На правах рукописи

Максимов Бадма Александрович

Методы исследования орбитальной устойчивости периодических движений гамильтоновой системы в случаях вырождения и их приложение в динамике твёрдого тела

1.1.7. – Теоретическая механика, динамика машин

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2025

Работа выполнена на кафедре «Мехатроника и теоретическая механика» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ).

Научный руководитель: **Бардин Борис Сабирович**
доктор физико-математических наук, доцент, профессор РАН, заведующий кафедрой «Мехатроника и теоретическая механика» МАИ

Официальные оппоненты: **Гутник Сергей Александрович**
доктор физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики, эконометрики и информационных технологий МГИМО МИД России

Кулешов Александр Сергеевич
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры "Теоретическая механика и мехатроника"механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)».

Защита состоится «26» декабря 2025 г. в 12:00 на заседании диссертационного совета 24.2.327.08, созданного на базе МАИ, по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МАИ и на сайте МАИ по ссылке: https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=186343

Автореферат разослан «____» ____________ 2025 г.

Ученый секретарь диссертационного совета 24.2.327.08,
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник *Гидаспов В.Ю.*

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Периодические решения автономных гамильтоновых систем обычно неизолированы. Как правило, они образуют семейство, зависящее от одного или нескольких параметров. В общем случае период этих решений непрерывно зависит от этих параметров. Последнее обстоятельство приводит к тому, что периодические решения автономных гамильтоновых систем являются неустойчивыми по Ляпунову. Вместе с тем, неустойчивые по Ляпунову периодические решения могут быть орбитально устойчивыми. Задача об орбитальной устойчивости представляет интерес как с общетеоретической точки зрения, так и для приложений в динамике твёрдого тела, небесной механике и динамике спутников.

Гамильтоновы системы относится к классу систем, для которых в задаче об орбитальной устойчивости, как правило, недостаточно проведения линейного анализа. Здесь приходится иметь дело так называемыми критическими случаями, когда для строгого решения задачи об орбитальной устойчивости требуется, проводить анализ с учетом членов выше второго порядка в разложении функции Гамильтона в окрестности невозмущённой периодической орбиты. По этой причине данная задача является довольно сложной и в общем случае еще далека от своего полного решения. Особенно интересными и трудными для исследования являются случаи резонансов, каждый из которых требует отдельного изучения.

Наиболее общим подходом к исследованию орбитальной устойчивости является введение в окрестности рассматриваемого периодического движения специально выбранных (локальных) координат и построение канонического преобразования, приводящего гамильтониан уравнений возмущенного движения к наиболее простой для дальнейшего исследования (нормальной) форме Пуанкаре. Исследование нормализованной системы можно выполнить на основе методов, разработанных в теории КАМ. К настоящему времени наиболее строгие и полные результаты получены для гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. В частности, в работах Арнольда В.И., Мозера Ю., Маркеева А.П. сформулированы и доказаны достаточные условия, позволяющие получать выводы об орбитальной устойчивости на основе анализа членов до четвертого порядка включительно в разложении гамильтониана в окрестности периодического решения.

Применение указанного подхода позволило решить ряд задач об орбитальной устойчивости периодических движений в классической и небесной механике. В частности, было получено строгое решение задачи об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае С.В. Ковалевской, в случае Д.Н. Горячева-С.А. Чаплыгина, в случае В. Гесса, в случае Д.К. Бобылева-В.А. Стеклова, а также в случае динамически симметричного тела. Вместе с тем оказалось, что при определенных значениях параметров в упомянутых выше случаях возможно вырождение, когда известные достаточные условия устойчивости неприменимы и для строгого решения задачи требуется нелинейный анализ с учетом членов выше четвертого порядка в функции Гамильтона уравнений возмущенного движения. Таким образом, для решения задачи об орбитальной устойчивости при наличии вырождения требуется дальнейшее развитие общей методики исследования орбитальной устойчивости периодических движений гамильтоновых систем, и в частности, получение соответствующих достаточных условий орбитальной устойчивости и неустойчивости на основе анализа членов выше четвертого порядка в разложении функции Гамильтона уравнений возмущенного движения. Исследованию этой проблемы посвящена данная диссертационная работа.

Цель работы. Целью данной диссертационной работы является исследование орбитальной устойчивости периодических решений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случаях вырождения при наличии резонансов, а также полное и строгое решение задачи об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний и вращений тяжёлого твёрдого тела, главные моменты инерции A, B, C которого, вычисленные для неподвижной точки, связаны соотношением $A = C = 4B$.

Методы исследования. К основным методам исследования в диссертационной работе относятся методы общей теории устойчивости А.М. Ляпунова, методы теории нормальных форм и теории КАМ, метод малого параметра, метод симплектических отображений. В работе также применяются методы численного интегрирования систем дифференциальных уравнений и используются компьютерные алгоритмы численно-аналитических вычислений, которые были реализованы в системе компьютерной математики Maple.

Достоверность результатов. Достоверность полученных в диссертации результатов обеспечивается применением строгих математических методов исследования, высокой точностью проведенных численных расчётов, а также тем, что выводы, полученные аналитически, полностью согласуются с результатами, полученными численно. Также достоверность подтверждается совпадением результатов, полученных в данной диссертационной работе, с результатами более ранних исследований, полученных для некоторых частных случаев.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты:

1. Выполнено исследование орбитальной устойчивости периодического движения гамильтоновой системы в случаях вырождения при наличии резонансов. В частности, доказаны теоремы об орбитальной устойчивости периодического решения автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае вырождения при наличии резонансов первого, второго, третьего, четвертого и шестого порядков.

2. Обосновано применение методики исследования орбитальной устойчивости периодического решения в случае вырождения при наличии резонансов, состоящей в сведении исходной задачи к более простой задаче об устойчивости по Ляпунову положения равновесия редуцированной системы на уровне энергии, отвечающем невозмущенной периодической орбите.

3. Проведено исследование орбитальной устойчивости маятниковых вращений тяжёлого твёрдого тела одной с неподвижной точкой, главные моменты инерции которого связаны соотношением $A = C = 4B$. Доказано, что при всех допустимых значениях параметров имеет место орбитальная неустойчивость маятниковых вращений.

4. На основе нелинейного анализа получено полное (для всех значений параметров) и строгое решение задачи об орбитальной устойчивости и неустойчивости маятниковых колебаний тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой, главные моменты инерции которого связаны соотношением $A = C = 4B$. В пространстве параметров построены области орбитальной устойчивости и неустойчивости. При малых значениях амплитуд колебаний исследование выполнено аналитически на основе метода малого параметра.

Положения и результаты, выносимые на защиту.

I. Выполнено исследование орбитальной устойчивости периодического движения автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случаях вырождения при наличии резонансов.

- Получены достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости периодических решений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в особых случаях вырождения при наличии резонансов третьего и шестого порядков, когда для решения вопроса об орбитальной устойчивости необходимо учитывать члены не ниже шестого порядка в разложении функции Гамильтона в окрестности невозмущённой периодической орбиты.

- Получены достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости периодических решений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса четвертого порядка в случае вырождения.

- Получены достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости периодических решений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в особых случаях вырождения при наличии резонансов первого и второго порядков.

- Предложена методика исследования орбитальной устойчивости периодического решения в случаях вырождения при наличии резонансов.

II. В строгой нелинейной постановке решена задача об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой, моменты инерции которого удовлетворяют соотношению $A = C = 4B$. В частности, получены следующие результаты:

- На основе линейного анализа установлено, что маятниковые вращения орбитально неустойчивы. Маятниковые колебания могут быть как и орбитально устойчивыми в линейном приближении, так и орбитально неустойчивыми.

- Исследована задача об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний в случае малых амплитуд. Найдены области параметрического резонанса, где имеет место орбитальная неустойчивость. Также аналитически получены уравнения границ областей орбитальной устойчивости и неустойчивости. Результаты аналитического исследования и численного анализа полностью согласуются.

