МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи

Хромова Ольга Михайловна

ОПТИМИЗАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СТРАТЕГИЙ СИСТЕМ ПО КВАНТИЛЬНОМУ КРИТЕРИЮ

Специальность 05.13.01 —
системный анализ, управление и обработка информации
(авиационная и ракетно-космическая техника)

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор А.И. Кибзун

Москва — 2014 год

Оглавление

Введение

Разработка математических моделей, описывающих управление стохастическими системами, является важной задачей системного анализа. В частном случае стохастические системы могут иметь многоэтапную структуру, как и многие практические задачи, например задачи экономики, управления летательными аппаратами. Процесс принятия решения в таких задачах осуществляется, как правило, последовательно на каждом этапе. На первом этапе выбирается некоторая предварительная стратегия, которая корректируется в дальнейшем за счёт выбора стратегий последующих этапов при реализации случайных параметров. Оптимальные стратегии на различных этапах выбираются исходя из одного и того же критерия оптимизации. Сложность анализа отдельных этапов подобных задач обусловлена необходимостью гарантировать существование допустимых решений задачи на всех последующих этапах. Для описания математических постановок и решения подобных систем применяется аппарат многоэтапных и двухэтапных задач стохастического программирования.

Многоэтапные задачи являются одной из форм записи задачи в терминах управления динамическими системами, имеющими широкое применение в задачах экономических и авиационно-космических приложений.

Пусть имеется динамическая система

$$z_{i+1} = z_i - D_i\tilde{u}_i + w_i,\ \ i=\overline{1,N-1},\ \ z_0^{\mathrm{T}} = (\varphi, 0, ..., 0),$$

где $z_i \in R^{s_i+1}$ — вектор текущего состояния системы, D_i — матрица размерности $(s_i+m)\times(m+m_i+N-1)$ такая, что $D_0 = \begin{pmatrix} c_0^{\mathrm{T}} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D_1 = \begin{pmatrix} a_{11}^{\mathrm{T}}(X_1) & c_1^{\mathrm{T}} \\ A_{21}(X_1) & B_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$D_2 = \begin{pmatrix} a_{12}^{\mathrm{T}}(X_1, X_2) & c_2^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 \\ A_{22}(X_1, X_2) & B_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и т.д.; $X = \mathrm{col}(X_1, ..., X_{N-1})$ — случайный вектор, $X_i \in \mathbb{R}^{n_i}$,

$a_{1i}(X^i),\ i=\overline{1,N-1},$ — измеримые вектор-функции размерности $(m\times 1)$;

$c_0,\ c_i,\ i=\overline{1,N-1},$ — детерминированные вектор-столбцы размерности $(m\times 1)$ и $(m_i\times 1)$ соответственно;

$A_{2i}(X^i),\ i=\overline{1,N-1},$ — заданные измеримые матричные функции размерности $(s_i \times m)$;

$B_i,\ i=\overline{1,N-1}$ — заданная матрица размерности $(s_i \times m_i)$;

$\tilde{u}_i^{\mathrm{T}} = (u, y_i(u, X_1, ..., X_i))$ — векторы управления на текущем шаге $i, i=\overline{1,N}$,

$\tilde{u}_0^{\mathrm{T}} = (u, 0, ..., 0),\ \tilde{u}_i \in \mathbb{R}^(m+m_i),\ u \in U \subset \mathbb{R}^m$;

$y(\cdot)$ — выбирается в классе измеримых по Борелю функций со значениями в $\mathbb{R}^{m_i}$;

w_i — векторы случайных возмущений системы, $w_i \in \mathbb{R}^{((n+m+1)\times 1)}$,

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{31}(X_1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{32}(X_1, X_2) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $a_{3i}(X^i),\ i=\overline{1,N-1},$ — измеримые вектор-функции размерности $(s_i \times 1)$.

Путем очевидных преобразований можно убедиться, что записанная динамическая система может быть представлена в виде многоэтапной задачи стохастического программирования в априорной постановке с функцией потерь

$$\Phi^N(u, y(\cdot), X) \triangleq c_0^{\mathrm{T}} u + a_{11}^{\mathrm{T}}(X_1) u + c_1^{\mathrm{T}} y_1(u, X_1) + a_{12}^{\mathrm{T}}(X_1, X_2) u + \\ + c_2^{\mathrm{T}} y_2(u, X_1, X_2) + ... = c_0^{\mathrm{T}} u + \sum_{i=1}^{N-1} a_{1i}^{\mathrm{T}}(X^i) u + \sum_{i=1}^{N-1} c_i^{\mathrm{T}} y_i(u, X^i)$$

и набором из $N-1$ ограничения

$$\Phi_i(u, y^i(\cdot), X^i) \triangleq A_{2i}(X^i) u + B_i y^i(u, X^i) \geq a_{3i}(X^i), \quad i=\overline{1,N-1}.$$

Многоэтапные задачи рассматривались в работах таких авторов, как D. Barro и E. Canestrelli [77], J. Dupačová, G. Consigli и S.W. Wallace [93], K. Frauendorfer [100], F.V. Louveaux [125], P. Olsen [136], R.T. Rockafellar и R.J.-B. Wets [143, 144], S.W. Wallace и T. Yan [163].

В практических приложениях, например в финансовом планировании, экономике, применяются, как правило, линейные постановки многоэтапных задач стохастического программирования. Многоэтапные задачи стохастического линейного программирования с критерием в форме математического ожидания рассматривались в работах J.R. Birge [84], C. Beltran-Royo, L.F. Escudero и др. [79], M.S. Casey и S. Sen [88], P. Fúsek, P. Kall, J. Mayer и др. [101], C. Swamy и D.B. Shmoys [158]. Прикладная задача оптимизации инвестиционного портфеля, записанная в форме многоэтапной задачи стохастического линейного программирования рассмотрена в работе G.B. Dantzig и G. Infanger [90].

Различные методы решения многоэтапных задач стохастического программирования с дискретным распределением случайных параметров рассмотрены в работах P. Fúsek, P. Kall, J. Mayer и др. [101], F.V. Louveaux [124].

Случай гауссовского распределения исследован в работах P. Parpas, B. Ustin, M. Webster и Q.K. Tran [137], E. Schweitzer и M. Avriel [149], где предложены алгоритмы получения верхней оценки оптимального решения задачи.

Различные постановки линейных многоэтапных задач целочисленного стохастического программирования и условия оптимальности решений исследуются в работе W. Römisch и R. Schultz [145], а в работе Y. Guan, S. Ahmed и G.L. Nemhauser [103] для решения многоэтапной задачи стохастического целочисленного программирования предлагается использовать метод генерации секущих плоскостей. Эффективность данного метода продемонстрирована на примере задачи о ранце в стохастической постановке и стохастической задачи большой размерности.

В работах J.L. Higle и S. Sen [105], W. Römisch и R. Schultz [145] для решения многоэтапных задач стохастического программирования применяется теория двойственности.

Нелинейный случай многоэтапных задач стохастического программирования рассмотрен в работах J. Blomvall и P.O. Lindberg [87], V. Kaňková [112], G. Zhao [169].

Несмотря на наличие большого количества работ в области многоэтапных стохастических задач, класс многоэтапных задач стохастического программирования с квантильным критерием ранее не рассматривался.

Многоэтапные линейные относительно стратегий задачи стохастического программирования с квантильным критерием позволяют учитывать возможность коррекции выбираемой стратегии при реализации случайных параметров. В ходе решения таких задач получается гарантированный по вероятности результат, что позволяет применять алгоритмы решения данных задач в приложениях авиационной и космической техники.

Многоэтапные задачи стохастического программирования являются естественным обобщением двухэтапных задач. Двухэтапные и многоэтапные задачи стохастического программирования рассмотрены в работах E. Schweitzer и M. Avriel [149], A. Shapiro [153, 154], A. Shapiro и A. Nemirovski [156].

Аппарат двухэтапных задач стохастического программирования можно применить для решения экономических задач планирования и управления. Решение двухэтапной задачи представляется в виде детерминированного и случайного векторов — планов первого и второго этапов соответственно. Стратегии первого и второго этапов выбираются в рамках общей цели задачи. При этом при выборе стратегии первого этапа учитывается лишь оптимальное значение критериальной функции задачи второго этапа.

Модели двухэтапных задач впервые были рассмотрены в работах E.M.L. Beale [78] и G.B. Dantzig [89]. Дальнейшее изучение постановок двухэтапных задач отражено в работах A. Madansky [127, 128], R. Wets [166, 167], а различные обобщения постановок данных задач приведены в работах M.A.H. Dempster [92], J. Wessels [165]. Исследованиями, связанными с определением и оценкой распределения компонент оптимального плана и условного экстремума критериальной функции, занимались M.M. Faber [94], J.K. Sengupta [152]. Свойства двухэтапных задач, а также методы решения задач данного класса рассмотрены в работах таких авторов, как А.С. Величко [7], J.R. Birge и F. Louveaux [85], G.B. Dantzig [89], I. Deák, I. Polík и др. [91], P. Kall и S.W. Wallace [111], A. Ruszczyński [146], S.W. Wallace и T. Yan [163], R.J.-B. Wets [166]. Различные практические приложения двухэтапных задач можно найти в работах М.Б. Щепакина [72], Д.Б. Юдина [75, 76], J.L Milder и R.D. Wollmer [130], S.W. Wallace и W.T. Ziemba [164].

В авиационной и ракетно-космической технике наиболее адекватными являются постановки задач стохастического программирования с вероятностными критерями качества. Применение вероятностных критериев качества при решении задач стохастического программирования обеспечивает получение гарантированного по вероятности реультата. Вероятностный критерий представляет собой вероятность непревышения допустимого уровня потерь, связанных с реализацией оптимизируемой стратегии. А квантильный критерий представляет собой уровень потерь при реализации стратегии, непревышение которого гарантируется с заданной вероятностью. При использовании вероятностного критерия потери, связанные с реализациями оптимизационных стратегий, фиксируются на некотором допустимом уровне, а вероятность непревышения этого уровня максимизируется. В случае с квантильным критерием — вероятность непревышения уровня потерь фиксируется на допустимом уровне, а потери при реализации стратегии минимизируются.

Задачи стохастического программирования с вероятностными ограничениями впервые были рассмотрены в работе A. Charnes, W.W. Cooper и G.N. Symonds [95]. Дальнейшие исследование указанного класса задач были продолжены в работах A. Charnes и W.W. Cooper [96, 97], P. Kall [109], P. Kall и J. Mayer [110], P. Kall и S.W. Wallace [111], S. Kataoka [113–116], V.V. Kolbin [120], B.L. Miller и H.M. Wagner [131], A.Prékopa [140], G.H. Symonds [159], S. Vajda [162] и др.

Квантильный критерий впервые был введен в рассмотрение в работе S. Kataoka [115]. Дальнейшее изучение задач с квантильным критерием связано с именами Р. Леппа [47,122], Э. Райка [58–60], Э. Тамма [65, 66], Э. Юби [73, 74].

Изучению свойств вероятностных и квантильных критериев посвящено большое количество работ А.И. Кибзуна [24] в соавторстве со своими учениками — Б.В. Вишняковым [9, 10], В.А. Ефремовым [16], Ю.С. Каном [21, 22, 25, 117], В.Ю. Курбаковским [26], Е.Л. Матвеевым [30–33], А.В. Наумовым [34, 35], Г.Л. Третьяковым [40].

Результаты исследований в области теории и практики решения задач с вероятностным критериями представлены работах Ю.М. Ермольева [15], А.И. Кибзуна и Ю.С. Кана [25, 117], А.И. Кибзуна и В.В. Малышева [28,29,49], В.И. Норкина [134], С.П. Урясьева [160, 161], P. Beraldi и A. Ruszczyński [82,83], K. Marti [129], J. Luedtke, S. Ahmed и G.L. Nemhauser [126], A. Nemirovski и A. Shapiro [132, 133], A. Prékopa [138, 139], A. Ruszczyński и A. Shapiro [148], A. Shapiro, D. Dentcheva и A. Ruszczyński [155].

В работе А.И. Кибзуна и А.В. Наумова [35] была впервые сформулирована двухэтапная задача стохастического программирования с квантильным критерием. В указанной работе была показана показана эквивалентность априорной и апостериорной постановок задач квантильной оптимизации. В работе А.В. Наумова и И.М. Бобылёва [52] отражены результаты дальнейших исследований двухэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием. В частности, для скалярного случая предложен детерминированный эквивалент, а также доказана непрерывность функции квантили критерия задачи второго этапа, предложены условия существования решения задачи.

Важным направлением стохастического программирования является решение задач с вероятностными критериями при дискретном распределении случайных параметров. Данная задача впервые была исследована в работе F.S. Hillier [106], последующие исследования данного вопроса отражены в работах P. Beraldi и A. Ruszczyński [82,83], J. Luedtke, S. Ahmed и G.L. Nemhauser [126], S. Sen [151]. Дискретное распределение может быть применено для аппроксимации непрерывного распределения случайных параметров в задачах стохастического программирования. В работе А.И. Кибзуна и И.В. Никулина [39] исследовался вопрос возможности дискретной аппроксимации линейной двухэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием.

Алгоритмы, основанные на переходе от задачи с вероятностными ограничениями к экивалентной задаче смешанного математического программирования, были предложены в работах J. Luedtke, S. Ahmed и G.L. Nemhauser [126], A. Ruszczyński [147], S. Sen [151]. В работе В.И. Норкина [135] данный результат был обобщен для задач стохастического программирования с квантильным критерием. А в работах А.И. Кибзуна, А.В. Наумова и В.И. Норкина [36, 37] предложена процедура сведения двухэтапных задач стохастического программирования с квантильным критерием при дискретном распределении случайных параметров к задаче смешанного целочисленного программирования.

Прикладные двухэтапные задачи стохастического программирования с критерием в форме квантили применялись для оптимизации экономических систем. Например в работах А.В. Наумова [50, 51] исследовалась задача оптимизации бюджета госпиталя и задача оптимального инвестирования по квантильному критерию, в работе А.Б. Богданова и А.В. Наумова [5] рассмотрена логистическая задача, в работе А.В. Наумова и С.В. Уланова [55] исследована задача оптимального распределения ресурсов, а в работе А.И. Кибзуна, А.В. Наумова и С.В. Уланова [38] рассмотрена задача оптимизации самолётного парка авиакомпании.

Одним из эффективных способов решения вероятностных задач оптимизации является обобщённый минимаксный подход. В монографиях А.И. Кибзуна и Ю.С. Кана [25, 117] рассмотрено продолжение обобщённого минимаксного подхода, предложенного В.В. Малышевым и А.И. Кибзуном в монографии [49]. Смысл данного подхода заключается в замене исходной задачи квантильной оптимизации эквивалентной минимаксной задачей, в которой максимум от целевой функции потерь берётся по всем возможным значениям случайных параметров, принадлежащих некоторому доверительному множеству соответствующей вероятностной меры. Внешний минимум при этом берётся по стратегии оптимизации и всем доверительным множествам этой же вероятностной меры. Точное решение данной задачи может быть получено лишь в некоторых частных случаях, поэтому часто осуществляется поиск некоторого допустимого решения задачи при фиксированном доверительном множестве. Получаемое при найденном допустимом решении значение критериальной функции представляет собой верхнюю оценку оптимального значения критерия задачи.

Для получения точного решения задачи стохастического программирования с квантильным критерием могут быть использованы методы, основанные на процедуре стохастической аппроксимации. Исследования применения данных методов представлены в монографиях А.И. Кибзуна и Ю.С. Кана [25, 117] и в работах Ю.С. Кана [19, 20], А.И. Кибзуна и Е.Л. Матвеева [31, 119]. Следует отметить, что данные методы нельзя применить для широкого класса задач, кроме того, они отличаются низкой скоростью сходимости.

При решении двухэтапных задач стохастического программирования применяется теория двойственности, что отражено в работах A. Madansky [127], R.T. Rockafellar и R.J.-B. Wets [141, 142], R.J.-B. Wets [168].

Одним из методов решения двухэтапных задач квантильной оптимизации является сведение данных задач к одноэтапным. Одноэтапные задачи квантильной оптимизации рассмотрены в монографиях А.И. Кибзуна и Ю.С. Кана [25, 117].

Для исследований экономических систем, описанных с помощью линейных моделей, применяются двухэтапные задачи стохастического линейного программирования.

Классическая постановка двухэтапной задачи стохастического линейного программирования с критерием в форме математического ожидания выглядит следующим образом:

$$c_1^T u + \mathrm{M}[\Phi(u, X)] \to \min_u$$

при ограничениях:

$$A_1 u = b_1,$$

$$u \geq 0,$$

где $c_1 \in \mathbb{R}^m$, u — стратегия первого этапа, $u \in \mathbb{R}^m$, $b_1 \in \mathbb{R}^l$ – детерминированный вектор, $A_1 \in \mathbb{R}^{l \times m}$ — детерминированная матрица, b_1 и A_1 — параметры задачи первого этапа, X — случайный вектор, параметры задачи второго этапа $c_2(w), A_2(w), B_2(w), h_2(w)$ имеют некоторое совместное распределение и заданы на одном пространстве элементарных событий Ω.

Задача второго этапа имеет следующий вид:

$$\Phi(u, x) = \min_y c_2^T y$$

при ограничениях:

$$B_2 y = h_2 - A_2 u,$$

$$y \geq 0,$$

где x — реализация случайного вектора X, $c_2 \in \mathbb{R}^p$, $B_2 \in \mathbb{R}^{q \times p}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{q \times m}$, $h_2 \in \mathbb{R}^q$.

Двухэтапные задачи линейного стохастического программирования активно изучались различными исследователями, например в работах J.R. Birge и F.V. Louveaux [85], P. Kall [109], S. Sen [150] рассмотрены свойства задач данного класса.

Изучение задач нелинейного стохастического программирования представлено в работах Э. Райка [58, 59], M.A. Hanson [104].

Двухэтапные задачи стохастического линейного программирования с критерием в форме математического ожидания рассматривались в работах J.R. Birge и F.V. Louveaux [85], P. Kall и S.W. Wallace [111], R. Wets [166, 167].

Актуальность диссертационной работы обусловлена ограниченностью исследования многоэтапных задач стохастического программирования, в частности, отсутствием постановки многоэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием, а также алгоритмов её решения. В диссертации рассматривается новый класс задач — многоэтапные задачи стохастического программирования с квантильным критерием. Кроме того, для двухэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием ранее не рассматривались алгоритмы поиска решения в случае билинейной функции потерь.

Цели и задачи работы. Целью диссертации является изучение свойств многоэтапных задач стохастического программирования с квантильным критерием, функция потерь в которых линейна относительно оптимизируемых стратегий, а также разработка эффективных алгоритмов поиска решений данных задач.

Для достижения выбранной цели необходимо решить следующие задачи.

1. Разработать эффективные алгоритмы поиска решений многоэтапных линейных по стратегиям задач стохастического программирования с квантильным критерием.

2. Разработать численные процедуры, реализующие предложенные алгоритмы решения двухэтапных и многоэтапных линейных по стратегиям задач стохастического программирования с квантильным критерием, и проверить их эффективность на решении прикладной задачи.

Методы исследования. В диссертации используются методы системного анализа, методы стохастического программирования, математического моделирования, теории оптимизации, теории вероятностей.

Достоверность результатов обеспечивается строгостью математических постановок и доказательств утверждений, корректным использованием методов системного анализа, подтверждением теоретических результатов численными экспериментами.

Научная новизна. В диссертационной работе получены новые теоретические результаты и разработаны новые алгоритмы решения многоэтапных задач стохастического программирования с квантильным критерием, в которых функция потерь линейна относительно стратегий. Среди полученных результатов можно выделить следующие.

1. Доказана эквивалентность многоэтапной линейной относительно стратегии задачи стохастического программирования с квантильным критерием и дискретизированным

распределением случайных параметров и двухэтапной задачи квантильной оптимизации.

2. Разработан алгоритм поиска решения многоэтапной линейной по стратегии задачи стохастического программирования с квантильным критерием и дискретизированным распределением, основанный на переходе к эквивалентной задаче смешанного целочисленного линейного программирования.

3. Разработан алгоритм поиска решения двухэтапной задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь и нормальным распределением, основанный на переходе к задаче выпуклого программирования, параметризованной скалярным параметром, выбор которого осуществляется методом дихотомии.

4. Для задачи управления линейной стохастической системой специального вида с нормальным распределением случайных параметров и квантильным критерием получен детерминированный эквивалент.

Практическая значимость работы состоит в том, что её результаты могут служить основой для разработки программно-алгоритмического обеспечения решения прикладных задач в областях авиационной и ракетно-космической техники, оптимизации функционирования транспортных и логистических систем, систем распределения ресурсов, оптимального инвестирования. Эффективность предложенных алгоритмов продемонстрирована при решении задачи оптимального выбора трассы с учётом случайной стоимости работ на разных участках.

Положения, выносимые на защиту.

1. Для случая дискретного распределения специального вида, полученного путем дискретизации непрерывного распределения, доказана эквивалентность многоэтапной линейной относительно стратегии задачи стохастического программирования с квантильным критерием и двухэтапной задачи квантильной оптимизации.

2. Для случая дискретного распределения специального вида, полученного путем дискретизации непрерывного распределения, разработан алгоритм поиска решения многоэтапной линейной по стратегии задачи стохастического программирования с квантильным критерием, основанный на переходе к эквивалентной задаче смешанного целочисленного линейного программирования.

3. Разработан алгоритм поиска гарантирующего решения двухэтапной задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь и нормальным распределением, основанный на последовательном решении задач выпуклого программирования и методе Монте-Карло.

4. Многошаговая задача управления линейной стохастической системой специального вида с гауссовскими помехами и квантильным критерием сведена к детерминированной задаче, для решения которой предложен алгоритм, основанный на методе динамического программирования и методе ветвей и границ.

Содержание диссертации

Во введении дано обоснование актуальности выбранной автором темы диссертации, сформулирована цель и задачи работы, аргументирована научная новизна и практическая значимость диссертационного исследования, в сжатом виде изложено содержание глав диссертации и сформулированы результаты, представляемые к защите.

Первая глава посвящена исследованию многоэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием, в которой функция потерь линейна относительно стратегий. Для случая дискретного распределения специального вида, полученного путем дискретизации непрерывного распределения, доказана эквивалентность рассматриваемой задачи и двухэтапной задачи квантильной оптимизации. Разработан алгоритм поиска решения многоэтапной линейной относительно стратегий задачи стохастического програмирования с квантильным критерием, основанный на переходе к эквивалентной задаче смешанного целочисленного линейного программирования. Приведены результаты численных расчётов, демонстрирующие эффективность предложенных в главе алгоритмов.

Вторая глава посвящена разработке алгоритмов поиска решений двухэтапных задач стохастического программирования с квантильным критерием и билинейной функцией потерь. Рассматривается случай нормального распределения случайных параметров задачи. В главе приводится процедура сведения исходной стохастической задачи к задаче выпуклого программирования, которая параметризована скалярным параметром. Исследованы свойства верхней оценки функции квантили для билинейной двухэтапной задачи. Разработан алгоритм поиска решения двухэтапной задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь и нормальным распределением случайных параметров. Предложенный алгоритм основан на переходе от исходной задачи к задаче выпуклого программирования, параметризованной скалярным параметром, подлежащим выбору с помощью метода дихотомии. Приведены результаты численных расчётов, иллюстрирующие эффективность предложенных в главе алгоритмов.

В третьей главе рассматривается задача выбора оптимальной трассы с учётом случайной стоимости работ на разных участках. Задача рассмотрена в детерминированной и стохастической постановках.

Разработана математическая модель выбора оптимальной трассы, учитывающая случайную стоимость работ на разных участках. Показана эквивалентность задачи в классе позиционных и программных стратегий. Для задачи оптимизации в детерминированной постановке разработан алгоритм решения, основанный на методе ветвей и границ.

Для многошаговой задачи управления линейной стохастической системой специального вида с нормальным распределением случайных факторов и квантильным критерием получен детерминированный эквивалент. Разработан алгоритм решения задачи оптимизации в стохастической постановке, основанный на алгоритме решения задачи в детерминированной постановке. Приведены результаты численных расчётов на примере прикладной задачи.

В заключении подведены основные итоги работы, а также предложены некоторые перспективные направления дальнейших исследований в области многоэтапных линейных по стратегиям задач стохастического программирования с квантильным критерием.

Апробация работы. Результаты диссертации выносились на обсуждение научного сообщества в ходе научных семинаров кафедры теории вероятностей Московского авиационного института (руководитель — профессор Кибзун А.И.), 3-й и 4-й Традиционной молодёжной Школы «Управление, информация и оптимизация» (Россия, Ярополец, 2011 г.; Россия, Звенигород, 2012 г.), научного семинара лаборатории №7 Института проблем управления РАН (руководитель — профессор Поляк Б.Т.)

Материалы диссертации были представлены на следующих конференциях: 16-я международная конференция «Системный анализ, управление и навигация» (Украина, Евпатория, 2011 г.), научно-техническая конференция молодых ученых и специалистов «Молодежь и будущее авиации и космонавтики» (Россия, Москва, 2009 г.), XLIX международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс» (Россия, Новосибирск, 2011 г.), научно-практическая конференция студентов и молодых ученых МАИ «Инновации в авиации и космонавтике — 2011», 12-ая Международная конференция «Авиация и космонавтика-2013» (Россия, Москва, 2013 г.)

Работа поддержана грантами РФФИ (11-07-90407-Укр-ф-а, 11-07-00315-а, 12-07-00191-а), и государственным финансированием ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (мероприятие 1.2.2, госконтракт № 14.740.11.1128).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 3 научных статьях [42–44] в журналах, входящих в перечень ВАК. Помимо этого, результаты частично опубликованы в различных сборниках и материалах конференций [41, 45, 68–70]. Общее число публикаций — 8.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность научному руководителю — заведующему кафедрой теории вероятностей Московского авиационного института профессору А.И. Кибзуну, профессору Ю.С. Кану и ассистенту С.В. Иванову за разностороннюю помощь, оказанную диссертанту в процессе исследований и написания диссертации.

Структура и объём диссертации. Диссертация содержит введение, три главы, заключение, перечень сокращений и условных обозначений и список используемой литературы. Работа состоит из 118 страниц, включая 7 рисунков, 3 таблицы и список литературы, содержащий 169 наименований.

1. Алгоритмы решения многоэтапных задач стохастического программирования с квантильным критерием для линейных относительно стратегий систем

Традиционно в задачах стохастического программирования в качестве критерия оптимизации используется математическое ожидание. В авиационной и ракетно-космической технике особое внимание уделяется вопросам надёжности систем, поэтому достаточно часто требуется найти гарантированное по вероятности решение. В этом случае наиболее адекватными являются постановки задач стохастического программирования с квантильным критерием. Методам решения задач квантильной оптимизации посвящена монография А.И. Кибзуна и Ю.С. Кана [25]. Однако известные к настоящему времени методы не охватывают многоэтапные модели с квантильным критерием, возникающие во многих прикладных задачах.

Многоэтапные задачи стохастического программирования оказываются очень близки к динамическим задачам управления, учитывающим воздействие случайных факторов. Подобные задачи были рассмотрены в монографии В.В. Малышева и А.И. Кибзуна [49]. В многоэтапных задачах выбирается стратегия первого этапа, которая в зависимости от реализации случайных факторов корректируется на последующих этапах (шагах). Как уже отмечалось, многоэтапные задачи являются обобщением двухэтапных задач стохастического программирования. Впервые двухэтапная задача стохастического программирования с квантильным критерием была рассмотрена в работе А.И. Кибзуна и А.В. Наумова [35], где была получена верхняя оценка квантильного критерия для двухэтапной задачи, основанная на решении задачи линейного программирования.

В работах С.В. Иванова и А.В. Наумова [17] и А.И. Кибзуна, А.В. Наумова и В.И. Норкина [36] рассмотрены линейные одноэтапные задачи квантильной оптимизации с дискретным распределением, которые сводятся к задачам смешанного целочисленного линейного программирования. В работе А.И. Кибзуна, А.В. Наумова и В.И. Норкина [37] рассмотрен общий случай двухэтапной задачи квантильной оптимизации, которая сведена к задаче смешанного целочисленного программирования большой размерности.

В данной главе исследуется многоэтапная линейная относительно стратегий задача стохастического программирования с квантильным критерием. Такая постановка многоэтапной задачи рассматривается впервые. С помощью эквивалентных преобразований исследуемая задача сводится к двухэтапной задаче стохастического программирования, которая, в свою очередь, сводится к задаче смешанного целочисленного линейного программирования.

В разделе 1.1 приводится постановка многоэтапной линейной относительно стратегий задачи стохастического программирования с квантильным критерием.

В разделе 1.2 описывается процедура сведения рассматриваемой задачи с помощью эквивалентных преобразований к двухэтапной задаче стохастического программирования в априорной постановке.

В разделе 1.3 описывается процедура сведения двухэтапной задачи стохастического программирования в априорной постановке к двухэтапной задаче в апостериорной постановке. Доказывается эквивалентность двухэтапных задач с квантильным критерием в априорной и в апостериорной постановках, записанных для общего случая.

В разделе 1.4 для случая дискретного распределения специального вида, полученного путём дискретизации непрерывного распределения, двухэтапная задача стохастического программирования с квантильным критерием сводится к задаче смешанного целочисленного линейного программирования.

В разделе 1.5 предлагается алгоритм решения многоэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием.

Раздел 1.6 содержит результаты численных расчётов применения предложенного в разделе 1.5 алгоритма.

1.1. Постановка многоэтапной линейной относительно стратегий задачи стохастического программирования

Многоэтапные задачи стохастического программирования обычно рассматриваются в апостериорной постановке, когда оптимальный план на текущем этапе выбирается в зависимости от реализации случайных факторов на предыдущих этапах. По сути это означает применение метода динамического программирования для решения задачи стохастического программирования. Но, как известно из работы Д. Бертсекаса и С. Шрива [4], метод динамического программирования для решения задачи стохастического управления применим лишь тогда, когда критерий оптимизации обладает аддитивным и марковским свойствами. Именно такими свойствами обладает математическое ожидание от функции случайных потерь. Согласно монографии В.В. Малышева и А.И. Кибзуна [49] квантильный критерий не обладает ни марковским, ни аддитивным свойствами, вследствие чего записать многоэтапную задачу стохастического программирования с квантильным критерием в традиционной апостериорной постановке невозможно в принципе. В данной главе диссертации исследуется задача квантильной оптимизации записанная в априорной постановке, когда оптимальные планы на всех этапах, кроме первого, выбираются в классе функций, зависящих от всей предыдущей информации.

Сформулируем N-этапную задачу стохастического программирования в априорной постановке. Введём функцию потерь

$$\begin{aligned}\Phi^N(u, y(\cdot), X) &\triangleq c_0^{\mathrm{T}}u + a_{11}^{\mathrm{T}}(X_1)u + c_1^{\mathrm{T}}y_1(u, X_1) + a_{12}^{\mathrm{T}}(X_1, X_2)u + \\ &+ c_2^{\mathrm{T}}y_2(u, X_1, X_2) + \ldots = c_0^{\mathrm{T}}u + \sum_{i=1}^{N-1} a_{1i}^{\mathrm{T}}(X^i)u + \sum_{i=1}^{N-1} c_i^{\mathrm{T}}y_i(u, X^i),\end{aligned} \tag{1.1}$$

где $X = \mathrm{col}(X_1, \ldots, X_{N-1}),\ X^i = \mathrm{col}(X_1, \ldots, X_i),\ i = \overline{1, N-1},$ — наборы случайных векторов $X_i \in \mathbb{R}^{n_i}$;

$u \in U \subset \mathbb{R}^m$ — план первого этапа, где U — множество допустимых стратегий первого этапа, являющееся выпуклым компактным многогранником;

$y(\cdot) \in \mathcal{Y},\ \ y(\cdot) = \mathrm{col}(y_1(\cdot), \ldots,\ y_{N-1}(\cdot))$ — вектор-функция планов последующих $N-1$ этапов, выбираемая в классе измеримых по Борелю функций со значениями в $\mathbb{R}^{m_i}$;

$\mathcal{Y}$ – множество допустимых стратегий последующих $N-1$ этапов, имеющее вид:

$$\mathcal{Y} \triangleq \{y(\cdot) :\ y_i(u, X^i) \geq 0,\ i = \overline{1, N-1}\}. \tag{1.2}$$

$a_{1i}(X^i),\ i = \overline{1, N-1},$ — заданные измеримые вектор-функции размерности $(m \times 1)$;

$c_0,\ c_i,\ i=\overline{1,N-1}$, — заданные детерминированные вектор-столбцы размерности $(m\times 1)$ и $(m_i\times 1)$ соответственно.

В работе В.В. Подиновского и В.Д. Ногина [56, С. 205] показано, что для того, чтобы множество допустимых стратегий первого этапа U являлось выпуклым компактным многогранным множеством, необходимо, чтобы конус рецессивных направлений множества U состоял только из нулевого вектора:

$$0^+U \triangleq \{u\in\mathbb{R}^m : A_u u\le 0\}=\vec{0},$$

где $\vec{0}\in\mathbb{R}^m$ — нулевой вектор, матрица A_u имеет размерность $(k_1\times m)$.

