

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»**

На правах рукописи



Шевченко Виктория Витальевна

**Оптимизация сложных схем межпланетного перелёта КА с
комбинированной двигательной установкой**

Специальность 2.5.16

Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
Константинов Михаил Сергеевич
доктор технических наук, профессор

Москва – 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	6
1 Постановка и анализ транспортной задачи.....	15
1.1 Исследование Солнца с использованием космических аппаратов.	15
1.2 Баллистические схемы космических миссий для исследования Солнца из внеэклиптических положений.....	18
1.3 Баллистическая схема проекта «Интергелиозонд»	20
1.4 Общая формулировка транспортной задачи и характеристики анализируемой транспортной системы.....	22
1.4.1 Транспортная задача.....	22
1.4.2 Характеристики транспортной системы	24
1.4.3 Методики и основные положения, применяемые для анализа траектории движения КА	26
1.5 Основные этапы баллистической схемы выведения транспортной космической системы на целевую гелиоцентрическую орбиту.....	26
1.6 Заключение по разделу 1	27
2 Математические модели, используемые для описания оптимального движения КА на отдельных участках траектории рассматриваемой схемы выведения КА с комбинированной двигательной установкой на целевую орбиту	28
2.1 Применение принципа максимума Понтрягина для проектно-баллистического анализа сложных маршрутов	28
2.2 Математическая модель движения транспортной космической системы на участке геоцентрической траектории при старте с опорной околоземной орбиты	30
2.3 Математическая модель движения КА на гелиоцентрическом участке	40
2.4 Математическая модель движения КА на пассивных участках гелиоцентрической траектории	46

2.5	Математическая модель при описании движения КА при гравитационном манёвре	52
2.5.1	Алгоритм определения параметров пассивного гравитационного манёвра, обеспечивающего гелиоцентрический перелёт планета–планета с угловой дальностью $2\pi \cdot k$ (k – целое положительное число).....	52
2.5.2	Алгоритм определения параметров пассивного гравитационного манёвра, обеспечивающего гелиоцентрический перелёт планета–планета с угловой дальностью $\pi \cdot (2k-1)$ (k – целое положительное число).....	63
2.5.3	Алгоритм определения параметров пассивного околорезонансного гравитационного манёвра.....	76
2.5.4	Математическая модель при описании движения КА при гравитационном манёвре, переводящим КА на целевую гелиоцентрическую орбиту с фиксированным наклоном.....	82
2.6	Заключение по разделу 2.....	88
3	Математическая постановка задачи сквозной оптимизации выведения КА с комбинированной двигательной установкой на целевую орбиту. Формулировка многоточечной краевой задачи.....	89
3.1	Постановка задачи сквозной оптимизации межпланетной траектории транспортной космической системы с комбинированной двигательной установкой с использованием последовательности гравитационных манёвров.....	89
3.2	Анализируемая схема перелёта транспортной системы на гелиоцентрическую орбиту с заданным наклоном.....	89
3.3	Выбираемые характеристики анализируемой схемы выведения транспортной космической системы с комбинированной двигательной установкой	90
3.4	Независимые выбираемые параметры анализируемой схемы выведения транспортной космической системы на целевую гелиоцентрическую орбиту	92

3.5 Краевые условия анализируемой многоточечной задачи оптимизации	97
3.6 Заключение по разделу 3.....	99
4 Численные результаты проектно-баллистического анализа траектории выведения транспортной космической системы на целевую гелиоцентрическую орбиту	100
4.1 Анализ вспомогательной задачи. Выбор последовательности орбит КА, резонансных с орбитой Венеры	100
4.1.1 Анализ численных результатов решения вспомогательной задачи траектории выведения КА на гелиоцентрическую орбиту с использованием последовательности гравитационных манёвров у Венеры с целым порядком резонансов	104
4.1.2 Анализ вспомогательной задачи траектории выведения КА на гелиоцентрическую орбиту с использованием последовательности гравитационных манёвров у Венеры с включением π -резонансных гравитационных манёвров.....	110
4.2 Задача сквозной оптимизации траектории выведения транспортной космической системы на целевую гелиоцентрическую орбиту по выбранному маршруту	122
4.2.1 Анализ численных результатов первой траектории выведения транспортной космической системы с комбинированной двигательной установкой на гелиоцентрическую орбиту с использованием последовательности околорезонансных гравитационных манёвров у Венеры	123
4.2.2 Анализ численных результатов второй траектории выведения транспортной космической системы с комбинированной двигательной установкой на гелиоцентрическую орбиту с использованием последовательности околорезонансных гравитационных манёвров у Венеры	134

4.3	Заключение по разделу 4.....	142
	Заключение	146
	Список сокращений и условных обозначений.....	148
	Список литературы	149

Введение

Данное исследование посвящено разработке и формализации задачи сквозной оптимизации сложных баллистических схем межпланетных перелётов космических аппаратов (КА), оснащённых комбинированной двигательной установкой, с использованием последовательности гравитационных манёвров у небесных тел.

Актуальность темы исследования. Современные межпланетные КА, оснащённые реактивными двигателями большой тяги (химическими ракетными двигательными установками (ХДУ)), не позволяют обеспечить доставку значительной массы полезного груза к планете назначения. Повысить эффективность космических транспортных операций возможно с применением электроракетных двигательных установок (ЭРДУ) на борту КА. Существенное преимущество двигателей малой тяги состоит в высоком удельном импульсе, который обеспечивает значительное сокращение расхода топлива при осуществлении манёвров КА в глубоком космосе по сравнению с ХДУ и одновременно увеличивает массу полезной нагрузки в составе КА.

Для изучения Солнечной системы необходимо применять достижения современной космонавтики, дополняя их инновационными подходами или, по возможности, возвращаясь к идеям, предложенным в прошлом. Примечательно, что ряд перспективных концепций был предложен и проанализирован российскими учёными ещё в XIX-XX веках. Воспользовавшись идеей советских инженеров Юрия Васильевича Кондратюка и Фридриха Артуровича Цандера, многие баллистики предлагают траекторию межпланетного КА прокладывать вблизи планет не только с целью проведения их исследований, а также, чтобы гравитационное поле этой планеты дополнительно разогнало и изменило направление КА в сторону другой более далёкой планеты. Данное явление получило название гравитационного манёвра. Возможности научных исследований космоса при использовании гравитационных манёвров значительно возрастают. Подобную идею неоднократно реализовывали в миссиях «Пионер-11»,

«Вояджер-1,2», «Вега-1,2» и «Галилей». Во всех перечисленных проектах гравитационные манёвры приводили или к существенному уменьшению энергетических затрат, или к сокращению времени выполнения миссии или к совместному улучшению обоих факторов по сравнению с прямыми траекториями полёта КА (без использования гравитационных манёвров).

Современные перспективные межпланетные миссии предполагают формирование значительных наклонов гелиоцентрических орбит с целью изучения Солнечной системы из внеэклиптических положений. Однако любые манёвры по изменению наклона являются энергозатратными. Использование последовательности гравитационных манёвров у одной и той же планеты даёт возможность существенно изменять характеристики траектории КА без значительных затрат топлива маршевой двигательной установки КА. Речь идёт об использовании резонансных орбит КА с орбитой небесного тела (планеты), у которого совершается гравитационный манёвр. КА после выполнения резонансного гравитационного манёвра переходит на гелиоцентрическую орбиту, делает n оборотов вокруг Солнца, прежде чем снова попасть в окрестность планеты, которая, в свою очередь, за промежуток времени между последовательными подлётами КА к ней совершает m оборотов относительно Солнца. В данном случае период орбиты КА связан с сидерическим периодом орбиты планеты соотношением:

$$n_i \cdot T_{sc} - m_i \cdot T_{celestial_body} = 0, \quad (1)$$

где T_{sc} – период орбиты КА;

$T_{celestial_body}$ – сидерический период планеты;

n_i, m_i – количество витков КА и планеты вокруг Солнца соответственно;

$i = 1, 2, \dots$ – порядковый номер гравитационного манёвра с выходом на резонансную гелиоцентрическую орбиту.

Считаем гелиоцентрические орбиты, удовлетворяющие соотношению (1) резонансными гелиоцентрическими орбитами, а гравитационный манёвр, обеспечивающий переход на такую орбиту – резонансным гравитационным манёвром.

В настоящей диссертационной работе анализируются схемы полётов КА, при которых КА может совершать последовательность гравитационных манёвров в одной и той же точке или в противоположных точках орбиты планеты. При этом угловая дальность между двумя последовательными резонансными гравитационными манёврами может быть $2\pi \cdot k$ или $\pi \cdot (2k - 1)$ соответственно, где k – целое положительное число. В первом случае гелиоцентрическую орбиту будем называть резонансной с целым порядком резонанса, во втором – π -резонансной орбитой.

При разработке задачи сквозной оптимизации инженеры сталкиваются с рядом проблем. Исследования показали, что оптимизация межпланетных перелётов является многоэкстремальной задачей, что существенно сложнее одноэкстремальных задач. Данное свойство требует специфического алгоритма решения подобной задачи: проведения глубокого и качественного анализа или перебора как можно большего количества решений [2].

На сегодняшний день задачам межпланетных перелётов по сложным маршрутам¹ посвящено множество работ [9, 13, 19, 31, 46]. Подобные задачи характеризуются существенным увеличением размерности и адаптацией алгоритмов с целью использования приемлемого ресурса времени на поиск подходящего решения.

В настоящей работе решается задача проектирования оптимальных межпланетных траекторий с большим числом гравитационных манёвров у планет. Задача построения оптимальной траектории межпланетного КА связана, прежде всего, с разработкой адекватной математической модели задачи сквозной оптимизации, решением задачи оптимального управления, выбором независимых параметров схемы полёта и составлением граничных условий, позволяющим замкнуть оптимизационную задачу.

Актуальность данной работы обусловлена:

¹ Сложный маршрут - исследование нескольких небесных тел одним КА с включением в схему полёта одного или нескольких гравитационных манёвров.

- совершенствованием математических моделей для анализа оптимальных межпланетных траекторий КА, оснащённых комбинированной двигательной установкой;

- анализом как можно большего количества постановок задач межпланетных перелётов по сложным маршрутам с целью усовершенствования существующих математических моделей;

- формализацией ранее рассмотренной задачи выведения КА для исследования приполярных областей Солнца с введением последовательности гравитационных манёвров;

- введением полного набора условий оптимальности с целью получения замкнутой краевой многоточечной оптимизационной задачи.

В диссертации приведена формализация задачи сквозной оптимизации выведения КА для исследования процессов и явлений в системе Солнце – Земля. На текущий момент существует множество нерешённых научных задач по исследованию Солнца как астрофизического объекта [20, 23]. К ним относятся вопросы изучения механизма нагрева солнечной короны, ускорения солнечного ветра, детальный анализ гелиосферы, динамики магнитных полей в приполярных областях Солнца и множество других вопросов. Исследование этих явлений на текущий момент всё ещё актуально [21]. Космические миссии вносят неоценимый вклад, систематически расширяя наши знания о солнечно-земных связях. В рамках современных космических миссий, посвящённых изучению внутренней гелиосферы, приоритет даётся тем космическим проектам, которые позволяют проводить наблюдения с высоким временным и пространственным разрешением с относительно близкого к солнечной атмосфере расстояния. Важным аспектом является выбор оптимального положения для наблюдения, позволяющего получать уникальные снимки Солнца, недоступные для внеатмосферных околоземных КА, например, из внеэклиптических положений.

Целью настоящей диссертационной работы является повышение эффективности транспортных космических систем благодаря использованию комбинированных двигательных установок и включению в схему перелёта последовательности гравитационных манёвров, переводящих КА на резонансные и

околорезонансные гелиоцентрические орбиты. Для достижения поставленной цели были решены соответствующие **задачи**:

1. Задача сквозной оптимизации межпланетной траектории КА, оснащённого комбинированной двигательной установкой, с использованием некоторой последовательности пассивных гравитационных манёвров, при оптимизации всех характеристик перелётной траектории, включая величины гиперболических избытков скорости при гравитационных манёврах и параметры этих манёвров, параметры которых выбираются из условия увеличения наклона гелиоцентрических орбит КА. Использование полного набора условий оптимизации принципа максимума, обеспечивающего сведение оптимизационной проблемы к многоточечной краевой задаче.

2. Разработка алгоритма определения параметров пассивного гравитационного манёвра, обеспечивающего резонансные гелиоцентрические перелёты планета-планета с угловыми дальностями перелёта $2\pi \cdot k$ (целочисленные резонансные перелёты) и $\pi \cdot (2k - 1)$ (π -резонансные перелёты), где k - целое положительное число.

3. Анализ оптимальных программ управления движением транспортной космической системы на этапах работы используемых типов комбинированной двигательной установки в рамках сквозной оптимизации траектории межпланетного перелёта.

4. Апробация разработанной методики решения задачи сквозной оптимизации на примере выведения КА на гелиоцентрическую орбиту с относительно большим фиксированным наклоном орбиты к плоскости экватора Солнца. Проведение численного анализа нескольких межпланетных траекторий, использующих серию резонансных гравитационных манёвров с целым порядком резонансов с орбитой Венеры и с включением π -резонансного гравитационного манёвра у Венеры.

Объектом исследования является межпланетная траектория КА, оснащённого комбинированной двигательной установкой (ХДУ и ЭРДУ),

включающая последовательность гравитационных манёвров, резонансные и околорезонансные гелиоцентрические перелёты.

Предметом исследования являются математические модели оптимального движения КА, оснащённого комбинированной двигательной установкой, а также математические модели для анализа последовательности гравитационных манёвров, переводящих КА на резонансные и околорезонансные гелиоцентрические перелёты планета–планета с угловыми дальностями $2\pi \cdot k$ или $\pi \cdot (2k - 1)$, где k – целое положительное число.

В рамках данной работы были применены расчётно-теоретические **методы исследования**. В качестве основного метода оптимизации законов управления использовался принцип максимума Понтрягина [29, 30], который позволяет свести задачу оптимизации межпланетной траектории транспортной космической системы с несколькими гравитационными манёврами к многоточечной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Численное интегрирование ОДУ осуществлялось при помощи программы dor853 на Fortran - метода Дорманда-Принса (адаптивного метода Рунге-Кутты 8 порядка). Для поиска удовлетворительного начального приближения краевой задачи в работе применялась эволюционная стратегия CMA-ES. Поиск решения краевой задачи для системы нелинейных уравнений осуществлялся при помощи гибридного метода Пауэлла на Fortran.

Научная новизна и теоретическая значимость состоят в:

- в разработке новой постановки задачи сквозной оптимизации траектории межпланетного перелёта с последовательностью гравитационных манёвров КА с комбинированной двигательной установкой с оптимизацией всех характеристик его траектории, включая величины гиперболических избытков скоростей, используемых при гравитационных манёврах;

- в разработке метода решения задачи сквозной оптимизации траектории транспортной космической системы (КА и разгонного блока) с использованием полного набора необходимых условий оптимальности принципа максимума;

- во включении в схему межпланетного перелёта с последовательностью гравитационных манёвров π -резонансных с орбитой планеты гелиоцентрических

орбит. В разработке алгоритма определения параметров гравитационного манёвра, обеспечивающего π -резонансный гелиоцентрический перелёт планета–планета с угловой дальностью $\pi \cdot (2k - 1)$;

- в разработке математической модели траектории движения КА с использованием возмущённого движения планеты после гравитационных манёвров у неё, а также в применении околорезонансных гравитационных манёвров;

- в выполнении качественного анализа траекторий выведения транспортной системы на гелиоцентрическую орбиту с относительно низким перигелием, существенно наклонённую к плоскости солнечного экватора.

Достоверность полученных результатов достигается за счёт:

- строго методологического подхода: корректной и строгой постановки задачи сквозной оптимизации, включающей в себя полный набор условий оптимальности, позволяющих замкнуть краевую задачу;

- применения проверенных и надёжных методов анализа и оптимизации (принципа максимума Понтрягина).

Численные результаты были получены и сравнены с использованием различных средств программирования (Fortran и MathCad). Результаты были сопоставлены с опубликованными результатами исследований других авторов.

Практическая значимость заключается:

1. В разработке алгоритма оптимизации межпланетных траекторий, включающих последовательность гравитационных маневров, КА с комбинированной двигательной установкой, в разработке программного обеспечения, реализующего данный алгоритм.

2. В получении и анализе оптимальных характеристик траектории транспортной космической системы, обеспечивающей выведение КА на гелиоцентрическую орбиту с большим наклоном к плоскости солнечного экватора.

3. В доказательстве того факта, что включение в схему полёта КА π -резонансного гравитационного манёвра может существенно увеличить транспортные возможности космической транспортной системы. В демонстрации

возможности существенного уменьшения времени выполнения транспортной задачи за счёт включения в схему межпланетного перелёта π -резонансных гравитационных манёвров.

Все результаты, полученные в рамках настоящей диссертационной работы, получены лично автором. Основные результаты опубликованы в 3-х работах автора, входящих в рецензируемые издания из списка Высшей аттестационной комиссии Минобрнауки России и Scopus.

Апробация полученных результатов проводилась на следующих российских и международных конференциях:

- 19^{ой} Международной конференции «Авиация и космонавтика» в ноябре 2020 г.;

- XLV Академических чтениях по космонавтике, посвящённых памяти академика С.П. Королёва и другим выдающимся отечественным учёным-пионерам освоения космического пространства в марте-апреле 2021 г.;

- 22^{ой} Международной конференции «Авиация и космонавтика» в ноябре 2023 г.;

- VIII международной научной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики» в декабре 2023 г.;

- BRICS 4th Scitech Forum on Space Flight Mechanics and Space Structures and Materials в ноябре 2023 г.

- 23^{ей} Международной конференции «Авиация и космонавтика» в ноябре 2024 г.;

- BRICS 5th Scitech Forum on Space Flight Mechanics and Space Structures and Materials в ноябре 2024 г.

Также результаты работы обсуждались на семинарах «Механика космического полёта» МАИ.

