На правах рукописи

Рыбаков Константин Александрович

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА И СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Специальность 2.3.1. Системный анализ, управление
и обработка информации, статистика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва, 2024

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный консультант:

Пантелеев Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическая кибернетика» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Официальные оппоненты:

Кузнецов Дмитрий Феликсович
доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого».

Горяинов Владимир Борисович
доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Математическое моделирование» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)».

Колесникова Светлана Ивановна
доктор технических наук, доцент, профессор кафедры компьютерной математики и программирования федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения».

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук.

Защита состоится 25 октября 2024 г. в 10 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета 24.2.327.02 Московского авиационного института (национального исследовательского университета) по адресу: г. Москва, Волоколамское шоссе, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета) по адресу: г. Москва, Волоколамское шоссе, 4, и на сайте МАИ по адресу:
https://mai.ru/events/defence/doctor/?ELEMENT_ID=181186

Автореферат разослан ________________

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.2.327.02 | Рассказова
кандидат физико-математических наук | Варвара Андреевна

Общая характеристика работы

Объектом исследования являются математические модели непрерывных стохастических систем, описываемых линейными и нелинейными стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ), кратные и повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича.

Предметом исследования являются приближенно-аналитические и численные методы анализа выходных процессов и статистического моделирования непрерывных стохастических систем, основанные на спектральной форме математического описания систем управления, методы аппроксимации кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича.

Актуальность работы. Для описания динамических систем, состояние которых изменяется в непрерывном времени, используются дифференциальные уравнения. Классическая теория дифференциальных уравнений предполагает, что решениями являются достаточно гладкие детерминированные функции, однако для учета случайных входных воздействий или внешних возмущений необходимо рассматривать дифференциальные уравнения со случайными функциями (случайными процессами). Для случайных функций типа белого шума классическая теория неприменима и в ее развитие, начиная с работ С.Н. Бернштейна, Н.Н. Боголюбова и Н.М. Крылова, возникла теория СДУ, строгое обоснование которой связано с работами И.И. Гихмана и K. Itô. СДУ находят применение при описании и анализе различных физических, технических и химических процессов, в финансовой математике, в биологии и медицине, имеют существенное значение при обработке информации в радиотехнике и навигационных комплексах.

При изучении любого СДУ ключевым является его тип и определение решения. Уравнение, рассмотренное K. Itô, основано на понятии стохастического интеграла по винеровскому процессу. Такой интеграл предложил N. Wiener для детерминированных функций. Конструкция стохастического интеграла K. Itô (стохастический интеграл Ито) предполагает, что интеграл определен для случайных функций. Он обладает рядом полезных свойств (центрированность и изометричность), но одновременно для него несправедливы правила привычного интегрального исчисления. Со временем появились другие определения стохастических интегралов и связанных с ними СДУ. Р.Л. Стратонович и D. Fisk независимо предложили стохастический интеграл (стохастический интеграл Стратоновича), для которого выполняются обычные правила интегрального исчисления.

Перечисленные стохастические интегралы определяются как пределы последовательностей соответствующих интегральных сумм. Интегральные суммы могут включать не сечения случайного процесса, а его интегральные усреднения на непересекающихся подмножествах. Предел последовательности таких интегральных сумм дает симметричный стохастический интеграл, свойства которого изучали D. Nualart, E. Pardoux, M. Zakai, Ф.С. Насыров. Существуют стохастические интегралы, которые определяются как ряды случайных величин, например стохастический интеграл, введенный S. Ogawa (стохастический интеграл Огавы). Теория стохастических интегралов не исчерпывается интегралами по винеровскому процессу. Наиболее часто после них упоминаются и применяются интегралы по пуассоновскому процессу и по его центрированной версии.

Для приложений важны методы нахождения решений конкретных типов уравнений, что является очень непростой задачей. Как правило, при обсуждении аналитических решений СДУ Ито и Стратоновича рассматриваются линейные уравнения или нелинейные уравнения, которые сводятся к линейным с помощью замены переменных. Большинство примеров, в которых получены аналитические решения СДУ, построены от обратного, т.е. по аналитическому выражению некоторого случайного процесса строится СДУ, решением которого оно является. Обратные задачи из работ В.А. Дубко и Е.В. Карачанской включают построение СДУ по заданному многообразию, которому принадлежат траектории решения.

Так как аналитические решения СДУ можно отыскать только в некоторых случаях, возникает необходимость в методах, позволяющих найти решение приближенно. Здесь разумно выделить численные методы, которые предполагают аппроксимацию решения в дискретном времени, и приближенно-аналитические методы, позволяющие аппроксимировать решение частичной суммой ряда.

Начиная со статьи G. Maruyama (метод Эйлера – Маруямы), развиваются численные методы решения СДУ. Разные варианты методов типа Рунге – Кутты предлагали P.E. Kloeden и R.A. Pearson, Г.Н. Мильштейн, Н.Н. Никитин и В.Д. Разевиг, Y. Saito и T. Mitsui, K. Burrage и T. Tian, A. Rößler, A.J. Roberts, X. Xin, W. Qin и X. Ding. Семейство методов типа Розенброка предложено Т.А. Авериной и С.С. Артемьевым. Обзоры различных методов решения СДУ опубликованы E. Pardoux и D. Talay, А.В. Лукшиным и С.Н. Смирновым, K. Burrage, P.M. Burrage и T. Tian, также достаточно полные обзоры содержатся в монографиях Г.Н. Мильштейна и М.В. Третьякова, P.E. Kloeden и E. Platen, Т.А. Авериной и С.С. Артемьева, Д.Ф. Кузнецова, C. Graham и D. Talay, В.К. Саульева, H. Schurz.

Отдельно выделим семейства численных методов, в основе которых лежат разложения решения СДУ: разложения Тейлора – Ито и Тейлора – Стратоновича (W. Wagner, E. Platen и P.E. Kloeden), а также унифицированные разложения Тейлора – Ито и Тейлора – Стратоновича (Д.Ф. Кузнецов). Они содержат повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича по случайным процессам, которые задают СДУ. Разностные схемы для соответствующих численных методов включают начальные слагаемые разложений Тейлора – Ито или Тейлора – Стратоновича. Несмотря на то, что указанные разложения содержат повторные стохастические интегралы с простейшими (единичными) весовыми функциями или, после преобразований, с весовыми функциями в виде мономов, в общем случае эти интегралы не выражаются элементарным образом через случайные величины, для которых есть эффективные алгоритмы моделирования.

Самый простой вариант их приближенного моделирования — численное интегрирование, однако для повторных стохастических интегралов по винеровским процессам лучше применять разложение по ортонормированным функциям, что было показано Г.Н. Мильштейном. Он ограничился аппроксимацией интегралов второй кратности, используя тригонометрическую систему функций (метод Мильштейна). Аналогичная аппроксимация для интегралов третьей кратности появилась в работе P.E. Kloeden и E. Platen. Варианты аппроксимации интегралов второй кратности обсуждаются в статьях C.W. Li, X.Q. Liu и S.C. Wu, A. Rößler, а их распределение изучали T. Rydén и M. Wiktorsson. Кубатурные формулы для повторных стохастических интегралов предложили S. Hayakawa и K. Tanaka. Принципиально, что в общем случае, не учитывая в разностной схеме повторные стохастические интегралы, невозможно добиться высокого порядка среднеквадратической или сильной сходимости численного метода (J.M.C. Clark и R.J. Cameron, Г.Н. Мильштейн).

Перечисленные выше методы приближенного решения СДУ применяются при наличии в уравнении пуассоновской составляющей и для уравнений со случайными изменениями правой части (Т.А. Аверина, M.K. Ghosh и A. Bagchi, F.B. Hanson, E. Platen и N. Bruti-Liberati, Н.В. Черных и П.В. Пакшин).

Повторные стохастические интегралы из разложений Тейлора – Ито и Тейлора – Стратоновича выражаются через решения векторных линейных СДУ Ито и Стратоновича, их можно рассматривать как частный случай кратных стохастических интегралов Ито и Стратоновича соответственно. Кратные стохастические интегралы появились в статье N. Wiener, а далее K. Itô предложил более удобное определение (кратный стохастический интеграл Ито). Кратные стохастические интегралы определяются по винеровским и пуассоновским процессам. Важные результаты в этом направлении получили T. Hida и N. Ikeda, H. Ogura, A. Segall и T. Kailath, P. Major, Y. Ito и I. Kubo. Однако они не рассматривали численные методы решения СДУ как возможное приложение: кратные стохастические интегралы определены относительно одного винеровского или пуассоновского процессов. Их применение — представление случайных величин в виде рядов, образованных кратными стохастическими интегралами возрастающей кратности. Кратные стохастические интегралы Ито применяются для описания предельных распределений U- и V-статистик. В работах R. Fox и M.S. Taqqu, J. Szulga, M. Farré, M. Jolis и F. Utzet рассмотрен более общий случай: кратные стохастические интегралы по винеровским процессам и по процессам Леви. Наряду с кратными стохастическими интегралами Ито изучаются и кратные стохастические интегралы Стратоновича. Y.-Z. Hu и P.-A. Meyer определили кратный стохастический интеграл Стратоновича по винеровскому процессу и получили представление для него в виде суммы кратных стохастических интегралов Ито и, возможно, константы (разложение Ху – Мейера). Важные результаты для таких интегралов получены J.L. Solé и F. Utzet, G.W. Johnson и G. Kallianpur, X. Bardina, M. Jolis и C. Rovira. Работы Д.Ф. Кузнецова в этом направлении ориентированы именно на численные методы решения СДУ. Сложность кратных стохастических интегралов Стратоновича состоит в «проблеме следов». Она заключается в том, что класс функций, для которых определены интегралы Стратоновича, не такой широкий по сравнению с классом функций, для которых определены интегралы Ито. Здесь можно привести аналогию с теорией линейных операторов: отличия между областями определения кратных стохастических интегралов Ито и Стратоновича отчасти аналогичны отличиям между множествами ядер операторов Гильберта – Шмидта и операторов следового класса. Помимо приведенных выше кратных стохастических интегралов, существуют кратные стохастические интегралы Огавы. Определения и аналоги формулы Ху – Мейера для них представлены D. Nualart и M. Zakai, R. Delgado.

Приведенный обзор по кратным стохастическим интегралам охватывает ряд важных результатов. Тем не менее, за редким исключением работ Д.Ф. Кузнецова они слабо применимы для численных методов решения СДУ и здесь можно выделить два обстоятельства. Первое обстоятельство связано с тем, что в большинстве перечисленных работ кратные стохастические интегралы определены относительно одного случайного процесса и этого достаточно для представления случайных величин. Но повторные стохастические интегралы, рассматриваемые как частный случай кратных и используемые при построении численных методов, определяются относительно всех комбинаций случайных процессов, выбираемых из некоторого конечного множества независимых случайных процессов, в том числе и с повторениями. Интеграл по одному случайному процессу — это только один из вариантов. Можно выделить два предельных варианта: интеграл по одному случайному процессу и интеграл по независимым случайным процессам. Интегралы второй кратности этими двумя вариантами и исчерпываются, однако для интегралов большей кратности есть промежуточные варианты, число которых растет с увеличением кратности. Второе обстоятельство состоит в том, что для реализации численных методов решения СДУ, построенных на основе разложений Тейлора – Ито и Тейлора – Стратоновича или их унифицированных версий, требуется моделировать повторные стохастические интегралы. Только для некоторых из них существуют простые моделирующие формулы, однако в общем случае необходимо разрабатывать алгоритмы приближенного моделирования. Для повторных стохастических интегралов второй кратности такой алгоритм предложен Г.Н. Мильштейном. Для повторных стохастических интегралов третьей кратности два возможных варианта описаны в монографиях P.E. Kloeden и E. Platen, Т.А. Авериной и С.С. Артемьева, где использовались разложения винеровских процессов в ряды по тригонометрическим функциям. С.М. Пригариным и С.М. Беловым для аппроксимации повторных стохастических интегралов второй кратности дополнительно применялись функции Хаара.

Значительное продвижение в аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича достигнуто Д.Ф. Кузнецовым. Предложенный им подход предполагает переход к кратным стохастическим интегралам с последующим их представлением в виде кратных рядов со случайными коэффициентами. При этом используется разложение детерминированных функций многих переменных в обобщенные ряды Фурье. В качестве базисных систем для представления повторных стохастических интегралов произвольной кратности основное внимание уделено полиномам Лежандра и тригонометрическим функциям, но также применялись функции Уолша и Хаара для представления повторных стохастических интегралов второй кратности.

Представление кратных стохастических интегралов в виде рядов встречалось и ранее (J. Rosinski, G.W. Johnson и G. Kallianpur), но без приложения к решению СДУ и с указанными выше ограничениями. Кратные стохастические интегралы Огавы сразу определяются как ряды и при выполнении ряда условий они совпадают с кратными стохастическими интегралами Стратоновича. В этом контексте стоит еще указать на работы И.С. Борисова и С.Е. Хрущева, в которых также используются представления кратных стохастических интегралов в виде рядов.

Приведенный обзор показывает, что, несмотря на довольно развитую теорию кратных и повторных стохастических интегралов, она далека от завершения в области приложений к численным методам решения СДУ, а значит и к методам анализа и статистического моделирования непрерывных стохастических систем. Ее развитие в этой части является актуальной задачей. Представляет как теоретический, так и практический интерес использование произвольных базисных систем для представления кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича, в том числе и более общего вида по сравнению с интегралами, которые необходимы для реализации численных методов. Актуально формирование новых алгоритмов приближенного моделирования кратных и повторных стохастических интегралов.

При приближенном решении линейных СДУ альтернативой численным методам могут служить приближенно-аналитические методы, которые не предполагают переход к дискретному времени. Они основаны на приближенном представлении решений в виде линейных комбинаций базисных функций со случайными коэффициентами. И здесь перспективным является применение спектральной формы математического описания систем управления.

Для моделей линейных непрерывных и дискретных систем управления, как правило, используют следующие формы математического описания: дифференциальными и разностными уравнениями; интегральными уравнениями и их разностными аналогами; интегральными преобразованиями. При выборе первых двух форм математического описания преобразование сигналов в системе управления осуществляется непосредственно во временной области, а третья форма предполагает переход от функций времени к их изображениям.

В.В. Семеновым был разработан спектральный метод расчета нестационарных систем управления. Этот метод породил новую спектральную форму математического описания сигналов и систем управления. Истоки спектрального метода расчета линейных нестационарных систем управления лежат в представлении сигналов в виде ортогональных рядов. Коэффициенты этих рядов, отделенные от самих рядов и представленные в виде упорядоченного набора — бесконечной матрицы-столбца, рассматриваются как характеристики сигналов и систем управления. Они составляют математический аппарат анализа и синтеза линейных и нелинейных систем управления. Этот математический аппарат включает следующие характеристики сигналов: нестационарные спектральные характеристики функций времени и нестационарные спектральные плотности случайных процессов, а также характеристики систем управления — нестационарные передаточные функции: нормальную, сопряженную и двумерную (последняя — спектральная характеристика линейного оператора).

Для линейных систем управления использование спектральной формы математического описания и спектрального метода состоит в переходе от исходной задачи решения линейных дифференциальных, интегро-дифференциальных, разностных уравнений, уравнений с запаздыванием к решению системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения решений этих уравнений в ортогональные ряды по выбранной базисной системе. Основные результаты по спектральному методу были опубликованы в монографиях В.В. Семенова, В.В. Солодовникова, А.Н. Дмитриева, Н.Д. Егупова, В.В. Рыбина.

