



Научная статья

УДК 62.752, 621.534, 629.4.015, 51-74, 517.442

URL: <https://trudymai.ru/publications.php?ID=188262>

EDN: <https://www.elibrary.ru/YHJFDA>

МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ ВИБРАЦИОННЫХ РЕЖИМОВ КОЛЕБАНИЙ ИСПЫТАТЕЛЬНЫХ СТЕНДОВ С ДВУМЯ ВИБРОВОЗБУДИТЕЛЯМИ

А.В. Елисеев^{1,2}✉, Н.К. Кузнецов²

¹Иркутский государственный университет путей сообщения,

²Иркутский национальный исследовательский технический университет,

г. Иркутск, Россия

✉eavsh@ya.ru

Цитирование: Елисеев А.В., Кузнецов Н.К. Методы формирования вибрационных режимов колебаний испытательных стендов с двумя вибровозбудителями // Труды МАИ: электрон. журнал. № 148. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188262>

Аннотация. Рассматриваются задачи оценки, формирования и коррекции динамических состояний технических объектов, моделируемых механическими колебательными системами. Исследование ориентировано на разработку математических моделей вибрационных стендов для испытаний длинномерных конструкций, критически важных для аэрокосмической техники, таких как лонжероны и лопасти вертолетов. На основе методов структурного математического моделирования, теории колебаний и элементов теории автоматического управления разработана структурная математическая модель стенда с двумя вибровозбудителями. Модель, редуцированная до четырех степеней свободы путем учета жестких сочленений, позволяет анализировать динамику системы. Ключевым результатом является демонстрация возможности реализации режимов одновременного динамического гашения колебаний в двух точках установки возбудителей путем варьирования коэффициента связности между внешними гармоническими воздействиями. Установлено, что сближение

частот динамического гашения с собственными частотами системы приводит к специфическим формам колебаний, исключаям резонансные явления. Полученные результаты открывают возможность оптимизации параметров вибрационных стендов для эффективных испытаний сложных аэрокосмических конструкций, где сам испытуемый образец может выполнять функцию динамического гасителя колебаний, что повышает достоверность и безопасность испытаний.

Ключевые слова: структурное математическое моделирование; механическая колебательная система; передаточная функция; режимы динамического гашения колебаний; вибрационный стенд; режимы одновременного динамического гашения колебаний по двум координатам; динамический гаситель колебаний.

METHODS OF FORMING VIBRATION MODES OF TEST BENCHES WITH TWO VIBRATION EXCITERS

A.V. Eliseev^{1,2} , N.K. Kuznetsov² 

¹ Irkutsk State Transport University,

² Irkutsk National Research Technical University,

Irkutsk, Russia

 eavsh@ya.ru

Citation: Eliseev A.V., Kuznetsov N.K. Methods of forming vibration modes of test benches with two vibration exciters // Trudy MAI. 2026. No. 148. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188262>

Abstract. The article discusses the tasks of assessing, forming and correcting the dynamic states of technical objects modeled by mechanical oscillatory systems. The research is focused on the development of mathematical models of vibration test benches for long-length structures critical to aerospace engineering, such as spars and helicopter blades. Based on the methods of structural mathematical modeling, the theory of oscillations and elements of the theory of automatic control, a structural mathematical model of a stand with two vibration exciters has been developed. The model, reduced to four degrees of freedom by taking into account rigid joints, allows for

analyzing the system's dynamics. The key result is the demonstration of the possibility of implementing simultaneous dynamic vibration damping modes at two points of the exciter installation by varying the coupling coefficient between external harmonic influences. It is established that the convergence of the dynamic damping frequencies with the natural frequencies of the system leads to specific forms of vibrations that exclude resonant phenomena. The obtained results open up the possibility of optimizing the parameters of vibration stands for effective testing of complex aerospace structures, where the test sample itself can act as a dynamic vibration absorber, increasing the reliability and safety of the tests.

Keywords: structural mathematical modeling; mechanical oscillatory system; transfer function; dynamic vibration damping modes; vibration stand; simultaneous dynamic vibration damping modes in two coordinates; dynamic vibration dampener.

Введение

Проблемы оценки, формирования и коррекции динамических состояний технических объектов имеют ключевое значение для современного машиностроения, особенно в контексте разработки вибрационных испытательных стендов, обеспечивающих надежность критических конструкций, таких как лонжероны транспортных средств [1-5]. Вибрационные технологии, основанные на управлении колебательными процессами, активно применяются в задачах транспортировки, сепарации, упрочнения и динамических испытаний, где требуются точные методы контроля резонансных режимов и подавления паразитных вибраций [6-9].

Анализ существующих исследований, включая работы И.И. Быховского [10], Я.Г. Пановко [11] и Л.А. Вайсберга [12], показывает, что традиционные подходы к проектированию вибрационных машин фокусируются на обеспечении энергоэффективности за счет резонансных режимов, однако игнорируют вопросы динамического гашения колебаний и минимизации воздействия на фундамент. Работы Л.А. Вайсберга [12] и М.В. Хвингия [13], хотя и систематизируют принципы проектирования вибрационных технологических машин, опираются на эмпирические методы, не имеющие единой

методологической основы. Ряд работ посвящен развитию представлений о формировании динамических эффектов, связанных особенностями режимов резонанса и антирезонанса, режимами синхронизации, но не дают детального представления об особенностях формирования о режимах одновременного динамического гашения колебаний по двум координатам в точках установки вибрационных возбудителей колебаний [14-19]. Школа С.В. Елисеева внесла значительный вклад в развитие методов вибрационного гашения колебаний [20-24], однако применение методов к системам с несколькими вибровозбудителями остаётся недостаточно изученным.

Особую сложность представляет моделирование взаимодействия вибрационных стендов с испытательными образцами, где требуется одновременное гашение колебаний в нескольких точках. Как показано в работе [25], использование одного вибровозбудителя в режиме динамического гашения колебаний позволяет снизить амплитуды колебаний вибратора, однако для сложных систем с несколькими степенями свободы необходимы более совершенные подходы. Существующие модели с конечным числом степеней свободы, несмотря на их практическую ценность, не учитывают режимы одновременного гашения колебаний по нескольким координатам, что ограничивает их применимость для испытаний длинномерных конструкций.

Статья посвящается разработке математической модели вибрационного испытательного стенда с двумя вибровозбудителями, обеспечивающей формирование режимов одновременного динамического гашения колебаний по двум координатам, при условии, что вибрационные возбудители находятся в режимах антирезонанса, а испытательный образец выполняет роль гасителя колебаний.

Основные положения. Постановка задачи.

Рассматривается механическая колебательная система, образованная совокупностью твердых тел, совершающих упругие колебания в условиях связанных силовых возмущений (рисунок 1).

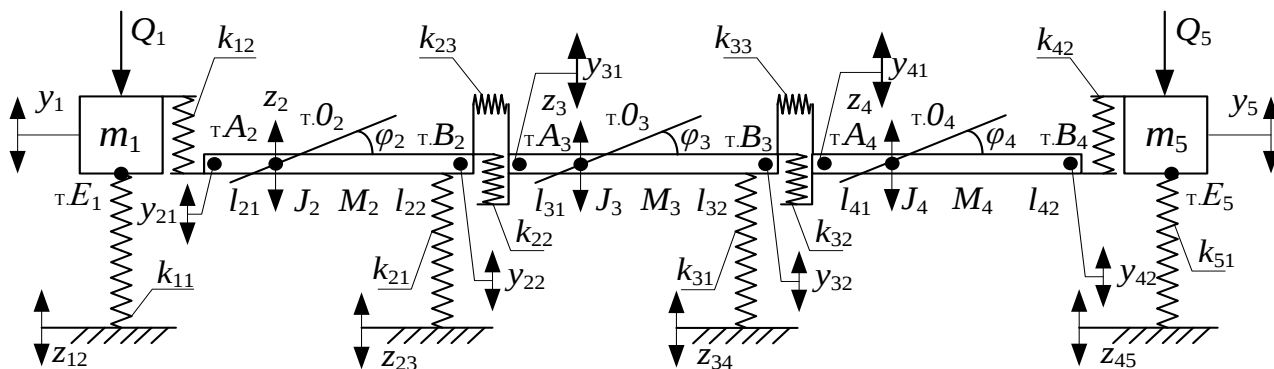


Рисунок 1 - Испытательный стенд с двумя вибрационным возбудителями. 1 - кинематическая схема вибрационного стенда; 2 - m_1, m_5 - сосредоточенные массы, M_2, M_3, M_4 - массы твердых тел

Система образована двумя сосредоточенными массами m_1, m_5 , отображающими шарнирные держатели с установленными на них вибровозбудителями, и тремя твердыми телами A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 с массами M_2, M_3, M_4 и моментами инерции J_2, J_3, J_4 соответственно, отображающими испытательный образец. Система твердых тел установлена на опорные поверхности посредством упругих элементов $k_{11}, k_{21}, k_{31}, k_{51}$. Соединение системы твердых тел, отображающих испытательный образец, с сосредоточенными массами, отображающими шарнирные держатели, представлено упругими элементами k_{12} и k_{42} . Характеристики жесткости испытательного образца представлены упругими элементами k_{22} и k_{32}, k_{23}, k_{33} .

Воздействие вибровозбудителей представлено двумя внешними гармоническими силами Q_1 и Q_5 , приложенными соответственно в точках E_1 и E_5 сосредоточенных масс m_1 и m_5 . Возможность функциональной связи между амплитудами силовых возмущений стороны вибраторов отображается коэффициентом связности γ , положительные значения которого определяют отношения амплитуд синфазных гармонических колебаний, а его отрицательные значения определяют отношение амплитуд гармонических колебаний находящихся в противофазе.

Внешние возмущения, приложенные в точках E_1 и E_5 , приводят к реализации различных колебательных форм образца $A_2B_2A_3B_3A_4B_4$, зависящих от частоты и связности внешних возмущений.

Задача заключается в разработке метода определения коэффициентов связности и частот внешних возмущений, обеспечивающих режимы динамического гашения колебаний в точках установки вибрационных возбудителей, с учетом возможности реализации режимов одновременного динамического гашения, рассматриваемых в рамках модели в виде линейной механической колебательной системы с сосредоточенными параметрами.

