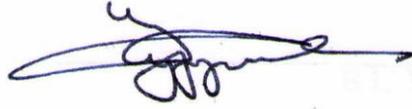


На правах рукописи



**КУРДЮМОВ НИКОЛАЙ НИКОЛАЕВИЧ**

**НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОВОДОВ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ  
СПУТНЫМ СЛЕДОМ**

Специальность 01.02.04 –

Механика деформируемого твёрдого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2021

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте прикладной механики Российской академии наук и федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук, профессор  
**Данилин Александр Николаевич**

**Официальные оппоненты:** **Паймушин Виталий Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева (КНИТУ-КАИ, г. Казань), действительный член Академии наук Республики Татарстан, Заслуженный деятель науки РФ

**Фельдштейн Валерий Адольфович**, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, начальник отдела «Динамической и ударной прочности» АО «Центральный научно-исследовательский институт машиностроения» (ЦНИИмаш, г. Королёв)

**Ведущая организация:** ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» (г. Саратов)

Защита состоится «29» сентября 2021 г. в 14<sup>00</sup> на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 в ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, А-80, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» и на сайте [https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT\\_ID=158166](https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=158166)

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 г.

Учёный секретарь  
диссертационного совета



Федотенков  
Григорий Валерьевич

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследования.** В настоящее время гибкие аэроупругие системы являются предметом интенсивных исследований в области динамики деформируемых конструкций. Большой научный и практический интерес представляют задачи о взаимодействии тросовых систем с воздушным или жидкостным потоком. К таким системам относятся воздушные ЛЭП, провода которых испытывают аэроупругих колебания в широком диапазоне частот. Эти колебания условно разделяют на три группы в зависимости от природы их возникновения и, как следствие, частотного диапазона. Различают эоловую вибрацию, пляску (галопирование) и субколебания.

В наименьшей степени изучен феномен субколебаний. Эти колебания свойственны исключительно проводам расщепленных фаз воздушных ЛЭП, которые стали вводить в эксплуатацию в 30-40 годы прошлого столетия. Опыт эксплуатации выявил новый вид колебаний проводов, составляющих расщеплённую фазу. При устойчивом ветре, дующем поперек трассы воздушной ЛЭП, один провод располагается в аэродинамическом (спутном) следе другого. Изменения аэродинамической подъемной силы и силы лобового сопротивления, воздействующие на подветренный провод, приводят к зарождению и развитию автоколебательного процесса. В процесс колебаний втягивается и наветренный провод из-за наличия дистанционных внутрифазных распорок.

В 70-80 годы прошлого столетия появились первые научные работы, посвященные субколебаниям, где были отмечены многочисленные факты износа и разрушения проводов в местах крепления арматуры и других устройств. Основополагающие экспериментальные и теоретические результаты отражены в работах Blevins B.D., Cahn A.S., Dal Maso F., Diana G., Dubois H., Eskinazi S., Giordana F., Lilien J.L., Mair W.A., Marris W., Maull D.J., Preiswerk M., Price S.J., Rawlins C.B., Saxon D.S., Scanlan R.H., Schaeffer W., Simiu E., Simpson A., Snegovskiy D.V. Из публикаций отечественных исследователей необходимо отметить работы Бладыко Ю.В., Виноградова А.А., Данилина А.Н., Климковича П.Н., Липницкого Ю.М., Платоновой И.А., Сергея И.И., Стрелюка М.И., Фельдштейна В.А., Шклярчука Ф.Н., в которых предлагаются различные подходы к описанию и анализу субколебаний на основе аналитических (непрерывных) и дискретных моделей. Однако, несмотря на значительные успехи в исследованиях субколебаний, моделей, претендующих на общность и полноту учёта параметров линии как аэроупругой системы, крайне мало. В этой связи, разработка математических моделей нелинейных колебаний проводов, индуцированных спутным следом, с учётом сложного характера аэродинамических нагрузок и наличия кинематических связей в виде жестких дистанционных распорок представляет собой **актуальную научную и практически значимую проблему.**

**Целью диссертационной работы** является разработка и анализ конечно-элементной модели индуцированных спутным следом нелинейных нестационарных колебаний проводов расщепленных фаз воздушных ЛЭП со связями в виде жестких дистанционных распорок.

### **Задачи работы, решаемые для достижения поставленной цели:**

1. Построение конечно-элементной модели субколебаний проводов расщепленных фаз воздушных ЛЭП на основе принципа возможных перемещений и получение системы нелинейных уравнений в обобщенных координатах для описания колебаний проводов с кинематическими связями в виде жестких дистанционных распорок.

2. Получение аналитических выражений для вычисления: жесткостей проводов с учётом их многослойной проволочной структуры; аэродинамических нагрузок в спутном следе на основе модифицированной теории Симпсона с использованием эмпирических данных Блевинса и Прайса.

3. Формулировка начальной задачи для определения статического состояния на основе метода продолжения решения по параметру. Разработка численного алгоритма для определения статической (начальной) конфигурации системы с учётом монтажной длины проводов, воздействия температуры и закреплённых на проводах дистанционных распорок.

4. Решение новых задач об аэроупругих колебаниях закреплённых по концам проводов с учётом аэродинамических нагрузок, индуцированных спутным следом. Сопоставление численных решений с известными экспериментальными данными.

**Методы исследования.** Для построения дискретной математической модели субколебаний применяется метод конечных элементов. Дифференциальные уравнения колебаний выводятся на основе принципа возможных перемещений в обобщенных координатах с учётом нелинейностей упругих и инерционных сил, а также аэродинамических сил в спутном следе. Для построения функций формы используется метод Ритца с выбором линейных и тригонометрических функций в качестве базисных. В качестве обобщенных координат принимаются абсолютные перемещения и углы закручивания узловых сечений, а также коэффициенты тригонометрических разложений для описания локальных перемещений и углов закручивания в пределах каждого элемента. Для получения конечных выражений для аэродинамических сил используются полиномиальные аппроксимации известных экспериментальных данных, а также линеаризация выражений для этих сил, записанных в локальных (элементных) координатах. Деформация растяжения записывается в квадратичном приближении. Для численного интегрирования системы уравнений колебаний, относящихся к жесткому типу, используется алгоритм, основанный на параметризации уравнений с выбором в качестве аргумента длины интегральной кривой решения. Для параметризованной задачи используется неявная схема, основанная на методе линейного ускорения с использованием простых итераций.

**Достоверность и обоснованность результатов** научных положений и полученных результатов подтверждается использованием строгих математических методов и сравнениями теоретических результатов с результатами экспериментальных исследований.

**Научная новизна диссертационной работы** заключается в следующем:

1. Разработана новая конечно-элементная модель индуцированных спутным следом колебаний проводов расщеплённых фаз воздушных ЛЭП с кинематическими связями в виде жестких распорок с учётом нелинейностей упругих и инерционных сил, а также аэродинамических сил.

2. Для построения функций формы конечных (тросовых) элементов предложен метод Ритца с выбором линейных и тригонометрических функций в качестве базисных, позволяющих с различной степенью «детализации» описывать колебания в заданных частотных диапазонах. Коэффициенты тригонометрических рядов представляют собой «внутренние» для конечного элемента обобщенные координаты, которые включаются в общую систему искомым функций времени. В этой связи, модель претендует на общность и может быть использована для описания всех видов колебаний проводов ЛЭП.

3. Получены аналитические выражения для жесткостей проводов с учётом их внутренней структуры на основе нового метода энергетического осреднения упругих свойств проволочных повивов (слоёв) и сведения их к эквивалентным по упругим свойствам цилиндрическим оболочкам.

4. Впервые получены линеаризованные (по продольной координате в пределах конечного элемента) аналитические выражения для аэродинамических нагрузок на подветренный провод на основе модифицированной теории Симпсона с использованием эмпирических данных Блевинса и Прайса.

5. На основе метода продолжения решения по параметру разработан новый подход к получению статических решений, определяющих начальную конфигурацию аэроупругой системы с учётом монтажной длины проводов, соединённых дистанционными распорками, и воздействия температуры.

6. Дано решение новых аэроупругих задач о колебаниях двух закреплённых по концам проводов с учётом аэродинамических нагрузок, индуцированных спутным следом.

**Теоретическая и практическая значимость** работы заключается в следующем:

1. Полученные математические модели, методы и алгоритмы расчёта являются результатом фундаментальных научных исследований в области нелинейной динамики гибких систем, к которым относятся провода и тросы воздушных ЛЭП. Математическое моделирование позволяет выявить закономерности возникновения и развития колебательных процессов, провести анализ чувствительности модели к изменению исходных параметров, провести оптимизационные расчёты с целью управления амплитудно-частотными характеристиками для подавления или устранения негативного влияния на элементы системы динамических нагрузок.

2. Субколебания (совместно с вибрацией, действующей постоянно) приводят к износу и разрушению проводов в местах их закрепления, крепления различных устройств (распорок, гасителей колебаний и др.). Поэтому использование математического моделирования в процессе проектирования или реконструкции воздушной ЛЭП представляет значительный практический интерес, поскольку позволяет на стадии проектирования выработать наиболее эффективные способы защиты проводов и других элементов линии

от колебаний с помощью оптимального расположения дистанционных распорок и гасителей колебаний различного типа.

**Основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту:**

1. Конечно-элементная модель индуцированных спутным следом нелинейных нестационарных колебаний проводов расщеплённой фазы воздушной ЛЭП со связями в виде жестких дистанционных распорок.