Спектральная форма математического описания систем управления, как и другие формы, позволяет проводить анализ не только линейных систем управления с сосредоточенными параметрами при детерминированных и случайных воздействиях, но и анализ линейных систем управления с распределенными параметрами (Ю.А. Клевцов и В.Е. Краскевич, В.А. Коваль и О.Ю. Торгашова), а также нелинейных стохастических систем управления (В.В. Семенов, И.Л. Сотскова, А.В. Пантелеев, К.А. Рыбаков и А.С. Кожевников). Различные задачи для линейных систем управления при случайных воздействиях или для нелинейных стохастических систем предлагалось решать как детерминированные: либо в рамках корреляционной теории, либо с помощью перехода к нахождению плотности распределения вероятностей вектора состояния. Однако спектральный метод дает возможность находить явный вид выходного сигнала как случайного процесса, т.е. не ограничиваться детерминированными характеристиками вектора состояния. Отчасти эти вопросы нашли отражение в монографиях В.В. Солодовникова, В.В. Семенова, К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова, С.В. Лапина и А.И. Трофимова, но в них не содержится представлений решения задачи анализа линейных непрерывных стохастических систем в общей постановке.

Существует близкий метод, основанный на канонических разложениях случайных процессов, который был предложен В.С. Пугачевым и подробно описан в монографии И.Н. Синицына, однако он не применялся для представления кратных и повторных стохастических интегралов. И спектральная форма математического описания, и метод канонических разложений предполагают, что случайные процессы представляются в виде рядов со случайными коэффициентами. Однако, если для канонического разложения линейное преобразование сводится к преобразованию детерминированных функций с сохранением случайных коэффициентов, то для спектрального метода линейное преобразование сохраняет детерминированные функции (ортонормированный базис), а все действия осуществляются со случайными коэффициентами. Это отличие позволяет существенно упростить алгоритмы преобразований случайных процессов, сводя их к алгебраическим операциям с векторами и матрицами.

Дополнительно укажем работы по решению СДУ, представленные Z. Yin, S. Gan, F. Mohammadi, N. Momenzade, A.R. Vahidi, E. Babolian, S.U. Khan, M. Ali, I. Ali, C. Chauvière и H. Djellout, в которых применяются различные варианты спектрального метода (но не спектральной формы математического описания систем управления).

Разработка спектрального метода анализа и статистического моделирования линейных непрерывных стохастических систем в общей постановке представляется актуальной и имеющей как теоретическую, так и практическую значимость. Во-первых, такой метод позволяет представить выходные сигналы линейных непрерывных систем при случайных воздействиях как случайные процессы в форме, удобной для решения задач анализа, статистического моделирования и оценивания. Во-вторых, он дает новые представления повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича произвольной кратности, что позволяет применять спектральную форму математического описания систем управления для реализации численных методов решения нелинейных СДУ и, таким образом, решать задачи анализа, статистического моделирования и оценивания уже для нелинейных непрерывных стохастических систем.

Расчет систем автоматического управления на основе спектральной формы математического описания предполагает наличие алгоритмического и программного обеспечения, которое необходимо для вычисления характеристик сигналов и систем управления относительно различных базисных функций. Оно разрабатывалось и совершенствовалось вместе с развитием спектральной теории для задач, в перечень которых не входило моделирование случайных процессов, а также кратных и повторных стохастических интегралов, поэтому разработка нового программного обеспечения, ориентированного на моделирование кратных и повторных стохастических интегралов, также является необходимой частью исследований.

Цель работы состоит в обобщении спектрального метода для анализа выходных процессов и статистического моделирования непрерывных стохастических систем, получении новых представлений кратных и повторных стохастических интегралов, а также в разработке алгоритмов их статистического моделирования. Чтобы достичь поставленной цели, необходимо решить следующие **задачи**:

1. Разработать алгоритмическое обеспечение представления случайных процессов в спектральной форме математического описания систем управления.

2. Обобщить спектральный метод для анализа и статистического моделирования линейных непрерывных стохастических систем.

3. Обобщить спектральный метод для оценивания состояний линейных непрерывных стохастических систем с полиномиальными измерителями.

4. Получить новые представления кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича произвольной кратности, в том числе на основе спектральной формы математического описания систем управления.

5. Разработать новые алгоритмы статистического моделирования кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича произвольной кратности, в том числе необходимых для статистического моделирования нелинейных непрерывных стохастических систем.

6. Разработать алгоритмическое обеспечение статистического моделирования кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича на основе спектральной формы математического описания систем управления, провести апробацию предложенных методов и алгоритмов.

Методы исследования. Для решения поставленных задач использовались методы математического и функционального анализа, теории управления, теории вероятностей и математической статистики, теории случайных процессов.

Достоверность результатов обусловлена доказательствами лемм и теорем. Результаты моделирования и вычислительные эксперименты подтверждают теоретические положения.

Научная новизна состоит в следующих результатах:

1. Разработано алгоритмическое обеспечение представления случайных процессов в спектральной форме математического описания систем управления.

2. Обобщен спектральный метод для анализа и статистического моделирования линейных непрерывных стохастических систем, получены представления некоторых типовых случайных процессов в спектральной форме математического описания систем управления.

3. Обобщен спектральный метод для оценивания состояний (фильтрация, сглаживание и прогнозирование) линейных непрерывных стохастических систем с полиномиальными измерителями.

4. Получены ортогональные разложения кратных стохастических интегралов Ито и Стратоновича произвольной кратности в виде рядов случайных величин, которые необходимы в том числе для статистического моделирования нелинейных непрерывных стохастических систем.

5. Разработаны методы расчета коэффициентов разложения функций многих переменных (относительно полиномов Лежандра, косинусоид, функций Уолша и Хаара, тригонометрических функций), определяющих повторные стохастические интегралы, необходимые для реализации методов статистического моделирования нелинейных непрерывных стохастических систем.

6. Получены представления повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича произвольной кратности на основе спектральной формы математического описания систем управления.

7. Получены формулы для точного вычисления среднеквадратических погрешностей аппроксимации кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича на основе перехода к симметризованным функциям.

8. Разработан метод аппроксимации множества спектральных характеристик функций одной переменной с ограничениями (типовыми ограничениями на управляющие воздействия или входные/выходные сигналы).

9. Разработано алгоритмическое обеспечение статистического моделирования кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича на основе спектральной формы математического описания систем управления.

Теоретическая значимость результатов состоит в развитии спектральной формы математического описания случайных процессов в непрерывном времени, которые можно трактовать как сигналы в непрерывных системах управления; в обобщении спектрального метода для анализа, статистического моделирования и оценивания состояний непрерывных стохастических систем; в новых представлениях кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича; в новом алгоритмическом обеспечении статистического моделирования повторных стохастических интегралов.

Практическая значимость результатов обусловлена возможностью применения разработанных методов, алгоритмов и комплекса программ для решения задач анализа и статистического моделирования непрерывных стохастических систем, в задачах оценивания их состояний, т.е. в задачах статистической обработки информации (в естественно-научной, технической и финансовой сферах).

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В диссертации обобщен спектральный метод для анализа, статистического моделирования и оценивания состояний линейных непрерывных стохастических систем, базирующийся на спектральной форме математического описания систем управления. На его основе получены новые представления кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича, а также разработано алгоритмическое и программное обеспечение для их статистического моделирования. Они предназначены для реализации методов статистического моделирования нелинейных непрерывных стохастических систем (в основе численные методы решения СДУ с высокими порядками среднеквадратической и сильной сходимости). Полученные результаты могут применяться при решении задач анализа выходных процессов, статистического моделирования и оценивания для нелинейных непрерывных стохастических систем, т.е. в задачах статистической обработки информации. Перечисленные результаты соответствуют следующим направлениям исследований специальности 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика»:

1. Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

2. Формализация и постановка задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

4. Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

5. Разработка специального математического и алгоритмического обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях: Научный семинар кафедры «Математическая кибернетика» МАИ (под рук. д.ф.-м.н., проф. Пантелеева А.В.); Научный семинар кафедры «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» МАИ (под рук. д.ф.-м.н., проф. Кибзуна А.И.); Межд. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 2012, 2013); Межд. конф. «Авиация и космонавтика» (Москва, 2013, 2014); Межд. конф. «Идентификация систем и задачи управления» (Москва, 2015); Межд. конф. «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» (Новосибирск, 2015); Межд. конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Алушта, 2017, 2019, 2021); Межд. конф. «Аналитическая механика, устойчивость и управление» (Казань, 2017); Межд. конф. «Математическая теория управления и механика» (Суздаль, 2017); Int. Multi-Conf. on Engineering, Computer and Information Sciences (Новосибирск, 2017); Межд. конф. «Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем» (Пенза, 2017); Межд. конф. «Вычислительная математика и математическая геофизика» (Новосибирск, 2018); Межд. науч.-практ. конф. «Мехатроника, автоматика и робототехника» (Новокузнецк, 2019); Всеросс. конф. с межд. участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2019); Всеросс. совещание по проблемам управления (Москва, 2019); Межд. конф. «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» (Новосибирск, 2019); Всеросс. конф. «Актуальные проблемы математики и информационных технологий» (Махачкала, 2020−2023); Всеросс. конф. с межд. участием «Теория управления и математическое моделирование» (Ижевск, 2020); Межд. конф. по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (Алушта, 2020); Мультиконф. по проблемам управления (Санкт-Петербург, 2020, 2022); Межд. конф. «Открытые эволюционирующие системы: цифровая трансформация» (Хабаровск, 2022); Межд. конф. «Марчуковские научные чтения» (Новосибирск, 2022). Работа частично поддержана грантами РФФИ 12-08-00892, 17-08-00530.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 62 научных работах, из которых 14 статей [1−14] в журналах, индексируемых в Web of Science или Scopus, 6 статей [15−20] в трудах конференций, индексируемых в Web of Science или Scopus, 8 статей [21−28] в журналах из перечня рецензируемых научных изданий ВАК, 1 монография [29], 2 коллективные монографии [30,31]. Получено 3 государственных свидетельства о регистрации программ для ЭВМ [32−34]. В других научных изданиях и материалах конференций опубликовано 28 работ (в автореферате они не приведены).

Личный вклад. Все результаты диссертации получены лично автором. Из результатов, опубликованных в соавторстве, в диссертацию включен только материал, вклад соискателя в который был определяющим.

Структура и объем диссертации. Диссертация содержит введение, шесть глав, приложение, заключение и список используемой литературы. Работа изложена на 548 страницах, включает 167 рисунков, 139 таблиц и список литературы из 370 наименований.

Содержание диссертации

Во введении приведено обоснование актуальности выбранной темы диссертации, сформулирована цель работы, указаны ее научная новизна, теоретическая и практическая значимость, перечислены выносимые на защиту результаты, а также изложено краткое содержание диссертации по главам.*

В главе 1 описано спектральное представление функций времени. Отчасти она носит вводный характер, часть изложенных в ней сведений относится к основам спектральной формы математического описания систем управления.

В разд. 1.1 приведены примеры базисных систем (полиномы Лежандра, косинусоиды, функции Уолша и Хаара, тригонометрические функции), определены спектральные характеристики функций одной переменной и соответствующих им линейных функционалов, приведены их основные свойства.

Бесконечная матрица-столбец $F = (F_i)$, элементы которой представляют собой коэффициенты разложения

$$F_i = \big(q(i,\cdot), f(\cdot)\big)_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i,t)f(t)dt, \quad i = 0,1,2,\ldots,$$

функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ в ряд по функциям базисной системы $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства квадратично интегрируемых функций $L_2(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = [t_0, T]$, называется спектральной характеристикой функции $f(\cdot)$.

Отображение, ставящее в соответствие функции $f(\cdot)$ ее спектральную характеристику F, называется спектральным преобразованием и обозначается $\mathbb{S}$, а обратный переход осуществляется с помощью обратного спектрального преобразования $\mathbb{S}^{-1}$ (далее $\mathbb{S}$ используется для обозначения спектрального преобразования функций многих переменных, случайных процессов, линейных операторов и функционалов, а $\mathbb{S}^{-1}$ для соответствующего обратного спектрального преобразования):

$$\mathbb{S}\big[f(\cdot)\big] = F, \quad f(\cdot) = \mathbb{S}^{-1}[F] = \sum_{i=0}^{\infty} F_i q(i,\cdot).$$

Рассмотрены примеры нахождения спектральных характеристик $\mathbf{1}$ функции $f_0(t) \equiv 1$ и спектральных характеристик F^n функций $f_n(t) = t^n$, $n = 1,2,3,\ldots$ Кроме того, приведен пример нахождения спектральной характеристики $\mathbf{1}_\tau$ единичной ступенчатой функции $f(t) = 1(t-\tau)$.

Введено определение спектральных характеристик обобщенных функций (линейных функционалов). Линейному функционалу $\mathcal{Z}$, определенному на пространстве основных функций $D(\mathbb{T})$, ставится в соответствие бесконечная матрица-столбец $Z = (Z_i)$ — спектральная характеристика линейного функционала:

$$Z_i = \mathcal{Z}q(i,\cdot), \quad i = 0,1,2,\ldots; \quad \mathbb{S}[\mathcal{Z}] = Z.$$

В качестве примеров рассмотрено нахождение спектральных характеристик функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}$, ставящего в соответствие $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ интеграл от нее по отрезку $\mathbb{T}$ ($\mathbb{S}[\mathcal{J}_{\mathbb{T}}] = \mathbf{1}$), функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^n$, ставящего в соответствие $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ интеграл от нее с весом t^n по отрезку $\mathbb{T}$ ($\mathbb{S}[\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^n] = F^n$) и функционала δ_τ, ставящего

*В диссертации нумерация формул и теорем ведется по главам. В автореферате применяется сквозная нумерация.

в соответствие $f(\cdot) \in D(\mathbb{T})$ ее значение в точке $\tau \in \mathbb{T}$ ($\mathbb{S}[\delta_\tau] = \Delta_\tau$ — спектральная характеристика дельта-функции).

Эти результаты обобщаются в разд. 1.2, в нем определены двумерные спектральные характеристики функций двух переменных, а также соответствующих им линейных функционалов. В частности, бесконечная матрица $F = (F_{ij})$, элементы которой — это коэффициенты разложения

$$F_{ij} = \big(q(i,\cdot) \otimes q(j,\cdot), f(\cdot)\big)_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \textstyle\int_{\mathbb{T}^2} q(i,t)q(j,\tau)f(t,\tau)dtd\tau,\ \ i,j = 0,1,2,\ldots,$$

функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ в ряд по функциям базисной системы $\{q(i,\cdot) \otimes q(j,\cdot)\}_{i,j=0}^{\infty}$ пространства квадратично интегрируемых функций $L_2(\mathbb{T}^2)$, называется двумерной спектральной характеристикой функции $f(\cdot)$ (для краткости: относительно базисной системы $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$):

$$\mathbb{S}\big[f(\cdot)\big] = F, \quad f(\cdot) = \mathbb{S}^{-1}[F] = \sum_{i,j=0}^{\infty} F_{ij} q(i,\cdot) \otimes q(j,\cdot).$$

В качестве примеров нахождения двумерных спектральных характеристик приведены следующие: Λ функции $f(t,\tau) \equiv 1$, F единичной ступенчатой функции $f(t,\tau) = 1(t-\tau)$, H и M функций $h(t,\tau) = \tau 1(t-\tau)$ и $m(t,\tau) = t1(t-\tau)$.

Определены спектральные характеристики обобщенных функций (линейных функционалов). Линейному функционалу $\mathscr{Z}$, который задан на пространстве основных функций $D(\mathbb{T}^2)$, ставится в соответствие бесконечная матрица $Z = (Z_{ij})$ — двумерная спектральная характеристика линейного функционала:

$$Z_{ij} = \mathscr{Z} q(i,\cdot) \otimes q(j,\cdot), \quad i,j = 0,1,2,\ldots; \quad \mathbb{S}[\mathscr{Z}] = Z.$$

В качестве примеров рассмотрено нахождение спектральных характеристик функционала $\mathscr{J}_{\mathbb{T}^2}$, ставящего в соответствие $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ интеграл от нее по квадрату $\mathbb{T}^2$ ($\mathbb{S}[\mathscr{J}_{\mathbb{T}^2}] = \Lambda$), функционала $\delta_{\theta,\vartheta}$, ставящего в соответствие $f(\cdot) \in D(\mathbb{T}^2)$ ее значение в точке $(\theta,\vartheta) \in \mathbb{T}^2$ ($\mathbb{S}[\delta_{\theta,\vartheta}] = \Delta_{\theta,\vartheta}$) и функционала $\mathscr{J}^*_{\mathbb{T}^2}$, ставящего в соответствие $f(\cdot) \in D(\mathbb{T}^2)$ интеграл от $f^\diamond(\cdot)$ по отрезку $\mathbb{T}$, где $f^\diamond(t) = f(t,t)$ определена однозначно ($\mathbb{S}[\mathscr{J}^*_{\mathbb{T}^2}] = E$ — бесконечная единичная матрица — двумерная спектральная характеристика дельта-функции).

