha} j^{\beta}$, хотя это добавление элиминирует тензор спина. С помощью процедуры Белинфанте мы получаем в электродинамике пару,

$$(\underset{B}{T}^{\alpha\beta} = -F^{\alpha}{}_{\nu} F^{\beta\nu} + g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} / 4 - A^{\alpha} j^{\beta}, \quad 0),$$

которая содержит, вместо тензора Максвелла, тензор Белинфанте, который не имеет физического смысла. В работе [1] он обозначен $\hat{\Sigma}^{ij}[\tau]$ в формуле (30).

Таким образом, процедура Белинфанте бесполезна, а утверждения [9, 10] об обязательной симметрии тензора энергии-импульса опровергаются примерами разделов 2 и 3. Все это снимает возражения против реальности тензора спина в классической теории поля. Следует также отметить, что даже реальная симметрия истинного тензора энергии-импульса не исключает наличие тензора спина. Как было показано, тензор Максвелла (1.3) сопровождается тензором спина (3.1). Так что закон сохранения момента импульса (2.3) может нарушаться для отдельно взятой среды. Однако поглощение спина обязательно приводит к несимметричному тензору энергии-импульса в континуальной теории.

Разумеется, общепринятая формула (4.7) для полного момента импульса не верна и должна быть заменена на

$$J^{ik} = L^{ik} + S^{ik} = \int (2x^{[i}T^{k]0} + \Upsilon^{ik0})dV \ .$$

5. Метрический тензор энергии-импульса

Другое возражение против реальности тензора спина связано с существованием принципиально симметричного метрического тензора энергии-импульса. Как известно [14], тензор энергии-импульса некоторого поля, называемый метрическим, может быть получен просто из условия инвариантности действия

$$\mathcal{A} = \int \Lambda \sqrt{-g} d\Omega$$

при замене координат в пространстве Минковского как следствие скалярности лагранжиана этого поля Λ. Этот тензор имеет выражение

$$\underset{g}{T}^{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial g_{\alpha\beta}} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial(\partial g_{\alpha\beta}/\partial x^\sigma)}\right), \qquad (5.1)$$

а в случае канонического лагранжиана электромагнетизма (4.8) оказывается равен тензору Максвелла (1.3).

Кроме того, возражение против тензора спина связано с тем, что не существует и не мыслима аналогичная процедура в пространстве Минковского, приводящая к какому-либо тензору спина. Поэтому он считается не существующим.

По нашему мнению, эти возражения следует отвести уже потому, что вывод тензора (5.1) нельзя считать удовлетворительным. Дело в том, что, согласно выводу, дивергенция тензора (5.1) обязана быть равна нулю,

$$\nabla_\beta \underset{g}{T}^{\alpha\beta} = 0 \ .$$

Поэтому формула (5.1) справедлива только для свободного поля в отсутствие источников так же, как каноническая пара (4.1). В случае электродинамики (4.8), например, это означает, что тензор (5.1) может использоваться только при отсутствии токов, $\nabla_\beta F^{\beta\sigma} = 0$, что исключает сколько-нибудь интересные ситуации. Поэтому совпадение тензора (5.1) с тензором Максвелла, который имеет правильную дивергенцию и верен при наличии токов, следует рассматривать как счастливую случайность. Канонический тензор в (4.9) не удостоился такой случайности.

Обязательная симметрия метрического тензора (5.1) доказывает его неистинность, поскольку противоречит возможной несимметрии тензора энергии-импульса вещества, которая продемонстрирована в разделе 3. Так что симметрия тензора (5.1) не служит доводом против тензора спина.

6. Уравнения равновесия и уравнения движения.