2. Способ выбора функций формы на основе метода Ритца с базисом в виде линейных функций и тригонометрических рядов, коэффициенты которых представляют собой «внутренние» для конечного элемента обобщенные координаты и включаются в общую систему искомым функций времени.

3. Математическая модель аэродинамических нагрузок в спутном следе на подветренный провод на основе модифицированной теории Симпсона с использованием эмпирических данных Блевинса и Прайса.

4. Методика и алгоритм сведения уравнений статики к задаче Коши для определения начальной конфигурации аэроупругой системы с учётом монтажной длины проводов, воздействия температуры и наличия закреплённых на проводах жестких дистанционных распорок.

5. Решения новых задач об аэроупругих колебаниях двух закреплённых по концам проводов с учётом аэродинамических нагрузок, индуцированных спутным следом.

**Апробация основных результатов работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на Российских и Международных конференциях и симпозиумах:

- Международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы. Москва, 19-21 октября 2014г.»;

- XXI Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Москва, 2015 год;

- II международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы. Москва, 17-19 февраля 2015г.»;

- III международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы. Москва, 19-21 октября 2015г.»;

- V международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы. Москва, 19-21 октября 2016г.»;

- International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering (ICCMSE 2020), 29 april-03 may 2020, Crete, Greece;

- XXXII Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС-2020). Москва 2-4 декабря 2020 года.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 20 печатных работах, в 7 статьях в журналах, рекомендованных ВАК РФ, в том

числе в 3 журналах, из списка Scopus и цитируемых интернет-платформой Web of Science, 12 тезисов докладов и 1 патент на изобретение.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, 5 глав, заключения и списка использованных источников, включающего 138 наименований. Работа содержит 115 страниц, 38 рисунков, 9 таблиц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертации, представлены объект и предмет научны исследований, сформулированы цель и задачи исследования, определена научная новизна и практическая значимость полученных результатов, приведены основные результаты, выносимые на защиту и краткое содержание диссертационной работы по главам.

**В первой главе** дана краткая характеристика воздушных ЛЭП высокого и сверхвысокого напряжения с описанием типовых конструкций их основных элементов – проводов и внутрифазных дистанционных распорок, дана классификация и характеристика колебаний проводов и тросов воздушных ЛЭП, представлен аналитический обзор публикаций, посвященных рассматриваемой в диссертации проблеме, отмечены особенности задач об аэроупругих колебаниях проводов, в том числе, индуцированных спутным следом.

**Вторая глава** посвящена вычислению жесткостей проводов ЛЭП, которые моделируются как упругие гибкие стержни. Используется новая математическая модель провода в виде слоистой (многоповивной) проволочной конструкции спирального типа. В соответствии с этой моделью, каждый повив (проволочный слой) представляется как эквивалентная по упругим свойствам анизотропная цилиндрическая оболочка, а провод в целом рассматривается как система вложенных друг в друга цилиндрических оболочек с учетом контактных сил давления и трения. Эквивалентность упругой оболочки проволочному повиву устанавливается с использованием энергетического осреднения.

Считается, что оболочка нагружена по торцам погонным продольным усилием  $T$ , крутящим моментом  $H$  и внутренним давлением  $p$ . Через  $\varepsilon$  и  $\theta$  обозначаются относительное удлинение и относительный угол закручивания эквивалентной оболочки. Через  $w$  обозначается перемещение произвольной точки стержня вдоль радиуса его кривизны. Тогда на основании теоремы Кастильяно устанавливается связь

$$(\varepsilon \quad \theta \quad w)^T = B(T \quad H \quad p)^T, \quad (2.1)$$

где элементы матрицы податливости  $B$ :

$$b_{11} = \frac{2\pi r^3}{n|\sin \alpha|} \left( \frac{1+\psi}{EJ_b} \sin^2 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{GJ_t} \right), \quad b_{12} = \frac{r}{n} \operatorname{sign}(\sin \alpha) \cos \alpha \left( \frac{1}{GJ_t} - \frac{1}{EJ_b} \right),$$

$$b_{13} = -\frac{2\pi r^4}{n} \sin \alpha \left( \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - (1+\psi)}{EJ_b} + \frac{2}{GJ_t} \right),$$

$$\begin{aligned}
b_{21} &= \frac{2\pi r^2}{n} \operatorname{sign}(\sin \alpha) \cos \alpha \left( \frac{1}{GJ_t} - \frac{1}{EJ_b} \right), \quad b_{22} = \frac{1}{n |\sin \alpha|} \left( \frac{\sin^2 \alpha}{GJ_t} + \frac{\cos^2 \alpha}{EJ_b} \right), \\
b_{23} &= -\frac{2\pi r^3}{n} \cos \alpha \left( \frac{2\operatorname{tg}^2 \alpha}{GJ_t} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{EJ_b} \right), \\
b_{31} &= b_{13}, \quad b_{32} = -\frac{r^2}{n} \cos \alpha \left( \frac{2\operatorname{tg}^2 \alpha}{GJ_t} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{EJ_b} \right), \\
b_{33} &= \frac{2\pi r^5}{n} |\sin \alpha| \left[ \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)^2 + \psi}{EJ_b} + \frac{4\operatorname{tg}^2 \alpha}{GJ_t} \right];
\end{aligned}$$

безразмерный коэффициент  $\psi = J_b / Fr^2$ ;  $n$  – число проволок в повиве;  $EJ_b$ ,  $GJ_t$ ,  $EF$  – соответственно жесткости каждой проволоки на изгиб в соприкасающейся плоскости, кручение и растяжение;  $r$  – радиус оболочки.

Если повивы уложены без зазора и натяга, то из (2.1) следует:

$$\left( \varepsilon^{(i)} \quad \theta^{(i)} \quad 0 \right)^T = B^{(i)} \left( T^{(i)} \quad H^{(i)} \quad p^{(i)} \right)^T, \quad (2.2)$$

где  $i$  – номер повива.

Продольное усилие  $T^{(i)}$  в срединной поверхности оболочки связано с продольной силой  $N^{(i)}$ , действующей на оболочку, соотношением

$$N^{(i)} = 2\pi r^{(i)} T^{(i)}.$$

После исключения  $p^{(i)}$  из (2.2), последнее сводится к виду

$$\left( T^{(i)} \quad H^{(i)} \right)^T = C^{(i)} \left( \varepsilon^{(i)} \quad \theta^{(i)} \right)^T, \quad C^{(i)} = \|c_{pq}^{(i)}\| = \left( \bar{B}^{(i)} \right)^{-1}; \quad p, q = 1, 2. \quad (2.3)$$

где матрица

$$\bar{B}^{(i)} = \|\bar{b}_{kl}\| = \begin{pmatrix} b_{11}^{(i)} - \frac{b_{13}^{(i)} b_{31}^{(i)}}{b_{33}^{(i)}} & b_{12}^{(i)} - \frac{b_{13}^{(i)} b_{32}^{(i)}}{b_{33}^{(i)}} \\ b_{21}^{(i)} - \frac{b_{23}^{(i)} b_{31}^{(i)}}{b_{33}^{(i)}} & b_{22}^{(i)} - \frac{b_{23}^{(i)} b_{32}^{(i)}}{b_{33}^{(i)}} \end{pmatrix}; \quad k, l = 1, 2.$$

При рассмотрении провода в целом, возникающие в нем продольная сила  $N$  и крутящий момент  $H$  складываются из сил и моментов, действующих на сердечник и повивы:

$$N = N^{(0)} + \sum_{i=1}^m N^{(i)} = N^{(0)} + 2\pi \sum_{i=1}^m r^{(i)} T^{(i)}, \quad H = H^{(0)} + \sum_{i=1}^m H^{(i)}. \quad (2.4)$$

Считая  $\varepsilon^{(i)} = \varepsilon$ ,  $\theta^{(i)} = \theta$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ), вместо (2.4) имеем:

$$\begin{pmatrix} N \\ H \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \theta \end{pmatrix}; \quad R = \|r_{ij}\| = \begin{pmatrix} E^{(0)} F^{(0)} & 0 \\ 0 & G^{(0)} J_t^{(0)} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^m \begin{pmatrix} 2\pi r^{(i)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C^{(i)}. \quad (2.5)$$

Здесь  $E^{(0)}$ ,  $G^{(0)}$  – модули на растяжение и сдвиг сердечника; площадь  $F^{(0)} = \pi d^{(0)2} / 4$ , полярный момент инерции  $J_t^{(0)} = \pi d^{(0)4} / 32$ ;  $d^{(0)}$  – диаметр проволоки сердечника.

Полученная в результате матрица  $R$  является матрицей жесткости для провода при его работе на растяжение и кручение.

Соотношения (2.1)-(2.5) позволяют определить жесткости проволочной конструкции на кручение, а также на изгиб в виде:

$$GJ_t = \sum_{i=0}^m c_{22}^{(i)}, \quad EJ_b = \pi \sum_{i=0}^m r^{(i)3} / \bar{b}_{11}^{(i)}. \quad (2.6)$$

На рис. 2.1 в графической форме представлены результаты вычислений жесткостей проводов серии АС в зависимости от внешнего диаметра провода. Маркерами отмечены значения вычисленных жесткостей. Сплошная линия на рисунке 1 а) представляет экспериментальные значения крутильных жесткостей, полученных Dubois H., Lilien J.L., Dal Maso F. в институте Montefiore (Бельгия, Льежский университет) в результате обширного анализа экспериментальных данных.