В разд. 1.3 рассмотрен вопрос об изменении базисной системы и связанным с этим преобразованием спектральных характеристик. Спектральные характеристики линейных операторов введены в разд. 1.4, представлены их свойства.

Пусть $\mathcal{A}\colon D_{\mathcal{A}} \subseteq L_2(\mathbb{T}) \to L_2(\mathbb{T})$ — линейный оператор, определенный на пространстве $L_2(\mathbb{T})$ или на его некотором подпространстве. Бесконечная матрица $A = (A_{ij})$, элементы которой задаются формулой

$$A_{ij} = \big(q(i,\cdot), \mathcal{A} q(j,\cdot)\big)_{L_2(\mathbb{T})} = \textstyle\int_{\mathbb{T}} q(i,t)\mathcal{A} q(j,t)dt, \quad i,j = 0,1,2,\ldots,$$

называется спектральной характеристикой линейного оператора $\mathcal{A}$, $\mathbb{S}[\mathcal{A}] = A$.

Связь между спектральными характеристиками функций $f(\cdot) \in D_{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{A} f(\cdot)$ устанавливается следующим образом: $\mathbb{S}[\mathcal{A} f(\cdot)] = A\,\mathbb{S}[f(\cdot)]$.

Далее в разд. 1.5 – 1.7 более детально изучаются спектральные характеристики типовых линейных операторов, а именно умножения (ограниченные операторы), интегрирования (компактные операторы) и дифференцирования (неограниченные операторы):

$$\mathcal{A}_a f(\cdot) = a(\cdot) f(\cdot), \quad \mathcal{D}^{-1} f(\cdot) = \int_{t_0}^{(\cdot)} f(\tau) d\tau, \quad \mathcal{D} f(\cdot) = f'(\cdot),$$

где $a(\cdot)$ — интегрируемая функция на отрезке $\mathbb{T} = [t_0, T]$. Они соответствуют усилительному, интегрирующему и дифференцирующему звеньям систем управления. Элементы их спектральных характеристик $\mathbb{S}[\mathcal{A}_a] = A$, $\mathbb{S}[\mathcal{D}^{-1}] = P^{-1}$ и $\mathbb{S}[\mathcal{D}] = \mathcal{P}$ определяются в виде

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \big(q(i,\cdot), a(\cdot) q(j,\cdot)\big)_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} a(t) q(i,t) q(j,t) dt, \\
P_{ij}^{-1} &= \big(q(i,\cdot), \int_{t_0}^{(\cdot)} q(j,\tau) d\tau\big)_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i,t) \int_{t_0}^{t} q(j,\tau) d\tau dt, \\
\mathcal{P}_{ij} &= \big(q(i,\cdot), q'(j,\cdot)\big)_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i,t) q'(j,t) dt, \quad i,j = 0,1,2,\ldots
\end{aligned}$$

При решении дифференциальных уравнений спектральным методом вводятся дополнительные спектральные характеристики, соответствующие оператору дифференцирования, но учитывающие начальные или конечные значения. Так, бесконечная матрица $P = (P_{ij})$ с элементами

$$P_{ij} = \big(q(i,\cdot), q'(j,\cdot)\big)_{L_2(\mathbb{T})} + q(i,t_0) q(j,t_0) = \int_{\mathbb{T}} q(i,t) q'(j,t) dt + q(i,t_0) q(j,t_0)$$

называется спектральной характеристикой оператора дифференцирования с учетом начального значения.

В разд. 1.5 определена спектральная характеристика билинейного оператора, ставящего в соответствие двум функциям их произведение. Она задает линейное отображение пространства спектральных характеристик функций одной переменной в пространство спектральных характеристик операторов умножения на эти функции. Бесконечная трехмерная матрица $V = (V_{ijk})$ с элементами

$$V_{ijk} = \big(q(i,\cdot), q(j,\cdot) q(k,\cdot)\big)_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i,t) q(j,t) q(k,t) dt, \quad i,j,k = 0,1,2,\ldots,$$

называется спектральной характеристикой оператора умножения функций (при ее использовании достаточно применять базисы с ограниченными базисными функциями). Например, если A — спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, F — спектральная характеристика функции $a(\cdot)$, V — спектральная характеристика оператора умножения функций, то $A = VF$ (используется операция умножения трехмерной матрицы на матрицу-столбец). Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1 (о представлении спектральной характеристики сложной функции специального вида). *Пусть задана функция* $g(\cdot)\colon \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$g(t,x) = c_\gamma(t) x^\gamma + \ldots + c_1(t) x + c_0(t), \quad \gamma \in \mathbb{N},$$

где $c_0(\cdot), c_1(\cdot), \ldots, c_\gamma(\cdot)$ *— интегрируемые функции,* $\tilde{C}_0$ *— спектральная характеристика функции* $c_0(\cdot)$ *и* $C_0, C_1, \ldots, C_\gamma$ *— спектральные характеристики операторов умножения на соответствующие функции* $c_0(\cdot), c_1(\cdot), \ldots, c_\gamma(\cdot)$. *Тогда спектральная характеристика* $\tilde{G}$ *сложной функции* $g(\cdot, a(\cdot))$ *имеет вид*

$$\tilde{G} = C_\gamma A^{\gamma-1} F + \ldots + C_1 F + \tilde{C}_0 = C_\gamma (VF)^{\gamma-1} F + \ldots + C_1 F + \tilde{C}_0$$

при условии $g(\cdot, a(\cdot)) \in L_2(\mathbb{T})$, *а спектральная характеристика* G *оператора умножения на функцию* $g(\cdot, a(\cdot))$ *представляется в форме*

$$G = C_\gamma A^\gamma + \ldots + C_1 A + C_0 = C_\gamma (VF)^\gamma + \ldots + C_1 (VF) + C_0.$$

Теорема 1 далее используется для получения спектрального аналога полиномиального измерителя в задаче оценивания состояний линейных непрерывных стохастических систем.

Теорема 2 (о представлении спектральной характеристики P^{-n}). *Пусть* A *— спектральная характеристика оператора умножения на функцию* $a_1(t) = t - t_0$ *и* P^{-1} *— спектральная характеристика оператора интегрирования. Тогда спектральная характеристика* $P^{-n} = [P^{-1}]^n$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, *представляется в виде*

$$P^{-n} = \tfrac{1}{n-1}\,[A, P^{-(n-1)}] = \tfrac{1}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i A^{n-i-1} P^{-1} A^i,$$

где $[A, P^{-(n-1)}]$ *— коммутатор спектральных характеристик линейных операторов,* C_{n-1}^i *— биномиальный коэффициент.*

Теорема 2 используется для представления повторных стохастических интегралов из разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича.

Разд. 1.1 и 1.2 содержат алгоритмы расчета спектральных характеристик типовых функций и линейных функционалов (они перечислены выше), а разд. 1.5–1.7 — алгоритмы расчета спектральных характеристик типовых линейных операторов относительно перечисленных выше базисных систем, т.е. необходимый справочный материал для практической реализации соответствующих программ.

Линейные преобразования функций времени в контексте применения спектральной формы математического описания систем управления описаны в разд. 1.8. Этот раздел содержит известные положения, но нужен для решения ряда новых примеров.

Разд. 1.9 касается вопросов связи матричных следов линейных операторов и интегральных следов функций, которые эти операторы задают, в том числе и с точки зрения применения спектральной формы математического описания. В этом разделе содержится много примеров, которые имеют самостоятельное теоретическое значение. Один из результатов этого раздела состоит в следующем.

Теорема 3 (о следе спектральной характеристики композиции операторов $\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{D}^{-1}, \mathcal{A}_\psi$). *Пусть* $\varphi(\cdot), \psi(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ *— базисная система* $L_2(\mathbb{T})$. *Тогда*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} \varphi(t) q(i,t) \int_{t_0}^{t} \psi(\tau) q(i,\tau) d\tau dt = \tfrac{1}{2} \big(\varphi(\cdot), \psi(\cdot)\big)_{L_2(\mathbb{T})}.$$

Теорема 3 имеет важное значение для обоснования корректности представления кратных стохастических интегралов Стратоновича (сначала второй кратности, а затем и более высоких кратностей) в виде кратных рядов со случайными коэффициентами, а также для их связи с повторными стохастическими интегралами Стратоновича при использовании спектральной формы математического описания систем управления для их представления. Такие представления позволяют сформировать удобные при практической реализации алгоритмы статистического моделирования повторных стохастических интегралов Стратоновича и использовать их в численных методах решения СДУ для анализа и статистического моделирования нелинейных непрерывных стохастических систем.

Некоторые аспекты приближенного представления функций времени, которые основаны на усечении спектральных характеристик, описаны в разд. 1.10, а в разд. 1.11 рассматривается, каким образом учитывать ограничения на значения функций одной переменной при их представлении усеченными спектральными характеристиками.

Предполагается, что задана функция $u(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ и $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$ и рассматриваются часто используемые ограничения $|u(t)| \leqslant v,\ \ t \in \mathbb{T}$. Задача построения множества спектральных характеристик функций с ограничениями при заданном порядке усечения L состоит в нахождении множества $\mathbb{U}_L \subset \mathbb{R}^L$, соответствующего функциям из $L_2(\mathbb{T})_L \cap \{u(\cdot)\colon |u(t)| \leqslant v\}$ при спектральном преобразовании ($L_2(\mathbb{T})_L$ — конечномерное подпространство $L_2(\mathbb{T})$, образованное линейными комбинациями первых L базисных функций). Доказаны свойства множества спектральных характеристик функций с ограничениями: выпуклость, симметричность, замкнутость.

Для приближенного построения множества спектральных характеристик функций с ограничениями выбирается конечное множество функций, достигающих ограничения v. Выпуклая комбинация их спектральных характеристик образует замкнутую многогранную область, граница которой — выпуклый многогранник, который может быть задан множеством вершин и плоскостями граней. Для некоторых классов функций найдены соответствующие им множества вершин, или точнее граничных точек. Замкнутая многогранная область строится как пересечение полупространств, заданных граничными плоскостями, которые определяются множеством вершин. Показано, что для неполных ортонормированных систем функций, а именно блочно-импульсных функций и функций Радемахера, можно получить точное решение задачи: соответствующими выпуклыми многогранниками являются L-мерный куб (гиперкуб) и L-мерный октаэдр (гипероктаэдр).

В главе 2 результаты главы 1 обобщаются и применяются для спектрального представления случайных процессов и их моментных характеристик. Так, в разд. 2.1 приведены определения спектральных характеристик математического ожидания, корреляционной функции и моментной функции второго порядка (нестационарные спектральные плотности), а также известные свойства. Разд. 2.2 содержит определения и основные свойства спектральных характеристик случайных процессов и случайных линейных функционалов.

Бесконечная случайная матрица-столбец $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_i)$, элементы которой представляют собой коэффициенты разложения

$$\mathcal{F}_i = \big(q(i,\cdot), F(\cdot)\big)_{L_2(\mathbb{T})} = \textstyle\int_{\mathbb{T}} q(i,t)F(t)dt, \quad i = 0,1,2,\ldots,$$

случайного процесса $F(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ в ряд по функциям базисной системы $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$ (реализации $F(\cdot)$ принадлежат $L_2(\mathbb{T})$ с вероятностью 1), называется спектральной характеристикой случайного процесса $F(\cdot)$:

$$\mathbb{S}\big[F(\cdot)\big] = \mathcal{F}, \quad F(\cdot) = \mathbb{S}^{-1}[\mathcal{F}] = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i q(i,\cdot).$$

Спектральная характеристика случайного линейного функционала $\mathcal{Z}$ на $D(\mathbb{T})$, — это бесконечная случайная матрица-столбец $Z = (Z_i)$:

$$Z_i = \mathcal{Z} q(i,\cdot), \quad i = 0,1,2,\ldots; \quad \mathbb{S}[\mathcal{Z}] = Z.$$

Аналогичным образом определяется двумерная спектральная характеристика случайного линейного функционала $\mathcal{Z}$ на $D(\mathbb{T}^2)$.

Далее значительное внимание уделено спектральному представлению винеровского и центрированного пуассоновского процессов, а также связанных с ними случайных линейных функционалов: гауссовского и пуассоновского белых шумов. Отдельно выделен разд. 2.3, в котором описывается спектральное представление стохастических интегралов: интегралов Стратоновича и Ито по винеровскому процессу и интеграла Огавы по центрированному пуассоновскому процессу, также рассмотрен общий случай стохастического θ-интеграла по винеровскому процессу.

Важнейший пример случайного линейного функционала в контексте этой работы — функционал $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W}$, ставящий в соответствие $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$ стохастический интеграл от нее по винеровскому процессу $W(\cdot)$ на отрезке $\mathbb{T} = [t_0, T]$. Его спектральная характеристика $\mathbb{S}[\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W}] = \mathcal{V}$ образована независимыми случайными величинами ζ_i, имеющими стандартное нормальное распределение (спектральная характеристика гауссовского белого шума). Тогда

$$\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W} f(\cdot) = \textstyle\int_{\mathbb{T}} f(t)dW(t) = \mathcal{V}^{\mathrm{T}} F, \quad F = \mathbb{S}\big[f(\cdot)\big].$$

Другой пример — функционал $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*W}$, ставящий в соответствие $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$ стохастический интеграл от $f^{\diamond}(t) = f(t,t)$ по отрезку $\mathbb{T}$ ($\mathbb{S}[\mathcal{J}_{\mathbb{T}^2}^{*W}] = E^{\mathcal{V}} = V\mathcal{V}$, где V — спектральная характеристика оператора умножения функций).

Эти и введенные ранее обозначения позволяют выразить спектральную характеристику винеровского процесса: $\mathcal{W} = P^{-1}\mathcal{V}$. Аналогичные результаты получены для центрированного и нецентрированного пуассоновских процессов на основе определения спектральной характеристики пуассоновского белого шума. Конструктивность таких определений иллюстрируется на конкретных примерах (представление винеровского и пуассоновского процессов, броуновского моста в спектральной форме математического описания). Получены спектральные представления стохастических интегралов Стратоновича и Ито по винеровскому процессу, а также общий случай стохастического θ-интеграла.

Линейные преобразования случайных процессов в спектральной форме математического описания систем управления рассмотрены в разд. 2.4. Определение и свойства спектральных характеристик случайных линейных операторов даны в разд. 2.5.

Пусть $\mathcal{R}\colon D_{\mathcal{R}} \subseteq L_2(\mathbb{T}) \to \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ — случайный линейный оператор, определенный на пространстве $L_2(\mathbb{T})$ или на его некотором подпространстве. Бесконечная случайная матрица $R = (R_{ij})$ с элементами

$$R_{ij} = \big(q(i,\cdot), \mathcal{R}q(j,\cdot)\big)_{L_2(\mathbb{T})} = \textstyle\int_{\mathbb{T}} q(i,t)\mathcal{R}q(j,t)dt, \quad i,j = 0,1,2,\ldots,$$

называется спектральной характеристикой случайного линейного оператора $\mathcal{R}$, $\mathbb{S}[\mathcal{R}] = R$.

Аналогично разд. 1.4 установлена связь между спектральными характеристиками функции $f(\cdot) \in D_{\mathcal{A}}$ и случайного процесса $\mathcal{R}f(\cdot)$: $\mathbb{S}[\mathcal{A}f(\cdot)] = R\,\mathbb{S}[f(\cdot)]$.

Доказана следующая теорема (в диссертации представлен результат и для центрированного пуассоновского процесса).