Пусть в обычном евклидовом пространстве находится отрезок жесткого волокна произвольной формы, к которому приложены совокупности силы и момента пары сил $(\mathcal{F}^i, \quad M^{ij})$ в двух точках так, что волокно находится в равновесии. Если переместить точку приложения одной из совокупностей на dx^k вдоль волокна, то для сохранения равновесия перемещаемая совокупность должна измениться,

$$d\mathcal{F}^i = 0, \quad dM^{ij} = 2\mathcal{F}^{[i}dx^{j]}.$$

Этим задается определенный *закон переноса* совокупности вектора и бивектора, который был назван *переносом волокном* [15]. В криволинейных координатах дифференциалы и частные производные заменяются ковариантными

$$D\mathcal{F}^i = 0, \quad DM^{ij} - 2\mathcal{F}^{[i}dx^{j]} = 0,$$

так что становится очевидной аналогия переноса совокупности с уравнениями равновесия среды в 3-пространстве,

$$\nabla_k T^{ik} = 0, \quad \nabla_k \Upsilon^{ijk} - 2T^{[ij]} = 0.$$

При переходе к пространству-времени волокно заменяется мировой линией частицы, обладающей совокупностью импульса и спина (внутреннего момента импульса) $(P^\alpha, \quad \Sigma^{\alpha\beta})$. Перенос совокупности подчиняется уравнению движения этой частицы

$$DP^\alpha = 0, \quad D\Sigma^{\alpha\beta} - 2P^{[\alpha}dx^{\beta]} = 0, \tag{6.1}$$

аналогичному уравнению равновесия среды

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0, \quad \nabla_\kappa \Upsilon^{\alpha\beta\kappa} - 2T^{[\alpha\beta]} = 0, \tag{6.2}$$

Между прочим, уравнения (6.1) показывают, что, в принципе, импульс может переноситься в направлении, которое отлично от его собственного направления, но при этом внутренний момент импульса носителя этого импульса переносится не параллельно.

Как известно, при переходе к искривленному пространству V_4 (без кручения) в уравнениях движения и уравнениях равновесия среды появляется дополнительный член, содержащий тензор кривизны, и аналогия между уравнениями движения частицы и уравнениями равновесия сохраняется [16, 17]

$$DP^\alpha + R_{\mu\nu\kappa}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}\Sigma^{\mu\eta}dx^\kappa/2 = 0, \quad D\Sigma^{\alpha\beta} - 2P^{[\alpha}dx^{\beta]} = 0, \tag{6.3}$$

$$\nabla_\kappa T^{\alpha\kappa} + R_{\mu\nu\kappa}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}\Upsilon^{\mu\nu\kappa}/2 = 0, \quad \nabla_\kappa \Upsilon^{\alpha\beta\kappa} - 2T^{[\alpha\beta]} = 0. \tag{6.4}$$

Уравнения (6.3) является уравнениями Диксона для дипольной частицы. (Индексы расставлены согласно Схоутену и Хелю).

Отметим, что пара Белинфанте (4.4)

$$\left(T^{\alpha\beta} \overset{def}{=} \nabla_\kappa(\Upsilon^{\alpha\beta\kappa} - \Upsilon^{\beta\kappa\alpha} + \Upsilon^{\kappa\alpha\beta})/2, \quad \Upsilon^{\alpha\beta\kappa}\right), \tag{6.5}$$

удивительным образом удовлетворяет уравнению равновесия (6.4) и в искривленном пространстве. Действительно,

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} \equiv \nabla_\beta \nabla_\kappa(\Upsilon^{\alpha\beta\kappa} - \Upsilon^{\beta\kappa\alpha} + \Upsilon^{\kappa\alpha\beta})/2 = \nabla_{[\beta\kappa]}(\Upsilon^{\alpha\beta\kappa} - \Upsilon^{\beta\kappa\alpha}/2) =$$
$$= R_{\beta\kappa\mu}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}(\Upsilon^{\mu\beta\kappa} - \Upsilon^{\beta\kappa\mu}/2)/2 + R_{\kappa\mu}(\Upsilon^{\alpha\mu\kappa} - \Upsilon^{\mu\kappa\alpha}/2)/2 - R_{\beta\mu}(\Upsilon^{\alpha\beta\mu} - \Upsilon^{\beta\mu\alpha}/2)/2.$$

Члены с тензорами Риччи равны нулю, и, использовав в первом слагаемом второе тождество $R_{[\beta\kappa\mu]}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} = 0$, мы получаем

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} + R_{\mu\nu\kappa}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}\Upsilon^{\mu\nu\kappa}/2 = 0,$$

тогда как равенство $\nabla_\kappa \Upsilon^{\alpha\beta\kappa} - 2T^{[\alpha\beta]} = 0$ очевидно.