Пусть $x\in\mathbb{R}^n$, $n=n_1+n_2+...+n_{N-1}$, — реализации случайного вектора X. Предположим, что случайный вектор X имеет плотность распределения $p(x)$.

Пусть имеется набор из $N-1$ ограничения

$$\Phi_i(u,y^i(\cdot),X^i)\triangleq A_{2i}(X^i)u+B_iy^i(u,X^i)\ge a_{3i}(X^i),\ \ i=\overline{1,N-1}, \tag{1.3}$$

где $y^i(\cdot)=\mathrm{col}(y_1(\cdot),...,\ y_i(\cdot))$ — наборы вектор-функций $y_i(\cdot)\in\mathbb{R}^{m_i}$;
$A_{2i}(X^i),\ i=\overline{1,N-1}$, — заданные измеримые матричные функции размерности $(s_i\times m)$;
$B_i,\ i=\overline{1,N-1}$ — заданная матрица размерности $(s_i\times m_i)$;
$a_{3i}(X^i),\ i=\overline{1,N-1}$, — заданные измеримые вектор-функции размерности $(s_i\times 1)$.

Рассмотрим функцию вероятности

$$P_\varphi(u,y(\cdot))=\mathcal{P}\{\Phi^N(u,y(\cdot),X)\le\varphi,\ \ \Phi_i(u,y^i(\cdot),X^i)\ge a_{3i}(X^i),\ i=\overline{1,N-1}\}, \tag{1.4}$$

характеризующую вероятность такого события, что целевая функция потерь не превосходит некоторый уровень φ при выполнении ограничений задачи, где $\mathcal{P}$ — вероятностная мера, порождённая распределением случайного вектора X.

Рассмотрим функцию квантили, характеризующую значение, которое заданная случайная величина не превышает с некоторой фиксированной вероятностью

$$\varphi_\alpha(u,y(\cdot))\triangleq\min\{\varphi : P_\varphi(u,y(\cdot))\ge\alpha\},\alpha\in(0,1), \tag{1.5}$$

где α — требуемый уровень вероятности.

Как правило, в прикладных задачах требуемый уровень вероятности оказывается выше $1/2$, поэтому здесь и далее без ограничения общности будем считать, что α выбирается из диапазона $\alpha\in(1/2,1)$.

Сформулируем N-этапную задачу стохастического программирования с квантильным критерием в априорной постановке

$$\varphi_\alpha^N = \min_{u \in U,\, y(\cdot) \in \mathcal{Y}} \varphi_\alpha(u, y(\cdot)),\ u_\alpha^N = \arg\min_{u \in U}[\min_{y(\cdot) \in \mathcal{Y}} \varphi_\alpha(u, y(\cdot))], \tag{1.6}$$

где U — заданное множество допустимых стратегий первого этапа, а $\mathcal{Y}$ — множество допустимых стратегий последующих $N-1$ этапов, структура которого определена выражением (1.2). Под решением задачи (1.6) понимается пара $(\varphi_\alpha^N, u_\alpha^N)$. Если не существует оптимальной стратегии первого этапа u_α^N, то есть минимум в N-этапной задаче (1.6) не достигается, то считается, что решение в задаче (1.6) не существует.

Для простоты дальнейших рассуждений рассмотрим многоэтапную задачу квантильной оптимизации, в которой количество этапов $N = 3$. Тогда функция вероятности трёхэтапной задачи стохастического программирования примет вид:

$$P_\varphi(u, y(\cdot)) = \mathcal{P}\{\Phi^3(u, y(\cdot), X) \le \varphi,\ \Phi_i(u, y^i(\cdot), X^i) \ge a_{3i}(X^i), i = 1, 2\}, \tag{1.7}$$

где функция потерь трёхэтапной задачи представима в виде:

$$\Phi^3(u, y(\cdot), X) = c_0^{\mathrm{T}} u + a_{11}^{\mathrm{T}}(X_1) u + c_1^{\mathrm{T}} y_1(u, X_1) + a_{12}^{\mathrm{T}}(X_1, X_2) u + c_2^{\mathrm{T}} y_2(u, X_1, X_2), \tag{1.8}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \Phi_2(u, y^2(\cdot), X^2) = A_{22}(X_1, X_2) u + B_2 y_2(u, X_1, X_2) \ge a_{32}(X_1, X_2), \\ \Phi_1(u, y^1(\cdot), X^1) = A_{21}(X_1) u + B_1 y_1(u, X_1) \ge a_{31}(X_1), \end{aligned} \tag{1.9}$$

где $X = \mathrm{col}(X_1, X_2),\ X^1 = X_1,\ X^2 = \mathrm{col}(X_1, X_2)$;
$u \in U \subset \mathbb{R}^m$ — план первого этапа;
$y(\cdot) \in \mathcal{Y},\ y(\cdot) = \mathrm{col}(y_1(\cdot),\ y_2(\cdot))$ — вектор-функция планов второго и третьего этапов, $y_1(\cdot),\ y_2(\cdot)$ имеют размерности $(m_1 \times 1)$ и $(m_2 \times 1)$ соответственно;
$a_{11}(X^1),\ a_{12}(X^2)$— заданные измеримые вектор-функции размерности $(m \times 1)$;
$c_0,\ c_1,\ c_2$ — заданные детерминированные вектор-столбцы размерности $(m \times 1)$, $(m_1 \times 1)$, $(m_2 \times 1)$ соответственно;
$A_{21}(X^1),\ A_{22}(X^2)$ — заданные измеримые матричные функции размерности $(s_1 \times m)$ и $(s_2 \times m)$ соответственно;
$B_1,\ B_2$ — заданные матрицы размерности $(s_1 \times m_1)$ и $(s_2 \times m_2)$ соответственно;
$a_{31}(X^1),\ a_{32}(X^2)$ — заданные измеримые вектор-функции размерности $(s_1 \times 1)$ и $(s_2 \times 1)$ соответственно.

Данная трёхэтапная задача стохастического программирования может быть сведена к двухэтапной задаче, что будет показано в следующем разделе.

1.2. Сведение многоэтапной задачи квантильной оптимизации к двухэтапной задаче стохастического программирования в априорной постановке

Предположим, что вероятностная мера $\mathcal{P}$, порождённая распределением случайного вектора X, абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и существует плотность $p(x)$ случайного вектора X. Дискретизируем вероятностную меру $\mathcal{P}$ следующим образом. Пусть $x^k,\ k = \overline{1, K}$, — точки, сгенерированные случайным образом согласно плотности $p(x)$. Определим меры этих точек как $p_k \triangleq \tilde{\mathcal{P}}\{X = x^k\} = 1/K,\ k = \overline{1, K}$.

Пусть $\tilde{X} \triangleq \mathrm{col}(\tilde{X}_1, ..., \ \tilde{X}_{N-1})$ — случайный вектор, соответствующий этим мерам, то есть $\tilde{\mathcal{P}}\{\tilde{X} = x^k\} = p_k$, где случайные подвекторы $\tilde{X}_i$ имеют ту же размерность, что и $X_i,\ i = \overline{1, N-1}$. Пусть $F_K(x)$ — функция распределения случайного вектора $\tilde{X}$. Рассмотрим выборочную функцию распределения $\hat{F}_K(x)$. В соответствии с теоремой Гливенко и Кантелли, приведённой в работе А.Н. Ширяева [71, С. 482], имеет место сходимость $\hat{F}_K(x) \xrightarrow{\text{п.н.}} F(x)$ при $K \to \infty$ для всех x (п.н. – почти наверное), где $F(x)$ — функция распределения случайного вектора X.

Далее под дискретным распределением $F_K(x)$ специального вида будем понимать дискретное распределение, полученное путём дискретизации непрерывного распределения с помощью описанной выше схемы дискретизации.

Рассмотрим следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Пусть случайный вектор* $\tilde{X} = \mathrm{col}(\tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_{N-1})$ *имеет дискретное распределение* $F_K(x)$ *специального вида. Тогда существуют детерминированные функции* $f_i(\tilde{X}_1)$ *такие, что*

$$\tilde{\mathcal{P}}\{\tilde{X}_i = f_i(\tilde{X}_1)\} = 1,\ i = \overline{2, N-1},$$

где $\tilde{\mathcal{P}}$ *– вероятностная мера, аппроксимирующая меру* $\mathcal{P}$.

Доказательство леммы 1.1.

Пусть $x^k,\ k = \overline{1, K}$, — апостериорная выборка, соответствующая плотности $p(x)$. Пусть случайный вектор $\tilde{X} = \mathrm{col}(\tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_{N-1})$ имеет распределение $F_K(x)$ с мерами $\tilde{\mathcal{P}}\{\tilde{X} = x^k\} = 1/K,\ k = \overline{1, K}$. Найдем распределение подвектора $\tilde{X}_1$. Поскольку у исходного вектора X существует плотность $p(x)$, то вероятность $\mathcal{P}\{X \tilde{=} x\} = 0$ для любого x. Пусть $X^k,\ k = \overline{1, K}$, — априорная выборка, соответствующая плотности $p(x)$. Поскольку $\tilde{\mathcal{P}}\{X = x\} = 0$ для всех x, то $\tilde{\mathcal{P}}\{X^k = X^j\} = 0$ для всех $k \neq j$, то есть $X^k \neq X^j$ почти наверное для всех $k \neq j$. Но компоненты $X_i^k,\ i = \overline{1, N-1}$, вектора X^k также имеют плотности $p_i(x_i)$, поэтому $\tilde{\mathcal{P}}\{X_i^k = X_i^j\} = 0$ для всех $k \neq j,\ i = \overline{1, N-1}$. Это означает, что $X_i^k \neq X_j^k$ почти наверное для всех $k \neq j,\ i = \overline{1, N-1}$.

Пусть $F_{1K}(\tilde{x}_1)$ — функция распределения подвектора $\tilde{X}_1$, соответствующая введённым выше мерам. Пусть $\tilde{x}$ — реализация случайного вектора $\tilde{X}$, а $\tilde{x}_1$ — реализация случайного подвектора $\tilde{X}_1$. В соответствии с построением $\tilde{x}_1 = x_1^k$ для некоторого $k = \overline{1,K}$. Но так как среди подвекторов $x_i^k,\ k = \overline{1,K},\ i = \overline{1,N-1}$, нет хотя бы двух одинаковых, то все остальные подвекторы $\tilde{x}_i,\ i = \overline{2,N-1}$, реализации $\tilde{x}$ совпадают с x_i^k, $i = \overline{2,N-1}$, где k является тем же номером, что и у первого подвектора. Таким образом, устанавливается взаимно-однозначное соответствие $\tilde{x}_i = f_i(\tilde{x}_1),\ i = \overline{2,N-1}$, между подвектором $\tilde{x}_1$ и подвекторами $\tilde{x}_i,\ i = \overline{2,N-1}$. Это верно для любой реализации $\tilde{x}$ вектора $\tilde{X}$. Поэтому $\tilde{\mathcal{P}}\{\tilde{X}_i = f_i(\tilde{X}_1)\} = 1,\ i = \overline{2,N-1}$.

Лемма 1.1 доказана.□

Сформулируем утверждение, в соответствии с которым N-этапная задача квантильной оптимизации сводится к эквивалентной двухэтапной задаче стохастического программирования. С этой целью будем пользоваться определением, введённым в работе А.И. Кибзуна, А.В. Наумова и В.И. Норкина [36].

Определение 1.1. Две задачи оптимизации будем считать эквивалентными, если:

1) либо обе эти задачи имеют допустимые решения (с конечными значениями целевых функций), либо обе не имеют таких решений;

2) если эти задачи имеют допустимые решения, то оптимальные значения их целевых функций (конечные или бесконечные) совпадают;

3) если оптимальные значения их целевых функций конечны, то эти значения в обеих задачах либо достигаются, либо не достигаются;

4) если оптимальные значения целевых функций достигаются, то по оптимальному решению одной задачи с помощью явно описанного алгоритма указывается оптимальное решение другой задачи;

5) если оптимальные значения целевых функций конечны, но не достигаются, то по оптимизирующей последовательности стратегий одной задачи по явно описанному алгоритму указывается оптимизирующая последовательность стратегий для другой задачи.

Следует отметить, что в указанной работе отсутствует 5-й пункт определения. Данное упущение было выявлено и дополнено Ю.С. Каном.

Далее везде будем понимать эквивалентность в смысле определения 1.1. Отметим, что приведённое отношение эквивалентности оптимизационных задач является транзитивным.

Верна следующая теорема об эквивалентности многоэтапной линейной относительно стратегий задачи стохастического программирования и двухэтапной задачи в априорных постановках.

Теорема 1.1. *N-этапная задача в априорной постановке* (1.6) *с дискретным распределением $F_K(x)$ случайного вектора $\tilde{X}$ эквивалентна в смысле определения* 1.1 *двухэтапной задаче стохастического программирования специального вида.*

Доказательство теоремы 1.1.

Рассмотрим вначале трёхэтапную задачу стохастического программирования в априорной постановке с учётом дискретизации меры. Запишем функцию потерь (1.8) исследуемой задачи, где вместо случайного вектора X рассмотрим случайный вектор $\tilde{X}$, имеющий дискретное распределение специального вида:

$$\Phi^3(u, y(\cdot), \tilde{X}) = c_0^{\mathrm{T}} u + a_{11}^{\mathrm{T}}(\tilde{X}_1)u + c_1^{\mathrm{T}} y_1(u, \tilde{X}_1) + a_{12}^{\mathrm{T}}(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)u + c_2^{\mathrm{T}} y_2(u, \tilde{X}_1, \tilde{X}_2).$$

Согласно лемме 1.1 функция потерь трёхэтапной задачи стохастического программирования в априорной постановке будет иметь вид:

$$\Phi^3(u, y(\cdot), \tilde{X}) = c_0^{\mathrm{T}} u + a_{11}^{\mathrm{T}}(\tilde{X}_1)u + c_1^{\mathrm{T}} y_1(u, \tilde{X}_1) + a_{12}^{\mathrm{T}}(\tilde{X}_1, f_2(\tilde{X}_1))u + c_2^{\mathrm{T}} y_2(u, \tilde{X}_1, f_2(\tilde{X}_1)) =$$

$$= c_0^{\mathrm{T}} u + (a_{11}^{\mathrm{T}}(\tilde{X}_1) + a_{12}^{\mathrm{T}}(\tilde{X}_1, f_2(\tilde{X}_1)))u + c_1^{\mathrm{T}} y_1(u, \tilde{X}_1) + c_2^{\mathrm{T}} y_2(u, \tilde{X}_1, f_2(\tilde{X}_1)).$$

Введём следующие обозначения:

$$\bar{y}_1(u, \tilde{X}_1) \triangleq \mathrm{col}(y_1(u, \tilde{X}_1), y_2(u, \tilde{X}_1, f_2(\tilde{X}_1))),$$

$$\bar{a}_{11}(\tilde{X}_1) \triangleq a_{11}(\tilde{X}_1) + a_{12}(\tilde{X}_1, f_2(\tilde{X}_1)),$$

$$\bar{c}_1^{\mathrm{T}} = (c_1^{\mathrm{T}}, c_2^{\mathrm{T}}).$$

С учётом введённых обозначений функция потерь трёхэтапной задачи имеет структуру функции потерь двухэтапной задачи:

$$\Phi^3(u, y(\cdot), \tilde{X}) = \bar{\Phi}^2(u, \bar{y}_1(\cdot), \tilde{X}_1) \triangleq c_0^{\mathrm{T}} u + \bar{a}_{11}^{\mathrm{T}}(\tilde{X}_1)u + \bar{c}_1^{\mathrm{T}} \bar{y}_1(u, \tilde{X}_1). \tag{1.10}$$

Подставим случайный вектор $\tilde{X}$, имеющий дискретное распределение специального вида, в ограничения (1.9) исследуемой трёхэтапной задачи, тогда получим:

$$\Phi_2(u, y^2(\cdot), \tilde{X}^2) = A_{22}(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)u + B_2 y_2(u, \tilde{X}_1, \tilde{X}_2) \geq a_{32}(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2),$$

$$\Phi_1(u, y^1(\cdot), \tilde{X}^1) = A_{21}(\tilde{X}_1)u + B_1 y_1(u, \tilde{X}_1) \geq a_{31}(\tilde{X}_1).$$

Согласно лемме 1.1 данные ограничения можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \Phi_2(u, y^2(\cdot), \tilde{X}^2) &= A_{22}(\tilde{X}_1, f_2(\tilde{X}_1))u + B_2 y_2(u, \tilde{X}_1, f_2(\tilde{X}_1)) \geq a_{32}(\tilde{X}_1, f_2(\tilde{X}_1)), \\ \Phi_1(u, y^1(\cdot), \tilde{X}^1) &= A_{21}(\tilde{X}_1)u + B_1 y_1(u, \tilde{X}_1) \geq a_{31}(\tilde{X}_1). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Введём следующие векторы

$$\bar{\Phi}_1(u, \bar{y}_1(\cdot), \tilde{X}_1) \triangleq \mathrm{col}(\Phi_1(u, y^1(\cdot), \tilde{X}^1), \Phi_2(u, y^2(\cdot), \tilde{X}^2)),$$

$$\bar{a}_{31}(\tilde{X}_1) \triangleq \mathrm{col}(a_{31}(\tilde{X}_1), a_{32}(\tilde{X}_1, f_2(\tilde{X}_1))),$$

$$\bar{y}^1(u, \tilde{X}_1) \triangleq \mathrm{col}(y^1(u, \tilde{X}_1), y^2(u, \tilde{X}_1, f_2(\tilde{X}_1))) = \bar{y}_1(u, \tilde{X}_1)$$

и матрицы

$$\bar{A}_{21}(\tilde{X}_1) \triangleq \begin{pmatrix} A_{21}(\tilde{X}_1) \\ A_{22}(\tilde{X}_1, f_2(\tilde{X}_1)) \end{pmatrix},$$

$$\bar{B}_1 = (B_1, B_2),$$

тогда ограничения (1.11) можно записать в виде

$$\bar{\Phi}_1(u, \bar{y}_1(\cdot), \tilde{X}_1) \ \triangleq \ \bar{A}_{21}(\tilde{X}_1)u + \bar{B}_1\bar{y}_1(u, \tilde{X}_1) \geq \bar{a}_{31}(\tilde{X}_1). \tag{1.12}$$

При этом с учётом введённых обозначений ограничения (1.12) имеют структуру ограничений двухэтапной задачи.

После рассмотренных преобразований получена новая форма записи для функции потерь и ограничений многоэтапной задачи, рассмотренной на примере трёхэтапной задачи (1.7) — (1.9).

Рассмотрим двухэтапную задачу (1.6) с функцией вероятности

$$P_\varphi(u, \bar{y}_1(\cdot)) = \mathcal{P}\{\bar{\Phi}^2(u, \overline{y}_1(\cdot), \tilde{X}_1) \leq \varphi,\ \bar{\Phi}_1(u, \bar{y}_1(\cdot), \tilde{X}_1) \geq \bar{a}_{31}(\tilde{X}_1)\}. \tag{1.13}$$

Поскольку значения функции потерь и ограничения в задаче (1.6), (1.13) совпадают с функцией потерь и ограничениями в задаче (1.6), (1.7), то эти задачи эквивалентны в смысле определения 1.1.

Таким образом, трёхэтапная задача (1.7)–(1.9) стохастического программирования сведена к двухэтапной задаче (1.6) с функцией потерь вида (1.10) и ограничениями вида (1.12).

Сведение N-этапной задачи к двухэтапной доказывается по индукции.

Теорема 1.1 доказана. □

Получение решения поставленной многоэтапной задачи стохастического программирования в пространстве функций оказывается достаточно сложным из-за использования в качестве критерия квантиль функции потерь. В частности, как уже отмечалось, метод динамического программирования, сводящий задачу оптимизации в функциональном пространстве к последовательному решению задач математического программирования в конечномерном пространстве, для квантильного критерия неприменим. Благодаря описанной в данном разделе схеме дискретизации меры удаётся свести многоэтапную задачу стохастического программирования к двухэтапной задаче квантильной оптимизации. Структура ограничений (1.12) полученной двухэтапной задачи повторяет структуру ограничений (1.3) исходной задачи (1.6), кроме того, совпадают значения функций потерь (1.10) и (1.1) обеих задач. Это доказывает эквивалентность многоэтапной задачи (1.6) стохастического программирования в априорной постановке и полученной двухэтапной задачи (1.13) в смысле определения 1.1.

Следует отметить, что частный случай рассмотренной в данном разделе задачи, изучен в работе А.И. Кибзуна и А.В. Наумова [35]. В указанной работе рассматривалась двухэтапная задача квантильного линейного программирования с функционалом вероятности

$$P_\varphi(u, y(\cdot)) \triangleq \mathcal{P}\{c_1^{\mathrm{T}} u + c_2^{\mathrm{T}} y(X) \le \varphi, Au + By(X) \ge X\}.$$

В правой части ограничений данной задачи рассматривался случайных вектор X, а детерминированная матрица A от случайного вектора не зависела.

1.3. Сведение двухэтапной задачи стохастического программирования в априорной постановке к двухэтапной задаче в апостериорной постановке

В данном разделе предлагается процедура сведения рассмотренной в предыдущем разделе двухэтапной задачи (1.6) стохастического программирования в априорной постановке с функцией потерь вида (1.10) и ограничениями (1.12) к двухэтапной задаче в апостериорной постановке.

Следует отметить, что впервые на связь двухэтапных задач в априорной и апостериорной постановках было обращено внимание в работе А.И. Кибзуна и А.В Наумова [35]. Но в указанной работе, как уже отмечалось выше, рассматривался частный случай задачи, исследуемой в данной главе.

Перепишем двухэтапную задачу (1.6) стохастического программирования в априорной постановке в более простом виде, полагая, что $y^1(\cdot) \triangleq y(\cdot), \tilde{X}^1 \triangleq X$. Рассмотрим функцию потерь

$$\Phi(u, y(\cdot), X) = c_0^{\mathrm{T}} u + a_1^{\mathrm{T}}(X) u + c_1^{\mathrm{T}} y(u, X) \tag{1.14}$$

с ограничением для второго этапа

$$\Phi_1(u, y(\cdot), X) \triangleq A_2(X) u + B y(u, X) \geq a_3(X), \tag{1.15}$$

где $c_0,\ c_1$ — детерминированные вектор-столбцы размерностей $(m \times 1)$ и $(m_1 \times 1)$ соответственно;
$u \in \mathbb{R}^m$ — допустимые стратегии первого этапа;
$y \in \mathbb{R}^{m_1}$ — стратегии второго этапа;
$X \in \mathbb{R}^n$ — случайный вектор;
$a_3(X)$ — вектор-функция размерности $(s \times 1)$, выбираемая в классе измеримых функций;
матрицы $a_1(X),\ A_2(X)$, выбираемые в классе измеримых функций, и матрица B имеют размерности $(m \times 1)$, $(s \times m)$ и $(s \times m_1)$ соответственно.

Рассмотрим задачу квантильной оптимизации вида

$$\varphi_\alpha = \min_{u \in U,\, y(\cdot) \in \mathcal{Y}} \varphi_\alpha(u, y(\cdot)), u_\alpha = \arg\min_{u \in U} [\min_{y(\cdot) \in \mathcal{Y}} \varphi_\alpha(u, y(\cdot))] \tag{1.16}$$

с функцией квантили, определяемой согласно (1.5) на основе функции вероятности

$$P_\varphi(u, y(\cdot)) = \mathcal{P}\{\Phi(u, y(\cdot), X) \leq \varphi,\ \Phi_1(u, y(\cdot), X) \geq a_3(X)\}. \tag{1.17}$$

Рассмотрим также двухэтапную задачу стохастического программирования в апостериорной постановке следующего вида.

Пусть известна реализация $x \in \mathbb{R}^n$ случайного вектора X и множество допустимых планов второго этапа задается как $Y \triangleq \{y : y \in \mathbb{R}^{m_1}, y \geq 0\}$. Рассмотрим задачу второго этапа, считая, что стратегии $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ первого этапа и реализации $x \in \mathbb{R}^n$ вектора случайных параметров X известны:

$$\bar{\Phi}(u,x) \triangleq \min_{y \in Y}\{c_1^{\mathrm{T}} y |\ A_2(x)u + By(x) \geq a_3(x)\}, \tag{1.18}$$

где c_1 – вектор размерности m_1.

Если для некоторой стратегии $u \in U$ первого этапа и x из множества допустимых реализаций не существует стратегии второго этапа $y \in Y$, удовлетворяющей ограничениям задачи (1.18), будем полагать, что критериальная функция второго этапа $\bar{\Phi}(u,x) = +\infty$.

Определим функцию вероятности, характеризующую непревышение целевым функционалом некоторого заранее заданного уровня φ при использовании стратегии u, то есть

$$\bar{P}_{\varphi}(u) \triangleq \mathcal{P}\{a_1^{\mathrm{T}}(X)u + \bar{\Phi}(u,X) \leq \varphi\},$$

и функцию квантили, характеризующую некоторое минимальное значение уровня φ, при котором функционал вероятности будет не ниже заданного значения α

$$\bar{\varphi}_{\alpha}(u) \triangleq \min_{\varphi}\{\varphi : \bar{P}_{\varphi}(u) \geq \alpha\}.$$

Сформулируем задачу первого этапа

$$\bar{\varphi}_{\alpha} = \min_{u \in U}[c_0^{\mathrm{T}} u + \bar{\varphi}_{\alpha}(u)],\ \bar{u}_{\alpha} = \arg\min_{u \in U}[c_0^{\mathrm{T}} u + \bar{\varphi}_{\alpha}(u)]. \tag{1.19}$$

В рассмотренных предположениях верно следующее утверждение, устанавливающее эквивалентность двухэтапных задач стохастического программирования в априорной и апостериорной постановках.

Теорема 1.2. *Двухэтапная задача* (1.19) *в апостериорной постановке эквивалентна в смысле определения* 1.1 *двухэтапной задаче* (1.16) *в априорной постановке.*

Доказательство теоремы 1.2. В основу доказательства данной теоремы положено использование доверительного метода. Суть данного метода заключается в оценке истинного значения функции квантили с помощью некоторой верхней границы, представляющей собой доверительную оценку. Такая оценка является функцией максимума на некотором доверительном множестве. Поэтому исходная задача минимизации функции квантили может быть заменена минимаксной задачей, решение которой можно получить аналитически или численно. При этом в минимаксной задаче предполагается оптимизация доверительного множества для получения улучшенной доверительной оценки функции квантили. Данная идея была впервые предложена в работах А.И. Кибзуна, А.А. Лебедева, В.В. Малышева [27] и А.И. Кибзуна и В.В. Малышева [28] применительно к задаче минимизации функции квантили. В указанных работах данный метод был назван обобщённым минимаксным подходом. Дальнейшие исследования данного подхода, позволившие выделить некоторые классы задач, для которых удаётся сразу предложить «хорошее» доверительное множество или осуществить его замену другим множеством, отражены в монографиях В.В. Малышева и А.И. Кибзуна [49], А.И. Кибзуна и Ю.С. Кана [117] и в работах А.И. Кибзуна, В.В. Малышева и К.А. Карпа [118] и Ю.С. Кана [108]. Для таких задач уже не требуется оптимизация доверительного множества, поэтому в монографиях А.И. Кибзуна и Ю.С. Кана [25, 117] обобщённый минимаксный подход был переименован в доверительный метод.

Пусть S – доверительное множество, то есть $\mathcal{P}(S) \geq \alpha$ и $\mathcal{F}_\alpha \triangleq \{S : \mathcal{P}(S) \geq \alpha\}$ — семейство доверительных множеств уровня α. Согласно доверительному методу двухэтапные задачи (1.16) и (1.19) эквивалентны следующим обобщённым минимаксным задачам, записанным при условии существования решений задач (1.16) и (1.19). В случае, если одна из задач (1.16) или (1.19) не имеет допустимых решений, то по определению 1.1 эквивалентная ей задача также не имеет допустимых решений.

Запишем согласно монографии А.И. Кибзуна и Ю.С. Кана [25] эквивалентные обобщённые минимаксные задачи для двухэтапных задач (1.16) и (1.19):

$$\varphi_\alpha \triangleq \min_{S\in\mathcal{F}_\alpha,\, u\in U} \min_{y(\cdot)\in\mathcal{Y}} \gamma(S,u,y(\cdot)), (S_\alpha, u_\alpha, y_\alpha(\cdot)) \triangleq \arg \min_{S\in\mathcal{F}_\alpha, u\in U, y(\cdot)\in\mathcal{Y}} \gamma(S,u,y(\cdot)) \tag{1.20}$$

при ограничениях

$$0 \geq \sup_{x\in S}[a_3(x) - By(u,x) - A_2(x)u], \tag{1.21}$$

где sup в неравенстве (1.21) понимается построчно и функция $\gamma(S,u,y(\cdot))$, стоящая под знаком минимума в выражении (1.20), имеет вид:

$$\gamma(S,u,y(\cdot)) \triangleq c_0^{\mathrm{T}} u + \sup_{x\in S}[a_1^{\mathrm{T}}(x)u + c_1^{\mathrm{T}} y(u,x)], \tag{1.22}$$

а также

$$\bar{\varphi}_\alpha \triangleq \min_{S\in\mathcal{F}_\alpha} \min_{u\in U} \bar{\gamma}(S,u), (\bar{S}_\alpha, \bar{u}_\alpha) \triangleq \arg \min_{S\in\mathcal{F}_\alpha, u\in U} \bar{\gamma}(S,u), \tag{1.23}$$

где функция, стоящая под знаком минимума в выражении (1.23) представима в виде:

$$\bar{\gamma}(S,u) \triangleq c_0^{\mathrm{T}} u + \sup_{x\in S}[a_1^{\mathrm{T}}(x)u + \min_{y\in Y}\{c_1^{\mathrm{T}} y | A_2(x)u + By(u,x) \geq a_3(x)\}]. \tag{1.24}$$

Отметим, что здесь пара $(\varphi_\alpha, u_\alpha)$ — оптимальное решение задачи (1.16), а $(\bar{\varphi}_\alpha, \bar{u}_\alpha)$ — оптимальное решение задачи (1.19), причем задача (1.16) эквивалентна в смысле приведённого в разделе 1.2 определения 1.1 задаче (1.20), а задача (1.19) — задаче (1.23). Поэтому для доказательства эквивалентности двухэтапной задачи (1.16) стохастического программирования в априорной постановке и двухэтапной задачи (1.19) в апостериорной постановке согласно монографии А.И. Кибзуна и Ю.С. Кана [25] достаточно показать, что эквивалентны задачи (1.20) и (1.23). Для доказательства данного утверждения достаточно показать, что для любого доверительного множества $S \in \mathcal{F}_\alpha$ из семейства доверительных множеств и стратегии первого этапа $u \in U$ выполняются равенства

$$\gamma(S, u, y_\alpha(\cdot)) = \gamma(S, u, \bar{y}_\alpha(\cdot)) = \bar{\gamma}(S, u), \tag{1.25}$$

где под $y_\alpha(u, x)$ понимаются оптимальные стратегии второго этапа, а именно:

$$\bar{y}_\alpha(u, x) = \arg\min_{y \in Y}\{c_1^{\mathrm{T}} y | A_2(x)u + By(u, x) \geq a_3(x)\},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{1.26}$$

$y_\alpha(\cdot)$ — измеримая по Борелю функция.

Заметим, что согласно (1.24) и (1.22) выполняется равенство $\bar{\gamma}(S, u) = \gamma(S, u, \bar{y}_\alpha(\cdot))$.

Теперь покажем, что верно равенство $\gamma(S, u, y_\alpha(\cdot)) = \gamma(S, u, \bar{y}_\alpha(\cdot))$. С этой целью рассмотрим следующую задачу

$$\gamma(S, u, y_\alpha(\cdot)) \triangleq \min_{y(\cdot) \in \mathcal{Y}} \gamma(S, u, y(\cdot));\ y_\alpha(\cdot) \triangleq \arg\min_{y(\cdot) \in \mathcal{Y}} \gamma(S, u, y(\cdot)) \tag{1.27}$$

при ограничениях (1.21). Рассмотрим три случая: первый, когда величина $\gamma(S, u, y_\alpha(\cdot))$ равняется $+\infty$, второй, когда $\bar{\gamma}(S, u) = +\infty$, и третий, когда обе эти величины меньше $+\infty$.

Случай 1.

Пусть $\gamma(S, u, y_\alpha(\cdot)) = +\infty$ и не существует плана $y(\cdot) \in \mathcal{Y}$ второго этапа такого, что выполняются ограничения (1.21). Покажем, что при данном предположении также выполняется равенство $\bar{\gamma}(S, u) = +\infty$.