- Для всех значений параметров, отвечающим областям орбитальной устойчивости маятниковых колебаний в линейном приближении, а также на их границах были получены строгие выводы об орбитальной устойчивости или неустойчивости. Установлено, что орбитальная неустойчивость может иметь место в случае резонанса четвертого порядка, либо на границах областей устойчивости и неустойчивости, где реализуются резонансы первого и второго порядков. Во всех других случаях имеет место орбитальная устойчивость. Установлено, что в задаче возникают случаи вырождения, для которых требуется дополнительный анализ с учётом членов до шестой степени включительно в разложении функции Гамильтона. Показано, что в случаях вырождения:

  – при резонансах третьего и шестого порядков имеет место орбитальная устойчивость,

  – при резонансах четвертого порядка может иметь место как орбитальная устойчивость, так и неустойчивость,

  – при резонансе первого порядка имеет место орбитальная устойчивость,

  – при резонансе второго порядка имеет место орбитальная неустойчивость.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертационной работы позволяют проводить строгий нелинейный анализ в задаче об орбитальной устойчивости периодического движения автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при наличии резонансов в вырожденных случаях, когда необходимо учитывать члены до шестого порядка включительно в разложении функции Гамильтона в окрестности периодической орбиты. Эти результаты могут быть использованы для решения широкого круга задач динамики твёрдого тела, динамики спутников и для задач небесной механики. Кроме того, эти результаты также могут найти применение при разработке математических моделей новых инженерных систем, при разработке систем управления движением, а также при решении задач ориентации и стабилизации движения мобильных технических систем.

Апробация результатов.

- на LVII Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники (Москва, 17-21 мая, 2021 г.).
- на 20-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика» (Москва, 22-26 ноября 2021 г.).
- на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам 2022 (Суздаль, 30 июня – 5 июля 2022 г.).
- на конференции «Динамические системы классической и небесной механики» (Сириус, 19-23 сентября 2022 г.).
- на 21-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика» (Москва, 21-25 ноября 2022 г.).
- на XIII всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Санкт-Петербург, 21-25 августа 2023 г.).
- на 22-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика» (Москва, 20-24 ноября 2023 г.).
- на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам 2024 (Суздаль, 28 июня – 4 июля 2024 г.).
- на 52 Школе-конференции: Актуальные проблемы механики (Санкт-Петербург, 23-27 июня 2025 г.).

Публикации. Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 5 статьях [1-5] в журналах, входящих в перечень ВАК РФ, либо индексируемых в Web of Science и Scopus, а также в сборниках и материалах конференций [6-12].

Личный вклад автора. Содержание диссертационной работы и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы и получены лично автором. Постановки задач, исследованных в рамках подготовки диссертационной работы, задавались научным руководителем. Соискателем, в частности, получены следующие конкретные результаты:

- Получены достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости периодических решений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случаях вырождения при наличии резонансов первого, второго, третьего, четвертого и шестого порядков, когда для решения вопроса об орбитальной устойчивости необходимо учитывать члены не ниже шестого порядка в разложении функции Гамильтона в окрестности невозмущенной периодической орбиты. Результаты представлены в виде теорем [3,4].

- Получены строгие выводы об орбитальной устойчивости и неустойчивости периодических маятниковых движений тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой, главные моменты инерции которого связаны соотношением $A = C = 4B$ [1-2,5-12]. Показана орбитальная неустойчивость маятниковых вращений. Для маятниковых колебаний на основе нелинейного анализа построена диаграмма устойчивости в плоскости параметров задачи. Проведено аналитическое исследование орбитальной устойчивости маятниковых колебаний в случае малых амплитуд.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения, приложения и списка литературы, включающего 98 наименований. Общий объем диссертации составляет 100 страниц и содержит 4 рисунка.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность диссертационного исследования, дан обзор исследований, выполненных ранее по тематике диссертационной работы, кратко сформулирована цель работы, сформулирована научная новизна и практическая значимость, а также дано описание содержания работы по главам.

В первой главе излагается методика исследования орбитальной устойчивости периодических движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы и полученные к настоящему времени достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости периодических решений. Кратко изложим основное содержание этой главы.

Рассмотрим автономную гамильтонову систему с двумя степенями свободы

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2. \tag{1}$$

Предположим, что система (1) обладает семейством периодических решений. Обозначим через

$$q_i = f_i(t), \qquad p_i = g_i(t), \qquad i = 1, 2. \tag{2}$$

некоторое решение данного семейства, где $f_i(t), g_i(t)$ – функции времени (независимой переменной t), заданные аналитически или численно. Будем также считать, что вблизи замкнутой траектории, отвечающей данному периодическому решению, функция Гамильтона $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ системы (1) аналитична. Кроме того, без ограничения общности, период решения (2) можно принять равным 2π.

В окрестности периодического решения при помощи канонического преобразования

$$q_i = \phi_i(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2), \qquad p_i = \psi_i(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2), \qquad i = 1, 2 \tag{3}$$

можно ввести так называемые локальные переменные: координаты ξ_1, ξ_2 и импульсы η_1, η_2. В новых переменных периодическое решение (2) примет вид

$$\xi_1(t) = t + \xi_1(0), \qquad \eta_1 = \xi_2 = \eta_2 = 0. \tag{4}$$

Задача об орбитальной устойчивости периодического решения (3) сводится к задаче об устойчивости по Ляпунову решения (4) системы уравнений возмущенного движения с гамильтонианом $\Gamma(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = H(\phi_1(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2),$ $\phi_2(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2), \psi_1(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2), \psi_2(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2))$ по отношению к переменным η_1, ξ_2, η_2.

Далее рассмотрим важный для приложений случай, когда после введения локальных координат разложение нового гамильтониана Γ задачи в ряд по степеням переменных η_1, ξ_2, η_2 не содержит членов нечётного порядка. В этом случае указанное разложение имеет следующую структуру

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_4 + \Gamma_6 + ..., \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
&\Gamma_2 = \eta_1 + \Psi_2^{(0)}(\xi_2, \eta_2, \xi_1),\\
&\Gamma_4 = \chi_2(\xi_1){\eta_1}^2 + \Psi_2^{(1)}(\xi_2, \eta_2, \xi_1)\eta_1 + \Psi_4^{(0)}(\xi_2, \eta_2, \xi_1),\\
&\Gamma_6 = \chi_3(\xi_1){\eta_1}^3 + \Psi_2^{(2)}(\xi_2, \eta_2, \xi_1){\eta_1}^2 + \Psi_4^{(1)}(\xi_2, \eta_2, \xi_1)\eta_1 + \Psi_6^{(0)}(\xi_2, \eta_2, \xi_1).
\end{aligned} \tag{6}$$

Функции $\chi_2(\xi_1), \chi_3(\xi_1)$ являются 2π-периодическими функциями, а $\Psi_k^{(m)}$, $(m = 0, 1, 2)$ – формы k-ой степени относительно переменных ξ_2, η_2 с 2π-периодическими по ξ_1 коэффициентами.

В линейном приближении задача об орбитальной устойчивости сводится к исследованию положения равновесия линейной системы с гамильтонианом Γ_2. В этой системе переменная η_1 сохраняет постоянное значение, а эволюция переменных ξ_2, η_2 описывается следующей системой уравнений Гамильтона

$$\frac{d\xi_2}{dt} = \frac{\partial \Psi_2^{(0)}}{\partial \eta_2}, \qquad \frac{d\eta_2}{dt} = -\frac{\partial \Psi_2^{(0)}}{\partial \xi_2}. \tag{7}$$

Выводы об устойчивости данного решения можно сделать на основании анализа корней ее характеристического уравнения

$$\rho^2 - 2\kappa\rho + 1 = 0, \tag{8}$$

где коэффициент 2κ – сумма диагональных элементов матрицы монодромии системы (7).

Если $|\kappa| > 1$, то имеет место неустойчивость тривиального решения $\xi_2 = \eta_2 = 0$ линейной системы (7). Отсюда следует и неустойчивость решения (4) по отношению к переменным η_1, ξ_2, η_2 , т.е. орбитальная неустойчивость периодического решения (2) исходной системы.

Если же $|\kappa| < 1$, то корни характеристического уравнения (8) различны, имеют модули равные единице и представимы в виде $\rho = e^{\pm 2\pi i \lambda}$, где λ – действительное число. В этом случае, тривиальное решение $\xi_2 = \eta_2 = 0$ линейной системы (7) устойчиво, т.е. имеет место орбитальная устойчивость периодического решения (2) в линейном приближении. Из орбитальной устойчивости в линейном приближении не следует, однако, орбитальной устойчивости периодического решения (2) в исходной нелинейной системе. Таким образом, при выполнении неравенства $|\kappa| \leq 1$ требуется провести нелинейный анализ.