Математическая модель вибрационного стенда

Расчетная схема (рисунок 1) может быть использована для семейства вибрационных испытательных стендов. Для построения математических моделей в виде системы дифференциальных уравнений в виде уравнений Лагранжа второго рода запишем выражения для кинетической и потенциальной энергии:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_5\dot{y}_5^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{z}_2^2 + \frac{1}{2}M_3\dot{z}_3^2 + \frac{1}{2}M_4\dot{z}_4^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2}J_4\dot{\varphi}_4^2, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2}k_{11}y_1^2 + \frac{1}{2}k_{21}y_{22}^2 + \frac{1}{2}k_{31}y_{32}^2 + \frac{1}{2}k_{51}y_5^2 + \frac{1}{2}k_{12}(y_1 - y_{21})^2 + \\ & + \frac{1}{2}k_{22}(y_{31} - y_{22})^2 + \frac{1}{2}k_{32}(y_{41} - y_{32})^2 + \frac{1}{2}k_{42}(y_5 - y_{42})^2 + \\ & + \frac{1}{2}k_{23}r^2(\varphi_3 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2}k_{33}r^2(\varphi_4 - \varphi_3)^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где $y_1, y_{21}, y_{22}, y_{31}, y_{32}, y_{41}, y_{42}$ - совокупность обобщенных координат, отображающих вертикальные смещения точек твердых тел относительно положения статического равновесия. Второй системой координат может быть выбрана совокупность вертикальных смещений y_1, y_5, z_2, z_3, z_4 центров масс и углов координат $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Координаты $\varphi_i, z_i, i=2,3,4$ и $y_{ij}, i=2, 3, 4, j=1,2$ связаны соотношениями:

$$\begin{cases} y_{i1} = z_i - \varphi_i l_{i1} \\ y_{i2} = z_i + \varphi_i l_{i2} \end{cases}, \quad (3)$$

где $i = 2,3,4$.

Обратная зависимость имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi_i = c_i(y_{i2} - y_{i1}) \\ z_i = a_i y_{i1} + b_i y_{i2} \end{cases}, \quad (4)$$

$$\text{где } c_i = \frac{1}{l_{i1} + l_{i2}}, a_i = \frac{l_{i2}}{l_{i1} + l_{i2}}, b_i = \frac{l_{i1}}{l_{i1} + l_{i2}}.$$

В матричном представлении кинетическая энергия T может быть представлена в виде:

$$T = \frac{1}{2} \langle \tau \cdot \vec{y}, \vec{y} \rangle, \quad (5)$$

где

$$\tau = \theta^* \mu \theta + \psi^* M \psi + \varphi^* J \varphi, \quad (6)$$

$$\mu = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} M_2 & 0 & 0 \\ 0 & M_3 & 0 \\ 0 & 0 & M_4 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} J_2 & 0 & 0 \\ 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & J_4 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -c_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_4 & c_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & b_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$y = (y_1 \quad y_{21} \quad y_{22} \quad y_{31} \quad y_{32} \quad y_{41} \quad y_{42} \quad y_5)^*. \quad (11)$$

Соответственно, потенциальная энергия может быть представлена в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \langle \pi_0 \cdot \vec{y}, \vec{y} \rangle, \quad (12)$$

где

$$\pi_0 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3, \quad (13)$$

$$\pi_{(1)} = U_{(1)}^* K_{(1)} U_{(1)} - U_{(2)}^* K_{(1)} U_{(1)} - U_{(1)}^* K_{(1)} U_{(2)} + U_{(2)}^* K_{(1)} U_{(2)}, \quad (14)$$

$$\pi_{(2)} = U_{(3)}^* K_{(2)} U_{(3)}, \quad (15)$$

$$\pi_{(3)} = r^2 (\Phi_{(34)}^* K_{(3)} \Phi_{(34)} - \Phi_{(23)}^* K_{(3)} \Phi_{(34)} - \Phi_{(34)}^* K_{(3)} \Phi_{(23)} + \Phi_{(23)}^* K_{(3)} \Phi_{(23)}), \quad (16)$$

$$\Phi_{(34)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -c_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_4 & c_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\Phi_{(23)} = \begin{pmatrix} 0 & -c_2 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_3 & -c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$U_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$U_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$U_{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$K_{(1)} = \begin{pmatrix} k_{12} & & & \\ & k_{22} & & \\ & & k_{32} & \\ & & & k_{42} \end{pmatrix}, K_{(2)} = \begin{pmatrix} k_{11} & & & \\ & k_{21} & & \\ & & k_{31} & \\ & & & k_{51} \end{pmatrix}, K_{(3)} = \begin{pmatrix} k_{23} & \\ & k_{33} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

На основе матричных представлений кинетической и потенциальной энергии системы дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода может быть представлена в виде:

$$\tau \cdot \ddot{\vec{y}} + \pi \cdot \dot{\vec{y}} = \vec{Q}, \quad (23)$$

где

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \gamma \vec{Q}_5, \quad (24)$$

$$\vec{Q}_1 = (Q_0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^*, \quad (25)$$

$$\vec{Q}_5 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ Q_0)^*. \quad (26)$$

Система дифференциальных уравнений (23) может быть преобразована под действием интегральных преобразований Лапласа в систему алгебраических уравнений с учетом нулевых начальных условий:

$$(\tau \cdot p^2 + \pi) \cdot \bar{y} = \bar{Q}, \quad (27)$$

где $p=j\omega, j^2=-1$ [25].

Системе (27) может быть представлена в виде обобщенной (матричной) структурной схемы системы автоматического управления (рисунок 2).

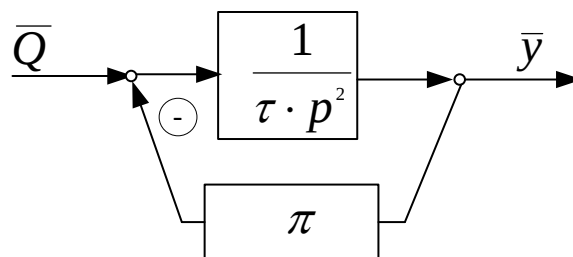


Рисунок 2 - Обобщенная структурная схема механической колебательной системы

На основе схемы (рисунке 2) строятся передаточные функции системы:

$$W_i = \frac{\bar{y}_i}{\bar{Q}_0}, i=1...8, \quad (28)$$

в физическом смысле отображающая представления о динамической податливости системы. Соответствующие передаточные функции межпарциальных связей, отображающие особенности рычажных связей в системе, имеют представление:

$$W_{ik} = \frac{\bar{y}_i}{\bar{y}_k}. \quad (29)$$

Амплитудно-частотные характеристики передаточных функций W_i и W_{ik} , $k=1..8$, позволяют оценивать динамические состояния в зависимости от частот и коэффициентов связности внешних силовых возмущений γ .

Исходная механическая колебательная система, обладающая восемью степенями свободы, может быть модифицирована с учетом связей, отображающих особенности испытательного образца и условий его соединения вибровозбудителями. В частности, можно полагать, что испытательный образец составлен трех твердых тел, допускающих только относительные угловые относительные колебания отдельных фрагментов ($k_{22} \rightarrow \infty$ и $k_{32} \rightarrow \infty$). Установка упругого образца в шарнирные держатели может быть достаточно жесткой, поэтому можно полагать, что $k_{12} = \infty$ и $k_{42} = \infty$. Подобная система условий может быть реализована с помощью сочленений в поступательных формах движения в соединениях [27, 23].

Сочленения совокупности относительных поступательных колебаний системы

Учёт особенностей взаимодействия элементов может быть реализован посредством сочленения точек твёрдых тел при их относительных поступательных движениях, в предположении, что жесткость соединительных элементов между точками достигает предельных бесконечных значений. Результатом сочленения совокупности соединений является механическая колебательная система с четырьмя степенями свободы (рисунок 3).

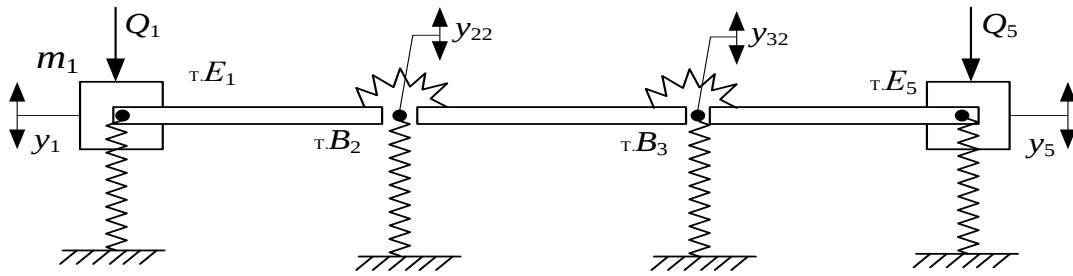


Рисунок 3 - Механическая колебательная система с учетом сочленений

$$k_{12} \rightarrow \infty, k_{22} \rightarrow \infty, k_{32} \rightarrow \infty, k_{42} \rightarrow \infty$$

Математическая модель сочлененной системы может быть получена на основе неэквивалентного преобразования исходной механической колебательной системы (рис.1). Сочленения $k_{12} \rightarrow \infty, k_{22} \rightarrow \infty, k_{32} \rightarrow \infty, k_{42} \rightarrow \infty$ приводят к приравнению совокупности координат $y_1=y_{21}, y_{22}=y_{31}, y_{32}=y_{41}, y_{42}=y_5$. Соответствующая система алгебраических уравнений с восьмого порядка в результате сочленений принимает вид системы четвертого порядка:

$$(V^* \cdot \tau \cdot V \cdot p^2 + V^* \cdot \pi \cdot V) \cdot \bar{\xi} = V^* \bar{Q}, \quad (30)$$

где

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$\bar{\xi} = (\bar{y}_1, \bar{y}_{22}, \bar{y}_{32}, \bar{y}_5)^*, \quad (32)$$

$\bar{\xi}$ - совокупность координат сочленений системы, V - матрица перехода.

Система алгебраических уравнений (30) может быть эквивалентным образом представлена обобщенной структурной схемой (рисунок 4).

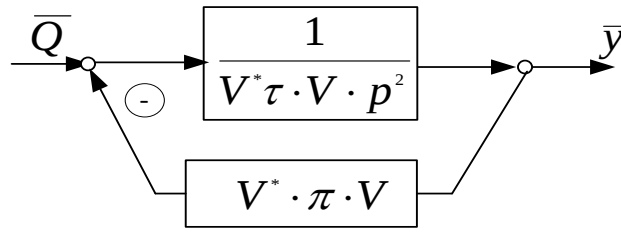


Рисунок 4 - Обобщенная структурная схема сочлененной механической колебательной системы

Система алгебраических уравнений (30) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

где коэффициенты в зависимости от параметра p представлены в таблице 1.