Пусть это не так, то есть $\bar{\gamma}(S, u) \neq +\infty$. Тогда при фиксированных стратегиях u первого этапа и доверительном множестве S для всех реализаций $x \in S$ случайного вектора, принадлежащих доверительному множеству S, существует оптимальный план второго этапа $\bar{y}_\alpha(u, x)$ в задаче (1.26). Это означает, что величина $\bar{y}_\alpha(\cdot)$ принадлежит множеству $\mathcal{Y}$ допустимых планов второго этапа, то есть $\bar{y}_\alpha(\cdot) \in \mathcal{Y}$. При этом выполняется неравенство $\bar{\gamma}(S, u) < +\infty$ и ограничения в задаче (1.26) выполнены для всех реализаций $x \in S$. То есть для $\bar{y}_\alpha(\cdot)$ выполнены ограничения (1.21) обобщённой минимаксной задачи (1.20). Следовательно, $\bar{y}_\alpha(\cdot)$ есть допустимый план в задаче (1.20) и при этом выполняется неравенство $\gamma(S,u,\bar{y}_\alpha(\cdot)) < +\infty$. Это противоречит выдвинутому предположению, следовательно, $\bar{\gamma}(S,u) = +\infty$.

Случай 2.

Предположим, что $\overline{\gamma}(S,u) = +\infty$ и существует реализация $x \in S$ такая, что не существует плана $y \in Y$ второго этапа, удовлетворяющего ограничениям в задаче (1.26). Покажем, что тогда выполняется $\gamma(S,u,y_\alpha(\cdot)) = +\infty$.

Пусть это не так, тогда существует измеримая функция $y(\cdot) \in \mathcal{Y}$ с значениями в Y такая, что выполнены ограничения (1.21). Следовательно, для этой функции $y(\cdot)$ выполнены ограничения $0 \geq a_3(x) - By(u,x) - A_2(x)u$ для всех реализаций $x \in S$. Таким образом, для всех $x \in S$ существует план второго этапа $y \triangleq y(u,x) \in Y$. Это противоречит выдвинутому предположению, что $\overline{\gamma}(S,u) = +\infty$. Следовательно, $\gamma(S,u,y_\alpha(\cdot)) = +\infty$.

Случай 3.

Пусть для фиксированной стратегии $u \in U$ первого этапа и доверительного множества $S \in \mathcal{F}_\alpha$ для каждой реализации $x \in S$ существуют оптимальные планы $y_\alpha(\cdot)$, $\overline{y}_\alpha(\cdot)$ вторых этапов в задачах (1.27) и (1.26) соответственно. Тогда выполняются неравенства

$$0 \geq \sup_{x \in S}[a_3(x) - By_\alpha(u,x) - A_2(x)u]$$

и

$$A_2(x)u + B\overline{y}_\alpha(u,x) \geq a_3(x) \text{ для всех } x \in S.$$

Таким образом, $\overline{y}_\alpha(\cdot)$ является допустимым планом для задачи (1.27), но не обязательно оптимальным, то есть $\gamma(S,u,y_\alpha(\cdot)) \leq \gamma(S,u,\overline{y}_\alpha(\cdot))$.

Предположим, что $\gamma(S,u,y_\alpha(\cdot)) < \gamma(S,u,\overline{y}_\alpha(\cdot))$. Тогда

$$\sup_{x \in S}[a_1^{\mathrm{T}}(x)u + \{c_1^{\mathrm{T}} y_\alpha(u,x) | A_2(x)u + By_\alpha(u,x) \geq a_3(x)\}] <$$
$$< \sup_{x \in S}[a_1^{\mathrm{T}}(x)u + \{c_1^{\mathrm{T}} \overline{y}_\alpha(u,x) | A_2(x)u + B\overline{y}_\alpha(u,x) \geq a_3(x)\}].$$

Это противоречит предположению о том, что для каждой реализации $x \in \mathbb{R}^n$ случайного вектора план $\overline{y}_\alpha(u,x)$ является оптимальным в задаче второго этапа (1.26). Поэтому $\gamma(S,u,y_\alpha(\cdot)) \geq \gamma(S,u,\overline{y}_\alpha(\cdot))$.

Объединяя полученные соотношения, получаем, что они непротиворечивы только в случае равенства $\gamma(S,u,y_\alpha(\cdot)) = \gamma(S,u,\overline{y_\alpha}(\cdot))$.

Ранее было показано, что $\gamma(S,u,\overline{y_\alpha}(\cdot)) = \overline{\gamma}(S,u)$. Таким образом, равенства (1.25) выполнены.

Теорема 1.2 доказана. □

Доказательство эквивалентности двухэтапных задач стохастического программирования в априорной и апостериорной постановке рассматривалось в работе А.И. Кибзуна и А.В. Наумова [35]. Однако в диссертационной работе рассматривается более общий случай двухэтапной задачи (1.14) — (1.17), чем в указанной работе, в частности, матрица $A_2(X)$ и вектор $a_3(X)$ могут зависеть от случайного вектора X. Схема доказательства эквивалентности двухэтапных задач стохастического программирования в апостериорной и априорной постановках осталась прежней. Она основана на применении доверительного метода, в соответствии с которым задачи квантильной оптимизации в априорной и апостериорной постановках оказываются эквивалентными в смысле определения 1.1 некоторым обобщённым минимаксным задачам. Далее, в свою очередь, устанавливается эквивалентность между этими минимаксными задачами. Таким образом, используя свойство транзитивности понятия эквивалентности, устанавливается эквивалентность между рассматриваемыми двухэтапными задачами в априорной и апостериорной постановках. Напомним, что метод динамического программирования для многоэтапной задачи квантильной оптимизации в общем случае неприменим. Но в частном случае двухэтапная задача квантильной оптимизации в априорной постановке оказывается эквивалентной задаче в апостериорной постановке, то есть в этом случае метод динамического программирования применим.

1.4. Сведение двухэтапной задачи в апостериорной постановке к задаче смешанного целочисленного линейного программирования

В данном разделе рассматривается процедура сведения двухэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием в априорной постановке для случая дискретного распределения специального вида к задаче смешанного целочисленного линейного программирования. Для этого применяется переход к двойственным переменным с последующим введением булевых переменных, характеризующих принадлежность реализации случайного вектора некоторому доверительному множеству.

Согласно доверительному методу, изложенному в монографии А.И. Кибзуна и Ю.С. Кана [25], суть которого была приведена в предыдущем разделе, задача (1.19) эквивалентна в смысле определения 1.1 следующей задаче:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_\alpha &= \min_{u\in U}\min_{S\in\mathcal{F}_\alpha}\{c_0^{\mathrm{T}}u+\sup_{x\in S}[a_1^{\mathrm{T}}(x)u+\overline{\Phi}(u,x)]\},\\ (\overline{u}_\alpha,\overline{S}_\alpha) &= \arg\min_{u\in U,S\in\mathcal{F}_\alpha}\{c_0^{\mathrm{T}}u+\sup_{x\in S}[a_1^{\mathrm{T}}(x)u+\overline{\Phi}(u,x)]\}, \end{aligned} \tag{1.28}$$

где задача второго этапа $\overline{\Phi}(u,x)$ определяется согласно (1.18), $S\in\mathcal{F}_\alpha$ – доверительное множество из семейства доверительных множеств $\mathcal{F}_\alpha \triangleq \{S\in\mathcal{F}:\tilde{\mathcal{P}}(S)\geq\alpha\}$, $\mathcal{F}$ — борелевская сигма-алгебра, вероятностная мера $\tilde{\mathcal{P}}$ соответствует дискретизированному распределению вектора $\tilde{X}$.

Зафиксируем доверительное множество $S\in\mathcal{F}_\alpha$ и рассмотрим подзадачу из (1.28)

$$\psi(S)=\min_{u\in U}\{c_0^{\mathrm{T}}u+\sup_{x\in S}[a_1^{\mathrm{T}}(x)u+\overline{\Phi}(u,x)]\}, \tag{1.29}$$

где $\overline{\Phi}(u,x)$ находится из решения задачи (1.18).

Для подзадачи (1.18) запишем согласно теории двойственности, изложенной в монографии Е.Г. Гольштейна [13], эквивалентную двойственную подзадачу

$$\bar{\Phi}(u,x)=\max_{v\in V}\{(a_3(x)-A_2(x)u)^{\mathrm{T}}v\},$$

где $v\in\mathbb{R}^s$ — вектор двойственных переменных задачи $\bar{\Phi}(u,x)$ второго этапа, V — множество двойственных переменных, имеющее структуру выпуклого многогранника вида

$$V=\{v:B^{\mathrm{T}}v\leq c_1,\ v_i\geq 0,\ i=\overline{1,s}\}. \tag{1.30}$$

Пусть векторы c_1 и матрица B таковы, что множество

$$V\triangleq\{v\in\mathbb{R}^s:B^{\mathrm{T}}v\leq c_1,\ v_i\geq 0,\ i=\overline{1,s}\} \tag{1.31}$$

компактно.

Таким образом, подзадача (1.29) преобразуется к следующему виду:

$$\psi(S) = \min_{u \in U}\{c_0^{\mathrm{T}} u + \sup_{x \in S}[a_1^{\mathrm{T}}(x)u + \max_{v \in V}\{(a_3(x) - A_2(x)u)^{\mathrm{T}} v\}]\}. \tag{1.32}$$

Аналогичный прием перехода от исходной задачи стохастического программирования к двойственной задаче применялся, например, в работе А.В. Наумова и С.В. Иванова [54] для сведения двухэтапной задачи стохастического линейного программирования к одноэтапной задаче квантильной оптимизации.

Поскольку V — ограниченное множество согласно теории двойственности, изложенной в монографии Е.Г. Гольштейна [13], и функция $(a_3(x) - A_2(x)u)^{\mathrm{T}} v$, стоящая под знаком max в задаче (1.32), линейна по вектору двойственных переменных v для всех реализаций x и стратегий первого этапа u, то максимум данной функции достигается в вершинах $v^j,\ j = \overline{1, J}$, многогранного множества V, J — количество вершин множества V двойственных переменных. Поэтому задача (1.32) может быть записана в эквивалентном виде:

$$\psi(S) = \min_{u \in U}\{c_0^{\mathrm{T}} u + \sup_{x \in S}[a_1^{\mathrm{T}}(x)u + \max_{j=\overline{1,J}}\{(a_3(x) - A_2(x)u)^{\mathrm{T}} v^j\}]\}. \tag{1.33}$$

После применения к случайному вектору X процедуры дискретизации меры, описанной в разделе 1.2, случайный вектор $\tilde{X}$ принимает лишь конечное число значений $x^k,\ k = \overline{1, K}$, где K — количество реализаций случайного вектора. С учётом этого факта, задача (1.33) трансформируется в следующую задачу:

$$\psi(S) = \min_{u \in U}\{c_0^{\mathrm{T}} u + \max_{r=\overline{1,R}}\ \max_{j=\overline{1,J}}[a_1^{\mathrm{T}}(x^r)u + (a_3(x^r) - A_2(x^r)u)^{\mathrm{T}} v^j]\}, \tag{1.34}$$

где доверительное множество S состоит из векторов $x^r,\ r = \overline{1, R}$.

Поскольку функция $a_1^{\mathrm{T}}(x^r)u + (a_3(x^r) - A_2(x^r)u)^{\mathrm{T}} v^j$, стоящая под максимумом в выражении (1.34), линейна по стратегии u первого этапа, а поиск максимума осуществляется по конечному набору векторов реализации $\{x^r\}_{r=1}^R$ и двойственных переменных $\{v^i\}_{j=1}^J$, то функция, стоящая под знаком минимума в выражении (1.34), оказывается кусочно-линейной и выпуклой по стратегиям $u \in U$ первого этапа.

Поскольку множество U допустимых стратегий первого этапа — выпуклый многогранник, то задача (1.34) трансформируется в задачу линейного программирования

$$\psi \to \min_{u \in U, \psi \geq 0} \tag{1.35}$$

с ограничениями

$$c_0^{\mathrm{T}} u + a_1^{\mathrm{T}}(x^r)u + (a_3(x^r) - A_2(x^r)u)^{\mathrm{T}} v^j \leq \psi,\ r = \overline{1, R},\ j = \overline{1, J}. \tag{1.36}$$

Ранее доверительное множество S, $\tilde{\mathcal{P}}(S) \geq \alpha$, было зафиксировано. Выберем оптимальное доверительное множество S_α в задаче (1.28). С этой целью введём булевы переменные, характеризующие принадлежность точек x^k реализации случайного вектора $\tilde{X}$ доверительному множеству S по следующему правилу:

$$\delta_k \triangleq \begin{cases} 1, & \text{если } x^k \in S, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим $p_k \triangleq \tilde{\mathcal{P}}\{\tilde{X} = x^k\} = 1/K,\ k = \overline{1,K}$.

Пусть известна величина $\gamma > -\infty$, являющаяся оценкой снизу функций $a_1^{\mathrm{T}}(x^k)u + (a_3(x^k) - A_2(x^k)u)^{\mathrm{T}}v^j,\ k = \overline{1,K},\ j = \overline{1,J}$, то есть

$$\gamma \leq a_1^{\mathrm{T}}(x^k)u + (a_3(x^k) - A_2(x^k)u)^{\mathrm{T}}v^j,\ k = \overline{1,K},\ j = \overline{1,J}. \tag{1.37}$$

Тогда задача (1.35) — (1.36) преобразуется в задачу смешанного целочисленного линейного программирования

$$\psi \to \min_{u \in U, \delta_1, \ldots, \delta_K, \psi \geq 0} \tag{1.38}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} c_0^{\mathrm{T}}u + \gamma + \delta_k[a_1^{\mathrm{T}}(x^k)u + (a_3(x^k) - A_2(x^k)u)^{\mathrm{T}}v^j - \gamma] \leq \psi,\ k = \overline{1,K},\ j = \overline{1,J}, \\ \sum\limits_{k=1}^{K} \delta_k p_k \geq \alpha, \\ \delta_k \in \{0,1\},\ k = \overline{1,K}. \end{cases} \tag{1.39}$$

Согласно работе А.И. Кибзуна, А.В. Наумова и В.И. Норкина [36] задача (1.38) — (1.39) линейного целочисленного программирования смешанного типа эквивалентна задаче (1.19) стохастического программирования в смысле определения 1.1.

Таким образом, объединяя сказанное, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1.3. *Двухэтапная задача* (1.19) *в апостериорной постановке эквивалентна в смысле определения* 1.1 *задаче* (1.38) — (1.39) *смешанного целочисленного линейного программирования.*

Техника сведения задачи стохастического программирования в квантильной постановке к задаче смешанного целочисленного линейного программирования, используемая в данном разделе, изложена в работе А.И. Кибзуна, А.В. Наумова и В.И. Норкина [36], где изучаются задачи квантильной оптимизации с дискретным распределением случайных векторов. Эту технику удалось применить для исследуемой в данной главе многоэтапной задачи стохастического программирования для случая дискретного распределения специального вида. Полученную задачу смешанного целочисленного линейного программирования предлагается решать стандартными методами. Например, в работе M. Benichou, J.M. Gauthier, P. Girodet и др. [80] для решения подобных задач используется метод ветвей и границ, впервые предложенный в 1960 году A.H. Land and A. G. Doig [121] для решения задач целочисленного программирования. Данный метод является вариацией полного перебора с отсечением заведомо неоптимальных решений. Для решения данных задач также применим метод Гомори, предложенный в работе R. Gomory [102], и алгоритм на основе метода Бендерса [81], детально изученный в работах А.В. Наумова и С.В. Иванова [17, 53].

Кроме того, для решения задач смешанного целочисленного программирования разработаны эффективные программные средства. В частности, задачу (1.38) — (1.39) можно решить программными пакетами оптимизации, например пакетом IBM ILOG CPLEX [107] или программой LPSolve [61].

Существуют различные приемы для сокращения перебора при нахождении оптимального множества в задаче (1.28), в частности с использованием понятия ядра вероятностной меры, приведённого в монографии А.И. Кибзуна и Ю.С. Кана [25].

Определение 1.2. Множество K_α следующего вида:

$$K_\alpha \triangleq \bigcap_{||l||=1} \{x : l^{\mathrm{T}} x \leq b_\alpha(l)\},$$

где $b_\alpha(l)$ — α-квантиль распределения случайной величины $l^{\mathrm{T}}X$, т.е. $b_\alpha(l) \triangleq \min\{b : \mathcal{P}\{l^{\mathrm{T}}x \leq b\} \geq \alpha\}$, X — n-мерный случайный вектор, $\alpha \in (1/2, 1)$, называется α-ядром вероятностной меры $\mathcal{P}$, порождённой в $\mathbb{R}^n$ распределением вектора X.

Ядро вероятностной меры уровня α при больших α в случае дискретного распределения совпадает с выпуклой оболочкой всех точек из распределения случайного вектора $\tilde{X}$ за исключением крайних точек. Поэтому в случае квазивыпуклости целевой функции по $\tilde{x}$ достаточно перебрать только крайние точки из множества всех возможных значений.

Стоит отметить, что при фиксированном значении $\delta_k,\ k = \overline{1, K}$ задача (1.38) — (1.39) представляет собой задачу линейного программирования. Если бы в критерии вместо матрицы $A_2(\tilde{X})$ рассматривался просто случайный вектор $\tilde{X}$, то задача (1.28) принадлежала бы классу портфельных задач, рассматриваемых в многих работах, в частности в монографии А.И. Кибзуна и Ю.С. Кана [25].

Объединяя все сказанное с учётом выполненных ранее эквивалентных переходов, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1.4. *Многоэтапная задача стохастического программирования в априорной постановке вида* (1.6) *для дискретного распределения* $F_K(x)$ *специального вида, сге-*

нерированного на основе плотности $p(x)$, *эквивалентна в смысле определения* 1.1 *задаче смешанного целочисленного программирования* (1.38) — (1.39).

Решение задачи (1.38) — (1.39) является приближённым для многоэтапной задачи (1.6) стохастического программирования в априорной постановке. Но согласно теореме Гливенко и Кантелли, приведённой в работе А.Н. Ширяева [71, С. 482], выборочная функция распределения $\hat{F}_K(x)$ сходится почти наверное к исследуемой функции распределения $F(x)$ с плотностью $p(x)$. Поэтому можно надеяться, что и решение задачи (1.38) — (1.39) будет сходиться к решению задачи (1.6).

1.5. Алгоритм решения многоэтапной линейной по стратегиям задачи стохастического программирования с квантильным критерием

Для решения многоэтапной задачи стохастического программирования с линейной относительно стратегий функцией потерь предлагается следующий алгоритм:

1) задаём уровень доверительной вероятности $\alpha \in (0, 1)$;

2) задаём K объём выборки и генерируем выборку $x^k,\ k = \overline{1, K}$ на основе схемы дискретизации, предложенной в разделе 1.2;

3) определяем вершины $v^j,\ j = \overline{1, J}$, выпуклого многогранника V — множества двойственных переменных из решения (1.30);

4) определяем точки, лежащие вне α-ядра вероятностной меры, определяем булевы переменные $\delta_k,\ k = \overline{1, K}$.

5) осуществляем поиск минимального значения величины γ из решения набора задач (1.37) линейного программирования на каждом элементе выборки $x^k,\ k = \overline{1, K}$.

6) определяем начальное приближение, например, дополнением точек доверительного шара S ближайшими точками для получения меры множества, равной α;

7) составляем задачу (1.38) — (1.39), являющуюся при каждом наборе булевых переменных $\delta_k,\ k = \overline{1, K}$, задачей линейного программирования;

8) используя метод ветвей и границ, определяем оптимальный набор булевых переменных $\delta_k,\ k = \overline{1, K}$, при котором значение критерия в получаемой задаче линейного программирования будет минимально;

9) осуществляем поиск субоптимальной стратегии $\bar{u}_\alpha$ и оценки квантили $\bar{\varphi}_\alpha$.

Сложности при реализации алгоритма могут возникнуть при моделирование плотности $p(x)$ распределения n-мерного случайного вектора X с зависимыми компонентами. В этом случае требуется воспользоваться разложением плотности распределения в произведение условных вероятностей. Последующая техника моделирования изложена в работе А.В. Войтишека [11]. Также можно воспользоваться методом аппроксимации плотности вероятности некоторой кусочно-постоянной функцией. Полученную плотность можно моделить в плане получения реализаций.

Основной трудоёмкостью данного алгоритма является применение метода ветвей и границ, верхняя оценка сложности которого согласно монографии Ю.Ю. Финкельштейна [67] имеет порядок $2^n/\sqrt{n}$, определяемый количеством рассматриваемых в процессе решения подзадач. Построение самой задачи на каждом шаге (формирование ограничений) осуществляется за линейное время. Таким образом, сложность предложенного алгоритма имеет порядок $\sqrt{n} * 2^n$.

1.6. Результаты численных расчётов

Рассмотрим двухэтапную задачу (1.16) в априорной постановке. Пусть параметры задачи принимают следующие значения:

$n = m = m_1 = s = 2$; вектор случайных параметров $x^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2)$; стратегии $u^{\mathrm{T}} = (u_1, u_2)$.

Параметры задачи принимают следующие значения:

$c_0 = \mathrm{col}(3, 4)$; $c_1 = \mathrm{col}(3, 1)$; $a_1(x) = ax$, $a_3(x) = bx$, где $a = 2,5$; $b = 1,5$;

$A_2(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 + x_2 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Пусть случайный вектор X имеет нормальное распределение $N(\vec{0}; I)$, где I — единичная ковариационная матрица. Зададим уровень доверительной вероятности $\alpha = 0,9$.

Для решения задачи (1.16) сгенерируем согласно плотности нормального распределения K точек x^k, $k = \overline{1, K}$, и решим задачу (1.38) — (1.39). Проанализируем получаемое приближённое решение в зависимости от объёма выборки K, где объёмы выборки $K = 10, 100, 1000$ и 10000. В итоге для каждого из значений K получим решение задачи (1.16). Результаты численных расчётов приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1. Результаты численных расчётов алгоритма первой главы

K	$\overline{\varphi}_\alpha(K)$	$\overline{u}_1(K)$	$\overline{u}_2(K)$
10	2,3417	0,3262	0,7266
100	2,2231	0,3191	0,7469
1000	1,8102	0,3159	0,7581
10000	1,8026	0,3123	0,7608

Из таблицы 1.1 видно, что решение приближённой задачи (1.38) — (1.39) стабилизируется при увеличении объёма выборки. Поэтому можно предположить, что это решение стабилизируется около решения двухэтапной задачи (1.16) в априорной постановке.

1.7. Выводы по главе 1

В первой главе диссертации сформулирована многоэтапная задача квантильной оптимизации в априорной постановке и доказана её эквивалентность двухэтапной задаче квантильной оптимизации в апостериорной постановке. Вопрос существования решения рассматриваемых задач не исследуется, поскольку в определении эквивалентности 1.1 учитывается случай отсутствия решения задач в обеих постановках. Рассмотрена схема дискретизации вероятностной меры, позволяющая свести многоэтапную задачу стохастического программирования в априорной постановке к двухэтапной задаче. Кроме того, удаётся свести двухэтапную задачу в априорной постановке к задаче смешанного целочисленного линейного программирования, для решения которой применяются стандартные пакеты оптимизации. Таким образом, решая задачу смешанного целочисленного линейного программирования, удаётся найти приближённое решение многоэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием.

Основные результаты главы 1

1. Предложена схема дискретизации вероятностной меры, позволяющая разработать процедуру сведения многоэтапной задачи стохастического программирования к двухэтапной задаче в априорной постановке.

2. Для дискретного распределения специального вида доказана эквивалентность многоэтапной линейной относительно стратегий задачи стохастического программирования с квантильным критерием и двухэтапной задачи квантильной оптимизации.

3. Для дискретного распределения специального вида разработан алгоритм поиска решения многоэтапной линейной по стратегиям задачи стохастического програмирования с квантильным критерием, основанный на переходе к эквивалентной задаче смешанного целочисленного линейного программирования.

2. Алгоритмы решения двухэтапных задач стохастического программирования с квантильным критерием для билинейных систем

Глава 2 посвящена разработке алгоритмов поиска решений двухэтапных задач стохастического программирования с квантильным критерием для случая билинейной критериальной функции.

Впервые упоминание о двухэтапных задачах стохастического программирования можно найти в работах G.B. Dantzig [89] и E.M.L. Beale [78].

Двухэтапные задачи стохастического программирования встречаются во многих прикладных задачах, некоторые из которых рассмотрены в монографии Д.Б. Юдина [76]. Наиболее широкое применение двухэтапные задачи стохастического программирования получили в экономических приложениях, в частности при управлении финансами, что показано в работе J. Birge и F. Louveaux [85].

Двухэтапная задача описывает процесс планирования, разделенный на два этапа. На первом этапе выбирается некоторая предварительная стратегия, при реализации которой возникают различные случайные факторы (возмущения). На втором этапе за счёт выбора новой стратегии (стратегии второго этапа) производится корректировка выбранной предварительной стратегии при реализации случайных параметров. Данная корректировка учитывается при выборе стратегии первого этапа. Плата за корректировку представляет собой функцию, зависящую от стратегии и случайных параметров.

Задачи экономических приложений имеют, как правило, линейную структуру. Свойства двухэтапных задач стохастического линейного программирования исследованы в работах таких исследователей, как Д.Б. Юдин [76], J.R. Birge [84], J. Birge и F. Louveaux [85], J.R. Birge и R.J.-B. Wets [86], P. Kall [109], P. Kall и J. Mayer [110], P. Kall и S.W. Wallace [111], S. Sen [150], R. Wets [166].

Методам решения двухэтапных задач стохастического линейного программирования с критерием в форме математического ожидания посвящены работы G.B. Dantzig и A. Madansky [98], J.R. Birge [84], J. Birge и F. Louveaux [85], J.R. Birge и R.J.-B. Wets [86], P. Kall и J. Mayer [110], R. Wets [166].

Тем не менее во многих приложениях критерий в форме математического ожидания оказывается неудовлетворительным. Например, в финансовой математике часто используется VaR-критерий, характеризующий порог, который потери не превысят с заданной вероятностью. В задачах управления летательными аппаратами более адекватным критерием является гарантированная с заданной вероятностью точность управления. Подобные задачи рассмотрены в монографии В.В. Малышева и А.И. Кибзуна [49].

Двухэтапные задачи стохастического программирования с критерием в форме квантили позволяют получить гарантированный по вероятности результат. Но задачи стохастического программирования, где в качестве критерия выбрана функция квантили, оказываются намного сложнее, чем задачи с критерием в форме математического ожидания. В частности, функция квантили не обладает линейными свойствами. Особенности этого критерия подробно изучены в монографии А.И. Кибзуна и Ю.С. Кана [25]. Одним из основных инструментов решения задач квантильной оптимизации оказывается доверительный метод, изученный в монографии А.И. Кибзуна и Ю.С. Кана [25], позволяющий заменить исходную стохастическую задачу некоторой минимаксной, решение которой может быть найдено аналитически.

В работе А.И. Кибзуна и А.В. Наумова [35] за счёт перехода к двойственным переменным при гауссовском распределении случайных параметров вспомогательная минимаксная задача сведена к задаче линейного программирования. В первой главе диссертации исследована задача, являющаяся обобщением задачи из указанной работы. Рассматриваемую задачу удалось свести к задаче смешанного целочисленного линейного программирования.

В данной главе рассматривается двухэтапная задача квантильной оптимизации, в которой функция потерь билинейна, а случайный вектор имеет нормальное распределение. Исходная стохастическая задача сводится к задаче выпуклого программирования, которая параметризована скалярным параметром, подлежащим выбору с помощью метода дихотомии. В результате получается гарантирующее решение исходной задачи.

В разделе 2.1 содержится описание постановки двухэтапной билинейной задачи стохастического программирования с квантильным критерием.

В разделе 2.2 исследуются свойства верхней оценки функции квантили двухэтапной линейной по стратегиям задачи стохастического программирования с квантильным критерием.

В разделе 2.3 рассматривается процедура сведения двухэтапной задачи стохастического программирования к задаче выпуклого программирования. Сведение осуществляется с использованием доверительного метода решения задач квантильной оптимизации и известных результатов теории двойственности, применяемых при решении задач линейного программирования. Также в этом разделе предложен алгоритм, основанный на решении параметрической задачи выпуклого программирования, скалярный параметр которой выбирается с помощью метода дихотомии.

Раздел 2.4 содержит описание результатов численных экспериментов, подтверждающих эффективность предложенных в главе алгоритмов. Приведено сравнение результатов решения задачи алгоритмом, предложенным в первой главе, с решением, получаемым путём применении алгоритма, предложенного в разделе 2.3

2.1. Постановка двухэтапной билинейной задачи стохастического программирования с квантильным критерием

Рассмотрим двухэтапную задачу стохастического программирования следующей структуры. Пусть случайный вектор X с реализациями $x \in \mathbb{R}^n$ имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(\vec{0}, I)$, а ограничения на допустимые стратегии первого этапа u являются линейными, то есть

$$U \triangleq \{u \in \mathbb{R}^m : A_u u \leq b_u\},$$

где вектор b_u имеет размерность k_1, матрица A_u имеет размерность $k_1 \times m$, причем они являются такими, что $U \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклое компактное многогранное множество. В работе В.В. Подиновского и В.Д. Ногина [56, С. 205] показано, что для выполнения данного условия требуется, как уже отмечалось выше, чтобы конус рецессивных направлений множества U состоял только из нулевого вектора:

$$0^+U \triangleq \{u \in \mathbb{R}^m : A_u u \leq 0\} = \vec{0},$$

где $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$ — нулевой вектор, матрица A_u имеет размерность $(k_1 \times m)$.

Введём функцию потерь, зависящую от стратегии первого этапа $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ и от реализаций x случайного вектора X и учитывающую оптимальную стратегию y второго этапа

$$\Phi(u, x) = c_0^{\mathrm{T}} u + x^{\mathrm{T}} A_1 u + \inf_{y \in \mathcal{Y}(u,x)} c_1^{\mathrm{T}} y, \tag{2.1}$$

где множество допустимых стратегий второго этапа

$$\mathcal{Y}(u, x) \triangleq \{y \in Y : x^{\mathrm{T}} A_{2i} u + c_{2i}^{\mathrm{T}} u + b_i^{\mathrm{T}} y \geq a_{3i}^{\mathrm{T}} x + d_i, i = \overline{1, s}\}, \tag{2.2}$$

$$Y \triangleq \{y \in \mathbb{R}^{m_1} : y_j \geq 0, j = \overline{1, m_1}\},$$

где c_0 и c_1 — заданные детерминированные вектор-столбцы размерности $(m \times 1)$ и $(m_1 \times 1)$ соответственно;
матрицы A_1 и A_{2i} имеют размерность $(n \times m)$;
c_{2i}, b_i и a_{3i} — вектор-столбцы размерности $(m \times 1)$, $(m_1 \times 1)$ и $(n \times 1)$ соответственно;
d_i — константа.

Следует отметить, что часть матриц A_{2i} и векторов a_{3i}, $i = \overline{1, s}$, определяющих множество $\mathcal{Y}(u, x)$ допустимых стратегий y второго этапа, могут быть нулевыми. Тогда часть ограничений с теми же номерами i, соответствующими этим матрицам и векторам в множестве $\mathcal{Y}(u, x)$, будут детерминированными.

Рассмотрим функцию вероятности, то есть вероятность такого события, что целевая функция потерь не превосходит некоторый уровень $\varphi \in \mathbb{R}^1$

$$P_\varphi(u) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{P}\{X : c_0^{\mathrm{T}} u + X^{\mathrm{T}} A_1 u + \overline{\Phi}(u, X) \le \varphi\}, \tag{2.3}$$

где $\mathcal{P}$ – вероятностная мера, порождённая распределением $\mathcal{N}(\vec{0}, I)$,

$$\overline{\Phi}(u, X) = \begin{cases} \inf\limits_{y \in Y(u,X)} c_1^{\mathrm{T}} y, \mathcal{Y}(u, X) \ne \varnothing, \\ \\ +\infty, \mathcal{Y}(u, X) = \varnothing. \end{cases} \tag{2.4}$$

Введём в рассмотрение также функцию квантили, которая характеризует минимальный уровень оптимального значения критериальной функции второго этапа, который не может быть превышен с заранее заданной вероятностью α:

$$\varphi_\alpha(u) \stackrel{\Delta}{=} \min\{\varphi : P_\varphi(u) \ge \alpha\}, \alpha \in (0, P^*), \tag{2.5}$$

где

$$P^* \stackrel{\Delta}{=} \sup_{u \in U} \mathcal{P}\{X : \mathcal{Y}(u, X) \ne \varnothing\}.$$

В задачах экономических и технических приложений, как правило, рассматривается уровень доверительной вероятности, превышающий $1/2$, поэтому далее будем рассматривать уровень α, принимающий значения из диапазона $(1/2, P^*)$.

Поиск значения P^* из выражения (2.5) представляет собой сложную математическую задачу. Исследования, касающиеся данного вопроса отражены в монографиях А.И. Кибзуна и Ю.С. Кана [25, 117], а также в работах Р. Леппа [47, 122].

Если для всех φ и $u \in U$ верно неравенство $P_\varphi(u) < \alpha$, будем считать, что выполняется $\overline{\Phi}(u, X) = +\infty$.

Сформулируем задачу первого этапа

$$\varphi_\alpha = \inf_{u \in U} \varphi_\alpha(u), u_\alpha = \arg\min_{u \in U} \varphi_\alpha(u). \tag{2.6}$$

Задача (2.2) — (2.6) — двухэтапная билинейная задача квантильной оптимизации. Подобная постановка рассматривалась в работе А.И. Кибзуна и А.В. Наумова [35]. Но в указанной работе ограничения, описывающие множество $\mathcal{Y}(u, x)$ допустимых стратегий второго этапа, были линейными одновременно по стратегии u первого этапа и реализации x случайного параметра. В рассматриваемой постановке (2.6) задачи стохастического программирования с квантильным критерием ограничения являются линейными отдельно по u и по x (билинейными).