Теорема 4 (о спектральной характеристике случайного линейного оператора). *Пусть $A^{\mathcal{V}}$ — спектральная характеристика случайного линейного оператора $\mathcal{A}_W$ с ядром $k(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^2)$: $\mathcal{A}_W f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} k(\cdot,\tau) f(\tau) dW(\tau)$, A — спектральная характеристика оператора Гильберта–Шмидта $\mathcal{A}$ с тем же ядром, V — спектральная характеристика оператора умножения функций, $\mathcal{V}$ — спектральная характеристика гауссовского белого шума. Спектральные характеристики $A^{\mathcal{V}}$, A и V определены относительно базисной системы $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$. Тогда $A^{\mathcal{V}} = A(V\mathcal{V})$.*

Примеры — операторы умножения на случайный процесс и операторы стохастического интегрирования — изучаются в разд. 2.6 и 2.7, приводятся их свойства. Основное приложение теоремы 4 состоит в представлении спектральных характеристик операторов стохастического интегрирования. В частности, оператору стохастического интерирования

$$\mathcal{D}_W^{-1} f(\cdot) = \int_{t_0}^{(\cdot)} f(\tau) dW(\tau)$$

по винеровскому процессу отвечает спектральная характеристика $\mathbb{S}[\mathcal{D}_W^{-1}] = P^{-1,\mathcal{V}} = P^{-1}(V\mathcal{V})$ (также и для центрированного пуассоновского процесса):

$$P_{ij}^{-1,\mathcal{V}} = \Big(q(i,\cdot), \int_{t_0}^{(\cdot)} q(j,\tau) dW(\tau)\Big)_{L_2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} q(i,t) \int_{t_0}^{t} q(j,\tau) dW(\tau) dt, \;\; i,j = 0,1,2,\ldots$$

Рассмотрено спектральное преобразование интеграла от неслучайной функции, связь спектральных характеристик при сдвиге и масштабировании базисной системы, спектральное преобразование стохастического интеграла Стратоновича, Ито и стохастического θ-интеграла (по винеровскому процессу), спектральное преобразование стохастического интеграла Огавы (по центрированному пуассоновскому процессу).

В разд. 2.8 дано приближенное представление случайных процессов. Как и в главе 1, основные определения и свойства иллюстрируются примерами.

В главе 3 построен спектральный метод решения линейных СДУ, или решения задачи анализа выходных процессов одномерных и многомерных линейных стохастических систем управления. Сначала в разд. 3.1 задача решения СДУ формулируется в общей нелинейной постановке. Рассматриваются уравнение Ито

$$dX(t) = f\big(t, X(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t)\big)dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

и уравнение Стратоновича

$$dX(t) = a\big(t, X(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t)\big) \circ dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{2}$$

где $X(\cdot)$ — n-мерный случайный процесс, $t \in \mathbb{T} = [t_0, T]$ — время, $W(\cdot)$ — s-мерный стандартный винеровский процесс, X_0 — случайный вектор (X_0 и $W(\cdot)$ независимы), $f(\cdot), a(\cdot)\colon \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — вектор-функции, $\sigma(\cdot)\colon \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times s}$

— матричная функция. Знак $\circ$ используется для того, чтобы отличать СДУ Стратоновича от СДУ Ито. Уравнения (1) и (2) эквивалентны, если

$$f(t,x) = a(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{s} \frac{\partial \sigma_{*l}(t,x)}{\partial x}\,\sigma_{*l}(t,x),$$

где $\sigma_{*l}(\cdot)$ — столбец матричной функции $\sigma(\cdot)$ с номером l.

Далее в разд. 3.2 приведено соответствующее этой задаче уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова для плотности вероятности $\varphi(\cdot)$ вектора состояния X стохастической системы управления:

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\big[f_i(t,x)\varphi(t,x)\big] + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\big[g_{ij}(t,x)\varphi(t,x)\big], \quad \varphi(t_0,x) = \varphi_0(x),$$

где $g_{ij}(\cdot) = \sum_{l=1}^{s} \sigma_{il}(\cdot)\sigma_{jl}(\cdot)$.

Спектральный метод решения линейных СДУ подробно описан в разд. 3.3 отдельно для одномерного и многомерного случаев, рассмотрены уравнения Стратоновича и Ито, а также общий случай СДУ с θ-дифференциалом. Остановимся только на СДУ Стратоновича и сразу приведем многомерный случай (уравнения Ито и уравнения с θ-дифференциалом сводятся к уравнениям Стратоновича; в тексте диссертации они рассмотрены подробно, а здесь не приводятся):

$$dX(t) = \big(a(t)X(t) + b(t)g(t)\big)dt + \sum_{j=1}^{s}\big(c^j(t)X(t) + d^j(t)\big)\circ dW_j(t),\ X(t_0) = X_0, \quad (3)$$

где $X(\cdot)$ — n-мерный случайный процесс, $t \in \mathbb{T} = [t_0, T]$; $a(\cdot)$, $b(\cdot)$, $c^j(\cdot)$, $d^j(\cdot)$ и $g(\cdot)$ — заданные матричные и векторные интегрируемые функции размеров $n\times n$, $n\times q$, $n\times n$, $n\times 1$ и $q\times 1$ соответственно; $d_l^j(\cdot), g_r^j(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, $l = 1,2,\ldots,n$ и $r = 1,2,\ldots,q$; $W_j(\cdot)$ — независимые стандартные винеровские процессы, $j = 1,2,\ldots,s$; X_0 — случайный вектор: $\mathrm{E}|X_0|^2 < \infty$.

Задача анализа выходных процессов многомерной линейной стохастической системы управления состоит в нахождении выходного сигнала $X(\cdot)$ по заданной математической модели (3) и входному сигналу $g(\cdot)$. Она заключается в нахождении решения векторного СДУ (3).

Введем обозначения для спектральных характеристик: Δ_{t_0} — спектральная характеристика дельта-функции $\delta((\cdot) - t_0)$; G_r, D_l^j — спектральные характеристики функций $g_r(\cdot)$, т.е. координат входного сигнала, и функций $d_l^j(\cdot)$ соответственно; A_{lm}, B_{lr} и C_{lm}^j — спектральные характеристики операторов умножения на функции $a_{lm}(\cdot)$, $b_{lr}(\cdot)$ и $c_{lm}^j(\cdot)$ соответственно; V — спектральная характеристика оператора умножения функций; P — спектральная характеристика оператора дифференцирования с учетом начального значения; $\mathcal{X}_l$ — спектральные характеристики случайных процессов $X_l(\cdot)$, т.е. координат выходного сигнала; $\mathcal{V}_j$ — спектральные характеристики белых шумов $V_j(\cdot)$, соответствующих винеровским процессам $W_j(\cdot)$; $l,m = 1,2,\ldots,n$, $r = 1,2,\ldots,q$, $j = 1,2,\ldots,s$.

Применение спектрального метода позволяет получить спектральный аналог уравнения (3):

$$P\mathcal{X}_l - X_{l0}\Delta_{t_0} = \sum_{m=1}^{n} A_{lm}\mathcal{X}_m + \sum_{r=1}^{q} B_{lr}G_r + \sum_{j=1}^{s}(V\mathcal{V}_j)\Bigg(\sum_{m=1}^{n} C_{lm}^j\mathcal{X}_m + D_l^j\Bigg), \quad (4)$$

и при $c^j(t) \equiv 0$ его можно представить следующим образом:

$$P\mathcal{X}_l - X_{l0}\Delta_{t_0} = \sum_{m=1}^{n} A_{lm}\mathcal{X}_m + \sum_{r=1}^{q} B_{lr}G_r + \sum_{j=1}^{s} \tilde{D}_l^j \mathcal{V}_j, \tag{5}$$

где $\tilde{D}_l^j$ — спектральные характеристики операторов умножения на функции $d_l^j(\cdot)$.

В диссертации приведено решение систем (4) и (5) при $n = 2$ и при произвольном n. Здесь рассмотрим только общий случай, применяя агрегирование матриц (построение квадратной четырехмерной матрицы $Z = (Z_{lm})_{l,m=1}^n$, а также двумерных матриц-столбцов $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_l)_{l=1}^n$ и $Q = (Q_l)_{l=1}^n$), где при $c^j(t) \neq 0$

$$Z_{lm} = \begin{cases} P - A_{ll} - \sum_{j=1}^{s}(V\mathcal{V}_j)C_{ll}^j, & l = m, \\ -A_{lm} - \sum_{j=1}^{s}(V\mathcal{V}_j)C_{lm}^j, & l \neq m, \end{cases}$$

$$Q_l = X_{l0}\Delta_{t_0} + \sum_{r=1}^{q} B_{lr}G_r + \sum_{j=1}^{s}(V\mathcal{V}_j)D_l^j,$$

или при $c^j(t) \equiv 0$

$$Z_{lm} = \begin{cases} P - A_{ll}, & l = m, \\ -A_{lm}, & l \neq m, \end{cases} \qquad Q_l = X_{l0}\Delta_{t_0} + \sum_{r=1}^{q} B_{lr}G_r + \sum_{j=1}^{s} \tilde{D}_l^j \mathcal{V}_j.$$

Тогда системы (4), (5) и их решение могут быть записаны в форме

$$Z\mathcal{X} = Q, \quad \mathcal{X} = Z^{-1}Q, \tag{6}$$

а спектральные характеристики $\mathcal{X}_l$ получаются как простые сечения двумерной матрицы-столбца $\mathcal{X}$, т.е. в результате декомпозиции.

Применяя обратное спектральное преобразование, находим решение векторного СДУ (3), т.е. решение задачи анализа выходных процессов:

$$X_l(\cdot) = \mathbb{S}^{-1}[\mathcal{X}_l] = \sum_{i=0}^{\infty} (\mathcal{X}_l)_i q(i,\cdot), \quad l = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Приближенное решение задачи анализа выходных процессов получается при усечении всех используемых спектральных характеристик до некоторого выбранного порядка L, т.е. все матрицы, входящие в указанные соотношения, должны быть конечными размера L по каждому измерению. В диссертации приведен алгоритм решения векторного СДУ, или анализа выходных процессов многомерных линейных стохастических систем спектральным методом. Приведены соотношения для оценок первой и вторых нестационарных спектральных плотностей координат случайного процесса $X(\cdot)$ по ансамблю реализаций усеченных спектральных характеристик $\mathcal{X}_l$.

Спектральная форма математического описания в задачах теории оценивания (фильтрация, сглаживание и прогнозирование) также отдельно для одномерного и многомерного случаев применяется в разд. 3.4. Рассмотрим сразу многомерный случай и добавим к уравнению (3) еще одно СДУ (в форме Ланжевена):

$$\dot{Y}(t) = \lambda\big(t, X(t)\big) + \sum_{w=1}^{h} \zeta^w(t) Q_w(t), \quad Y(t_0) = 0, \tag{8}$$

где $\dot{Y}(\cdot) = Z(\cdot)$ — m-мерный случайный процесс (вектор измерений); $\lambda(\cdot)$ — вектор-полином заданной степени размеров $m \times 1$ с коэффициентами:

$$\lambda_u(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{l=1}^{n} \bigl(\lambda_{ul,\gamma_u}(t) x_l^{\gamma_u} + \ldots + \lambda_{ul,1}(t) x_l\bigr) + \lambda_{u,0}(t), \quad u = 1, 2, \ldots, m;$$

$\zeta^w(\cdot)$ — заданные вектор-функции размеров $m \times 1$, $Q_w(\cdot)$ — независимые гауссовские белые шумы, $w = 1, 2, \ldots, h$; квадратная матрица $\eta(\cdot) = \zeta(\cdot)\zeta^{\mathrm{T}}(\cdot)$, где матрица $\zeta(\cdot)$ образована столбцами $\zeta^w(\cdot)$, является невырожденной.

Задача оптимального оценивания для многомерной линейной стохастической системы наблюдения (3) и (8) состоит в нахождении оценки $\hat{X}(\theta)$ по заданной математической модели (3), (8), входному сигналу $g(\cdot)$ и измерениям $Z_0^t = \{Z(\tau),\ \tau \in [t_0, t)\}$ при условии

$$\hat{X}(\theta) = \psi(\theta, Z_0^t), \quad \mathrm{E}\mathcal{E}^{\mathrm{T}}(\theta)\mathcal{E}(\theta) \to \min_{\psi(\theta,\,\cdot\,)} \quad \forall\, \theta \in \mathbb{T},$$

где $\mathcal{E}(\theta) = X(\theta) - \hat{X}(\theta)$ — вектор ошибки оценивания. При $\theta = t$ задача оценивания называется задачей фильтрации, а при $\theta < t$ и $\theta > t$ — задачами сглаживания и прогнозирования соответственно.

Введем дополнительные обозначения для спектральных характеристик: $\tilde{\Lambda}_{u,0}$ — спектральные характеристики функций $\lambda_{l0}(\cdot)$; $\Lambda_{ul,i}$, Ξ_u^w и Ψ_{uv} — спектральные характеристики операторов умножения на функции $\lambda_{ul,i}(\cdot)$, $\zeta_u^w(\cdot)$ и $\psi_{uv}(\cdot)$ соответственно, $i = 1, \ldots, \gamma_u$; $\mathbf{1}_t^*$ — спектральная характеристика оператора умножения на единичную ступенчатую функцию $f^*(\tau) = 1(t - \tau)$, т.е. индикатор множества $[t_0, t]$; $\mathcal{Z}_u$ — спектральные характеристики случайных процессов $Z_u(\cdot)$, т.е. координат вектора измерений; $\mathcal{Q}_w$ — спектральные характеристики белых шумов $Q_w(\cdot)$.

Для приближенного решения задачи оптимального оценивания используется подход, лежащий в основе фильтра частиц, и спектральный метод. Чтобы найти решение задачи, нужно сформировать ансамбль реализаций спектральных характеристик $\mathcal{X}_l$ координат выходного сигнала $X_l(\cdot)$ и весовых коэффициентов $\omega(\cdot)$. Выбирая количество реализаций M (объем выборки) и обозначая эти реализации $\mathcal{X}^k$ и ω^k, где $k = 1, 2, \ldots, M$, имеем

$$\hat{\mathcal{X}}_l = \tfrac{1}{\Omega} \sum_{k=1}^{M} \omega^k \mathcal{X}_l^k, \quad l = 1, 2, \ldots, n, \quad \Omega = \sum_{k=1}^{M} \omega^k,$$

$$\omega(t) = \exp\Biggl\{ \sum_{u,v=1}^{m} \Lambda_u^{\mathrm{T}}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n) \mathbf{1}_t^* \Psi_{uv} \Bigl(\mathcal{Z}_v - \tfrac{1}{2} \Lambda_v(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n) \Bigr) \Biggr\},$$

$$\Lambda_u(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n) = \sum_{l=1}^{n} \bigl(\Lambda_{ul,\gamma_u}(V \mathcal{X}_l^{\gamma_u - 1}) \mathcal{X}_l + \ldots + \Lambda_{ul,1} \mathcal{X}_l \bigr) + \tilde{\Lambda}_{u,0}.$$

Далее применяется обратное спектральное преобразование для приближенного решения задачи оптимального оценивания:

$$\hat{X}_l(\theta) \approx \mathbb{S}^{-1}[\hat{\mathcal{X}}_l] = \sum_{i=0}^{\infty} (\hat{\mathcal{X}}_l)_i q(i, \theta), \quad l = 1, 2, \ldots, n, \quad \theta \in \mathbb{T}, \tag{9}$$

где приближенность оценки связана с конечностью выборки.

При практическом применении данного подхода необходимо усечение всех спектральных характеристик до некоторого выбранного порядка L, т.е. все матрицы, которые формируют указанные соотношения, должны быть конечными размера L по каждому измерению. В диссертации приведен алгоритм решения задачи оптимального оценивания для многомерных стохастических систем наблюдения спектральным методом.

Для апробации в разд. 3.5 приведены примеры моделирования типовых случайных процессов: винеровского процесса (броуновского движения), броуновского моста, процесса Орнштейна–Уленбека, геометрического броуновского движения, осциллятора Кубо и вращательной диффузии, а также пример решения задачи оценивания траектории процесса Орнштейна–Уленбека. Применение спектральной формы математического описания для решения прикладных задач иллюстрируется с помощью моделирования турбулентного ветра на основе формирующего фильтра Драйдена и его модификации в разд. 3.6.