Данное исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда № 25-79-30009, <https://rscf.ru/project/25-79-30009/>.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Постановка задачи сквозной оптимизации траектории межпланетного перелёта с последовательностью гравитационных манёвров КА, оснащённого

комбинированной двигательной установкой, с оптимизацией всех характеристик его траектории, включая величины гиперболических избытков скоростей, используемых при гравитационных манёврах. Особенности постановки:

- постановка предполагает использовать полный набор условий оптимальности принципа максимума, использование которых позволяет свести оптимизационную проблему к многоточечной краевой задаче;

- постановка использует условия оптимальности, обеспечивающие учёт ограничений по наклонению гелиоцентрических орбит КА;

- постановка позволяет анализировать схему полёта с π -резонансными гравитационными манёврами.

2. Качественный анализ оптимальных траекторий выведения КА на гелиоцентрическую орбиту для исследования полярных областей Солнца, использующих последовательность целочисленных и π -резонансных гравитационных манёвров.

3. Доказательство того, что использование в сложной схеме межпланетного полёта π -резонансных гравитационных манёвров может существенно сократить время выполнения анализируемой транспортной операции, а также расширить транспортные возможности межпланетных КА.

Структура и объём работы. Настоящая диссертационная работа состоит из введения, четырёх разделов, заключения, списка сокращений и условных обозначений и списка литературы. Работа содержит 30 рисунков и 20 таблиц. Список литературы включает в себя 47 наименований.

1 Постановка и анализ транспортной задачи

В диссертационной работе проводится анализ многоточечной задачи сквозной оптимизации траектории транспортной космической системы с комбинированной двигательной установкой (ЭРДУ и ХДУ), использующей последовательность гравитационных манёвров, которые предполагают формирование значительно изменённых по наклонению гелиоцентрических орбит КА. Анализ задачи проводится на примере проектов, исследующих Солнце с достаточно низких гелиоцентрических орбит и имеющих относительно большое наклонение.

1.1 Исследование Солнца с использованием космических аппаратов

В настоящее время реализовано множество проектов исследования Солнца и солнечно-земных связей. Измерения рентгеновского и ультрафиолетового излучений Солнца, недоступные с поверхности Земли, частиц солнечного ветра, определение космической погоды и т.д., всё это стало известным и общедоступным за последние десятилетия благодаря исследованиям околоземных КА. Для детального изучения и непрерывного мониторинга солнечной активности в космическое пространство была запущена обширная сеть обсерваторий [26]. Одни из КА предназначены для изучения и анализа изменений солнечной активности, другие – отслеживания параметров солнечного ветра, третьи фиксируют процессы, происходящие на поверхности Солнца (солнечные вспышки, корональные выбросы массы).

Обсерватории на околоземной орбите. Примерами подобных обсерваторий являются «Orbital Solar Observatory» (проект НАСА). Аппараты «OSO-1÷8» были в эксплуатации с 1962 г. по 1976 г. Данные КА изучали Солнце в различных диапазонах электромагнитного спектра.

В 1980 году был запущен КА «Solar Maximum Mission» (НАСА) для исследования солнечного цикла. В 1989 году после геомагнитной бури связь с КА была утеряна, и он вошёл в плотные слои атмосферы Земли. За время эксплуатации

КА открыл 10 комет, учёные смогли наблюдать корональный переходный процесс, произошедший в мае 1980 года.

В точке Лагранжа L1. Среди действующих станций мониторинга стоит отметить солнечную обсерваторию «SOHO» (совместный проект НАСА и ЕКА), которая приступила к работе в 1996 году. Основной её задачей является сбор информации о состоянии глубинных слоёв Солнца, солнечном ветре и об активности солнечной короны.

Также в точку Лагранжа L1 между Землёй и Солнцем была запущена обсерватория НАСА «Advanced Composition Explorer», осуществляющая круглосуточное отслеживание параметров солнечного ветра и магнитного поля.

КА на гелиоцентрической орбите. Для решения многих научных задач по исследованию Солнца целесообразнее использовать КА, функционирующие на гелиоцентрических орбитах. Это обеспечивает возможность наблюдения участков Солнца, недоступных для околоземных КА, в том числе его полярных областей.

Серия аппаратов «Pioneer-6÷9», разработки НАСА (1965-1969), находились на гелиоцентрических орбитах и изучали солнечную плазму, космические лучи, магнитные возмущения, солнечный ветер. Средние значения перигелиев и афелиев варьировались в диапазоне $0,75 \div 1$ а.е. и $0,99 \div 1,2$ а.е. соответственно.

На достаточно близком расстоянии (минимальная величина перигелия ориентировочно составила $0,29$ а.е.) проводили всесторонние исследования Солнца КА «Helios-A» (1975-1985 гг.) и «Helios-B» (1976-1979 гг.) разработки НАСА и Германии.

12 августа 2018 г. был осуществлён запуск транспортной космической системы (КА «Parker Solar Probe» (проект НАСА) и разгонного блока «Star-48BV») при помощи ракеты-носителя (РН) Delta IV Heavy с мыса Канаверал [46, 47]. Стартовая масса КА составила 685 кг. Длительность всей миссии составляет 7 лет.

Баллистическая схема полёта КА включает в себя 3 резонансных гравитационных манёвра и 4 нерезонансных гравитационных манёвра у Венеры, которые позволяют постепенно уменьшать величину перигелиев, и 24 пролёта у Солнца. Максимальное реализованное наклонение гелиоцентрической орбиты КА к плоскости эклиптики составило $3,4^\circ$. Траектория КА показана на рисунке 1.1.

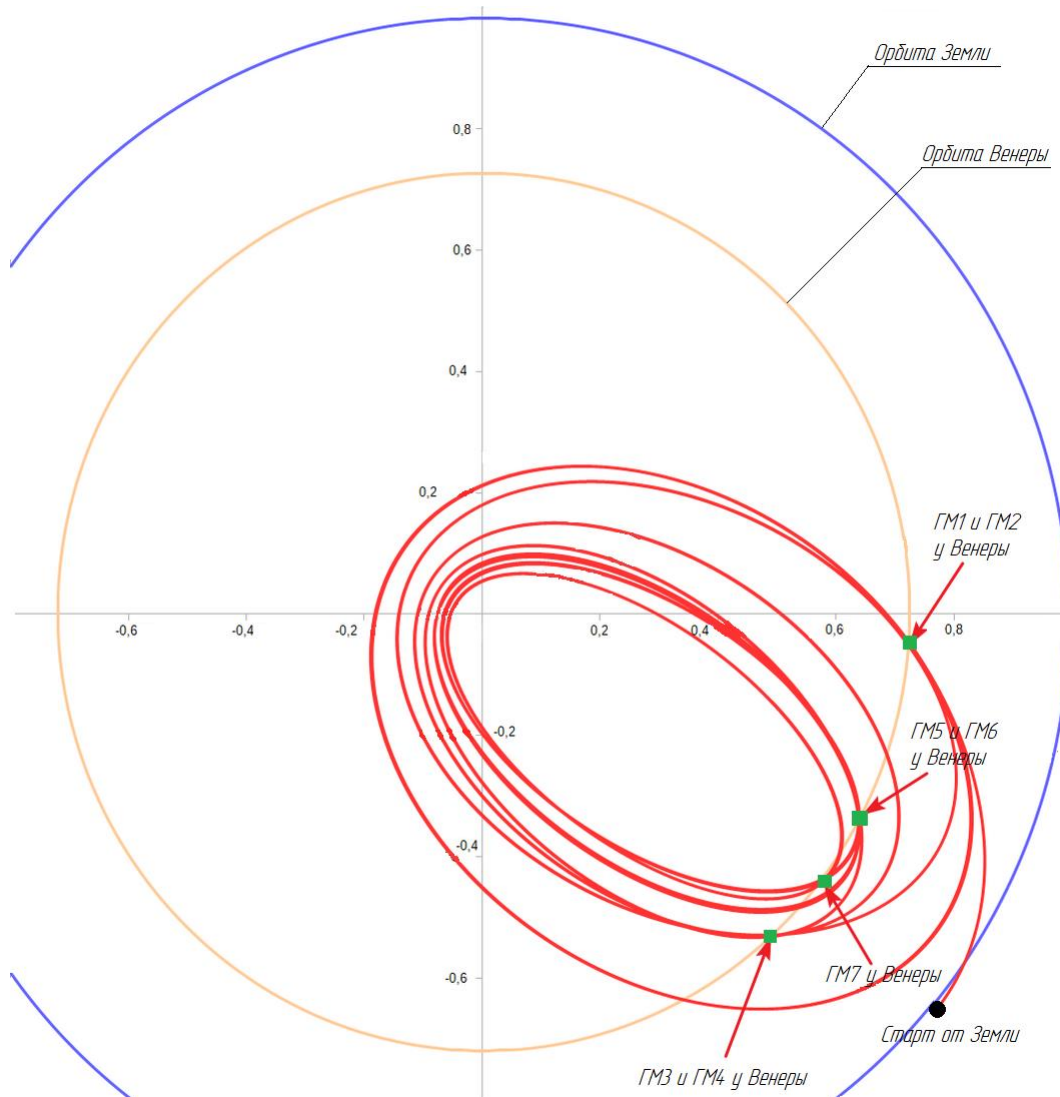


Рисунок 1.1 – Траектория движения КА «Parker Solar Probe» в проекции на плоскость эклиптики

В ноябре 2024 г. КА совершил свой последний пролёт у Венеры, а в июне 2025 г. достиг своего последнего перигелия. В декабре КА осуществил рекорд и приблизился к Солнцу на минимальное расстояние $9,86 \cdot R_{Sun}$ (0,04 а.е.) (рисунок 1.2). В конце декабря 2024 года, по данным НАСА, «Parker Solar Probe» пролетел сквозь верхний слой солнечной атмосферы с максимальной скоростью 190,7 км/с, подтвердив звание самого быстрого объекта из когда-либо созданных людьми.

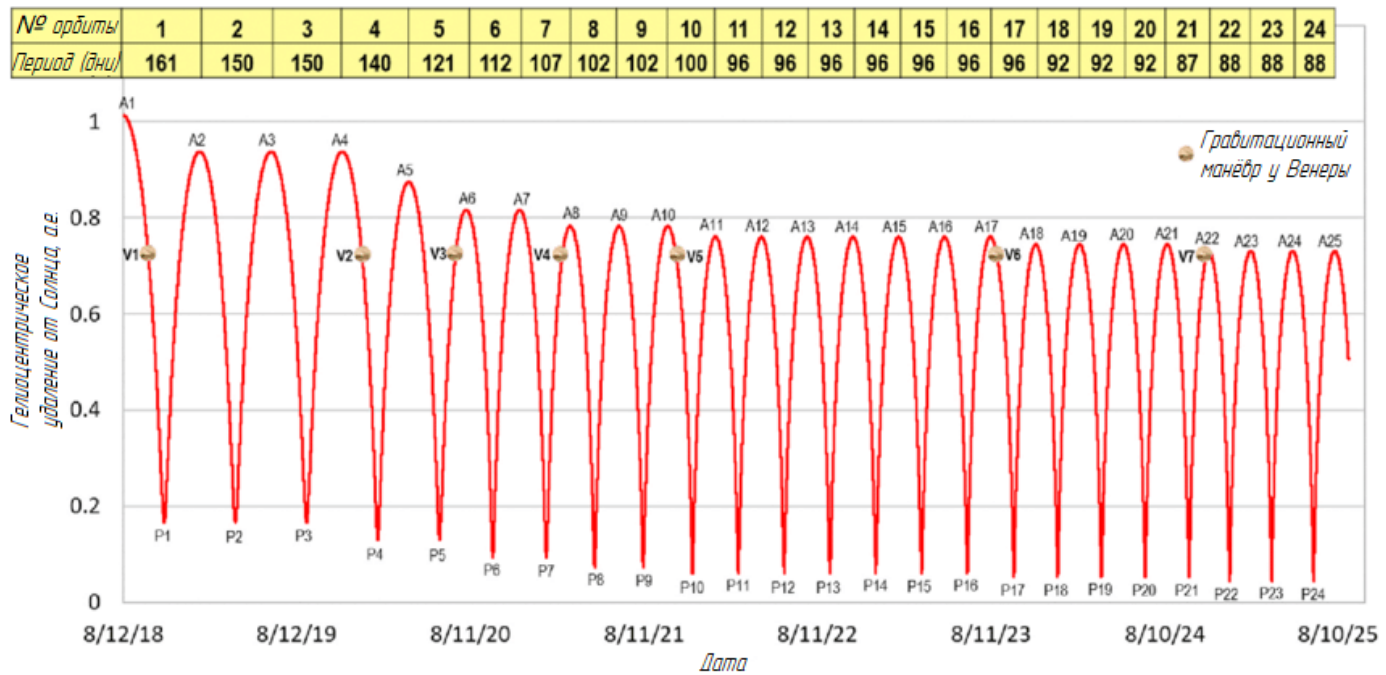


Рисунок 1.2 – Гелиоцентрическое удаление КА «Parker Solar Probe»

1.2 Баллистические схемы космических миссий для исследования Солнца из внеэклиптических положений

Ещё одним КА, представляющим интерес, является «Ulysses» (1990-2008 гг.) (ЕКА и НАСА). Это первый КА, проводивший изучение Солнца не только из плоскости эклиптики, но и из внеэклиптических положений для мониторинга его полюсов. Данные, полученные с этого КА, позволили построить более точную модель окосолнечного пространства. Масса КА составила всего 371 кг. Траектория КА предполагала использование одного гравитационного манёвра у Юпитера для того, чтобы обеспечить требуемое наклонение гелиоцентрической орбиты $80,2^\circ$ к плоскости эклиптики (рисунок 1.3). Афелий после гравитационного манёвра оставался равным 5 а.е., а перигелий – немногим более 1 а.е. Период обращения КА составлял ориентировочно 6 лет.

Время выведения КА на гелиоцентрическую орбиту с заданным наклонением составило 4 года. «Ulysses» совершил 3 пролёта у Солнца в период с 1994 г. по 2008 г.

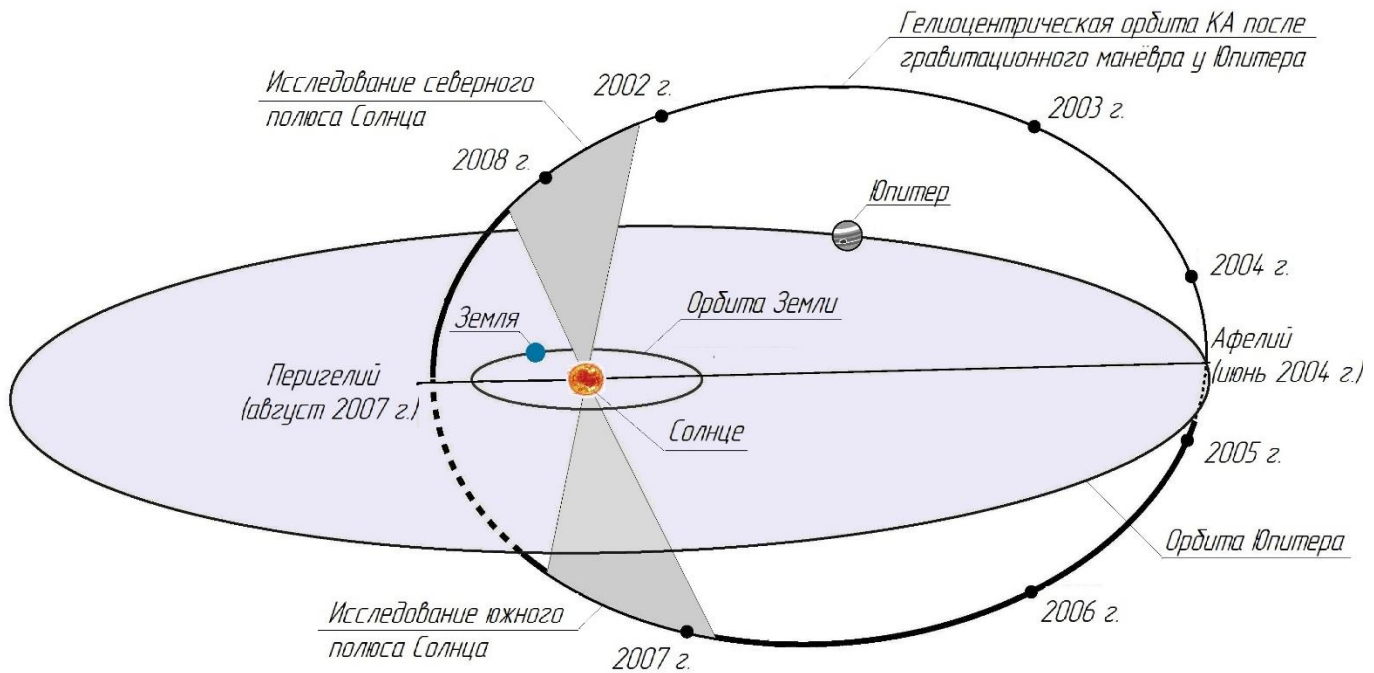


Рисунок 1.3 – Траектория движения КА «Ulysses» после гравитационного манёвра у Юпитера

10 февраля 2020 года с мыса Канаверал осуществлён запуск КА «Solar Orbiter» (проект ЕКА при участии НАСА) массой 1800 кг при помощи РН «Atlas V» и разгонного блока «Центавр» [37, 38]. Миссия рассчитана на 7 лет. Планируемый срок основной миссии — до декабря 2026 года, однако запас топлива рассчитан на 10 лет, и учёные предполагают, что работоспособность КА и научной аппаратуры сохранится, и зонд будет передавать данные до 2030 года (расширенная миссия).