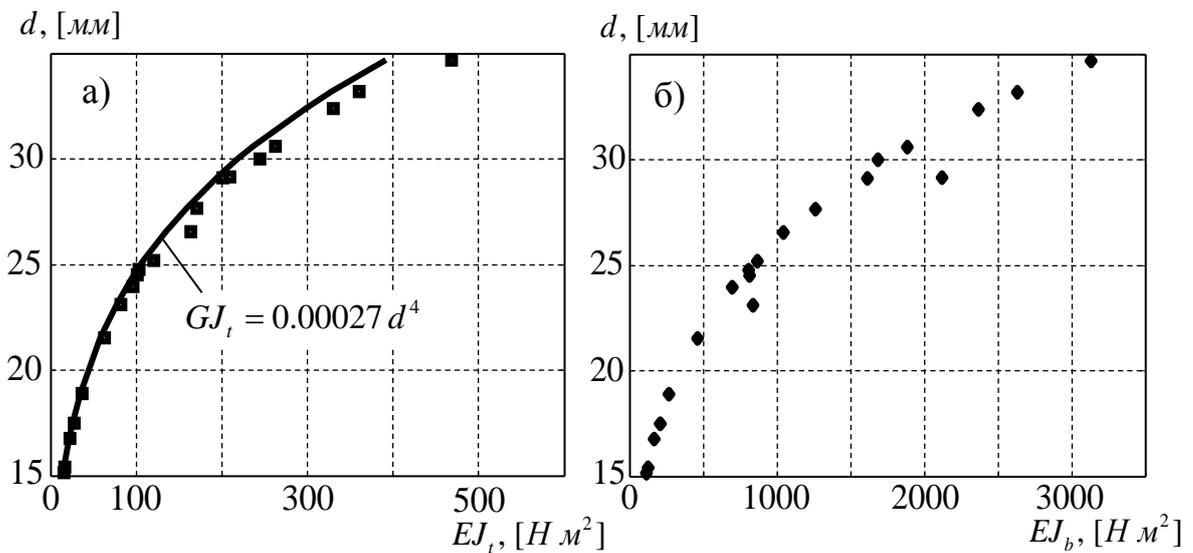


Рис. 2.1.

**В третьей главе** дано описание аэродинамики обтекания провода с образованием спутного следа. Отмечается, что в спутном следе средняя скорость воздушного потока меньше скорости свободно набегающего потока. Это уменьшение может быть приближённо описано эмпирической функцией. Для её определения вводятся в плоскости поперечного сечения линии локальные координаты с центром на осевой линии наветренного провода. Ось  $y$  направляется вдоль скорости свободного потока  $V$ , ось  $z$  – перпендикулярно  $V$ . Вводятся также безразмерные координаты  $\eta = y/d$ ,  $\xi = z/d$ , где  $d$  – диаметр провода. Следуя теории Симпсона и используя эмпирические данные Блевинса и Прайса, принимается следующее допущение: подветренный провод обтекается воздушным потоком, вектор скорости которого  $\tilde{V}$  коллинеарен вектору скорости свободного потока  $V$  и определяется выражением:

$$\tilde{V} = V \cdot \Psi(\eta, \xi). \quad (3.1)$$

где функция распределения

$$\Psi(\eta, \xi) = 1 - C_{Dmax} \cdot \sqrt{\frac{C_{Dmax}}{(\eta + 6)}} \exp\left(-0.69 \cdot (\xi / B(\eta))^2\right); \quad (3.2)$$

$B(\eta) = 0.23\sqrt{C_{Dmax}(\eta + 6)}$ ,  $C_{Dmax} = 1.2$  – коэффициент лобового сопротивления наветренного провода. Формулы (3.1), (3.2) используются для вычисления аэродинамических сил, действующих на подветренный провод в спутном следе.

Для аналитической аппроксимации распределений аэродинамических коэффициентов используются полиномиальные представления в виде:

- в области  $|\xi| \leq 4$ ,  $5 \leq \eta \leq 20.3$

$$C_D(\eta, \xi) = \sum_{i=0,2,\dots}^{10} (b_{i,0} + b_{i,1}\eta + b_{i,2}\eta^2) \xi^i, \quad C_L(\eta, \xi) = \sum_{i=1,3,\dots}^9 (q_{i,0} + q_{i,1}\eta + q_{i,2}\eta^2) \xi^i; \quad (3.3)$$

- вне этой области принимается, что  $C_D = 1.2$ ,  $C_L = 0$ .

Значения коэффициентов  $b_{i,0}$ ,  $b_{i,1}$ ,  $b_{i,2}$  and  $q_{i,0}$ ,  $q_{i,1}$ ,  $q_{i,2}$  даны в табл. 3.1 и 3.2.

Табл. 3.1 – Коэффициенты  $b_{ij}$

$i \backslash j$	0	1	2
0	$2.3233 \cdot 10^{-1}$	$2.8447 \cdot 10^{-2}$	$-3.8314 \cdot 10^{-4}$
2	$7.2643 \cdot 10^{-1}$	$-7.1300 \cdot 10^{-2}$	$2.0024 \cdot 10^{-3}$
4	$-1.6282 \cdot 10^{-1}$	$1.9501 \cdot 10^{-2}$	$-5.9524 \cdot 10^{-4}$
6	$1.5361 \cdot 10^{-2}$	$-1.9301 \cdot 10^{-3}$	$5.9790 \cdot 10^{-5}$
8	$-6.4284 \cdot 10^{-4}$	$7.9299 \cdot 10^{-5}$	$-2.4034 \cdot 10^{-6}$
10	$9.7618 \cdot 10^{-6}$	$-1.1161 \cdot 10^{-6}$	$3.1730 \cdot 10^{-8}$

Табл. 3.2 – Коэффициенты  $q_{ij}$

$i \backslash j$	0	1	2
1	$-9.3661 \cdot 10^{-1}$	$9.4536 \cdot 10^{-2}$	$-2.5711 \cdot 10^{-3}$
3	$3.6221 \cdot 10^{-1}$	$-4.0494 \cdot 10^{-2}$	$1.1478 \cdot 10^{-3}$
5	$-4.9046 \cdot 10^{-2}$	$5.7814 \cdot 10^{-3}$	$-1.6845 \cdot 10^{-4}$
7	$2.8155 \cdot 10^{-3}$	$-3.4118 \cdot 10^{-4}$	$1.0093 \cdot 10^{-5}$
9	$-5.8531 \cdot 10^{-5}$	$7.1871 \cdot 10^{-6}$	$-2.1407 \cdot 10^{-7}$

**В четвёртой главе**, состоящей из 7 параграфов, даётся описание дискретной математической модели субколебаний фазных проводов, которая формулируется на основе метода конечных элементов. Для описания локальных перемещений в пределах конечного элемента используется метод Ритца с выбором линейных и тригонометрических функций в качестве базисных.

Деформирование проводов описывается в рамках гипотезы плоских сечений. Распорки моделируются как абсолютно жесткие невесомые стержни. Сила натяжения провода (тяжение), так же как и его деформация растяжения, считаются в пределах элемента постоянными величинами. Зависимость деформации от поперечных перемещений определяется квадратичным приближением.

В качестве обобщенных координат принимаются абсолютные перемещения и углы закручивания узловых сечений, а также коэффициенты тригонометрических разложений по синусам для локальных перемещений и углов закручивания в пределах каждого элемента.

Уравнения движения проводов записываются в обобщенных координатах с нелинейными упругими, инерционными и аэродинамическими силами.

Уравнения движения системы составляются на основе принципа возможных перемещений:

$$\delta U - \delta A_p - \delta A_{in} = 0. \quad (4.1)$$

где  $\delta U$  – вариация потенциальной энергии системы;  $\delta A_p$ ,  $\delta A_{in}$  – вариации работы внешних и инерционных сил.

В параграфе 4.1 определяются функции формы и деформационные соотношения. Начальное удлинение провода в пролёте ЛЭП записывается в виде:

$$\Delta^\circ = L^\circ (1 + \alpha T) - L. \quad (4.2)$$

Здесь  $L$  – расстояние между точками подвеса,  $L^\circ$  – начальная (монтажная) длина провода без учёта упругой деформации,  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения,  $T$  – приращение температуры по отношению к нормальной.

Вследствие значительного натяжения проводов в пролёте между опорами углы поворота из плоскости начального положения считаются малыми.

С каждым  $i$ -м элементом связываются локальные (элементные) системы координат  $\tilde{O}^{(i)} x^{(i)} y^{(i)} z^{(i)}$  следующим образом. Точка  $\tilde{O}^{(i)}$  совмещается с полюсом (центром массы) краевого поперечного сечения элемента. Локальные (элементные) оси, движущиеся совместно с элементом, остаются параллельными соответствующим осям глобальной (инерциальной) координатной системы  $OXYZ$ , как это показано на рис. 4.1.

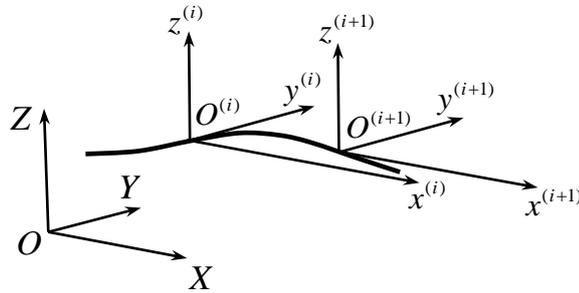


Рис. 4.1.

Координаты точек осевой линии провода вдоль осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  и угол поворота сечения провода вокруг оси  $OX$  обозначаются соответственно через  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и  $\varphi$ .