2.2. Свойства верхней оценки функции квантили двухэтапной билинейной задачи стохастического программирования

Функция квантили в прикладных задачах служит мерой риска. Особенности этого критерия подробно изучены в монографии А.И. Кибзуна и Ю.С. Кана [25], в частности, в этой работе предложены различные методы и алгоритмы решения задач вероятностной оптимизации. Например, для решения задач минимизации функции квантили в монографии А.И. Кибзуна и Ю.С. Кана [25], как и в работах Ю.С. Кана [19, 20], А.И. Кибзуна и Е.Л. Матвеева [30, 31], применялись квазиградиентные алгоритмы. К недостаткам данного метода следует отнести отсутствие возможности получения в явном виде оптимального значения критерия задачи второго этапа. Это приводит к тому, что возникает необходимость численного решения задачи второго этапа на каждом шаге квазиградиентного алгоритма. Поскольку размерность экономических и технических задач, имеющих структуру двухэтапных задач, как правило, достаточно большая, это существенно замедляет сходимость квазиградиентных алгоритмов, следовательно, затрудняет получение асимптотически точного решения.

В монографии А.И. Кибзуна и Ю.С. Кана [25] также рассмотрен доверительный метод, являющийся основным аналитическим инструментом решения задач минимизации функции квантили. Как уже отмечалось в первой главе, доверительный метод позволяет оценить сверху оптимальное значение критерия путём рассмотрения произвольного доверительного множества. Суть данного метода заключается в аппроксимации исходной задачи минимизации функции квантили детерминированной минимаксной задачей, в которой внутренний максимум целевой функции берётся по всем реализациям случайных параметров на некотором доверительном множестве, а внешниий минимум берётся по стратегии оптимизации. Естественно, что качество такой оценки зависит от структуры выбранного доверительного множества. Если в качестве доверительного множества выбрано оптимальное доверительное множество, то данный подход позволяет найти точное решение задачи.

Согласно доверительному методу, изложенному в монографии А.И. Кибзуна и Ю.С. Кана [25], рассмотренная в разделе 2.1 задача (2.6) первого этапа двухэтапной задачи стохастического программирования эквивалентна следующей задаче:

$$\overline{\varphi}_\alpha = \inf_{u\in U, S\in\mathcal{F}_\alpha} \psi(S,u), \quad (\overline{u}_\alpha, \overline{S}_\alpha) = \arg\min_{u\in U, S\in\mathcal{F}_\alpha} \psi(S,u), \tag{2.7}$$

где введена функция максимума

$$\psi(S,u) \triangleq c_0^{\mathrm{T}} u + \sup_{x\in S}[x^{\mathrm{T}} A_1 u + \overline{\Phi}(u,x)], \tag{2.8}$$

S — доверительное множество, то есть $\mathcal{P}(S) \geq \alpha$, $S \in \mathcal{F}_\alpha$, где $\mathcal{F}_\alpha$ — семейство доверительных множеств S уровня α.

Эквивалентность понимается здесь в смысле определения 1.1, введенного в главе 1.

В соответствии с определением 1.1 выполняется $\varphi_\alpha = \overline{\varphi}_\alpha$, $u_\alpha = \overline{u}_\alpha$, причем под допустимым решением задачи (2.6) понимается пара $(u, \varphi_\alpha(u))$, для которой $\varphi_\alpha \leq \varphi_\alpha(u)$, $u \in U$, а для задачи (2.7) — тройка $(u, S, \psi(S, u))$, для которой $\overline{\varphi}_\alpha \leq \psi(S, u)$, $S \in \mathcal{F}_\alpha$, $u \in U$.

Зафиксируем множество $S \in \mathcal{F}_\alpha$ и рассмотрим подзадачу из (2.7):

$$\psi_S = \inf_{u \in U} \psi(S, u), u^S = \arg\min_{u \in U} \psi(S, u). \tag{2.9}$$

Справедливо следующее утверждение, устанавливающее связь между φ_α, ψ_S и критерием $\varphi_\alpha(u^S)$.

Лемма 2.1. *Если существует стратегия u^S, где $S \in \mathcal{F}_\alpha$ — доверительное множество, то выполняются следующие неравенства*

$$\varphi_\alpha \leq \varphi_\alpha(u^S) \leq \psi_S.$$

Доказательство леммы 2.1.

Для стратегии u^S пара $(u^S, \varphi_\alpha(u^S))$ является допустимым решением для задачи (2.6), то есть $\varphi_\alpha \leq \varphi_\alpha(u^S)$, $u^S \in U$.

Поскольку для всех $u \in U$ выполняется неравенство

$$\varphi_\alpha(u) \leq \psi_S(u),$$

при $u = u^S$ получаем $\psi_S(u^S) = \psi_S$, поэтому выполняется $\varphi_\alpha(u^S) \leq \psi_S$.

Лемма 2.1 доказана. $\square$

Далее будем рассматривать процедуру сведения двухэтапной билинейной задачи стохастического программирования к задаче выпуклого программирования с последующим её решением.

2.3. Поиск решения задачи выпуклого программирования в случае дискретизированного распределения случайных параметров

2.3.1. Сведение двухэтапной билинейной задачи стохастического программирования с квантильным критерием к задаче выпуклого программирования

Пусть векторы c_1 и $b_i, i = \overline{1,s}$, введённые в разделе 2.1, таковы, что множество

$$V \triangleq \{v \in \mathbb{R}^s : B^{\mathrm{T}} v \leq c_1,\ v_i \geq 0,\ i = \overline{1,s}\} \tag{2.10}$$

компактно, где

$$B \triangleq \begin{pmatrix} b_1^{\mathrm{T}} \\ ... \\ b_s^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим подзадачу задачи второго этапа (2.4), для которой запишем согласно монографии Е.Г. Гольштейна [13] эквивалентную двойственную задачу с вектором двойственных переменных $v \in \mathbb{R}^s$:

$$\overline{\Phi}(u, x) = \sup_{v \in V} \overline{a}^{\mathrm{T}}(u, x) v, \tag{2.11}$$

где

$$\overline{a}(u, x) \triangleq \bar{A}^{\mathrm{T}}(u) x + \bar{b}(u) \triangleq \begin{pmatrix} a_{31}^{\mathrm{T}} x - u^{\mathrm{T}} A_{21}^{\mathrm{T}} x + d_1 - c_{21}^{\mathrm{T}} u \\ ... \\ a_{3s}^{\mathrm{T}} x - u^{\mathrm{T}} A_{2s}^{\mathrm{T}} x + d_s - c_{2s}^{\mathrm{T}} u \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

$$\bar{A}^{\mathrm{T}}(u) \triangleq \begin{pmatrix} a_{31}^{\mathrm{T}} - u^{\mathrm{T}} A_{21}^{\mathrm{T}} \\ ... \\ a_{3s}^{\mathrm{T}} - u^{\mathrm{T}} A_{2s}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

$$\bar{b}^{\mathrm{T}}(u) = (d_1 - c_{21}^{\mathrm{T}} u, ..., d_s - c_{2s}^{\mathrm{T}} u), \tag{2.14}$$

V — выпуклый ограниченный многогранник, представляющий собой допустимое множество для двойственных переменных.

Пусть $v^j, j = \overline{1,J}$, — вершины многогранника V, являющегося выпуклым компактом. Поскольку функция в (2.11) линейна по v, то ее максимум на компакте V будет достигаться в его вершинах v^j:

$$\overline{\Phi}(u, x) = \max_{j \in \overline{1,J}} \overline{a}^{\mathrm{T}}(u, x) v^j, \tag{2.15}$$

где J — количество вершин многогранника V.

Заметим, что задача поиска вершин множества V, определяемого выражением (2.10), может быть решена априорно, поскольку множество V не зависит от реализаций случайного вектора $x \in X$ и стратегий $u \in U$.

Ранее доверительное множество S было зафиксировано. Исследования, касающиеся выбора структуры доверительного множества, приведены в работе А.И. Кибзуна и А.В. Наумова [35] и монографии В.В. Малышева и А.И. Кибзуна [49]. Наиболее часто рассматривается оптимальное доверительное множество в виде эллипсоида или шара некоторого радиуса $R \in [0, +\infty)$. Следует отметить, что, как правило, в качестве центра шара S_R выбирается вектор, равный математическому ожиданию вектора случайных параметров задачи, хотя вместо этого при наличии априорной информации в качестве центра шара может быть выбрана любая другая точка.

В монографии А.И. Кибзуна и Ю.С. Кана [25] приведены следующие результаты.

Лемма 2.2. *Если случайный вектор X имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(0, I)$, то ядром уровня α является шар S_{ρ_α} с центром в нуле и радиусом ρ_α, равным квантили уровня α стандартного нормального распределения $\mathcal{N}(0, 1)$.*

Для множества S_α вида $S_\alpha = \{x : \Phi(u_\alpha, x) \le \varphi_\alpha\}$ выполняется следующая лемма.

Лемма 2.3. *Если $\Phi(u, x)$ выпукла по $x \in \mathbb{R}^n$ для всех $u \in U$, то для оптимального множества S_α в задаче (2.7) выполняется включение $K_\alpha \subset S_\alpha$.*

Рассмотрим подзадачу (2.9) задачи (2.7) для фиксированного множества S, в качестве которого выбирается доверительный шар S_{R_α} с радиусом R_α и центром в нуле, $\mathcal{P}(S_R) = \alpha$. Для простоты обозначений далее будем использовать $\rho \equiv \rho_\alpha$, $R \equiv R_\alpha$. Рассмотрим более общую задачу вида (2.9) для шара S_r с центром в нуле и переменным радиусом $r \in [\rho, R]$:

$$\psi_r = \inf_{u \in U} \psi(S_r, u), \quad u_r = \arg\min_{u \in U} \psi(S_r, u), \tag{2.16}$$

где функция $\psi(S_r, u)$ определяется согласно (2.8) для множества S_r, то есть

$$\psi(S_r, u) \triangleq c_0^{\mathrm{T}} u + \sup_{x \in S_r} [x^{\mathrm{T}} A_1 u + \overline{\Phi}(u, x)]. \tag{2.17}$$

Поскольку функция $[x^{\mathrm{T}} A_1 u + \overline{\Phi}(u, x)]$, стоящая под знаком sup в (2.17), является кусочно-линейной и выпуклой по x для каждого $u \in U$, согласно (2.12) и (2.15), а шар S_r — компактное множество, то знак sup можно заменить на знак max. Таким образом, функция $\psi(S_r, u)$ в задаче (2.16) будет иметь вид:

$$\psi(S_r, u) = c_0^{\mathrm{T}} u + \max_{x \in S_r} [x^{\mathrm{T}} A_1 u + \overline{\Phi}(u, x)]. \tag{2.18}$$

Исследуем задачу (2.16) с функцией $\psi(S_r, u)$, определяемой выражением (2.18). Оказывается верным следующее утверждение.

Лемма 2.4. *Задача* (2.16) *является задачей выпуклого программирования, и* u_r *существует для всех* $r \in [\rho, R]$.

Доказательство леммы 2.4.

Сначала найдем явное выражение для функции $\psi(S_r, u)$ из (2.18). Согласно (2.15) функция $\overline{\Phi}(u, x)$ имеет вид

$$\overline{\Phi}(u, x) = \max_{j \in \overline{1, J}} \overline{a}^{\mathrm{T}}(u, x) v^j,$$

где вектор-функция $\overline{a}(u, x)$, определяемая выражением (2.12), линейна по реализации x случайного вектора для каждого значения стратегии $u \in U$. Поэтому максимум на шаре S_r с радиусом r в выражении (2.18) достигается. Более того, этот максимум линейной по x функции может быть найден аналитически. Он достигается в одной из точек касания x_r^j шара S_r с гиперплоскостями Γ_j, $j = \overline{1, J}$, которые характеризуются векторами нормали к ним:

$$x_r^j \triangleq r(A_1 u + \bar{A}(u) v^j) / ||A_1 u + \bar{A}(u) v^j||,$$

$$\Gamma_j = \{x^{\mathrm{T}}(A_1 u + \bar{A}(u) v^j) = c_j\}, j = \overline{1, J},$$

где c_j — некоторые константы, подбираемые из условия касания гиперплоскости Γ_j и шара S_r. Поэтому задача (2.18) может быть представлена в виде:

$$\psi(S_r, u) = c_0^{\mathrm{T}} u + \max_{j = \overline{1, J}} [r||A_1 u + \bar{A}(u) v^j|| + \bar{b}^{\mathrm{T}}(u) v^j]. \tag{2.19}$$

Заметим, что элементы матрицы $\bar{A}(u)$ и вектора $\bar{b}(u)$, определяемых выражениями (2.13) и (2.14) соответственно, линейны по u. Следовательно, $\psi(S_r, u)$ непрерывна по $u \in U$. Но, как было отмечено выше, U — компакт, поэтому по теореме Вейерштрасса оптимальная стратегия u_r в задаче (2.16) существует.

Далее проанализируем вид функции $\overline{\Phi}(u, x)$. Согласно (2.12) вектор-функция $\overline{a}(u, x)$, стоящая под знаком max в выражении (2.15), линейна по стратегии u для всех реализаций $x \in \mathbb{R}^n$ случайного вектора и вершин v^j, $j = \overline{1, J}$, множества V допустимых значений переменных в задаче, двойственной к задаче второго этапа. Поэтому функция $\overline{\Phi}(u, x)$ является кусочно-линейной и выпуклой по $u \in U$ для каждого x. Поскольку максимум из выпуклых функций оказывается также выпуклой функцией, то согласно (2.8) функция $\psi(S_r, u)$, определяемая выражением (2.18), будет выпуклой по $u \in U$. Следовательно, задача (2.16) является задачей выпуклого программирования.

Лемма 2.4 доказана. $\square$

Исследуем свойства функции ψ_r задачи (2.16) выпуклого программирования. В предположении, что для всех u норма в выражении (

Доказательство леммы 2.5.

Рассмотрим два значения r_1 и r_2 радиуса шара S_r, где $r \in [\rho, R]$. Пусть $r_2 > r_1$, где $r_2, r_1 \in [\rho, R]$. Тогда для каждого значения стратегии $u \in U$ согласно (2.19) имеет место неравенство

$$\psi(S_{r_2}, u) > \psi(S_{r_1}, u).$$

Следовательно,

$$\psi_{r_2} \triangleq \min_{u \in U} \psi(S_{r_2}, u) \geq \psi_{r_1} = \min_{u \in U} \psi(S_{r_1}, u).$$

Поскольку r_1 и r_2 выбирались при условии $r_2 > r_1$, где $r_2, r_1 \in [\rho, R]$, то это означает, что функция ψ_r монотонно возрастает на $[\rho, R]$.

Докажем теперь, что ψ_r непрерывна на $[\rho, R]$. Предположим противное, что в точке r_1 функция ψ_r терпит разрыв. Рассмотрим вначале такое r_1, что $r_1 \in [\rho, R)$ и

$$\psi_r - \psi_{r_1} \geq \Delta > 0 \text{ для всех } r \in [r_1, R]. \tag{2.20}$$

В работе В.Ф. Демьянова и Л.В. Васильева [14, С. 62] приводится утверждение о том, что выпуклая функция является липшицевой на любом выпуклом ограниченно множестве, то есть для любого ограниченного множества G найдется $L < \infty$ такое, что

$$|f(x) - f(z)| \leq L||x - z|| \quad \forall x \in G, \forall z \in G.$$

Соответственно, выпуклая на компакте функция является липшицевой. Согласно (2.19) функция $\psi(S_{r_1}, u)$ выпукла по u на компакте U и линейна по r для всех $u \in U$, причем элементы матрицы $\bar{A}(u)$ в соответствии с выражением (2.13) линейны по u. Поэтому выполняется

$$\begin{aligned}\psi(S_r, u_{r_1}) - \psi(S_{r_1}, u_{r_1}) = c_0^{\mathrm{T}} u_{r_1} + \max_{j=\overline{1,J}} \{ r||A_1 u_{r_1} + \bar{A}(u_{r_1}) v^j|| + \bar{b}^{\mathrm{T}}(u_{r_1}) v^j \} - \\ - (c_0^{\mathrm{T}} u_{r_1} + \max_{j=\overline{1,J}} \{ r_1 ||A_1 u_{r_1} + \bar{A}(u_{r_1}) v^j|| + \bar{b}^{\mathrm{T}}(u_{r1}) v^j) \} = \\ = \max_{j=\overline{1,J}} \{ (r - r_1)||A_1 u_{r_1} + \bar{A}(u_{r_1}) v^j|| \} = (r - r_1) \max_{j=\overline{1,J}} ||A_1 u_{r_1} + \bar{A}(u_{r_1}) v^j|| \leq \\ \leq (r - r_1) \max_{u \in U} \max_{j=\overline{1,J}} ||A_1 u + \bar{A}(u) v^j|| = (r - r_1) L,\end{aligned} \tag{2.21}$$

где $L < \infty$.

Выберем далее величину r как минимальное из двух значений, то есть

$$r = \min\{r_1 + \Delta/(2L),\ R\}$$

и рассмотрим функцию $\psi(S_r, u_{r_1})$, сравнив ее с $\psi_{r_1} = \psi(S_{r_1}, u_{r_1})$. Используя найденную оценку (2.21), получаем, что

$$\psi(S_r, u_{r_1}) - \psi_{r_1} \le \frac{\Delta}{2}.$$

Но по условию (2.20) справедливо $\psi_r \ge \psi_{r_1}$, так как $r > r_1$ и при этом выполняется следующее неравенство

$$\psi_r = \psi(S_r, u_r) \le \psi(S_r, u_{r_1}),$$

поскольку u_{r_1} — не обязательно оптимальная стратегия для $\psi(S_r, u)$. Следовательно, $\psi_r - \psi_{r_1} \le \Delta/2$, что противоречит предположению (2.20).

Рассмотрим теперь такое r_1, что $r_1 \in (\rho, R]$ и

$$\psi_{r_1} - \psi_r \ge \Delta > 0 \text{ для всех } r \in [\rho, r_1]. \tag{2.22}$$

Поскольку все рассуждения относительно липшицевости функции $\psi(S_{r_1}, u)$, приведённые выше, сохраняются, сравним $\psi(S_{r_1})$ и $\psi(S_r)$ при новых предположениях о радиусе r_1:

$$\begin{aligned}
\psi(S_{r_1}, u_{r_1}) - \psi(S_r, u_{r_1}) = c_0^{\mathrm{T}} u_{r_1} + \max_{j=\overline{1,J}} \{r_1 ||A_1 u_{r_1} + \bar{A}(u_{r_1}) v^j|| + \bar{b}^{\mathrm{T}}(u_{r_1}) v^j\} - \\
- (c_0^{\mathrm{T}} u_{r_1} + \max_{j=\overline{1,J}} \{r ||A_1 u_{r_1} + \bar{A}(u_{r_1}) v^j|| + \bar{b}^{\mathrm{T}}(u_{r1}) v^j)\} = \\
= \max_{j=\overline{1,J}} \{(r_1 - r) ||A_1 u_{r_1} + \bar{A}(u_{r_1}) v^j||\} = (r_1 - r) \max_{j=\overline{1,J}} ||A_1 u_{r_1} + \bar{A}(u_{r_1}) v^j|| \le \\
\le (r_1 - r) \max_{u \in U} \max_{j=\overline{1,J}} ||A_1 u + \bar{A}(u) v^j|| = (r_1 - r) L,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

где L — некоторая константа, $L < \infty$.

Выберем

$$r = \min\{\rho,\ r_1 - \Delta/(2L)\}$$

и сравним функции $\psi(S_r, u_{r_1})$ и $\psi_{r_1} = \psi(S_{r_1}, u_{r_1})$. Используя найденную выше оценку (2.23), получаем

$$\psi_{r_1} - \psi(S_r, u_{r_1}) \le \frac{\Delta}{2}.$$

В силу того, что $r_1 > r$ и стратегия u_{r_1} не обязательно является оптимальной стратегией для $\psi(S_r, u)$, выполняется следующее неравенство

$$\psi(S_r, u_{r_1}) \ge \psi(S_r, u_r),$$

следовательно $\psi_{r_1} - \psi_r \le \Delta/2$, что противоречит предположению (2.22).

Таким образом, ψ_r непрерывна на $[\rho, R]$.

Лемма 2.5 доказана. □

Рассмотрим теперь задачу (2.18) для двух случаев: $r = \rho$ и $r = R$, где ρ — радиус ядра K_α гауссовской меры $\mathcal{P}$, а R — радиус доверительного шара $S_R \in \mathcal{F}_\alpha$, $\mathcal{P}(S_R) = \alpha$.

Для нормального распределения $\mathcal{N}(\vec{0}, I)$ радиус R может быть найден как решение трансцендентного уравнения, приведённого в работе В.В. Малышева и А.И. Кибзуна [49]:

$$\frac{1}{2^{(n-2)/2}\Gamma(n/2)} \int\limits_0^R t^{n-1} \exp(-t^2/2) dt = \alpha, \tag{2.24}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Лемма 2.5. *Для решения задачи* (2.7) *имеет место двусторонняя оценка*

$$\psi_{\rho_\alpha} \le \varphi_\alpha \le \varphi_\alpha(u_{R_\alpha}) \le \psi_{R_\alpha}, \tag{2.25}$$

причем $\psi_{R_\alpha} - \psi_{\rho_\alpha} \to 0$ *при* $\alpha \to 1$.

Доказательство леммы 2.6.

Вначале докажем неравенство (2.25). Согласно лемме 2.4 стратегия u_R, где $R \triangleq R_\alpha$, существует.

Для стратегии u_R согласно (2.16) верно равенство

$$\psi_R = \psi(S_R, u_R) = \sup_{x \in S_R} \{c_0^{\mathrm{T}} u_R + x^{\mathrm{T}} A_1 u_R + \overline{\Phi}(u_R, x)\}.$$

Поскольку выполняется включение

$$S_R \subset \{x : c_0^{\mathrm{T}} u_R + x^{\mathrm{T}} A_1 u_R + \overline{\Phi}(u_R, x) \le \psi_R\} \tag{2.26}$$

и $\mathcal{P}(S_R) = \alpha$, так как R — радиус доверительного шара, то

$$P_{\psi_R}(u_R) = \mathcal{P}\{X : c_0^{\mathrm{T}} u_R + X^{\mathrm{T}} A_1 u_R + \overline{\Phi}(u_R, X) \le \psi_R\} \ge \mathcal{P}(S_R) = \alpha.$$

Но по определению функции квантили

$$\varphi_\alpha(u_R) \triangleq \min\{\varphi : \ P_\varphi(u_R) \ge \alpha\}.$$

Отсюда следует, что $\varphi_\alpha(u_R) \le \psi_R$. Поскольку u_R — не обязательно является оптимальной стратегией для задачи (2.6), то $\varphi_\alpha \le \varphi_\alpha(u_R)$. Следовательно, выполняется неравенство $\varphi_\alpha \le \varphi_\alpha(u_R) \le \psi_R$.

Заметим, что функция $x^{\mathrm{T}} A_1 u + \overline{\Phi}(u, x)$, стоящая под знаком max в (2.18) кусочно-линейна и выпукла по x для каждого $u \in U$. Поэтому оптимальное α-доверительное множество S_α согласно утверждению из монографии А.И. Кибзуна и Ю.С. Кана [25, С. 198] выпукло и замкнуто. Следовательно, согласно лемме 2.3 α-ядро K_α содержится в выпуклом замкнутом множестве S_α, то есть $K_\alpha \subset S_\alpha$. Поскольку ρ — радиус ядра K_α гауссовской меры $\mathcal{P}$, то в рассматриваемом случае $K_\alpha = S_\rho$, где $\rho \triangleq \rho_\alpha$. Следовательно, $S_\rho \subset S_\alpha$. В силу того, что $\mathcal{P}(S_\alpha) \geq \alpha$ и $\psi(S_\alpha, u_\alpha) = \varphi_\alpha$, получаем

$$\psi(S_\rho, u_\rho) \leq \psi(S_\rho, u_\alpha) \leq \psi(S_\alpha, u_\alpha) = \varphi_\alpha.$$

Поэтому верно неравенство $\psi_\rho \leq \varphi_\alpha$.

Следовательно, доказано утверждение (2.25) леммы 2.6.

Теперь покажем, что $\psi_{R_\alpha} - \psi_{\rho_\alpha} \to 0$ при $\alpha \to 1$. Согласно монографии А.И. Кибзуна и Ю.С. Кана [25, лемма 3.18, с. 211] для случайного вектора X, имеющего стандартный нормальный закон распределения $\mathcal{N}(\vec{0}, I)$ выполняется свойство $R_\alpha - \rho_\alpha \to 0$ при $\alpha \to 1$. В лемме 2.5 было доказано, что функция ψ_r непрерывна на $[\rho_\alpha, R_\alpha]$. Поэтому выполняется $\psi_{R_\alpha} - \psi_{\rho_\alpha} \to 0$ при $\alpha \to 1$.

Лемма 2.6 доказана. □

Верхняя оценка оптимального значения функции квантили φ_α может быть улучшена. Для этого следует выбрать значение $r \in [\rho, R)$ в задаче (2.16) такое, что $\varphi_\alpha \leq \psi_r < \psi_R$.

Рассмотрим множество

$$C_r \triangleq \{x : c_0^{\mathrm{T}} u_r + x^{\mathrm{T}} A_1 u_r + \max_{j=\overline{1,J}} [\bar{a}^{\mathrm{T}}(u_r, x) v^j] \leq \psi_r\} \tag{2.27}$$

и определим такое r_0, что

$$r_0 \triangleq \inf_{r \in [\rho, R]} \{r : \mathcal{P}(C_r) \geq \alpha\}. \tag{2.28}$$

Заметим, что r_0 существует, поскольку при $r = R$ верно, что $\mathcal{P}(C_R) \geq \alpha$, так как согласно (2.26) выполняется $S_R \subset C_R$, а также верно $\mathcal{P}(S_R) = \alpha$. Кроме того, при $r = \rho$ выполняется $\mathcal{P}(C_\rho) \leq \alpha$, поскольку C_ρ содержится в одном из полупространств с вероятностной мерой α, которые, в свою очередь, образуют, согласно определению 1.2, ядро S_ρ.

Сформулируем вспомогательное утверждение. Пусть $\bar{C}_r$ — правильный многогранник, симметричный относительно нуля, с J гранями, касающимися шара S_r. Сравним $\bar{C}_r$ с произвольным многогранником C_r с тем же числом граней и содержащим S_r. Следующее утверждение устанавливает связь между вероятностными мерами многогранников $\bar{C}_r$ и C_r.

Лемма 2.6. *Если случайный вектор X имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(\vec{0}, I)$, то $\mathcal{P}(\bar{C}_r) \leq \mathcal{P}(C_r)$ для любого $r > 0$ и любого $J \geq n+1, n \in R$.*

Доказательство леммы 2.7.

Рассмотрим только такие многогранные множества C_r, все грани которых касаются шара S_r. В противном случае можно рассмотреть подмножество $C_r^1 \subset C_r$, грани которого параллельны граням множества C_r и касаются S_r. При этом будет выполняться неравенство $\mathcal{P}(C_r^1) < \mathcal{P}(C_r)$, поскольку в рассматриваемом случае вероятностная мера является гауссовой, следовательно, она абсолютно непрерывна относительно меры Лебега.

Далее для простоты доказательства рассмотрим случай в двумерном пространстве ($n = 2$), когда количество граней многогранного множества $J = 4$. Симметричным множеством $\bar{C}_r$ с четырьмя гранями является квадрат. Причем множество $\bar{C}_r$ инвариантно относительно поворота осей координат. Пусть у многогранника C_r одна грань $\Gamma(x)$ отличается от грани $\bar{\Gamma}(\bar{x})$ квадрата $\bar{C}_r$, где x и $\bar{x}$ — точки, в которых грани $\Gamma(x)$ и $\bar{\Gamma}(\bar{x})$, соответственно, касаются круга S_r (см. рисунок 2.1).

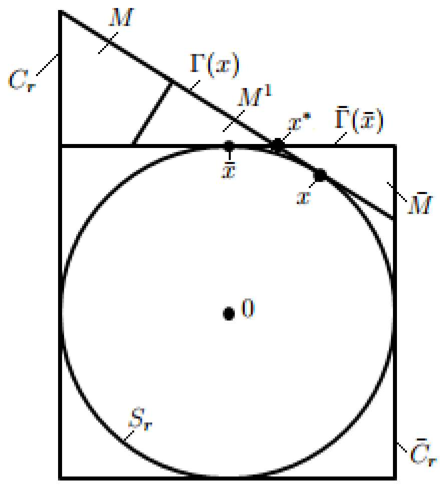

Рис. 2.1 Вариация симметричного многогранного множества $\bar{C}_r$

Рассмотрим множества $\bar{M} \triangleq \bar{C}_r \backslash C_r$ и $M \triangleq C_r \backslash \bar{C}_r$. Грани $\Gamma(x)$ и $\bar{\Gamma}(\bar{x})$ пересекаются в точке x^*. Пусть M^1 — множество, подобное $\bar{M}$, которое симметрично множеству $\bar{M}$ относительно точки x^*. Заметим, что ввиду симметричности $\bar{M}$ и M^1, а также сферической симметричности гауссовской плотности распределения вероятностная мера этих множеств будет совпадать, то есть выполняется $\mathcal{P}(\bar{M}) = \mathcal{P}(M^1)$. Но $M \backslash M^1 \neq \varnothing$ и вероятностная мера этого множества $\mathcal{P}(M \backslash M^1) > 0$. Поэтому

$$\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(M^1) + \mathcal{P}(M \backslash M^1) > \mathcal{P}(M^1) = \mathcal{P}(\bar{M}).$$

Таким образом, вероятностная мера многогранного множества C_r превосходит вероятностную меру симметричного многогранного множества $\bar{C}_r$, то есть выполняется

$$\mathcal{P}(C_r) > \mathcal{P}(\bar{C}_r).$$

Аналогичные рассуждения можно провести для произвольного числа граней J и для произвольной размерности n. Таким образом, лемма 2.7 доказана. $\square$

Представленные в разделе 2.2 утверждения позволяют сформулировать следующую теорему для размерности $n \geq 2$.

Теорема 2.1. *Для задачи* (2.16) *справедливы утверждения:*
(i) $r_0 < R$, *где*

$$r_0 \triangleq \inf_{r\in[\rho,R]} \{r : \mathcal{P}(C_r) \geq \alpha\};$$

(ii) существует $r \in [r_0, R)$ *такое, что* $\mathcal{P}(C_r) \geq \alpha$ *и*

$$\varphi_\alpha \leq \varphi_\alpha(u_r) \leq \psi_r < \psi_R;$$

(iii) если $r_1 < r_2$, *где* $r_1, r_2 \in [r_0, R)$, *и* $\mathcal{P}(C_{r_1}) \geq \alpha$ *и* $\mathcal{P}(C_{r_2}) \geq \alpha$, *то* $\varphi_\alpha \leq \psi_{r_1} < \psi_{r_2}$.

Доказательство теоремы 2.1.

1. Рассмотрим случай $r = R$ и установим, что $\mathcal{P}(C_R) \geq \alpha$.

Заметим, что по определению доверительного множества S_R выполняется равенство $\mathcal{P}(S_R) = \alpha$. Поскольку согласно (2.26) выполняется $S_R \subset C_R$, то верно неравенство $\mathcal{P}(C_R) \geq \alpha$.

Покажем, что $r_0 < R$. С этой целью проанализируем C_R. Поскольку выполняется включение $S_R \subset C_R$ и $C_R \neq S_R$, а мера $\mathcal{P}$ — гауссова, то $\mathcal{P}(C_R) = \alpha + \varepsilon(\alpha)$, где $\varepsilon(\alpha) > 0$ и $\varepsilon(\alpha) \triangleq \mathcal{P}(C_R) - \mathcal{P}(S_R)$.

Пусть $\bar{C}_R$ — правильный многогранник, симметричный относительно нуля и содержащий доверительное множество S_R. Предположим также, что количество граней симметричного многогранника $\bar{C}_R$ равно количеству ограничений J двойственной задачи (2.11), которое, в свою очередь, связано с количеством вершин компактного выпуклого многогранника V. Согласно лемме 2.7 имеем $\mathcal{P}(C_R) \geq \mathcal{P}(\bar{C}_R)$. Поскольку вероятностная мера $\mathcal{P}$ — гауссова, то выполняется $\mathcal{P}(\bar{C}_R) > \mathcal{P}(S_R) = \alpha$. Таким образом, $\mathcal{P}(C_R) > \alpha$.