В настоящее время наиболее общим подходом, применяемым для нелинейного исследования орбитальной устойчивости периодических движений гамильтоновых систем, является подход, основанный на методе нормальных форм и теории КАМ. Суть данного метода состоит в построении канонического преобразования, приводящего систему уравнений возмущенного движения к некоторой наиболее простой (нормальной) форме. Задача об орбитальной устойчивости в нормализованной таким образом системе эквивалентна задаче об орбитальной устойчивости в исходной системе.

Нормальная форма системы канонических уравнений и соответствующая ей функция Гамильтона в нерезонансном и резонансных случаях имеют различный вид. Поэтому необходимо отдельно рассматривать нерезонансный случай и случаи резонансов, когда корень характеристического уравнения (8) удовлетворяет равенству $\rho^m = 1$, где m – целое число, которое называют порядком резонанса. Часто нелинейный анализ устойчивости достаточно провести на основе членов не выше четвертого порядка включительно в разложении функции Гамильтона в ряд в окрестности периодического движения. В этом случае отдельно необходимо рассматривать лишь случаи резонансов до четвертого порядка включительно. Это связано с тем, что резонансы более высокого порядка не вносят вклад в вид нормальной формы, вычисленной до членов четвертого порядка.

Приведем кратко результаты работ Арнольда В.И., Мозера Ю., Маркеева А.П., в которых были сформулированы и доказаны достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости при отсутствии вырождения.

Для начала приведем **вид нормальных форм** в каждом отдельном случае:

- *Нерезонансный случай.*

  Канонической заменой переменных $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \to \varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2$ функция Гамильтона может быть приведена к следующей нормальной форме

$$\Gamma = r_1 + \lambda r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + \Gamma^{(3)}(\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2), \qquad (9)$$

  где $\Gamma^{(3)}$ – степенной ряд по переменным r_1, r_2, начинающийся с членов третьей степени, коэффициенты которого 2π-периодически зависят от φ_1, φ_2.

- *Резонанс третьего порядка.* Функция Гамильтона на содержит членов нечетных степеней, поэтому при резонансе третьего порядка нормальная форма, вычисленная до членов второй степени по r_1, r_2, не содержит резонансных слагаемых и имеет вид (9).

- *Резонанс четвертого порядка.*

  Канонической заменой переменных $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \to \varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2$ функция Гамильтона может быть приведена к следующей нормальной форме

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2) &= r_1 + \lambda r_2 + c_{20} {r_1}^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} {r_2}^2 + \\ &+ c_{02}^{(1)} {r_2}^2 \sin 4(\varphi_2 - \lambda\varphi_1) + c_{02}^{(2)} {r_2}^2 \cos 4(\varphi_2 - \lambda\varphi_1) + \Gamma^{(3)}(\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2)\,. \end{aligned} \qquad (10)$$

- *Резонансы первого и второго порядков.*

  Канонической заменой переменных $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \to \varphi_1, \tilde{q}_2, r_1, \tilde{p}_2$ функция Гамильтона может быть приведена к следующей нормальной форме

$$\Gamma = r_1 + \frac{1}{2}\delta {\tilde{p}_2}^2 + \gamma_{40} {\tilde{q}_2}^4 + \gamma_{20} r_1 {\tilde{q}_2}^2 + \gamma_{00} r_1^2 + \Gamma_6(\varphi_1, \tilde{q}_2, r_1, \tilde{p}_2), \qquad (11)$$

  где δ определяется в процессе нормализации и принимает значение 1 или -1, а через $\Gamma^{(6)}$ обозначен ряд по степеням $\tilde{q}_2, r_1, \tilde{p}_2$, коэффициенты которого периодически зависят от φ_1.

Приведем **достаточные условия орбитальной устойчивости** в каждом из указанных выше случаях. Эти условия записываются в виде следующих неравенств относительно коэффициентов нормальных форм.

- *Нерезонансный случай.*

$$c_{20}\lambda^2 - c_{11}\lambda + c_{02} \neq 0. \tag{12}$$

- *Резонанс четвертого порядка.*

$$(c_{20}\lambda^2 - c_{11}\lambda + c_{02})^2 > (c_{02}^{(1)})^2 + (c_{02}^{(2)})^2\,. \tag{13}$$

- *Резонансы первого и второго порядков.*

$$\delta\gamma_{40} > 0, \tag{14}$$

Достаточные условия орбитальной неустойчивости в случае резонансов можно получить, поменяв знак неравенства на противоположный. Если же какое либо из неравенств (12-14) обращается в равенство, то говорят, что в задаче об орбитальной устойчивости имеет место *вырождение четвертого порядка*. В этом вырожденном случае для строгих выводов об орбитальной устойчивости и неустойчивости необходим анализ с учетом членов не ниже шестого порядка в разложении функции Гамильтона (9) в окрестности периодического решения.

В работах Маркеева А.П. и Бардина Б.С. было показано, что при отсутствии вырождения, т.е. когда вопрос об орбитальной устойчивости решается членами до четвертой степени включительно в разложении гамильтониана в окрестности периодического решения, достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости эквивалентны достаточным условиям орбитальной устойчивости и неустойчивости на уровне энергии, отвечающем невозмущенной периодической орбите. Таким образом, чтобы получить строгие выводы в задаче орбитальной устойчивости достаточно рассмотреть более простую (ограниченную) задачу о движении системы на уровне энергии, отвечающем невозмущенной периодической орбите. С этой целью целесообразно с самого начала выполнить изоэнергетическую редукцию на указанном уровне энергии и свести задачу об орбитальной устойчивости к задаче об устойчивости тривиального положения равновесия редуцированной гамильтоновой системы с одной степенью свободы.

Во второй главе выполнено исследование орбитальной устойчивости периодического движения автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае вырождения при наличии резонансов.

Основные результаты Главы 2 опубликованы в работах [3,4]. Кратко приведем содержание Главы 2.

Рассмотрим сначала наиболее общую ситуацию. Пусть в системе с гамильтонианом (5) отсутствуют резонансы первого, второго и четвертого порядка. Тогда канонической заменой переменных гамильтониан может быть приведен к виду (9), а вырождение четвертого порядка имеет место при выполнении равенства

$$c_{20}\lambda^2 - c_{11}\lambda + c_{02} = 0. \tag{15}$$

Для строгого решения задачи об орбитальной устойчивости необходимо провести нормализацию функции Гамильтона до членов шестого порядка. В этом случае нормальная форма имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2) =& r_1 + \lambda r_2 + c_{20}{r_1}^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}{r_2}^2 + \\ &+ c_{30}{r_1}^3 + c_{21}{r_1}^2 r_2 + c_{12}r_1{r_2}^2 + c_{03}{r_2}^3 + \\ &+ \Gamma^{(8)}(\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2), \end{aligned} \tag{16}$$

где $\Gamma^{(8)}(\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2)$– члены не ниже восьмого порядка (т.е. не ниже четвертой степени относительно переменных r_1, r_2, которые имеют второй порядок малости). В работах В.И. Арнольда и Ю.Мозера было показано, что в рассматриваемом случае достаточное условие орбитальной устойчивости имеет вид

$$c_3 = c_{30}\lambda^3 - c_{21}\lambda^2 + c_{12}\lambda - c_{03} \neq 0. \tag{17}$$

В данной диссертационной работе показано, что это условие полностью совпадает с условием орбитальной устойчивости на уровне энергии $\Gamma = 0$, отвечающем невозмущенному периодическому решению.

Пусть теперь имеет место случай вырождения, когда выполнено условие (15) и в системе с гамильтонианом (9) имеет место резонанс третьего или шестого порядка, т.е. корни характеристического уравнения (8) удовлетворяют соотношениям $\rho^3 = 1$ или $\rho^3 = -1$ соответственно. В этих случаях величина λ определяется равенством

$$\lambda = \frac{N}{6}, \qquad N = \delta_1 + 6n, \qquad n \in Z, \tag{18}$$

где при резонансе третьего порядка $\delta_1 = \pm 2$, а при резонансе шестого порядка $\delta_1 = \pm 1$.