Локальные перемещения и угол поворота сечений провода в пределах конечного элемента длины  $l$  представляются по методу Ритца в виде

$$\tilde{u} = (u_1 - u_0)x/l, \quad \tilde{\varphi} = \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0)x/l + \sum_{i=1}^n p_i \sin(i\pi x/l), \quad (4.3)$$

$$\tilde{v} = (v_1 - v_0)x/l + \sum_{i=1}^n q_i \sin(i\pi x/l), \quad \tilde{w} = (w_1 - w_0)x/l + \sum_{i=1}^n r_i \sin(i\pi x/l).$$

где  $u_k(t)$ ,  $v_k(t)$ ,  $w_k(t)$  ( $k = 0, 1$ ) – граничные значения координат и угла поворота при  $x = 0$  ( $k = 0$ ) и  $x = l$  ( $k = 1$ ), которые принимаются в качестве обобщённых координат. Обобщёнными координатами являются также коэффици-

енты  $q_i(t)$ ,  $r_i(t)$ ,  $p_i(t)$ , определяющие внутренние степени свободы конечного элемента по синусоидальным формам.

Согласно правилу выбора координатных систем и (4.3) глобальные координаты и угол поворота произвольного сечения провода записываются в виде

$$u = u_0 + \Delta u, \quad v = v_0 + \Delta v, \quad w = w_0 + \Delta w, \quad \varphi = \varphi_0 + \Delta \varphi, \quad (4.4)$$

где  $\Delta u = \tilde{u}$ ,  $\Delta v = \tilde{v}$ ,  $\Delta w = \tilde{w}$ ,  $\Delta \varphi = \tilde{\varphi} - \varphi_0$  считаются величинами малыми по сравнению с соответствующими величинами  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ ,  $\varphi_0$ .

Через  $N$  и  $\varepsilon$  – обозначаются сила тяжения (натяжения) провода и его продольная деформация. Величина  $N$  в пределах элемента считается постоянной и равной  $N = EF(\varepsilon - \Delta^0/L)$ . Откуда следует, что в пределах элемента деформация  $\varepsilon$  также будет величиной постоянной и равной

$$\varepsilon l = u_1 - u_0 + \frac{1}{2l} \left[ (v_1 - v_0)^2 + (w_1 - w_0)^2 + \sum_{i=1}^n \mu_i (q_i^2 + r_i^2) \right], \quad (4.5)$$

В параграфе 4.2 вычисляется потенциальная энергия деформации и её вариация. С учётом (4.2) и (4.5) имеем

$$U_p = \frac{1}{2} \int_0^l N \varepsilon dx = \frac{lEF}{2} \left( \varepsilon - \frac{\Delta^0}{L} \right)^2. \quad (4.6)$$

Потенциальная энергия кручения:

$$U_t = \frac{GJ_t}{2} \int_0^l \varphi'^2 dx; \quad J_t = \int_F \rho^2 dF. \quad (4.7)$$

Полная потенциальная энергии деформации  $U$  получаем, объединяя (4.6) и (4.7). В итоге

$$U = U_p + U_t = \frac{1}{2l} \left\{ EF \cdot l^2 \left( \varepsilon - \frac{\Delta^0}{L} \right)^2 + GJ_t \left[ (\varphi_1 - \varphi_0)^2 + \sum_{i=1}^n \mu_i p_i^2 \right] \right\}. \quad (4.8)$$

Вариация потенциальной энергии

$$\begin{aligned} \delta U = & \sum_{k=0}^1 \left( \frac{\partial U}{\partial u_k} \delta u_k + \frac{\partial U}{\partial v_k} \delta v_k + \frac{\partial U}{\partial w_k} \delta w_k + \frac{\partial U}{\partial \varphi_k} \delta \varphi_k \right) + \\ & + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial U}{\partial q_n} \delta q_n + \frac{\partial U}{\partial r_n} \delta r_n + \frac{\partial U}{\partial p_n} \delta p_n \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

иде

$$\frac{\partial U}{\partial u_k} = -(-1)^k N, \quad \frac{\partial U}{\partial v_k} = -(-1)^k N \frac{v_1 - v_0}{l}, \quad \frac{\partial U}{\partial w_k} = -(-1)^k N \frac{w_1 - w_0}{l},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_k} = -(-1)^k \frac{GJ_t}{l} (\varphi_1 - \varphi_0);$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = Nq_i \mu_i, \quad \frac{\partial U}{\partial r_i} = Nr_i \mu_i, \quad \frac{\partial U}{\partial p_i} = \frac{GJ_t}{l} \mu_i p_i; \quad k = 0, 1; \quad i = 1, \dots, n.$$

В параграфе 4.3 вычисляется вариация инерционных сил:

$$\begin{aligned} \delta A_{in} = & - \int_0^l \int_F (\rho \ddot{\mathbf{R}} \cdot \delta \mathbf{R}) dF dx = - \int_0^l m \left[ \ddot{u} \delta u + (\ddot{v} - y_* \ddot{\phi} - z_* \dot{\phi}^2) \delta v + \right. \\ & \left. + (\ddot{w} + z_* \ddot{\phi} - y_* \dot{\phi}^2) \delta w + (-y_* \ddot{v} + z_* \ddot{w} + r_*^2 \ddot{\phi}) \delta \phi \right] dx, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где  $y_* = (1/m) \cdot \int_F \rho z_c dF$ ,  $z_* = (1/m) \cdot \int_F \rho y_c dF$  – координаты центра масс сечения в системе  $O_c x_c y_c z_c$ ,  $m$  – погонная масса;  $r_*^2 = (1/m) \cdot \int_F \rho (y_c^2 + z_c^2) dF$  – квадрат радиуса инерции. Выражение (4.10) интегрируется с использованием функций формы (4.3). Окончательно имеем следующее выражение для вариации работы инерционных сил:

$$\begin{aligned} \delta A_{in} = & F_0^u \delta u_0 + F_1^u \delta u_1 + F_0^v \delta v_0 + F_1^v \delta v_1 + F_0^w \delta w_0 + F_1^w \delta w_1 + \\ & + F_0^\phi \delta \phi_0 + F_1^\phi \delta \phi_1 + \sum_{i=1}^n (F_i^q \delta q_i + F_i^r \delta r_i + F_i^p \delta p_i), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где введены обобщённые силы:

$$\begin{aligned} F_0^u &= \frac{ml}{3} \left( \ddot{u}_0 + \frac{\ddot{u}_1}{2} \right), \quad F_1^u = \frac{ml}{3} \left( \frac{\ddot{u}_0}{2} + \ddot{u}_1 \right); \\ F_0^v &= ml \left\{ \left[ \frac{1}{3} (\ddot{v}_0 - y_* \ddot{\phi}_0) + \frac{1}{6} (\ddot{v}_1 - y_* \ddot{\phi}_1) + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} (\ddot{q}_i - y_* \ddot{p}_i) \right] + \right. \\ & \left. + \dot{\phi}_0 \left[ \frac{1}{3} \left( \dot{\phi}_1 + \frac{\dot{\phi}_0}{2} \right) + \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\dot{p}_i}{i} \right] \right\}, \\ F_1^v &= ml \left\{ \left[ \frac{1}{6} (\ddot{v}_0 - y_* \ddot{\phi}_0) + \frac{1}{3} (\ddot{v}_1 - y_* \ddot{\phi}_1) - \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i} (\ddot{q}_i - y_* \ddot{p}_i) \right] + \right. \\ & \left. + \dot{\phi}_0 \left[ \frac{1}{3} \left( 2\dot{\phi}_1 - \frac{\dot{\phi}_0}{2} \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{\dot{p}_i}{i} \right] \right\}, \\ F_0^w &= ml \left\{ \left[ \frac{1}{3} (\ddot{w}_0 + z_* \ddot{\phi}_0) + \frac{1}{6} (\ddot{w}_1 + z_* \ddot{\phi}_1) + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} (\ddot{r}_i + z_* \ddot{p}_i) \right] + \right. \\ & \left. + \dot{\phi}_0 \left[ \frac{1}{3} \left( \dot{\phi}_1 + \frac{\dot{\phi}_0}{2} \right) + \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\dot{p}_i}{i} \right] \right\}, \\ F_1^w &= ml \left\{ \left[ \frac{1}{6} (\ddot{w}_0 + z_* \ddot{\phi}_0) + \frac{1}{3} (\ddot{w}_1 + z_* \ddot{\phi}_1) - \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i} (\ddot{r}_i + z_* \ddot{p}_i) \right] + \right. \\ & \left. + \dot{\phi}_0 \left[ \frac{1}{3} \left( 2\dot{\phi}_1 - \frac{\dot{\phi}_0}{2} \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{\dot{p}_i}{i} \right] \right\}, \\ F_0^\phi &= ml \left[ \frac{1}{3} (-y_* \ddot{v}_0 + z_* \ddot{w}_0 + r_*^2 \ddot{\phi}_0) + \frac{1}{6} (-y_* \ddot{v}_1 + z_* \ddot{w}_1 + r_*^2 \ddot{\phi}_1) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} (-y_* \ddot{q}_i + z_* \ddot{r}_i + r_*^2 \ddot{p}_i) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1^\varphi &= ml \left[ \frac{1}{6} (-y_* \ddot{v}_0 + z_* \ddot{w}_0 + r_*^2 \ddot{\phi}_0) + \frac{1}{3} (-y_* \ddot{v}_1 + z_* \ddot{w}_1 + r_*^2 \ddot{\phi}_1) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i} (-y_* \ddot{q}_i + z_* \ddot{r}_i + r_*^2 \ddot{p}_i) \right]; \\
F_i^q &= ml \left\{ \frac{1}{i\pi} [\ddot{v}_0 - y_* \ddot{\phi}_0 - (-1)^i (\ddot{v}_1 - y_* \ddot{\phi}_1)] + \frac{1}{2} (\ddot{q}_i - y_* \ddot{p}_i) + \right. \\
&\quad \left. + \dot{\phi}_0 \sum_{i=1}^n \left[ -2\dot{\phi}_1 \frac{(-1)^i}{i\pi} + \frac{\dot{\phi}_0}{i\pi} (1 + (-1)^i) + \dot{p}_i \right] \right\}, \\
F_i^r &= ml \left\{ \frac{1}{i\pi} [\ddot{w}_0 + z_* \ddot{\phi}_0 - (-1)^i (\ddot{w}_1 + z_* \ddot{\phi}_1)] + \frac{1}{2} (\ddot{r}_i + z_* \ddot{p}_i) + \right. \\
&\quad \left. + \dot{\phi}_0 \sum_{i=1}^n \left[ -2\dot{\phi}_1 \frac{(-1)^i}{i\pi} + \frac{\dot{\phi}_0}{i\pi} (1 + (-1)^i) + \dot{p}_i \right] \right\}, \\
F_i^p &= ml \left\{ \frac{1}{i\pi} [-y_* \ddot{v}_0 + z_* \ddot{w}_0 + r_*^2 \ddot{\phi}_0 - (-1)^i (-y_* \ddot{v}_1 + z_* \ddot{w}_1 + r_*^2 \ddot{\phi}_1)] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (-y_* \ddot{q}_i + z_* \ddot{r}_i + r_*^2 \ddot{p}_i) \right\}.
\end{aligned}$$