Таблица 1

Значение коэффициентов матрицы

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
$(m_1 + J_2 c_2^2 + M_2 a_2^2) p^2 + r^2 c_2^2 k_{23} + k_{11}$	$(-J_2 c_2^2 + M_2 a_2 b_2) p^2 - r^2 c_2^2 k_{23} - r^2 c_2 c_3 k_{23}$	$r^2 c_2 c_3 k_{23}$	0
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
$(-J_2 c_2^2 + M_2 a_2 b_2) p^2 - r^2 c_2^2 k_{23} - r^2 c_2 c_3 k_{23}$	$(J_2 c_2^2 + M_2 b_2^2 + J_3 c_3^2 + M_3 a_3^2) p^2 + k_{21} + r^2 c_2^2 k_{23} + 2 r^2 c_2 c_3 k_{23} + r^2 c_3^2 k_{23} + r^2 c_3^2 k_{33}$	$(-J_3 c_3^2 + M_3 a_3 b_3) p^2 - r^2 c_2 c_3 k_{23} - r^2 c_3 c_4 k_{33} - r^2 c_3^2 (k_{23} + k_{33})$	$r^2 c_3 c_4 k_{33}$
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
$r^2 c_2 c_3 k_{23}$	$(-J_3 c_3^2 + M_3 a_3 b_3) p^2 - r^2 c_2 c_3 k_{23} - r^2 c_3 c_4 k_{33} - r^2 c_3^2 (k_{23} + k_{33})$	$(J_3 c_3^2 + M_3 b_3^2 + J_4 c_4^2 + M_4 a_4^2) p^2 + k_{31} + r^2 c_3^2 k_{23} + r^2 c_3^2 k_{33} + 2 r^2 c_3 c_4 k_{33} + r^2 c_4^2 k_{33}$	$(-J_4 c_4^2 + M_4 a_4 b_4) p^2 - r^2 c_3 c_4 k_{33} - r^2 c_4^2 k_{33}$
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
0	$r^2 c_3 c_4 k_{33}$	$(-J_4 c_4^2 + M_4 a_4 b_4) p^2 - r^2 c_3 c_4 k_{33} - r^2 c_4^2 k_{33}$	$(m_5 + J_4 c_4^2 + M_4 a_4^2) p^2 + r^2 c_4^2 k_{33} + k_{51}$
Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
Q_0	0	0	γQ_0

Соответствующая детализированная структурная схема имеет вид (рисунок

5).

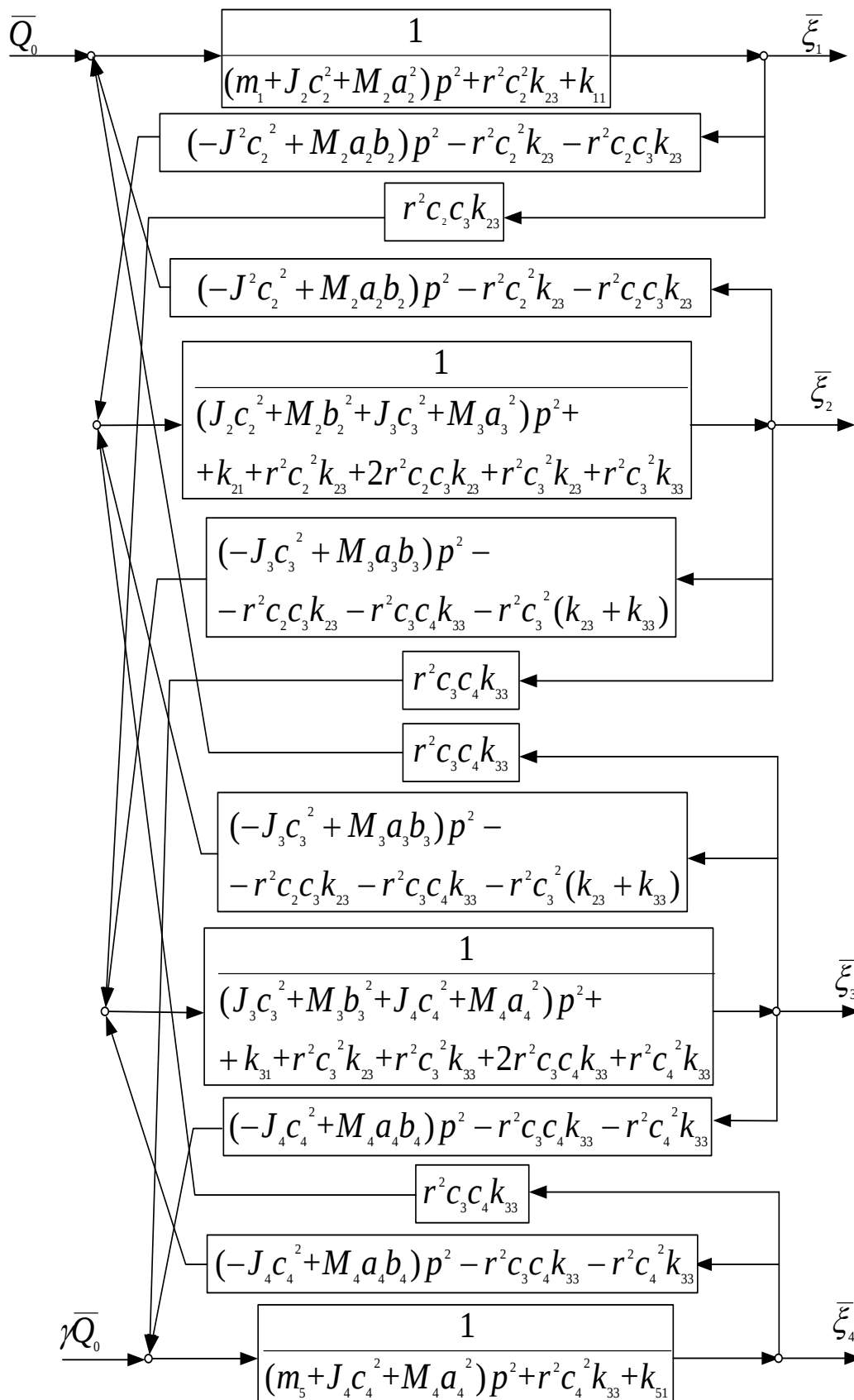


Рисунок 5 - Структурная схема сочлененной системы

Структурная схема позволяет построить передаточные функции системы W_i и передаточные функции межпарциальных связей W_{ik} :

$$W_i = \frac{\bar{\xi}_1}{Q_0}, \quad (34) \quad W_{ik} = \frac{\bar{\xi}_1}{\bar{\xi}_k}. \quad (35)$$

Амплитудно-частотные характеристики передаточных функций W_i ($p=j\omega$) в физическом смысле представляют собой динамические податливости, зависящие от частоты внешнего силового возмущения. В свою очередь, амплитудно-частотные характеристики межпарциальных связей в физическом смысле отображают рычажные связи, что позволяет оценивать особенности реализации форм вынужденных колебаний в зависимости от параметров внешних силовых возмущений.

Динамические особенности рассматриваемой системы определяются совокупностью собственных и парциальных частот, а также совокупностью частот динамического гашения колебаний. К параметрам системы, существенным образом, определяющим динамические состояния системы, относятся массы, моменты инерции, жесткости упругих элементов и связность внешних силовых возмущений. Массоинерционные коэффициенты и жесткости определяют собственные и парциальный частоты системы, которые не зависят от связности внешних возмущений.

В свою очередь, среди параметров системы именно связность внешних возмущений существенным образом определяет частоты динамического гашения колебаний координат сосредоточенных масс или фиксированных точек твердых тел. Варьирование коэффициентов связности внешних возмущений позволяет изменять значения частот динамического гашения колебаний

относительно собственных или парциальных частот, что может приводить к совпадению частот динамического гашения колебаний координат с собственными частотами. Предельное сближение частоты динамического гашения колебаний координаты, выбранной в качестве объекта оценки, с одной из собственных частот системы является методом изменения актуального числа степеней свободы системы [24].

Режимы динамического гашения колебаний в зависимости от связности внешних силовых возмущений

Под режимами динамического гашения колебаний понимаются вынужденные колебания системы на частоте, обеспечивающей реализацию нулевой амплитуды колебания координаты объекта, динамическое состояние которого оценивается, в предположении, что возмущение системы осуществляется при условии, что только одна из обобщенных сил принимает ненулевое значение. В случае связанных внешних возмущений обе силы могут принимать ненулевые значения и рассматриваемый режим «обнуления» координаты формально не является режимом динамического гашения колебаний, хотя и обладает рядом схожих признаков. В рамках исследования использование термина динамического гашения колебаний распространяется на оба варианта возмущения системы.

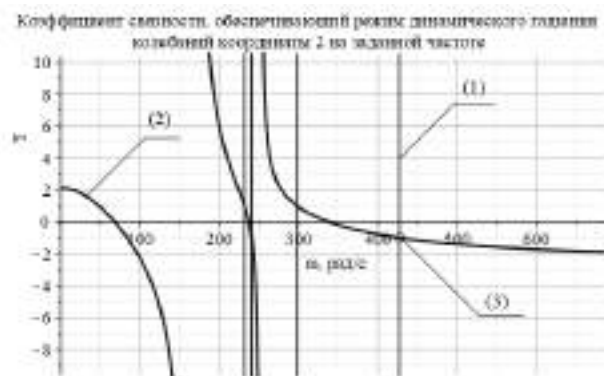
Частоты динамического гашения колебаний координат могут быть определены из условий равенства нулю числителей соответствующих амплитудно-частотных характеристик. В частности, подобные условия позволяют установить аналитическую зависимость коэффициента связности от частоты динамического гашения колебаний. Построение аналитической

зависимости возможно в силу линейности используемых выражений по коэффициенту связности. На рис.6. представлены графики частот динамического гашения колебаний координат $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ в зависимости от коэффициента связности внешних возмущений γ . Частоты динамического гашения координат для фиксированного коэффициента γ определяются из условий равенства нулю числителя соответствующей передаточной функции (34).

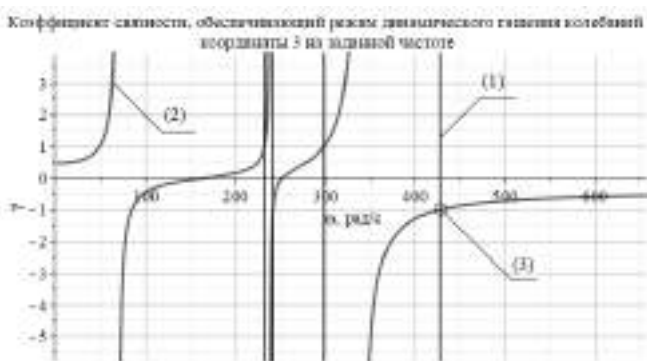
Необходимо отметить, что не все значения частот, соответствующие фиксированному значению коэффициента связности γ являются частотами, обеспечивающими нулевые амплитуды колебаний выбранной координаты системы. Частотами динамического гашения колебаний служат только те, которые не совпадают с собственными частотами системы. Предельное сближение частот динамического гашения колебаний с собственными частотами системы, вызванное варьированием коэффициента связности γ , приводит к необходимости разрешения неопределенности значения амплитудно-частотной характеристики в виде дробно-рационального выражения, числитель и знаменатель которого стремятся к нулю. Разрешение неопределенности отображается во взаимном устранении как режима динамического гашения колебания, проявляющегося в обнулении амплитуды колебания, так и эффекта резонанса, проявляющегося в неограниченном возрастании амплитуд колебания системы (рисунок 6).