При помощи «Solar Orbiter» учёные планируют получить данные, которые помогут понять физику Солнца. Наблюдение полюсов Солнца особенно важно, поскольку магнитное поле в приполярных областях существенно отличается от экваториальных областей. Два гравитационных манёвра у Венеры и один у Земли позволят «Solar Orbiter» выйти на необходимую для исследований гелиоцентрическую орбиту, а последующие манёвры у Венеры (всего их запланировано 5 в основной миссии и 8 — в расширенной) будут менять угол её наклона. В ходе основной миссии КА может выйти на орбиту, наклонённую к плоскости эклиптики только на 24° . Минимальное сближение с Солнцем составляет $60 \cdot R_{Sun}$ (0,284 а.е.). К концу основного этапа миссии (декабрь 2026

года) КА совершит 12 витков вокруг Солнца. Затем он перейдёт в фазу расширенной миссии, которая характеризуется большим наклоном к плоскости эклиптики (до 33°) и увеличением перигелия до 0,33 а.е.

На рисунке 1.4 показано, как за счёт гравитационных манёвров с целым порядком резонансов у Венеры КА увеличивает своё наклонение к плоскости эклиптики.

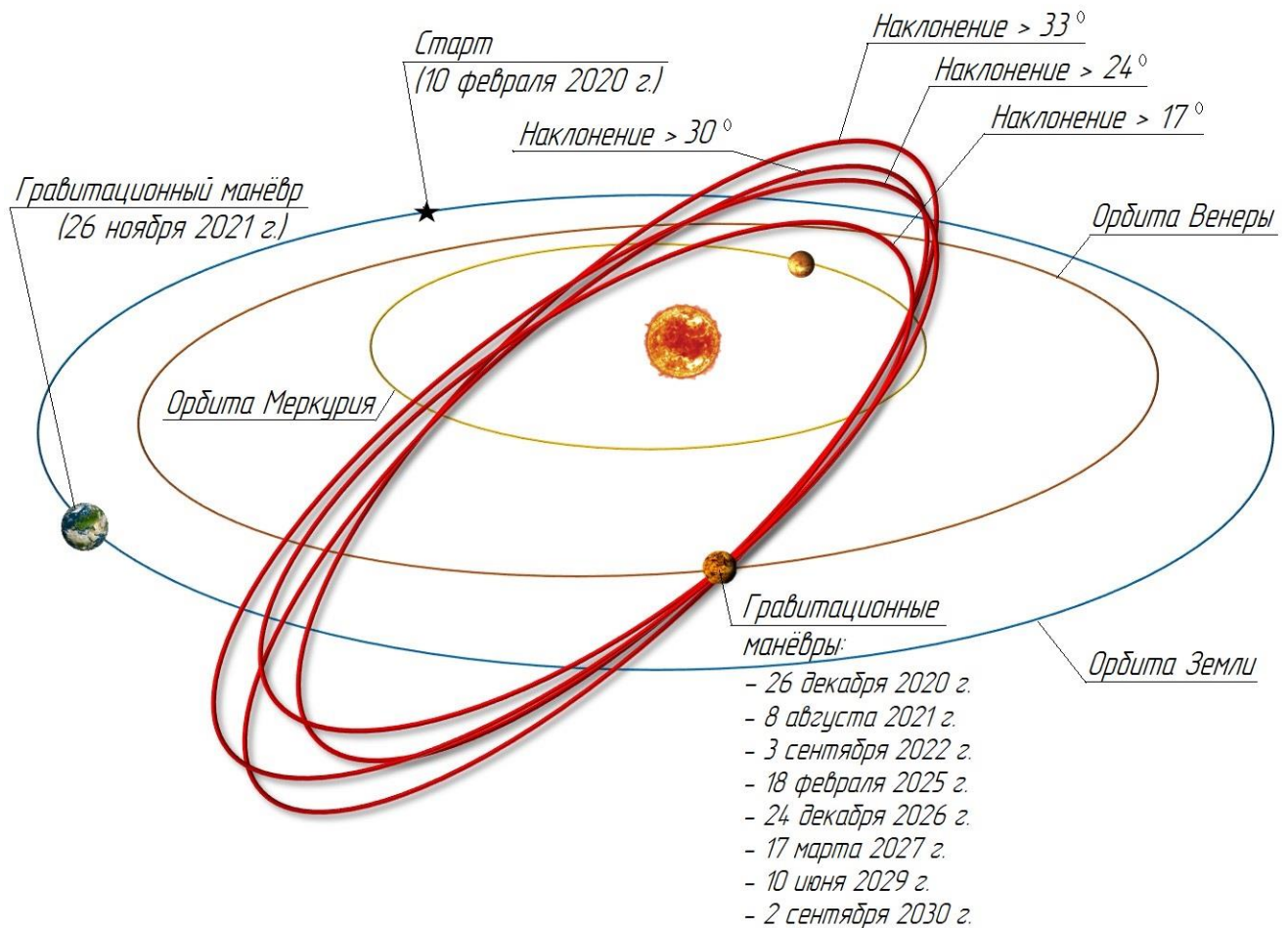


Рисунок 1.4 – Гелиоцентрические орбиты КА «Solar Orbiter» после первого гравитационного манёвра у Венеры

1.3 Баллистическая схема проекта «Интергелиозонд»

На текущий момент в России имеется проект по исследованию Солнца из внеэклиптических положений с гелиоцентрических орбит. Работа над этим проектом длится уже не одно десятилетие. Начиная с середины 90-х гг., ИЗМИРАН в кооперации с ИКИ РАН и Институтом Макса Планка (Германия), приступили к работе над проектом «Интергелиос». В рамках данной миссии КА, в состав

которого входит ЭРДУ, предполагал использование серии резонансных гравитационных манёвров у Венеры для постепенного увеличения наклона гелиоцентрических орбит КА. После каждого гравитационного манёвра у планеты КА должен проводить детальные локальные и дистанционные измерения Солнца с близкого расстояния и внеэклиптического положения.

В начале 2000-х гг. после объединения с другими научными группами, занимающимися исследованиями солнечно-земной физики, проект «Интергелиос» был переименован в «Интергелиозонд». Цели и задачи, которые были поставлены перед солнечным зондом, остались те же [22]. За счёт последовательности гравитационных манёвров у Венеры (рисунок 1.5) имеется возможность довольно существенно изменять характеристики гелиоцентрических орбит КА, а именно такие параметры орбиты как наклонение и радиус перигелия, которые очень важны для анализируемого проекта. Обычно изменение этих характеристик орбиты достигается путём использования резонансных орбит КА с орбитой небесного тела (планеты), у которого совершается гравитационный манёвр.

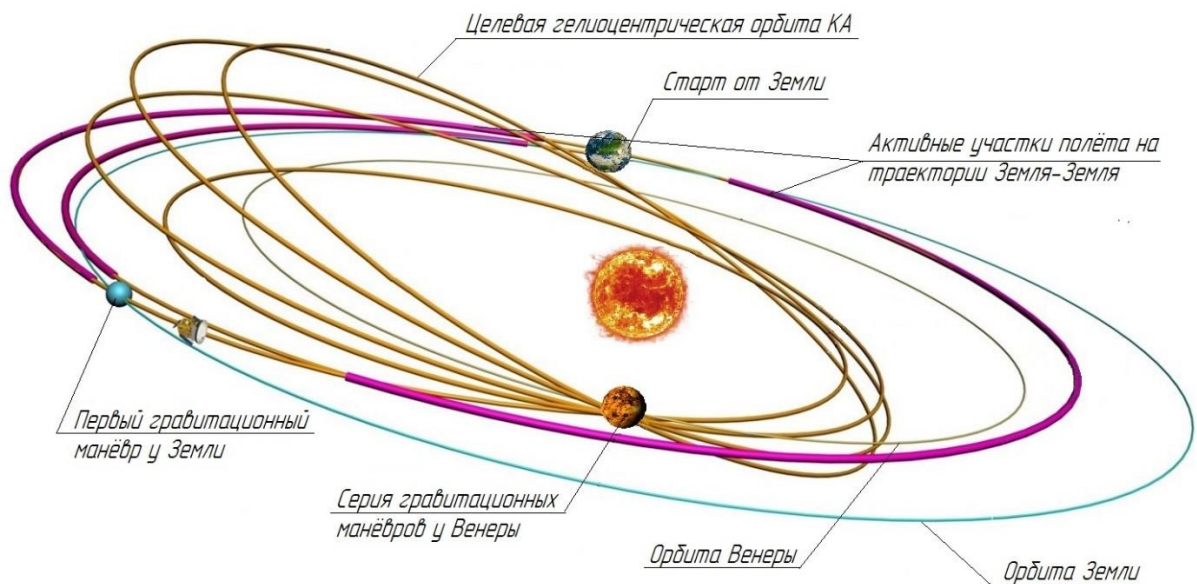


Рисунок 1.5 – Баллистическая схема проекта «Интергелиозонд»

Относительно большое наклонение гелиоцентрических орбит КА даёт возможность изучить структуру внутренней гелиосферы, полярные и экваториальные области с относительно высоких гелиоширот. Проект

«Интергелиозонд» (в случае его реализации) позволит проводить эксперименты не только в научных интересах, но также может обеспечить отработку ряда перспективных технологий и космических комплексов, необходимых для реализации межпланетных программ.

1.4 Общая формулировка транспортной задачи и характеристики анализируемой транспортной системы

1.4.1 Транспортная задача

В диссертации рассматривается задача сквозной оптимизации траектории выведения транспортной космической системы на гелиоцентрическую орбиту для проведения исследования Солнца. Перед КА, траектория выведения которого в настоящей работе оптимизируется, стоят цели и задачи, аналогичные проекту «Интергелиозонд». Солнечным зондом предполагается мониторинг полярных областей Солнца. Многими авторами подтверждено, что орбитальное наклонение в 30° является достаточным для наблюдения полюсов Солнца. Однако стоит отметить, что 30° следует отсчитывать не от плоскости эклиптики (как это делается в большинстве опубликованных исследований), а от плоскости экватора Солнца. Плоскость солнечного экватора наклонена на $7,25^\circ$ относительно плоскости эклиптики.

Поскольку изменение наклона орбиты КА при использовании двигательных установок является крайне энергозатратным процессом, то привлечение дополнительных источников энергии является приоритетным направлением для подобных задач. В качестве подобных источников энергии можно рассматривать гравитационные манёвры. Разработка эффективных баллистических схем полёта КА с привлечением гравитационных манёвров, которые позволяют значительно изменять наклонение орбиты КА, является актуальной задачей. В литературе задачи межпланетных перелётов, в которых обеспечивается большое изменение наклона гелиоцентрических орбит КА, называются задачами класса «Интергелиозонд».

В работах показана большая эффективность применения гравитационного манёвра у Венеры при выведении КА на гелиоцентрическую орбиту с большим наклоном и малым радиусом перигелия. Использование гравитационного поля Венеры позволяет как существенно сократить время выведения КА на околосолнечную орбиту по сравнению с гравитационным манёвром у Юпитера (проект «Ulysses»), так и вывести относительно большую массу полезной нагрузки. С целью изменения наклона орбиты КА по отношению к плоскости эклиптики в работах авторов применяются орбиты КА, резонансные с орбитой Венеры [5-8, 18, 35]. Стоит отметить, что авторы обращаются к следующим предположениям:

1. Орбиты планет считаются невозмущенными кеплеровыми эллипсами, элементы которых берутся для какой-либо даты, к примеру, даты старта с опорной околоземной орбиты или даты первого подлёта к планете, у которой реализуется цепочка резонансных гравитационных манёвров.

2. Величина гиперболического избытка скорости КА при первом подлёте к Венере для совершения гравитационного манёвра считается известной величиной, чаще равной примерно половине средней гелиоцентрической скорости Венеры – 17,5 км/с [4-7, 42]. Эта величина предоставляет явную возможность за счёт последовательности гравитационных манёвров у Венеры получить гелиоцентрическую орбиту с большим наклоном к плоскости орбиты Венеры – 30°.

3. Все гелиоцентрические орбиты КА находятся в орбитальном резонансе с орбитой Венеры с целым порядком резонансов. Величина гиперболического избытка скорости КА при каждом подлёте к Венере остаётся неизменной [14, 28].

В рамках настоящей диссертационной работы предлагается несколько иная постановка задачи выведения КА на гелиоцентрическую орбиту с фиксированным наклоном, имеющая некоторые отличия от ранее опубликованных работ:

1. В рамках анализируемой траектории выведения КА проводится оптимизация гиперболического избытка скорости (величина и направление вектора) при подлёте к планетам для гравитационного манёвра у неё.

2. Имеется возможность использования π -резонансных гелиоцентрических орбит КА с орбитой планеты, у которой совершается гравитационный манёвр.

3. В рамках анализируемой траектории выведения КА для исследования Солнца впервые используются условия трансверсальности для постановки с фиксированной величиной наклона, при этом остальные элементы целевой гелиоцентрической орбиты являются оптимизируемыми характеристиками задачи сквозной оптимизации.

Целевой гелиоцентрической орбитой для КА после его последнего гравитационного манёвра у Венеры считается орбита, имеющая наклонение 30° к плоскости экватора Солнца. Граничным условием в рамках анализируемой транспортной задачи является выражение:

$$i_{sc}(t_f) - i_{fixed} = 0 \quad (2)$$

где $i_{sc}(t_f)$ – наклонение орбиты КА в момент времени t_f (после последнего гравитационного манёвра у Венеры);

$i_{fixed} = 30^\circ$ - граничное условие транспортной задачи.

1.4.2 Характеристики транспортной системы

Рассматриваемая транспортная космическая система предназначена для выведения полезной нагрузки, входящей в состав КА, для проведения научных задач в открытом космическом пространстве в условиях экстремальных температурных режимов. Для доставки полезной нагрузки на целевую орбиту необходимо применять современные и перспективные транспортные космические системы. В качестве исходных данных используются характеристики РН и ХРБ, зарекомендовавшие себя как наиболее применяемые транспортные средства для выведения межпланетных КА и имеющие высокие надёжность и отработку технических комплексов.

Запуск КА типа «Интергелиозонд» предлагается осуществлять РН «Союз-2.1б» с космодрома Байконур на опорную околоземную орбиту со следующими параметрами:

- наклонение – 51,6°;
- эксцентриситет – 0 (орбита круговая);
- высота орбиты – 200 км.

РН «Союз-2.1б» способен вывести на низкую околоземную орбиту космическую транспортную систему, в состав которой входят солнечный зонд и ХРБ «Фрегат», массой 8200 кг. Используемые проектные параметры ХРБ «Фрегат» представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Основные характеристики ХРБ «Фрегат»

Характеристика	Величина
Компоненты топлива: окислитель/горючее	азотный тетраоксид / несимметричный диметилгидразин
Максимальный рабочий запас топлива	5 350 кг
Конечная масса конструкции ХРБ, включая невыработанные остатки топлива	970 кг
Удельный импульс двигательной установки	333,1 с
Тяга	19,6133 кН

В свою очередь, сам КА оснащён ЭРДУ на базе одного двигателя «СПД-140Д», характеристики которого представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Основные характеристики двигателя «СПД-140Д»

Характеристика	Величина
Рабочее тело	ксенон
Тяга	290 мН
Потребная мощность	4 500 Вт
Удельный импульс	1 670 с

1.4.3 Методики и основные положения, применяемые для анализа траектории движения КА

В рамках данного исследования применяются следующие методики и положения:

1. При исследовании траектории межпланетного перелёта КА применяется метод грависфер нулевой протяжённости.
2. Вдоль всей траектории гелиоцентрического перелёта допускается включение ЭРДУ КА, при этом количество активных участков и длительность работы двигателя не ограничены.
3. Гравитационные манёвры анализируются пассивными, т.е. включение двигательной установки при гравитационном манёвре не предполагается.
4. Координаты и компоненты вектора скорости небесных тел определяется при помощи эфемеридного программного обеспечения JPL DE421.
5. В настоящей работе применяется модель функционирования ЭРДУ КА как нерегулируемого двигателя ограниченной тяги (ОТ-задача), который имеет фиксированные параметры тяги и скорости истечения рабочего тела. Такой двигатель не предусматривает регулировки величины тяги, используется лишь возможность включения/выключения двигателя, что делает данную модель наиболее близкой к реальным условиям эксплуатации.

1.5 Основные этапы баллистической схемы выведения транспортной космической системы на целевую гелиоцентрическую орбиту

Принципиальная схема выведения транспортной космической системы на целевую орбиту с фиксированным наклоном включает два этапа:

Этап 1. РН выводит транспортную космическую систему (КА+ХРБ) на низкую круговую орбиту с космодрома Байконур. ХРБ «Фрегат» совершает импульс перехода КА с опорной околоземной орбиты на межпланетную отлётную гиперболу с последующим отделением ХРБ.

Этап 2. КА совершает последовательность гравитационных манёвров у планеты, которые переводят солнечный зонд на резонансные с орбитой планеты

гелиоцентрические орбиты, чтобы постепенно увеличивать наклонение орбиты КА. На гелиоцентрических участках планета–планета предусмотрена возможность многократного включения ЭРДУ. Требуется, чтобы параметры последнего гравитационного манёвра обеспечили заданное граничное условие по наклонению целевой орбиты КА к плоскости экватора Солнца (2).

1.6 Заключение по разделу 1

В разделе 1 приведены примеры уже реализованных миссий КА для исследования Солнца, включая проекты для мониторинга Солнца из внеэклиптических положений («Ulysses» и «Solar Orbiter»). Поставлена транспортная задача, а также приведены некоторые характеристики анализируемой транспортной космической системы (РН, ХРБ и КА). Представлены отличия в постановке задачи сквозной оптимизации сравнительно с работами других авторов. Приведены основные этапы проектно-баллистической схемы, включающие этап выведения КА из грависферы Земли с последующим выходом на гелиоцентрические орбиты, а также этап постепенного увеличения наклонения орбиты КА за счёт выбора характеристик гравитационного манёвра.