Параграф 4.4 посвящен вычислению вариации гравитационной нагрузки. Если  $g$  – ускорение свободного падения, то вариация работы гравитационной силы, направленной вдоль оси  $OZ$ , равна

$$\delta A_g = -mg \int_0^l \delta w dx = G_0^w \delta w_0 + G_1^w \delta w_1 + \sum_{i=1}^n G_i^r \delta r_i, \quad (4.12)$$

где

$$G_0^w = G_1^w = -\frac{mgl}{2}, \quad G_i^r = -\frac{mgl}{i\pi} [1 - (-1)^i].$$

В параграфе 4.5 вычисляется вариация работы аэродинамических сил. Рассматривается два провода – наветренный, на который воздействует невозмущенный воздушный поток со скоростью  $V_0$ , и подветренный, находящийся в аэродинамическом (спутном) следе от наветренного провода. Наветренный провод будем обозначать цифрой 1, подветренный – цифрой 2. Кинематические и силовые величины, относящиеся к проводам, будем снабжать соответственно верхними индексами (1) или (2), как это показано на рисунке 4.2.

В начальном (статическом) состоянии пересечем провода плоскостью  $\Pi$  параллельно плоскости  $OYZ$  на некотором расстоянии  $x$  от начала координат. Считается, что поперечные сечения проводов, принадлежащие  $\Pi$  в начальном состоянии, при движении остаются в этой плоскости. В плоскости  $\Pi$  вводится поточная система координат  $\tilde{O}\tilde{y}\tilde{z}$ , совмещающая начало координат

$\tilde{O}$  с центром наветренного провода и направляя ось  $\tilde{O}\tilde{y}$  по направлению вектора скорости набегающего потока  $V^{(1)}$ .

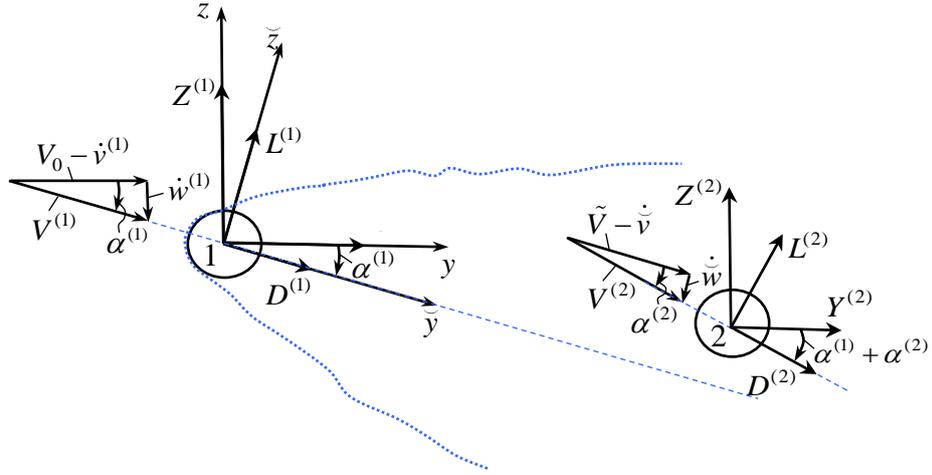


Рис. 4.2.

Координаты некоторой точки плоскости  $\Pi$  в системе  $\tilde{O}\tilde{y}\tilde{z}$  обозначаются через  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{w}$  и вводятся обозначения  $v^- = v^{(2)} - v^{(1)}$ ,  $w^- = w^{(2)} - w^{(1)}$ .

Тогда очевидна связь

$$\tilde{v} = v^- \cos \alpha^{(1)} - w^- \sin \alpha^{(1)}, \quad \tilde{w} = v^- \sin \alpha^{(1)} + w^- \cos \alpha^{(1)}. \quad (4.13)$$

Из рисунка также 4.2 следует, что

$$\sin \alpha^{(1)} = \frac{\dot{w}^{(1)}}{V^{(1)}}, \quad \cos \alpha^{(1)} = \frac{V_0 - \dot{v}^{(1)}}{V^{(1)}}; \quad \sin \alpha^{(2)} = \frac{\dot{w}}{V^{(2)}}, \quad \cos \alpha^{(2)} = \frac{\tilde{V} - \dot{v}}{V^{(2)}};$$

$$V^{(1)} = \sqrt{(V_0 - \dot{v}^{(1)})^2 + \dot{w}^{(1)2}}, \quad V^{(2)} = \sqrt{(\tilde{V} - \dot{v})^2 + \dot{w}^2}.$$

Пусть  $L^{(1)}, L^{(2)}$  и  $D^{(1)}, D^{(2)}$  – подъемные силы и силы аэродинамического сопротивления, действующие на провода 1 и 2 в направлении соответствующих осей поточной системы  $\tilde{O}\tilde{y}\tilde{z}$ . Для каждого провода вводятся проекции аэродинамических сил на оси  $Oy$ ,  $Oz$ , обозначая их соответственно через  $Z^{(1)}, Z^{(2)}$  и  $Y^{(1)}, Y^{(2)}$ . Считается, что аэродинамические моменты равны нулю. Тогда, как видно из рисунка 4.2,

$$Y^{(1)} = L^{(1)} \sin \alpha^{(1)} + D^{(1)} \cos \alpha^{(1)}, \quad Z^{(1)} = L^{(1)} \cos \alpha^{(1)} - D^{(1)} \sin \alpha^{(1)}; \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} Y^{(2)} &= L^{(2)} \sin(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) + D^{(2)} \cos(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}), \\ Z^{(2)} &= L^{(2)} \cos(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) - D^{(2)} \sin(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Для наветренного провода имеем:

$$L^{(1)} = 0, \quad D^{(1)} = \frac{\rho V^{(1)2}}{2} d C_D^{(1)}, \quad (4.16)$$

где  $d$  – диаметр провода,  $C_D^{(1)} = 1.2$ .

Для подветренного провода –

$$L^{(2)} = \frac{\rho V^{(2)^2}{2} d\tilde{C}_L^{(2)}, \quad D^{(2)} = \frac{\rho V^{(2)^2}{2} d\tilde{C}_D^{(2)}, \quad (4.17)$$

где  $\tilde{C}_L^{(2)}$ ,  $\tilde{C}_D^{(2)}$  – коэффициенты подъемной силы и силы аэродинамического сопротивления по отношению к локальной скорости  $\tilde{V}$ .

Используя обозначение  $\tilde{V}_0^{(1)} = V_0 - \dot{v}^{(1)}$ , приближённо имеем:

$$V^{(1)} = \sqrt{(V_0 - \dot{v}^{(1)})^2 + \dot{w}^{(1)}} \approx \tilde{V}_0^{(1)} - \Delta\dot{v}^{(1)}.$$

Тогда

$$Y^{(1)} = \frac{\rho\tilde{V}_0^{(1)}}{2} dC_D^{(1)} (\tilde{V}_0^{(1)} - 2\Delta\dot{v}^{(1)}), \quad Z^{(1)} = -\frac{\rho\tilde{V}_0^{(1)}}{2} dC_D^{(1)} (\dot{w}_0^{(1)} + \Delta\dot{w}^{(1)}). \quad (4.18)$$

Вычисление аэродинамических сил для подветренного провода существенно сложнее. На основании (4.13) и (4.15) окончательно имеем:

$$\begin{aligned} Y^{(2)} &= \frac{1}{\Psi^2} \frac{\rho V_0^2}{2} d \left( \frac{V^{(2)}}{V^{(1)}} \right)^2 \frac{1}{V^{(2)}} \left\{ C_L^{(2)} [-(1-\Psi)\dot{w}^{(1)} + \dot{w}^{(2)}] + \right. \\ &\quad \left. + C_D^{(2)} [\Psi V_0 + (1-\Psi)\dot{v}^{(1)} - \dot{v}^{(2)}] \right\}, \\ Z^{(2)} &= \frac{1}{\Psi^2} \frac{\rho V_0^2}{2} d \left( \frac{V^{(2)}}{V^{(1)}} \right)^2 \frac{1}{V^{(2)}} \left\{ C_L^{(2)} [\Psi V_0 + (1-\Psi)\dot{v}^{(1)} - \dot{v}^{(2)}] - \right. \\ &\quad \left. - C_D^{(2)} [-(1-\Psi)\dot{w}^{(1)} + \dot{w}^{(2)}] \right\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

В выражения (4.19) входят аэродинамические коэффициенты, которые согласно (3.3) зависят от относительных координат  $\eta$ ,  $\xi$  поточной системы  $\tilde{O}\tilde{y}\tilde{z}$ . От этих же координат зависит функция распределения  $\Psi$  (3.2). Поэтому для получения аналитического выражения вариации работы аэродинамических сил для подветренного провода выражения (4.13) линеаризуются с использованием малости  $\Delta v = \tilde{v}$ ,  $\Delta w = \tilde{w}$ , входящих в формулы (4.4).