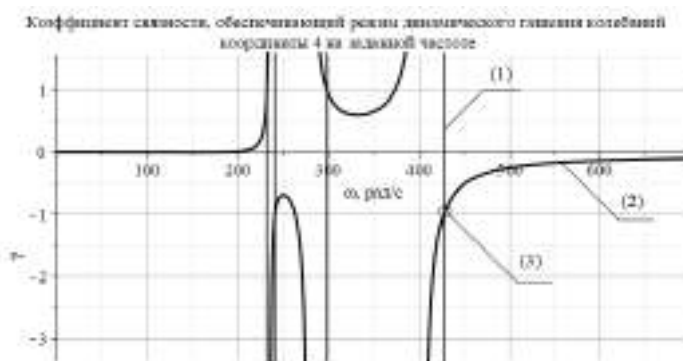
а



б



в

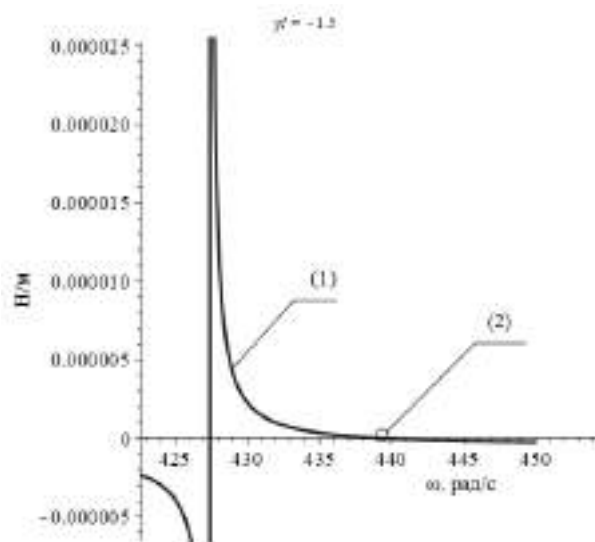


г

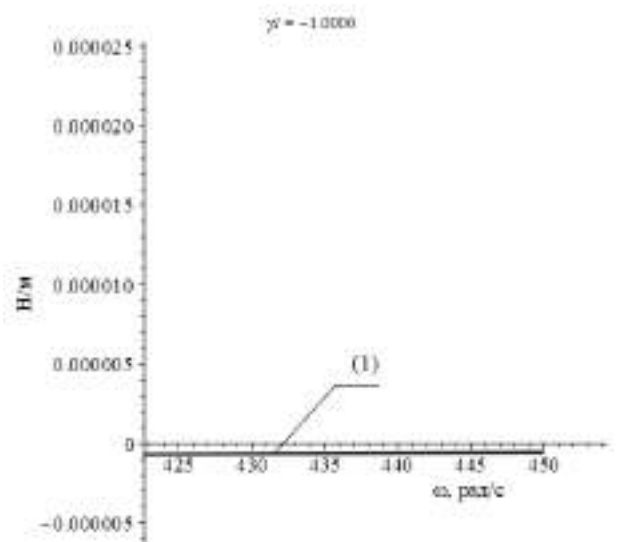
Рисунок 6 - Частоты динамического гашения колебаний в зависимости от γ :

(а) - координаты ξ_1 , (б) - ξ_2 , (в) - ξ_3 , (г) - ξ_4

В частности, амплитудно-частотные характеристики для коэффициента связности $\gamma = \gamma_1$, отображающие режим динамического гашения колебаний по координате ξ_1 при условии несовпадения с собственной частотой, имеют вид (рисунок 7а). В свою очередь, если реализуется предельное сближение частот динамического гашения колебаний с одной из частот собственных колебаний, то реализуется так называемый режим «ложного» динамического гашения колебаний, проявляющийся во взаимном устранении эффектов динамического гашения колебаний и резонанса (рисунок 7б), но при этом реализуется колебание на конечной ненулевой амплитуде.



a



б

Рисунок 7 - Амплитудно-частотные характеристики в зависимости от коэффициента связности γ . (а) - режим динамического гашения колебаний координаты 1, (б) - режим ложного динамического гашения колебаний

Соотнесение графиков, отображающих отдельные функции зависимости коэффициента связности от частот динамического гашения колебаний, могут быть использованы для определения режимов одновременного динамического гашения колебаний по двум координатам.

Определение режимов одновременного динамического гашения колебаний по двум координатам

Совмещение графиков частот динамического гашения колебаний координат ξ_1 и ξ_4 позволяет определять режимы одновременного динамического гашения колебаний в предположении, что данные частоты не совпадают с частотами собственных колебаний. В частности, на рисунке 8 представлена совокупность графиков, позволяющая определить частоты режимов динамического гашения колебаний; 1 - зависимость частоты динамического гашения координаты ξ_1 от коэффициента связности γ ; 4 - зависимость частоты динамического гашения координаты ξ_4 и коэффициента связности γ ; 2 - режимы одновременного

динамического гашения колебаний координат ξ_1, ξ_4 ; 3 - режим «ложного» одновременного динамического гашения колебаний координат ξ_1, ξ_4 ; 5, 6, 7, 8 - собственные частоты системы.

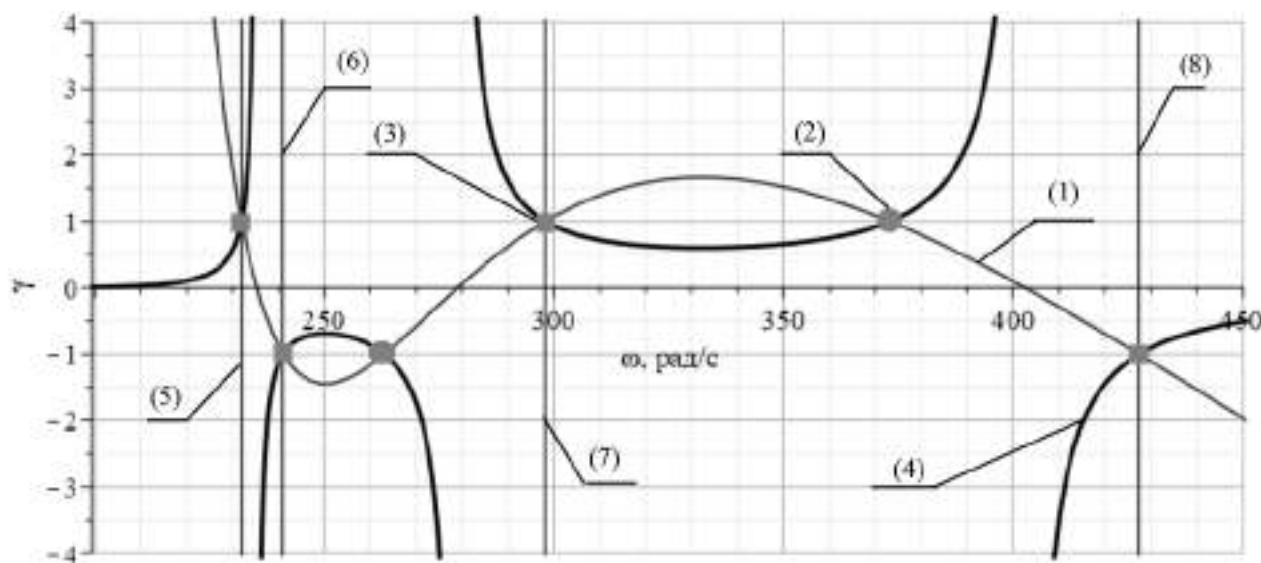
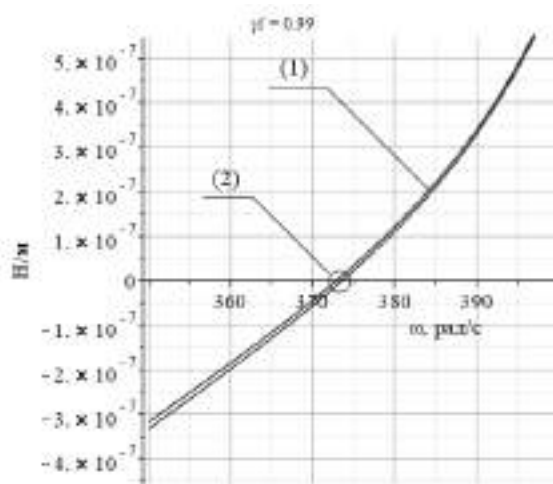
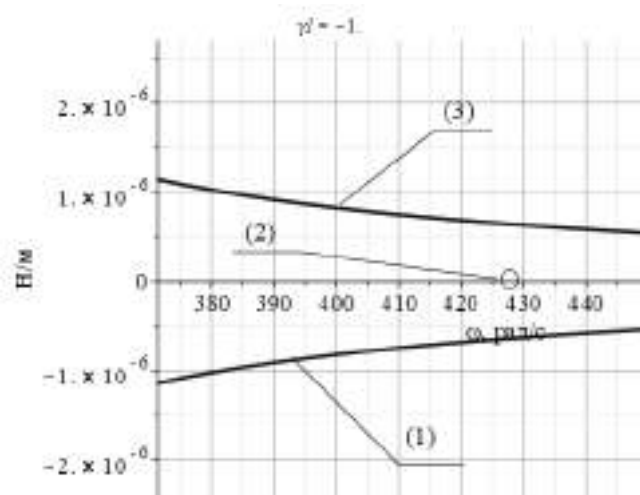


Рисунок 8 - Режимы одновременного динамического гашения колебаний по двум координатам ξ_1 и ξ_4

На рисунке 9а представлены амплитудно-частотные характеристики, которые отображают реализацию режимов одновременного динамического гашения колебаний по двум координатам: 1 - амплитудно-частотные характеристики, принимающие нулевые значения на частоте одновременного динамического гашения колебаний, 2 - частота одновременного динамического гашения колебаний В свою очередь, для критического значения коэффициента связности $\gamma = \gamma_2$ предельное сближение частот динамического гашения колебаний для двух координат к одной из собственных частот не обеспечивают ни обнуления, ни роста амплитуд колебаний соответствующих координат (рисунок 9б) : 1 и 3 - предельные амплитудно-частотные характеристики не обнуляются в предельной частоте для частот динамического гашения колебаний, совпадающей с собственной частотой, 2 - собственная частота.



а



б

Рисунок 9 - Амплитудно-частотные характеристики. (а) - режим одновременного динамического гашения колебаний по двум координатам, (б) - режим «ложного» динамического гашения колебаний

На рисунке 10 представлены амплитудно-частотные характеристики (линии 1, 4), которые соответствуют предельному значению коэффициента связности γ , для которого частоты динамического гашения колебаний одиночных координат ξ_1 и ξ_4 , совпадают друг с другом и не равны ни одной из собственных частот системы.