Глава 4 посвящена представлению функций многих переменных в спектральной форме математического описания. Рассматриваются функции, определяющие повторные стохастические интегралы для численных методов решения СДУ. Результаты этой главы далее используются для представления повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича произвольной кратности на основе спектральной формы математического описания систем управления.

В разд. 4.1 показано, как формируются базисные системы для представления функций многих переменных, определены спектральные характеристики функций многих переменных.

Бесконечная k-мерная матрица-столбец $F = (F_{i_1\dots i_k})$, элементы которой представляют собой коэффициенты разложения

$$F_{i_1\dots i_k} = \big(q(i_1,\cdot)\otimes\dots\otimes q(i_k,\cdot), f(\cdot)\big)_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \\ = \int_{\mathbb{T}^k} q(i_1,t_1)\dots q(i_k,t_k) f(t_1,\dots,t_k)dt_1\dots dt_k, \quad i_1,\dots,i_k = 0,1,2,\dots,$$

функции $f(\cdot)\in L_2(\mathbb{T}^k)$ в ряд по функциям базисной системы $\{q(i_1,\cdot)\otimes\dots\otimes q(i_k,\cdot)\}_{i_1,\dots,i_k=0}^{\infty}$ пространства квадратично интегрируемых функций $L_2(\mathbb{T}^k)$, называется спектральной характеристикой функции $f(\cdot)$ (для краткости: относительно базисной системы $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$):

$$\mathbb{S}\big[f(\cdot)\big] = F, \quad f(\cdot) = \mathbb{S}^{-1}[F] = \sum_{i_1,\dots,i_k=0}^{\infty} F_{i_1\dots i_k} q(i_1,\cdot)\otimes\dots\otimes q(i_k,\cdot),$$

их свойства аналогичны свойствам двумерных спектральных характеристик.

Особое внимание уделено следующим функциям:

$$\mathbb{k}(t_1,\dots,t_k) = 1(t_k - t_{k-1})\dots 1(t_2 - t_1) = \\ = \begin{cases} 1, & t_1 < \dots < t_k, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{10}$$

$$\mathbb{k}_\psi(t_1,\dots,t_k) = \psi_1(t_1)\dots\psi_k(t_k)1(t_k - t_{k-1})\dots 1(t_2 - t_1) = \\ = \begin{cases} \psi_1(t_1)\dots\psi_k(t_k), & t_1 < \dots < t_k, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{11}$$

где $\psi_1(\cdot),\dots,\psi_k(\cdot)\in L_2(\mathbb{T})$. Их коэффициенты разложения обозначаются через $\mathbb{K}_{i_1\dots i_k}$ и $\mathbb{K}^{\psi}_{i_1\dots i_k}$. Наиболее важное значение имеет случай $\psi_l(t)=(t-t_0)^{n_l}$, $n_l\in$ $\in\{0,1,2,\dots\}$, $l=1,\dots,k$, для него применяются обозначения $\Bbbk_{n_1\dots n_k}(\cdot)$ и $\mathbb{K}^{n_1\dots n_k}$.

Предложены алгоритмы нахождения спектральных характеристик функций $\Bbbk_{n_1\dots n_k}(\cdot)$ для произвольных $k,n_1,\dots,n_k$ относительно полиномов Лежандра, косинусоид и тригонометрических функций. Для функций Уолша и Хаара такие алгоритмы сформированы для произвольного k и нулевых $n_1,\dots,n_k$. Для $k=2$ и условии $n_1+n_2=1$ соответствующие алгоритмы представлены в разд. 1.2.

Спектральные характеристики линейных функционалов введены в разд. 4.2. Линейному функционалу $\mathcal{Z}$, заданному на пространстве основных функций $D(\mathbb{T}^k)$, ставится в соответствие бесконечная k-мерная матрица-столбец $Z=(Z_{i_1\dots i_k})$ — спектральная характеристика линейного функционала:

$$Z_{i_1\dots i_k}=\mathcal{Z}q(i_1,\cdot)\otimes\dots\otimes q(i_k,\cdot),\quad i_1,\dots,i_k=0,1,2,\dots;\quad \mathbb{S}[\mathcal{Z}]=Z.$$

Рассмотрены примеры нахождения спектральных характеристик функционала $\mathcal{J}_{\mathbb{T}^k}$, ставящего в соответствие $f(\cdot)\in L_2(\mathbb{T}^k)$ интеграл от нее по гиперкубу $\mathbb{T}^k$ ($\mathbb{S}[\mathcal{J}_{\mathbb{T}^k}]=\mathbf{1}^{\otimes k}$), а также функционала $\delta_{\tau_1,\dots,\tau_k}$, ставящего в соответствие $f(\cdot)\in D(\mathbb{T}^k)$ ее значение в точке $(\tau_1,\dots,\tau_k)\in\mathbb{T}^k$ ($\mathbb{S}[\delta_{\tau_1,\dots,\tau_k}]=\Delta_{\tau_1,\dots,\tau_k}$). Существенное значение имеют два других примера: функционалы $\mathcal{J}_{\triangle\mathbb{T}^k}$ и $\mathcal{J}^{\psi}_{\triangle\mathbb{T}^k}$, ставящие в соответствие $f(\cdot)\in L_2(\mathbb{T}^k)$ повторные интегралы от нее:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\triangle\mathbb{T}^k}f(\cdot)&=\textstyle\int_{\mathbb{T}}\dots\int_{t_0}^{t_3}\int_{t_0}^{t_2}f(t_1,\dots,t_k)dt_1\dots dt_k,\\ \mathcal{J}^{\psi}_{\triangle\mathbb{T}^k}f(\cdot)&=\textstyle\int_{\mathbb{T}}\dots\int_{t_0}^{t_3}\int_{t_0}^{t_2}\psi_1(t_1)\dots\psi_k(t_k)f(t_1,\dots,t_k)dt_1\dots dt_k,\end{aligned}$$

где весовые функции введены выше; $\mathbb{S}[\mathcal{J}_{\triangle\mathbb{T}^k}]=\mathbb{K}$ и $\mathbb{S}[\mathcal{J}^{\psi}_{\triangle\mathbb{T}^k}]=\mathbb{K}^{\psi}$.

Теорема 5 (о представлении функционала $\mathcal{J}^{\psi}_{\triangle\mathbb{T}^k}f(\cdot)$). *Пусть функция* $f(\cdot)\in$ $\in L_2(\mathbb{T}^k)$ *удовлетворяет условию* $f(\cdot)=f_1(\cdot)\otimes\dots\otimes f_k(\cdot)$, $F_1,\dots,F_k$ *— спектральные характеристики функций* $f_1(\cdot),\dots,f_k(\cdot)$ *соответственно,* P^{-1} *— спектральная характеристика оператора интегрирования,* V *— спектральная характеристика оператора умножения функций,* $\Psi_1,\dots,\Psi_k$ *— спектральные характеристики операторов умножения на такие функции* $\psi_1(\cdot),\dots,\psi_k(\cdot)$, *что* $\psi_l(\cdot)f_l(\cdot)\in L_2(\mathbb{T})$, $l=1,\dots,k$. *Тогда функционал* $\mathcal{J}^{\psi}_{\triangle\mathbb{T}^k}$ *представляется в виде*

$$\mathcal{J}^{\psi}_{\triangle\mathbb{T}^k}f(\cdot)=F_k^{\mathrm{T}}\Psi_kP^{-1}\Psi_{k-1}(VF_{k-1})\dots P^{-1}\Psi_2(VF_2)P^{-1}\Psi_1F_1.$$

Теорема 5 позволяет выразить спектральную характеристику $\mathbb{K}^{\psi}$ через спектральные характеристики P^{-1}, Ψ_l и V:

$$\mathbb{K}^{\psi}\doteq\Psi_kP^{-1}\Psi_{k-1}V\dots P^{-1}\Psi_2VP^{-1}\Psi_1,$$

где используется знак $\doteq$ вместо равенства, чтобы подчеркнуть формальные отличия структуры матриц (но не их элементов) в левой и правой частях. С ее помощью в главе 6 построены аппроксимации повторных стохастических интегралов, применяемые для анализа и статистического моделирования нелинейных непрерывных стохастических систем.

В диссертации сначала сформулирована и доказана аналогичная теорема для более простого варианта $\psi_1(\cdot) = \ldots = \psi_k(\cdot) \equiv 1$ (для спектральной характеристики $\mathbb{K}$). Получено альтернативное представление функционалов $\mathcal{J}_{\triangle\mathbb{T}^k}$ и $\mathcal{J}^{\psi}_{\triangle\mathbb{T}^k}$.

В необходимом для дальнейшего изложения объеме в разд. 4.3 рассмотрены симметризованные функции по части переменных или по всем переменным и их спектральные характеристики. Такие функции являются естественной областью определения кратных стохастических интегралов Ито и Стратоновича, рассмотренных в главе 5. Полученные результаты используются для решения «проблемы следов», возникающей при исследовании кратных и повторных стохастических интегралов Стратоновича.

Определим множество $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$, где $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, s\}$; k, s — заданные натуральные числа. Упорядоченный набор $(j_1 \ldots j_k)$ (кортеж, мультииндекс), будем обозначать $\bar{J}$ и рассматривать его как мультимножество — множество, которое может содержать одинаковые элементы, $\#(j, \bar{J})$ — кратность элемента j в мультимножестве $\bar{J}$. Также будем использовать обозначение $|\cdot|$ для количества разных элементов множеств или всех элементов мультимножеств: $|J| \leqslant k$, $|\bar{J}| = k$ ($|\bar{J}|$ — размерность кортежа): $|\bar{J}| = \sum_{j\in J} \#(j, \bar{J})$. Разные элементы $j_1, \ldots, j_k$ обозначаются $j_{(1)}, \ldots, j_{(|J|)}$.

Введем отношение эквивалентности $\sim$ для переменных из множества $\mathbf{T} = \{t_1, \ldots, t_k\}$: $t_l \sim t_m \iff j_l = j_m$, $l, m = 1, \ldots, k$, и обозначим через $\mathbf{T}/{\sim}$ множество всех классов эквивалентности $\mathbf{T}_j$:

$$\mathbf{T} = \bigcup_{j\in J} \mathbf{T}_j, \quad \mathbf{T}_{j_l} \cap \mathbf{T}_{j_m} = \varnothing \quad \forall\, j_l, j_m \in J \colon j_l \neq j_m.$$

Далее будем использовать обозначение $\sum_{(\mathbf{T}/\sim)}$, которое предполагает суммирование функций по всем перестановкам переменных в каждом классе эквивалентности $\mathbf{T}_j$, $j \in J$. Введем функцию $f_{\bar{J}}(\cdot)$ с помощью симметризации:

$$f_{\bar{J}}(t_1, \ldots, t_k) = \langle f(\cdot)\rangle_{\bar{J}} = \frac{1}{M^2_{\bar{J}}} \sum_{(\mathbf{T}/\sim)} f(t_1, \ldots, t_k), \tag{12}$$

где $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$, а величина $M^2_{\bar{J}}$ равна числу слагаемых: $M^2_{\bar{J}} = \prod_{j\in J}(\#(j, \bar{J}))!$.

Для функции $f_{\bar{J}}(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ справедлива оценка нормы: $\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)} \leqslant \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}$. Симметризованные функции (12) образуют линейное подпространство в $L_2(\mathbb{T}^k)$, которое будем обозначать $L_2^{s(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{T}^k)$, симметризующий оператор $\langle\cdot\rangle_{\bar{J}} \colon L_2(\mathbb{T}^k) \to L_2^{s(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ является линейным ограниченным оператором, его норма равна единице, что следует из приведенной оценки.

Введем отношение эквивалентности $\sim$ для индексов из множества $\mathbf{I} = \{i_1, \ldots, i_k\}$ и обозначим через $\mathbf{I}/{\sim}$ множество всех классов эквивалентности $\mathbf{I}_j$. Отличие от множеств $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}_j$ и $\mathbf{T}/{\sim}$ состоит только в обозначениях.

Коэффициенты разложения $\tilde{F}_{i_1\ldots i_k}$ образуют спектральную характеристику функции $f_{\bar{J}}(\cdot)$, которую будем обозначать $F_{\bar{J}}$:

$$\tilde{F}_{i_1\ldots i_k} = \frac{1}{M^2_{\bar{J}}} \sum_{(\mathbf{I}/\sim)} F_{i_1\ldots i_k},$$

где зависимость $\tilde{F}_{i_1\ldots i_k}$ от $\bar{J}$ для упрощения обозначений не указана, а $\sum_{(\mathbf{I}/\sim)}$ означает суммирование коэффициентов разложения по всем перестановкам индексов в каждом классе эквивалентности $\mathbf{I}_j$, $j \in J$.

Пространства функций с дополнительными свойствами существования интегральных следов, которые совпадают с соответствующими матричными следами, введены в разд. 4.4.

Пусть $\mathcal{S}^\varepsilon\colon L_2(\mathbb{T}^k) \to C(\mathbb{T}^k)$, $\mathbb{T} = [t_0, T]$, — усредняющий оператор:

$$\mathcal{S}^\varepsilon f(\cdot) = \tfrac{1}{(2\varepsilon)^k} \int_{D_\varepsilon(\cdot)} f(\tau_1, \ldots, \tau_k) d\tau_1 \ldots d\tau_k, \quad \varepsilon > 0,$$

где $D_\varepsilon(t_1, \ldots, t_k) = \Big\{(\tau_1, \ldots, \tau_k) \in \mathbb{T}^k\colon \max\limits_{l=1,\ldots,k} |t_l - \tau_l| < \varepsilon\Big\}$, т.е. $\mathcal{S}^\varepsilon$ — линейный оператор, ставящий в соответствие функции $f(\cdot)$ непрерывную функцию, значение которой в каждой точке $(t_1, \ldots, t_k)$ определяется как среднее значение $f(\cdot)$ на гиперкубе $D_\varepsilon(t_1, \ldots, t_k) \subseteq \mathbb{R}^k$ с центром в этой точке и стороной 2ε, если доопределить функцию $f(\cdot)$ вне гиперкуба $\mathbb{T}^k$ нулем. Тогда $\bar{f}(t_1, \ldots, t_k) = f(t_1, \ldots, t_k)$ при почти всех $(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{T}^k$, где $\bar{f}(\cdot) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{S}^\varepsilon f(\cdot)$. Оператор $\mathcal{S}^\varepsilon$ позволяет перейти от функции из пространства $L_2(\mathbb{T}^k)$ к функции, которая однозначно определена в каждой точке множества $\mathbb{T}^k$. Необходимость в этом возникает при интегрировании по множеству нулевой меры в $\mathbb{T}^k$.