2 Математические модели, используемые для описания оптимального движения КА на отдельных участках траектории рассматриваемой схемы выведения КА с комбинированной двигательной установкой на целевую орбиту

Основной задачей сквозной оптимизации траектории выведения КА с комбинированной двигательной установкой (ХРБ+ЭРДУ) на целевую гелиоцентрическую орбиту с фиксированным наклоном является получение оптимальных оценок параметров движения и характеристик модели движения вдоль всей траектории движения. Таким образом, под математической постановкой задачи сквозной оптимизации понимается рациональный выбор модели движения КА, критерия оптимизации, состава независимых выбираемых параметров рассматриваемой транспортной операции, набора граничных условий и условий оптимальности, позволяющих «замкнуть» краевую многоточечную задачу.

2.1 Применение принципа максимума Понтрягина для проектно-баллистического анализа сложных маршрутов

В диссертации рассматривается проектно-баллистический анализ траектории выведения КА на целевую гелиоцентрическую орбиту с фиксированным наклоном. Предметом анализа является задача выбора наилучшей траектории для достижения заданной орбиты. Данная задача сводится к оптимизационной задаче, решение которой состоит из следующих элементов:

- разработка математической модели движения КА и ХРБ;
- определение целевой функции (минимизируемый функционал);
- выбор метода оптимизации и построение алгоритма решения рассматриваемой задачи;
- составлении многоточечной краевой задачи.

Важным шагом в постановке и решении задачи оптимизации является выбор критерия оптимальности. При решении задач, связанных с оптимальным управлением, существуют два наиболее часто применяемые критерия

оптимальности. Первый заключается в минимизации общей продолжительности манёвра, что соответствует задаче быстрогодействия. При втором подходе задача оптимизации сводится к максимизации конечной массы КА.

В данной работе задача состоит в поиске оптимальной траектории выведения транспортной космической системы на целевую гелиоцентрическую орбиту с фиксированным наклоном с максимальной массой полезной нагрузки КА. В качестве критерия оптимальности рассматривается функционал в постановке вариационной задачи Майера:

$$J(\mathbf{a}, \mathbf{u}(t)) = -m(t_f) \quad (3)$$

где $\mathbf{u}(t)$ – вектор выбираемых законов управления движением КА;

\mathbf{a} - вектор выбираемых параметров схемы полёта КА и его выбираемых параметров;

t_f – дата перехода КА на целевую орбиту (соответствует дате последнего гравитационного манёвра).

Результатом минимизации функционала (3) является траектория выведения солнечного зонда максимальной массы $m(t_f)$ на конечную орбиту.

Для расчёта анализируемой межпланетной траектории транспортной космической системы в рамках грависфер нулевой протяжённости вся траектория делится на несколько характерных областей:

- участок разгона транспортной системы (КА и ХРБ) с околоземной орбиты;
- гелиоцентрический участок КА планета-планета;
- планетоцентрический участок, на котором предполагается, что КА входит в грависферу притяжения планеты, пролетает по гиперболической траектории на некоторой высоте (более или равной минимальной) для выполнения гравитационного манёвра у этой планеты;
- последний гелиоцентрический участок с некоторыми фиксированными характеристиками орбиты КА (наклонение) и некоторыми оптимальными элементами этой орбиты.

2.2 Математическая модель движения транспортной космической системы на участке геоцентрической траектории при старте с опорной околоземной орбиты

Старт транспортной космической системы (ХРБ и КА) осуществляется с опорной орбиты искусственного спутника Земли (ИСЗ) (параметры орбиты указаны в п.п. 1.4.2). На эту орбиту ХРБ и КА выводится с космодрома ракетой-носителем. Наклонение этой опорной орбиты определяется используемым космодромом при наивыгоднейшем азимуте запуска. Величина гиперболического избытка скорости КА на отлётной от Земли траектории зависит от массы истраченного в процессе работы двигателя ХРБ топлива. Эта величина определяет массу КА в момент начала его движения по гелиоцентрической траектории.

Предполагается, что траектория движения транспортной космической системы на этапе старта с опорной околоземной орбиты (этапе разгона) плоская. Рассматривается вариант старта, при котором используется траектория с одним активным участком, т.е. возможность уменьшения гравитационных потерь скорости за счёт ввода дополнительной опорной орбиты, в окрестности перигея которой реализуется второе включение двигателя ХРБ, не предполагается.

Введение величины гиперболического избытка скорости как параметра всей схемы полёта при анализе и оптимизации рассматриваемой транспортной задачи выведения КА на гелиоцентрическую орбиту для исследования Солнца позволяет выделить в отдельную задачу оптимизацию старта КА с опорной орбиты. При этом естественной постановкой задачи является следующая формулировка: для анализируемой транспортной системы для произвольного значения величины гиперболического избытка скорости требуется найти такой закон управления движением КА при старте с опорной орбиты, при котором затраты топлива на выполнения манёвра минимальны. При использовании схемы полёта с одним активным участком минимум затрат топлива соответствует минимуму времени полёта на участке разгона. Значит рассматриваемая проблема может быть исследована, как задача на быстроедействие, а минимизируемый функционал может рассматриваться в виде:

$$J(\mathbf{a}, \mathbf{u}(t)) = t_{01} \quad (4)$$

где t_{01} – время работы двигателя ХРБ. Время включения двигателя (время старта с околоземной орбиты) примем нулевым.

Опишем движение транспортной системы на участке старта с околоземной орбиты. Введём закон управления движением и, используя принцип максимума, сведём оптимизационную проблему к двухточечной краевой задаче.

Дифференциальные уравнения движения транспортной системы в орбитальной системе координат (ОСК) на этапе разгона с опорной околоземной орбиты имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_r}{dt} = \frac{P_{cus} \cdot \sin(\vartheta)}{m} - \frac{\mu_{Earth}}{r^2} + \frac{V_n^2}{r} \\ \frac{dV_n}{dt} = \frac{P_{cus} \cdot \cos(\vartheta)}{m} - \frac{V_r \cdot V_n}{r} \\ \frac{dr}{dt} = V_r \\ \frac{d\beta}{dt} = \frac{V_n}{r} \\ \frac{dm}{dt} = -\frac{P_{cus}}{w_{cus}} \end{array} \right. \quad (5)$$

где V_r – радиальная компонента скорости транспортной системы;

V_n – трансверсальная компонента скорости транспортной системы;

r – величина радиуса-вектора транспортной системы;

β – полярный угол;

m – масса транспортной системы;

P_{cus} – тяга двигателя ХРБ «Фрегат»;

ϑ – угол тангажа, отмеренный от линии местного горизонта;

$\mu_{Earth} = 398600 \frac{\text{км}^3}{\text{с}^2}$ – гравитационный параметр Земли;

w_{cus} – скорость истечения двигательной установки ХРБ «Фрегат».

Безразмерная форма записи системы (5) при традиционном обезразмеривании, когда за единицу расстояния принимается радиус начальной орбиты, за единицу скорости - местная круговая скорость на начальной орбите, за единицу массу - масса КА на начальной орбите, имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_r}{dt} = \frac{P_{cus} \cdot \sin(\vartheta)}{m} - \frac{1}{r^2} + \frac{V_n^2}{r} \\ \frac{dV_n}{dt} = \frac{P_{cus} \cdot \cos(\vartheta)}{m} - \frac{V_r \cdot V_n}{r} \\ \frac{dr}{dt} = V_r \\ \frac{d\beta}{dt} = \frac{V_n}{r} \\ \frac{dm}{dt} = -\frac{P_{cus}}{w_{cus}} \end{array} \right. \quad (6)$$

Обозначения всех безразмерных фазовых переменных, а также безразмерной тяги и безразмерной скорости истечения оставлено совпадающими с обозначениями размерных переменных.

Сформулируем рассматриваемую оптимизационную задачу, как задачу оптимального управления. Вектор фазовых координат транспортной системы содержит пять компонент:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} V_r(t) \\ V_n(t) \\ r(t) \\ \beta(t) \\ m(t) \end{pmatrix} \quad (7)$$

Фазовый вектор в начальной точке траектории известен:

$$\mathbf{X}(0) = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]^T \quad (8)$$

Транспортная задача заключается в том, чтобы максимально быстро увеличить константу энергии оскулирующей орбиты до некоторого фиксированного значения, определяемого величиной гиперболического избытка скорости при старте от Земли $V_\infty(t_{01})$:

$$h(t_{01}) = [V_r(t_{01})]^2 + [V_n(t_{01})]^2 - \frac{2}{r(t_{01})} = [V_\infty(t_{01})]^2 \quad (9)$$

Единственным управлением в рассматриваемой задаче является программа по углу тангажа. Т.е. оптимизационная проблема заключается в нахождении такой программы по углу тангажа $\vartheta(t)$, при которой за минимальное время константа энергии оскулирующей орбиты увеличивается до некоторого заданного значения $[V_\infty(t_{01})]^2$.

Гамильтониан H задачи оптимального управления имеет вид:

$$H = \psi_{Vr} \cdot \left(\frac{P_{cus} \cdot \sin(\vartheta)}{m} - \frac{\mu_{Earth}}{r^2} + \frac{V_n^2}{r} \right) + \psi_{Vn} \cdot \left(\frac{P_{cus} \cdot \cos(\vartheta)}{m} - \frac{V_r \cdot V_n}{r} \right) + \psi_r \cdot V_r + \psi_\beta \cdot \frac{V_n}{r} - \psi_m \cdot \frac{P_{cus}}{w_{cus}} \quad (10)$$

где $\psi_{Vr}, \psi_{Vn}, \psi_r, \psi_\beta$ и ψ_m – непрерывные кусочно-гладкие функции (сопряжённые переменные к радиальной скорости, трансверсальной скорости, радиусу-вектору, полярному углу, массе КА соответственно).

Поскольку оптимальное управление может быть найдено из максимизации гамильтониана, то оптимальный закон управления по $\vartheta(t)$ может быть найден с использованием уравнения:

$$\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = 0 \quad (11)$$

Из последнего равенства вытекает, что:

$$\psi_{Vr} \cdot \cos(\vartheta) - \psi_{Vn} \cdot \sin(\vartheta) = 0$$

После всех необходимых преобразований (включающих анализ знака второй производной от гамильтониана по $\vartheta(t)$), решение (11) находим в виде:

$$\begin{cases} \cos(\vartheta) = \frac{\psi_{Vn}}{\psi_V} \\ \sin(\vartheta) = \frac{\psi_{Vr}}{\psi_V} \end{cases} \quad (12)$$

где $\psi_V = \sqrt{\psi_{Vr}^2 + \psi_{Vn}^2}$ – величина сопряжённой переменной к скорости КА.

Воспользовавшись выражениями (12), получим, что тяга ХРБ направлена вдоль базис-вектора Лоудена $\Psi_V = [\psi_{Vr} \quad \psi_{Vn}]^T$.

В рамках принципа максимума Понтрягина с учётом соотношений (12) уравнения движения транспортной системы на этапе разгона с опорной орбиты Земли необходимо дополнить следующими соотношениями, описывающими изменение сопряжённых переменных вдоль траектории полёта (соотношения приведены в безразмерной форме):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi_{Vr}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial V_r} = \psi_{Vn} \cdot \frac{V_n}{r} - \psi_r \\ \frac{d\psi_{Vn}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial V_n} = -2 \cdot \psi_{Vr} \cdot \frac{V_n}{r} + \psi_{Vn} \cdot \frac{V_r}{r} \\ \frac{d\psi_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial V_r} = \psi_{Vr} \cdot \left(\frac{V_n^2}{r^2} - \frac{2}{r^3} \right) - \psi_{Vn} \cdot \frac{V_r \cdot V_n}{r^2} \\ \frac{d\psi_\beta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \beta} = 0 \\ \frac{d\psi_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial m} = \frac{P_{cus}}{m^2} \cdot \psi_V \end{array} \right. \quad (13)$$

Учитывая, что никаких ограничений на угловую дальность полёта не рассматривается (угол β не входит в единственное ограничение (9) в конечной точке траектории), сопряжённая к угловой дальности переменная в конечной точке траектории перелёта равна нулю $\psi_\beta(t_{01}) = 0$. Так как в соответствии с равенством (13) производная от ψ_β по времени равна нулю, то эта сопряжённая переменная на всей траектории перелёта тождественно равна нулю и может быть исключена из анализа.

В связи с тем, что система (5) автономна, то гамильтониан H вдоль всей рассматриваемой траектории постоянен и равен нулю. Из равенства гамильтониана нулю в начальной точке траектории перелёта при старте с круговой околоземной орбиты можно получить соотношение, связывающее сопряжённую к массе транспортной космической системы переменную и величину базис-вектора в начальной точке траектории:

$$\psi_m(0) = \frac{P_{cus}}{m(0)} \cdot \psi_V(0) \quad (14)$$

где $\psi_m(0)$ – величина сопряжённой к массе переменной в начальной точке траектории;

$\psi_V(0)$ – сопряжённая переменная к величине скорости транспортной космической системы в начальной точке траектории.

Зная $\psi_m(0)$, можно вычислить величину $\psi_V(0)$. Тогда соотношения для сопряжённых переменных к радиальной $\psi_{Vr}(0)$ и трансверсальной $\psi_{Vn}(0)$

компонентам скорости в начальной точке траектории перелёта можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\psi_{Vr}(0) &= \psi_V(0) \cdot \sin(\vartheta_0) \\ \psi_{Vn}(0) &= \psi_V(0) \cdot \cos(\vartheta_0)\end{aligned}\quad (15)$$

где ϑ_0 – угол тангажа в начальной точке траектории.

Воспользовавшись принципом максимума Понтрягина, уравнения оптимального движения КА можно записать в виде:

$$\left\{ \begin{aligned}\frac{dV_r}{dt} &= \frac{P_{cus}}{m} \cdot \frac{\psi_{Vr}}{\psi_V} - \frac{1}{r^2} + \frac{V_n^2}{r} \\ \frac{dV_n}{dt} &= \frac{P_{cus}}{m} \cdot \frac{\psi_{Vn}}{\psi_V} - \frac{V_r \cdot V_n}{r} \\ \frac{dr}{dt} &= V_r \\ \frac{d\beta}{dt} &= \frac{V_n}{r} \\ \frac{dm}{dt} &= -\frac{P_{cus}}{w_{cus}} \\ \frac{d\psi_{Vr}}{dt} &= \psi_{Vn} \cdot \frac{V_n}{r} - \psi_r \\ \frac{d\psi_{Vn}}{dt} &= -2 \cdot \psi_{Vr} \cdot \frac{V_n}{r} + \psi_{Vn} \cdot \frac{V_r}{r} \\ \frac{d\psi_r}{dt} &= \psi_{Vr} \cdot \left(\frac{V_n^2}{r^2} - \frac{2}{r^3} \right) - \psi_{Vn} \cdot \frac{V_r \cdot V_n}{r^2} \\ \frac{d\psi_\beta}{dt} &= 0 \\ \frac{d\psi_m}{dt} &= \frac{P_{cus}}{m^2} \cdot \psi_V\end{aligned}\right. \quad (16)$$

Система уравнений (16) записана в безразмерном виде:

- за единицу расстояния принята величина радиуса-вектора транспортной космической системы на опорной околоземной орбите (6571 км);
- за единицу массы принята масса транспортной системы на опорной круговой орбите;
- за единицу скорости принята местная круговая скорость на высоте 200 км над поверхностью Земли;

- за единицу ускорения принято отношение гравитационного параметра Земли к квадрату единицы расстояния;

- за единицу тяги принято произведение единичной массы на единичное ускорение.

Оптимизация траектории движения транспортной космической системы при старте с околоземной орбиты сводится к двухточечной краевой задаче. Неизвестными параметрами краевой задачи являются:

$$\psi_m(0), \vartheta_0, \psi_r(0), t_{01} \quad (17)$$

$\psi_r(0)$ – сопряжённая к радиусу-вектору транспортной системы переменная в начальной точке траектории.

Система дифференциальных уравнений (16) должна удовлетворять левым граничным условиям (старт с опорной орбиты Земли):

$$\begin{pmatrix} V_r(0) \\ V_n(0) - 1 \\ r(0) - 1 \\ \beta(0) \\ m(0) - 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (18)$$

и правым граничным условиям:

$$\begin{pmatrix} (V_r(t_{01}))^2 + (V_n(t_{01}))^2 - \frac{2}{r(t_{01})} - (V_\infty(t_{01}))^2 \\ \psi_{Vr}(t_{01}) - \psi_r(t_{01}) \cdot V_r(t_{01}) \cdot (r(t_{01}))^2 \\ \psi_{Vn}(t_{01}) - \psi_r(t_{01}) \cdot V_n(t_{01}) \cdot (r(t_{01}))^2 \\ \psi_m(t_{01}) - 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (19)$$

где $V_\infty(t_{01})$ – величина гиперболического избытка скорости КА на отлётной от Земли траектории (после окончания работы двигателя ХРБ);

$V_r(t_{01}), V_n(t_{01})$ – радиальная и трансверсальная компоненты скорости транспортной космической системы в конечной точке траектории (в момент выключения двигателя ХРБ);

$r(t_{01})$ – величина радиуса-вектора в конечной точке траектории;

$\psi_{Vr}(t_{01}), \psi_{Vn}(t_{01}), \psi_r(t_{01}), \psi_m(t_{01})$ – сопряжённые переменные к фазовым характеристикам в конечной точке траектории.

Из соотношений (18) следует, что:

- на круговой опорной орбите Земли радиальная компонента скорости равна нулю;
- трансверсальная компонента скорости равна местной круговой скорости;
- модуль радиуса-вектора соответствует величине радиуса-вектора транспортной космической системы на опорной околоземной орбите:

$$r(0) = 6571 \text{ км}$$

- полярный угол равен нулю в начальной точке на этапе разгона;
- масса соответствует массе транспортной космической системы на опорной орбите:

$$m(0) = 8200 \text{ кг}$$

Смысл равенств из системы (19) такой:

- константа энергии в конечной точке рассматриваемой траектории равна квадрату величины гиперболического избытка скорости КА;
- второе и третье условия соответствуют условиям трансверсальности;
- в конечной точке траектории должно выполняться условие $\psi_m(t_{01}) \geq 0$ (условие оптимальности, связанное с максимизацией массы КА в конечной точке траектории).