В итоге для наветренного и подветренного проводов получаем:

$$\begin{aligned} \delta A_a^{(j)} &= \gamma_0^{(j)} \delta v_0^{(j)} + z_0^{(j)} \delta w_0^{(j)} + \gamma_1^{(j)} \delta v_1^{(j)} + z_1^{(j)} \delta w_1^{(j)} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (\tilde{\gamma}_i^{(j)} \delta q_i^{(j)} + \tilde{z}_i^{(j)} \delta r_i^{(j)}) \quad (j=1, 2). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \gamma_k^{(1)} \\ z_k^{(1)} \end{pmatrix} &= l \left[ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Y_0^{(1)} \\ Z_0^{(1)} \end{pmatrix} + \frac{\rho d}{2} V_0^{(1)} C_D^{(1)} \begin{pmatrix} -\Delta\dot{v}_k^{(1)} \\ \Delta\dot{w}_k^{(1)} \end{pmatrix} \right], \\ \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_i^{(1)} \\ \tilde{z}_i^{(1)} \end{pmatrix} &= l \left\{ \frac{1}{i\pi} [1 - (-1)^i] \begin{pmatrix} Y_0^{(1)} \\ Z_0^{(1)} \end{pmatrix} + \frac{\rho d}{2} V_0^{(1)} C_D^{(1)} \begin{pmatrix} -\dot{g}_i^{(1)} \\ \dot{\kappa}_i^{(1)} \end{pmatrix} \right\}, \\ \begin{pmatrix} Y_0^{(1)} \\ Z_0^{(1)} \end{pmatrix} &= \frac{\rho V_0^{(1)}}{2} dC_D^{(1)} \begin{pmatrix} \tilde{V}_0^{(1)} \\ \dot{w}_0^{(1)} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \Delta \dot{v}_0^{(1)} \\ \Delta \dot{w}_0^{(1)} \end{pmatrix} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \dot{v}_1^{(1)} - \dot{v}_0^{(1)} \\ \dot{w}_1^{(1)} - \dot{w}_0^{(1)} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i\pi} \begin{pmatrix} \dot{q}_i^{(1)} \\ \dot{r}_i^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Delta \dot{v}_1^{(1)} \\ \Delta \dot{w}_1^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \dot{v}_1^{(1)} - \dot{v}_0^{(1)} \\ \dot{w}_1^{(1)} - \dot{w}_0^{(1)} \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^I}{i\pi} \begin{pmatrix} \dot{q}_i^{(1)} \\ \dot{r}_i^{(1)} \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \dot{g}_i^{(1)} \\ \dot{\kappa}_i^{(1)} \end{pmatrix} &= \left[ -\frac{(-1)^i}{i\pi} \begin{pmatrix} \dot{v}_1^{(1)} - \dot{v}_0^{(1)} \\ \dot{w}_1^{(1)} - \dot{w}_0^{(1)} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{q}_i^{(1)} \\ \dot{r}_i^{(1)} \end{pmatrix} \right]; \\
\begin{pmatrix} \mathcal{Y}_k^{(2)} \\ \mathcal{Z}_k^{(2)} \end{pmatrix} &= l \left[ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Y_0^{(2)} \\ Z_0^{(2)} \end{pmatrix} + \frac{\rho d}{2} \left( \frac{V_0}{\tilde{V}_0} \right)^2 V_0^{(2)} \mathbf{V}^M \begin{pmatrix} \Delta v_k^- \\ \Delta w_k^- \end{pmatrix} \right], \\
\begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{Y}}_i^{(2)} \\ \tilde{\mathcal{Z}}_i^{(2)} \end{pmatrix} &= l \left\{ \frac{1}{i\pi} [1 - (-1)^i] \begin{pmatrix} Y_0^{(2)} \\ Z_0^{(2)} \end{pmatrix} + \frac{\rho d}{2} \left( \frac{V_0}{\tilde{V}_0} \right)^2 V_0^{(2)} \mathbf{V}^M \begin{pmatrix} \mathcal{G}_i^- \\ \mathcal{K}_i^- \end{pmatrix} \right\}; \\
\begin{pmatrix} Y_0^{(2)} \\ Z_0^{(2)} \end{pmatrix} &= \frac{\rho V_0^{(2)}}{2} d \left( \frac{V_0}{\tilde{V}_0} \right)^2 \begin{pmatrix} C_{D0}^{(2)} & C_{L0}^{(2)} \\ C_{L0}^{(2)} & -C_{D0}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v}_0^* \\ \dot{w}_0^* \end{pmatrix}; \\
\dot{v}_0^* &= \Psi_0 \tilde{V}_0^{(1)} - \dot{v}_0^-, \quad \dot{w}_0^* = \Psi_0 \dot{w}_0^{(1)} + \dot{w}_0^-, \quad \dot{v}^- = \dot{v}^{(2)} - \dot{v}^{(1)}, \quad \dot{w}^- = \dot{w}^{(2)} - \dot{w}^{(1)}; \\
\begin{pmatrix} \mathcal{G}_i^{(1)} \\ \mathcal{K}_i^{(1)} \end{pmatrix} &= \left[ -\frac{(-1)^i}{i\pi} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} - v_0^{(1)} \\ w_1^{(1)} - w_0^{(1)} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q_i^{(1)} \\ r_i^{(1)} \end{pmatrix} \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}^M &= \begin{pmatrix} \dot{w}_0^* & \dot{v}_0^* \\ \dot{v}_0^* & -\dot{w}_0^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{Lv}^{(2)} & C_{Lw}^{(2)} \\ C_{Dv}^{(2)} & C_{Dw}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_Y^\Psi \\ V_Z^\Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_v \\ \Psi_w \end{pmatrix}^T, \quad \begin{pmatrix} \Delta v_k^- \\ \Delta w_k^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta v_k^{(2)} - \Delta v_k^{(1)} \\ \Delta w_k^{(2)} - \Delta w_k^{(1)} \end{pmatrix} \quad (k=0, 1); \\
\begin{pmatrix} \Delta v_0^{(1)} \\ \Delta w_0^{(1)} \end{pmatrix} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} - v_0^{(1)} \\ w_1^{(1)} - w_0^{(1)} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i\pi} \begin{pmatrix} q_i^{(1)} \\ r_i^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Delta v_1^{(2)} \\ \Delta w_1^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} - v_0^{(1)} \\ w_1^{(1)} - w_0^{(1)} \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^I}{i\pi} \begin{pmatrix} q_i^{(1)} \\ r_i^{(1)} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

В параграфе 4.6 получены уравнения колебаний для конечного элемента и системы (линии) в целом. В итоге уравнения колебаний конечного элемента провода записываются в матричном виде

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{F}_{in}(\dot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{F}_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_g(\mathbf{q}), \quad (4.21)$$

где  $\mathbf{q} = (u_0, v_0, w_0, \varphi_0, \dots, q_i, r_i, p_i, \dots, u_1, v_1, w_1, \varphi_1)^T$  – вектор-столбец обобщённых координат;  $\mathbf{M}$  – матрица масс;  $\mathbf{F}_{in}(\dot{\mathbf{q}})$  – вектор-столбец нелинейных компонент инерционных сил,  $\partial U / \partial \mathbf{q}$  – условное обозначение вектор-столбца из производных  $U$  по обобщённым координатам,  $\mathbf{F}_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  и  $\mathbf{F}_g(\mathbf{q})$  – обобщённые аэродинамические и гравитационные силы.

На основе (4.21) осуществляется ассемблирование элементных матриц и вектор-столбцов для получения общей системы дифференциальных уравнений колебаний проводов.

Параграф 4.7 посвящен определению начальной конфигурации линии с учётом статического провисания, температуры и технологической (монтажной) длины проводов.

Начальное состояние определяется из решения уравнений статики, путем отбрасывания инерционных компонент. Получающиеся уравнения нели-

нейны и для их численного решения требуются итерационные методы и алгоритмы с обоснованием сходимости итерационного процесса. Однако этого можно избежать, если воспользоваться методом продолжения решения по параметру  $p$ .