При помощи канонической заменой переменных $\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2 \to \theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2$ гамильтониан (5) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \Gamma(\theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2) =& \rho_1 + a_{20}{\rho_1}^2 + a_{11}\rho_1\rho_2 + a_{30}{\rho_1}^3 + a_{21}{\rho_1}^2\rho_2 + \\ &+ a_{12}\rho_1{\rho_2}^2 + (a + b\sin 6\theta_2){\rho_2}^3 + \\ &+ \Gamma^{(8)}(\theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2). \end{aligned} \tag{19}$$

В диссертационной работе доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если коэффициенты нормализованного гамильтониана* (19) *удовлетворяют неравенству* $|b| > |a|$, *то периодическое решение* (2) *орбитально неустойчиво. Если же выполняется неравенство* $|b| < |a|$, *то периодическое решение* (2) *орбитально устойчиво.*

В диссертационной работе также показано, что достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости полностью совпадают с достаточными условиями устойчивости и неустойчивости положения равновесия редуцированной периодической гамильтоновой системы с одной степенью свободы, описывающей движение системы на уровне энергии, отвечающем невозмущенной периодической орбите.

Рассмотрим теперь случай вырождения при наличии резонанса четвертого порядка. В этом случае неравенство, задающее условие орбитальной устойчивости (13) обращается в равенство, то есть коэффициенты нормальной формы (10) гамильтониана задачи связаны соотношением

$$(c_{20}\lambda^2 - c_{11}\lambda + c_{02})^2 = (c_{02}^{(1)})^2 + (c_{02}^{(2)})^2. \tag{20}$$

Величина λ определяется равенством

$$\lambda = \frac{N}{4}, \qquad N = \delta_1 + 4n, \qquad n \in Z, \tag{21}$$

где $\delta_1 \in \{1, 3\}$.

При помощи канонической замены переменных $\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2 \to \theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2$ гамильтониан (10) можно привести к виду

$$\begin{aligned}\Gamma(\theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2) =& \rho_1 + a_{20}{\rho_1}^2 + a_{11}\rho_1\rho_2 + \\ &+ a_{02}{\rho_2}^2(1 + \cos 4\theta_2) + a_{30}{\rho_1}^3 + a_{21}{\rho_1}^2\rho_2 + \\ &+ (a_{12} + a_{12}^{(1)} \sin 4\theta_2 + a_{12}^{(2)} \cos 4\theta_2)\rho_1{\rho_2}^2 + \\ &+ (a_{03} + a_{03}^{(1)} \sin 4\theta_2 + a_{03}^{(2)} \cos 4\theta_2){\rho_2}^3 + \\ &+ \Gamma^{(8)}(\theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2),\end{aligned} \tag{22}$$

В диссертационной работе доказаны следующие теоремы

Теорема 2. *Если коэффициент нормализованного гамильтониана* (22) $a_{02} = 0$, *то периодическое решение* (2) *орбитально неустойчиво при выполнении неравенства* $a_{03}^2 < (a_{03}^{(1)})^2 + (a_{03}^{(2)})^2$. *Если же это неравенство выполняется с противоположным знаком, то есть* $a_{03}^2 > (a_{03}^{(1)})^2 + (a_{03}^{(2)})^2$, *то имеет место орбитальная устойчивость.*

Теорема 3. *Если коэффициенты нормализованного гамильтониана* (22) *удовлетворяют неравенству* $(a_{03} - a_{03}^{(2)})a_{02} < 0$, *то периодическое решение* (2) *орбитально неустойчиво. Если же это неравенство выполняется с противоположным знаком, то есть $(a_{03} - a_{03}^{(2)})a_{02} > 0$, то имеет место орбитальная устойчивость.*

В диссертации показано, что достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости полностью совпадают с достаточными условиями устойчивости и неустойчивости положения равновесия редуцированной периодической гамильтоновой системы с одной степенью свободы.

Рассмотрим случаи резонансов первого и второго порядка. В этих случаях при помощи канонической замены $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \to \varphi_1, \tilde{q}_2, r_1, \tilde{p}_2$ гамильтониан приводится к нормальной форме

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi_1, \tilde{q}_2, r_1, \tilde{p}_2) = & r_1 + \frac{1}{2}\delta\tilde{p}_2{}^2 + \gamma_{40}\tilde{q}_2{}^4 + \gamma_{20}r_1\tilde{q}_2{}^2 + \gamma_{02}r_1^2 + \\ & + \gamma_{60}\tilde{q}_2{}^6 + \gamma_{41}r_1\tilde{q}_2{}^4 + \gamma_{22}r_1^2\tilde{q}_2{}^2 + \gamma_{03}r_1^3 + \\ & + \Gamma_8(\varphi_1, \tilde{q}_2, r_1, \tilde{p}_2), \end{aligned} \tag{23}$$

где $\Gamma_8(\varphi_1, \tilde{q}_2, r_1, \tilde{p}_2)$ – члены не ниже восьмого порядка.

В диссертационной работе доказана следующая теорема

Теорема 4. *Если коэффициенты нормализованного гамильтониана* (23) *удовлетворяют неравенству $\delta\gamma_{60} < 0$, то периодическое решение* (2) *орбитально неустойчиво. Если же выполняется неравенство $\delta\gamma_{60} > 0$, то периодическое решение* (2) *орбитально устойчиво.*

Показано, что достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости полностью совпадают с достаточными условиями устойчивости и неустойчивости положения равновесия редуцированной периодической гамильтоновой системы с одной степенью свободы.

На основании доказанных теорем можно утверждать, что достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости периодического решения совпадают с достаточными условиями его устойчивости и неустойчивости на уровне энергии, отвечающем невозмущенной периодической орбите. Таким образом, для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости в рассматриваемых случаях вырождения при наличии резонансов первого, второго, третьего, четвертого, шестого порядков достаточно провести исследование орбитальной устойчивости на нулевом уровне энергии. Другими словами, с самого начала можно выполнить изоэнергетическую редукцию и перейти к исследованию более простой задачи об устойчивости редуцированной периодической гамильтоновой системы с одной степенью свободы. Итак, в рассматриваемых случаях удалось свести задачу орбитальной устойчивости периодических решений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы к задаче устойчивости положения равновесия не автономной периодической гамильтоновой системы с одной степенью свободы. В этом случае необходимо проводить нормализацию гамильтониана до шестого порядка включительно.

Таким образом, на основании общетеоретических результатов данной главы методику, описанную в Главе 1, можно распространить и на случаи вырождения, то есть при наличии в задаче об орбитальной устойчивости вырождения четвертого порядка, ее исследование можно проводить по следующей схеме

- Введение локальных координат и разложение функции Гамильтона в окрестности периодического решения до членов шестого порядка включительно
- Изоэнергетическая редукция на уровне энергии, соответствующем невозмущенному периодическому решению
- Вычисление коэффициентов нормальной формы функции Гамильтона редуцированной системы
- Проверка достаточных условий устойчивости и неустойчивости.

В третьей главе исследуется вопрос об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тяжёлого твёрдого тела с одной неподвижной точкой, главные моменты инерции которого находятся в соотношении 4:1:4.

Рассмотрим движение твёрдого тела массой m вокруг неподвижной точки O в однородном поле тяжести. Для описания движения тела введем неподвижную систему координат $OXYZ$, ось OZ которой направлена вертикально вверх, и подвижную систему координат $Oxyz$, жестко связанную с телом, оси которой направлены по главным осям инерции тела для точки O. Кроме того, будем предполагать, что главные моменты инерции A, B, C тела для неподвижной точки O удовлетворяют равенству $A = C = 4B$. Никаких ограничений на положение центра масс не накладывается. В силу динамической симметрии тела направления осей Ox, Oz можно выбрать так, что центр масс тела будет лежать в плоскости Oxy. При таком выборе осей положение центра масс тела будет определяться расстоянием до начала координат, которое будем обозначать l, и углом α между радиусом-вектором центра масс и положительным направлением оси Ox. Без ограничения общности, можно считать, что $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Отметим, что при $\alpha = 0$ имеет место случай интегрируемости Д.Н. Горячева – С.А. Чаплыгина, а при $\alpha = \pi/2$ – случай Лагранжа с дополнительным ограничением на моменты инерции.