Пусть r определяется из условия

$$\mathcal{P}(S_r) = \alpha - \varepsilon_r,$$

где

$$\varepsilon_r \triangleq \frac{\mathcal{P}(\bar{C}_R) - \alpha}{2}.$$

Сравним множества $\bar{C}_R \backslash S_R$ и $\bar{C}_r \backslash S_r$. Эти множества подобны, причем

$$\text{mes }(\bar{C}_r \backslash S_r) > \frac{1}{2}\text{mes }(\bar{C}_R \backslash S_R),$$

где mes — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Поскольку мера $\mathcal{P}$ — гауссовская, а множество $\bar{C}_r \backslash S_r$ находится ближе к центру осей координат, чем множество $\bar{C}_R \backslash S_R$, то выполняется неравенство

$$\mathcal{P}(\bar{C}_r \backslash S_r) > \frac{\mathcal{P}(\bar{C}_R \backslash S_R)}{2} = \frac{\mathcal{P}(\bar{C}_R) - \alpha}{2} = \varepsilon_r.$$

Следовательно, для симметричного множества $\bar{C}_r$ выполняется

$$\mathcal{P}(\bar{C}_r) = \mathcal{P}(S_r) + \mathcal{P}(\bar{C}_r \backslash S_r) > \mathcal{P}(S_r) + \varepsilon_r = \alpha.$$

Согласно лемме 2.7 вероятностная мера симметричного многогранника оказывается меньше вероятностной меры многогранника C_r, то есть $\mathcal{P}(C_r) > \mathcal{P}(\bar{C}_r)$, тогда верно, что $\mathcal{P}(C_r) > \alpha$, причем $r < R$. Таким образом, существует $r_0 \in [\rho, R)$.

2. Сравним ψ_r и ψ_R. Поскольку $S_r \subset S_R$, то есть S_r лежит внутри S_R, при этом не касаясь его границ, а целевая функция $\bar{a}(u, x)$, определяемая согласно (2.12), линейна по x, то получаем неравенство

$$\psi(S_r, u_R) < \psi(S_R, u_R) = \psi_R.$$

Но стратегия u_R — необязательно оптимальная для $\psi(S_r, u)$. Поэтому выполняется следующее неравенство

$$\psi_r = \psi(S_r, u_r) \stackrel{\Delta}{=} \min_{u \in U} \psi(S_r, u) < \psi_R.$$

По доказанному выше для стратегии u_r выполняется $\mathcal{P}(C_r) \geq \alpha$, то есть $\mathcal{P}_{\psi_r}(u_r) \geq \alpha$. Но по определению функции квантили

$$\varphi_\alpha(u_r) = \min\{\varphi : P_\varphi(u_r) \geq \alpha\}.$$

Поэтому $\varphi_\alpha(u_r) \leq \psi_r$.

Поскольку стратегия u_r не обязательно является оптимальной стратегией для критерия $\varphi_\alpha(u)$, что означает выполнение неравенства $\varphi_\alpha \leq \varphi_\alpha(u_r)$, поэтому окончательно имеем

$$\varphi_\alpha \leq \varphi_\alpha(u_r) \leq \psi_r < \psi_R.$$

3. Пусть теперь $r_2 > r_1$, где $r_1, r_2 \in [r_0, R)$, $\mathcal{P}(C_{r_2}) \geq \alpha$ и $\mathcal{P}(C_{r_1}) \geq \alpha$. Получим $\varphi_\alpha \leq \psi_{r_1} < \psi_{r_2}$.

Для доверительных шаров с радиусами r_1 и r_2 выполняется $S_{r_1} \subset S_{r_2}$, поскольку $r_2 > r_1$. В силу линейности по реализации x функции из (2.12), получаем неравенство

$$\psi(S_{r_1}, u_{r_2}) < \psi(S_{r_2}, u_{r_2}) = \psi_{r_2}.$$

Поскольку стратегия u_{r_2} не обязательно является оптимальной для $\psi(S_{r_1}, u)$, то для $\psi(S_{r_1}, u_{r_1}) = \psi_{r_1}$ выполняется следующее неравенство

$$\psi_{r_1} < \psi_{r_2}.$$

Введём функцию квантили, характеризующую значение минимального порога φ при котором выполняется вероятностное ограничение $P_\varphi(u_{r_1}) \geq \alpha$

$$\varphi_\alpha(u_{r_1}) = \min\{\varphi : P_\varphi(u_{r_1}) \geq \alpha\}.$$

Поскольку $\mathcal{P}(C_{r_1}) \geq \alpha$, а, следовательно, $\mathcal{P}_{\psi_{r_1}}(u_{r_1}) \geq \alpha$, то $\varphi_\alpha(u_{r_1}) \leq \psi_{r_1}$.

Для критерия $\varphi_\alpha(u)$ выполняется $\varphi_\alpha \leq \varphi_\alpha(u) \leq \varphi_\alpha(u_{r_1})$. Учитывая все вышесказанное, получаем неравенство

$$\varphi_\alpha \leq \psi_{r_1} < \psi_{r_2}.$$

Таким образом, теорема 2.1 полностью доказана. $\square$

Рассмотрим более общий случай, когда случайный вектор X имеет нормальное распределение вида $\mathcal{N}(m, K)$, где K — невырожденная ковариационная матрица. Введём новый вектор

$$Z = K^{-1/2}(X - m),$$

который имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(\vec{0}, I)$. При такой замене переменных X на Z ограничения, задающие множество допустимых стратегий второго этапа $\mathcal{Y}(u, x)$, преобразуются в множество $\mathcal{Y}(u, z)$, ограничения которого будут иметь точно такую же структуру, как и ограничения, описывающие множество $\mathcal{Y}(u, x)$. Таким образом, случай $X \sim \mathcal{N}(m, K)$ сводится к случаю стандартного нормального распределения $X \sim \mathcal{N}(\vec{0}, I)$, рассмотренному ранее.

2.3.2. Алгоритм решения задачи выпуклого программирования

Задача, рассмотренная в разделе 2.1, с помощью доказанных в разделе 2.2 утверждений сведена к задаче выпуклого программирования. Для решения данной задачи предлагается следующий алгоритм.

Рассмотрим вначале способ поиска точки r_0, определяемой выражением (2.28). Для этого используем алгоритм дихотомии в следующей модификации. Выберем точки $r = \rho$ и $r = R$, для которых $\mathcal{P}(C_\rho) \leq \alpha$ и $\mathcal{P}(C_R) \geq \alpha$. Рассмотрим точку $r = (\rho + R)/2$ и найдем значение вероятностной меры $\mathcal{P}(C_r)$ (алгоритм вычисления вероятностной меры $\mathcal{P}(C_r)$ приводится далее). Если $\mathcal{P}(C_r) \geq \alpha$, то далее оставляем точки ρ и r. Если же $\mathcal{P}(C_r) < \alpha$, то оставляем точки r и R. И так далее производим деление пополам текущих отрезков неопределенности. Алгоритм сходится, поскольку $\mathcal{P}(C_\rho) \leq \alpha$ и $\mathcal{P}(C_R) \geq \alpha$. Скорость сходимости этого алгоритма равна $1/2^k$, где k — количество делений отрезков неопределенности пополам.

Предложим теперь алгоритм вычисления $\mathcal{P}(C_r)$ для произвольного $r \in [\rho, R]$. С этой целью дискретизируем меру так, как предложено в разделе 1.2. Пусть $x_k,\ k = \overline{1, K}$, — точки, сгенерированные на основе плотности нормального распределения $\mathcal{N}(\vec{0}, I)$. Пусть $p_k = 1/K$ — вероятностная мера, приписанная к точке $x_k,\ k = \overline{1, K}$. Таким образом, получаем меру $\tilde{\mathcal{P}}$, аппроксимирующую гауссову меру $\mathcal{P}$. Заменим меру $\mathcal{P}$ на меру $\tilde{\mathcal{P}}$ при вычислении $\mathcal{P}(C_r)$. Пусть для некоторого $r \in [\rho, R]$ найдены u_r и ψ_r в результате решения задачи выпуклого программирования

$$\psi_r = \min_{u \in U} \psi(S_r, u),\ u_r = \arg\min_{u \in U} \psi(S_r, u), \tag{2.29}$$

где выпуклая функция $\psi(S_r, u)$ определяется согласно (2.19). Для решения задачи (2.29) можно использовать какие-либо эффективные методы выпуклого программирования [14], например метод внутренней точки.

Рассмотрим процедуру поиска вероятностной меры $\tilde{\mathcal{P}}(C_r)$ множества C_r, определяемого выражением (2.27)

$$C_r = \{x : c_0^{\mathrm{T}} u_r + x^{\mathrm{T}} A_1 u_r + \max_{j=\overline{1,J}} [\bar{a}^{\mathrm{T}}(u_r, x) v^j] \leq \psi_r\}.$$

Поскольку $S_r \subset C_r$, то исключим из рассмотрения точки $x_k \in S_r$. Отметим, что вероятностная мера $\mathcal{P}(S_r)$ множества S_r известна и вычисляется по формуле (2.24), в которой нужно заменить R на r, а α — на получаемую меру $\mathcal{P}(S_r)$. Тогда

$$\mathcal{P}(C_r) = \mathcal{P}(C_r \backslash S_r) + \mathcal{P}(S_r) \approx \tilde{\mathcal{P}}(C_r \backslash S_r) + \mathcal{P}(S_r).$$

При этом мера $\tilde{\mathcal{P}}(C_r \backslash S_r)$ может быть найдена за счёт перебора лишь точек x_k, лежащих вне S_r. Таким образом, вычисление вероятностной меры $\mathcal{P}(C_r)$ множества C_r резко упрощается.

По сути, описанная процедура вычисления $\mathcal{P}(C_r)$ является реализацией метода Монте-Карло, из которой исключены точки, принадлежащие шару S_r.

Алгоритм, подобный описанному выше, был предложен ранее в работе А.И. Кибзуна и А.В. Наумова [34], и применен впоследствии для задачи из другой работы А.И. Кибзуна и А.В. Наумова [35]. Но в указанной работе ограничения, описывающие множество $\mathcal{Y}(u, x)$, были линейными одновременно по u и x, а алгоритм, предложенный в данной главе, применяется для ограничений в $\mathcal{Y}(u, x)$, линейных отдельно по u и x (билинейных). Таким образом, алгоритм, описанный в работе А.И. Кибзуна и А.В. Наумова [34], является частным случаем алгоритма данной главы.

Алгоритм решения задачи выпуклого программирования основан на том факте, что случайный вектор X имеет нормальное распределение (см. условия леммы 2.2). Следует отметить, что класс распределений случайного вектора может быть расширен, в частности, вектор случайных факторов может иметь сферически симметричное распределение. В этом случае почти все приведённые рассуждения остаются верными, изменяются только размеры доверительного шара и ядра вероятностной меры.

2.4. Результаты решения двухэтапной задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь

В данном разделе приводятся результаты применения алгоритма поиска решения двухэтапной билинейной задачи стохастического программирования с квантильным критерием.

Пример 2.1.

Рассмотрим пример двухэтапной задачи, в которой функция потерь имеет вид:

$$\Phi(u,x) = c_0^{\mathrm{T}} u + a x^{\mathrm{T}} u + \bar{\Phi}(u,x),$$

где

$$\bar{\Phi}(u,x) = \min_{y \in Y} \{ c_1^{\mathrm{T}} y | x^{\mathrm{T}} A_{2i} u + b_i^{\mathrm{T}} y \geq b x_i \},$$

$n = m = m_1 = s = 2$, вектор случайных параметров $x^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2)$; стратегии первого этапа $u^{\mathrm{T}} = (u_1, u_2)$.

Параметры задачи принимают следующие значения: $c_0^{\mathrm{T}} = (3, -4)$; $c_1^{\mathrm{T}} = (6, 3)$; $a = 0,1$, $b = 2,5$; $b_1^{\mathrm{T}} = (2; -2,5)$; $b_2^{\mathrm{T}} = (-2; 4)$;

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Пусть $X \sim \mathcal{N}(\vec{0}, I)$, где I — единичная ковариационная матрица. Рассматриваемая функция потерь соответствует постановке (2.1) — (2.2).

Найдем решение этой задачи для трех значений уровня вероятности $\alpha = 0,9;\ 0,99;\ 0,999$. В зависимости от уровня вероятности и количества K точек дискретизации $x_k, k = \overline{1,K}$, сгенерированных согласно плотности распределения, получим решение задачи (2.2) — (2.6). Результаты численных расчётов приведены в таблице 2.1.

В таблице 2.1 в крайнем правом столбце приведено время счёта t алгоритма в секундах для разного количества реализаций и уровня вероятности α. Вычисления производились на персональном компьютере с характеристиками: процессор — 2,5 GHz Intel Core i5; оперативная память — 4 ГБ 1600 МГц; операционная система — OS X 10.9.

Следует отметить, что при увеличении числа K точек дискретизации на несколько порядков время счёта увеличивается незначительно, кроме того, время счёта для одного и того же значения K при разных значениях вероятности α различается несущественно. Это связано прежде всего с тем, что оптимизационная минимаксная задача (2.16) слабо зависит от уровня вероятности (длина интервала неопределенности $[\rho_\alpha, R_\alpha]$ практически не зависит от α при больших его значениях). Кроме того, за счёт описанной выше процедуры сокращения перебора точек при вычислении вероятности по методу Монте-Карло перебираются лишь точки, лежащие вне шара S_r, что также снижает влияние α на время счёта. Таким образом, быстродействие предложенного алгоритма слабо зависит от уровня доверительной вероятности.

Таблица 2.1. Результаты численного эксперимента

α	K	$\overline{\varphi}_\alpha(K)$	$\overline{u}_1(K)$	$\overline{u}_2(K)$	t
$0,9$	10	$7,5472$	$0,8750$	$0,3667$	$11,459$
	100	$6,7228$	$0,8673$	$0,3648$	$11,736$
	1000	$6,7228$	$0,8673$	$0,3648$	$12,284$
	10000	$6,7228$	$0,8673$	$0,3648$	$18,821$
$0,99$	100	$12,8226$	$0,9044$	$0,3728$	$11,492$
	1000	$11,2475$	$0,8989$	$0,3718$	$12,023$
	10000	$11,2475$	$0,8989$	$0,3718$	$13,475$
	100000	$11,2475$	$0,8989$	$0,3718$	$26,354$
$0,999$	1000	$14,6035$	$0,9171$	$0,3750$	$11,872$
	10000	$14,5385$	$0,9133$	$0,3744$	$12,613$
	100000	$14,5385$	$0,9133$	$0,3744$	$17,273$
	1000000	$14,5385$	$0,9133$	$0,3744$	$64,469$

С другой стороны, время счёта и точность решения существенно зависят от числа K точек дискретизации. При небольших (относительно уровня вероятности) значениях K алгоритм работает быстрее, но возникают погрешности вычисления. С увеличением количества точек разбиения значение критерия $\bar{\varphi}_\alpha(K)$ быстро стабилизируется и от K зависит слабо. Это связано с тем, что при большом количестве точек разбиения бóльшая их часть содержится в доверительном шаре, а мера $\tilde{\mathcal{P}}(C_r \backslash S_r)$ оказывается существенно меньше $\mathcal{P}(S_r)$, поэтому она оказывает незначительное влияние на значение меры $\mathcal{P}(C_r)$.

Пример 2.2.

В первой главе двухэтапная задача квантильной оптимизации сводится к смешанной задаче целочисленного линейного программирования большой размерности. Применим алгоритм, описанный в этой главе, для решения задачи, рассмотренной в первой главе, и сравним результаты, получаемые в ходе применения обоих алгоритмов (алгоритмов первой и второй главы).

Рассмотрим двухэтапную задачу (1.16) в априорной постановке. Пусть параметры задачи принимают следующие значения: $x = \mathrm{col}(x_1, x_2)$; $n = m = m_1 = s = 2$; $u^{\mathrm{T}} = (u_1, u_2)$; $c_0^{\mathrm{T}} = (0,3; -0,4)$; $c_1^{\mathrm{T}} = (6; 3)$; $a_1(x) = ax$, $a_3(x) = bx$, где $a = 2,5$; $b = 1,5$;
$A_2(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 & x_1 - 2x_2 \\ 2x_2 & 4x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Пусть случайный вектор X имеет нормальное распределение $N(\vec{0}; I)$, где I — единичная ковариационная матрица.

Результаты применения двух алгоритмов приведены в таблице 2.2. Время счёта t_1 и t_2 указано в секундах.

Таблица 2.2. Результаты сравнения алгоритмов первой и второй главы

α	K	Алгоритм 1				Алгоритм 2			
		$\overline{\varphi}_\alpha(K)$	$\overline{u}_1(K)$	$\overline{u}_2(K)$	t_1	$\hat{\varphi}_\alpha$	u_{1r}	u_{2r}	t_2
0,9	10	2,350	0,799	0,810	35,683	3,020	0,691	0,738	11,561
0,99	100	3,557	0,728	0,739	40,807	4,058	0,698	0,724	11,602
0,99	1000	4,453	0,705	0,748	122,421	4,797	0,695	0,738	12,235
0,999	1000	6,142	0,750	0,751	134,651	6,412	0,702	0,716	11,087
0,999	10000	6,273	0,715	0,701	1392,539	6,280	0,704	0,718	11,993
0,999	100000	6,285	0,705	0,712	23791,425	6,286	0,702	0,716	19,732

Из таблицы 2.2 видно, что решение, полученное с помощью первого алгоритма (алгоритма, описанного в первой главе), оказывается лучше, чем решение, полученное путём применения алгоритма, описанного в данной главе (алгоритм 2). Следует отметить, что решение, получаемое с помощью алгоритма, описанного в данной главе, является гарантирующим, то есть представляет собой некоторое допустимое решение, на котором достигается верхняя оценка оптимального значения критерия. При этом данное решение оказывается не лучше приближённого решения, получаемого путём применения алгоритма, описанного в первой главе.

Время счёта первого алгоритма в несколько раз превышает время счёта второго алгоритма. Это связано с тем, что во втором алгоритме применяется процедура сокращения перебора точек, образующих доверительное множество. Поскольку с ростом количества K точек дискретизации алгоритм стабилизируется, то можно предполагать, что при больших K он сходится к точному решению задачи.

2.5. Выводы по главе 2

В данной главе рассмотрена двухэтапная задача стохастического программирования с квантильным критерием и билинейной функцией потерь при нормальном распределении случайных параметров. Предложен алгоритм получения гарантирующего решения исходной стохастической задачи, основанный на доверительном методе и решении задачи выпуклого программирования, которая параметризована скалярным параметром, выбираемым с помощью метода дихотомии. Основная трудоёмкость предложенного алгоритма заключается в процедуре подсчёта вероятностной меры многогранного множества. Однако за счёт дискретизации меры нормального распределения и введения процедуры сокращения перебора точек, которые образуют доверительное множество, удаётся сократить время счёта алгоритма.

Основные результаты главы 2

1. Исследованы свойства верхней оценки функции квантили для билинейной двухэтапной системы.

2. Разработан алгоритм поиска гарантирующего решения двухэтапной задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь при нормальном распределении случайных параметров задачи. Алгоритм основан на переходе от исходной билинейной задачи к задаче выпуклого программирования, параметр которой может быть найден с помощью метода дихотомии.

3. Задача выбора оптимальной трассы с учётом случайной стоимости работ на разных участках

В данном разделе рассматривается задача выбора оптимальной трассы до аэропорта с учётом случайной стоимости работ на разных участках. Актуальность рассматриваемой задачи обусловлена обострением проблемы эффективности логистики в современных условиях высокого трафика.

Эффективное функционирование аэропортов возможно только в случае обеспечения их транспортной доступности. Но дорожные трассы, ведущие к аэропортам, прокладывались более полувека назад, когда автомобильное движение не было столь насыщенным по сравнению с текущей ситуацией. Решением данной проблемы может стать комплексная реконструкция трасс. Но, к сожалению, расширение уже имеющихся трасс, ведущих к аэропортам, не всегда возможно. Всему виной различные объекты, построенные вдоль дорог, например, дома, торговые центры. Кроме того, расширение имеющихся трасс может оказаться невозможным вследствие специфических особенностей местности. Поэтому существующая проблема может быть решена путём прокладки новых трасс, причем крайне желательно обеспечить прокладку новых трасс с наименьшими затратами.

Выбор траектории автомобильной трассы, соединяющей между собой два разных пункта, представляет собой сложную математическую задачу, поскольку должен учитывать различную, имеющую стохастическую природу стоимость прокладки трассы на разных участках. Можно ввести разбиение карты района прокладки трассы на конечное число участков, тогда задача может быть описана на языке стохастического программирования. Поскольку строительство трассы в большинстве случаев ведется поэтапно, то задача выбора оптимальной трассы может быть записана в классе многоэтапных задач стохастического программирования.

Стохастические модели, как правило, более адекватно описывают реальные процессы и явления, чем детерминированные модели, так как многие параметры в исследуемых задачах имеют стохастическую природу. Поэтому оптимальные стратегии, полученные на основе решения задач стохастического программирования, являются практически более адекватными, чем стратегии, полученные в детерминированных постановках. Задачам стохастического программирования посвящены работы Ю.М. Ермольева [15], А.И. Кибзуна и Ю.С. Кана [25, 117], Э. Райка [58, 59], Д.Б. Юдина [76], J. Birge и F. Louveaux [85], A. Charnes и

W.W. Cooper [95–97], P. Kall [109], P. Kall и S.W. Wallace [111], A. Prékopa [138] и многих других авторов.

Критерием оптимальности трассы вряд ли может служить такой традиционный критерий, как усреднение затрат, поскольку этот критерий не учитывает возможные отклонения величины стоимости при реальной прокладке трассы. В данной ситуации более адекватным решением является получение гарантированных с заданной вероятностью затрат, то есть применение квантильного критерия. Задачи стохастического программирования, особенно при оптимизации по вероятностному критерию или с вероятностными ограничениями, являются достаточно сложными. Это объясняется в основном сложностью нахождения аналитического вида вероятностного или квантильного критериев, а также, при отсутствии аналитического вида критерия, сложностью методов решения подобных задач, детально рассмотренных в монографии А.И. Кибзуна и Ю.С. Кана [25]. Согласно указанной работе одним из наиболее эффективных путей аналитического решения задач стохастического программирования является построение детерминированных эквивалентов — детерминированных задач математического программирования, решения которых совпадают с решениями соответствующих задач стохастического программирования. Данные эквиваленты не зависят от случайных величин, что позволяет свести исходную задачу стохастического программирования к эквивалентной ей детерминированной задаче, которую можно решать стандартными методами математического программирования, рассмотренными в монографии Б.Т. Поляка [57].

Рассматриваемая в данной главе задача относится к задачам оптимального управления. В задачах этого типа требуется найти закон изменения некоторых управляющих воздействий для динамической системы так, чтобы минимизировать некоторый критерий оптимальности. Процесс минимизации можно проводить по шагам, причем пошаговое управление должно выбираться с учётом всех его последствий. Следует отметить, что двухэтапная задача стохастического программирования в априорной постановке по сути представляет собой задачу управления стохастической системой. Многие многошаговые, и в частности динамические задачи, имеют структуру, которая согласно работе Р. Беллмана, И. Глицксберга и О. Гросса [2] позволяет получить решение на основе принципа индукции. В 1952 году Ричард Беллман первым обратил внимание на важность для программирования индуктивного метода, который он назвал принципом оптимальности, и раскрыл его потенциальные возможности в своей работе [1]. Принцип оптимальности составляет суть метода динамического программирования. Изложению метода динамического программирования были посвящены работы Р. Беллмана [1], Р. Беллмана, И. Гликцсберга, О. Гросса [2], Р. Беллмана и С. Дрейфуса [3], Е.С. Вентцель [8] и других исследователей.

Рассматриваемая в данной главе задача может быть решена с помощью алгоритмов поиска наикратчайших путей в графе, исследованных в работах таких авторов, как Е.С. Вентцель [8], А.И. Житенёва [18], Н. Кристофидеса [46], E.W. Dijkstra [99]. В данной главе предлагается один из традиционных способов решения задачи целочисленного стохастического программирования на основе динамического программирования. С целью сокращения количества рассматриваемых вариантов перебора предлагается использовать дополнительно метод сценариев, исследованный в работе P. Kall [111], в сочетании с методом ветвей и границ, предложенным впервые в работах A.H. Land и A.G. Doig [121] и J.D.C. Little, K.G. Murty и др. [123].

В данной главе осуществляется разработка математической модели выбора оптимальной трассы, учитывающей случайную стоимость работ на разных участках пути, связанную с разнообразным рельефом местности. Для полученной модели предлагается алгоритм, основанный на методе динамического программирования, схеме сценариев и методе ветвей и границ. Эффективность предложенного алгоритма демонстрируется на примере прикладной задачи.

Для корректного учёта множества случайных факторов, влияющих на стоимость прокладки трассы, задача рассматривается в двух постановках — детерминированной и стохастической. Алгоритм, разработанный для задачи в детерминированной постановке, положен в основу алгоритма решения задачи в стохастической постановке.

Исследуемая в данной главе задача также, как и задачи в первых двух главах, будет рассмотрена с квантильным критерием. Кроме того, рассматриваемая в данной главе задача относится к динамическим задача, на связь которых с линейными относительно стратегий системами было показано во введении.

В разделе 3.1 приведена общая постановка задачи, а также краткое описание предположений, на основании которых будет осуществляться дальнейшее решение.

В разделе 3.2 рассматривается задача оптимизации прокладки трассы в детерминированной постановке. Задача предполагает поиск программного управления. Показана эквивалентность задач в классе программных и позиционных стратегий.

Алгоритм решения стохастической задачи с критерием в форме математического ожидания, основанный на методе динамического программирования, а также модифицированный алгоритм решения с применением метода ветвей и границ и схемы сценариев рассматриваются в разделе 3.3.

В разделе 3.4 рассматривается задача оптимизации в стохастической постановке. В качестве критерия оптимальности выбирается квантильный критерий. Для задачи в стохастической постановке получен детерминированный эквивалент, а сама задача решена в программных стратегиях.

В разделе 3.5 предлагается алгоритм решения задачи оптимизации в стохастической постановке, основанный алгоритме, предложенном в разделе 3.3.

В разделе 3.6 приведены результаты численных расчётов на примере прикладной задачи прокладки автомобильной трассы от пересечения МКАД и Каширского шоссе до аэропорта Быково. Вычислительная эффективность предлагаемых в главе алгоритмов показана на основе решения задачи с учётом средних значений и дисперсий стоимости работ по прокладке трассы.

3.1. Динамическая модель прокладки трассы

Предположим, что требуется проложить некоторую трассу из пункта A в пункт B. Стоимость прокладки трассы различна на каждом участке пути в связи с неоднородностью грунта, особенностями рельефа, естественными препятствиями и т.д. Необходимо проложить трассу из пункта A в пункт B таким образом, чтобы суммарные затраты на её прокладку были минимальны.

Решение поставленной задачи будем осуществлять следующим образом. Рассмотрим участок местности для предполагаемой прокладки трассы. Наложим на карту рельефа местности сетку разбиения на мелкие прямоугольники. Расположим сетку так, чтобы левый нижний угол сетки совпал с точкой A начала строительства трассы, а правый верхний — с конечной точкой B трассы.

Допустим, что весь процесс прокладки трассы разделён на ряд последовательных шагов (этапов) и за каждый шаг мы можем проложить часть трассы по сторонам прямоугольника разбиения вправо и вверх, а также по диагонали по направлению к конечной точке B. Движения по сетке влево, вниз и по диагонали в направлении от конечной точки исключены из рассмотрения для избежания зацикливания алгоритма прокладки трассы и для существенного уменьшения перебора возможных вариантов трасс.

Каждому участку трассы соответствует своя стоимость прокладки. Любая трасса, связывающая начальную и конечную точки, будет представлять собой некоторую ломаную линию. Существует множество таких трасс, каждая из которых связана с определенной стоимостью работ и характеризует управление процессом прокладки трассы в трёх направлениях. Из всех возможных трасс необходимо выбрать оптимальную, стоимость работ по прокладке которой будет минимальной. Можно было бы, разумеется, перебрать все возможные трассы и, в конечном счете, найти оптимальную, но это очень трудоёмкий в вычислительном плане процесс. Гораздо быстрее можно решить задачу с использованием метода динамического программирования, рассмотренного в работе Р. Беллмана [1].

Разделим длину каждой из сторон сетки разбиения на L равных частей по горизонтали и на M равных частей по вертикали. Число частей L и M, на которые делятся стороны сетки, может быть выбрано исходя из требований к точности и к трудоёмкости решения задачи. Размер ячеек сетки выбирается переменным или постоянным в зависимости от рельефа района прокладки. Угол наклона сетки по отношению к карте местности выбирается переменным. Этот угол в дальнейшем оптимизируется.

3.2. Задача оптимизации в детерминированной постановке

Предположим, что стоимость работ на всех участках известна и является неслучайной величиной. Пусть общее число шагов многоэтапного процесса прокладки трассы равно N, причем очевидно, что $\max\{L, M\} \leq N \leq L + M$. Заметим, что в пределах каждого прямоугольника из нижнего левого угла в правый верхний можно перейти и за 2 шага «вверх — вправо» и «вправо — вверх»), и за 1 шаг — по диагонали.

Каждый прямоугольник разбиения имеет 4 вершины. Назовем каждую из этих вершин узловой точкой $x_{i,j} \triangleq \mathrm{col}(i, j), i = \overline{0, L}, j = \overline{0, M}$. Текущий участок прокладки трассы будем характеризовать узловой точкой $x_{i_k, j_k} \triangleq \mathrm{col}(i_k, j_k)$ прямоугольника с номером линий разбиения сетки по вертикали и горизонтали (i_k, j_k), $i = \overline{0, L}$, $j = \overline{0, M}$, $k = \overline{1, N+1}$. Причем точка $x_{1,1} \triangleq \mathrm{col}(i_1, j_1)$, где $i_1 = 0$, $j_1 = 0$, соответствует начальной точке трассы (пункт A), а $x_{N+1,N+1} \triangleq \mathrm{col}(i_{N+1}, j_{N+1})$, где $i_{N+1} = L, j_{N+1} = M$, — конечной точке трассы (пункт B). Начальная и конечная точки A и B трассы известны.

Пусть трудоёмкость прокладки трассы описывается трёхмерной матрицей:

$$Y = ||y_{ij}||, \tag{3.1}$$

где

$$y_{ij} \triangleq \mathrm{col}(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}), \tag{3.2}$$

$i = \overline{1, L}, j = \overline{1, M}$ — число частей, на которые делятся стороны сетки разбиения по горизонтали и по вертикали соответственно;
a_{ij} — стоимость прокладки трассы по горизонтали от точки (i, j) до точки $(i+\ 1, j)$;
b_{ij} — стоимость прокладки трассы по вертикали от точки (i, j) до точки $(i, j+\ 1)$;
c_{ij} — стоимость прокладки трассы по диагонали от точки (i, j) до точки $(i\ +\ 1, j\ +\ 1)$. Если $i = L$, то $a_{ij} = c_{ij} = 0$, а если $j = M$, то $b_{ij} = c_{ij} = 0$.

Текущее значение стоимости работ по прокладке трассы до точки $x_{i_k, j_k} \triangleq \mathrm{col}(i_k, j_k)$ обозначим через d_k, причем $d_k > 0$.

Рассмотрим динамическую систему, описывающую изменение текущего положения точки на сетке разбиения и текущее значение стоимости работ:

$$\begin{cases} i_{k+1} = i_k + u_k, i_1 = 0, \\ j_{k+1} = j_k + 1 - u_k + u_k v_k, j_1 = 0, \\ d_{k+1} = d_k + \delta(i_k, j_k, u_k, v_k), d_1 = 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

где $i_k = \overline{0, L}, j_k = \overline{0, M}$ — координаты узловой точки на $k-$м шаге по горизонтали и по вертикали соответственно;

k — номер шага, $k = \overline{1, N}$;

N — общее число шагов, $\max\{L, M\} \leq N \leq L + M$;

$x_{1,1} \triangleq \mathrm{col}(i_1, j_1),$ где $i_1 = 0, j_1 = 0,$ — начальная точка;

$x_{N+1,N+1} \triangleq \mathrm{col}(i_{N+1}, j_{N+1})$, где $i_{N+1} = L,\ j_{N+1} = M,$ — конечная точка;

u_k, v_k — управление, которое выбирается из множества $U \triangleq \{0, 1\}$ допустимых управлений, $u_k, v_k \in U$;

d_k — стоимость прокладки трассы до $k-$го участка включительно;

$\delta(i_k, j_k, u_k, v_k)$ — добавка к текущему значению стоимости работ.

Система (3.3) описывает движение по трём направлениям сетки разбиения: по горизонтали (при $u_k = 1, v_k = 0$), по вертикали (при $u_k = 0$) и по диагонали ($u_k = 1, v_k = 1$). Применение в системе (3.3) особой комбинации управлений u_k, v_k позволяет не вводить третью управляющую переменную и описывать движение по трём направлениям сетки разбиения посредством всего двух управляющих переменных $u_k, v_k \in \{0, 1\}$. Выбранная модель движения и управления позволяет двигаться только вверх, вправо и вверх по диагонали, исключая движение вниз, влево и вниз по диагонали. Такая схема движения позволяет исключить зацикливание алгоритма и значительно сократить количество рассматриваемых вариантов движения.