Параметр продолжения вводится следующим образом. Вместо уравнения (4.2) используется ему подобное:

$$\tilde{\Delta}^\circ(p) = L^\circ(p)[1 + \alpha T(p)] - L, \quad (4.22)$$

где

$$\tilde{L}^\circ(p) = L + (L^\circ - L) \cdot p, \quad \tilde{T} = T \cdot p; \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (4.23)$$

Считается, что гравитационная нагрузка также возрастает пропорционально  $p$ . Для этого удобно ввести вместо ускорения свободного падения  $g$ , входящего в выражения для гравитационной нагрузки (4.23), новый параметр

$$\tilde{g} = g \cdot p; \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (4.24)$$

С увеличением параметра  $p$  появляется гравитационная нагрузка и температурное расширение. Под их воздействием провод начинает провисать и возникает сила натяжения. Начинает также прирастать длина провода, вызывающего дополнительное его провисание. Процесс останавливается, когда  $p = 1$ , т.е. когда  $\tilde{L}^\circ = L^\circ$ ,  $\tilde{g} = g$  и  $\tilde{T} = T$ .

Пусть  $\mathcal{E} = U - A_g$  – полная энергия конечного элемента. Из условия стационарности  $\delta\mathcal{E} = 0$  следуют уравнения статики

$$\frac{\delta\mathcal{E}}{\delta q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.25)$$

где  $q_i$  – элемент вектор-столбца обобщенных координат  $\mathbf{q}$ ,  $N$  – число степеней свободы элемента.

Дифференцируя (4.34) по параметру  $p$ , получим

$$\mathbf{T} \frac{d\mathbf{q}}{dp} = \frac{d}{dp} \frac{\partial A_g}{\partial \mathbf{q}}, \quad (4.26)$$

где  $\mathbf{T} = \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right\|$  – касательная матрица  $N \times N$ ; вектор-столбец

$$\frac{\partial A_g}{\partial \mathbf{q}} = \left( \frac{\partial A_g}{\partial q_1} \quad \dots \quad \frac{\partial A_g}{\partial q_N} \right)^T.$$

*Заключительный параграф 4.8* посвящен вычислительному алгоритму. Отмечается, что задачи динамики деформируемых конструкций относятся, в общем случае, к классу жестких задач для которых явные методы либо не работают, либо их работа неэффективна. В диссертации показано, что при численном решении задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка возможно построение простых и экономичных неявных вычислительных алгоритмов пошагового интегрирования без организации трудоемких итерационных процедур, основанных на процессах по типу итераций Ньютона-Рафсона. Предварительно исходная задача должна быть преобразована к новому аргументу – длине ее интегральной кривой. Такое преобразование осуществляется с использованием уравнения, связываю-

щего исходный параметр задачи с длиной интегральной кривой. На примере метода линейного ускорения, который является основой известных методов Ньюмарка и Вилсона, показана процедура построения неявного алгоритма с использованием простых итераций для численного решения преобразованной задачи Коши.

**В пятой главе** приводятся результаты численного моделирования субколебаний двух проводов, закреплённых шарнирно по концам между двумя абсолютно жёсткими опорами. В расчётах использованы данные для проводов АС 500/26 и АС 330/43.

В качестве примера ниже приводятся результаты решения двух задач.

*Задача 1.* Рассматриваются два провода длиной  $l = 45$  м с характеристиками АС 500/26 в отсутствии гравитации. Провода диаметром  $d = 30$  мм закреплены на анкерных опорах по краям. Дистанционных распорок нет. Расстояние между проводами в начальном состоянии равно  $10d = 300$  мм. Подветренный провод расположен ниже наветренного на  $2.5$  диаметра провода, как показано на рис. 5.1. Провода натянуты с силой  $N = 16000$  Н. Скорость ветра  $V_0 = 15$  м/с.

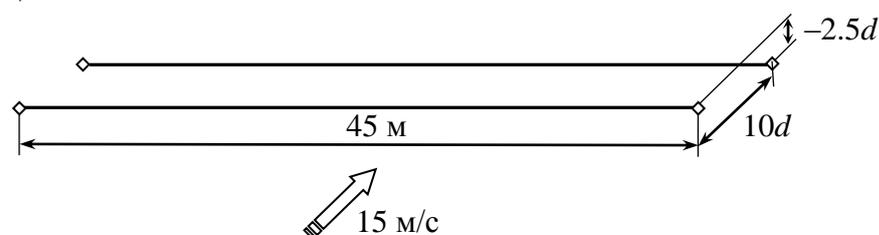


Рис. 5.1.

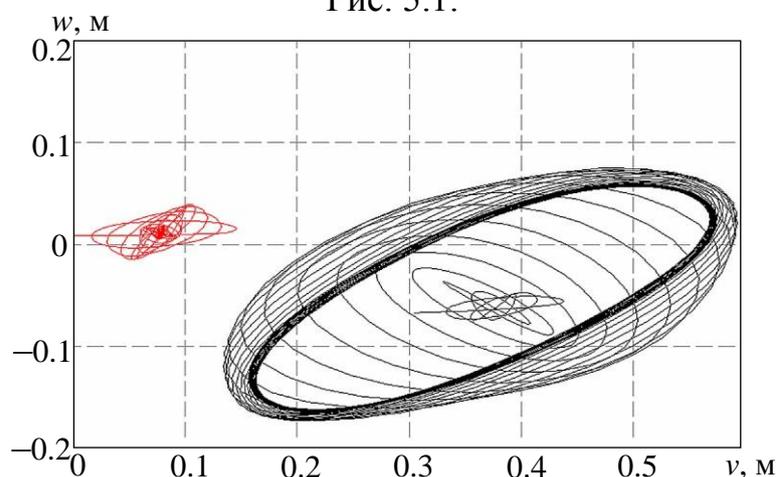


Рис. 5.2.

Результаты расчетов траекторий движения показаны на рис. 5.2, откуда видно, что средняя точка подветренного провода движется в установившемся режиме колебаний по эллиптической орбите, достигая приблизительно 15 диаметров провода по большой оси и 4.7 диаметра провода по малой оси. Анализ численных результатов также показал, что частоты колебаний проводов примерно равны 1.4 Гц и 1.25 Гц в плоскостях  $Oxy$  и  $Oxz$  соответствен-

но, при существенном различии в амплитудах и незначительном рассогласовании по фазе.

В работе Simiu, E., Scanlan, R. H. (“Wind Effects on Structures: Fundamentals and Applications to Design”) приведены результаты экспериментальных исследований колебаний двух цилиндров при их продувке в аэродинамической трубе. Геометрические параметры пучка цилиндров подобны параметрам пучка проводов задачи. На рис. 5.3 приведена орбита движения центральной точки подветренного цилиндра, которая подобна орбите, приведенной на рис. 5.2. Пропорциональность осей орбитального эллипса сохраняется, что говорит об адекватности рассмотренной выше математической модели реальному физическому процессу – колебаниям проводов, индуцированным спутным следом.

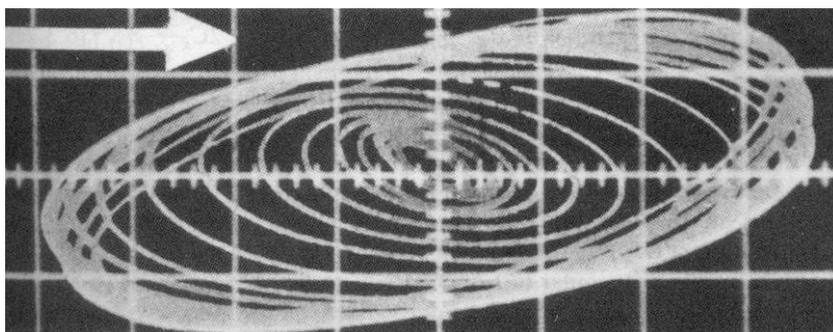


Рис. 5.3.

*Задача 2.* Рассматривается воздушная линия электропередачи, состоящая из двух проводов серии АС 500/26 с внешним диаметром  $d = 30$  мм, натянутых в пролёте длиной 367 м между двумя анкерными опорами. Начальное расстояние между проводами принимается равным 446 мм, которое определяется конструкцией одинаковых для пролёта дистанционных распорок. Линия имеет 7 подпролётов различной длины, указанные в таблице 5.1. Внешняя температура  $T = 25^\circ\text{C}$ . Сила натяжения проводов принимается равной  $N = 22.5$  кН, составляющего примерно 20% от разрывного усилия для провода.

Начальная конфигурация линии рассчитывается из решения статической задачи методом продолжения решения по параметру в соответствии с п. 4.6. В результате определена стрела провеса  $f = 10.5$  м, соответствующая тяжению  $N = 22.5$  кН. На рисунке 5.4 начальная конфигурация отмечена синим цветом, черным цветом выделена промежуточная конфигурация линии в некоторый момент процесса субколебаний.

Табл. 5.1 – Параметры подпролётов

№ подпролёта	Длина подпролёта, м	Скорость ветра, м/с
1	35	11
2	56	10
3	64	9
4	57	8,5
5	65	10
6	55	11
7	35	12

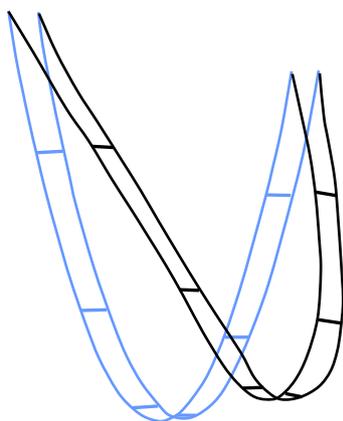


Рис. 5.4.