Возникает вопрос, как изменяются уравнения (6.3), (6.4) при переходе к пространству U_4 с кручением связности? В связи с этой проблемой заметим, что уравнения (6.3), (6.4) не зависят от метрического тензора пространства и определяются только коэффициентами связности, которые описывают фундаментальный (параллельный) перенос в пространстве. Этот факт выглядит естественным, поскольку (6.3) представляет собой перенос вектора и бивектора вдоль мировой линии. Тот же принцип, на наш взгляд, должен быть справедливым для пространства с кручением. Поэтому не может быть правильным общепринятое уравнение равновесия среды в пространстве с кручением [17, 18]:

$$\overset{*}{\nabla}_\kappa T_\alpha^{\cdot\kappa} + S_{\kappa\alpha}^{\cdot\cdot\beta}T_\beta^{\cdot\kappa} - R_{\alpha\kappa}^{\cdot\cdot\mu\nu}\Upsilon_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\kappa}/2 = 0, \quad \overset{*}{\nabla}_\kappa \Upsilon^{\alpha\beta\kappa} - 2T^{[\alpha\beta]} = 0, \quad \overset{*}{\nabla}_\kappa = \nabla_\kappa + 2S_{\kappa\beta}^{\cdot\cdot\beta}. \tag{6.6}$$

Действительно, определение тензора кривизны

$$R_{\alpha\kappa\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 2\partial_{[\alpha}\Gamma_{\kappa]\mu}^{\nu} + 2\Gamma_{[\alpha\beta}^{\nu}\Gamma_{\kappa]\mu}^{\beta}$$

требует применения метрического тензора в (6.6):

$$\overset{*}{\nabla}_\kappa T_\alpha^{\cdot\kappa} + S_{\kappa\alpha}^{\cdot\cdot\beta}T_\beta^{\cdot\kappa} - R_{\alpha\kappa\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}g_{\nu\rho}\Upsilon^{\mu\rho\kappa}/2 = 0$$

и в соответствующем ему уравнении движения {Heh71}

$$DP_\alpha + S_{\kappa\alpha}^{\cdot\cdot\beta}P_\beta dx^\kappa - R_{\alpha\kappa\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}g_{\nu\rho}\Sigma^{\mu\rho}dx^\kappa/2 = 0$$

Кроме того, весьма странной представляется свертка антисимметричного по $\mu\nu$ тензора $\Upsilon_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\kappa}$ с, вообще говоря, несимметричным по последним индексам тензором $R_{\alpha\kappa}^{\cdot\cdot\mu\nu}$.

7. Уравнения равновесия в пространстве U_4 с кручением

В этом разделе мы предложим простейшее обобщение уравнений (6.3), (6.4) на пространство U_4. Это обобщение не использует метрический тензор. Мы исходим из постулата, что пара Белинфанте (6.5) удовлетворяет уравнению равновесия и в случае пространства U_4, и находим уравнения, которым она удовлетворяет.

Для сокращения записи мы введем обозначение [19]

$$\Upsilon^{\{\alpha\beta\kappa\}} = \Upsilon^{\alpha\beta\kappa} - \Upsilon^{\beta\kappa\alpha} + \Upsilon^{\kappa\alpha\beta}, \quad \Upsilon^{\{\alpha\beta\kappa\}} = -\Upsilon^{\{\alpha\kappa\beta\}},$$

и вспомним, что тензоры энергии-импульса и спина на самом деле являются тензорными плотностями веса + 1. Этот факт игнорировался в предыдущих разделах. Лишь в разделе 5 тензорная плотность энергии-импульса была записана в явном виде $T^{\alpha\beta}\sqrt{-g}$.

Для обозначения тензорных плотностей обычно применяется готический шрифт. Вместо этого мы будем использовать значок wedge, чтобы отмечать плотности. Такое обозначение восходит к переводу книги [20], выполненному И.А. Куниным [21]. Однако, в отличие от [21], значок wedge будет ставиться на уровне нижних индексов для плотности веса + 1:
$T^{\alpha\beta}_{\wedge}, \quad \Upsilon^{\alpha\beta\kappa}_{\wedge}, \quad \sqrt{-g}_{\,\wedge}$.