Далее введем новые обозначения. Пусть $\mathbf{T}_j^{\langle \nu_j \rangle}$ — это множество всех подмножеств $\mathbf{T}_j$, представленных ν_j неупорядоченными парами переменных из $\mathbf{T}_j$ (переменные в паре не совпадают), $\nu_j \in \{0, \ldots, \lfloor \#(j, \bar{J})/2 \rfloor\}$, $j \in J$, где

$$J = \{j_1, \ldots, j_k\} = \{j_{(1)}, \ldots, j_{(|J|)}\}, \quad \bar{J} = (j_1 \ldots j_k),$$
$$(\mathbf{T}/{\sim})^{\langle \nu_{(1)}, \ldots, \nu_{(|J|)} \rangle} = \mathbf{T}_{j_{(1)}}^{\langle \nu_{(1)} \rangle} \times \ldots \times \mathbf{T}_{j_{(|J|)}}^{\langle \nu_{(|J|)} \rangle}.$$

Каждый элемент ϖ множества $(\mathbf{T}/{\sim})^{\langle \nu_{(1)}, \ldots, \nu_{(|J|)} \rangle} \neq \varnothing$ — это набор пар переменных из множества $\mathbf{T}$, а $\bar{\varpi}$ — множество переменных, образующих эти пары: $\varpi = ((t_{l_1}, t_{m_1}), \ldots, (t_{l_\gamma}, t_{m_\gamma}))$, $\bar{\varpi} = \{t_{l_1}, t_{m_1}, \ldots, t_{l_\gamma}, t_{m_\gamma}\}$ ($l_1, m_1, \ldots, l_\gamma, m_\gamma \in \{1, \ldots, k\}$ и $\gamma = \nu_{(1)} + \ldots + \nu_{(|J|)}$), где количество элементов $r_{\langle \nu_{(1)}, \ldots, \nu_{(|J|)} \rangle} = |(\mathbf{T}/{\sim})^{\langle \nu_{(1)}, \ldots, \nu_{(|J|)} \rangle}|$ этого множества зависит от $\nu_{(1)}, \ldots, \nu_{(|J|)}$ и выражается следующим образом:

$$r_{\langle \nu_{(1)}, \ldots, \nu_{(|J|)} \rangle} = \prod_{j \in J} h_{i - 2\nu_{(j)}}^{(i)} \Big|_{i = \#(j, \bar{J})}, \quad h_{i-2\nu}^{(i)} = \tfrac{i!}{\nu!(i-2\nu)!2^\nu}. \tag{13}$$

Будем обозначать через $\mathbf{T} \backslash \bar{\varpi}$ множество переменных из $\mathbf{T}$, которые не попали ни в одну пару из набора ϖ. Аналогичным образом определим множества $\mathbf{I}_j^{\langle \nu_j \rangle}$, $(\mathbf{I}/{\sim})^{\langle \nu_{(1)}, \ldots, \nu_{(|J|)} \rangle}$ и $\mathbf{I} \backslash \bar{\varrho}$. Они отличаются от множеств $\mathbf{T}_j^{\langle \nu_j \rangle}$, $(\mathbf{T}/{\sim})^{\langle \nu_{(1)}, \ldots, \nu_{(|J|)} \rangle}$ и $\mathbf{T} \backslash \bar{\varpi}$ только тем, что образованы наборами ϱ пар индексов из $\mathbf{I}_j$ (индексы в паре не совпадают), $j \in J$, т.е. обозначениями: $\varrho = ((i_{l_1}, i_{m_1}), \ldots, (i_{l_\gamma}, i_{m_\gamma}))$, $\bar{\varrho} = \{i_{l_1}, i_{m_1}, \ldots, i_{l_\gamma}, i_{m_\gamma}\}$.

Введем еще одно обозначение $\mathcal{S}^\varepsilon_{\bar{\varpi}}$, которое предполагает, что усредняющий оператор применяется к $f(\cdot)$ как функции $|\bar{\varpi}|$ переменных из множества $\bar{\varpi}$ при фиксированных значениях переменных $\mathbf{T} \backslash \bar{\varpi}$. Кроме того, пусть $t' = [\, t_{l_1} \ \ldots \ t_{l_\gamma} \,]^{\mathrm{T}}$, $t'' = [\, t_{m_1} \ \ldots \ t_{m_\gamma} \,]^{\mathrm{T}}$, $i' = [\, i_{l_1} \ \ldots \ i_{l_\gamma} \,]^{\mathrm{T}}$, $i'' = [\, i_{m_1} \ \ldots \ i_{m_\gamma} \,]^{\mathrm{T}}$.

Далее определим линейный оператор $\mathrm{tr}_\varpi\colon L_2(\mathbb{T}^k) \to L_2(\mathbb{T}^{k-2\gamma})$ ($L_2(\mathbb{T}^0) = \mathbb{R}$):

$$\mathrm{tr}_\varpi f(\cdot) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{T}^\gamma} \mathcal{S}^\varepsilon_{\bar{\varpi}} f(t_1, \ldots, t_k) \Big|_{t' = t''} dt',$$

где интеграл по множеству нулевой меры в $\mathbb{T}^k$ понимается однозначно.

Будем называть $\mathrm{tr}_\varpi f(\cdot)$ интегральным следом, для функций двух переменных он определен в разд. 1.9. При условии $n = k - 2\gamma > 0$ интегральный след $\mathrm{tr}_\varpi f(\cdot)$ — это функция n переменных из множества $\mathbf{T}$ за исключением тех, которые являются координатами векторов t' и t'', т.е. переменных из множества $\mathbf{T}\backslash\bar{\varpi}$. Оператор (функционал при $k - 2\gamma = 0$) tr_ϖ определен не для всех функций $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$.

Введем линейное подпространство $L_2^{\mathrm{tr}(j_1\dots j_k)}(\mathbb{T}^k) \subseteq L_2(\mathbb{T}^k)$, образованное функциями $f(\cdot)$, коэффициенты разложения $F_{i_1\dots i_k}$ которых вне зависимости от выбора базисной системы $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^\infty$ при всех допустимых значениях величин $\nu_{(1)},\dots,\nu_{(|J|)}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{\mathbf{I}\backslash\bar{\varrho}} \Big(\sum_{i_{l_1},\dots,i_{l_\gamma}=0}^\infty F_{i_1\dots i_k}\Big|_{i'=i''}\Big)^2 < \infty \qquad \begin{array}{c} \forall\, \varrho \in (\mathbf{I}/{\sim})^{\langle \nu_{(1)},\dots,\nu_{(|J|)}\rangle}, \\ \nu_j = 0,\dots,\lfloor \#(j,\bar{J})/2 \rfloor \quad \forall\, j \in J, \end{array} \tag{14}$$

где числовой ряд в круглых скобках — свертка коэффициентов разложения.

При фиксированных значениях $\nu_{(1)},\dots,\nu_{(|J|)}$ число индексов в множестве $\mathbf{I}\backslash\bar{\varrho}$ равно n. Если $n > 0$, то с их помощью нумеруются коэффициенты разложения функции из пространства $L_2(\mathbb{T}^n)$, а именно интегрального следа $\mathrm{tr}_\varpi f(\cdot)$, а если $n = 0$, то в результате такой свертки коэффициентов разложения получается константа $\mathrm{tr}_\varpi f(\cdot)$. Если в формуле (14) свертку коэффициентов разложения понимать не как кратный, а как повторный ряд, предполагая, что он не зависит от порядка суммирования, то соответствующее линейное подпространство будем обозначать $L_2^{i\,\mathrm{tr}(j_1\dots j_k)}(\mathbb{T}^k) \subseteq L_2(\mathbb{T}^k)$.

Для симметризованных функций условие (14) записывается проще. Пусть $f(\cdot)$ соответствует симметризованная функция $f_{\bar{J}}(\cdot)$ и $\tilde{F}_{i_1\dots i_k}$ — ее коэффициенты разложения. Тогда для них должно выполняться условие, аналогичное (14), вне зависимости от выбора базисной системы $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^\infty$, но для одного элемента $\varrho \in (\mathbf{I}/{\sim})^{\langle \nu_{(1)},\dots,\nu_{(|J|)}\rangle}$, который выбирается произвольно:

$$\sum_{\mathbf{I}\backslash\bar{\varrho}} \Big(\sum_{i_{l_1},\dots,i_{l_\gamma}=0}^\infty \tilde{F}_{i_1\dots i_k}\Big|_{i'=i''}\Big)^2 < \infty, \qquad \begin{array}{c} \varrho \in (\mathbf{I}/{\sim})^{\langle \nu_{(1)},\dots,\nu_{(|J|)}\rangle}, \\ \nu_j = 0,\dots,\lfloor \#(j,\bar{J})/2 \rfloor \quad \forall\, j \in J. \end{array}$$

Соответствующий интегральный след $\mathrm{tr}_\varpi f(\cdot)$ обозначим $f_{\langle \nu_{(1)},\dots,\nu_{(|J|)}\rangle}(\cdot)$. Кроме того, будем обозначать множество симметризованных функций из пространства $L_2^{\mathrm{tr}(j_1\dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ через $L_2^{s\,\mathrm{tr}(j_1\dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 6 (о следах для коэффициентов разложения функции $\Bbbk_\psi(\cdot)$). *Пусть функция* $\Bbbk_\psi(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ *определяется формулой* (11). *Тогда* $\Bbbk_\psi(\cdot) \in L_2^{i\,\mathrm{tr}(j_1\dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ *для любых* $j_1,\dots,j_k = 1,2,\dots,s$.

Теорема 7 (о следах для коэффициентов разложения функции $\Bbbk_\psi(\cdot)$). *Пусть функция* $\Bbbk_\psi(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ *задается формулой* (11), $k > 2$, $\mathbb{K}^\psi_{i_1\dots i_k}$ *— коэффициенты разложения функции* $\Bbbk_\psi(\cdot)$ *относительно базисной системы* $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^\infty$. *Тогда*

1) *числовые ряды*

$$\sum_{j=0}^\infty \mathbb{K}^\psi_{i_1\dots i_k}\Big|_{i_l=i_{l+1}=j}, \quad l = 1,\dots,k-1,$$

определяют коэффициенты разложения функции $\Bbbk_{\tilde{\psi}}(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^{k-2})$:

$$\begin{aligned}&\Bbbk_{\tilde{\psi}}(t_1,\ldots,t_{l-1},t_{l+2},\ldots,t_k) =\\ &\quad = \tfrac{1}{2}\big(\psi_1(t_1)\ldots\tilde{\psi}_{l+2}(t_{l+2})\ldots\psi_k(t_k) - \psi_1(t_1)\ldots\tilde{\psi}_{l-1}(t_{l-1})\ldots\psi_k(t_k)\big)\times\\ &\quad\times \Bbbk(t_1,\ldots,t_{l-1},t_{l+2},\ldots,t_k),\end{aligned}$$

где $\tilde{\psi}_{l-1}(t) = \psi_{l-1}(t)\Psi_l(t)$, $\tilde{\psi}_{l+2}(t) = \psi_{l+2}(t)\Psi_l(t)$, $\Psi_l(t) = \int_{t_0}^{t}\psi_l(\tau)\psi_{l+1}(\tau)d\tau$, $t_{k+1} = T$ *и* $\psi_0(t) = \psi_{k+1}(t) \equiv 1$.

2) *числовые ряды*

$$\sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{K}^{\psi}_{i_1\ldots i_k}\Big|_{i_l=i_m=j}, \qquad \begin{matrix} l \in \{1,\ldots,k-2\},\\ m\in\{3,\ldots,k\},\end{matrix} \qquad m-l>1,$$

определяют коэффициенты разложения нулевой функции $k-2$ *переменных.*

Полезный результат применения последней теоремы состоит в доказательстве того, что числовые ряды

$$\sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{K}^{n_1\ldots n_k}_{i_1\ldots i_k}\Big|_{i_l=i_m=j}, \quad l,m\in\{1,\ldots,k\}, \quad m-l\geqslant 1,$$

где $\mathbb{K}^{n_1\ldots n_k}_{i_1\ldots i_k}$ — коэффициенты разложения функции $\Bbbk_{n_1\ldots n_k}(\cdot)$, определяют коэффициенты разложения функции

$$\begin{aligned}&\Bbbk_{\tilde{\psi}}(t_1,\ldots,t_{l-1},t_{l+1},\ldots,t_{m-1},t_{m+1},\ldots,t_k) =\\ &\quad = \begin{cases}\frac{(t_{l+2}-t_0)^{n_l+n_{l+1}+1}-(t_{l-1}-t_0)^{n_l+n_{l+1}+1}}{2(n_l+n_{l+1}+1)}\,\Bbbk_{\psi}(t_1,\ldots,t_{l-1},t_{l+2},\ldots,t_k), & m=l+1,\\ 0, & m-l>1,\end{cases}\end{aligned}$$

где $t_{k+1}=T$, при условии, что базисные системы для представления функций с числом аргументов k и $k-2$ формируются как всевозможные произведения функций базисной системы $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$.

Один из результатов главы 4 состоит в следующем (обобщение теоремы 3).

Теорема 8 (о следах для коэффициентов разложения функции $\Bbbk_{\psi}(\cdot)$). *Пусть* $\psi_l(\cdot)\in L_2(\mathbb{T})$, $l=1,\ldots,k$, $k=2\gamma$ *— четное,* $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ *— базисная система* $L_2(\mathbb{T})$. *Тогда*

$$\begin{aligned}&\sum_{i_1,i_3,\ldots,i_{k-1}=0}^{\infty}\int_{\mathbb{T}}q(i_k,t_k)\psi_k(t_k)\ldots\int_{t_0}^{t_3}q(i_2,t_2)\psi_2(t_2)\int_{t_0}^{t_2}q(i_1,t_1)\psi_1(t_1)dt_1\ldots dt_k\Big|_{\substack{i_1=i_2,\\ \ldots,\\ i_{k-1}=i_k}} =\\ &\quad = \tfrac{1}{2^{\gamma}}\big(\psi_1(\cdot)\otimes\psi_3(\cdot)\otimes\ldots\otimes\psi_{k-1}(\cdot),\psi_2(\cdot)\otimes\psi_4(\cdot)\otimes\ldots\otimes\psi_k(\cdot)\big)_{L_2(\Delta\mathbb{T}^{\gamma})},\end{aligned}$$

где $\Delta\mathbb{T}^{\gamma} = \big\{(t_1,\ldots,t_{\gamma})\in\mathbb{T}^{\gamma}\colon t_1<\ldots<t_{\gamma}\big\}$.

Теоремы 6−8 о следах позволяют доказать существование кратных стохастических интегралов Стратоновича от функций (10) и (11), а также вычислить их математические ожидания.

Некоторые аспекты приближенного представления функций многих переменных, которые связаны с усечением спектральных характеристик, описаны в разд. 4.5. В этом же разделе приведены примеры аппроксимации функций (10) и

(11) с применением разных базисных систем: полиномов Лежандра, косинусоид, функций Уолша и Хаара, тригонометрических функций.

В главе 5 изучаются кратные стохастические интегралы Ито и Стратоновича. Вспомогательные результаты, касающиеся ортогональных систем случайных величин, изложены в разд. 5.1. В том числе рассмотрены системы, которые формируются на основе преобразования случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение, с помощью полиномов Эрмита, а также на основе преобразования случайных величин, имеющих центрированное пуассоновское распределение, с помощью модифицированных полиномов Шарлье.

В разд. 5.2 приведены основные определения и свойства кратных стохастических интегралов. В частности, введены линейные операторы ${}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\colon L_2(\mathbb{T}^k) \to \mathcal{L}_2$ и ${}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\colon L_2(\mathbb{T}^k) \to \mathcal{L}_2$ ($\mathcal{L}_2$ — пространство гильбертовых случайных величин), ставящие в соответствие функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ кратные стохастические интегралы Ито и Стратоновича соответственно по винеровским процессам (интегралы кратности k, $\mathbb{T} = [t_0, T]$):

$$ {}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}^k} f(t_1,\ldots,t_k)dW_{j_1}(t_1)\ldots dW_{j_k}(t_k), \tag{15} $$

$$ {}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}^k} f(t_1,\ldots,t_k)\circ dW_{j_1}(t_1)\circ\ldots\circ dW_{j_k}(t_k), \tag{16} $$

где $j_1,\ldots,j_k = 1,2,\ldots,s$; $W_1(\cdot),\ldots,W_s(\cdot)$ — независимые стандартные винеровские процессы. Знак $\circ$ используется для того, чтобы отличать интегралы Стратоновича от интегралов Ито.

Приведены определения этих интегралов и их свойства. Отмечено, что область определения кратных интегралов Стратоновича в общем случае не совпадает с $L_2(\mathbb{T}^k)$.

Рассматриваемые линейные операторы — это случайные линейные функционалы. В общем случае, если $\mathcal{Z}$ — случайный линейный функционал на $D(\mathbb{T}^k)$, $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базис пространства $L_2(\mathbb{T})$, то его спектральная характеристика — бесконечная k-мерная случайная матрица-столбец $Z = (Z_{i_1\ldots i_k})$ с элементами

$$ Z_{i_1\ldots i_k} = \mathcal{Z}q(i_1,\cdot)\otimes\ldots\otimes q(i_k,\cdot), \quad i_1,\ldots,i_k = 0,1,2,\ldots; \quad \mathbb{S}[\mathcal{Z}] = Z. $$

Более детально кратные стохастические интегралы Ито изучены в разд. 5.3, получены новые представления и ортогональные разложения кратных стохастических интегралов Ито произвольной кратности.