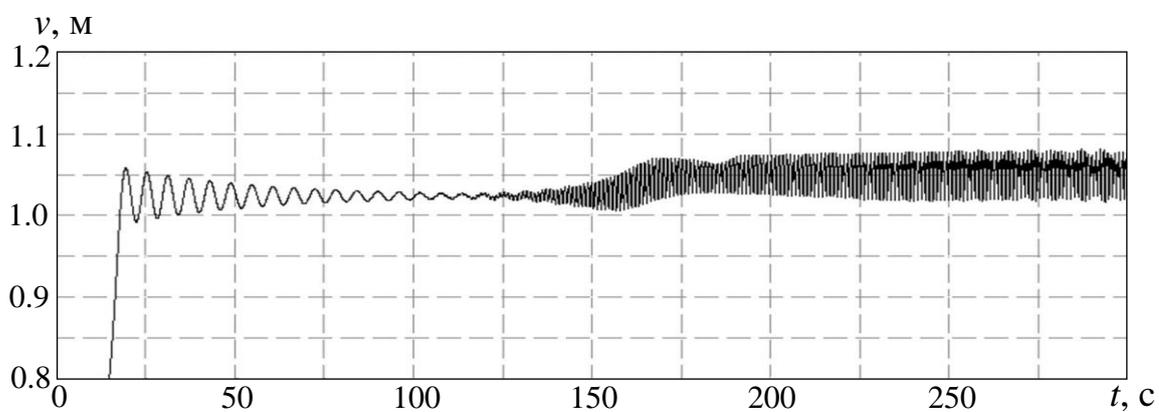


Рис. 5.5.

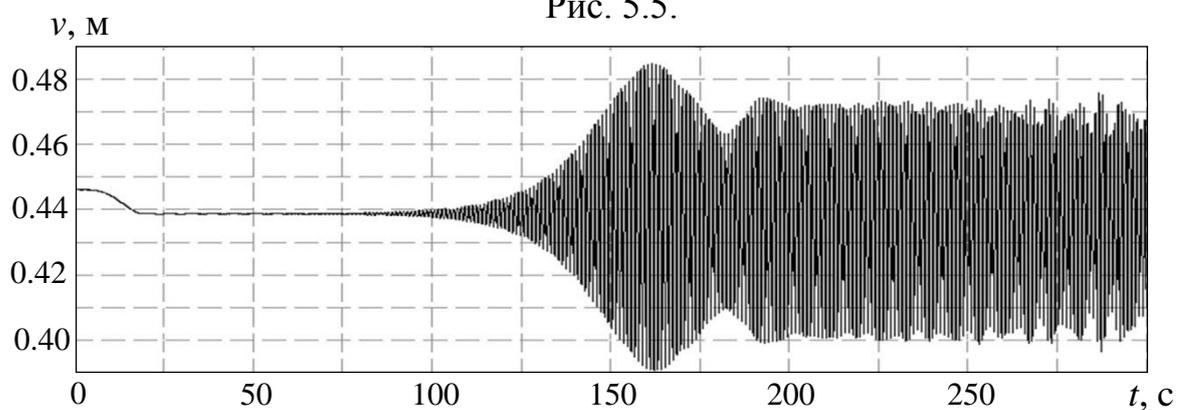


Рис. 5.6.

Изменение горизонтальной координаты середины наветренного провода четвёртого подпролёта показана на рисунке 5.5. На рисунке 5.6 представлена временная зависимость положения середины подветренного провода относительно середины наветренного в четвёртом подпролёте.

Траектории движения средних точек проводов в четвёртом подпролёте в диапазоне от 0 до 300 с показаны на рисунке 5.7: красная – для наветренного провода, чёрная – для подветренного.

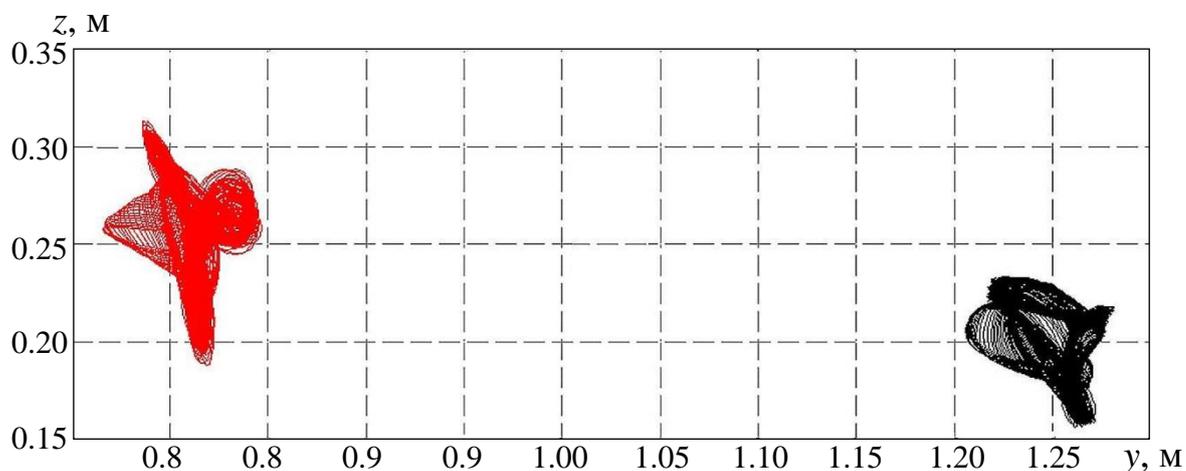


Рис. 5.7.

Для других пролётов наблюдается иные по характеру зависимости координат середин подпролётов от времени.

Сравнительный анализ результатов выполненных расчётов говорит о весьма сложном характере колебаний проводов для пучков проводов с дистанционными распорками, зависящими в значительной степени, как от геометрических параметров линии, так и от профиля набегающего скоростного напора. В этой связи, представляется весьма важным прогноз возможных амплитуд относительных колебаний проводов в подпролётах для предотвращения соударения проводов, находящихся под высоким напряжением и, как следствие, разрушительных явлений.

**В заключении** приводятся основные результаты диссертационной работы.

1. На основе конечно-элементной дискретизации разработана математическая модель индуцированных спутным следом нелинейных колебаний проводов расщеплённой фазы воздушной ЛЭП со связями в виде дистанционных распорок. Для аппроксимации локальных перемещений в пределах конечного элемента используется метод Рунге с выбором тригонометрических функций в качестве базисных, позволяющий с различной степенью «детализации» описывать колебания в заданных частотных диапазонах. Уравнения колебаний проводов получены в обобщённых координатах с нелинейностями упругих, инерционных и аэродинамических сил. В качестве обобщённых координат принимаются абсолютные перемещения и углы закручивания узловых сечений, а также коэффициенты тригонометрических разложений для локальных перемещений и углов закручивания в пределах каждого элемента.

2. Получены аналитические выражений для вычисления: жесткостей проводов с учётом их многослойной проволочной структуры; аэродинамиче-

ских нагрузок в спутном следе на основе модифицированной теории Симпсона с использованием эмпирических данных Блевинса и Прайса.

3. На основе метода продолжения решения по параметру разработан подход к получению статических решений, определяющих начальную конфигурацию аэроупругой системы с учётом монтажной длины проводов, воздействия температуры и наличия закреплённых на проводах грузов.

4. Для численного интегрирования системы уравнений колебаний предложен алгоритм, основанный на параметризации уравнений с выбором в качестве аргумента длины интегральной кривой решения. Для параметризованной задачи предложена неявная схема второго порядка точности, основанная на методе линейного ускорения с использованием простых итераций.

5. Дано решение новых аэроупругих задач о колебаниях двух закреплённых по концам проводов с учётом аэродинамических нагрузок, индуцированных спутным следом. Для модельной задачи сделано сопоставление численного решения с известными экспериментальными данными.

## **ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

### **Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК.**

1. Данилин А.Н., Кузнецова Ел.Л., Курдюмов Н.Н., Тарасов С.С. Деформирование спиральных зажимов для проводов воздушных линий электропередачи // Нелинейный мир, №4, т.11, 2013, с. 234-242.

2. Данилин А.Н., Курдюмов Н.Н., Тарасов С.С., Шалашилин А.Д. Моделирование гистерезиса энергорассеяния на примере колебаний гасителя пляски проводов ЛЭП // Известия ТулГУ. Технические науки. Вып. 6. Тула: Изд-во ТулГУ, 2014.-с. 110-118.

2. Данилин А.Н., Кузнецова Ел.Л., Курдюмов Н.Н., Шалашилин А.Д. Кинематическая модель энергорассеяния гасителя пляски проводов воздушных линий электропередачи // Вестник МАИ, №4, т. 21, 2014. – с. 181-188.

4. Аносов Ю.В., Данилин А.Н., Курдюмов Н.Н. О жесткостях проволочных конструкций спирального типа // Труды МАИ, №80, 2015г.

### **Публикации в изданиях, цитируемых в списке Scopus и интернет-платформой Web of Science.**

5. Данилин А.Н., Курдюмов Н.Н., Рабинский Л.Н. О моделировании деформирования проволочных конструкций спиральной структуры // Вестник ПНИПУ. Механика. 2015, №4, с.72-93.

6. Данилин А.Н., Кузнецова Ел.Л., Курдюмов Н.Н., Рабинский Л.Н., Тарасов С.С. О модификации модели Бук-Вена для описания гистерезиса нестационарных процессов // Вестник ПНИПУ. Механика. 2016, №4, с.187-199.

7. Данилин А.Н., Виноградов А.А., Курдюмов Н.Н., Сергей И.И. О моделировании пляски проводов воздушных ЛЭП и параметрическом анализе эффективности маятниковых гасителей // Вестник ПНИПУ. Механика. 2018, №4, с.256-265.

### **Публикации в других изданиях.**

Публикации в других изданиях приведены в диссертационной работе.