Ковариантные дивергенции антисимметричных контравариантных плотностей веса $+1$ должны быть равны частным дивергенциям [21, с. 387]. Поэтому в пространстве с кручением при сохранении ковариантной формы записи они заменяются картановскими дивергенциями, которые при наличии индекса α, не входящего в антисимметричную комбинацию, выглядят

$$T^{\alpha\beta}_{\wedge} = \overset{c}{\nabla}_{\kappa}\, \Upsilon^{\{\alpha\beta\kappa\}}_{\wedge}/2 = (\partial_{\kappa}\Upsilon^{\{\alpha\beta\kappa\}}_{\wedge} + \Gamma^{\alpha}_{\kappa\gamma}\Upsilon^{\{\gamma\beta\kappa\}}_{\wedge})/2, \tag{7.1}$$

$$\overset{c}{\nabla}_{\beta}\, T^{\alpha\beta}_{\wedge} = \partial_{\beta}T^{\alpha\beta}_{\wedge} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}T^{\gamma\beta}_{\wedge}. \tag{7.2}$$

Подставляем (7.1) в (7.2):

$$\overset{c}{\nabla}_{\beta}\, T^{\alpha\beta}_{\wedge} = \partial_{\beta}(\partial_{\kappa}\Upsilon^{\{\alpha\beta\kappa\}}_{\wedge} + \Gamma^{\alpha}_{\kappa\gamma}\Upsilon^{\{\gamma\beta\kappa\}}_{\wedge})/2 + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(\partial_{\kappa}\Upsilon^{\{\gamma\beta\kappa\}}_{\wedge} + \Gamma^{\gamma}_{\kappa\delta}\Upsilon^{\{\delta\beta\kappa\}}_{\wedge})/2 = R^{\cdot\cdot\cdot\alpha}_{\beta\kappa\gamma}\Upsilon^{\{\gamma\beta\kappa\}}_{\wedge}/4 = R^{\cdot\cdot\cdot\alpha}_{\{\kappa\gamma\beta\}}\Upsilon^{\gamma\beta\kappa}_{\wedge}/4.$$

В результате, вместо (6.6), получаем уравнения равновесия среды в пространстве с кручением с использованием конструкции $R^{\cdot\cdot\cdot\alpha}_{\{\kappa\gamma\beta\}}$ и без члена, связывающего кручение и импульс:

$$\overset{c}{\nabla}_{\beta}\, T^{\alpha\beta}_{\wedge} - R^{\cdot\cdot\cdot\alpha}_{\{\kappa\gamma\beta\}}\Upsilon^{\gamma\beta\kappa}_{\wedge}/4 = 0, \qquad \overset{c}{\nabla}_{\kappa}\, \Upsilon^{\alpha\beta\kappa}_{\wedge} - 2T^{[\alpha\beta]}_{\wedge} = 0. \tag{7.3}$$

При $S^{\cdot\cdot\alpha}_{\gamma\beta} = 0$ (7.3) переходят в (6.4), поскольку [22, с. 388]

$$R^{\cdot\cdot\cdot\alpha}_{\{\kappa\gamma\beta\}} = -2R^{\cdot\cdot\cdot\alpha}_{\gamma\beta\kappa} + 3R^{\cdot\cdot\cdot\alpha}_{[\kappa\gamma\beta]} = -2R^{\cdot\cdot\cdot\alpha}_{\gamma\beta\kappa} + 6\overset{c}{\nabla}_{[\kappa}\, S^{\cdot\cdot\alpha}_{\gamma\beta]}.$$

Напомним, что ранее другие соображения привели к дополнительному члену в (7.3), связывающему кручение и спин во втором из уравнений равновесия [22],

$$\overset{c}{\nabla}_\beta \underset{\wedge}{T}^{\alpha\beta} - R_{\{\kappa\gamma\beta\}}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} \underset{\wedge}{\Upsilon}^{\gamma\beta\kappa} / 4 = 0\,, \qquad \overset{c}{\nabla}_\kappa \underset{\wedge}{\Upsilon}^{\alpha\beta\kappa} - 2\underset{\wedge}{T}^{[\alpha\beta]} - S_{\{\kappa\gamma}^{\cdot\cdot[\alpha} \delta_{\rho\}}^{\beta]} \underset{\wedge}{\Upsilon}^{\gamma\rho\kappa} = 0\,.$$