В зависимости от выбранного управления, определяющего движения по сетке разбиения по горизонтали, вертикали или по диагонали, добавка к текущей стоимости трассы будет определяться величиной:

$$\delta(i_k, j_k, u_k, v_k) = \begin{cases} a_{i_k j_k}, & \text{если } u_k = 1, v_k = 0, \\ b_{i_k j_k}, & \text{если } u_k = 0, \\ c_{i_k j_k}, & \text{если } u_k = 1, v_k = 1. \end{cases} \tag{3.4}$$

Таким образом, текущее положение системы полностью описывается вектором текущего состояния системы:

$$z_k \triangleq \mathrm{col}(i_k, j_k, d_k), k = \overline{1, N+1}.$$

Суммарная стоимость работ по прокладке трассы от начальной точки $x_{1,1}$ до конечной точки $x_{N+1,N+1}$ равна d_{N+1}.

Задача оптимизации состоит в минимизации суммарных затрат на прокладку трассы:

$$d_{N+1}(u_1, \ldots, u_N, v_1, \ldots, v_N) \to \min_{\substack{u_k,\, v_k \in U \\ k=\overline{1,\, N}}}. \tag{3.5}$$

Задача (3.5) предполагает поиск программного управления, то есть управления, при котором последовательность управляющих воздействий выбирается из множества $\{0, 1\}$ до начала процесса движения системы (3.3).

Оптимальное программное управление (u^*, v^*) должно удовлетворять следующему условию:

$$(u^*, v^*) = \arg \min_{u, v \in U_N} d_{N+1}(u, v), \tag{3.6}$$

где управление

$$u \triangleq \operatorname{col}(u_1, \ldots, u_N), v \triangleq \operatorname{col}(v_1, \ldots, v_N) \tag{3.7}$$

выбирается из множества допустимых программных управлений

$$U_N \triangleq \underbrace{U \times \ldots \times U}_{N}. \tag{3.8}$$

В разделе 3.4 планируется осуществить переход к стохастической постановке задачи выбора оптимальной трассы. Поэтому рассмотрим задачу оптимизации (3.5) в классе позиционных стратегий, то есть таких стратегий, что управление выбирается в зависимости от реализовавшихся значений вектора состояния системы:

$$(u^*(\cdot), v^*(\cdot)) = \arg \min_{u(\cdot),\, v(\cdot) \in \mathcal{U}_N} d_{N+1}(u(\cdot), v(\cdot)), \tag{3.9}$$

где

$$u(\cdot) \triangleq \operatorname{col}(u_1(\cdot), \ldots, u_N(\cdot)),$$

$$\mathcal{U}_N \triangleq \{u(\cdot) : u_k(z_k) \in U \;\; \forall z_k, k = \overline{1, N}\}.$$

Данную задачу предлагается решать с помощью метода динамического программирования. Алгоритм решения рассмотрен в следующем разделе.

3.3. Алгоритм решения задачи оптимизации в детерминированной постановке с критерием в форме математического ожидания

3.3.1. Применение метода динамического программирования для решения задачи оптимизации в детерминированной постановке

В работе В.В. Малышева [48] показано, что в силу детерминированности системы (3.3) оптимальное значение критерия (3.9) в классе позиционных стратегий совпадает с оптимальным значением критерия (3.6) в классе программных стратегий:

$$d_{N+1}(u^*(\cdot), v^*(\cdot)) = d_{N+1}(u^*, v^*).$$

Применим для решения задачи (3.9) метод динамического программирования. С этой целью проверим условия применимости для данного случая метода динамического программирования, приведенные в работе Д. Бертсекаса и С. Шрива [4]:

1) система (3.3) является марковской, так как она рекуррентна и ее поведение в будущем полностью определяется текущим состоянием;

2) критерий оптимизации (3.6) является аддитивным, его можно представить в виде суммы:
$$d_{N+1} = \sum_{k=1}^{N} \delta(i_k, j_k, u_k, v_k), \tag{3.10}$$
а следовательно, критерий (3.6) является монотонным;

3) целевая функция d_{N+1} ограничена снизу $d_{N+1} > 0$, так как стоимость работ на каждом участке трассы не может быть отрицательной или равняться нулю.

Поскольку перечисленные условия выполнены, то, согласно монографии Д. Бертсекаса и С. Шрива [4], для решения задачи (3.9) можно воспользоваться методом динамического программирования.

Введем функцию будущих потерь

$$R_k(z_k) \triangleq \min_{\{u_i(\cdot)\}_{i=k}^N,\, \{v_i(\cdot)\}_{i=k}^N \in \mathcal{U}_k} d_{N+1},$$

где

$$\mathcal{U}_k \triangleq \{\{u_i(\cdot)\}_{i=k}^N : u_i(z_i) \in U \ \ \forall z_i,\ i = \overline{k, N}\}.$$

В соответствии с методом динамического программирования получаем следующие рекуррентные соотношения

$$R_k(z_k) = \min_{u_k, v_k \in U} R_{k+1}(z_{k+1}(z_k, u_k, v_k)), k = N, N-1, \ldots, 1, \tag{3.11}$$

$$R_{N+1}(z_{N+1}) = d_{N+1}, \tag{3.12}$$

где зависимость $z_{k+1}(z_k, u_k, v_k)$ определяется системой (3.3).

Соотношения (3.11) $---$ (3.12) на каждом шаге представляют собой задачу математического программирования, при решении которой для каждого значения вектора состояния z_k определяется управление $(u_k, v_k), k = \overline{1, N}$, принимающее значение из множества $\{0, 1\}$.

При $k = N$ задача оптимизации состоит в минимизации стоимости прокладки последнего участка трассы:

$$R_N(z_N) = \min_{u_N,\, v_N \in\, U} R_{N+1}(z_{N+1}(z_N, u_N, v_N)),$$

при $k = 1$ задача имеет вид

$$R_1(z_1) = \min_{u_1,\, v_1 \in\, U} R_2(z_2(z_1, u_1, v_1)).$$

При этом, согласно работе А.И. Кибзуна [23] и в соответствии с методом динамического программирования выполняется

$$d_{N+1}(u^*(\cdot), v^*(\cdot)) = R_1(z_1).$$

Разрешая рекуррентные соотношения динамического программирования (3.11) – (3.12) от конца к началу, получаем на каждом шаге $k = \overline{1, N}$ зависимость оптимального управления $u_k^*(z_k), v_k^*(z_k)$ на этом шаге от текущего состояния z_k. Подставляя эти зависимости в систему (3.3), найдем вектор оптимального состояния z_k^* для каждого шага $k = \overline{1, N}$. Подставляя найденные значения z_k^* в оптимальные управляющие функции, находим оптимальное программное управление

$$u_k^* = u_k^*(z_k^*), v_k^* = v_k^*(z_k^*), k = \overline{1, N}.$$

При этом выполняется

$$d_{N+1}(u^*(\cdot), v^*(\cdot)) = d_{N+1}(u^*, v^*) = R_1(z_1).$$

Решение задачи (3.9) основано на применении метода динамического программирования. Согласно работе Е.С. Вентцель [8] специфика этого метода состоит в разбиении исходной задачи на ряд последовательных «шагов» или «этапов». На практике, как правило, рассматриваются задачи с достаточно большим количеством этапов. В связи с этим возникает проблема, называемая в работе Р. Беллмана [1] «проклятием размерности». Данная проблема влечёт за собой трудоёмкость вычислений и необходимость хранения большого количества данных. Для устранения «проклятия размерности» необходимо предложить алгоритм решения, основанный на методе динамического программирования, например, с использованием метода ветвей и границ, рассмотренного в работах A.H. Land и A.G. Doig [121], J.D.C. Little, K.G. Murty и др. [123], а также метода сценариев, рассмотренного в работе P. Kall и S.W. Wallace [111].

3.3.2. Алгоритм решения задачи в детерминированной постановке с применением метода ветвей и границ и схемы сценариев

Модифицируем решение задачи (3.11), основанное на методе динамического программирования, с использованием схемы сценариев, а также метода ветвей и границ.

Согласно работе P. Kall и S.W. Wallace [111] схема сценариев заключается в определении некоторого набора предварительных решений задачи. Из этого набора выбирается решение, наилучшим образом удовлетворяющее критерию оптимизации, которое в дальнейшем используется для сравнения с решениями, полученными в результате применения алгоритма. В ходе сравнения часть найденных, заведомо неоптимальных решений исключается из рассмотрения, а оставшиеся — уточняются. В результате находится оптимальное решение, которое либо лучше предварительно найденных решений, либо совпадает с одним из них.

Глядя на карту района прокладки трассы, можно заметить, что на местности существуют участки с одинаковым рельефом, следовательно, и с одинаковой стоимостью работ по прокладке трассы на этих участках. Предлагается воспользоваться помощью эксперта — человека, имеющего длительный опыт работы в области прокладки автомобильных трасс, с целью определения нескольких трасс для прокладки с наименьшими затратами. Пусть экспертом были эвристически выбраны l траекторий, которые обозначим $T^1, T^2, \dots, T^l$, со стоимостью прокладки $d^1, d^2, \dots, d^l$ соответственно. Из предложенных траекторий выбираем траекторию с наименьшей стоимостью прокладки $d^\circ = \min\{d^1, d^2, \dots, d^l\}$, обозначим эту траекторию через T°.

Будем осуществлять поиск оптимальной траектории для прокладки трассы с помощью метода ветвей и границ, рассмотренного в работах A.H. Land и A.G. Doig [121], J.D.C. Little, K.G. Murty и др. [123].

Основные принципы метода ветвей и границ для решения задачи минимизации (3.11) состоят согласно работе Б.Т. Поляка [57] в следующем.

1. *Ветвление.* Для нахождения оптимальной трассы исходная задача (3.11) разбивается на несколько подзадач таким образом, что решение исходной задачи является решением хотя бы одной из подзадач. Каждая из подзадач, в свою очередь, ветвится на более мелкие подзадачи. Процесс может повторяться до тех пор, пока получаемая подзадача не становится тривиальной и её решение может быть легко получено.

2. *Построение нижних оценок для минимального значения критериальной функции.* Для любой из подзадач может быть найдена нижняя оценка минимального значения стои-

мости работ по прокладке трассы между двумя точками сетки разбиения. Нижняя оценка может быть получена в результате решения релаксированной или ослабленной задачи, когда трудоёмкости прокладки трассы по одному направлению движения заменяются минимально возможным значением трудоёмкости прокладки в данном направлении.

3. *Отсеивание вариантов.* Если для некоторой подзадачи нижняя оценка значения стоимости прокладки всей трассы превосходит либо равна стоимости d^{o} трассы, предложенной экспертом, то такую задачу можно дальше не ветвить, так как её решение будет заведомо хуже либо не лучше решения, предложенного экспертом.

4. *Оптимальное решение.* Процесс вычислений прекращается, когда нет ни одной подзадачи, которая может продолжать ветвиться. В этом случае оптимальное решение соответствует текущему найденному минимальному значению стоимости либо совпадает с решением, предложенным экспертом.

Введем два параметра которые позволят уменьшить размеры исходной задачи и сведут её к решению трёх подзадач. Предположим, что $L > M$. Выберем два параметра разбиения сетки — l_1 и l_N таким образом, чтобы выполнялись ограничения

$$l_1 < L/2,\ l_N < L/2. \tag{3.13}$$

Данные параметры позволят разделить сетку разбиения на три части, на каждой из которых будет прокладываться участок искомой оптимальной трассы, соединяющей точки $x_{1,1}$ и $x_{N+1,N+1}$. Тем самым исходная задача может быть сведена к решению трёх подзадач меньшей размерности.

Рассмотрим три подзадачи. Причем сначала будем рассматривать первую и третью, так как их решение определяет начальные условия для второй подзадачи.

Первая подзадача.

В первой подзадаче рассматривается часть исходной сетки разбиения, находящаяся между l_N и L. Применяя метод динамического программирования, находим оптимальные трассы, соединяющие точки x_{l_N,m_N}, имеющие координаты (l_N, m_N), где $m_N = \overline{0,M}$, с конечной точкой $x_{N+1,N+1}$, то есть считая x_{l_N,m_N} начальными точками первой подзадачи, определяем минимальную стоимость прокладки трассы $d(x_{l_N,m_N}, x_{N+1,N+1})$ от каждой начальной точки до $x_{N+1,N+1}$ и оптимальное управление.

Третья подзадача.

Используя введённый параметр l_1, искусственно уменьшаем сетку разбиения до размеров $l_1 \times M$. Применяя метод динамического программирования, находим оптимальные трассы третьей подзадачи, считая начальной точкой $x_{1,1}$, а конечными — все точки x_{l_1,m_1}, имеющие координаты (l_1, m_1), где $m_1 = \overline{0, M}$, то есть для каждой конечной точки определяем минимальную стоимость прокладки $d(x_{1,1}, x_{l_1,m_1})$ трассы от $x_{1,1}$ до этой точки и оптимальное управление.

В ходе решения первой и третьей подзадач получаем два несоединённых оптимальных участка трассы. Для того, чтобы оптимально выбрать трассу на всей сетке разбиения, необходимо соединить конечные точки третьей подзадачи с начальными точками первой подзадачи трассой с минимально возможной стоимостью.

Вторая подзадача.

Рассмотрим часть исходной сетки разбиения между l_1 и l_N. Будем считать конечными точками прокладки трассы второй подзадачи все точки x_{l_N,m_N}, являющиеся начальными точками для первой подзадачи. До каждой конечной точки можно проложить $m = m_N + 1$ трасс, причем начальными точками этих трасс являются точки x_{l_1,m_1}, имеющие координаты (l_1, m_1), где $m_1 = \overline{0, m_N}, m_N = \overline{0, M}$. Найдем стоимости $d(x_{l_1,,1}, x_{l_N,m_N})$ прокладки всех возможных трасс второй подзадачи до каждой точки $x_{l_N,m_N}, m_N = \overline{0, M}$.

Любая траектория, соединяющая точки x_{l_1,m_1} и x_{l_N,m_N}, представляет собой последовательность проложенных участков трассы, каждый из которых определяется одним из трёх возможных направлений движения по сетке разбиения. Трудоёмкость прокладки трассы по каждому из направлений определяется выражением (3.4). Будем решать релаксированную задачу, в которой вместо стоимостей прокладки трассы на каждом участке будем учитывать минимально возможную стоимость прокладки по каждому направлению в пределах сетки разбиения между начальной и конечной точкой прокладываемой части трассы:

$$a(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) = \min_{\substack{i=\overline{l_1,l_N},\\ j=\overline{m_1,m_N}}} a_{ij}, \tag{3.14}$$

$$b(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) = \min_{\substack{i=\overline{l_1,l_N},\\ j=\overline{m_1,m_N}}} b_{ij}, \tag{3.15}$$

$$c(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) = \min_{\substack{i=\overline{l_1,l_N},\\ j=\overline{m_1,m_N}}} c_{ij}, \tag{3.16}$$

где величины a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} определяются выражением (3.4).

Используя (3.14) — (3.16), можно оценить снизу величину $d(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N})$ — стоимость прокладки трассы между точками x_{l_1,m_1} и x_{l_N,m_N} второй подзадачи. Для этого опишем три схемы движения по сетке разбиения, к которым можно свести всё множество вариантов прокладки трасс второй подзадачи.

Исключим из рассмотрения возможность движения по диагонали сетки разбиения. Обозначим через $d_{gv}(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N})$ — стоимость прокладки трассы при двух возможных направлениях движении по горизонтали и по вертикали. Тогда

$$d_{gv}(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) = \sum_{\substack{i_l \in I_1, i_p \in I_2 \\ j_m \in I_3, j_q \in I_4}} (a_{i_l j_m} + b_{i_p j_q}), \tag{3.17}$$

где $I_1 \cup I_2 = \{l_1, \ldots, l_N\}$, $I_3 \cup I_4 = \{m_1, \ldots, m_N\}$ — множества индексов, отражающих последовательность смены направлений движения прокладываемых по сетке разбиения участков;
$a_{i_l j_m}$ — стоимость прокладки трассы по горизонтали от точки (i_l, j_m) до точки $(i_l + 1, j_m)$;
$b_{i_p j_q}$ — стоимость прокладки трассы по вертикали от точки (i_p, j_q) до точки $(i_p, j_q + 1)$.

Пусть n_{gv} — количество участков трассы, прокладываемых в горизонтальном направлении, а n_{vg} — количество участков трассы с вертикальным направлением прокладки по сетке разбиения, причем $n_{gv} = l_N - l_1$, $n_{vg} = m_N - m_1$.

Используя введённые обозначения, а также минимально возможные значения стоимостей прокладки трассы по сетке разбиения по горизонтали и по вертикали (3.14) — (3.15), найдем оценку снизу для величины стоимости прокладки трассы (3.17) при двух возможных направлениях движения:

$$d_{gv}(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) \geq n_{gv} a(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) + n_{vg} b(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}), \tag{3.18}$$

при этом отсутствует необходимость учёта последовательности смены направлений прокладки участков трассы.

Введем в рассмотрение третье направление движения — по диагонали, по направлению к конечной точке. Тогда стоимость прокладки трассы для трёх возможных направлений движения по сетке разбиения определяется величиной:

$$d_{gvd}(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) = \sum_{\substack{i_l \in I_1, i_p \in I_2, i_r \in I_3 \\ j_m \in I_4, j_q \in I_5, j_s \in I_6}} (a_{i_l j_m} + b_{i_p j_q} + c_{i_r j_s}), \tag{3.19}$$

где $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \{l_1, \ldots, l_N\}$, $I_4 \cup I_5 \cup I_6 = \{m_1, \ldots, m_N\}$ — множества индексов, отражающих последовательность смены направлений движения по сетке разбиения прокладываемых участков;
$a_{i_l j_m}$ — стоимость прокладки трассы по горизонтали от точки (i_l, j_m) до точки $(i_l + 1, j_m)$;
$b_{i_p j_q}$ — стоимость прокладки трассы по вертикали от точки (i_p, j_q) до точки $(i_p, j_q + 1)$;
$c_{i_r j_s}$ — стоимость прокладки трассы по диагонали от точки (i_r, j_s) до точки $(i_r + 1, j_s + 1)$.

Используя минимально возможные значения стоимостей (3.14) — (3.16), оценим снизу величину стоимости прокладки трассы по трём возможным направлениям движения по сетке разбиения

$$d_{gvd}(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) \geq n_g a(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) + n_v b(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) + n_d c(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}),$$

где n_g, n_v, n_d — количество участков, проложенных по горизонтали, вертикали и по диагонали соответственно.

Если выполняется соотношение

$$a(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) + b(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) \geq c(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}),$$

то вместо последовательной прокладки участков в направлениях по горизонтали и по вертикали прокладка участков трассы осуществляется по диагонали сетки разбиения. При этом, если $n_g \geq n_v$, то с учётом (3.19), получаем

$$d_{gvd} \geq (n_v - n_g) b(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) + (n_g + n_d) c(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}), \tag{3.20}$$

иначе

$$d_{gvd} \geq (n_g - n_v) a(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) + (n_v + n_d) c(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}). \tag{3.21}$$

Соотношение (3.20) соответствует схеме движения по сетке разбиения по вертикали и по диагонали, а соотношение (3.21) — по горизонтали и по диагонали. Применяя обозначения $n_{vd} \triangleq n_v - n_g$; $n_{dv} \triangleq n_g + n_d$; $n_{gd} \triangleq n_g - n_v$; $n_{dg} \triangleq n_v + n_d$, перепишем выражения (3.20) — (3.21) в следующем виде:

$$\begin{aligned} d_{gvd}(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) \geq d_{vd}(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) = n_{vd} b(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) + \\ + n_{dv} c(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}), \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} d_{gvd}(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) \geq d_{gd}(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) = n_{gd} a(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) + \\ + n_{dg} c(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}), \end{aligned} \tag{3.23}$$

где n_{vd} — количество шагов по вертикали, n_{dv} — количество шагов по диагонали при двух возможных направлениях прокладки трассы по вертикали и по диагонали; n_{gd} — количество шагов по горизонтали, n_{dg} — количество шагов по диагонали при двух возможных направлениях прокладки трассы по горизонтали и по диагонали.

При $a(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) + b(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) < c(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N})$ все участки с диагональным направлением прокладки трассы можно заменить на последовательную прокладку трассы по горизонтали и по вертикали сетки разбиения, при этом

$$d_{gvd}(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) \geq d_{gv}(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}),$$

где $d_{gv}(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N})$ определено в (3.18).

Соотношения (3.18), (3.22) — (3.23) показывают, что для нахождения нижней оценки стоимости прокладки трассы во второй подзадаче достаточно оценить стоимость прокладки для трёх схем движения по сетке разбиения:

1) по горизонтали и по вертикали;

2) по горизонтали и по диагонали (если $l_N - l_1 \geq m_N - m_1$);

3) по вертикали и по диагонали (если $l_N - l_1 < m_N - m_1$).

Найдем оценку снизу стоимости прокладки трассы для трёх описанных схем движения.

1. Рассмотрим первую схему движения по сетке разбиения в направлениях по горизонтали и по вертикали:

1) число шагов по горизонтали в данной схеме движения определяется как

$$n_{gv} = l_N - l_1, \tag{3.24}$$

2) число шагов по вертикали:

$$n_{vg} = m_N - m_1, m_N = \overline{0, M}, m_1 = \overline{0, M}; \tag{3.25}$$

3) стоимость прокладки трассы между точками x_{l_1,m_1} и x_{l_N,m_N} оценивается снизу величиной (3.18);

4) с учётом 3), суммарная стоимость работ по прокладке трассы от $x_{1,1}$ до $x_{N+1,N+1}$ оценивается снизу как сумма найденных значений стоимостей в каждой из подзадач:

$$d_{gv}(x_{1,1}, x_{N+1,N+1}) = d(x_{l_N,m_N}, x_{N+1,N+1}) + d_{gv}(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) + d(x_{1,1}, x_{l_1,m_1}). \tag{3.26}$$

2. Рассмотрим вторую схему движения.

1) Если $l_N - l_1 \geq m_N - m_1$, то движение по сетке осуществляется в направлениях по горизонтали и по диагонали:

1.1) число шагов по горизонтали в данной схеме движения определяется как

$$n_{gd} = l_N - l_1 - n_{dg}, \tag{3.27}$$

1.2) число шагов по диагонали:

$$n_{dg} = m_N - m_1, m_N = \overline{0, M}, m_1 = \overline{0, M}; \tag{3.28}$$

1.3) стоимость прокладки трассы между точками x_{l_1,m_1} и x_{l_N,m_N} оценивается снизу величиной (3.23);

1.4) с учётом 1.3), суммарная стоимость работ по прокладке трассы от $x_{1,1}$ до $x_{N+1,N+1}$ в данной схеме движения оценивается снизу как сумма найденных значения стоимостей в каждой из подзадач:

$$\begin{aligned} d_{gd}(x_{1,1}, x_{N+1,N+1}) = d(x_{l_N,m_N}, x_{N+1,N+1}) + d_{gd}(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) + \\ + d(x_{1,1}, x_{l_1,m_1}); \end{aligned} \tag{3.29}$$

2) Если $l_N - l_1 < m_N - m_1$, то движение по сетке осуществляется в направлениях по вертикали и по диагонали.

2.1) число шагов по вертикали в данной схеме движения определяется как

$$n_{vd} = m_N - m_1 - n_{dv}, m_N = \overline{0, M}, m_1 = \overline{0, M}, \tag{3.30}$$

2.2) число шагов по диагонали:

$$n_{dv} = l_N - l_1; \tag{3.31}$$

2.3) стоимость прокладки трассы между точками x_{l_1,m_1} и x_{l_N,m_N} оценивается снизу величиной (3.22);

2.4) с учётом 2.3), суммарная стоимость работ по прокладке трассы от $x_{1,1}$ до $x_{N+1,N+1}$ в данной схеме движения оценивается снизу как сумма найденных значения стоимостей в каждой из подзадач:

$$\begin{aligned} d_{vd}(x_{1,1}, x_{N+1,N+1}) = d(x_{l_N,m_N}, x_{N+1,N+1}) + d_{vd}(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}) + \\ + d(x_{1,1}, x_{l_1,m_1}). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Для каждой конечной точки x_{l_N,m_N} второй подзадачи вычисляем m значений стоимостей прокладки трассы по формулам (3.18), (3.22) — (3.23), считая начальной точкой каждую из $x_{l_1,m_1}, m_1 = \overline{0, m_N}$. Среди полученных значений стоимостей выбираем наименьшее. Это значение учитывается в (3.26), (3.32), (3.29) для определения минимально возможной суммарной стоимости работ по прокладке всей трассы от точки $x_{1,1}$ до $x_{N+1,N+1}$. Полученное значение сравнивается со значением d^0 прокладки трассы, предложенной экспертом. Если d^0 оказывается больше, то точка x_{l_N,m_N} запоминается, иначе — исключается из дальнейшего рассмотрения.

Для оставшихся в рассмотрении точек необходимо осуществить уточнение траектории оптимальной трассы (процесс ветвления). С этой целью выберем $l_{N-p} \triangleq l_N - 1$, где $p = \overline{1, N-2}$, вместо l_N и перейдем вновь к первой подзадаче.

Процесс ветвления продолжается до шага $l_{N-p} = l_1 + 1, p = \overline{1, N-2}$. При решении задачи на этом шаге получаем оптимальную трассу.

Для большей наглядности запишем описанный выше алгоритм в виде следующей последовательности шагов.

Алгоритм 3.1.

1. Выбор трассы экспертом. Экспертом осуществляется выбор l траекторий $T^1, T^2, \ldots, T^l$, после чего определяются значения стоимости прокладки $d^1, d^2, \ldots, d^l$ для каждой выбранной траектории. Среди выбранных траекторий определяется траектория T^{o} с наименьшей стоимостью $d^{\text{o}} = \min\{d^1, d^2, \ldots, d^l\}$.

2. Выбираем параметр l_1 с учётом условия (3.13), после чего уменьшаем размеры сетки разбиения до $l_1 \times M$ и определяем стоимости $d(x_{1,1}, x_{l_1,m_1})$ всех трасс из точки $x_{1,1}$ до $x_{l_1,m_1}, m_1 = \overline{0, M}$, путём применения метода динамического программирования.

3. Выбираем параметр l_N с учётом условия (3.13), после чего уменьшаем сетку разбиения до размеров $l_N \times M$ и определяем стоимость $d(x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N})$ всех трасс из точки x_{l_N,m_N} до $x_{N+1,N+1}, m_N = \overline{0, M}$, путём применения метода динамического программирования.

1) Рассматриваем точку $x_{l_N,m_N}, m_N = \overline{0, M}$, для которой $m_N = 0$.

2) Определяем количество m начальных точек $x_{l_1,m_1}, m_1 = \overline{0, M}, m_1 \leq m_N$, из которых достижима точка $x_{l_N,m_N}, m_N = \overline{0, M}$. Для пары точек x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N} рассматривается редуцированная сетка разбиения для определения параметров (3.14) — (3.16). Для каждой из двух существующих оптимальных схем движения определяется количество шагов по каждому из направлений движения по формулам (3.24) — (3.25), (3.30) — (3.31), (3.27) — (3.28). Определяется минимально возможная стоимость каждой предложенной трассы согласно выражениям (3.18), (3.22), (3.23). После чего среди полученных значений осуществляется

поиск минимального значения стоимости прокладки трассы.

3) Далее определяется суммарная стоимость $d(x_{1,1}, x_{N+1,N+1})$ прокладки всей трассы от точки $x_{1,1}$ до точки $x_{N+1,N+1}$, проходящей через точки x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N} согласно выражениям (3.26), (3.32), (3.29). Среди полученных значений требуется определить минимальное. Данная последовательность действий повторяется для точек x_{l_1,m_1}, x_{l_N,m_N}, где вместо m_1 рассматривается m_1+1, удовлетворяющее соотношению $m_1 \leq m_N$. Новые полученные значения стоимостей трасс сравниваются со значениями, полученными в п. 2), если стоимость найденной трассы оказывается больше, то точка x_{l_N,m_N} исключается из рассмотрения.

4) Присваиваем $m_N := m_{N+1}$ и повторяем п.п. 1)-3) до тех пор, пока выполняется условие $m_N \leq M$.

5) Присваиваем $l_N := l_N - 1$ и повторяем п. 3 до тех пор, пока $l_N > l_1$.

4. В ходе выполнения алгоритма на шаге $l_N = l_1 + 1$ останется малое количество точек x_{l_N,m_N}, а, следовательно, и возможных трасс для прокладки. Найдем трассу с наименьшей стоимостью. Сравним ее со стоимостью трассы, предложенной экспертом:

1) если стоимость найденной трассы совпадает со стоимостью трассы, предложенной экспертом, то в качестве оптимальной выбирается любая из них;

2) если стоимость найденной трассы меньше стоимости прокладки трассы, предложенной экспертом, то найденная траектория является оптимальной.

Предложенное решение задачи существенно зависит от размеров ячеек и угла наклона сетки. На практике размер ячеек можно выбирать переменным в зависимости от рельефа местности, а также по совету эксперта. Угол наклона сетки можно выбрать оптимальным, чтобы минимизировать стоимость трассы, причем угол может меняться на 90 градусов. Предложенная схема движения (вправо, вверх и по диагонали по направлению к конечной точке) имеет определенный недостаток, так как не позволяет огибать препятствия. Этот недостаток можно несколько исправить путём изменения угла наклона сетки. Поэтому предложенный алгоритм является эвристическим, не позволяющим в общем случае найти оптимальное решение. Например, в горной местности дороги прокладываются часто в форме серпантина. Применить предложенный алгоритм, чтобы минимизировать стоимость работ, в такой ситуации нельзя, так как в нем запрещено движение по спирали. Область применения данного алгоритма — относительно ровная местность с большим числом разнородных небольших препятствий, не требующих их огибания. Отметим, что предложенный алгоритм позволяет значительно сократить количество анализируемых вариантов. Например, если сетка имеет размеры 42×7, как в рассматриваемом в разделе 3.6 примере, то только при движении по горизонтали и вертикали, без учёта движения по диагонали, при полном переборе необходимо проанализировать более $7^{42} \approx 5 \times 10^{35}$ вариантов. Если учесть еще движение по диагонали, то количество возможных вариантов станет просто астрономическим, что исключает возможность нахождения оптимального решения. Предложенный алгоритм приводит к необходимости анализа лишь $6,4 \times 10^9$ вариантов, количество которых сокращается за счет использования метода динамического программирования совместно с методом ветвей и границ, что позволяет получить решение прикладной задачи, рассматриваемой в разделе 3.6.

3.3.3. Программная реализация алгоритма

Для программной реализации алгоритма был разработан макетный вариант программы под операционнную систему семейства Windows. Программа написана на языке C++, объём кода составляет 400 строк.

Входными данными для программы являются:

— размеры сетки разбиения L и M;

— матрица трудоёмкостей;

— параметры l_N и l_1 сетки разбиения;

— наименьшее значение стоимости трассы, среди всех предложенных экспертом.

Выходными данными являются:

— значения стоимостей для первой и третьей подзадач алгоритма;

— минимально возможные стоимости трассы для каждой из конечных точек второй подзадачи;

— преобразованные матрицы трудоёмкостей для каждой из конечных точек второй подзадачи. Каждый элемент матрицы соответствует точке, через которую проходит либо не проходит проектируемая трасса. Элемент состоит из нулевых компонент в случае, если трасса не проходит через данную точку, иначе — среди компонент данного элемента будет присутствовать единица, стоящая на месте компоненты, которая соответствует дальнейшему направлению движения по сетке разбиения от данной точки.

3.4. Задача оптимизации в стохастической постановке

В системе (3.3), рассмотренной в разделе 3.2, предполагалось, что все параметры, оказывающие воздействие на суммарные затраты по прокладке трассы, — детерминированные. В реальности же затраты на строительство трассы существенно зависят от природных факторов. Опыт, данные исследования местности и основанные на них расчёты позволяют получить лишь некоторые статистические характеристики параметров, определяющих влияние природных факторов на исходные данные для планирования трассы. Поэтому затраты, связанные с прокладкой различных участков трассы, оказываются случайными.

Таким образом, параметры $a_{i_kj_k}, b_{i_kj_k}, c_{i_kj_k}, k = \overline{1, N}$ из (3.4), определяющие добавки к текущей стоимости в зависимости от управления, — случайные величины, зависящие от непредсказуемых локальных особенностей местности. Поскольку добавки случайны, то случайна трудоёмкость (3.1), (3.2) прокладки трассы на каждом участке и управление $(u_k,\, v_k)$. Управление определяет текущее положение системы (3.3) на сетке разбиения, поскольку оно случайно, то координаты $i_k,\ j_k$ тоже случайны. Возникает задача управления стохастической системой. Поскольку добавки случайны, то в силу (3.10) случайна и стоимость d_{N+1}. Поэтому необходимо рассмотреть стохастическую постановку задачи.

Рассмотрим задачу управления стохастической системой (3.3), в которой a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} — случайны. Предположим, что данные параметры независимы и имеют нормальное распределение $a_{ij} \sim N(m^a_{ij}, D^a_{ij})$, $b_{ij} \sim N(m^b_{ij}, D^b_{ij})$, $c_{ij} \sim N(m^c_{ij}, D^c_{ij}))$. Это предположение оправдано, так как затраты определяются множеством мелких случайных факторов, влияющих на стоимость прокладки каждого участка трассы, например, расходы на наземные работы, сложность трассы, климатические условия и т.д.