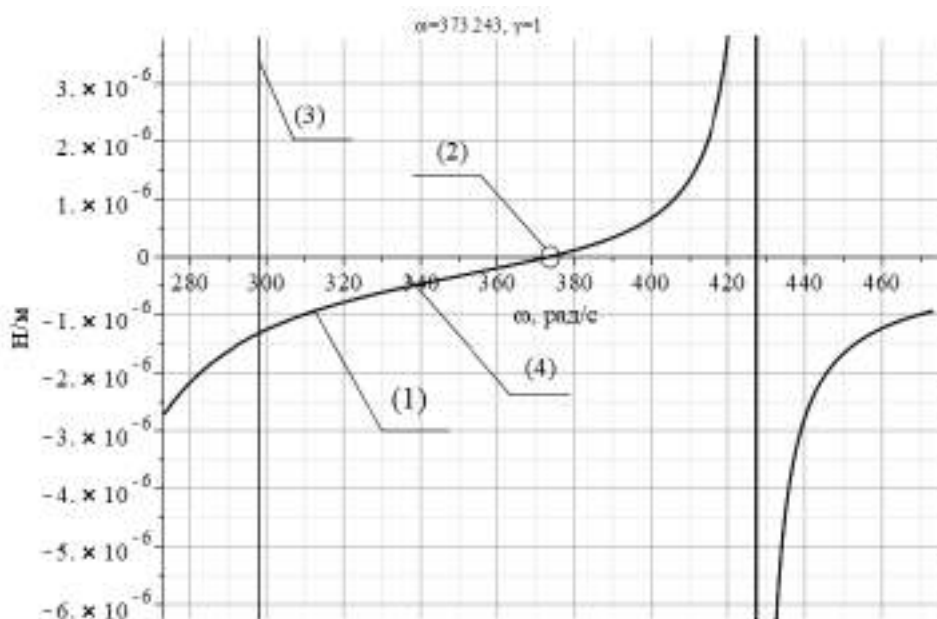


Рисунок 10 - Амплитудно-частотные характеристики, обеспечивающие одновременное динамическое гашение колебаний по двум координатам на частоте, отличной от собственной частоты

На рисунке 11 представлены две амплитудно-частотные характеристики, соответствующие режиму динамического гашения колебаний по двум координатам ξ_1 , ξ_4 , который реализуется для коэффициента связности $\gamma=-1$ силовых возмущений. Необходимо отметить, что для критического значения $\gamma=-1$ соответствующие амплитудно-частотные характеристики отображают только два резонанса вместо четырех.

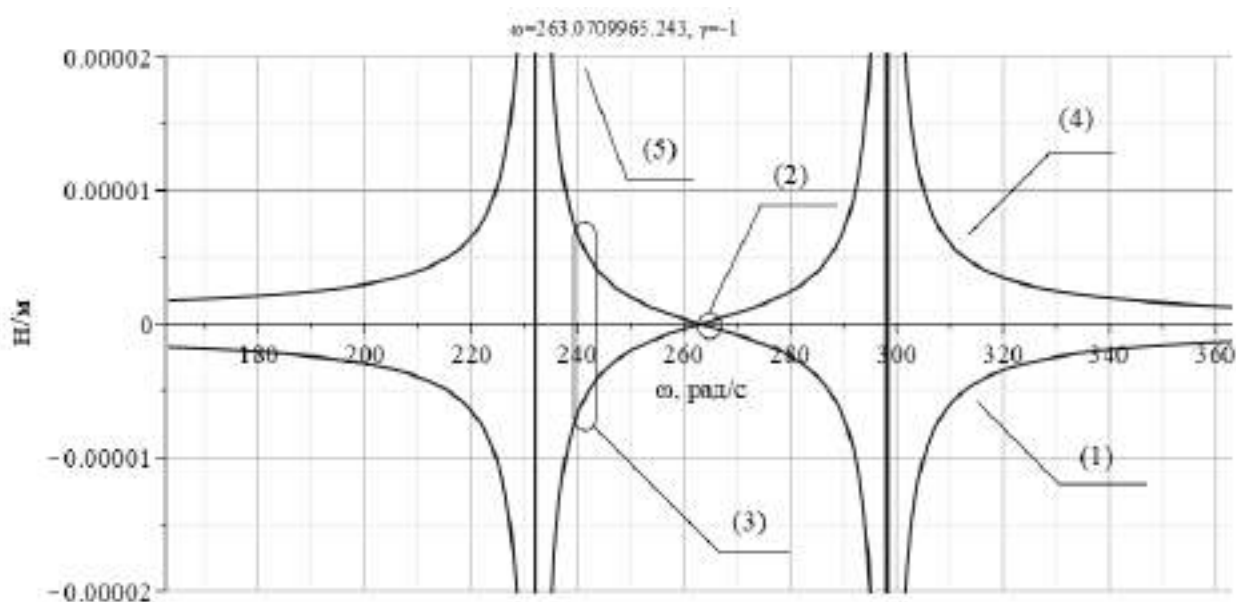


Рисунок 11 - Определение режима динамического гашения колебаний по координатам ξ_1 , ξ_4 .

Реализация формы колебаний на частоте динамического гашения колебаний $\omega = 373$ рад/с в зависимости от коэффициента связности γ позволяет определять форму колебаний (рисунок 12). В частности, для $\gamma=1$ координаты ξ_1 , ξ_4 проходят через ноль, что означает, что реализуется режим динамического гашения колебаний одновременно по двум координатам ξ_1 , ξ_4 (точка 6).

В свою очередь, значения координат ξ_2 , ξ_3 (линии 2, 3, рис.12) для коэффициента связности $\gamma=1$ совпадают (точка 5) и с учетом нулевых значений ξ_1 , ξ_4 (точка 6) определяет форму колебаний на частоте 373 рад/с.

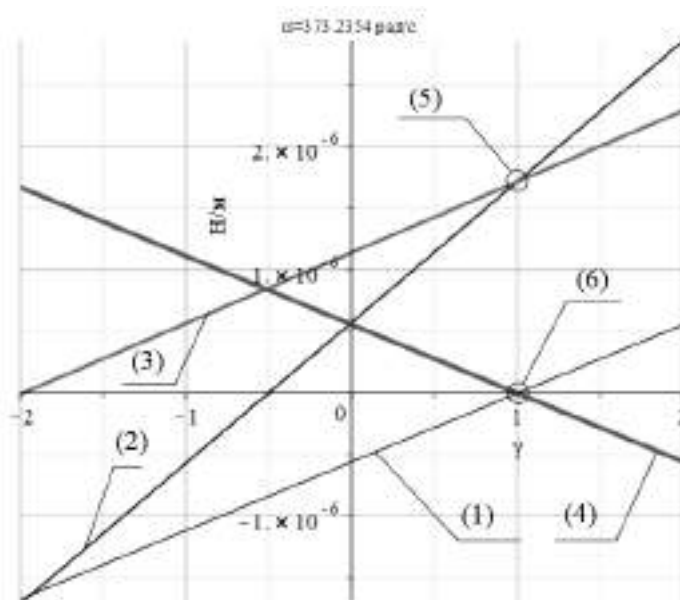


Рисунок 12 - Реализация формы колебаний на частоте 373 рад/с.

Дополнительно, на частоте 263 рад/с зависимость форм колебаний представлена на рис.13 показывает, что если коэффициента $\gamma=-1$, то реализуется «вторая» форма колебаний по координатам ξ_2 , ξ_3 (точки 6,7).

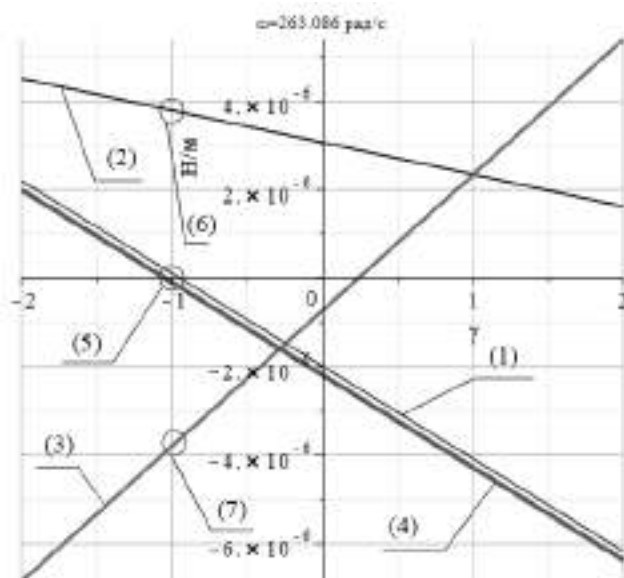


Рисунок 13 - Формы колебаний на частоте $\omega = 263$ рад/с в зависимости от коэффициента связности γ .

На рисунке 13 – 1 и 4 – амплитудно-частотные характеристики передаточных функций W_1, W_4 , 2, 3 – значения амплитудно-частотных характеристик передаточных функций W_2, W_3 , 5 – точка параметров одновременного динамического гашения колебаний по координатам ξ_1, ξ_4 ; 6, 7 – точки, определяющие формы колебаний координат ξ_2, ξ_3

Режимы критического сближения частот динамического гашения колебаний с частотами собственных колебаний

Наравне с режимами динамического гашения колебаний одновременно по двум координатам, с точки зрения системного подхода интерес вызывает режимы колебаний, реализующиеся на критических частотах, являющихся результатом предельного сближения частот динамического гашения колебаний с собственными частотами.

На таких критических частотах происходит взаимоустранение эффектов динамического гашения колебаний, так как амплитуды колебаний не равны нулю, и эффектов резонанса, так как амплитуды колебаний на данных частотах имеют конечные значения. Интерес представляют формы подобных конечных колебаний, реализующихся на собственных частотах и вызванные силовыми возмущениями с определенными коэффициентами связности.

На рис. 14 представлены характерные функции связи частот динамического гашения колебаний соответствующих одиночных координат $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ и коэффициента связности γ силовых возмущений Q_1, Q_5 .