Двухточечная краевая задача сформулирована. Её решение предполагает для конкретного значения величины гиперболического избытка скорости найти такие 4 неизвестных параметра краевой задачи $(\psi_m(0), \vartheta_0, \psi_r(0), t_{01})$, при которых выполняются 4 краевые условия (19).

Ниже приведены результаты решения сформулированной краевой задачи для диапазона гиперболических избытков скорости 1200...1500 м/с.

На рисунке 2.1 представлена зависимость массы КА после отделения ХРБ «Фрегат» (она равна начальной массе КА на гелиоцентрическом перелёте после выхода из окрестности Земли) от величины гиперболического избытка скорости при старте с околоземной орбиты. Эта зависимость представляет собой монотонно убывающую функцию.

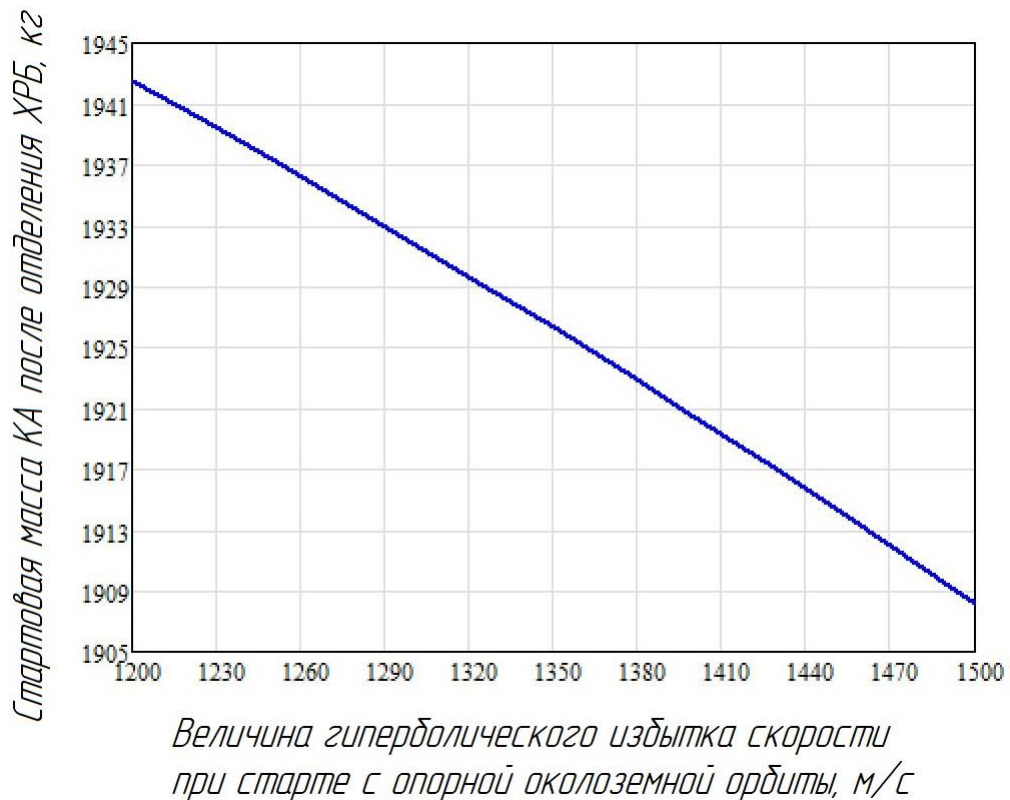


Рисунок 2.1 – Зависимость массы КА после отделения ХРБ «Фрегат» от величины гиперболического избытка скорости

Некоторые характеристики траектории геоцентрической траектории транспортной космической системы при старте с околоземной орбиты представлены в таблице 3. В первом столбце указаны величины гиперболического избытка скорости с шагом в 25 м/с, во втором столбце – длительность участка разгона в минутах. Третий и четвёртый столбцы соответствуют массе топлива ХРБ, необходимого для реализации поставленной транспортной задачи, и массе космической транспортной системы (КА+ХРБ) после выработки топлива ХРБ. В последнем столбце указана масса КА $m(t_0)$ после отделения ХРБ:

$$m(t_0) = m_{SC}(t_{01}) - m_{constr} \quad (20)$$

где $m_{SC}(t_{01})$ – масса космической транспортной системы в конечной точке траектории этапа разгона (до отделения ХРБ);

$m_{constr} = 970$ кг - конечная масса конструкции ХРБ, включая невыработанные остатки топлива.

Таблица 3 – Основные характеристики траектории на этапе разгона

Величина гиперболического избытка скорости, м/с	Длительность этапа разгона, минуты	Затрачиваемая масса топлива ХРБ, кг	Масса космической транспортной системы после выработки топлива, кг	Масса КА после отделения ХРБ, кг
1	2	3	4	5
1200	14,5845	5287,448	2912,552	1942,552
1225	14,5917	5290,035	2909,965	1939,965
1250	14,599	5292,673	2907,372	1937,372
1275	14,6064	5295,361	2904,639	1934,639
1300	14,6139	5298,099	2901,901	1931,901
1325	14,6216	5300,89	2899,113	1929,113
1350	14,6294	5303,724	2896,276	1926,276
1375	14,6374	5306,612	2893,388	1923,388
1400	14,6455	5309,548	2890,452	1920,452
1425	14,6537	5312,534	2887,466	1917,466
1450	14,662	5315,569	2884,431	1914,431
1475	14,671	5318,652	2881,348	1911,348
1500	14,6793	5321,784	2878,216	1908,216

Показанная на рисунке 2.1 масса КА после отделения ХРБ (начальная масса КА на гелиоцентрическом перелёте после старта от Земли), как функция величины гиперболического избытка скорости относительно Земли, хорошо аппроксимируется кубическим многочленом вида:

$$m(V_{\infty}) = a_0 + a_1 \cdot V_{\infty} + a_2 \cdot (V_{\infty})^2 + a_3 \cdot (V_{\infty})^3 \quad (21)$$

где $a_0 = 2003,7006$ кг;

$$a_1 = 0,00342101 \frac{\text{кг} \cdot \text{с}}{\text{м}};$$

$$a_2 = -4,7713 \cdot 10^{-5} \frac{\text{кг} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^2};$$

$$a_3 = -1,9950 \cdot 10^{-9} \frac{\text{кг} \cdot \text{с}^3}{\text{м}^3}.$$

Точность аппроксимации в рассматриваемом диапазоне гиперболических избытков скорости порядка $2 \cdot 10^{-5}$ кг. Приведённая функция использовалась для вычисления производной от массы КА в начале гелиоцентрического перелёта при старте от Земли по своему аргументу (величине гиперболического избытка скорости). Такая производная входит в условие оптимальности (трансверсальности) рассматриваемой задачи сквозной оптимизации транспортной системы с комбинированной двигательной установкой. Эта производная вычислялась с использованием следующего равенства:

$$\frac{\partial m(V_\infty)}{\partial V_\infty} = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot V_\infty + 3 \cdot a_3 \cdot (V_\infty)^2 \quad (22)$$

Для оценки точности приведённого выражения производной массы КА по величине гиперболического избытка скорости эта производная была вычислена с использованием метода центральных разностей для нескольких точек рассматриваемого диапазона гиперболических избытков скоростей. Для этого решалась краевая задача принципа максимума для нескольких значений величин гиперболических избытков скорости (первое условие в векторе граничных условий (19)). Приращение величины гиперболического избытка скорости рассматривалось в диапазоне $0,01 \dots 1$ м/с и выбиралось так, чтобы исключить вычислительные ошибки.

Точность определения производных оказалась довольно высокой. Так для значения гиперболического избытка скорости 1400 м/с анализируемая производная была равна $-0,1184461 \frac{\text{кг} \cdot \text{с}}{\text{м}}$. Можно утверждать, что шесть значащих цифр в этом числе корректны, а относительная точность производной около $4,6 \cdot 10^{-4} \%$.

2.3 Математическая модель движения КА на гелиоцентрическом участке

При описании гелиоцентрического движения КА используется прямоугольная гелиоцентрическая эклиптическая система координат (ГЭСК) для эпохи J2000.0. Для определения положений астрономических объектов используются полиномы Чебышева. Коэффициенты этих полиномов хранятся в

текстовых файлах ASCII, служат основой для вычисления положения и скорости небесных тел.

Рассматривается управляемое движение материальной точки (КА) относительно ГЭСК, которое осуществляется за счёт реактивной тяги:

$$\mathbf{P} = P \cdot \mathbf{f}^0, \quad (23)$$

где \mathbf{P} – вектор тяги;

P – модуль вектора тяги;

\mathbf{f}^0 – орт вектора тяги.

Положение вектора тяги описывается в ГЭСК углами α_P (прямое восхождение) и δ_P (склонение). Предполагаем, что на углы α_P и δ_P накладываются следующие ограничения:

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha_P < 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \delta_P \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (24)$$

Орт вектора тяги можно представить в виде:

$$\mathbf{f}^0 = [\cos \alpha_P \cdot \cos \delta_P \quad \cos \alpha_P \cdot \sin \delta_P \quad \sin \alpha_P]^T, \quad (25)$$

В качестве выбираемых управлений (компонент вектора управлений) на гелиоцентрических участках траектории рассматриваются следующие функции:

1. Функция тяги двигателя $\delta(t)$. Это скалярная функция. Она определяет последовательность включений/выключений двигателя. При этом ограничения на количество и длительность периодов работы двигательной установки не накладываются.

2. Орт вектора тяги \mathbf{f}^0 . Он определяет ориентацию вектора тяги на активных участках гелиоцентрического перелёта.

Состояние КА в любой момент своего движения определяется комплексом фазовых координат:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{V}(t) \\ m_{SC}(t) \end{pmatrix} \quad (26)$$

где $\mathbf{X}(t)$ – фазовый вектор состояния КА;

$\mathbf{r}(t) = [r_x; r_y; r_z]^T$ - гелиоцентрический радиус-вектор КА;

$\mathbf{V}(t) = [V_x; V_y; V_z]^T$ – вектор гелиоцентрической скорости КА;
 $m_{SC}(t)$ – масса КА.

Изменение фазовых координат по времени описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{bmatrix} \frac{dr}{dt} \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt} \\ \frac{dm_{SC}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ -\frac{\mu}{r^3} \cdot \mathbf{r} + \frac{\delta}{m_{SC}} \cdot P \cdot \mathbf{f}^0 \\ -\delta \cdot \frac{P}{w} \end{bmatrix} \quad (27)$$

где $\mu = 1,32712440018 \cdot 10^{11} \frac{\text{км}^3}{\text{с}^2}$ – гравитационный параметр Солнца;

δ – функция тяги ЭРДУ;

w – скорость истечения рабочего тела ЭРДУ.

Предполагается существование оптимальной траектории выведения КА с кусочно-непрерывным управлением. Далее воспользовавшись принципом максимума, составим систему уравнений оптимального движения КА на гелиоцентрической траектории.

Пусть $\tilde{\mathbf{X}}(t) = [\tilde{\mathbf{r}}(t) \quad \tilde{\mathbf{V}}(t) \quad m_{SC}(t)]^T$ – фазовые координаты КА, соответствующие оптимальной траектории КА в рассматриваемой задаче при $t \in [t_1, t_f]$. Для оптимальности рассматриваемой траектории и соответствующего управления $\mathbf{u}_{opt}(t)$ необходимо существование такой сопряжённой вектор-функции $\boldsymbol{\psi}(t) = [\boldsymbol{\psi}_r(t) \quad \boldsymbol{\psi}_v(t) \quad \psi_m(t)]^T$, что на оптимальной траектории движения КА управление $\mathbf{u}_{opt}(t)$ максимизирует функцию Гамильтона $H[\tilde{\mathbf{X}}(t), \mathbf{u}_{opt}(t), \boldsymbol{\psi}(t)]$:

$$H[\tilde{\mathbf{X}}(t), \mathbf{u}_{opt}(t), \boldsymbol{\psi}(t)] = \max_{\mathbf{u}} H[\tilde{\mathbf{X}}(t), \mathbf{u}_{opt}(t), \boldsymbol{\psi}(t)] \quad (28)$$

Применительно к анализируемой задаче функцию Гамильтона можно представить в виде:

$$H = \boldsymbol{\psi}_r^T \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\psi}_v^T \cdot \left(\frac{\delta}{m_{SC}} \cdot P \cdot \mathbf{f}^0 - \frac{\mu}{r^3} \cdot \mathbf{r} \right) - \psi_m \cdot \left(\delta \cdot \frac{P}{w} \right) \quad (29)$$

где $\boldsymbol{\psi}_r = [\psi_{r_x} \quad \psi_{r_y} \quad \psi_{r_z}]^T$ – сопряжённые переменные к радиусу-вектору КА;

$\Psi_V = [\psi_{Vx} \quad \psi_{Vy} \quad \psi_{Vz}]^T$ – сопряжённые переменные к скорости КА;

ψ_m – сопряжённая переменная к массе КА.

Применяя условие (28) максимума функции H по $\mathbf{u}(t)$, выразим оптимальное управление $\mathbf{u}_{opt}(t)$. Для этого воспользуемся соотношениями:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \alpha_P} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \delta_P} = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{-\delta}{m} \cdot P \cdot (\psi_{Vx} \cdot \sin \alpha_P \cdot \cos \delta_P + \psi_{Vy} \cdot \sin \alpha_P \cdot \sin \delta_P - \psi_{Vz} \cdot \cos \alpha_P) = 0 \\ \frac{\delta}{m} \cdot P \cdot (-\psi_{Vx} \cdot \cos \alpha_P \cdot \sin \delta_P + \psi_{Vy} \cdot \cos \alpha_P \cdot \cos \delta_P) = 0 \end{cases} \quad (30)$$

Проведём анализ второй производной функции Гамильтона по $\mathbf{u}(t)$ и после всех необходимых преобразований получаем законы оптимального управления.

Для орта вектора тяги $\mathbf{f}_{opt}^0 = [f_{x\ opt}^0 \quad f_{y\ opt}^0 \quad f_{z\ opt}^0]^T$ этот закон можно представить в виде:

$$\begin{cases} f_{x\ opt}^0 = \cos(\alpha_P) \cdot \cos(\delta_P) = \frac{\psi_{Vx}}{\sqrt{\psi_{Vx}^2 + \psi_{Vy}^2 + \psi_{Vz}^2}} \\ f_{y\ opt}^0 = \cos(\alpha_P) \cdot \sin(\delta_P) = \frac{\psi_{Vy}}{\sqrt{\psi_{Vx}^2 + \psi_{Vy}^2 + \psi_{Vz}^2}} \\ f_{z\ opt}^0 = \sin(\alpha_P) = \frac{\psi_{Vz}}{\sqrt{\psi_{Vx}^2 + \psi_{Vy}^2 + \psi_{Vz}^2}} \end{cases} \quad (31)$$

Отсюда следует, что:

$$\mathbf{f}_{opt}^0 = \frac{\Psi_V}{\psi_V} \quad (32)$$

Анализ приведённого равенства позволяет утверждать, что тяга двигателя (когда двигатель включен) должна быть направлена вдоль базис-вектора Лоудена Ψ_V .

Для функции тяги $\delta^{opt}(t)$ оптимальный закон, определяющий включен двигатель или выключен, оказывается таким:

$$\delta^{opt}(t) = \begin{cases} 1, & \psi(t) > 0 \\ 0, & \psi(t) \leq 0 \end{cases} \quad (33)$$

где $\delta^{opt}(t)$ – оптимальная величина функции тяги;

ψ – функция переключения ЭРДУ КА (коэффициент при функции тяги, линейно входящей в гамильтониан). Эта функция может быть записана в виде:

$$\psi(t) = \frac{\psi_V(t)}{m_{sc}(t)} - \frac{\psi_m(t)}{w} \quad (34)$$

Из равенства (33) следует, что маршевый двигатель КА может быть только включен или выключен. Отметим также, что на активных участках функция тяги равна 1, а на пассивных участках она равна 0.

Принципиально на каком-то участке траектории перелёта может существовать особое управление. На этом участке траектории функция переключения постоянна и равна нулю ($\psi(t) = 0$). Гамильтониан на этом участке траектории не зависит от величины тяги, поэтому из условия максимума гамильтониана найти оптимальную величину тяги невозможно. Это сложный случай, который в большинстве работ не рассматривается. В рамках данной диссертационной работы особое управление не анализировалось. Некоторым оправданием такого подхода к анализу задачи можно считать то обстоятельство, что рассматривается нерегулируемый ракетный двигатель, не допускающий дросселирование. При дальнейшем анализе воспользуемся соотношениями, которые соответствуют системе дифференциальных уравнений оптимального движения КА:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \Psi_r} \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \Psi_V} \\ \frac{dm}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_m} \\ \frac{d\Psi_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \\ \frac{d\Psi_V}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{V}} \\ \frac{d\psi_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial m} \end{array} \right. \quad (35)$$

В результате проведённого анализа получаем, что систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую движение КА с нерегулируемым двигателем по оптимальной гелиоцентрической траектории, можно записать в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V} \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{r^3} \cdot \mathbf{r} + \delta^{opt} \cdot \frac{P}{m_{SC}} \cdot \frac{\Psi_V}{\psi_V} \\ \frac{dm_{SC}}{dt} = -\delta^{opt} \cdot \frac{P}{w} \\ \frac{d\Psi_r}{dt} = \frac{\Psi_V}{r^3} - \frac{3 \cdot (\Psi_V^T; \mathbf{r})}{r^5} \cdot \mathbf{r} \\ \frac{d\Psi_V}{dt} = -\Psi_r \\ \frac{d\psi_m}{dt} = \psi_V \cdot \delta^{opt} \cdot \frac{P}{m_{SC}^2} \end{array} \right. \quad (36)$$

С целью уменьшения погрешности численного интегрирования уравнений движения КА система уравнений (36) записана в безразмерном виде. За единицу расстояния принята астрономическая единица (а.е.), за единицу массы – масса транспортной системы на опорной круговой орбите, за единицу скорости – гелиоцентрическая местная круговая скорость на расстоянии 1 а.е. от Солнца, за единицу ускорения – отношение гравитационного параметра Солнца к квадрату единицы расстояния, за единицу тяги – произведение единичной массы на единичное ускорение.