Теорема 9 (о представлении кратного стохастического интеграла Ито). *Пусть $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ и $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — базисная система $L_2(\mathbb{T})$. Тогда*

1) *кратный стохастический интеграл Ито по винеровским процессам от функции $f(\cdot)$ представляется в виде*

$$ {}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)} f(\cdot) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty} F_{i_1\ldots i_k}\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}, \tag{17} $$

где $F_{i_1\ldots i_k}$ — коэффициенты разложения функции $f(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i_1,\cdot)\otimes\ldots\otimes q(i_k,\cdot)\}_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty}$, $\zeta_{i_l}^{(j_l)}$ — независимые случайные величины со стандартным нормальным распределением, $i_l = 0,1,2,\ldots$ и $l = 1,\ldots,k$, $*$ означает произведение Вика, ассоциированное с полиномами Эрмита;

2) *норма кратного стохастического интеграла Ито удовлетворяет соотношению*

$$\|{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}f(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2} = M_{\bar{J}}\|\langle f(\cdot)\rangle_{\bar{J}}\|_{L_2(\mathbb{T}^k)} \leqslant M_{\bar{J}}\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)},$$

где $\langle f(\cdot)\rangle_{\bar{J}}$ — *симметризованная функция* (12).

В этом разделе предложены эквивалентные представления для кратного стохастического интеграла Ито и его нормы. Кроме того, представлена спектральная характеристика $\mathbb{S}[{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}] = \mathcal{V}^{\circledast(j_1\ldots j_k)} = \mathcal{V}_{j_1}\circledast\ldots\circledast\mathcal{V}_{j_k}$, где $\mathcal{V}_1,\ldots,\mathcal{V}_s$ — это спектральные характеристики белых шумов $V_1(\cdot),\ldots,V_s(\cdot)$, соответствующих винеровским процессам $W_1(\cdot),\ldots,W_s(\cdot)$, а $\circledast$ — аналог тензорного произведения, но относительно операции $*$.

Кратные стохастические интегралы Стратоновича рассмотрены в разд. 5.4, для них также получены ортогональные разложения.

Вернемся к пространству $L_2^{s\,\mathrm{tr}(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ и определим в нем норму:

$$\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2^{s\,\mathrm{tr}(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{T}^k)} = \sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor\#(j_{(1)},\bar{J})/2\rfloor}\ldots\sum_{\nu_{(|J|)}=0}^{\lfloor\#(j_{(|J|)},\bar{J})/2\rfloor} r_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}\times$$
$$\times\|f_{\bar{J},\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^{k-2(\nu_{(1)}+\ldots+\nu_{(|J|)})})}, \qquad (18)$$

полагая $\|f_{\bar{J},\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}\|_{L_2(\mathbb{T}^0)} = |f_{\bar{J},\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}|$ при $k-2(\nu_{(1)}+\ldots+\nu_{(|J|)})=0$. Далее обозначим через $L_2^{s\,\overline{\mathrm{tr}}(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ линейное пространство, которое определяется как пополнение пространства $L_2^{s\,\mathrm{tr}(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ по норме (18).

Получены новые представления и ортогональные разложения кратных стохастических интегралов Стратоновича произвольной кратности.

Теорема 10 (о представлении кратного стохастического интеграла Стратоновича). *Пусть* $f(\cdot)$ *такая, что соответствующая симметризованная функция* (12) *удовлетворяет условию* $f_{\bar{J}}(\cdot) = \langle f(\cdot)\rangle_{\bar{J}} \in L_2^{s\,\overline{\mathrm{tr}}(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{T}^k)$, *и* $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — *базисная система* $L_2(\mathbb{T})$. *Тогда*

1) *кратный стохастический интеграл Стратоновича по винеровским процессам от функции* $f(\cdot)$ *представляется в виде*

$${}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}f(\cdot) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty} F_{i_1\ldots i_k}\zeta_{i_1}^{(j_1)}\ldots\zeta_{i_k}^{(j_k)}, \qquad (19)$$

где $F_{i_1\ldots i_k}$ — *коэффициенты разложения функции* $f(\cdot)$ *относительно базисной системы* $\{q(i_1,\cdot)\otimes\ldots\otimes q(i_k,\cdot)\}_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty}$, $\zeta_{i_l}^{(j_l)}$ — *независимые случайные величины со стандартным нормальным распределением,* $i_l = 0,1,2,\ldots$ *и* $l=1,\ldots,k$;

2) *справедливо разложение*

$${}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}f(\cdot) = \sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor\#(j_{(1)},\bar{J})/2\rfloor}\ldots\sum_{\nu_{(|J|)}=0}^{\lfloor\#(j_{(|J|)},\bar{J})/2\rfloor} r_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}\,{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\bar{J}\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle} f_{\bar{J},\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}(\cdot) \qquad (20)$$

и

$$\|{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}f(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor\#(j_{(1)},\bar{J})/2\rfloor}\ldots\sum_{\nu_{(|J|)}=0}^{\lfloor\#(j_{(|J|)},\bar{J})/2\rfloor} r_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}^2\|{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{\bar{J}\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle} f_{\bar{J},\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2}^2,$$

где величины $r_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}$ *определяются формулой* (13).

Отметим, что если значения $j_1,\ldots,j_k$ совпадают, то формула (20) дает разложение Ху−Мейера для кратных стохастических интегралов Стратоновича.

Получена спектральная характеристика соответствующего случайного линейного функционала: $\mathbb{S}[{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}] = \mathcal{V}^{\otimes(j_1\ldots j_k)} = \mathcal{V}_{j_1}\otimes\ldots\otimes\mathcal{V}_{j_k}$, где $\otimes$ — тензорное произведение.

В разд. 5.3 и 5.4 приведены примеры, иллюстрирующие теоретические результаты. В качестве частного случая кратных стохастических интегралов в разд. 5.5 уделено внимание повторным стохастическим интегралам.

Раздел 5.6 затрагивает вопросы нахождения первых двух моментов (математического ожидания и второго начального момента) типовых повторных стохастических интегралов. Раздел 5.7 посвящен приближенному представлению кратных стохастических интегралов в виде частичных сумм рядов, образованных случайными величинами:

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}f(\cdot) &\approx {}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\tilde{f}(\cdot) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{L-1} F_{i_1\ldots i_k}\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)},\\
{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}f(\cdot) &\approx {}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\tilde{f}(\cdot) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{L-1} F_{i_1\ldots i_k}\zeta_{i_1}^{(j_1)} \ldots \zeta_{i_k}^{(j_k)},
\end{aligned}
$$

где L — заданный порядок усечения, $\tilde{f}(\cdot) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{L-1} F_{i_1\ldots i_k} q(i_1,\cdot)\otimes\ldots\otimes q(i_k,\cdot)$.

На основе теорем 9 и 10 получены новые формулы для среднеквадратической погрешности аппроксимации ($\|\cdot\|$ — евклидова норма):

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{I}}\varepsilon_f^{W(j_1\ldots j_k)} &= \mathrm{E}\big({}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}f(\cdot) - {}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\tilde{f}(\cdot)\big)^2 =\\
&= M_{\bar{J}}^2\|\langle f(\cdot)\rangle_{\bar{J}} - \langle\tilde{f}(\cdot)\rangle_{\bar{J}}\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 = M_{\bar{J}}^2\big(\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 - \|\tilde{F}_{\bar{J}}\|^2\big),\\
{}^{\mathrm{S}}\varepsilon_f^{W(j_1\ldots j_k)} &= \mathrm{E}\big({}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}f(\cdot) - {}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\tilde{f}(\cdot)\big)^2 =\\
&= \sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor\#(j_{(1)},\bar{J})/2\rfloor}\ldots\sum_{\nu_{(|J|)}=0}^{\lfloor\#(j_{(|J|)},\bar{J})/2\rfloor} r_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}^2\, {}^{\mathrm{I}}\varepsilon_{f_{\bar{J},\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}}^{\bar{J}\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle},
\end{aligned}
$$

где $\tilde{F}_{\bar{J}}$ — усеченная спектральная характеристика функции $\tilde{f}_{\bar{J}}(\cdot)$.

Приближенное представление частичной суммой ряда при неточных коэффициентах разложения:

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\bar{f}(\cdot) &= \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{L-1} \bar{F}_{i_1\ldots i_k}\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)},\\
{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\bar{f}(\cdot) &= \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{L-1} \bar{F}_{i_1\ldots i_k}\zeta_{i_1}^{(j_1)} \ldots \zeta_{i_k}^{(j_k)},
\end{aligned}
$$

где $\bar{f}(\cdot) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{L-1} \bar{F}_{i_1\ldots i_k} q(i_1,\cdot)\otimes\ldots\otimes q(i_k,\cdot)$. Соответствующая среднеквадратическая погрешность аппроксимации:

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{I}}\bar{\varepsilon}_f^{W(j_1\ldots j_k)} &= M_{\bar{J}}^2\big(\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 - \|\tilde{F}_{\bar{J}}\|^2 + \|\tilde{F}_{\bar{J}} - \bar{F}_{\bar{J}}\|^2\big),\\
{}^{\mathrm{S}}\bar{\varepsilon}_f^{W(j_1\ldots j_k)} &= \sum_{\nu_{(1)}=0}^{\lfloor\#(j_{(1)},\bar{J})/2\rfloor}\ldots\sum_{\nu_{(|J|)}=0}^{\lfloor\#(j_{(|J|)},\bar{J})/2\rfloor} r_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}^2\, {}^{\mathrm{I}}\bar{\varepsilon}_{f_{\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle}}^{\bar{J}\langle\nu_{(1)},\ldots,\nu_{(|J|)}\rangle},
\end{aligned}
$$

где $\bar{F}_{\bar{J}}$ — усеченная спектральная характеристика функции $\tilde{f}_{\bar{J}}(\cdot)$ с неточно найденными элементами.

Кратные стохастические интегралы — это случайные величины. Алгоритмы их моделирования с примерами, которые соответствуют численным методам решения СДУ, применяемым для анализа и статистического моделирования нелинейных непрерывных стохастических систем, приведены в разд. 5.8. Основу этих алгоритмов составляют теоремы 9 и 10, а также результаты главы 4, связанные с нахождением коэффициентов разложения функций (10) и (11).

Глава 6 посвящена спектральному представлению повторных стохастических интегралов, в его основе лежит решение линейных СДУ спектральным методом. В разд. 6.1 и 6.2 подробно рассматриваются повторные стохастические интегралы Стратоновича и Ито произвольной кратности. В этих представлениях используются спектральные характеристики операторов интегрирования и умножения, спектральная характеристика оператора умножения функций, а также спектральные характеристики белых шумов.

Рассматриваются повторные стохастические интегралы Стратоновича кратности $k \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\mathbb{k}_{\psi}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \ldots \int_{t_0}^{t_3}\int_{t_0}^{t_2} \psi_1(t_1)\psi_2(t_2)\ldots\psi_k(t_k)\circ \\ \circ\, dW_{j_1}(t_1)\circ dW_{j_2}(t_2)\circ\ldots\circ dW_{j_k}(t_k), \qquad (21)\end{aligned}$$

где функция $\mathbb{k}_{\psi}(\cdot)$ задается формулой (11) через весовые функции.

Теорема 11 (о представлении повторного стохастического интеграла Стратоновича). *Пусть* $\mathcal{V}_1,\ldots,\mathcal{V}_s$ *— спектральные характеристики гауссовских белых шумов* $V_1(\cdot),\ldots,V_s(\cdot)$ *соответственно,* P^{-1} *— спектральная характеристика оператора интегрирования,* V *— спектральная характеристика оператора умножения функций,* $\Psi_1,\ldots,\Psi_k$ *— спектральные характеристики операторов умножения на функции* $\psi_1(\cdot),\ldots,\psi_k(\cdot)$*. Тогда повторный стохастический интеграл Стратоновича* (21) *представляется с помощью соотношений*

$$\begin{gathered}{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\mathbb{k}_{\psi}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_k}^{\mathrm{T}}\Psi_k\mathcal{X}_{k-1}, \\ \mathcal{X}_l = P^{-1}\Psi_l(V\mathcal{V}_{j_l})\mathcal{X}_{l-1}, \quad l=2,\ldots,k-1, \quad \mathcal{X}_1 = P^{-1}\Psi_1\mathcal{V}_{j_1},\end{gathered}$$

или в явном виде

$${}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\mathbb{k}_{\psi}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_k}^{\mathrm{T}}\Psi_k P^{-1}\Psi_{k-1}(V\mathcal{V}_{j_{k-1}})\ldots P^{-1}\Psi_2(V\mathcal{V}_{j_2})P^{-1}\Psi_1\mathcal{V}_{j_1}.$$

Далее изучаются повторные стохастические интегралы Ито кратности $k \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\mathbb{k}_{\psi}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \ldots \int_{t_0}^{t_3}\int_{t_0}^{t_2} \psi_1(t_1)\psi_2(t_2)\ldots\psi_k(t_k)\times \\ \times\, dW_{j_1}(t_1)dW_{j_2}(t_2)\ldots dW_{j_k}(t_k). \qquad (22)\end{aligned}$$

Теорема 12 (о представлении повторного стохастического интеграла Ито). *Пусть выполнены условия теоремы* 11 *и, кроме того,* $\mathbf{1}$ *— спектральная характеристика функции* $f_0(t)\equiv 1$*. Тогда повторный стохастический интеграл Ито* (22) *представляется с помощью соотношений*

$$\begin{gathered}{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\mathbb{k}_{\psi}(\cdot) = -\tfrac{1}{2}\,\delta_{j_{k-1}j_k}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\Psi_{k-1}\Psi_k\mathcal{X}_{k-2} + \mathcal{V}_{j_k}^{\mathrm{T}}\Psi_k\mathcal{X}_{k-1}, \\ \mathcal{X}_l = -\tfrac{1}{2}\,\delta_{j_{l-1}j_l}P^{-1}\Psi_{l-1}\Psi_l\mathcal{X}_{l-2} + P^{-1}\Psi_l(V\mathcal{V}_{j_l})\mathcal{X}_{l-1}, \quad l=2,\ldots,k-1, \\ \mathcal{X}_0 = \mathbf{1}, \quad \mathcal{X}_1 = P^{-1}\Psi_1\mathcal{V}_{j_1},\end{gathered}$$

где $\delta_{j_{l-1}j_l}$ *— символ Кронекера,* $l = 2, \ldots, k$.

Отметим, что в диссертации сначала описан более простой вариант $\psi_1(\cdot) = \ldots = \psi_k(\cdot) = 1$. В этих разделах детально изучены частные случаи кратностей $k = 2, 3, 4$, приведены примеры. Установлены связи между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито с применением спектральной формы математического описания систем управления.

Доказанные теоремы дают простые и удобные при практической реализации формулы для приближенного моделирования повторных стохастических интегралов, необходимых в численных методах решения СДУ с высокими порядками среднеквадратической и сильной сходимости. Эти результаты применяются при решении задач анализа и статистического моделирования нелинейных непрерывных стохастических систем (в задачах статистической обработки информации).

Доказаны теоремы, показывающие эквивалентность полученных спектральных представлений и разложений из работ Д.Ф. Кузнецова. Сделаны обобщения, позволяющие представить в спектральной форме математического описания повторные стохастические интегралы смешанного типа, когда множество значений $j_1, \ldots, j_k$ дополняется нулем и вводится функция $W_0(t) = t$. Тогда формулы (21) и (22) определяют повторные стохастические интегралы более широкого класса. Сформулирована общая теорема о спектральном представлении повторных стохастических θ-интегралов.

В разд. 6.3 применен известный подход к нахождению первых двух моментов типовых повторных стохастических интегралов с помощью интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений для них, проведено сравнение с результатами из главы 5. Приближенное моделирование повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито с помощью соответствующих спектральных представлений рассматривается в разд. 6.4. Приведены пошаговые алгоритмы моделирования, а также их апробация для моделирования повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито кратностей $k = 2, 3, 4$.