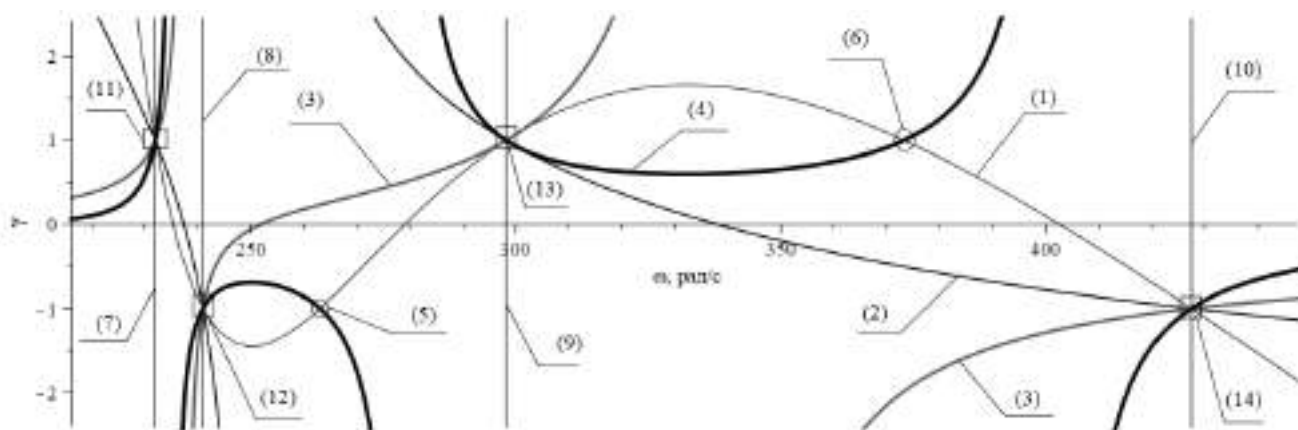


Рисунок 14 - Соотношение частот динамического гашения колебаний координат $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ и коэффициента связности γ

На рисунке 14 показано, что кривые (линии 1, 2, 3, 4), отображающие связь режимов динамического гашения колебаний одиночных координат пересекаются в точках (тт. 11, 12, 13, 14), ординаты которых равны собственным частотам системы.

Ранее показано, что подобным точкам, которые определяют собственные частоты системы и коэффициент связности внешних возмущений соответствуют режимы конечных ненулевых амплитуд колебаний. Для каждой собственной частоты и соответствующего коэффициента связности γ , могут быть определены формы колебаний испытуемого образца.

В частности, на рисунке 15 представлены графики значений амплитудно-частотных характеристик передаточных функций податливостей координат $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ в зависимости от коэффициента связности γ , для точки 1 на рисунке 15 с собственной частотой $\omega=231$ рад/с и коэффициентом связности $\gamma=1$.

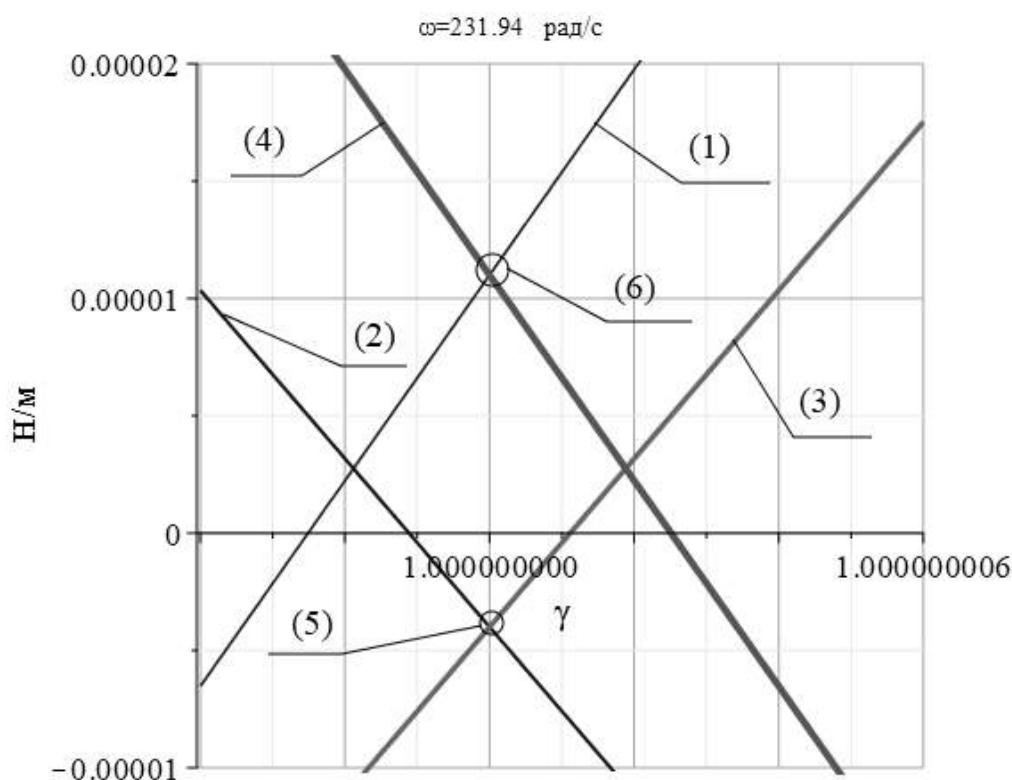


Рисунок 15 - Определение формы колебаний критического режима для собственной частоты 231 рад/с

На основе рисунка 15 можно показать, что форма колебаний составляет (1, -0.36, -0.36, 1) для которой движение средних точек составляет 36% от крайних точек.

Аналогично можно определить форму колебаний образца для параметров точки (12 на рисунке 14), которая определяется второй собственной частотой, отображенной на рисунке 16.

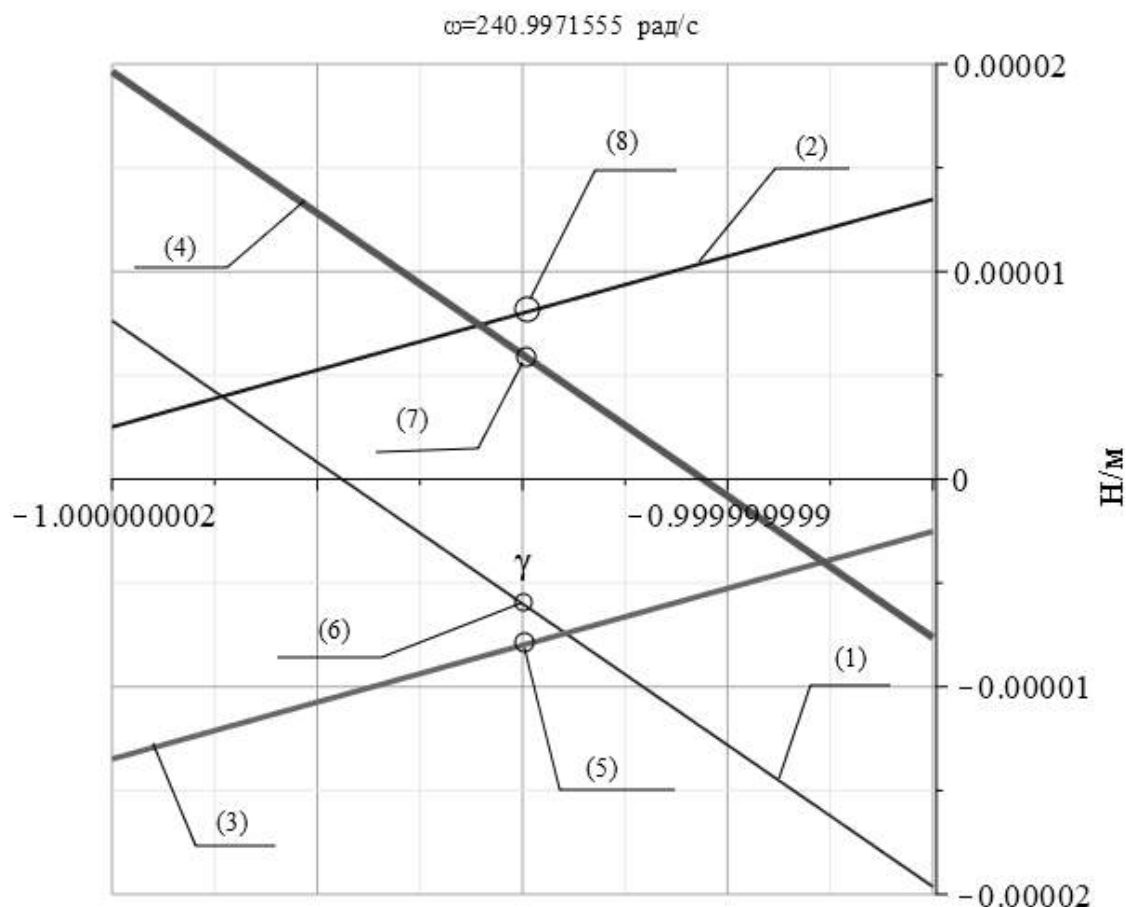


Рисунок 16 - Форма колебаний на частоте $\omega=240$ рад/с. для коэффициента связности $\gamma=-1$

Соответствующая форма колебаний образца может быть представлена в виде $(-1, 1.33, -1.33, 1)$.

Внутренние точки ξ_2, ξ_3 испытываемого образца колеблются в противофазах. Важно отметить, что внутренние точки совершают колебания с большими амплитудами по сравнению с крайними точками ξ_1, ξ_4 , к которым приложены возмущающие воздействия со стороны вибраторов.

На рисунке 17 представлены значения амплитудно-частотных характеристик на частоте $\omega=298$ рад/с для коэффициента $\gamma=1$.

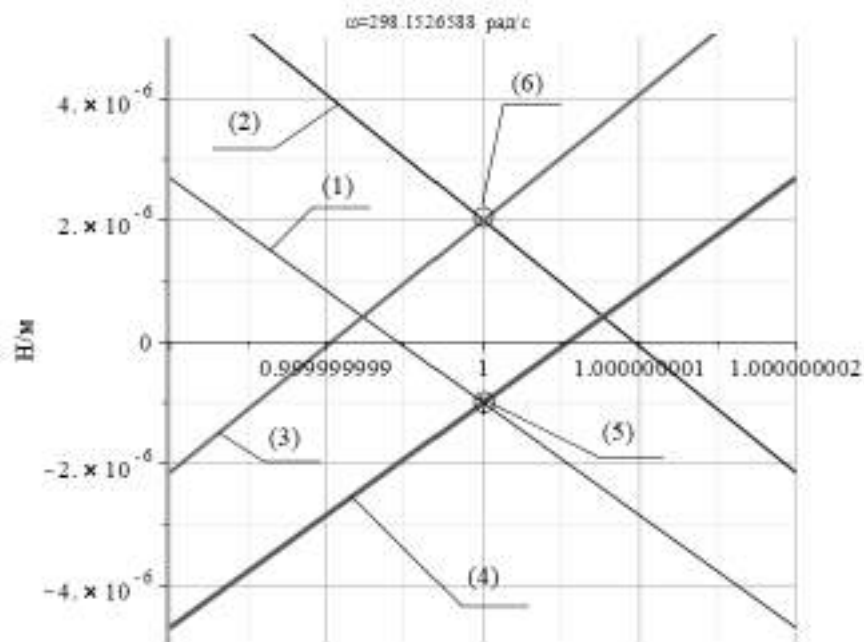


Рисунок 17 - Определение формы конечного критического режима для частот $\omega=298$ рад/с и коэффициента связности силовых возмущений $\gamma=1$

Соответствующая форма колебаний имеет вид $(-1,2,2,-1)$, характерной особенностью которой является тот факт, что средние точки колеблются с амплитудами в два раза превышающими амплитуды колебания крайних точек, к которым приложены силовые возмущения.