Рассматриваемая математическая модель позволяет полностью описать оптимальное движение КА в ГЭСК в рамках принятых предположений (см. 1.4.3).

2.4 Математическая модель движения КА на пассивных участках гелиоцентрической траектории

Анализ движения КА для многоточечных краевых задач при помощи численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (36) существенно сказывается на длительности вычислительного процесса. Так как на пассивных участках траектории гелиоцентрического перелёта записанная выше система дифференциальных уравнений аналитически интегрируется, а пассивные участки на рассматриваемых в работе схемах перелёта имеют большую продолжительность и протяжённость (например, резонансные гелиоцентрические перелёты являются полностью пассивными), то было использовано аналитическое решение. Для его получения вводится в рассмотрение новый фазовый вектор и используются канонические преобразования, которые не нарушают гамильтоновой формы уравнений движения [25].

Целесообразно перейти к анализу движения КА, рассматривая классические элементы орбиты КА в качестве нового фазового вектора. Обозначим этот набор фазовых переменных как вектор \mathbf{Y} . Т.е. следует перейти от фазового вектора \mathbf{X} , состоящего из компонент радиуса-вектора и вектора скорости КА к фазовому вектору \mathbf{Y} , состоящему из элементов орбиты КА. В новых переменных уравнения движения КА имеют более простую структуру и её интегрирование несколько проще исходной системы (36).

Между фазовыми переменными \mathbf{X} (компонентами радиуса-вектора КА $\mathbf{r}_{SC}(t_i)$ и компонентами вектора скорости КА $\mathbf{V}_{SC}(t_i)$), сопряжёнными к компонентам этого вектора переменными $\Psi_r(t_i)$ и $\Psi_v(t_i)$, элементами кеплеровской орбиты, а также сопряжёнными к ним переменными в рамках задачи двух тел существует взаимно однозначное соответствие. Описывающие это соответствие равенства будут использованы для нахождения сопряжённых к компонентам вектора фазовых переменных \mathbf{X} по известным компонентам вектора

фазовых переменных Y . Эти равенства были получены с использованием инвариантности канонических преобразований в гамильтоновой механике (система, описывающая оптимальное движение КА (36), гамильтонова).

Рассмотрим конкретный полный набор независимых первых интегралов для системы дифференциальных уравнений, описывающих изменение фазовых переменных в задаче двух тел – первые 6 скалярных уравнений системы (36) для участка пассивного движения КА. Общий вид этих первых интегралов можно записать так:

$$\left\{ \begin{array}{l} p(r_x; r_y; r_z; V_x; V_y; V_z) = C_1 \\ e(r_x; r_y; r_z; V_x; V_y; V_z) = C_2 \\ i(r_x; r_y; r_z; V_x; V_y; V_z) = C_3 \\ \Omega(r_x; r_y; r_z; V_x; V_y; V_z) = C_4 \\ \omega(r_x; r_y; r_z; V_x; V_y; V_z) = C_5 \\ n \cdot t_\pi(r_x; r_y; r_z; V_x; V_y; V_z) = C_6 \end{array} \right. \quad (37)$$

где p, e, i, Ω, ω – фазовые переменные элементов орбиты КА (фокальный параметр, эксцентриситет, наклонение, долгота восходящего узла, аргумент перигелия соответственно);

n – среднее движение КА;

t_π – время прохождения перигелия на гелиоцентрической орбите;

C_k – константы интегрирования, $k = 1, \dots, 6$.

При записи последнего уравнения системы (37) используется уравнение Кеплера, из которого находится произведение среднего движения КА на дату прохождения КА перигелия своей орбиты. Так как в рамках настоящей работы гелиоцентрические орбиты КА предполагаются эллиптическими, то можно записать:

$$n \cdot t_\pi = n \cdot t - E + e \cdot \sin(E) \quad (38)$$

где t и E – некоторое время и эксцентрисическая аномалия в этот момент времени.

Вводимый новый фазовый вектор рассматриваем состоящим из приведённых в равенстве (37) элементов орбиты:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} p \\ e \\ i \\ \Omega \\ \omega \\ n \cdot t_{\pi} \end{pmatrix} \quad (39)$$

Проанализируем задачу в следующей постановке: на некоторой дуге эллиптической траектории КА, рассматриваемой в рамках задачи двух тел, есть две точки (для определённости начальная и конечная точки). В начальной точке этой дуги известны время t_0 , вектор фазовых переменных $\mathbf{X}(t_0)$ и сопряжённый ему вектор $\Psi_{\mathbf{X}}(t_0) = [\psi_{r_x} \ \psi_{r_y} \ \psi_{r_z} \ \psi_{v_x} \ \psi_{v_y} \ \psi_{v_z}]^T$. В конечной точке дуги известны время t_f и вектор фазовых переменных $\mathbf{X}(t_f)$. Требуется найти вектор сопряжённых переменных в конечной точке рассматриваемой дуги траектории $\Psi_{\mathbf{X}}(t_f)$.

Кроме нового фазового вектора \mathbf{Y} введём в рассмотрение и сопряжённый к нему вектор $\Psi_{\mathbf{Y}}$. Так как вектор \mathbf{Y} не меняется на рассматриваемой траектории, то и сопряжённый к нему вектор $\Psi_{\mathbf{Y}}$ так же является постоянным вектором на рассматриваемой дуге траектории КА. Обозначим его как вектор \mathbf{D} ($\mathbf{D} = \Psi_{\mathbf{Y}}$).

Используется следующий алгоритм решения сформулированной задачи.

Сопряжённые переменные $\Psi_{\mathbf{X}_k}$ к компонентам фазового вектора \mathbf{X}_k в любой точке рассматриваемой траектории (в любой момент времени t) можно определить, зная компоненты D_q вектора \mathbf{D} , используя следующие равенства:

$$\Psi_{\mathbf{X}_k}(t) = \sum_{q=1}^6 \frac{\partial Y_q}{\partial X_k}(t) \cdot D_q \quad (40)$$

где Y_q – компоненты фазового вектора \mathbf{Y} ;

$\frac{\partial Y_q}{\partial X_k}(t)$ – частная производная от q -ой компоненты вектора \mathbf{Y} по k -ой компоненте вектора \mathbf{X} в рассматриваемой точке траектории.

Матричная форма записи последней системы равенств имеет вид:

$$\Psi_{\mathbf{X}}(t) = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}}(t) \cdot \mathbf{D} \quad (41)$$

В приведённом равенстве $\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}}(t)$ - квадратная матрица размерности 6. Её j -ая строка содержит производные от компонент вектора \mathbf{Y} по i -ой компоненте вектора \mathbf{X} для любой рассматриваемой даты t . Т.е. элемент этой матрицы, расположенной в i -ой строке и j -ом столбце матрицы, является производной от j -ой компоненты вектора \mathbf{Y} по i -ой компоненте вектора \mathbf{X} для даты t .

Матрица $\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}}(t)$ является невырожденной, так как система равенств (37) - это набор независимых первых интегралов.

Используя равенство (40) для начальной точки траектории, можно найти вектор \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \left(\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}}(t_0) \right)^{-1} \cdot \Psi_{\mathbf{X}}(t_0) \quad (42)$$

Сопряжённые переменные к различным наборам фазовых переменных связаны с вариациями этих переменных следующим равенством:

$$\sum_{k=1}^6 \Psi_{\mathbf{X}_k} \cdot \delta \mathbf{X}_k = \sum_{q=1}^6 \Psi_{\mathbf{Y}_q} \cdot \delta \mathbf{Y}_q \quad (43)$$

где $\delta \mathbf{X}_k$ – вариации компонент вектора фазовых переменных \mathbf{X} ;

$\delta \mathbf{Y}_q$ - вариации компонент вектора фазовых переменных \mathbf{Y} ;

$\Psi_{\mathbf{Y}_q}$ – сопряжённые переменные к компонентам вектора, сопряжённого к вектору фазовых переменных \mathbf{Y} .

Вариации компонент фазового вектора \mathbf{Y} могут быть записаны так:

$$\delta \mathbf{Y}_q = \sum_{k=1}^6 \frac{\partial \mathbf{Y}_q}{\partial \mathbf{X}_k} \cdot \delta \mathbf{X}_k \quad (44)$$

Используя последнее равенство, равенство (43) можно представить в виде:

$$\sum_{k=1}^6 \Psi_{\mathbf{X}_k} \cdot \delta \mathbf{X}_k = \sum_{k=1}^6 \left(\sum_{q=1}^6 \Psi_{\mathbf{Y}_q} \cdot \frac{\partial \mathbf{Y}_q}{\partial \mathbf{X}_k} \right) \cdot \delta \mathbf{X}_k \quad (45)$$

Матричная запись последнего равенства такова:

$$\Psi_{\mathbf{X}}^T \cdot \delta \mathbf{X} = \Psi_{\mathbf{Y}}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \delta \mathbf{X} \quad (46)$$

В последнем равенстве используется матрица:

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial X_2} & \frac{\partial Y_1}{\partial X_3} & \frac{\partial Y_1}{\partial X_6} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} & \frac{\partial Y_2}{\partial X_3} & \frac{\partial Y_2}{\partial X_6} \\ \frac{\partial Y_3}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_3}{\partial X_2} & \frac{\partial Y_3}{\partial X_3} & \frac{\partial Y_3}{\partial X_6} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial Y_6}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_6}{\partial X_2} & \frac{\partial Y_6}{\partial X_3} & \frac{\partial Y_6}{\partial X_6} \end{pmatrix} \quad (47)$$

Матрица (47) - квадратная матрица размерности 6. Элемент, расположенный в i -ой строке j -ом столбце равен производной от i -ой компоненты вектора \mathbf{Y} по j -ой компоненте вектора \mathbf{X} . Анализ равенства (46) даёт возможность получить выражение для определения вектора, сопряжённого к вектору фазовых переменных \mathbf{X} как функцию вектора, сопряжённого к вектору фазовых переменных \mathbf{Y} :

$$\Psi_{\mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{Y}^T}{\partial \mathbf{X}} \cdot \Psi_{\mathbf{Y}} \quad (48)$$

Для анализируемого состава векторов \mathbf{X} и \mathbf{Y} последнее равенство имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \psi_{r_x} \\ \psi_{r_y} \\ \psi_{r_z} \\ \psi_{V_x} \\ \psi_{V_y} \\ \psi_{V_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dp}{dV_x} & \frac{de}{dV_x} & \frac{di}{dV_x} & \frac{d\Omega}{dV_x} & \frac{d\omega}{dV_x} & \frac{d(n \cdot t_\pi)}{dV_x} \\ \frac{dp}{dV_y} & \frac{de}{dV_y} & \frac{di}{dV_y} & \frac{d\Omega}{dV_y} & \frac{d\omega}{dV_y} & \frac{d(n \cdot t_\pi)}{dV_y} \\ \frac{dp}{dV_z} & \frac{de}{dV_z} & \frac{di}{dV_z} & \frac{d\Omega}{dV_z} & \frac{d\omega}{dV_z} & \frac{d(n \cdot t_\pi)}{dV_z} \\ \frac{dp}{dr_x} & \frac{de}{dr_x} & \frac{di}{dr_x} & \frac{d\Omega}{dr_x} & \frac{d\omega}{dr_x} & \frac{d(n \cdot t_\pi)}{dr_x} \\ \frac{dp}{dr_y} & \frac{de}{dr_y} & \frac{di}{dr_y} & \frac{d\Omega}{dr_y} & \frac{d\omega}{dr_y} & \frac{d(n \cdot t_\pi)}{dr_y} \\ \frac{dp}{dr_z} & \frac{de}{dr_z} & \frac{di}{dr_z} & \frac{d\Omega}{dr_z} & \frac{d\omega}{dr_z} & \frac{d(n \cdot t_\pi)}{dr_z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_e \\ \psi_{inc} \\ \psi_\Omega \\ \psi_\omega \\ \psi_{n \cdot t_\pi} \end{pmatrix} \quad (49)$$

Для исследования изменения сопряжённых переменных на пассивном участке движения КА в рамках задачи двух тел использован следующий подход. Предполагается, что известны все необходимые характеристики движения КА (фазовые и сопряжённые к ним переменные) в определённой точке траектории, например, начальной. Далее можно воспользоваться следующим порядком действий:

1. По известным параметрам движения КА ($\mathbf{r}_{SC}(t_i)$ и $\mathbf{V}_{SC}(t_i)$) в некоторый момент времени t_i вычисляются все необходимые элементы орбиты (компоненты вектора \mathbf{Y}). Для этого можно использовать выражения, приведённые в приложении к статье [41].

2. Воспользовавшись известными соотношениями задачи двух тел, определяем все производные, входящие в матрицу, используемую в равенстве (49), и саму матрицу.

3. Находим обратную матрицу к матрице, найденной в предыдущем пункте.

4. Подставив обратную матрицу в формулу (42), вычислим константы интегрирования сопряжённой системы $\mathbf{D}_q, q = 1 \dots 6$.

5. Находим радиус–вектор и скорость КА в конечной точке рассматриваемой траектории (например, при подлёте к планете для следующего гравитационного манёвра):

- в общем случае используются соотношения задачи двух тел;
- для случаев резонансных орбит с целым порядком резонанса фазовые переменные в конечной точке траектории равны фазовым переменным в начальной точке траектории;
- для случая π –резонанса требуется найти длину радиуса–вектора КА, его радиальную и трансверсальную компоненты скорости в конечной точке траектории, используя истинную аномалию конечной точки траектории, а затем использовать матрицу перехода от орбитальной к экваториальной системе координат.

6. Сопряжённые переменные к фазовым координатам в конечной точке траектории вычислить по соотношению (49).

Изложенный здесь подход для эллиптических орбит можно распространить на случай орбит других типов и получить соответствующие соотношения для сопряжённых переменных в зависимости от начальных условий вектора фазового состояния КА.

2.5 Математическая модель при описании движения КА при гравитационном манёвре

Использование гравитационных манёвров около естественных небесных тел позволяет значительно расширить область освоения Солнечной системы при имеющемся уровне развития космической техники. Дополнительное приращение скорости КА, получаемое за счёт орбитальной энергии планет при гравитационных манёврах, предоставляет возможность значительно изменить наклонение орбиты при существенной экономии энергетических затрат на перелёт. С целью увеличения наклонения гелиоцентрической орбиты КА предлагается включать в схему перелёта последовательность резонансных с орбитой планеты (Земли, Венеры, Меркурия) орбит КА. Допускается использовать, как традиционные целочисленные порядки резонанса, так и π -резонансные орбиты.

В настоящей работе делается акцент на формализацию задачи сквозной оптимизации межпланетного КА, использующего последовательность пассивных гравитационных манёвров. Т.е. речь идёт о том, что на пролётной гиперболе КА не включает маршевую двигательную установку.

2.5.1 Алгоритм определения параметров пассивного гравитационного манёвра, обеспечивающего гелиоцентрический перелёт планета–планета с угловой дальностью $2\pi \cdot k$ (k – целое положительное число)

В рамках метода грависфер нулевой протяжённости продолжительностью гравитационного манёвра пренебрегаем. Гравитационный манёвр рассматривается как мгновенное изменение вектора гелиоцентрической скорости КА.

Проведём анализ параметров гравитационного манёвра у некоторой планеты, обеспечивающего дальнейший перелёт КА по гелиоцентрической траектории планета–планета с угловой дальностью $2\pi \cdot k$ (k – целое положительное число). Такой гравитационный манёвр будем называть пассивным гравитационным манёвров с целым порядком резонанса, а орбиту КА после гравитационного манёвра с угловой дальностью, кратной $2 \cdot \pi$ – резонансной.

Возможные порядки резонансной гелиоцентрической орбиты КА с орбитой планеты:

1 : 1	2 : 1	3 : 1	3 : 2	4 : 3
-------	-------	-------	-------	-------

Допускается применение и других порядков резонансов, не указанных выше, однако, стоит учитывать длительность нахождения КА на гелиоцентрической орбите между двумя последовательными гравитационными манёврами. Длительность перелёта зависит от периода орбиты планеты.

Предполагаем, что дата гравитационного манёвра t_i и вектор гелиоцентрической скорости КА при подлёте к планете известны. Тогда гиперболический избыток скорости КА при подлёте к планете $\mathbf{V}_\infty(t_i^-)$ можно вычислить по формуле:

$$\mathbf{V}_\infty(t_i^-) = \mathbf{V}_{SC}(t_i^-) - \mathbf{V}_{planet}(t_i) \quad (50)$$

где $\mathbf{V}_{SC}(t_i^-)$ - гелиоцентрическая скорость КА при подлёте к планете;

$\mathbf{V}_{planet}(t_i)$ - гелиоцентрическая скорость планеты;

t_i^- - дата гравитационного манёвра при подлёте к планете;

$i = 1, \dots, N$ – порядковый номер гравитационного манёвра;

N – количество гравитационных манёвров в рамках рассматриваемой задачи сквозной оптимизации.

В момент пролёта планеты под действием её гравитационного поля гелиоцентрическая скорость КА изменится как по величине, так и по направлению. Вектор гелиоцентрической скорости КА после гравитационного манёвра у планеты находится как сумма гиперболического избытка скорости после гравитационного манёвра и гелиоцентрической скорости планеты:

$$\mathbf{V}_{SC}(t_i^+) = \mathbf{V}_\infty(t_i^+) + \mathbf{V}_{planet}(t_i) \quad (51)$$

где $\mathbf{V}_{SC}(t_i^+)$ - гелиоцентрическая скорость КА после гравитационного манёвра;

$\mathbf{V}_\infty(t_i^+)$ - гиперболический избыток скорости после гравитационного манёвра.