Основное применение предложенные алгоритмы моделирования повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито находят при реализации численных методов решения СДУ, построенных на основе разложений Тейлора−Стратоновича и Тейлора−Ито. Описание и тестирование таких численно-спектральных методов содержится в разд. 6.5. В частности, моделирование повторных стохастических интегралов Стратоновича для численных методов с порядками среднеквадратической или сильной сходимости до 2.0 основано на следующих представлениях:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{J}^{W(j_1)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot) = \mathcal{V}^{\mathrm{T}}_{j_1}\mathbf{1}, &&{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}^{W(j_1j_2j_3)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot) = \mathcal{V}^{\mathrm{T}}_{j_3}P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_2})P^{-1}\mathcal{V}_{j_1},\\
&{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}^{W(j_1j_2)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot) = \mathcal{V}^{\mathrm{T}}_{j_2}P^{-1}\mathcal{V}_{j_1}, &&{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}^{W(0j_1j_2)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot) = \mathcal{V}^{\mathrm{T}}_{j_2}P^{-1}A\mathcal{V}_{j_1},\\
&{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}^{W(0j_1)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot) = \mathcal{V}^{\mathrm{T}}_{j_1}F, &&{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}^{W(j_10j_2)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot) = \mathcal{V}^{\mathrm{T}}_{j_2}(AP^{-1} - P^{-1}A)\mathcal{V}_{j_1},\\
&{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}^{W(j_10)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot) = \mathcal{V}^{\mathrm{T}}_{j_1}(h\mathbf{1} - F), &&{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}^{W(j_1j_20)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot) = \mathcal{V}^{\mathrm{T}}_{j_2}(hE - A)P^{-1}\mathcal{V}_{j_1},
\end{aligned}
$$

$$
{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}^{W(j_1j_2j_3j_4)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot) = \mathcal{V}^{\mathrm{T}}_{j_4}P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_3})P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_2})P^{-1}\mathcal{V}_{j_1},
$$

а для моделирования повторных стохастических интегралов Ито для численных методов с такими же порядками среднеквадратической или сильной сходимости используются представления

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}^{W(j_1)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot) &= \mathcal{V}^{\mathrm{T}}_{j_1}\mathbf{1}, \quad {}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}^{W(j_1j_2)}_{[\vartheta,\vartheta+h]} = \mathcal{V}^{\mathrm{T}}_{j_2}P^{-1}\mathcal{V}_{j_1} - \tfrac{\delta_{j_1j_2}h}{2},\\
{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}^{W(0j_1)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot) &= \mathcal{V}^{\mathrm{T}}_{j_1}F, \quad {}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}^{W(j_10)}_{[\vartheta,\vartheta+h]} = \mathcal{V}^{\mathrm{T}}_{j_1}(h\mathbf{1}-F),\\
{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}^{W(j_1j_2j_3)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot) &= \mathcal{V}^{\mathrm{T}}_{j_3}P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_2})P^{-1}\mathcal{V}_{j_1} - \tfrac{\delta_{j_1j_2}}{2}\mathcal{V}^{\mathrm{T}}_{j_3}F - \tfrac{\delta_{j_2j_3}}{2}\mathcal{V}^{\mathrm{T}}_{j_1}(h\mathbf{1}-F),\\
{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}^{W(0j_1j_2)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot) &= \mathcal{V}^{\mathrm{T}}_{j_2}P^{-1}A\mathcal{V}_{j_1} - \tfrac{\delta_{j_1j_2}h^2}{4},\\
{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}^{W(j_10j_2)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot) &= \mathcal{V}^{\mathrm{T}}_{j_2}(AP^{-1}-P^{-1}A)\mathcal{V}_{j_1},\\
{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}^{W(j_1j_20)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot) &= \mathcal{V}^{\mathrm{T}}_{j_2}(hE-A)P^{-1}\mathcal{V}_{j_1} - \tfrac{\delta_{j_1j_2}h^2}{4},\\
{}^{\mathrm{I}}\mathcal{J}^{W(j_1j_2j_3j_4)}_{[\vartheta,\vartheta+h]}\Bbbk(\cdot) &= \mathcal{V}^{\mathrm{T}}_{j_4}P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_3})P^{-1}(V\mathcal{V}_{j_2})P^{-1}\mathcal{V}_{j_1} - \tfrac{\delta_{j_1j_2}}{2}\mathcal{V}^{\mathrm{T}}_{j_4}P^{-1}A\mathcal{V}_{j_3}\\
&\quad - \tfrac{\delta_{j_2j_3}}{2}\mathcal{V}^{\mathrm{T}}_{j_4}(AP^{-1}-P^{-1}A)\mathcal{V}_{j_1} - \tfrac{\delta_{j_3j_4}}{2}\mathcal{V}^{\mathrm{T}}_{j_2}(hE-A)P^{-1}\mathcal{V}_{j_1} + \tfrac{\delta_{j_1j_2}\delta_{j_3j_4}h^2}{8},
\end{aligned}
$$

где $\Bbbk(\cdot)$ — функция (10), число аргументов которой совпадает с кратностью интеграла, $\mathbf{1}$ и F — спектральные характеристики функций $f_0(t) \equiv 1$ и $f_1(t) = t$, P^{-1} и A и V — спектральные характеристики операторов интегрирования и умножения на функцию $f_1(\cdot)$, V — спектральная характеристика оператора умножения функций, $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_s$ — спектральные характеристики белых шумов $V_1(\cdot), \ldots, V_s(\cdot)$, соответствующих винеровским процессам $W_1(\cdot), \ldots, W_s(\cdot)$ $(j_1, \ldots, j_k = 1, 2, \ldots, s)$.

Чтобы апробировать предложенные методы и алгоритмы, разработано программное обеспечение для системы компьютерной математики Mathcad. Оно подробно описано в приложении и находится в ряду комплексов программ спектрального метода, созданных в разные годы. Приложение включает 6 разделов: по одному для каждой главы основной части.

Программное обеспечение спектральных преобразований и спектрального метода имеет модульную структуру. Это прежде всего модули с общими функциями, которых нет в перечне встроенных функций, и программы спектрального метода, реализация которых не зависит от конкретной базисной системы, например программы численного расчета спектральных характеристик функций и линейных операторов или обратное спектральное преобразование. Такой подход позволяет задать только базисные функции и в первом приближении сразу получить необходимые спектральные характеристики, дополняя набор программ или заменяя имеющиеся программы по мере необходимости. В этом состоит принципиальное отличие от используемого ранее программного обеспечения спектрального метода, также реализованного в Mathcad.

Для каждой базисной системы сформирован отдельный модуль, в котором определены базисные функции и добавлены программы для нахождения спектральных характеристик типовых функций и линейных операторов, спектральной характеристики оператора умножения функций, нестационарных спектральных плотностей типовых случайных процессов. Все спектральные характеристики являются усеченными. Остальные модули — это программы для конкретных примеров, приведенных в диссертации: нахождение погрешностей аппроксимации функций, моделирование типовых случайных процессов, моделирование кратных и повторных стохастических интегралов.

Программное обеспечение спектральных преобразований и спектрального метода также реализовано в виде приложения для операционной системы Microsoft Windows на языке Pascal/Delphi с применением различных технологий параллельного программирования (для центральных процессоров и видеоадаптеров). В частности, с его помощью решена задача построения множества спектральных характеристик функций одной переменной с ограничениями и оценивания вероятности достижения винеровским процессом заданных границ.

В заключении перечислены основные итоги работы.

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Алгоритмическое обеспечение представления случайных процессов в спектральной форме математического описания систем управления [3, 4, 29].

2. Обобщение спектрального метода для анализа и статистического моделирования линейных непрерывных стохастических систем [4–6, 17, 18, 29].

3. Обобщение спектрального метода для оценивания состояний (фильтрация, сглаживание и прогнозирование) линейных непрерывных стохастических систем с полиномиальными измерителями [4, 9, 18].

4. Ортогональные разложения кратных стохастических интегралов Ито и Стратоновича произвольной кратности в приложении к анализу и статистическому моделированию нелинейных непрерывных стохастических систем [3, 7, 8, 10, 11, 13, 27].

5. Методы расчета коэффициентов разложения функций многих переменных, определяющих повторные стохастические интегралы, применяемые для статистического моделирования нелинейных непрерывных стохастических систем [11, 19].

6. Представления повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича произвольной кратности на основе спектральной формы математического описания систем управления [12, 14, 16, 19, 20].

7. Формулы для точного вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича на основе перехода к симметризованным функциям [10].

8. Метод аппроксимации множества спектральных характеристик функций одной переменной с ограничениями (типовые ограничения на управляющие воздействия или входные/выходные сигналы) [22, 23].

9. Алгоритмическое обеспечение статистического моделирования кратных и повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича на основе спектральной формы математического описания систем управления [21, 24, 26, 28, 31].

Список публикаций

Статьи в журналах, индексируемых в Web of Science или Scopus

[1] *Rybakov K.A.*, *Sotskova I.L.* Spectral method for analysis of switching diffusions // IEEE Trans. Autom. Control. 2007. Vol. 52. No. 7. P. 1320–1325.

[2] *Averina T.A.*, *Karachanskaya E.V.*, *Rybakov K.A.* Statistical analysis of diffusion systems with invariants // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2018. Vol. 33. No. 1. P. 1–13.

[3] *Рыбаков К.А.* Применение спектральной формы математического описания для представления повторных стохастических интегралов // Дифф. уравн. и проц. управл. 2019. № 4. С. 1–31.

[4] *Rybakov K.A.* Spectral method of analysis and optimal estimation in linear stochastic systems // Int. J. Model. Simul. Sci. Comput. 2020. V. 11. No. 3. 2050022.

[5] *Рыбаков К.А.* Моделирование линейных нестационарных стохастических систем спектральным методом // Дифф. уравн. и проц. управл. 2020. № 3. С. 98–128.

[6] *Рыбаков К.А.* Моделирование и анализ выходных процессов линейных непрерывных стохастических систем на основе ортогональных разложений случайных функций // Известия РАН. Теория и системы управления. 2020. № 3. С. 14–29. (Rybakov K.A. Modeling and analysis of output processes of linear continuous stochastic systems based on orthogonal expansions of random functions // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2020. V. 59. No. 3. P. 322–337.)

[7] *Рыбаков К.А.* Ортогональное разложение кратных стохастических интегралов Ито // Дифф. уравн. и проц. управл. 2021. № 3. С. 109–140.

[8] *Рыбаков К.А.* Ортогональное разложение кратных стохастических интегралов Стратоновича // Дифф. уравн. и проц. управл. 2021. № 4. С. 81–115.

[9] *Кудрявцева И.А.*, *Рыбаков К.А.* Сравнительный анализ фильтров частиц для стохастических систем с непрерывным и дискретным временем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2022. № 5. С. 40–49. (Kudryavtseva I.A., Rybakov K.A. Comparative analysis of particle filters for stochastic systems with continuous and discrete time // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2022. V. 61. No. 5. P. 741–750.)

[10] *Рыбаков К.А.* Точное вычисление погрешности аппроксимации кратных стохастических интегралов Ито // Сиб. журн. выч. матем. 2023. Т. 26. № 2. С. 205–213. (Rybakov K.A. Exact calculation of the approximation error of multiple Itô stochastic integrals // Numer. Anal. Appl. 2023. Vol. 16. No. 2. P. 205–213.)

[11] *Рыбаков К.А.* Особенности разложения кратных стохастических интегралов Стратоновича с применением функций Уолша и Хаара // Дифф. уравн. и проц. управл. 2023. № 1. С. 137–150.

[12] *Rybakov K.* Spectral representations of iterated stochastic integrals and their application for modeling nonlinear stochastic dynamics // Mathematics. 2023. V. 11. No. 19. 4047.

[13] *Rybakov K.* On traces of linear operators with symmetrized Volterra-type kernels // Symmetry. 2023. V. 15. No. 10. 1821.

[14] *Аверина Т.А.*, *Рыбаков К.А.* Методы типа Розенброка для решения стохастических дифференциальных уравнений // Сиб. журн. выч. матем. 2024. Т. 27. № 2. С. 123–145. (Averina T.A., Rybakov K.A. Rosenbrock-type methods for solving stochastic differential equations // Numer. Anal. Appl. 2024. Vol. 17. No. 2. P. 99–115.)

Статьи в трудах конференций, индексируемых в Web of Science или Scopus

[15] *Averina T.A.*, *Karachanskaya E.V.*, *Rybakov K.A.* Statistical modeling of random processes with invariants // Proc. 2017 Int. Multi-Conf. on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON). Novosibirsk, Russia, September 18–22, 2017. IEEE, 2017. P. 34–37.

[16] *Rybakov K.* Application of Walsh series to represent iterated Stratonovich stochastic integrals // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2020. V. 927. 012080.

[17] *Rybakov K., Yushchenko A.* Spectral method for solving linear Caputo fractional stochastic differential equations // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2020. V. 927. 012077.
[18] *Rybakov K.* Modified spectral method for optimal estimation in linear continuous-time stochastic systems // J. Phys. Conf. Ser. 2021. V. 1864. 012025.
[19] *Rybakov K.A.* Using spectral form of mathematical description to represent Stratonovich iterated stochastic integrals // Smart Innovation, Systems and Technologies. V. 217. Springer, 2021. P. 287–304.
[20] *Rybakov K.A.* Using spectral form of mathematical description to represent Itô iterated stochastic integrals // Smart Innovation, Systems and Technologies. V. 274. Springer, 2022. P. 331–344.

Статьи в журналах из перечня рецензируемых научных изданий ВАК

[21] *Рыбаков К.А.* Многопараметрические базисные системы для представления функций в неограниченных областях // Научный вестник МГТУ ГА. 2013. № 195 (9). С. 45–50.
[22] *Рыбаков К.А.* Построение множества допустимых управлений в спектральной форме математического описания // Вычислительные технологии. 2015. Т. 20. № 3. С. 58–74.
[23] *Рыбаков К.А.* Спектральные аналоги множества допустимых управлений для финитных базисных систем // Дифф. уравн. и проц. управл. 2016. № 2. С. 40–71.
[24] *Рыбаков К.А.* Развитие и перспективы программного обеспечения спектрального метода Spectrum // Информ. и телекомм. технологии. 2019. № 43. С. 57–63.
[25] *Рыбаков К.А., Рыбин В.В.* Алгоритмическое и программное обеспечение расчета спектральной характеристики оператора дробного интегродифференцирования относительно функций Уолша // Вестник СамГТУ. Серия: Технические науки. 2019. № 4 (64). С. 42–57.
[26] *Рыбаков К.А.* Расчет спектральных характеристик оператора интегрирования дробного порядка относительно функций Уолша и Хаара // Вестник ДГУ. Естеств. науки. 2020. Т. 35. Вып. 3. С. 17–23.
[27] *Рыбаков К.А.* К ортогональному разложению повторных стохастических интегралов Стратоновича // Вестник ДГУ. Естеств. науки. 2022. Т. 37. Вып. 2. С. 27–32.
[28] *Рыбаков К.А.* Алгоритмическое обеспечение численно-спектральных методов моделирования стохастических динамических систем // Моделирование и анализ данных. 2023. Т. 13. № 3. С. 79–95.

Монография

[29] *Рыбаков К.А.* Спектральный метод моделирования линейных непрерывных стохастических систем. М.: Изд-во МАИ, 2021.

Главы в коллективных монографиях

[30] *Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.* Анализ стохастических систем на основе решения уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова / В кн. Нестационарные системы автоматического управления: анализ, синтез и оптимизация (под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова). М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. С. 312–338.
[31] *Рыбаков К.А., Рыбин В.В.* Алгоритмическое и программное обеспечение расчета систем автоматического управления в спектральной форме математического описания / В кн. Современная наука: теоретические, практические и инновационные аспекты развития. Т. 2. Ростов-на-Дону: Научное сотрудничество, 2018. С. 171–199.

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ

[32] *Рыбаков К.А.* Библиотека функций матричной алгебры для многоядерных процессоров / Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2015610524, 13.01.2015.
[33] *Рыбаков К.А.* Библиотека функций матричной алгебры для графических процессоров видеоадаптеров / Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2015616429, 09.06.2015.
[34] *Рыбаков К.А.* Моделирование повторных стохастических интегралов спектральным методом / Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2024616685, 22.03.2024.