Поскольку стоимость прокладки трассы случайна, рассмотрим в качестве критерия оптимальности квантильный критерий:

$$[d_{N+1}]_\alpha \triangleq \varphi_\alpha(u,v) \triangleq \min\{\varphi : P_\varphi(u,v) \geq \alpha\}, \alpha \in (0,1),$$

где управление (u, v) является программным и определяется выражением (3.7).

Здесь функция вероятности

$$P_\varphi(u,v) \triangleq \mathcal{P}\{d_{N+1} \leq \varphi\}$$

характеризует вероятность такого события, что затраты не превысят допустимый порог $\varphi > 0$.

Под решением задачи будем понимать такое программное управление (u_α, v_α), которое минимизирует гарантированные с заданной вероятностью потери:

$$(u_\alpha, v_\alpha) = \arg \min_{u,v \in U_N} \varphi_\alpha(u, v), \tag{3.33}$$

где u, v определены в (3.7), а U_N в (3.8).

Метод динамического программирования для решения задачи (3.33) формально применить нельзя, так как согласно работе В.В. Малышева и А.И. Кибзуна [49] условия марковости для квантильного критерия не выполняются. Преобразуем полученную стохастическую задачу в детерминированную. С этой целью получим детерминированный эквивалент задачи (3.33).

Поскольку управление, определяемое выражением (3.33), программное, то на каждом шаге $k = \overline{1, N}$ добавка к текущей стоимости трассы определяется, согласно (3.4), одной из нормально распределенных независимых случайных величин $a_{i_k,j_k}, b_{i_k,j_k}, c_{i_k,j_k}$. Тогда суммарные затраты d_{N+1}, являющиеся согласно (3.3) суммой нормально распределенных независимых случайных величин, также имеют нормальное распределение с математическим ожиданием

$$\overline{d}_{N+1} \triangleq \mathbf{M}[d_{N+1}] \tag{3.34}$$

и дисперсией

$$\Sigma_{N+1} \triangleq \mathbf{D}[d_{N+1}]. \tag{3.35}$$

Согласно (3.3) получаем

$$\mathbf{M}[d_{N+1}] = \mathbf{M}\left[\sum_{k=1}^{N} \delta(i_k, j_k, u_k, v_k)\right] = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{M}[\delta(i_k, j_k, u_k, v_k)], \tag{3.36}$$

$$\mathbf{D}[d_{N+1}] = \mathbf{D}\left[\sum_{k=1}^{N} \delta(i_k, j_k, u_k, v_k)\right] = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{D}[\delta(i_k, j_k, u_k, v_k)]. \tag{3.37}$$

Тогда квантильный критерий может быть представлен в виде:

$$[d_{N+1}]_\alpha = \overline{d}_{N+1} + x_\alpha \sqrt{\Sigma_{N+1}},$$

$$[d_{N+1}]_\alpha \to \min_{u,v \in U_N}, \tag{3.38}$$

где x_α — квантиль уровня α.

Таким образом, получен детерминированный эквивалент задачи (3.33).

Заметим, что если бы управление $u(\cdot), v(\cdot)$ выбиралось в классе позиционных стратегий, зависящих от текущего значения вектора состояния системы, то нельзя было бы гарантировать нормальность случайной величины d_{N+1} из-за нелинейной зависимости $u_k(z_k), v_k(z_k)$, несмотря на нормальность случайных величин a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}. Тем не менее, для решения задачи (3.38) может быть применен метод динамического программирования. С этой целью искусственно погружаем задачу (3.38) в класс позиционных стратегий, учитывая, что полученное решение должно быть не хуже решения в программных стратегиях. Это обусловливается тем, что класс программных стратегий уже, чем класс позиционных стратегий, так как формально включен в него. Основываясь на системе (3.3), запишем рекуррентную систему, позволяющую вычислить $\overline{d}_{N+1}$ и Σ_{N+1}:

$$\begin{cases} i_{k+1} = i_k + u_k,\ i_1 = 0, \\ j_{k+1} = j_k + 1 - u_k + u_k v_k,\ j_1 = 0, \\ \overline{d}_{k+1} = \overline{d}_k + \overline{\delta}(i_k, j_k, u_k, v_k),\ \overline{d}_1 = 0, \\ \Sigma_{k+1} = \Sigma_k + \Delta(i_k, j_k, u_k, v_k),\ \Sigma_1 = 0, \end{cases} \tag{3.39}$$

где $k = \overline{1, N}$, $\overline{d}_{k+1}$— средние затраты до k-го шага включительно, Σ_{k+1} — дисперсия затрат до k-го шага включительно,

$$\overline{\delta}(i_k, j_k, u_k, v_k) = \begin{cases} m^a_{i_k j_k}, & \text{если } u_k = 1, v_k = 0, \\ m^b_{i_k j_k}, & \text{если } u_k = 0, \\ m^c_{i_k j_k}, & \text{если } u_k = 1, v_k = 1, \end{cases} \tag{3.40}$$

$$\Delta(i_k, j_k, u_k, v_k) = \begin{cases} D^a_{i_k j_k}, & \text{если} u_k = 1, v_k = 0, \\ D^b_{i_k j_k}, & \text{если } u_k = 0, \\ D^c_{i_k j_k}, & \text{если } u_k = 1, v_k = 1. \end{cases} \tag{3.41}$$

Введем расширенный вектор состояния системы:

$$\overline{z_k} \triangleq \mathrm{col}(i_k, j_k, \overline{d}_k, \Sigma_k).$$

Критерий (3.38) полностью определяется системой (3.39), которая не является стохастической. Поэтому вместо задачи (3.33) получаем задачу

$$\overline{d}_{N+1} + x_\alpha \sqrt{\Sigma_{N+1}} \to \min_{\overline{u}(\cdot), \overline{v}(\cdot) \in \overline{\mathcal{U}}_N}, \tag{3.42}$$

где

$$\overline{u}(\cdot) \triangleq \mathrm{col}(\overline{u}_1(\cdot), \ldots, \overline{u}_N(\cdot)), \overline{v}(\cdot) \triangleq \mathrm{col}(\overline{v}_1(\cdot), \ldots, \overline{v}_N(\cdot)),$$

$$\overline{\mathcal{U}}_N \triangleq \{\overline{u}(\cdot) : \overline{u}_k(\overline{z_k}) \in U \ \ \forall \overline{z}_k,\ k = \overline{1, N}\}.$$

Применим метод динамического программирования для решения задачи (3.42). Описание алгоритма решения приведено в следующем разделе.

3.5. Алгоритм решения стохастической задачи с квантильным критерием

3.5.1. Применение метода динамического программирования для решения задачи оптимизации в стохастической постановке

Проверим условия применимости метода динамического программирования, изложенные в работе Д. Бертсекаса и С. Шрива [4], для решения задачи, рассмотренной в разделе 3.4.

1. Система (3.39) является марковской, так как она рекуррентна и её поведение в будущем полностью определяется текущим состоянием.

2. Величина $\overline{d}_{N+1}$, определяемая формулой (3.34), является аддитивной, её можно представить в виде суммы в силу выражения (3.36). Величина Σ_{N+1}, определяемая формулой (3.35), также является аддитивной, ее можно представить в виде суммы (3.37). В силу строгого возрастания функции квадратного корня, величина $\sqrt{\Sigma_{N+1}}$ — монотонна. Квантиль x_α — детерминированная положительно определенная величина, $x_\alpha > 0$. Критерий оптимизации (3.42) представляет собой сумму аддитивной функции $\overline{d}_{N+1}$ и строго возрастающей функции $\sqrt{\Sigma_{N+1}}$ с положительным коэффициентом x_α, поэтому является монотонным.

3. Величина $\overline{d}_{N+1}$ ограничена снизу $\overline{d}_{N+1} > 0$, так как стоимость работ на каждом участке, определяемая величиной (3.40), не может быть отрицательной или равняться нулю, а дисперсия Σ_{N+1} представляет собой сумму неотрицательных величин, определенных в выражении (3.41), поэтому $\Sigma_{N+1} \geq 0$.

Поскольку перечисленные условия выполнены, то для решения задачи (3.42) можно воспользоваться методом динамического программирования.

Введем функцию будущих потерь

$$R_k(\overline{z}_k) \triangleq \min_{\{\overline{u}_i(\cdot)\}_{i=k}^N,\, \{\overline{v}_i(\cdot)\}_{i=k}^N \in \overline{\mathcal{U}}_k} (\overline{d}_{N+1} + x_\alpha \sqrt{\Sigma_{N+1}}),$$

где

$$\overline{\mathcal{U}}_k \triangleq \{\{\overline{u}_i(\cdot)\}_{i=k}^N : \overline{u}_i(\overline{z}_i) \in U,\ i = \overline{k,N}\}.$$

В соответствии с методом динамического программирования получаем следующие рекуррентные соотношения

$$R_k(\overline{z}_k) = \min_{\overline{u}_k,\, \overline{v}_k \in U} R_{k+1}(\overline{z}_{k+1}(\overline{z}_k, \overline{u}_k, \overline{v}_k)), k = N, N-1, \ldots, 1, \tag{3.43}$$

$$R_{N+1}(\overline{z}_N) = \overline{d}_{N+1} + x_\alpha \sqrt{\Sigma_{N+1}}, \tag{3.44}$$

где зависимость $\overline{z}_{k+1}(\overline{z}_k, \overline{u}_k, \overline{v}_k)$ определяется системой (3.39).

Разрешая рекуррентные соотношения (3.43) — (3.44) динамического программирования так же, как и в детерминированном случае, получаем на каждом шаге зависимость оптимального управления $\bar{u}_k^*(\bar{z}_k)$, $\bar{v}_k^*(\bar{z}_k)$ от текущего состояния $\bar{z}_k, k = \overline{1, N}$. Подставляя найденные зависимости в систему (3.39), находим вектор оптимального состояния $\bar{z}_k^*$ для каждого шага $k = \overline{1, N}$. После чего получаем оптимальные управления в классе программных стратегий

$$\bar{u}_k^* = \bar{u}_k^*(\bar{z}_k^*), \bar{v}_k^* = \bar{v}_k^*(\bar{z}_k^*), k = \overline{1, N}.$$

При этом

$$\overline{d}_{N+1}(\bar{u}^*(\cdot), \bar{v}^*(\cdot)) = \bar{d}_{N+1}(u_\alpha, v_\alpha) = R_1(\bar{z}_1),$$

где

$$u_\alpha \triangleq \operatorname{col}(\bar{u}_1^*, \ldots, \bar{u}_N^*), v_\alpha \triangleq \operatorname{col}(\bar{v}_1^*, \ldots, \bar{v}_N^*).$$

Для решения задачи (3.43) может быть применен алгоритм с использованием метода сценариев, а также метода ветвей и границ, описанный в разделе 3.3, с учётом некоторых замечаний, которые приведены в следующем разделе.

3.5.2. Алгоритм решения задачи в стохастической постановке с применением метода ветвей и границ

Задача выбора оптимальной трассы в детерминированной постановке, рассмотренная в разделе 3.2, была сведена к решению трёх подзадач меньшей размерности, в результате решения каждой из которых были найдены оптимально проложенные части трассы. Критерием оптимизации указанной задачи было выбрано математическое ожидание (средние затраты), что позволило просуммировать оптимальные решения, найденные в каждой из подзадач, и получить оптимальное решение исходной задачи.

Как уже отмечалось выше, квантильный критерий не обладает свойством аддитивности, поэтому сумма оптимальных решений, найденных в каждой из трёх подзадач, не является оптимальным решением задачи (3.43). Будем рассматривать редуцированный алгоритм раздела 3.3, состоящий из первых двух подзадач, исключив из рассмотрения третью подзадачу.

Суммарная стоимость работ по прокладке трассы от начальной точки $x_{1,1}$ до конечной $x_{N+1,N+1}$ определяется выражением

$$\begin{aligned}[d_{N+1}]_\alpha = \overline{d}(x_{1,1}, x_{l_N,m_N}) + \overline{d}(x_{l_N,m_N}, x_{N+1,N+1}) + \\ + x_\alpha \sqrt{\Sigma(x_{1,1}, x_{l_N,m_N}) + \Sigma(x_{l_N,m_N}, x_{N+1,N+1})},\end{aligned} \tag{3.45}$$

где величины $\overline{d}(x_{l_N,m_N}, x_{N+1,N+1})$ и $\Sigma(x_{l_N,m_N}, x_{N+1,N+1})$ являются решением первой подзадачи, а $\overline{d}(x_{1,1}, x_{l_N,m_N})$, $\Sigma(x_{1,1}, x_{l_N,m_N})$ — решением второй подзадачи.

Рассмотрим выражение (3.45).

1. Величины $\overline{d}(x_{1,1}, x_{l_N,m_N})$ и $\overline{d}(x_{l_N,m_N}, x_{N+1,N+1})$ положительны и аддитивны в силу определения системы (3.39).

2. Величины $\Sigma(x_{1,1}, x_{l_N,m_N})$ и $\Sigma(x_{l_N,m_N}, x_{N+1,N+1})$ также аддитивны и положительны. В силу строгого возрастания функции квадратного корня, величина $\sqrt{\Sigma(x_{1,1}, x_{l_N,m_N}) + \Sigma(x_{l_N,m_N}, x_{N+1,N+1})}$ монотонна. Квантиль x_α — положительно определенная величина.

Выражение (3.45) представляет собой сумму аддитивных функций $\overline{d}(x_{1,1}, x_{l_N,m_N})$, $\overline{d}(x_{l_N,m_N}, x_{N+1,N+1})$ и строго возрастающей функции $x_\alpha \sqrt{\Sigma(x_{1,1}, x_{l_N,m_N}) + \Sigma(x_{l_N,m_N}, x_{N+1,N+1})}$ с положительным коэффициентом, поэтому является монотонным.

Тогда значение стоимости прокладки $[d_{N+1}]_\alpha$ будет минимально возможным, если в ходе решения первой подзадачи будут найдены оптимальные $\overline{d}(x_{l_N,m_N}, x_{N+1,N+1})$ и $\Sigma(x_{l_N,m_N}, x_{N+1,N+1})$, а в ходе решения второй подзадачи будут найдены оценки снизу для величин $\overline{d}(x_{1,1}, x_{l_N,m_N})$ и $\Sigma(x_{1,1}, x_{l_N,m_N})$.

Найдем нижнюю оценку величины суммарной стоимости прокладки трассы, определяемой соотношением (3.45). Для этого рассмотрим решение подзадач алгоритма применительно для данного случая.

1. В ходе решения первой подзадачи получаем значения стоимости $d(x_{l_N,m_N}, x_{N+1,N+1})$ прокладки трассы от каждой точки x_{l_N,m_N} до $x_{N+1,N+1}$, $m_N = \overline{0, M}$ и оптимальное управление. Причем стоимость прокладки определяется как

$$d(x_{l_N,m_N}, x_{N+1,N+1}) = \overline{d}(x_{l_N,m_N}, x_{N+1,N+1}) + x_\alpha \sqrt{\Sigma(x_{l_N,m_N}, x_{N+1,N+1})}.$$

2. Для нахождения оптимальной трассы необходимо соединить начальную точку $x_{1,1}$ с каждой точкой x_{l_N,m_N}, $m_N = \overline{0, M}$, после чего определить суммарную стоимость затрат по прокладке всей трассы и выбрать трассу с наименьшей стоимостью. Будем использовать минимально возможное значение средних затрат на прокладку трассы по каждому направлению в пределах сетки разбиения между начальной и конечной точками текущего участка трассы:

$$\overline{a}(x_{1,1}, x_{l_N,m_N}) \triangleq \min_{\substack{i=\overline{1,l_N},\\ j=\overline{1,m_N}}} m_{ij}^a, \tag{3.46}$$

$$\overline{b}(x_{1,1}, x_{l_N,m_N}) \triangleq \min_{\substack{i=\overline{1,l_N},\\ j=\overline{1,m_N}}} m_{ij}^b, \tag{3.47}$$

$$\overline{c}(x_{1,1}, x_{l_N,m_N}) \triangleq \min_{\substack{i=\overline{1,l_N},\\ j=\overline{1,m_N}}} m_{ij}^c, \tag{3.48}$$

а также минимально возможные значения дисперсии для каждого из направлений движения по сетке разбиения:

$$d_a(x_{1,1}, x_{l_N,m_N}) \triangleq \min_{\substack{i=\overline{1,l_N},\\ j=\overline{1,m_N}}} D_{ij}^a, \tag{3.49}$$

$$d_b(x_{1,1}, x_{l_N,m_N}) \triangleq \min_{\substack{i=\overline{1,l_N},\\ j=\overline{1,m_N}}} D_{ij}^b, \tag{3.50}$$

$$d_c(x_{1,1}, x_{l_N,m_N}) \triangleq \min_{\substack{i=\overline{1,l_N},\\ j=\overline{1,m_N}}} D_{ij}^c. \tag{3.51}$$

Поскольку значения (3.46) — (3.51) являются минимально возможными, то найдя нижнюю оценку данной подзадачи, удастся оценить снизу и выражение (3.45). Нахождение оценки снизу стоимости прокладки трассы второй подзадачи сводится к решению двух задач:

1) необходимо найти оценку снизу для величины $\overline{d}(x_{1,1}, x_{l_N,m_N})$;

2) необходимо найти оценку снизу для величины $\Sigma(x_{1,1}, x_{l_N,m_N})$.

Рассмотрим решение первой задачи.

Для оценивания снизу величины $\overline{d}(x_{1,1}, x_{l_N,m_N})$ необходимо решить вторую подзадачу алгоритма, описанного в разделе 3.3, где в качестве (3.14) — (3.16) будем рассматривать (3.46) — (3.48). Находя оценку снизу стоимости прокладки трассы для трёх возможных схем движения, найдем оценку снизу и для $\overline{d}(x_{1,1}, x_{l_N,m_N})$.

Рассмотрим решение второй задачи.

Для нахождения оценки снизу величины $\Sigma(x_{1,1}, x_{l_N,m_N})$ также решаем вторую подзадачу алгоритма, описанного в разделе 3.3, принимая в качестве (3.14) — (3.16) значения (3.49) — (3.51). Находя оценку снизу стоимости прокладки трассы от $x_{1,1}$ до x_{l_N,m_N} для трёх возможных схем движения, найдем оценку снизу и для величины $\Sigma(x_{1,1}, x_{l_N,m_N})$.

Для решения задачи (3.45) может быть применена схема отсечения точек, описанная в разделе 3.3, и схема сравнения с трассой эксперта для исключения из рассмотрения заведомо неоптимальных вариантов решения.

Таким образом, для решения задачи (3.45) применим алгоритм основанный на методе динамического программирования, схеме сценариев, а также методе ветвей и границ, описанный в разделе 3.3.2, с учётом приведённых замечаний.

3.6. Результаты численных расчётов на примере выбора оптимальной трассы до аэропорта

Фактическая транспортная блокада осложняет работу мест базирования аэропортов. Дороги в аэропорты, построенные более чем полвека назад, сегодня уже не соответствуют как заявленному классу, так и своему прямому назначению.

За полвека к трассам до аэропортов сделали примыкания, добавили наземные пешеходные переходы и ввели ограничения скорости. Одной аварии вполне достаточно, чтобы возникла пробка длиной в несколько километров. Ситуация может усугубляться в случае, когда на дорогах ведутся плановые ремонтные работы.

Как уже отмечалось выше, решить проблему пробок можно путём прокладки новых трасс до аэропортов, причем проектирование трасс должно быть основано на транспортно-географическом исследовании. Следует изучить как добираются люди до аэропорта, какие строения встречаются на пути предполагаемых трасс, необходимо также исследовать рельеф местности для предполагаемой прокладки трасс.

Алгоритм решения задачи выбора оптимальной трассы в стохастической постановке, предложенный в разделе 3.5.2, основан на алгоритме решения задачи в детерминированной постановке с применением метода ветвей и границ, рассмотренном в разделе 3.3.2. Поэтому для проверки работоспособности и оценки оперативности алгоритма выбора оптимальной трассы рассмотрим детерминированную постановку задачи.

Численные расчёты предложенных в данной главе алгоритмов рассматриваются на примере выбора оптимальной трассы до четвёртого аэропорта Москвы — аэропорта Быково.

На автомобиле можно добраться от МКАДа до Быково по Рязанскому шоссе, которое не отличается ни качественным покрытием, ни скоростными преимуществами. Пробка, как правило, начинается сразу на выезде из Москвы.

Будем рассматривать задачу о прокладке автомобильной трассы минимальной стоимости от пересечения МКАД и Каширского шоссе до аэропорта Быково.

На рисунке 3.1 представлена карта местности от МКАДа до аэропорта Быково.

Рис. 3.1 Карта района прокладки трассы

Наложим на карту местности сетку разбиения на прямоугольники. Применительно к введённым в разделе 3.1 обозначениям, будем считать начальной точкой A — место пересечения Каширского шоссе и МКАДа, а конечной точкой B — въезд на территорию аэропорта Быково.

Длина сетки разбиения по горизонтали составляет 21 км, а по вертикали 3,5 км. Для удобства вычислений и более детального учёта особенностей рельефа местности разобьем сетку на квадраты с длиной стороны 0,5 км. Тогда получим разбиение сетки на $L = 42$, $M = 7$ равных частей по горизонтали и по вертикали соответственно (рис. 3.2).

Рис. 3.2 Карта местности с наложенной сеткой разбиения

Трудоёмкость прокладки трассы на каждом участке сетки разбиения зависит от рельефа местности. Можно выделить следующие характерные особенности местности:

1) поле;

2) лес;

3) река;

4) озеро;

5) шоссе;

6) поселок, деревня, город;

7) железная дорога.

Согласно справочной энциклопедии дорожника А.П. Васильева, Б.С. Марышева, В.В. Силкина и др. [6] наименьшей для перечисленных характеристик является стоимость прокладки вдоль шоссе путём его расширения. Самой дорогой считается прокладка трассы через реку. Это связано с тем, что необходимо учитывать большое количество факторов таких, как глубина и ширина реки, осуществление судоходности, тип дна реки и т.д.

Начальные данные для фиксированных стоимостей прокладки трассы были взяты из газеты «Информационные технологии в строительстве» [12], справочника стоимостных показателей [62] и строительных норм и правил (автомобильные дороги) [63,64]. В ходе анализа этих данных были получены следующие оценки средних значений и дисперсий стоимости работ для различных типов местности: среднее значение стоимости прокладки участка трассы протяженностью 0,5 км путём расширения существующего шоссе составляет 51 млн. рублей, через поле — 92 млн. рублей, через лес — 150 млн. рублей, через поселок, озеро, шоссе, железную дорогу (за счет возведения эстакад) — 300 млн. рублей, через реку — 400 млн. рублей; дисперсии — 100, 125, 335, 450, 424 млн. рублей соответственно.

Решение задачи с учётом средних значений стоимости работ.

Экспертом эвристически были выбраны 3 трассы, из которых стоимость прокладки трассы T^3 наименьшая, $d^o = \min\{d^1, d^2, d^3\} = 7048,8$ млн. рублей. Трассы, выбранные экспертом представлены на рисунке 3.3.

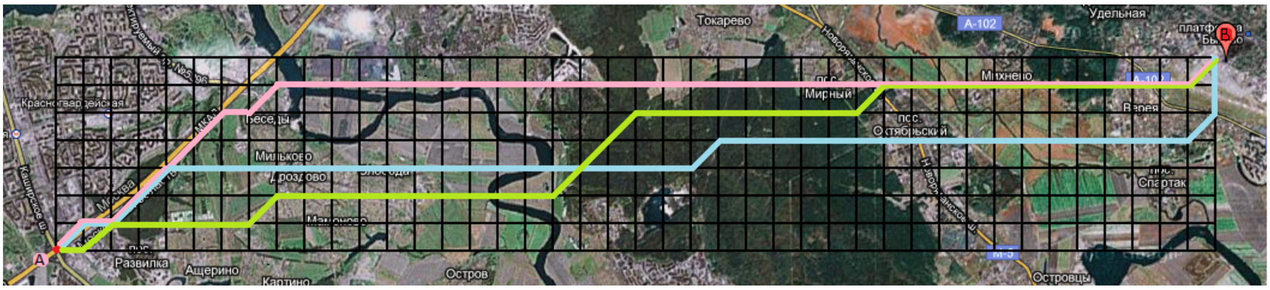

Рис. 3.3 Трассы, выбранные экспертом

Поскольку $L > M$, были заданы следующие значения параметров разбиения сетки: $l_1 = 16$, $l_N = 26$. Решение, найденное с помощью алгоритма, представлено на рисунке 3.4.

Рис. 3.4 Трасса, полученная в ходе применения алгоритма

Стоимость прокладки трассы, найденной с помощью предложенного в данной главе алгоритма, составила 6406,6 млн. рублей, что на 642,2 млн. рублей меньше стоимости предложенной экспертом трассы. При этом некоторые участки найденной трассы и трассы, предложенной экспертом, совпадают.

На рисунке 3.5 представлены трасса наименьшей стоимости, предложенная экспертом (обозначена цифрой 1), и трасса, полученная с помощью предложенного алгоритма (обозначена цифрой 2). Цифрой 3 обозначены совпадающие участки трасс.

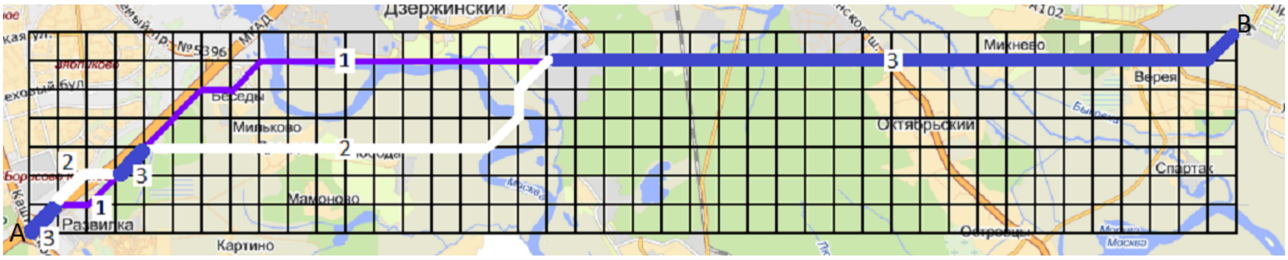

Рис. 3.5 Полученная в ходе применения алгоритма и предложенная экспертом трассы

В ходе применения алгоритма удалось сократить количество вариантов переборов трасс для первой и второй подзадач алгоритма в 25 раз по сравнению с общим количеством возможных переборов.

Решение задачи с учётом средних значений и дисперсий стоимости работ. В ходе решения задачи с учётом средних значений и дисперсий стоимости работ была найдена оптимальная трасса, стоимость прокладки которой с вероятностью $\alpha = 0,95$ не превысит 7638 млн. рублей. Гарантированная с той же вероятностью стоимость трассы, найденной на основе решения задачи, учитывающего только средние затраты, составила 8558 млн. рублей. Как видно из данного примера, учитывая при решении задачи возможный разброс значений стоимости работ на разных участках, можно достичь значительной экономии.

На рисунке 3.6 представлены оптимальные трассы, найденные в ходе решения детерминированной (обозначена цифрой 1) и стохастической (обозначена цифрой 2) задач. Совпадающие участки трасс обозначены цифрой 3.

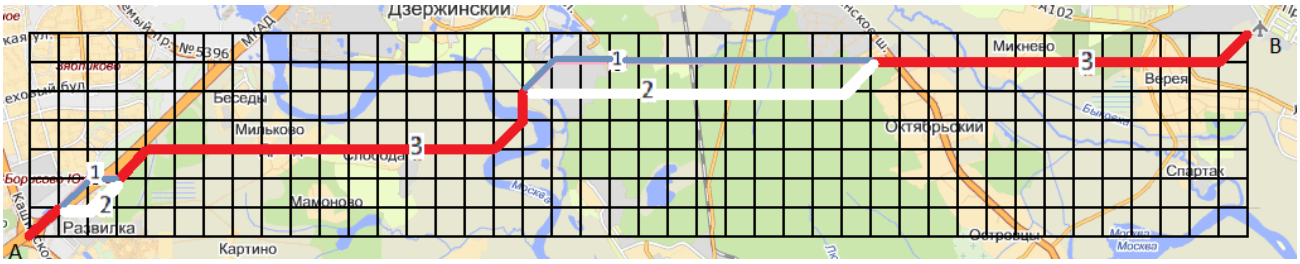

Рис. 3.6 Трассы, полученные в ходе решения детерминированной и стохастической задач

Рассмотренный пример оптимизации прокладки трассы до аэропорта Быково показывает эффективность предложенного алгоритма.

Следует отметить, что трасса, полученная при решении детерминированной задачи, может рассматриваться в качестве опорной траектории для процесса реальной прокладки трассы между двумя точками A и B. А трасса, полученная при решении задачи в стохастической постановке учитывает различные стохастические факторы, которые могут иметь место в ходе реального строительства трассы.

3.7. Выводы по главе 3

В данной главе рассмотрена задача выбора оптимальной трассы в детерминированной и стохастической постановках. Предложена динамическая модель процесса прокладки трассы, учитывающая случайную стоимость работ на разных участках.

Для задачи в стохастической постановке удалось получить детерминированный эквивалент. Для решения рассмотренной задачи предложен алгоритм, основанный на методе динамического программирования, схеме сценариев и методе ветвей и границ. Специфика выбора определенных направлений движения по сетке разбиения местности помогает существенно сократить число анализируемых вариантов допустимых решений и применить схему отсечения точек для уменьшения размерности задачи при поиске оптимального решения. Проведена оценка количества переборов возможных вариантов решения при использовании предложенного алгоритма. Однако данная оценка является оценкой сверху, так как не удаётся априорно определить количество анализируемых вариантов, поскольку оно существенно зависит от конкретной местности для предполагаемой прокладки трассы.

Основные результаты главы 3

1. Разработана математическая модель выбора оптимальной трассы с учётом случайной стоимости работ на разных участках.

2. Для задачи в детерминированной постановке предложен алгоритм поиска решения, основанный на методе динамического программирования, схеме сценариев, а также методе ветвей и границ.

3. Для задачи управления линейной стохастической системой специального вида с нормальным распределением и квантильным критерием получен детерминированный эквивалент.

4. Разработан алгоритм решения задачи оптимизации в стохастической постановке, основанный на применении метода динамического программирования.

Заключение

В диссертационной работе разработаны алгоритмы поиска решений для линейных по стратегиям задач стохастического программирования с квантильным критерием.

В первой главе исследованы многоэтапные задачи стохастического программирования с квантильным критерием, в которых функция потерь линейна относительно стратегий. Показано, что данные задачи при дискретном распределении специального вида, полученном при дискретизации непрерывного распределения, могут быть сведены к двухэтапным задачам квантильной оптимизации. Разработан алгоритм поиска решения многоэтапной линейной относительно стратегий задачи стохастического програмирования с квантильным критерием и дискретизированном распределении случайных параметров, основанный на переходе к эквивалентной задаче смешанного целочисленного линейного программирования.

Во второй главе исследованы свойства верхней оценки функции квантили для билинейной задачи стохастического программирования. Предложен алгоритм решения двухэтапной задачи с билинейной функцией потерь, основанный на переходе к задаче выпуклого программирования, в которой функция потерь записывается в аналитическом виде. Данная задач параметризована скалярным параметром, поиск которого можно осуществить при помощи метода дихотомии. Для сокращения объёма перебора при использовании метода статистического моделирования на этапе проверки вероятностного ограничения используется понятие ядра вероятностной меры.

В третьей главе рассматривается задача управления линейной стохастической системой специального вида. Данная задача рассмотрена в двух постановках. Многошаговая задача квантильной оптимизации сводится к детерминированной задаче оптимального управления целочисленной системой, для решения которой применяется метод динамического программирования и метод ветвей и границ.

Исследования, проведённые в диссертационной работе, могут быть продолжены в направлении изучения вопросов сходимости решений, получаемых в ходе сведения исходных многоэтапных задач квантильной оптимизации к задачам смешанного целочисленного и выпуклого программирования.

Алгоритм сведения двухэтапной билинейной задачи разрабатывался для случая нормального распределения случайных параметров, поэтому дальнейшие исследования также могут быть направлены на распространение полученных результатов на случай произвольных распределений с последующим изучением вопросов сходимости получаемых при этом решений к точному решению исходной задачи.

Указанные направления позволят существенно расширить область приложений линейных относительно стратегий систем, поэтому требуют дальнейшего изучения.