Положение твёрдого тела в пространстве будем задавать при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ. Уравнения движения тела можно записать в виде канонических уравнений Гамильтона. Обобщенные импульсы, соответствующие углам Эйлера обозначим через $p_\psi, p_\theta, p_\varphi$. Угол ψ является циклической координатой, поэтому соответствующий ему обобщенный импульс сохраняет постоянное значение $p_\psi = const$. Далее положим $p_\psi = 0$. В этом случае гамильтониан канонических уравнений движения тела имеет вид

$$\begin{aligned} H =& \frac{(p_\theta \cos\varphi - p_\varphi \operatorname{ctg}\theta \sin\varphi)^2}{2A} + \frac{(p_\theta \sin\varphi + p_\varphi \operatorname{ctg}\theta \cos\varphi)^2}{2B} + \\ &+ \frac{{p_\varphi}^2}{2C} + mgl \sin\theta \sin(\varphi + \alpha) \ . \end{aligned} \tag{24}$$

Поскольку центр масс тела лежит в плоскости главных осей инерции, то уравнения с гамильтонианом (24) допускают частное решение, описывающее плоское движение твёрдого тела, при котором ось Oz сохраняет постоянное горизонтальное положение, а само тело совершает маятниковые движения относительно этой оси. В зависимости от начальных условий, в таком плоском движении тело либо совершает периодические колебания или вращения, либо асимптотически приближается к неустойчивому положению равновесия. Несмотря на то, что периодические маятниковые движения неустойчивы по Ляпунову, с теоретической и прикладной точек зрения большой интерес представляет задача об орбитальной устойчивости таких движений.

Введем безразмерное время $\tau = \mu t$, где $\mu^2 = mgl$. Для описания поведения тела в окрестности его периодических маятниковых движений удобно ввести следующие координаты и безразмерные импульсы

$$q_1 = \varphi + \alpha - \frac{3\pi}{2}, \qquad q_2 = \theta - \frac{\pi}{2}, \qquad p_1 = \frac{p_\theta}{C\mu}, \qquad p_2 = \frac{p_\varphi}{C\mu}. \tag{25}$$

В новых переменных гамильтониан задачи принимает вид

$$\begin{aligned} H =& 1/2\ (p_2 \sin(q_1 - \alpha) - p_1 \operatorname{tg} q_2 \cos(q_1 - \alpha))^2 + \\ &+ 2\ (p_2 \cos(q_1 - \alpha) + p_1 \operatorname{tg} q_2 \sin(q_1 - \alpha))^2 + \\ &+ 1/2\, {p_1}^2 - \cos q_2 \cos q_1. \end{aligned} \tag{26}$$

На маятниковых движениях твёрдого тела канонические переменные q_2, p_2 принимают нулевые значения, а эволюция переменных q_1, p_1 описывается системой с гамильтонианом

$$H_0 = 1/2\, {p_1}^2 - \cos q_1. \tag{27}$$

Характер маятниковых движений зависит от величины константы интеграла энергии $H_0 = h$: при $|h| < 1$ тело совершает маятниковые колебания, а при $|h| > 1$ тело совершает маятниковые вращения относительно своей оси Oz.

В случае маятниковых колебаний, когда $|h| < 1$, общее решение канонической системы с гамильтонианом (27) имеет вид

$$
\begin{aligned}
&q_1^*\left(\tau+\tau_0\right)=2\ \arcsin\left(k_1 \mathrm{sn}\left(\tau+\tau_0, k_1\right)\right),\\
&p_1^*\left(\tau+\tau_0\right)=2\, k_1 \mathrm{cn}\left(\tau+\tau_0, k_1\right).
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Период колебаний вычисляется по формуле

$$
T=\frac{2\pi}{\omega}, \qquad \omega=\frac{\pi}{2K\left(k_1\right)}. \tag{29}
$$

В (28) и (29) используются общепринятые обозначения для эллиптических функций и интегралов. Модуль эллиптического интеграла k_1 связан с константой энергии h соотношением ${k_1}^2=h/2+1/2$.

На основании методики, описанной в Главе 1, и результатов исследования устойчивости в вырожденных случаях, полученных в Главе 2, задачу можно свести к исследованию устойчивости положения равновесия периодической редуцированной системы с одной степенью свободы. С этой целью в диссертационной работе была построена каноническая замена переменных, позволяющая ввести в окрестности исследуемого периодического движения локальные переменные (3). После перехода к локальным переменных выполним изоэнергетическая редукцию. Зафиксируем нулевой уровень энергии $\Gamma=0$, который соответствует невозмущенной периодической траектории. Разрешая уравнение $\Gamma=0$ относительно переменной η_1, имеем: $\eta_1=-K(\xi_1,\xi_2,\eta_2)$, где функция $K(\xi_1,\xi_2,\eta_2)$ является 2π-периодической по ξ_1, аналитична по ξ_2,η_2 и при достаточно малых ξ_2,η_2 может быть представлена в виде степенного ряда по переменным ξ_2,η_2

$$
K=K_2(\xi_1,\xi_2,\eta_2)+K_4(\xi_1,\xi_2,\eta_2)+..., \tag{30}
$$

Функции $K_m(m=2,...)$ – формы порядка m с 2π-периодическими по ξ_1 коэффициентами.

Эволюция переменных ξ_2,η_2 на нулевом изоэнергетическом уровне энергии описывается уравнениями Уиттекера, которые имеют форму канонических уравнений

$$
\frac{d\xi_2}{d\xi_1}=\frac{\partial K}{\partial\eta_2}, \qquad \frac{d\eta_2}{d\xi_1}=-\frac{\partial K}{\partial\xi_2}, \tag{31}
$$

с гамильтонианом (30), в котором:

$$\begin{aligned}
&K_2 = \omega^{-1}\Psi_2^{(0)},\\
&K_4 = \omega^{-1}\left[\chi_2\left(w\right)\left(\Psi_2^{(0)}\right)^2 + \Psi_2^{(0)}\Psi_2^{(1)} + \Psi_4^{(0)}\right],\\
&K_6 = \omega^{-1}\left[\left(\Psi_2^{(0)}\right)^3\left(2\chi_2^2 - \chi_3\right) + \left(\Psi_2^{(0)}\right)^2\left(\Psi_2^{(2)} - 3\chi_2\Psi_2^{(1)}\right) + \right.\\
&\left. +\Psi_2^{(0)}\left(2\chi_2\Psi_4^{(0)} + \left(\Psi_2^{(1)}\right)^2 - \Psi_4^{(1)}\right) - \Psi_2^{(1)}\Psi_4^{(0)} + \Psi_6^{(0)}\right],
\end{aligned} \tag{32}$$

а ξ_1 является новой независимой переменной. Формы $\Psi_k^{(m)}, (m = 0, 1, 2)$ определяются соотношениями (6) и получены в явном виде в диссертационной работе.

На нулевом уровне энергии задача об орбитальной устойчивости сводится к задаче об устойчивости по Ляпунову тривиального решения $\xi_2 = \eta_2 = 0$ системы с гамильтонианом (30).

При малых амплитудах колебаний тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой исследование их орбитальной устойчивости можно выполнить аналитически. В этом случае можно ввести малый параметр, в качестве которого удобно выбрать величину $k = k_1$ – модуль эллиптического интеграла в (28), который связан с амплитудой маятниковых колебаний тела соотношением: $k = \sin\beta/2$, где β– амплитуда колебаний. Исследование орбитальной устойчивости проводилось по схеме, описанной в Главе 1.

Исследование орбитальной устойчивости при малых амплитудах колебаний начнем с анализа линейной системы.Разложения в ряд по степеням k коэффициентов системы (31) имеют вид

$$\begin{aligned}
\psi_{11}^{(0)} &= -\,3\cos w\sin 2\alpha\, k + 6k^2\sin 2\,w\cos 2\alpha + O(k^3),\\
\psi_{02}^{(0)} &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2\alpha + 3\,k\sin w\sin 2\alpha\cos\alpha +\\
&\quad + \frac{1}{16}\left(\cos 2\alpha\left(48\cos 2w - 45\right) + 5\right)k^2 + O(k^3),\\
\psi_{20}^{(0)} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\left(-12\left(\cos 2w + 1\right)\cos 2\alpha + 24\cos 2w + 17\right)k^2 + O(k^3).
\end{aligned} \tag{33}$$

При $k = 0$ линейная система автономна и описывает гармонические колебания с частотой $\Omega_0 = \sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}$. Если $\Omega_0 \neq N/2, N \in \mathbb{Z}$, то для достаточно малых k имеет место устойчивость в линейном приближении. Если $\Omega_0 \approx N/2$, то при $k \ll 1$ возможно так называемое явление параметрического резонанса, приводящее к неустойчивости.