Заключение

Таким образом, материя может обладать классическим спином так же, как она обладает энергией и импульсом. Этот спин описывается тензором спина так же, как энергия и импульс описываются тензором энергии-импульса. Истинные тензоры энергии-импульса и спина однозначны и не допускают добавления каких-либо членов, потому что они являются наблюдаемыми величинами. Эти тензоры локализуют импульс и угловой импульс. Для электродинамики истинным тензором энергии-импульса является тензор Максвелла, а тензор спина был предложен в статье автора, направленной ранее в ЖЭТФ. Канонические тензоры не являются истинными. Если вещество не обладает спином, но поглощает его, то это вызывает состояние вещества, описываемое асимметричным тензором энергии-импульса, потому что закон сохранения момента импульса связывает дивергенцию тензора спина и антисимметричную часть тензора энергии-импульса. Законы сохранения импульса и момента импульса называются в статье законами равновесия среды. Эти законы аналогичны законам равновесия упругого волокна в трехмерном пространстве или уравнениям движения дипольной частицы в пространстве-времени. Выражение законов равновесия, конечно, зависит от кривизны и кручения пространства. Уравнения равновесия в искривленном пространстве без кручения общепризнанны; они зависят от аффинной связности пространства и не зависят явно от метрического тензора. Однако для пространства с кручением предложены различные варианты уравнений равновесия и движения. Отмечается, что одно из них зависит явно от метрического тензора, что вызывает возражение.

Список литературы

1. Hehl F.W. // Reports of Mathematical Physics. – 1975, **9**.- p.55.

2. Вейль Г. Пространство, время, материя. – М.: Янус, 1996.- 472 с.

3. Боголюбов Н.Н. и Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. – ГИТТЛ, 1957.- 442 с.

4. Синг Дж. Общая теория относительности. – М.: ИИЛ, 1963.- 432 с.

5. Храпко Р.И. Лакунное определение тензоров энергии-импульса и спина. // Материалы 7-й Всесоюзной гравитационной конференции. Ереван. 1988: Тез. докл. – с.228

6. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. Теория упругости. – М.: Наука, 1965.- 203 с.

7. R.I. Khrapko, www.mai.ru/projects/mai_works/ issue 15 (2003)

8. J. Garecki. Is torsion needed in theory of gravity? – http://arXiv.org/abs/gr-qc/0103029.

9. Schutz B.F. A First Course in General Relativity. - Cambrige University Press, 1985.- 532 p.

10. Misner C.W. et al. Gravitation. - W.H. Freeman and Company, 1973.- 872 p.

11. Rosenfeld L. Sur le tenseur d'impulsion-energie. // Memoires de l'Academie Royale des Sciences de Belgiques. – 1940, v. 18, No 6.

12. F.J. Belinfante F.J. // Physica. - 1939, v. 6.- p. 887.

13. Ohanian H.C. What is spin? // American Journal of Physics. – 1986, **54**.- p.500.

14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1973.- 504 с.

15. Храпко Р.И. Альтернатива параллельному переносу. // Современные проблемы теории относительности и гравитации. Всесоюз. конф., Минск. 1976: Тез. докл. – с.62.

16. Dixon W.G. Dynamics of extended bodies in general relativity. // Proc. Roy. Soc. Lond. – 1970, v. A. 314.- p.499-527.

17. Hehl F.W. How does one measure torsion of space-time? // Physics Letters. – 1971, v. 36A.- p.225-256.

18. Hehl F.W. General relativity with spin and torsion: Foundatins and prospects. // Rev. Mod. Phys. – 1976, v. 48. p.393-416.

19. Schouten J.A. Ricci-Calculus. - Springer-Verlag, 1954.- 654 p.

20. Schouten J.A. Tensor Analysis for Physicists. - Clarendon Press, 1951.- 465 p.

21. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. – М.: Наука, 1965.- 546 с.

22. Храпко Р.И. К теории гравитации в пространстве с кручением. // Теоретические и экспериментальные проблемы гравитации. 9-я Российская гравитационная конф., Новгород. 1996: Тез. докл. - с. 87.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Храпко Радий Игоревич, доцент кафедры физики Московского авиационного института (Государственного технического университета), к.ф.-м.н. E-mail: *khrapko_ri@hotmail.com*

121433, Москва, Б. Филевская, 43 – 92, т. 1446312