Введём понятие картинной плоскости гравитационного манёвра: это плоскость, проходящая через центр планеты и перпендикулярная вектору гиперболического избытка скорости при подлёте к планете $\mathbf{V}_\infty(t_i^-)$. Выбирая

произвольную точку в рассматриваемой картинной плоскости, получаем двухпараметрическое семейство пролётных гипербол. На рисунке 2.2 показана геометрия транспортной операции пассивного гравитационного манёвра.

На рисунке 2.2 показаны векторы гиперболического избытка скорости при подлёте к планете $V_{\infty}(t_i^-)$ и отлёте от неё $V_{\infty}(t_i^+)$ (векторы изображены зелёным цветом). Эти векторы принадлежат плоскости гравитационного манёвра, закрашенной голубым цветом. Картинная плоскость lCm расположена по нормали к вектору гиперболического избытка скорости при подлёте к планете. $C\mathbf{l}$ – единичный вектор линии узлов плоскости эклиптики XCY и картинной плоскости. $C\mathbf{m}$ – единичный вектор линии узлов картинной плоскости и плоскости гравитационного манёвра. На рисунке 2.2 угол β – угол между векторами гиперболического избытка скорости подлёта и отлёта от планеты, а γ – угол между ортами $C\mathbf{l}$ и $C\mathbf{m}$.

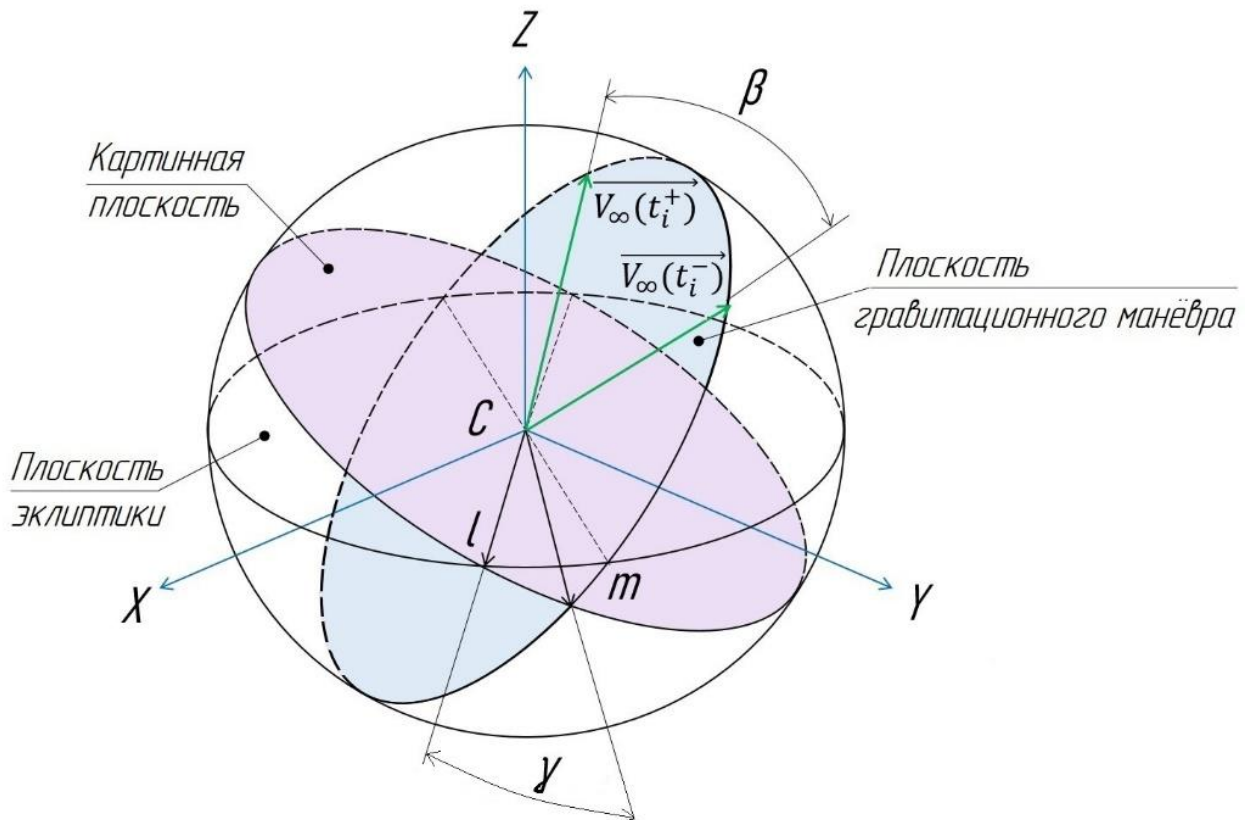


Рисунок 2.2 - Геометрия пассивного гравитационного манёвра

Согласно формуле (51) можно отметить, что угол поворота вектора гелиоцентрической скорости после гравитационного манёвра зависит от

гиперболического избытка скорости после манёвра, а тот, в свою очередь, зависит от перицентра пролётной гиперболы соотношением:

$$\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{1 + \frac{r_{\pi}^{planet} \cdot V_{\infty}(t_i^-)^2}{\mu_{planet}}} \quad (52)$$

где β – угол поворота асимптоты гиперболы;

r_{π}^{planet} – минимальный радиус пролёта КА у планеты (включает в себя средний радиус планеты);

μ_{planet} – гравитационный параметр планеты.

Максимально допустимый угол поворота вектора гиперболического избытка скорости при пассивном гравитационном манёвре β_{max} осуществляется на минимально допустимом радиусе перицентра пролётной гиперболы. Эту величину можно вычислить по формуле:

$$\beta_{max} = 2 \cdot \arcsin\left(1 + \frac{r_{\pi min}^{planet} \cdot V_{\infty}(t_i^-)^2}{\mu_{planet}}\right)^{-1} \quad (53)$$

где $r_{\pi min}^{planet} = r_{planet} + h_{min}$ – минимально допустимый радиус перицентра планетоцентрической орбиты КА;

r_{planet} – средний радиус планеты;

h_{min} – минимальная высота пролёта у планеты (минимальная высота пролёта Земли и Венеры при гравитационных манёврах принималась равной 400 км).

Эксцентриситет пролётной гиперболы как функции радиуса перицентра гиперболы может быть записан в виде:

$$e = 1 + \frac{r_{\pi}^{planet} \cdot V_{\infty}^2}{\mu_{planet}} \quad (54)$$

e – эксцентриситет пролётной гиперболы.

Воспользовавшись последним равенством, соотношение (52) можно переписать:

$$\beta = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{1}{e}\right) \quad (55)$$

Согласно соотношению (55) можем утверждать, что за счёт выбора r_{π}^{planet} и $V_{\infty}(t_i^-)$ можно изменять траекторию отлёта КА от планеты после гравитационного манёвра.

Схема поворота вектора гиперболического избытка скорости при пассивном гравитационном манёвре представлена на рисунке 2.3.

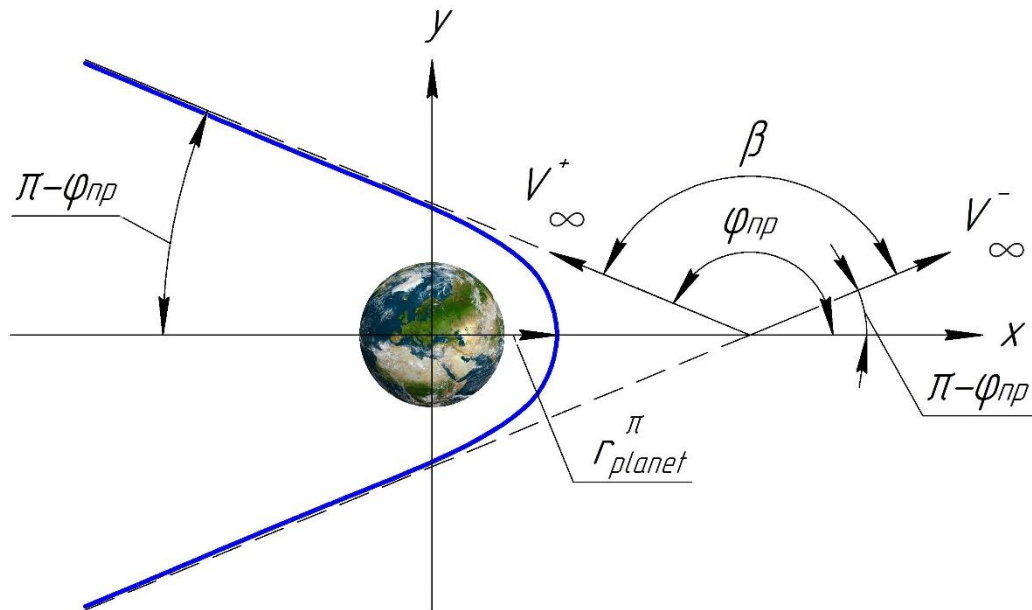


Рисунок 2.3 – Схема облёта планеты-вдоль гиперболы пролёта во время гравитационного манёвра

Одним из выбираемых параметров гравитационного манёвра рассматриваем угол β , который находится в диапазоне $[0; \beta_{max}]$. Вторым выбираемым параметром считаем угол γ (рисунок 2.2), фиксирующий поворот плоскости гиперболы пролёта вокруг вектора гиперболического избытка скорости при подлёте к планете. Отсчитываем угол γ от линии узлов картинной плоскости и плоскости эклиптики с началом в центре планеты. На угол, фиксирующий положение плоскости гиперболы гравитационного манёвра, не накладывается никаких ограничений: $\gamma \in [0; 2\pi)$.

При включении в схему полёта КА гравитационных манёвров следует учитывать несколько ограничений (условий), которые накладываются на пролётную гиперболу:

Условие 1. Так как на планетоцентрическом участке при совершении гравитационного манёвра не предполагается включения маршевой двигательной установки КА, то модуль вектора гиперболического избытка скорости остаётся постоянным:

$$V_{\infty}(t_i^-) - V_{\infty}(t_i^+) = 0, \quad (56)$$

где $V_{\infty}(t_i^-)$ – величина гиперболического избытка скорости при подлёте к планете;

$V_{\infty}(t_i^+)$ – величина гиперболического избытка скорости при отлёте от планеты.

Условие 2. Допускается осуществлять поворот вектора гиперболического избытка скорости на угол, меньший или равный некоторой максимальной величине $\beta_{i_{max}}$. Угол поворота асимптоты гиперболы при каждом гравитационном манёвре β_i не должен превышать максимально допустимого значения:

$$\beta_i - \beta_{i_{max}}(V_{\infty}(t_i^-)) \leq 0 \quad (57)$$

Условие 3. Гелиоцентрический радиус-вектор КА $\mathbf{r}_{SC}(t_i^-)$ при подлёте к планете равен радиусу-вектору планеты $\mathbf{r}_{planet}(t_i)$:

$$\mathbf{r}_{SC}(t_i^-) - \mathbf{r}_{planet}(t_i) = 0 \quad (58)$$

Зная вектор гиперболического избытка скорости при подлёте к планете $V_{\infty}(t_i^-)$ путём несложного аналитического соотношения, можно получить двухпараметрическое семейство векторов гиперболического избытка скорости после гравитационного манёвра:

$$\mathbf{V}_{\infty}(t_i^+) = \begin{pmatrix} V_{\infty x}(t_i^-) & -\frac{V_{\infty y}(t_i^-) \cdot V_{\infty}(t_i^-)}{V_{\infty xy}(t_i^-)} & -\frac{V_{\infty x}(t_i^-) \cdot V_{\infty z}(t_i^-)}{V_{\infty xy}(t_i^-)} \\ V_{\infty y}(t_i^-) & \frac{V_{\infty x}(t_i^-) \cdot V_{\infty}(t_i^-)}{V_{\infty xy}(t_i^-)} & -\frac{V_{\infty y}(t_i^-) \cdot V_{\infty z}(t_i^-)}{V_{\infty xy}(t_i^-)} \\ V_{\infty z}(t_i^-) & 0 & V_{\infty xy}(t_i^-) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta_i) \\ \sin(\beta_i) \cdot \cos(\gamma_i) \\ \sin(\beta_i) \cdot \sin(\gamma_i) \end{pmatrix} \quad (59)$$

где $\mathbf{V}_{\infty}(t_i^-) = [V_{\infty x}(t_i^-) \quad V_{\infty y}(t_i^-) \quad V_{\infty z}(t_i^-)]^T$ – вектор гиперболического избытка скорости при подлёте к планете;

$V_{\infty xy}(t_i^-) = \sqrt{(V_{\infty x}(t_i^-))^2 + (V_{\infty y}(t_i^-))^2}$ – проекция вектора гиперболического избытка скорости при подлёте к планете на плоскость xOy;

$V_{\infty}(t_i^-) = \sqrt{(V_{\infty x}(t_i^-))^2 + (V_{\infty y}(t_i^-))^2 + (V_{\infty z}(t_i^-))^2}$ – величина вектора гиперболического избытка скорости при подлёте к планете.

Выражение для $V_{\infty}(t_i^+)$ является функцией, зависящей от двух параметров: β_i и γ_i . Траекторию КА после гравитационного манёвра, а также все элементы орбиты КА рассматриваем как функцию всего двух параметров гравитационного манёвра.

Добавим, что гравитационные манёвры, переводящие КА на гелиоцентрическую орбиту с угловой дальностью $2\pi \cdot k$ (k – целое положительное число), будем называть гравитационными манёврами с целым порядком резонанса. Для того, чтобы траектория оказалась траекторией перелёта планета–планета с угловой дальностью $2\pi \cdot k$ (k – целое положительное число), воспользуемся следующим методом нахождения параметров гравитационного манёвра. Анализ элементов орбиты КА после гравитационного манёвра проводится при помощи изолиний на плоскости выбираемых параметров гравитационного манёвра.

Приведём пример исследования гравитационного манёвра у Венеры с целым порядком резонанса. КА подлетает к Венере 30 мая 2028 года (юлианская дата 2461921.714085765) с гелиоцентрической скоростью:

$$\mathbf{V}_{SC}(t_i^-) = [34,373 \quad 1,61 \quad 0,06]^T \text{ км/с.}$$

Из выражения (50) можно найти вектор гиперболического избытка скорости при подлёте к планете. Он оказался равным:

$$\mathbf{V}_{\infty}(t_i^-) = [2,247 \quad 15,14 \quad 2,1]^T \text{ км/с.}$$

Величина этого вектора:

$$V_{\infty}(t_i^-) = 15,449 \text{ км/с.}$$

Минимальная величина пролёта у Венеры принимается равной 400 км. Вследствие выражения (53) для определения максимального угла поворота вектора гиперболического избытка скорости при пассивном гравитационном манёвре имеем:

$$\beta_{max} = 20,066^\circ$$

Анализ периода и элементов орбиты КА после гравитационного манёвра как функций двух параметров гравитационного манёвра проводится с использованием

изолиний на плоскости выбираемых параметров гравитационного манёвра. Вектор гелиоцентрической скорости КА после гравитационного манёвра (59) является функцией, зависящей от двух параметров: β и γ . Анализ орбиты проводим в рамках теории невозмущённого движения КА. Зная координаты и компоненты скорости КА в рамках ограниченной задачи двух тел, можно вычислить все кеплеровы элементы орбиты КА, которые тоже будут некоторыми функциями, зависящими от угла поворота вектора гиперболического избытка скорости и угла, фиксирующего поворот плоскости пролётной гиперболы.

Возможный диапазон периода гелиоцентрической орбиты КА после гравитационного манёвра соответствует от 150,368 суток до 365,35 суток. Т.е. КА можно перевести на гелиоцентрическую орбиту, находящуюся в орбитальном резонансе с орбитой Венеры, в диапазоне от 0,669 до 1,626. Теперь выявим какие орбитальные резонансы с целым порядком резонанса попали в этот диапазон. Подходящие ячейки (варианты порядков резонансов) закрашены серым цветом:

1 : 1	2 : 1	3 : 1	3 : 2	4 : 3	5 : 1	5 : 2	5 : 3	5 : 4
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

На рисунке 2.4 представлен результат анализа периода орбиты КА после гравитационного манёвра у Венеры как функции двух выбираемых параметров гравитационного манёвра. По оси абсцисс отложен угол β . Он изменяется в диапазоне $\beta \in [0; \beta_{max}]$. По оси ординат отложен угол γ , который изменяется в диапазоне $\gamma \in [0^\circ; 360^\circ]$. На рисунке изолинии периода орбиты КА показаны цветными штриховыми линиями. Числа на изолиниях – период в сутках.

Для каждого допустимого порядка резонанса $n : m$ на плоскости параметров гравитационного манёвра β и γ можно построить изолинию, соответствующую периоду орбиты КА, равному периоду орбиты Венеры, умноженному на $m : n$. Назовем такую линию на графике изолиний резонансной. На рисунке 2.4 изображены четыре резонансные линии, соответствующие следующим порядкам резонанса:

- 1:1 (синяя сплошная линия);
- 3:2 (коричневая сплошная линия);
- 4:3 (красная сплошная линия);

- 5:4 (фиолетовая сплошная линия).