В данной задаче параметрический резонанс имеет место в двух случаях: $\Omega_0 \approx 2$ и $\Omega_0 \approx 3/2$. Вычисления показали, что области параметрического резонанса в плоскости параметров (α, h) исходят из точек $\alpha_* = 0$ и $\alpha_{**} = \arccos(\sqrt{5/12})$ прямой $h = -1$. При $k \ll 1$ границы областей параметрического резонанса могут быть получены в виде сходящихся рядов по степеням малого параметра k.

Вычисления показали, что в случае резонанса $\Omega_0 \approx 2$, граница области параметрического резонанса определяется следующей асимптотической формулой

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} k^2 + O\left(k^3\right). \tag{34}$$

В случае резонанса $\Omega_0 \approx 3/2$ на правой границе имеем

$$\alpha_3 = \arccos\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right) + \frac{27\sqrt{35}}{160} k^2 + \frac{315}{128} k^3 + O\left(k^4\right), \tag{35}$$

а уравнение левой границы определяется равенством

$$\alpha_2 = \arccos\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right) + \frac{27\sqrt{35}}{160} k^2 - \frac{315}{128} k^3 + O\left(k^4\right), \tag{36}$$

Вне областей параметрического резонанса линейная система устойчива. Однако, из этого не следует устойчивость исходной нелинейной системы. Для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости при значениях параметров вне областей параметрического резонанса и на их границах требуется нелинейный анализ. Исследуем сначала вопрос об орбитальной устойчивости для значений параметров вне областей параметрического резонанса и вне границ этих областей. В этом случае при помощи канонической замены переменных $\xi_2, \eta_2 \longrightarrow \rho, \vartheta$ гамильтониан K полной нелинейной системы приводится в виду

$$K = \Omega\,\rho + G_4\rho^2 + G_6\rho^3 + O(\rho^4), \tag{37}$$

где $G_4(\vartheta, w), G_6(\vartheta, w)$ – 2π-периодические функции переменных ϑ, w. Строгие выводы об устойчивости тривиального решения системы с гамильтонианом (37) могут быть получены на основе теории КАМ. С этой целью выполним нормализацию гамильтониана K до членов порядка ρ^2.

Если в системе нет резонансов четвёртого порядка, то есть $\Omega \neq n/4, n \in \mathbb{Z}$, соответственно, то функцию Гамильтона (37) близкой к тождественной, аналитической по k, канонической заменой переменных $\rho, \vartheta \longrightarrow R, \phi$ можно привести к следующей нормальной форме

$$
\begin{aligned}
&\Phi = \Omega\, R + c_2 R^2 + \tilde{G}_6(\phi, w) R^3 + O\left(R^4\right), \\
&c_2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\,\pi} \int_0^{2\,\pi} G_4\left(\vartheta, w\right)\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}w.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Вычисления показали, что коэффициент c_2 имеет вид

$$
c_2 = -\frac{126\cos^6\alpha + 93\cos^4\alpha - 34\cos^2\alpha - 25}{8\left(4\cos^2\alpha + 1\right)\left(1 + 3\cos^2\alpha\right)} k^6 + O(k^8). \tag{39}
$$

На основании теоремы Арнольда-Мозера, положение равновесия системы (31) устойчиво при $c_2 \neq 0$. В интервале $0 < \alpha < \pi/2$ уравнение $c_2 = 0$ имеет единственное решение, которое аналитически зависит от k. При достаточно малых k это решение задаётся следующей асимптотической формулой $\alpha_{***} = 0.7665103122 + O(k^2)$. Таким образом, вне областей параметрического резонанса, при $\alpha \neq \alpha_{***}$ и при отсутствии резонансов до четвёртого порядка включительно положение равновесия системы (31) при малых значениях k устойчиво.

Рассмотрим случай $\alpha = \alpha_{***}$, когда имеет место вырождение и анализ орбитальной устойчивости требуется проводить с учетом членов порядка R^3 включительно. В этом случае в системе системы (31) нет резонасов до шестого порядка включительно, поэтому при помощи канонической, близкой к тождественной, аналитической по k замены переменных $R, \phi \to \tilde{R}, \tilde{\phi}$ система приводится к нормальной форме с гамильтонианом следующего вида

$$
\begin{aligned}
&\Phi = \Omega\, \tilde{R} + c_3 \tilde{R}^3 + O\left(\tilde{R}^4\right), \\
&c_3 = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\,\pi} \int_0^{2\,\pi} \tilde{G}_6\left(\phi, w\right)\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}w.
\end{aligned}
\tag{40}
$$

Вычисления показали, что коэффициент c_3 имеет вид

$$
c_3 = -\frac{\left(1 + 3\cos^2\alpha_{***}\right)^{3/2}}{12288} + O(k^2). \tag{41}
$$

Поскольку для малых k выполнено неравенство $c_3 \neq 0$, то по теореме Арнольда-Мозера положение равновесия будет устойчивым.

Функция Гамильтона не содержит членов порядка $\rho^{3/2}$, то резонансы третьего порядка в данном приближении не проявляются. Однако, в данной системе имеют место резонансы четвёртого порядка, когда $\Omega = n/4, n \in \mathbb{Z}$. В данной задаче возможны два таких резонанса: $\Omega = 5/4, \Omega = 7/4$. В случае резонанса четвёртого порядка гамильтониан (37) близкой к тождественной, аналитической по k, канонической заменой переменных может быть приведен к виду

$$\begin{aligned}
&\Phi = \Omega\, R + \left(c_2 + a_4 \cos\left(nw - 4\,\vartheta\right) - b_4 \sin\left(nw - 4\,\vartheta\right)\right) R^2 + O\left(R^3\right), \\
&a_4 = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi} G_4\left(\vartheta, w\right) \cos\left(4\,\vartheta - nw\right)\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}w, \\
&b_4 = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi} G_4\left(\vartheta, w\right) \sin\left(4\,\vartheta - nw\right)\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}w.
\end{aligned} \tag{42}$$

Вычисления показали, что случае $\Omega = 5/4$ резонансное значение параметра α определяется следующим соотношением

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{3\sqrt{39}}{7}\, k^2 + O(k^3)\,, \tag{43}$$

а коэффициенты гамильтониана (42) задаются следующими асимптотическими выражениями

$$\begin{aligned}
&c_2 = \frac{55859}{11200} k + O\left(k^3\right), \\
&a_4 = O\left(k^3\right), \qquad b_4 = O\left(k^3\right).
\end{aligned} \tag{44}$$

В случае резонанса $\Omega = 7/4$ резонансное значение параметра α и коэффициенты гамильтониана (42) определяются выражениями

$$\begin{aligned}
&\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{11}}{4}\right) + \frac{3\,\sqrt{55}}{55} k^2 + O(k^3), \\
&c_2 = -\frac{4987}{3136} k + O\left(k^3\right), \\
&a_4 = O\left(k^3\right), \qquad b_4 = O\left(k^3\right).
\end{aligned} \tag{45}$$

Достаточное условие устойчивости положения равновесия при резонансе четвертого порядка имеет вид (Маркеев А.П.)

$$\sqrt{{a_4}^2 + {b_4}^2} < |c_2|\,. \tag{46}$$

В обоих случаях это условие очевидно выполняется, то есть имеет место устойчивость по Ляпунову для системы (31). Откуда следует, что при резонансе четвертого порядка маятниковые колебания с малыми амплитудами орбитально устойчивы.

Таким образом, вне областей параметрического резонанса маятниковые колебания с малыми амплитудами орбитально устойчивы при всех значениях параметров.