Перечень сокращений и условных обозначений

$\triangleq$ — равенство по определению;

$\varnothing$ — пустое множество;

$\times$ — прямое произведение множеств;

a^{T} — операция транспонирования вектора a;

A^{T} — операция транспонирования матрицы A;

$\leqslant$, $\geqslant$ — покомпонентные неравенства;

$||x||$ — евклидова норма вектора x;

mes — мера Лебега;

$\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство;

$\vec{0}$ — нулевой вектор соответствующей размерности в евклидовом пространстве;

$\mathcal{N}(\vec{0}, I)$ — нормальное распределение;

X — вектор случайных параметров рассматриваемой задачи стохастического программирования;

n — размерность случайного вектора;

x — реализация случайного вектора X;

$u \in U \subset \mathbb{R}^m$ – план первого этапа;

U – множество допустимых стратегий первого этапа;

$y(\cdot) \in \mathcal{Y}$, $y(\cdot) = \mathrm{col}(y_1(\cdot), ..., \ y_{N-1}(\cdot))$ – вектор-функция планов последующих $N-1$ этапов, выбираемая в классе измеримых функций со значениями в $\mathbb{R}^{m_i}$;

$\mathcal{Y}$ – множество допустимых стратегий последующих $N-1$ этапов;

$\Phi^N(u, y(\cdot), X)$ — функция потерь N-этапной задачи стохастического программирования в априорной постановке;

$\Phi_i(u, y^i(\cdot), X^i)$, $i = \overline{1, N-1}, ---$;

0^+U — конус рецессивных направлений множества U;

$\mathcal{P}\{\cdot\}$ — вероятностная мера, порождённая распределением случайного вектора;

$p(x)$ — плотность вероятности случайного вектора X;

$\alpha \in (0, 1)$ — уровень надёжности;

φ — значения уровня целевой функции, непревышение которого требуется по условию задачи;

$\varphi_\alpha(u)$ — функция квантили уровня α;

$[x]_\alpha$ — α-квантиль распределения случайной величины x;

$P_\varphi(u)$ — функция вероятности;

u_α — оптимальная стратегия задачи стохастического программирования с квантильным критерием;

$x^k, k = \overline{1, K}$, — точки, сгенерированные случайным образом согласно плотности случайного вектора;

K — количество реализаций дискретного случайного вектора;

$p_k = 1/K$ — меры сгенерированных точек $x^k, k = \overline{1, K}$;

$\tilde{X}$ — случайный вектор, соответствующий мерам p_k;

$F(x)$ — функция распределения случайного вектора X;

$F_K(x)$ — функция распределения случайного вектора $\tilde{X}$;

$\hat{F}_K(x)$ — выборочная функция распределения, соответствующая случайному вектору X;

S — доверительное множество;

$\mathcal{F}_\alpha$ — семейство доверительных множеств;

V — множество допустимых значений переменных задачи, двойственной к задаче второго этапа;

$v \in \mathbb{R}^s$ — вектор двойственных переменных;

v^j — вершина многогранного множества V, $j = \overline{1, J}$;

δ_k — булевы переменные, характеризующие принадлежность точек x^k реализации случайного вектора $\tilde{X}$ доверительному множеству S;

$\Phi(u, x)$ — целевая функция задачи стохастического программирования;

$y \in \mathbb{R}^{m_1}$ – вектор оптимизационных переменных задачи второго этапа;

$\bar{\Phi}(u, X)$ — задача второго этапа;

K_α — α-ядро вероятностной меры;

S_r — доверительный шар;

r, R — радиусы доверительного шара;

$\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция;

C_r — многогранное множество;

$\bar{C}_r$ — правильный многогранник, симметричный относительно нуля, имеющий J граней, касающихся доверительного шара S_r.

Список литературы

1. *Беллман Р.* Динамическое программирование. — М.: Иностранная литература, 1960. — 400 с.

2. *Беллман Р., Глицксберг И., Гросс О.* Некоторые вопросы математической теории процессов управления. — М.: Иностранная литература, 1962. — 336 с.

3. *Беллман Р., Дрейфус С.* Прикладные задачи динамического программирования. — М.: Наука, 1965. — 460 с.

4. *Бертсекас Д., Шрив С.* Стохастическое оптимальное управление. Случай дискретного времени. — М.: Наука, 1985. — 280 с.

5. *Богданов А.Б., Наумов А.В.* Решение двухэтапной задачи логистики в квантильной постановке // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 12. — С. 36—42.

6. *Васильев А.П., Марышев Б.С., Силкин В.В. и др.* Строительство и реконструкция автомобильных дорог: Справочная энциклопедия дорожника (СЭД). Т. I [Электронный ресурс] — М.: Информавтодор, 2005. — Режим доступа: http://www.gosthelp.ru/text/SpravochnikSpravochnayaen2.html

7. *Величко А.С.* Об алгоритме двойственных отсечений для задачи двухэтапного стохастического программирования // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2006. — № 4. — С. 78—81.

8. *Вентцель Е.С.* Элементы динамического программирования. — М.: Наука, 1964. — 176 с.

9. *Вишняков Б.В., Кибзун А.И.* Детерминированные эквиваленты для задач стохастического программирования с вероятностными критериями // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 6. — С. 126—143.

10. *Вишняков Б.В., Кибзун А.И.* Применение метода бутстрепа для оценивания функции квантили // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 11. — С. 46—60.

11. *Войтишек А.В.* Дополнительные сведения о численном моделировании случайных элементов. — Учебное пособие. — Новосибирск, 2007. — 92 с.

12. Газета «Информационные технологии в строительстве». — 2010. — №10 (113).

13. *Гольштейн Е.Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. — М.: Наука, 1971. — 352 с.

14. *Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.* Недифференцируемая оптимизация. — М.: Физматлит, 1981. — 384 с.

15. *Ермольев Ю.М.* Методы стохастического программирования. — М.: Наука, 1976. — 340 с.

16. *Ефремов В.А., Кибзун А.И.* Оптимальные экстремальные порядковые оценки квантили // Автоматика и телемеханика. — 1996. — № 12. — С. 3—15.

17. *Иванов С.В., Наумов А.В.* Алгоритм оптимизации квантильного критерия для полиэдральной функции потерь и дискретного распределения случайных параметров // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 1. — С. 116—129.

18. *Житенёв А.И.* Поиск решений в задаче нахождения оптимального пути трассы трубопровода с использованием весового графа // Вестн. Воронеж. гос. техн. ун-та, 2009. — Т. 5. — № 2. — С. 108—111.

19. *Кан Ю.С.* Квазиградиентный алгоритм минимизации функции квантили // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 1996. — № 2. — С. 81—86.

20. *Кан Ю.С.* О сходимости одного стохастического квазиградиентного алгоритма квантильной оптимизации // Автоматика и телемеханика. — 2003. — № 2. — С. 100—116.

21. *Кан Ю.С., Кибзун А.И.* Оптимальное управление линейной системой по квантильному критерию // Автоматика и телемеханика. — 1990. — № 1. — С. 37—43.

22. *Кан Ю.С., Кибзун А.И.* Свойства выпуклости функций вероятности и квантили в задачах оптимизации // Автоматика и телемеханика. — 1996. — № 3. — С. 82—102.

23. *Кибзун А.И.* Стохастическое управление динамическими системами. М.: МАИ, 1991. — 60 с.

24. *Кибзун А.И.* Распараллеливание алгоритмов оптимизации функции квантили // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 5. — С. 59—70.

25. *Кибзун А.И., Кан Ю.С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. — М.: Физматлит, 2009. — 372 с.

26. *Кибзун А.И., Курбаковский В.Ю.* Численные алгоритмы квантильной оптимизации и их применение к решению задач с вероятностными ограничениями // Изв. АН СССР, Техн. кибернетика. — 1992. — № 1. — С. 75—81.

27. *Кибзун А.И., Лебедев А.А., Малышев В.В.* О сведении задачи с вероятностными ограничениями к эквивалентной минимаксной // Изв. АН СССР, Техн. кибернетика. — 1984. — № 4. — С. 73—80.

28. *Кибзун А.И., Малышев В.В.* Обобщенный минимаксный подход к решению задач с вероятностными ограничениями // Изв. АН СССР, Техн. кибернетика. — 1984. — № 1. — С. 20—29.

29. *Кибзун А.И., Малышев В.В.* Обобщенный минимаксный подход к решению задач с вероятностными ограничениями // Изв. АН СССР, Техн. кибернетика.— 1989. — № 1. — С. 46—55.

30. *Кибзун А.И., Матвеев Е.Л.* Алгоритм распараллеливания процесса оптимизации функции квантили // Вестник Московского Авиационного Института. — 2008. — Т. 15. — № 2. — С. 51—58.

31. *Кибзун А.И., Матвеев Е.Л.* Стохастический квазиградиентный алгоритм минимизации функции квантили // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 6. — С. 64—78.

32. *Кибзун А.И., Матвеев Е.Л.* Достаточные условия квазивогнутости функции вероятности // Автоматика и телемеханика.— 2010. — № 3. — С. 54—71.

33. *Кибзун А.И., Матвеев Е.Л.* Оптимизация функции квантили на основе ядерных оценок // Автоматика и телемеханика.— 2007. — № 1. — С. 68—81.

34. *Кибзун А.И., Наумов А.В.* Гарантирующий алгоритм решения задачи квантильной оптимизации // Космические исследования. — 1995. — Т. 33. – № 2. — С. 160—165.

35. *Кибзун А.И., Наумов А.В.* Двухэтапные задачи квантильного линейного программирования // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 1. — С. 83—93.

36. *Кибзун А.И., Наумов А.В., Норкин В.И.* О сведении задачи квантильной оптимизации с дискретным распределением к задаче смешанного целочисленного программирования // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 6. — С. 66—86.

37. *Кибзун А.И., Наумов А.В., Норкин В.И.* Сведение задач двухэтапной вероятностной оптимизации с дискретным распределением случайных данных // Сб. тр. науч. семинара «Стохастическое программирование и его приложения». Иркутск: Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, 2012. — С. 76—104.

38. *Кибзун А.И., Наумов А.В., Уланов С.В.* Стохастический алгоритм управления летным парком авиакомпании // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 8. — С. 126—136.

39. *Кибзун А.И., Никулин И.В.* Дискретная аппроксимация линейной двухэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием // Автоматика и телемеханика. — 2001. — № 8. — С. 127—137.

40. *Кибзун А.И., Третьяков Г.Л.* О гладкости критериальной функции в задаче квантильной оптимизации // Автоматика и телемеханика.— 1997. — № 9. — С. 69—80.

41. *Кибзун А.И., Хромова О.М.* Выбор оптимальной трассы с учетом случайной стоимости работ // 16-я международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация», Крым, Евпатория, 3–10 июля 2011 года. Сборник тезисов докладов. — М.: МАИ-ПРИНТ, 2011. — С. 135—136.

42. *Кибзун А.И., Хромова О.М.* Выбор оптимальной трассы с учетом случайной стоимости работ на разных участках // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 7. — С. 89—108.

43. *Кибзун А.И., Хромова О.М.* О коррекции положения стохастической системы по квантильному критерию // Электронный журнал «Труды МАИ». — 2014. — № 72.

44. *Кибзун А.И., Хромова О.М.* О сведении многоэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием к задаче смешанного целочисленного линейного программирования // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 4. — С. 120—133.

45. *Кибзун А.И., Хромова О.М.* О сведении двухэтапной задачи квантильной оптимизации к задаче выпуклого программирования // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 5. — С. 131-143.

46. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. — М.: Мир, 1978. — 432 с.

47. *Лепп Р.* Максимизация функции вероятности при простых ограничениях // Изв. АН ЭССР, физ.-мат. — 1979. — Вып. 28. — № 4. — С. 303—309.

48. *Малышев В.В.* Конспект лекций по теории оптимальных систем. М.: МАИ, 1974.

49. *Малышев В.В., Кибзун А.И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. — М.: Машиностроение, 1987. — 304 с.

50. *Наумов А.В.* Двухэтапная задача квантильной оптимизации бюджета госпиталя // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1996. — № 2. — С. 87—90.

51. *Наумов А.В.* Двухэтапная задача квантильной оптимизации инвестиционного проекта // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2010. — № 2. — С. 33—40.

52. *Наумов А.В., Бобылёв И.М.* О двухэтапной задаче стохастического линейного программирования с квантильным критерием и дискретным распределением вектора случайных параметров // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 2. — С. 61—72.

53. *Наумов А.В., Иванов С.В.* Исследование задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 2. — С. 142—158.

54. *Наумов А.В., Иванов С.В.* Задача распределения инвестиций в развитие отраслей наземного космического комплекса // Электронный журнал «Труды МАИ». — 2012. — № 50.

55. *Наумов А.В., Уланов С.В.* Учет риска в двухэтапных задачах оптимального распределения ресурсов // Автоматика и телемеханика. — 2003. — № 7. — С. 109—116.

56. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982. — 255 с.

57. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. — М.: Наука, 1983. — 384 с.

58. *Райк Э.* Качественные исследования в задачах стохастического нелинейного программирования // Изв. АН ЭССР, физ.-мат. — 1971. — Вып. 20. — № 1. — С. 8—14.

59. *Райк Э.* О функции квантиля в стохастическом нелинейном программировании // Изв. АН ЭССР, физ.-мат. — 1971. — Вып. 20. — № 2. — С. 227—231.

60. *Райк Э.* О задачах стохастического программирования с функционалами вероятности и квантиля // Изв. АН ЭССР, физ.-мат. — 1972. — Вып. 21. — № 2. — С. 142—148.

61. Специальные алгоритмы решения задач линейного и смешанного целочисленного программирования [Электронный ресурс] // Режим доступа: http://lpsolve.sourceforge.net/5.5/

62. Справочник стоимостных показателей по отдельным видам объектов капитального строительства (объектам-аналогам) [Электронный ресурс] // Министерство регионального развития РФ. — М., 2009. — Режим доступа: www.minregion.ru

63. Строительные нормы и правила. Автомобильные дороги. СНиП 3.06.03-85. [Электронный ресурс] // М., 1985. — Режим доступа: http://www.gosthelp.ru/text/SNiP3060385Avtomobilnyedo.html

64. Строительные нормы и правила. Автомобильные дороги. СНиП 2.05.02-85. [Электронный ресурс] // М., 1985. — Режим доступа: http://www.vashdom.ru/snip/20502-85/

65. *Тамм Э.* О квазивыпуклости функций вероятности и квантили // Изв. АН ЭССР, физ.-мат. — 1976. — Вып. 25. — № 2. — С. 141—143.

66. *Тамм Э.* О минимизации функции вероятности // Изв. АН ЭССР, физ.-мат. — 1979. — Вып. 28. — № 1. — С. 17—24.

67. *Финкельштейн Ю. Ю.* Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования. — М.: Наука, 1976. — 265 с.

68. *Хромова О.М.* Модель прокладки трассы до аэропорта // Конкурс научно-технических работ и проектов молодых учёных и специалистов «Молодежь и будущее авиации и космонавтики» Аннотации работ. — М.: МАИ-ПРИНТ, 2009. — С. 72—73.

69. *Хромова О.М.* Оптимизация прокладки трассы, учитывающей случайную стоимость работ на разных участках пути, связаную с разнообразным рельефом местности // Материалы XLIX международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика / Новосиб. Гос. Ун-т, Новосибирск, 16-20 апреля 2011 г. — С. 308.

70. *Хромова О.М.* Задача оптимальной прокладки автомобильной трассы с учетом случайной стоимости работ до места базирования авиационных систем // Научно-

практическая конференция студентов и молодых ученых МАИ «Инновации в авиации и космонавтике – 2011». 26-30 апреля 2011 года. Москва. Сборник тезисов докладов. — М.: МЭЙЛЕР, 2011. — С. 117.

71. *Ширяев А.Н.* Вероятность. В 2-х книгах. М.: МЦНМО, 2004. Кн. 1 — 520 с., кн. 2 — 408 с.

72. *Щепакин М.Б.* Многоэтапная стохастическая задача о смеси // Мат. методы исслед. и оптимизации систем, Киев, 1970. — Вып. 4. — С. 73—87.

73. *Юби Э.* Минимизация функции вероятности методом статистического моделирования // Труды Таллинского политехнического института. — 1976. — Вып. 411. — С. 57—76.

74. *Юби Э.* Статистическое исследование задач стохастического программирования и метод их решения // Изв. АН ЭССР, физ.-мат. — 1977. —Вып. 26. — № 4. — С. 369—375.

75. *Юдин Д.Б.* Математические методы управления в условиях неполной информации. — М.: Сов. Радио, 1974. — 400 с.

76. *Юдин Д.Б.* Задачи и методы стохастического программирования. — М.: Сов. радио, 1979. — 392 с.

77. *Barro D., Canestrelli E.* A Decomposition Approach in Multistage Stochastic Programming // Rendiconti per gli Studi Economici Quantitativi. — 2005. — P. 73—88.

78. *Beale E.M.L.* On Minimizing a Convex Function Subject to Linear Inequalities // Journal of Royal Statistical Society. — 1955. — Series B. — V. 17. — P. 173—-184.

79. *Beltran-Royo C., Escudero L.F., Monge J.F., Rodriguez-Ravines R.E.* An Effective Heuristic for Multistage Stochastic Linear Programming [Электронный ресурс] // Statistics and Operations Research, Rey Juan Carlos University, Madrid, Spain — Режим доступа: http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2013/07/3961.pdf

80. *Benichou M., Gauthier J.M., Girodet P., Hentges G., Ribiere G., Vincent O.* Experiments in Mixed-Integer Linear Programming // Mathematical Programming. — 1971. — V. 1. — № 1. — P. 76—94.

81. *Benders J.F.* Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems // Numerische Mathematik. — 1962. — V. 4. — №. 1. — P. 238—252.

82. *Beraldi P., Ruszczyński A.* The Probabilistic Set Covering Problem // Operations Research. — 1999. — V. 50. — № 6. — P. 956—967.

83. *Beraldi P., Ruszczyński A.* A Branch and Bound Method for Stochastic Integer Problems Under Probabilistic Constraints // Optimization Methods and Software. — 2002. — V. 17. — № 3. — P. 359—382.

84. *Birge J.R.* Decomposition and Partitioning Methods for Multi-stage Stochastic Linear Programs // Operations Research. — 1985. — № 33. — P. 989-1007.

85. *Birge J., Louveaux F.* Introduction to Stochastic programming. — New York: Shpringer, 1997. — 421 p.

86. *Birge J.R., Wets R.J.-B.* Designing Approximation Schemes for Stochastic Optimization Problems, in Particular for Stochastic Programming with Recourse // Mathematical Programming Study. — 1986. — № 27. — P. 54—102.

87. *Blomvall J., Lindberg P.O.* A Riccati-based Primal Interior Point Solver for Multistage Stochastic Programming // European Journal of Operational Research. — 2002. — V. 143. — № 2. — P. 452—461.

88. *Casey M.S., Sen S.* The Scenario Generation Algorithm for Multistage Stochastic Linear Programming // Mathematics of Operations Research. — 2005. — V. 30. — № 3. — P. 615—631.

89. *Dantzig G.B.* Linear programming under uncertainty // Management Science. — 1955. — № 1. — P. 197—206.

90. *Dantzig G.B., Infanger G.* Multi-stage Stochastic Linear Programs for Portfolio Optimization // Annals of Operations Research. — 1993. — V. 45. — № 1. — P. 59—76.

91. *Deák I., Pólik I., Prékopa A., Terlaky T.* Convex Approximations in Stochastic Programming by Semidefinite Programming // Annals of Operations Research. — 2012. — V. 200. — № 1. — P. 171—182.

92. *Dempster M.A.H.* On stochastic programming, I. Static Linear Programming under Risk // Journal of Mathematical Analysis and Application. — 1968. — V. 21. — № 2. — P. 304—343.

93. *Dupačová J., Consigli G., Wallace S.W.* Scenarios for Multistage Stochastic Programs // Annals of Operations Research. — 2000. — V. 100. — № 1—4. — P. 25—53.

94. *Faber M.M.* Stochastisches Programmieren. — Würzburg: Physica—Verlag, 1970. — 134 p.

95. *Charnes A., Cooper W. W., Symonds G. N.* Cost Horizons and Certainty Equivalents: An Approach to Stochastic Programming of Heating Oil // Management Science. — 1958. — V. 4. — № 3. — P. 235—263.

96. *Charnes A., Cooper W. W.* Chance-Constrained Programming // Management Science. — 1959. — V. 6. — № 1. — P. 73—79.

97. *Charnes A., Cooper W. W.* Deterministic Equivalents for Optimizing and Satisficing under Chance Constraints // Operation Research. — 1963. — V. 11. — № 1. — P. 18—39.

98. *Dantzig G.B., Madansky A.* On the Solution of Two-stage Linear Programs under Uncertainty // Proc. Fourth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. (Univ. of Calif. Press). — 1961. — V. 1. — P. 165—176.

99. *Dijkstra E.W.* A Note on Two Problems in Connexion with Graphs // Numerische Mathematik. — 1959. — V. 1. — P. 269—271.

100. *Frauendorfer K.* Multistage Stochastic Programming: Error Analysis for the Convex Case // Zeitschrift für Operations Research. — 1994. — V. 39. — № 1. — P.93—122.

101. *Fúsek P., Kall P., Mayer J., Sen S, and Siegrist S.* Multistage Stochastic Linear Programming: Aggregation, Approximation, and Some Open Problems [Электронный ресурс] // Technical Report, Inst. Oper. Res., University of Zurich, 2000. Режим доступа: http://hore.dnom.fmph.uniba.sk/ fusek/fus-ka-etal.pdf

102. *Gomory R.E.* An Algorithm for the Mixed Integer Problem // RAND Report RM-2597, The RAND Corporation, Santa Monica, CA, 1960.

103. *Guan Y., Ahmed S., Nemhauser G.L.* Cutting Planes for Multistage Stochastic Integer Programs // Operations Research. — V. 57. — № 2. — 2009. — P. 287—298.

104. *Hanson M.A.* Stochastic Non-Linear Programming // Journal of the Australian Mathematical Society. — 1964. — V. 4. — № 3. — P. 347—353.

105. *Higle J.L., Sen S.* Multistage Stochastic Convex Programs: Duality and its Implications // Annals of Operations Research. — 2006. — V. 142. — № 1. — P. 129—146.

106. *Hillier F.S.* Chance-Constrained Programming with 0–1 or Bounded Continuous Decision Variables // Management Science. — 1967. — V. 14. — № 1. P. 34—57.

107. IBM ILOG CPLEX V12.1. User's Manual for CPLEX. — International Business Machines Corporation, 2009. — 952 p.

108. *Kan Yu.S.* Application of the Quantile Optimization to Bond Portfolio Selection // Stochastic Optimization Techniques. — 2002. — V. 513. — P. 285—308.

109. *Kall P.* Stochastic Linear Programming. — Berlin: Springer-Verlag, 1976.

110. *Kall P., Mayer J.* Stochastic Linear Programming. — Springer, New York, 2005.

111. *Kall P., Wallace S.W.* Stochastic Programming. — Chichester: John Wiley and Sons Ltd., 1994. — 307 p.

112. *Kaňková V.* A Note on Objective Functions in Multistage Stochastic Nonlinear Programming Problems // System Modelling and Optimization, IFIP. — 1996. — P. 582—589.

113. *Kataoka S.* On Stochastic Programming. II: A Preliminary Study of a Stochastic Programming Model // Hitotsubashi Journal of Arts and Sciences. — 1962. — № 2. — P. 36—44.

114. *Kataoka S.* On Stochastic Programming. III: A Stochastic Programming Model // Hitotsubashi Journal of Arts and Sciences. — 1962. — № 2. — P. 44—56.

115. *Kataoka S.* A Stochastic Programming Model // Econometrica. — 1963. — V. 31. — № 1—2. — P. 181—196.

116. *Kataoka S.* On Stochastic Programming. IV: A Note on a Generalized Stochastic Programming Model // Hitotsubashi Journal of Arts and Sciences. — 1963.— № 3. — P. 35—40.

117. *Kibzun A.I., Kan Yu.S.* Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions. — Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley and Sons, 1996. — 316 p.

118. *Kibzun A.I., Malyshev V.V., Karp K.A.* A Minimax Approach for Statistical Simulation of Complex Technical Systems // Advances in Modelling and Simulation — AMSE Press. — 1988. — V. 10. — № 3. — P. 35—46.

119. *Kibzun A., Matveev E.* Optimization of the Quantile Criterion for the Convex Loss Function by a Stochastic Quasigradient Algorithm // Annals of Operations Research. – 2012. — V. 200. — № 1. — P. 183—198.

120. *Kolbin V.V.* Stochastic Programming. — D. Reidel, Dordrecht, 1977. — 195 p.

121. *Land A.H., Doig A.G.* An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems // Econometrica. — 1960. — V. 28. — № 3. — P. 497—520.

122. *Lepp R.* Stochastic Approximation Type Algorithm for the Maximization of the Probability Function // Proc. Acad. Sci. Estonian SSR, Phys.-Math. — 1983. — V. 32. — № 2. — P. 150—-156

123. *Little J.D.C., Murty K.G., Sweeney D.W., and Karel C.* An Algorithm for the Traveling Salesman Problem // Operations Research.— 1963. — V. 11. — P. 972—989.

124. *Louveaux F.V.* A Solution Method for Multistage Stochastic Programs with Recourse with Application to an Energy Investment Problem // Operations Research. — 1980. — V. 28. — № 4. — P. 889—902.

125. *Louveaux F.V.* Multistage Stochastic Programs with Block-separable Recourse // Stochastic Programming 84 Part II, Mathematical Programming Studies. — 1986. — V. 28. — P. 48—62.

126. *Luedtke J., Ahmed S., Nemhauser G.L.* An Integer Programming Approach for Linear Programs with Probabilistic Constraints // Mathematical Programming. — 2010. — V. 122. – № 2. — P. 247—272.

127. *Madansky A.* Dual Variables in Two-Stage Linear Programming under Uncertainty // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1963. — V. 6. — № 1. — P. 98—108.

128. *Madansky A.* Methods of Solution of Linear Programs under Uncertainty // Operations Research. — 1962. — V. 10. — № 4. — P. 463—471.

129. *Marti K.* Stochastic Optimization Methods. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2005. — 314 p.

130. *Milder J.L., Wollmer R.D.* Stochastic Programming Models for Scheduling Airlift Operations // Naval Research Logistics Quarterly. — 1969. — V. 16. — № 3. — P. 315—330.

131. *Miller B.L., Wagner H.M.* Chance Constrained Programming with Joint Constraints // Operations Research. — 1965. — V. 13. — № 6. — P. 930—945.

132. *Nemirovski A., Shapiro A.* Scenario approximation of chance constraints. // Probabilistic and Randomized Methods for Design Under Uncertainty. G. Calafiore and F. Dabbene (Eds.). London: Springer, 2005. — P. 3—48.

133. *Nemirovski A., Shapiro A.* Convex Approximations of Chance Constrained Programs // SIAM Journal on Optimization. —2006. — № 17. — P. 969—996.

134. *Norkin V.* Global Optimization of Probabilities by the Stochastic Branch and Bound Method // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Stochastic Programming and Technical Applications. K. Marti and P. Kall (Eds.). Berlin: Springer-Verlag, 1988. — P. 186—201.

135. *Norkin V.* On Mixed Integer Reformulations of Monotonic Probabilistic Programming Problems with Discrete Distributions [Электронный ресурс] // Режим доступа: http:// www.optimization-online.org/DB_HTML/2010/05/2619.html. 2010.

136. *Olsen P.* When is a Multistage Stochastic Programming Problem Well-Defined // SIAM J. Control and Optimization. — 1976. — № 14. — P. 518—527.

137. *Parpas P., Ustin B., Webster M., Tran Q.K.* Importance Sampling in Stochastic Programming: A Markov Chain Monte Carlo Approach [Электронный ресурс] // Режим доступа: http://www.doc.ic.ac.uk/ pp500/pubs/mcmcImpSampling.pdf 2013

138. *Prékopa A.* Stochastic programming. — Boston: Kluwer Scientific, 1995. — 624 p.

139. *Prékopa A.* Probabilistic programming // Stochastic Programming, Handbooks in Operations Research and Management Science (A Ruszczyński and A. Shapiro, editors). New Work: Elsevier, 2003. — V. 10. — P. 267—351.

140. *Prékopa A.* Numerical Solution of Probabilistic Constrained Programming Problems // Numerical Techniques for Stochastic Optimization (Yu. Ermoliev and R.J-B. Wets, editors). Springer-Verlag, Berlin, 1980. — P. 123—139.

141. *Rockafellar R.T., Wets R.J.-B.* Stochastic Convex Programming: Basic Duality // Pacific Journal of Mathematics. — 1976. — V. 62. — P. 173—195.

142. *Rockafellar R.T., Wets R.J.-B.* Stochastic Convex Programming: Singular Multipliers and Extended Duality Singular Multipliers and Duality // Pacific Journal of Mathematics. — 1976. — V. 62. — № 2. — P. 507—522.

143. *Rockafellar R.T., Wets R.J.-B.* Continuous Versus Measurable Recourse in N-Stage Stochastic Programming // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1974. — V. 48. — № 3. — P. 836—859.

144. *Rockafellar R.T., Wets R.J.-B.* Measures as Lagrange Multipliers in Multistage Stochastic Programming // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1977. — V. 60. — № 2. — P. 301—313.

145. *Römich W., Schultz R.* Multistage Stochastic Integer Programs: An Introduction // Online Optimization of Large Scale Systems. Grötschel M., Krumke S.O., Rambau J. (eds.). Berlin: Springer. —2001. — P.581—600.

146. *Ruszczyński A.* Parallel Decomposition of Multistage Stochastic Programming Problems // Mathematical Programming. — 1993. — V. 58. — № 1—3. — P. 201—228.

147. *Ruszczyński A.* Probabilistic Programming with Discrete Distributions and Precedence Constrained Knapsack Polyhedra // Mathematical Programming. — 2002. — V. 93. — № 2. — P. 195—215.

148. *Ruszczyński A., Shapiro A.* Stochastic programming (Handbooks in Operations Research and Management Science). — Amsterdam: Elsevier. — 2003.

149. *Schweitzer E., Avriel M.* A Gaussian Upper Bound for Gaussian Multi-Stage Stochastic Linear Programs // Mathematical Programming. — 1997. — V. 77. — № 3. — P. 1—21.

150. *Sen S.* Subgradient Decomposition and Differentiability of the Recourse Function of a Two Stage Stochastic Linear Program // Operations Research Letters. — 1993. — V. 13. — № 3. — P. 143—148.

151. *Sen S.* Relaxations for Probabilistically Constrained Programs with Discrete Random Variables // System Modelling and Optimization. Lecture Notes in Control and Information Sciences. — 1992. — V. 180. — P. 598—607.

152. *Sengupta J.K.* Distribution Problems in Stochastic and Chance-Constrained Programming // Economic Models, Estimation and Risk Programming (Essays in Honor of G. Tintner). — 1969. — V. 15. — P. 391-424.

153. *Shapiro A.* Inference of Statistical Bounds for Multistage Stochastic Programming Problems // Mathematical Methods of Operations Research. — 2003. — V. 58. — № 1. — P. 57—68.

154. *Shapiro A.* Complexity of Two and Multi-Stage Stochastic Programming problems [Электронный ресурс] // Conference transparencies, 2005. Режим доступа: http://www2.isye.gatech.edu/people/faculty/Alexander_Shapiro/publications/Comp-05.pdf

155. *Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A.* Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory. — Philadelphia: SIAM, 2009. — 436 p.

156. *Shapiro A., Nemirovski A.* On Complexity of Stochastic Programming Problems // Continuous Optimization. Applied Optimization. — 2005. — V. 99. — P. 111—146.

157. *Stackelberg H.F.* Marktform und Gleichgewicht. — Berlin: Springer-Verlag, 1934. — 138 p.

158. *Swamy C., Shmoys D.B.* Sampling-based Approximation Algorithms for Multi-stage Stochastic Optimization // SIAM Journal on Computing. — 2012. — V. 41. — № 4. — P. 975—1004.

159. *Symonds G.H.* Deterministic Solutions for a Class of Chance-Constrained Programming Problems // Operations Research. — 1967. — V. 15. — № 3. — P. 495—512.

160. *Uryas'ev S.* Differentiability of the Integral over a Set Defined by Inclusion // Cybernetics. — 1988. — V. 24. — № 5. — P. 638—642.

161. *Uryas'ev S.* Differentiation Formula for Integrals over Sets Given by Inclusion // Numerical Functional Analysis and Optimization. — 1989. — V. 10. — № 7,8. — P. 827—841.

162. *Vajda S.* Probabilistic Programming (Probability and Mathematical Statistics Monograph). — New York, London: Acad. Press, 1972. — 127 p.

163. *Wallace S.W., Yan T.* Bounding Multi-Stage Stochastic Programs from Above // Mathematical Programming. — 1993. — V. 61. — № 1–3. — P. 111—129.

164. *Wallace S.W., Ziemba W.T.* Applications of Stochastic Programming. — SIAM, Philadelphia, 2005. — 704 p.

165. *Wessels J.* Stochastic Programming // Statistica Neerlandica. — 1967. — V. 21. — № 1. — P. 39—53.

166. *Wets R.* Programming under Uncertainty: The Equivalent Convex Program // SIAM Journal on Applied Mathematics. — 1966. — V. 14. — № 1. — P. 89—105.

167. *Wets R.J.-B.* Programming under Uncertainty: The Solution Set // SIAM Journal on Applied Mathematics. — 1966. — V. 14. — № 5. — P. 1143—1151.

168. *Wets R.* Duality Relations in Stochastic Programming // Symposia Mathematica, XIX (Convegno sulla Programmazione Matematica e sue Applicazioni), INDAM, Rome. — Academic Press, London. — 1976. — P. 341—355.

169. *Zhao G.* A Lagrangian Dual Method with Self-Concordant Barriers for Multi-Stage Stochastic Convex Nonlinear Programming // Mathematical Programming. — 2005. — V. 102. — № 1. — P. 1—24.