На рисунке 18 представлены графики функций, которые позволяют определить форму колебаний образца на частоте $\omega=427$ рад/с, вызванную приложением возмущающего воздействия с коэффициентом связности $\gamma=-1$.

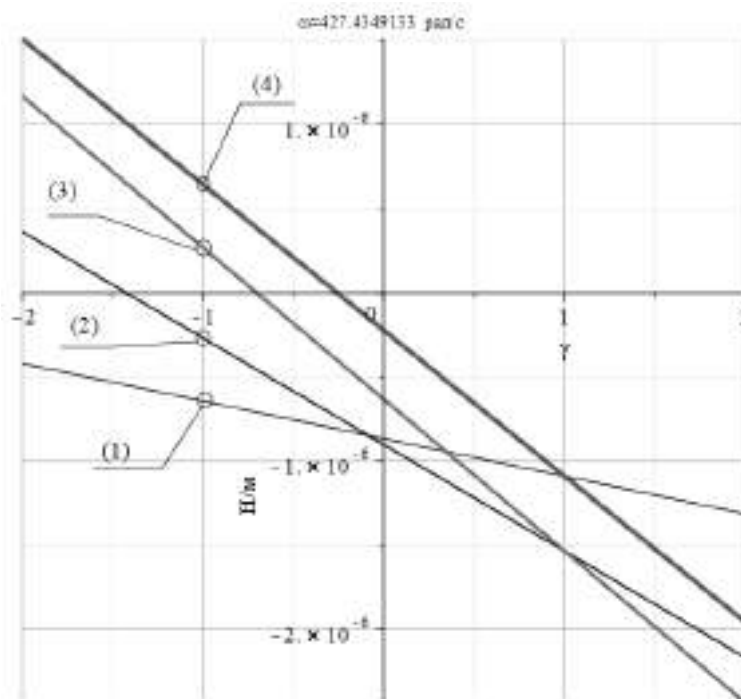


Рисунок 18 - Определение формы колебания на частоте $\omega=427$ рад/с и коэффициента связности силовых возмущений $\gamma=-1$. 1, 2, 3, 4 - точки, значения которых совпадают со значениями амплитудно-частотных характеристик W_1, W_2, W_3, W_4 на соответствующей частоте

Соответствующая форма колебаний имеет представление $(-1, -0.42, 0.42, 1)$. Основная особенность представленной форм колебаний заключается в том, что колебания средних точек меньше амплитуд колебаний крайних точек.

Общая совокупность режимов конечных колебаний

Совокупность рассмотренных форм может быть представлена в сводном виде в таблице 2.

Таблица 2

Формы колебаний характерных частот				
№	Частота, рад/с	Коэффициент, γ	Форма колебаний	Комментарии
1	231	1	$(1, -0.36, -0.36, 1)$	Собств.частота
2	240	-1	$(1, -1.3, -1.3, 1)$	Собств.частота
3	263	-1	$(0, 1, -1, 0)$	Дин. гашение
4	298	1	$(1, -2, -2, 1)$	Собств.частота
5	373	1	$(0, 1, 1, 0)$	Дин. гашение
6	427	-1	$(-1, -0.42, 0.42, 1)$	Собств.частота

Таким образом, в системе может быть реализована совокупность специальных режимов колебаний, связанных с режимами динамического гашения колебаний, зависящих от настроечного параметра - коэффициента γ связности внешних возмущений.

Возможна реализация режимов динамического гашения одновременно по двум координатам на двух различных частотах. Наравне с режимами динамического гашения колебаний могут быть рассмотрены специальные режимы колебаний, реализующиеся на собственных частотах системы, но не обладающие ни признаками резонанса, ни признаками обнуления амплитуд колебаний.

Наглядные детализированные представления о реализации рассматриваемых режимов могут быть получены на основе использования специализированного программного обеспечения моделирования динамики технических объектов [28-30].

Заключение

Авторами рассмотрена проблема оценки динамических состояний технического объекта, связанная с особенностями формирования режимов одновременного гашения колебаний в точках установки вибровозбудителей. В

качестве модельной задачи рассматривается конечномерная модель вибрационного испытательного стенда, с расчетной схемой в виде механической колебательной системы с восемью степенями свободы, совершающей вынужденные движения под действием системы функционально связанных гармонических сил. Механическая колебательная система в результате сочленения в ряде точек сводится к системе с четырьмя степенями свободы. Для полученной системы строятся зависимости частот динамического гашения координат от коэффициента связности внешних возмущений. Совмещение построенных зависимостей для двух координат позволяет определять режимы одновременного динамического гашения колебаний. Наравне с режимами динамического гашения колебаний могут быть определены специфические режимы «ложного» динамического гашения, когда реализуется сближение частоты динамического гашения с одной из собственных частот. Результатом предельного сближения частот, вызванного выбором специальных значений связности внешних возмущений, являются специфические состояния систем, проявляющиеся в уменьшении актуального числа резонансов системы.

Таким образом, в рамках структурного математического моделирования для систем с несколькими степенями свободы разработан подход к оценке, коррекции и формированию динамических состояний механических колебательных систем, находящихся в условиях связанных силовых нагрузений, позволяющий определять режимы одновременного динамического гашения колебаний, специфические режимы предельного сближения частот динамического гашения с собственными частотами, а так же определять формы колебаний, соответствующие данным режимам.

Предложенный подход имеет выраженную практическую значимость для аэрокосмической отрасли, в частности, при проектировании стендов для испытаний лопастей несущих и рулевых винтов вертолетов. Традиционные методы испытаний таких длинномерных и высоконагруженных элементов часто сталкиваются с проблемой нежелательного резонансного воздействия на силовозбудители и элементы крепления, что искажает картину напряженно-деформированного состояния образца и может привести к преждевременному

разрушению как образца, так и оборудования. Реализация режимов одновременного динамического гашения колебаний непосредственно в точках крепления вибровозбудителей позволяет, во-первых, изолировать испытательный стенд от реактивных усилий, минимизируя его влияние на динамику образца, а во-вторых, использовать сам образец в качестве динамического гасителя. Это обеспечивает более чистые условия нагружения, приближенные к реальным эксплуатационным, и позволяет получать более достоверные данные о ресурсе и прочности лопастей. Возможность управления формами колебаний открывает перспективы для создания компактных и энергоэффективных испытательных комплексов нового поколения, критически важных для обеспечения надежности и безопасности полетов.

Полученные результаты имеют потенциал развития методологии, в рамках которой динамические свойства системы определяются взаимосвязью собственных частот и частот динамического гашения. Управление связностью внешних воздействий позволяет целенаправленно формировать спектр отклика системы, реализуя режимы подавления резонансов в заданных точках. Это открывает путь к синтезу вибрационных систем, где целевые динамические эффекты формируются через согласованное изменение параметров конструкции и характеристик внешних воздействий.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Список источников

1. Иориш Ю.И. Виброметрия. М.: Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, 1963. 756 с.

2. Вибрации в технике. Т. 5. Измерения и испытания / Под ред. М.Д. Генкина. М.: Машиностроение, 1981. 496 с.
3. Испытательная техника: справочник. В 2 кн. / Под ред. В.В. Ключева. М.: Машиностроение, 1982. Кн. 1. 528 с.
4. Ганиев Р.Ф. Нелинейные резонансы и катастрофы. Надежность, безопасность и бесшумность. М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2013. 592 с.
5. Миль М.Л., Некрасов А.В., Браверман А.С. Вертолеты. Расчеты и проектирование. В 3 кн. / Под ред. М.Л. Миль. М.: Машиностроение, 1967. Кн. 2: Колебания и динамическая прочность. 424 с.
6. Блехман И.И. Теория вибрационных процессов и устройств. Вибрационная механика и вибрационная техника. СПб.: ИД «Руда и Металлы», 2013. 640 с.
7. Пановко Г.Я. Динамика вибрационных технологических процессов. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных технологий, 2006. 176 с.
8. Копылов Ю.Р. Динамика процессов виброударного упрочнения: монография. Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2011. 568 с.
9. Каминский С.С. Система управления резонансным вибростендом с дебалансным вибровозбудителем для динамических испытаний образцов лопастей вертолета: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.05. Казань: Казанский государственный энергетический институт, 2000. 160 с.
10. Быховский И.И. Основы теории вибрационной техники. М.: Машиностроение, 1969. 320 с.
11. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1971. 252 с.
12. Вайсберг Л.А. Проектирование вибрационных грохотов. М.: Недра, 1986. 200 с.
13. Хвингия М.В. Вибрации пружин. М.: Машиностроение, 1969. 286 с.
14. Федоренко И.Я. Численно-аналитическое исследование движения плода при вибрационной уборке // Вестник Алтайского государственного аграрного университета. 2019. № 4 (174). С. 142–149.

15. Попов И.П. Источники силы и скорости, резонансы и антирезонансы // Труды МАИ: электрон. журнал. 2021. № 117. С. 1–27. DOI 10.34759/trd-2021-117-01.

16. Cieplak G. Influence of vibratory conveyor design parameters on the trough motion and the self-synchronization of inertial vibrators // Open Engineering. 2024. DOI 10.1515/eng-2022-0434.

17. Dynamics features of a resonant vibromachine with self-synchronizing inertial vibroexciters / G. Panovko, O. Grishina, A. Shokhin, S. Eremeykin // Journal of Vibroengineering. 2021. Vol. 23, no. 8. P. 1727–1736. DOI 10.21595/jve.2021.22067.

18. Rumiantsev S.A., Azarov E.B., Shikhov A.M. Non-linear dynamics of vibration transport machine as an electromechanical system // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. 2024. № 1. С. 9–19.

19. Gursky V., Kuzio I., Krot P., Korendiy V. Energy-Saving Inertial Drive for Dual-Frequency Excitation of Vibrating Machines // Energies. 2021. Vol. 14. P. 71. DOI: 10.3390/en14010071. URL: <https://www.mdpi.com/1996-1073/14/1/71> (accessed: 01.07.2024).

20. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов / С.В. Елисеев, Ю.И. Резник, А.П. Хоменко, А.А. Засядко. Иркутск: ИГУ, 2008. 523 с.

21. Елисеев С.В., Хоменко А.П. Динамическое гашение колебаний: концепция обратной связи и структурные методы математического моделирования. Новосибирск: Наука, 2014. 357 с.

22. Елисеев С.В., Нерубенко Г.П. Динамические гасители колебаний. Новосибирск: Наука, 1982. 182 с.

23. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Миронов А.С. Упругие связи в формировании структуры и динамики механических систем в условиях вибрационных нагрузений силовой природы // Труды МАИ: электрон. журнал. 2024. № 137. 38 с. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=181873>.

24. Елисеев А.В., Ситов И.С., Кузнецов Н.К. Формирование динамических эффектов в механических колебательных системах в рамках концепции

обобщенного рычага с учетом дополнительных кинематических связей // Системы. Методы. Технологии. 2024. № 1 (61). С. 10–20.

25. Елисеев С.В., Каимов Е.В., Кинаш Н.Ж. Динамический гаситель колебаний как элемент системы возбуждения вибраций // Решетневские чтения. 2015. Т. 1. С. 456–458.

26. Лурье А.И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 432 с.

27. Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Сочленения звеньев в динамике механических колебательных систем: монография. Иркутск: ИрГУПС, 2012. 156 с.

28. Анищенко Г.А., Молин К.Е. Решение задач динамики вертолета методом конечных элементов с использованием программного комплекса MSC.NASTRAN // Труды МАИ: электрон. журнал. 2011. № 45. 8 с. URL: <https://trudymai.ru/upload/iblock/c5e/reshenie-zadach-dinamiki-vertolyeta-metodom-konechnykh-elementov-s-ispolzovaniem-programmnogo-kompleksa-msc.nastran..pdf>.

29. Князев А.С. Совместное использование авиасимулятора X-PLANE и среды SimInTech для исследования работы авиационных систем // Труды МАИ: электрон. журнал. 2021. № 117. DOI 10.34759/trd-2021-117-15.

30. Попов Е.П., Вережкин А.А., Насонов Ф.А. Исследование физических особенностей авиационных систем с применением математического моделирования на примере системы воздушного охлаждения // Труды МАИ: электрон. журнал. 2021. № 120. DOI 10.34759/trd-2021-120-15.

References

1. Iorish Yu.I. *Vibrometriya* [Vibrometry], Moscow, Gosudarstvennoe nauchno-tekhnicheskoe izdatelstvo mashinostroitelnoi literatury, 1963, 756 p.

2. Genkin M.D. (Ed.) *Vibratsii v tekhnike. Vol. 5. Izmereniya i ispytaniya* [Vibrations in Engineering. Vol. 5: Measurements and testing], Moscow, Mashinostroenie, 1981, 496 p.

3. Klyuev V.V. (Ed.) *Ispytatelnaya tekhnika: Spravochnik. V 2 kn.* [Testing equipment: Handbook. In 2 vols.], Moscow, Mashinostroenie, 1982, Kn. 1, 528 p.

4. Ganiev R.F. *Nelineinye rezonansy i katastrofy. Nadezhnost, bezopasnost i besshumnost* [Nonlinear resonances and catastrophes. reliability, safety, and noise reduction], Moscow, *Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika*, 2013, 592 p.
5. Mil M.L., Nekrasov A.V., Braverman A.S. *Vertolety. Raschety i proektirovanie. V 3 kn.* (Helicopters. Calculations and Design. In 3 vols.), Ed. by Mil M.L., Moscow, Mashinostroenie, 1967, Kn. 2: *Kolebaniya i dinamicheskaya prochnost* [Vol. 2: Vibrations and Dynamic Strength], 424 p.
6. Blekhman I.I. *Teoriya vibratsionnykh protsessov i ustroystv. Vibratsionnaya mekhanika i vibratsionnaya tekhnika* [Theory of vibrational processes and devices. vibrational mechanics and technology], St. Petersburg, ID «Ruda i Metally», 2013, 640 p.
7. Panovko G.Ya. *Dinamika vibratsionnykh tekhnologicheskikh protsessov* [Dynamics of Vibrational Technological Processes], Moscow; Izhevsk, NITs “Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika”, Institut kompyuternykh tekhnologii, 2006, 176 p.
8. Kopylov Yu.R. *Dinamika protsessov vibroudarnogo uprochneniya: monografiya* [Dynamics of Vibro-Impact Hardening Processes: Monograph)], Voronezh, IPTs “Nauchnaya kniga”, 2011, 568 p.
9. Kaminskii S.S. *Sistema upravleniya rezonansnym vibrostendom s demabalansnym vibrovozbuditelem dlya dinamicheskikh ispytaniy obraztsov lopastei vertoletov* [Control System for a Resonance Vibration Stand with an Imbalance Exciter for Dynamic Testing of Helicopter Blade Samples], Cand. tech. sci. diss., Kazan, Kazanskii gosudarstvennyi energeticheskii institut, 2000, 160 p.
10. Bykhovskii I.I. *Osnovy teorii vibratsionnoi tekhniki* [Fundamentals of Vibration Technology], Moscow, Mashinostroenie, 1969, 320 p.
11. Panovko Ya.G. *Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebaniy* [Introduction to the Theory of Mechanical Oscillations], Moscow, Nauka, 1971, 252 p.
12. Vaisberg L.A. *Proektirovanie vibratsionnykh grokhotov* [Design of Vibrating Screens], Moscow, Nedra, 1986, 200 p.
13. Khvingiya M.V. *Vibratsii pruzhin* [Vibrations of Springs], Moscow, Mashinostroenie, 1969, 286 p.
14. Fedorenko I.Ya. *Chislenno-analiticheskoe issledovanie dvizheniya ploda pri vibratsionnoi uborke* [Numerical-Analytical Study of Fetal Motion During Vibration

Harvesting], Vestnik Altaiskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta, 2019, no. 4 (174), pp. 142–149.

15. Popov I.P. *Trudy MAI: ehlektron. zhurnal*, 2021, no. 117. DOI 10.34759/trd-2021-117-01.

16. Cieplik G. Influence of vibratory conveyor design parameters on the trough motion and the self-synchronization of inertial vibrators, *Open Engineering*, 2024. DOI 10.1515/eng-2022-0434.

17. Panovko G., Grishina O., Shokhin A., Eremykin S. Dynamics Features of a Resonant Vibromachine with Self-Synchronizing Inertial Vibroexciters, *Journal of Vibroengineering*, 2021, vol. 23, no. 8, pp. 1727–1736, DOI 10.21595/jve.2021.22067.

18. Rumiantsev S.A., Azarov E.B., Shikhov A.M. Non-linear dynamics of vibration transport machine as an electromechanical system, *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Gornyi zhurnal*, 2024, no. 1, pp. 9–19 .

19. Gursky V., Kuzio I., Krot P., Korendiy V. Energy-saving inertial drive for dual-frequency excitation of vibrating machines, *Energies*, 2021, vol. 14, p. 71, DOI 10.3390/en14010071. Available at: <https://www.mdpi.com/1996-1073/14/1/71> (accessed: 01.07.2024).

20. Eliseev S.V., Reznik Yu.I., Khomenko A.P., Zasyadko A.A. *Dinamicheskii sintez v obobshchennykh zadachakh vibrozashchity i vibroizolyatsii tekhnicheskikh obektov* [Dynamic synthesis in generalized problems of vibration protection and isolation of technical objects], Irkutsk, IGU, 2008, 523 p.

21. Eliseev S.V., Khomenko A.P. *Dinamicheskoe gashenie kolebanii: kontseptsiya obratnoi svyazi i strukturnye metody matematicheskogo modelirovaniya* [Dynamic vibration damping: feedback concept and structural methods of mathematical modeling], Novosibirsk, Nauka, 2014, 357 p.

22. Eliseev S.V., Nerubenko G.P. *Dinamicheskie gasiteli kolebanii* [Dynamic Vibration Dampers], Novosibirsk, Nauka, 1982, 182 p.

23. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Mironov A.S. *Trudy MAI: ehlektron. zhurnal*, 2024, no. 137, pp. 1–38. Available at: <https://trudymai.ru/published.php?ID=181873>.

24. Eliseev A.V., Sitov I.S., Kuznetsov N.K. *Formirovanie dinamicheskikh effektiv v mekhanicheskikh kolebatelnykh sistemakh v ramkakh kontseptsii obobshchennogo rykhaga s uchetom dopolnitelnykh kinematcheskikh svyazei* [Formation of dynamic effects in

mechanical oscillatory systems within the generalized lever concept with additional kinematic links], *Sistemy. Metody. Tekhnologii*, 2024, no. 1 (61), pp. 10–20.

25. Eliseev S.V., Kaimov E.V., Kinash N.Zh. *Dinamicheskii gasitel kolebanii kak element sistemy vozbuzhdeniya vibratsii* [Dynamic vibration absorber as an element of vibration excitation systems], *Reshetnevsie chteniya*, 2015, vol. 1, pp. 456–458.

26. Lurie A.I. *Operatsionnoe ischislenie i ego prilozheniya k zadacham mekhaniki* [Operational calculus and its applications to mechanics problems], Moscow; Leningrad, Gostekhizdat, 1950, 432 p.

27. Eliseev S.V., Ermoshenko Yu.V. *Sochleneniya zvenev v dinamike mekhanicheskikh kolebatelnykh sistem* [Joints of links in the dynamics of mechanical oscillatory systems], Irkutsk, IrGUPS, 2012, 156 p.

28. Anishhenko G.A., Molin K.E. *Trudy MAI*. 2011. № 45. S. 8.

29. Knyazev A.S. *Sovmestnoe ispol'zovanie aviasimulyatora X-PLANE i sredy SimInTech dlya issledovaniya raboty aviacionnykh sistem* (Joint use of the X-PLANE flight simulator and the SimInTech environment to study the operation of aviation systems), *Trudy MAI*. 2021. № 117.

30. Popov E.P., Verejkin A.A., Nasonov F.A. *Trudy MAI: ehlektron. zhurnal*. 2021. № 120. DOI 10.34759/trd-2021-120-15.

Информация об авторах

Андрей Владимирович Елисеев, кандидат технических наук, доцент кафедры математики, Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Россия; доцент кафедры конструирования и стандартизации в машиностроении, Иркутский национальный исследовательский технический университет, г. Иркутск, Россия; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0222-2507>, e-mail: eavsh@ya.ru

Николай Константинович Кузнецов, доктор технических наук, профессор кафедры конструирования и стандартизации в машиностроении; Иркутский национальный исследовательский технический университет, г. Иркутск, Россия; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3083-0182>, e-mail: knik@istu.edu

Information about the authors

Andrey V. Eliseev, Candidate of Technical Sciences (PhD), Associate Professor, Department of Mathematics, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia; Associate Professor, Department of Mechanical Engineering Design and Standardization, Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0222-2507>, e-mail: eavsh@ya.ru

Nikolay K. Kuznetsov, Doctor of Technical Sciences (DSc), Professor, Department of Mechanical Engineering Design and Standardization, Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3083-0182>, e-mail: knik@istu.edu

Получено 16 мая 2025 ● Принято к публикации 06 декабря 2025 ● Опубликовано 25 июня 2026
Received 16 May 2025 ● Accepted 06 December 2025 ● Published 25 June 2026