Для решения вопроса об орбитальной устойчивости на границах областей параметрического резонанса применим ту же методику исследования. На границах областей параметрического резонанса имеют место резонансы первого ($\Omega = 2$) и второго порядков ($2\Omega = 3$). Нелинейной близкой к тождественной заменой переменных можно выполнить нормализацию до членов четвертой степени и привести гамильтониан K к виду

$$K = \frac{\delta}{2} x^2 + c_4 y^4 + O_6, \qquad c_4 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s_{04} dw. \tag{47}$$

На основе теоремы Иванова-Сокольского положение равновесия системы с гамильтонианом (47) устойчиво при выполнении неравенства

$$\delta c_4 > 0 \tag{48}$$

и неустойчиво, если это неравенство выполняется с противоположным знаком.

Вычисления показали, что на границах (34) и (36) коэффициенты δ, c_4 имеют вид

$$c_4 = -\frac{1}{4} k^4 + O(k^5), \qquad \delta = -1 \tag{49}$$

и

$$c_4 = \frac{445}{6144} k^4 + O(k^5). \qquad \delta = 1 \tag{50}$$

соответственно. Неравенство (48) очевидно выполняется, поэтому на указанных границах колебания с малыми амплитудами орбитально устойчивы. На границе же (35) имеем

$$c_4 = \frac{445}{6144} k^4 + O(k^5), \qquad \delta = -1. \tag{51}$$

Здесь неравенство (48) выполнено с обратным знаком и колебания с малыми амплитудами орбитально неустойчивы.

Кратко подведем итоги проведенного анализа орбитальной устойчивости. Неустойчивость колебаний с малыми амплитудами может возникнуть в результате явления параметрического резонанса. В данной задаче было установлено, что существуют две области параметрического резонанса и аналитически были получены границы этих областей. Было установлено, что вне указанных областей имеет место орбитальная устойчивость. На границе α_1 первой области параметрического резонанса и на левой границе α_2 второй области параметрического резонанса колебания с малыми амплитудами орбитально устойчивы, а на правой границе α_3 второй области параметрического резонанса – неустойчивы.

Для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости при произвольных значениях параметров необходим численный анализ коэффициентов характеристического уравнения линейной системы и коэффициентов нормальной формы гамильтониана. С этой целью решается сначала линейная задача. При помощи численного интегрирования системы с гамильтонианом K_2 от 0 до 2π вычислялась ее матрица монодромии, определялся коэффициент κ характеристического уравнения (8) и делались выводы об орбитальной устойчивости в линейном приближении или об орбитальной неустойчивости.

В случае маятниковых вращений численное нахождение коэффициента κ выполнялось для интервалов $1 < h < 100$ и $0 < \alpha < \pi/2$. Сетка значений параметров строилась с шагом 0,01. Оказалось, что в указанном диапазоне значений всегда выполняется неравенство $|\kappa| > 1$, поэтому линейная система неустойчива. Это означает, что маятниковые вращения твёрдого тела в указанном диапазоне параметров орбитально неустойчивы.

В случае маятниковых колебаний линейный анализ показал, что в зависимости от значений параметров задачи, может иметь место как орбитальная устойчивость в линейном приближении, так и орбитальная неустойчивость. Результаты линейного анализа орбитальной устойчивости маятниковых колебаний, полученные на основании численных расчетов коэффициента κ, представлены на диаграмме, построенной в плоскости параметров h и α (см. Рис. 1). Области неустойчивости отмечены серым цветом. Вне этих областей маятниковые колебания устойчивы в линейном приближении. Границы, разделяющие области устойчивости и неустойчивости, обозначены $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Далее в работе рассматриваются только маятниковые колебания.

Для значений параметров, отвечающих орбитально устойчивым в линейном приближении маятниковым колебаниям, следуя методике, описанной в Главе 1, был выполнен строгий нелинейный анализ орбитальной устойчивости при произвольных значениях амплитуд. С этой целью численно вычислялись коэффициенты нормальной формы. Нахождение коэффициентов нормальной формы выполнялось на основе построения симплектического отображения, генерируемого фазовым потоком редуцированной гамильтоновой системы. Коэффициенты нормальной формы вычислялись на основе известных соотношений между коэффициентами нормализованного гамильтониана и коэффициентами построенного таким образом симплектического отображения. Далее на основе найденных численно коэффициентов нормальной формы, используя достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости, изложенные в Главе 1, были сделаны строгие выводы об орбитальной устойчивости и неустойчивости.Результаты проведенного анализа представлены на диаграмме устойчивости. Также были найдены значения параметров, при которых требуется дополнительный анализ с учётом членов до шестой степени включительно в разложении функции Гамильтона. Этим значениям отвечают кривые вырождения и особые точки резонансных кривых.

Кратко опишем представленные на Рис. 1 результаты нелинейного ана-

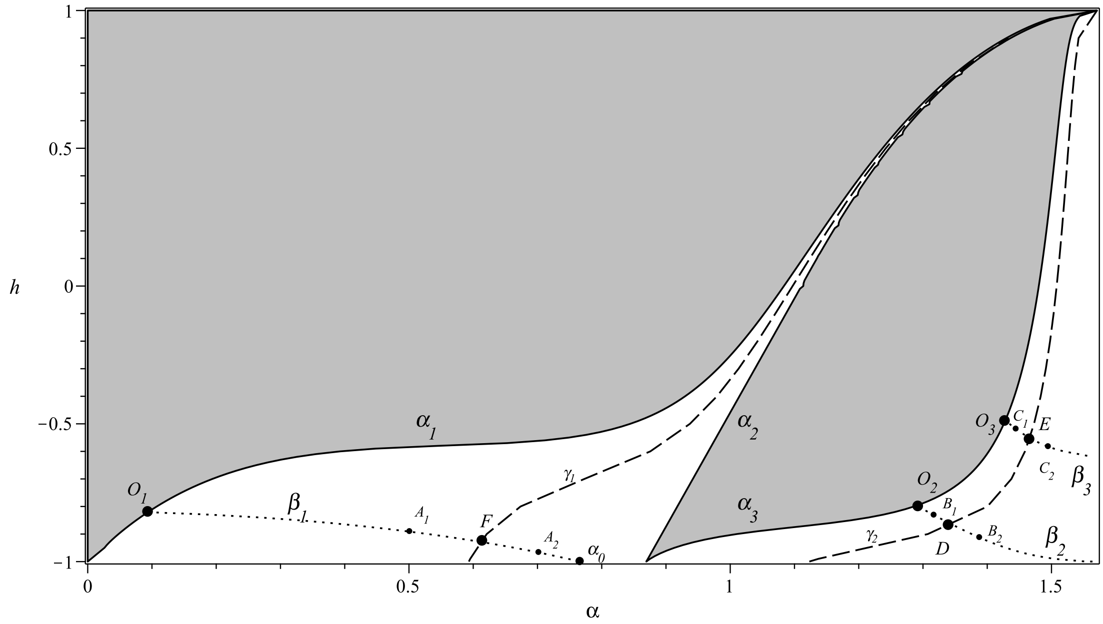

Рис. 1: Диаграмма устойчивости маятниковых колебаний

лиза орбитально устойчивости маятниковых колебаний. Кривые, отвечающие резонансу четвертого порядка, обозначены γ_1, γ_2 и выделены пунктирной линией. Кривые, отвечающие случаю вырождения $c_{20}\lambda^2 - c_{11}\lambda + c_{02} = 0$, обозначены $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ и показаны точками. Вне резонансных кривых четвертого порядка γ_1, γ_2 и вне кривых вырождения $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ маятниковые колебания орбитально устойчивы в строгом нелинейном смысле. Оказалось, что на всех трех кривых вырождения $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ выполняется неравенство $c_3 \neq 0$, поэтому в случаях вырождения маятниковые колебания также орбитально устойчивы, за исключением лишь точек F, E, D , отвечающих случаям резонанса четвертого порядка и, возможно, точек $A_i, B_i, C_i, i = 1, 2$, в которых реализуются резонансы третьего $(i = 1)$ и шестого $(i = 2)$ порядков. Также почти всюду на кривых γ_1, γ_2 имеет место орбитальная устойчивость маятниковых колебаний. Исключение составляют лишь небольшие сегменты кривых γ_1, γ_2, расположенные вблизи точек пересечения этих кривых с кривыми вырождения. Сегменты неустойчивости кривых γ_1, γ_2 изображены на Рис. 2. На этих сегментах, включая и точки F, E, D, маятниковые колебания орбитально неустойчивы. В точках $F_i, E_i, D_i, i = 1, 2$ ограничивающих указанные выше сегменты неустойчивости, где реализуется случай вырождения при наличии резонанса четвертого порядка, а также в точках $A_i, B_i, C_i, i = 1, 2$, где реализуется случай вырождения при наличии резонансов третьего и шестого порядков, исследование орбитальной устойчивости проводилось отдельно.

Случаи резонансов первого и второго порядков, которые реализуются на границах областей устойчивости в линейном приближении, требуют отдельного нелинейного анализа, который проводится по той же методике. На границе α_1 реализуется резонанс первого порядка, а на границах α_2, α_3 – резонансы второго порядка. Вычисления показали, что на участке границы α_1

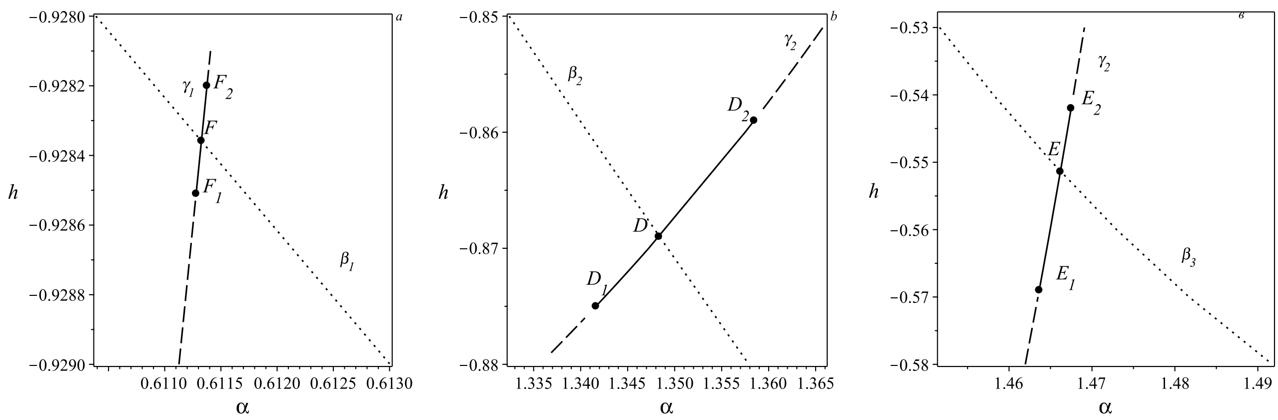

Рис. 2: Сегменты неустойчивости

, расположенном ниже точки O_1 , маятниковые колебания орбитально устойчивы, а на участке границы α_1 , расположенном выше точки O_1 , маятниковые колебания орбитально неустойчивы. На всей границе α_2 маятниковые колебания орбитально устойчивы. На границе α_3 маятниковые колебания орбитально устойчивы на участке между точками O_2, O_3. Вне этого участка маятниковые колебания орбитально неустойчивы. В точках O_1, O_2, O_3, где реализуются случаи вырождения при наличии резонансов первого и второго порядков, исследование орбитальной устойчивости проводилось отдельно.

Отметим, что результаты численного анализа при произвольных амплитудах и аналитического анализа при малых амплитудах полностью согласуются.

Нелинейный анализ орбитальной устойчивости маятниковых колебаний при наличии вырождения проводился следуя методике, описанной в Главе 2. Согласно этой методике, использую построенное симплектическое отображение, в каждом отдельном случае вырождения вычислялись коэффициенты нормальной формы и проверялись достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости, полученные в Главе 2 (Теоремы 1-4).

Вычисления показали, что

- В точках A_1, B_1, C_1, которые отвечают случаю вырождения при наличии резонанса третьего порядка, имеет место орбитальная устойчивость.

- В точках A_2, B_2, C_2, которые отвечают случаю вырождения при наличии резонанса шестого порядка, имеет место орбитальная устойчивость.

- В точках F_1, E_2, D_2, которые отвечают случаю вырождения при наличии резонанса четвертого порядка, имеет место орбитальная устойчивость, а в точках E_1, D_1, F_2 имеет место орбитальная неустойчивость.

- В точке O_1,которые отвечают случаю вырождения при наличии резонанса первого порядка, имеет место орбитальная устойчивость.

- В точках O_2, O_3,которые отвечают случаю вырождения при наличии резонанса второго порядка, имеет место орбитальная неустойчивость.

В заключении приведены основные результаты выполненного в диссертационной работе исследования орбитальной устойчивости периодических движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случаях вырождения и сформулированы строгие выводы об орбитальной устойчивости и неустойчивости маятниковых периодических движений тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой, моменты инерции которого находятся в соотношении 4:1:4.

Публикации в журналах из перечня ВАК и международных систем цитирования

1. *Bardin B. S., Maksimov B. A.* The orbital stability analysis of pendulum oscillations of a heavy rigid body with a fixed point under the Goryachev-Chaplygin condition // *Journal of Mathematical Sciences.*. 2023. Vol. 275. №1. p. 66-77 (Scopus, Web of Science).

2. *Бардин Б. С., Максимов Б. А.* Об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тяжёлого твёрдого тела с одной неподвижной точкой, главные моменты инерции которого находятся в отношении 4:1:4 // *Прикладная математика и механика.*. 2023. Т. 87. № 5. с. 784-800. (Scopus).

3. *Максимов Б. А.* Об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний тяжёлого твёрдого тела при резонансе четвертого порядка в случае вырождения // *Труды МАИ*. 2022. №144 (Перечень ВАК РФ).

4. *Bardin B. S., Maksimov B. A.* On resonant cases of degeneracy in the problem of orbital stability of periodic solutions of Hamiltonian system with two degrees of freedom // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2025. V. 21. № 4. (Scopus).

5. *Bardin B. S., Maksimov B. A.* Analysis of the orbital stability of periodic pendulum motions of a heavy rigid body with a fixed point under the Goryachev-Chaplygin condition // *MATEC Web of Conferences.XXII International Conference on Computational Mechanics and Modern Applied Software Systems (CMMASS 2021)*. 2022. Vol. 362. Article Number 01003 (Web of Science).

Публикации по теме диссертации в материалах конференций

6. *Бардин Б. С., Максимов Б. А.* Линейный анализ орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тяжёлого твёрдого тела при выполнении условия Горячева-Чаплыгина. // Материалы XXII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным

программным системам (ВМСППС'2021). Материалы конференции. Москва, 2021. С. 533-535

7. *Бардин Б. С., Максимов Б. А.* Нелинейный анализ орбитальной устойчивости малых колебаний симметричного твёрдого тела с неподвижной точкой в однородном поле тяжести // 20-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». 22-26 ноября 2021 года. Москва. Тезисы. – М.: Издательство «Перо». 2021. с. 441–443.

8. *Бардин Б. С., Максимов Б. А.* Нелинейный анализ орбитальной устойчивости маятниковых колебаний тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой при условии Горячева-Чаплыгина // 21-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». 21-25 ноября 2022 года. Москва. Тезисы. – М.: Издательство «Перо». 2022. с. 404–405.

9. *Максимов Б. А.* Об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний динамически симметричного тяжёлого твёрдого тела с одной неподвижной точкой при резонансах // 22-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». 20-24 ноября 2023 года. Москва. Тезисы. – М.: Издательство «Перо». 2023. с. 262–263.

10. *Максимов Б. А.* Анализ орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой при условии Горячева-Чаплыгина // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. 21-25 августа 2023 года. Санкт-Петербург. 2023. с. 115–117.

11. *Максимов Б. А.* О построении симплектического отображения, генерируемого гамильтоновой системой с одной степенью свободы, в критических случаях при наличии резонансов // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Суздаль, 28 июня – 4 июля 2024. – Владимир: ООО «Аркаим». 2024. с. 207–208.

12. *Бардин Б. С., Максимов Б. А.* О построении симплектического отображения, генерируемого гамильтоновой системой с одной степенью свободы, в критических случаях при наличии резонансов // 52 Школа-конференция: Актуальные проблемы механики. Сборник тезисов докладов. РАН. Санкт-Петербург. 2025. с. 139-140.