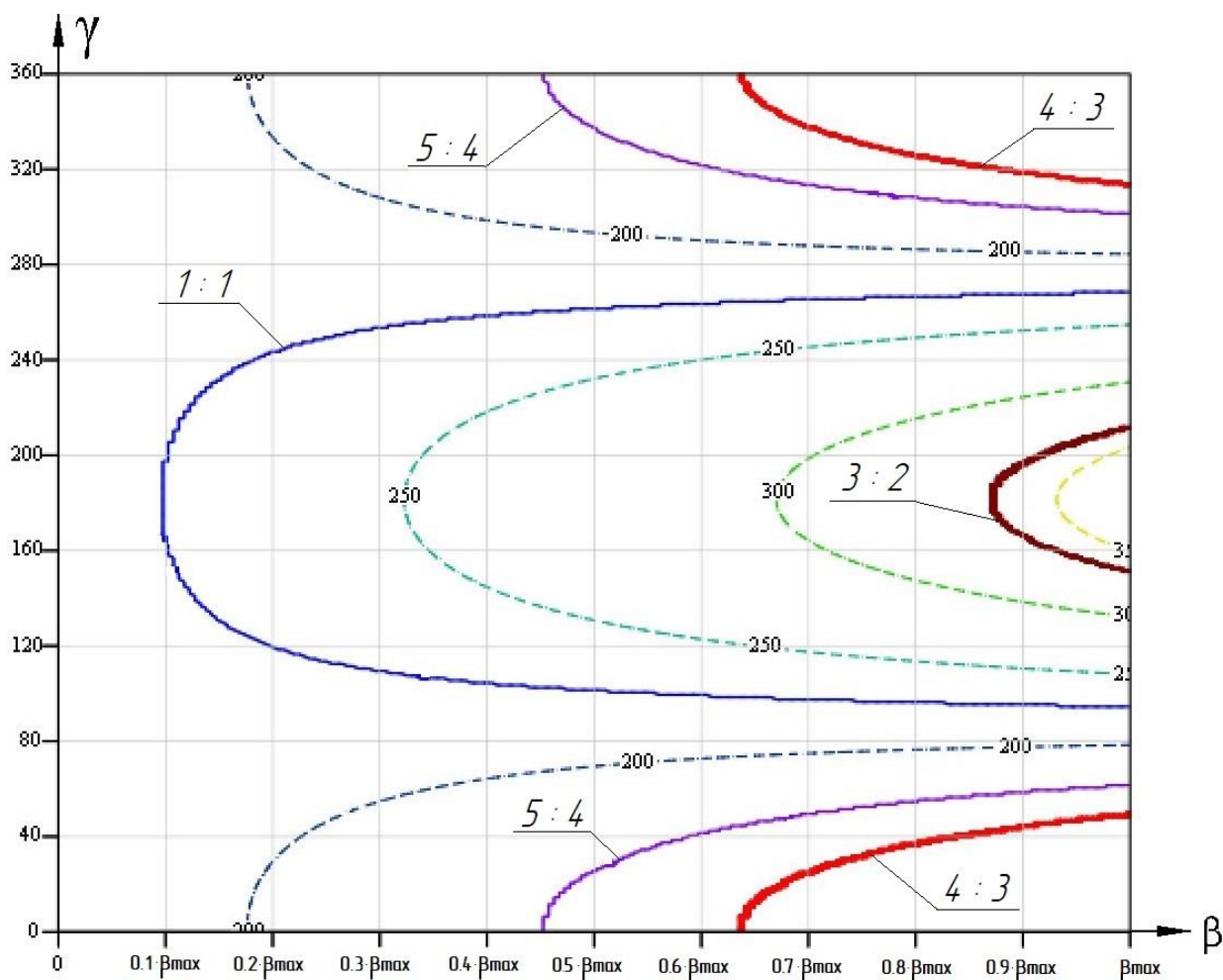


Рисунок 2.4 – Изолинии периода орбиты КА (штриховые цветные линии) после гравитационного манёвра у Венеры

Подобным образом исследуются все необходимые характеристики гелиоцентрической орбиты КА после гравитационного манёвра. На примере КА «Интергелиозонд» целью исследования полярных областей Солнца является увеличение наклона орбиты КА. В связи с этим проведём анализ возможных наклонов после гравитационного манёвра. Наклоны гелиоцентрической орбиты находятся в диапазоне:

$$i \in [0,535^\circ; 9,685^\circ].$$

На рисунке 2.5 изображены изолинии наклона (цветные штриховые линии) гелиоцентрической орбиты КА, как функции углов β и γ . Числа на изолиниях – значения наклона в градусах. Резонансные линии те же, что и на рисунке 2.4: порядок резонанса и цвет линий совпадают.

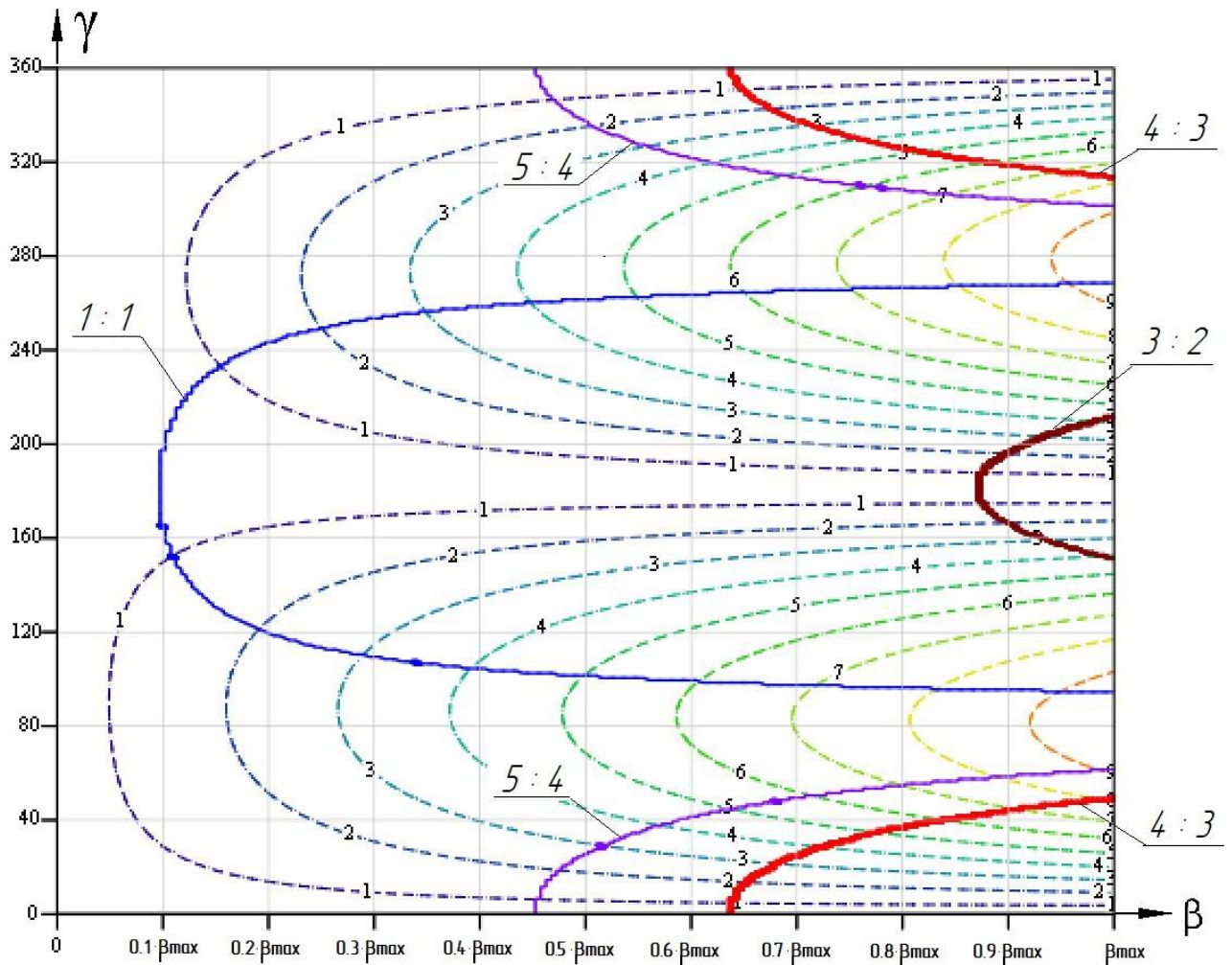


Рисунок 2.5 – Изолинии наклонения орбиты КА после гравитационного манёвра у Венеры

На рисунке 2.5 заметно, что максимально реализуемое наклонение после гравитационного манёвра получается при максимальном угле поворота гиперболического избытка скорости β_{max} . Для того, чтобы КА перешёл на гелиоцентрическую орбиту, находящуюся в орбитальном резонансе с целым порядком резонанса с орбитой Венеры и одновременно имеющую максимально реализуемое наклонение, то следует воспользоваться резонансом 1:1 или 5:4 (следует из рисунка 2.5). Для сокращения времени перелёта орбитальный резонанс 1:1 – наиболее выгоден.

В таблице 4 представлены величины наклонений гелиоцентрических орбит КА после гравитационного манёвра у Венеры для рассматриваемых порядков резонансов при β_{max} . Приведённые численные результаты следует рассматривать

исключительно в качестве примера для анализа траектории КА после гравитационного манёвра.

Таблица 4 – Возможные наклонения для анализируемых орбитальных резонансов

Порядок резонанса	Угол поворота гиперболического избытка скорости, градусы	Угол, фиксирующий положение плоскости пролётной гиперболы, градусы	Максимальное наклонение орбиты КА, градусы
1	2	3	4
1 : 1	20,066	94,405	9,419
	20,066	268,454	9,402
3 : 2	20,066	151,109	4,178
	20,066	211,749	4,345
4 : 3	20,066	49,189	8,151
	20,066	313,67	7,71
5 : 4	20,066	61,595	9,135
	20,066	301,264	8,83

В дальнейшем можно исследовать орбиты КА после гравитационного манёвра у планеты вдоль резонансной линии с учётом ограничений на элементы орбиты КА. Выбирается точка на резонансной линии, которая соответствует необходимым значениям. Соответствующие этой точке параметры гравитационного манёвра β и γ необходимо использовать для дальнейшего исследования траектории.

2.5.2 Алгоритм определения параметров пассивного гравитационного манёвра, обеспечивающего гелиоцентрический перелёт планета–планета с угловой дальностью $\pi \cdot (2k-1)$ (k – целое положительное число)

Используя последовательность гравитационных манёвров, переводящих КА на гелиоцентрические орбиты с угловой дальностью $2\pi \cdot k$ (k – целое положительное число), можно добиться суммарного поворота вектора гиперболического избытка скорости теоретически на любой угол. Однако при анализе невозмущённого (кеплеровского) движения планеты вектор гелиоцентрической скорости планеты в момент проведения рассматриваемой последовательности гравитационных манёвров $V_{planet}(t_i)$ не меняется. Величина гиперболического избытка скорости $V_{\infty}(t_i^-) = V_{\infty}(t_i^+)$ при этих гравитационных манёврах тоже остаётся неизменной. Поэтому существует принципиальное ограничение по величине и направлению гелиоцентрической скорости КА после последовательности гравитационных манёвров с целым порядком резонанса. Например, направление этой скорости не может отличаться от направления вектора скорости планеты $V_{planet}(t_i)$ на угол больший, чем α_{max} :

$$\alpha_{max} = \arcsin\left(\frac{V_{\infty}(t_i^-)}{V_{planet}(t_i)}\right) \quad (60)$$

В данной диссертационной работе предлагается снять это ограничение за счёт использования гравитационного манёвра в противоположной точке орбиты планеты, где гелиоцентрическая скорость планеты несколько отличается.

Орбиту, которая между двумя последовательными гравитационными манёврами у одной и той же планеты, имеет угловую дальность $\pi \cdot (2k - 1)$, где k – целое положительное число, будем называть π -резонансной, а гравитационный манёвр, который переводит КА на π -резонансную орбиту - π -резонансным гравитационным манёвром.

Включение в схему полёта межпланетного КА π -резонансных гравитационных манёвров позволяет расширить траекторные возможности КА, появляется принципиальная возможность сократить время выполнения транспортной задачи. Последовательные гравитационные манёвры на

π -резонансной гелиоцентрической орбите осуществляются в противоположных точках орбиты планеты. Эти точки соответствуют пересечению (узловым точкам) плоскости орбиты КА и орбиты планеты. Условия движения планеты и КА в противоположенных точках их орбит (в частности, их векторы скоростей) различны. Поэтому при использовании π -резонансной орбиты вектор гиперболического избытка скорости в начале этой орбиты (при отлёте от планеты) не равен вектору гиперболического избытка скорости при подлёте к планете для следующего гравитационного манёвра. Это различие расширяет диапазон возможных орбитальных характеристик КА (в частности, наклонений для проекта «Интергелиозонд») после цепочки гравитационных манёвров.

Проведём анализ невозмущённой гелиоцентрической орбиты КА между двумя последовательными гравитационными манёврами с угловой дальностью, отличной от целого числа витков на 180° . В работе [40] показано, что π -резонансной орбиты после гравитационного манёвра у Венеры не существует, если число оборотов Венеры меньше числа оборотов КА (т.е., если $m < n$). Поэтому анализировались следующие порядки резонансов (второе число в записанном отношении – число витков Венеры m):

0,5 : 0,5	1,5 : 0,5	2,5 : 0,5	3,5 : 0,5	4,5 : 0,5
1,5 : 1,5	2,5 : 1,5	3,5 : 1,5	4,5 : 1,5	2,5 : 2,5
3,5 : 2,5	4,5 : 2,5	3,5 : 3,5	4,5 : 3,5	

Принципиально возможно использование других порядков резонансов с m , большим 3,5, однако длительность перелёта при этом существенно увеличится.

Пусть известна дата пассивного π -резонансного гравитационного манёвра у планеты. После гравитационного манёвра КА переходит на π -резонансную гелиоцентрическую орбиту. Величины радиусов-векторов КА в противоположных точках орбиты можно вычислить по формулам:

$$\begin{cases} r_0 = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(v_0)} \\ r_f = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(v_0 + \pi)} \end{cases} \quad (61)$$

где r_0, r_f – величина начального и конечного радиуса–вектора π –резонансной гелиоцентрической орбиты КА;

p, e – фокальный параметр и эксцентриситет орбиты КА;

v_0 – истинная аномалия начальной точки резонансной орбиты.

Анализ системы равенств (61) позволяет выявить несколько интересных свойств рассматриваемых π –резонансных орбит. Из соотношений (61) следует:

$$p = \frac{2 \cdot r_0 \cdot r_f}{r_0 + r_f} \quad (62)$$

$$e \cdot \cos(v_0) = \frac{r_f - r_0}{r_0 + r_f} \quad (63)$$

Приведённые равенства дают возможность утверждать, что фокальный параметр π –резонансной орбиты, как и произведение эксцентриситета этой орбиты на косинус истинной аномалии начальной точки орбиты зависят исключительно от длин радиусов векторов граничных точек орбиты (r_0 и r_f). Эти характеристики не зависят от порядка резонанса.

Стоит обратить внимание на ещё одно свойство π –резонансных орбит. Из равенства (63) следует, что знак косинуса истинной аномалии начальной точки резонансной орбиты совпадает со знаком разности длин радиусов векторов в конечной и начальной точках π –резонансной орбиты:

$$\begin{aligned} \cos(v_0) &> 0, \text{ если } r_0 < r_f \\ \cos(v_0) &< 0, \text{ если } r_0 > r_f \end{aligned} \quad (64)$$

В рамках метода грависфер нулевой протяжённости должно удовлетворяться условие (58): положение КА при гравитационном манёвре соответствует положению планеты. По известным эфемеридам [1], положению и скорости планеты, можно найти все характеристики орбиты планеты, включая истинную аномалию v_0 точки орбиты планеты, в которой осуществляется гравитационный манёвр.

Поиск неизвестных характеристик перелётной траектории КА сводится к решению задачи Ламберта [33, 34] для перелёта между противоположными точками орбиты планеты. При анализе полученных решений задачи Ламберта следует воспользоваться следующими утверждениями:

1. Случай, когда $n = 0,5; m = 0,5$ (из условия (1), где n – количество оборотов КА вокруг Солнца, m – количество витков планеты вокруг Солнца), задача Ламберта всегда имеет одно единственное решение.

2. Случай, когда $n = m; n \geq 1,5$

В этом случае всегда существуют два решения уравнения Ламберта.

3. Случай, когда $n > m; m \geq 1,5$

Если угловая дальность гелиоцентрического перелёта КА больше угловой дальности планеты, то решений задачи Ламберта не существует. Время перелёта КА между двумя гравитационными манёврами оказывается меньше требуемого минимального времени многовиткового перелёта.

4. Случай, когда $n < m; n = 0,5$

Задача Ламберта всегда имеет одно решение. Необходимо выполнить проверку, что орбита КА не совпадает с орбитой планеты.

5. Случай, когда $n < m; n \geq 1,5$

Существуют два решения уравнения Ламберта. В связи с тем, что угловые дальности различны – перелётная орбита КА не совпадает с траекторией планеты.

В таблице 5 представлены некоторые характеристики гелиоцентрической траектории КА, которая находится в π -резонансе с орбитой Венеры, для даты отлёта от Венеры 1 января 2029 г.

Для указанной даты оскулирующие элементы орбиты Венеры оказались следующими:

$$e_{Venus} = 6,782 \cdot 10^{-3}$$

$$p_{Venus} = 0,723 \text{ а. е.}$$

$$inc_{Venus} = 3,394^\circ$$

$$T_{Venus} = 224,7 \text{ суток}$$

где e_{Venus} , p_{Venus} , inc_{Venus} – эксцентриситет, фокальный параметр и наклонение Венеры;

T_{Venus} – период Венеры.

Для рассматриваемой даты длина радиуса–вектора Венеры оказалась равна $r_0 = 0,724280$ а. е., истинная аномалия $101,538^\circ$, длина радиуса–вектора Венеры в

противоположной точке орбиты $r_f = 0,722318$ а. е. Обратим внимание на то, что r_0 больше r_f , поэтому на π -резонансной траектории косинус истинной аномалии начальной точки этой траектории должен быть отрицательным.

Таблица 5 – Основные характеристики траектории перелёта планета–планета с угловой дальностью $\pi \cdot (2k - 1)$, где k – целое положительное число

Орбитальный резонанс	Длительность перелёта, сутки	Фокальный параметр орбиты КА, а.е.	Эксцентриситет орбиты КА	Истинная аномалия начальной точки перелётной орбиты, градусы	Величина радиуса перицентра, а.е.	Величина радиуса апоцентра, а.е.
1	2	3	4	5	6	7
0,5 : 0,5	113,301	0,723	$6,78236 \cdot 10^{-3}$	101,538	0,718	0,728
0,5 : 1,5	338,001	0,723	0,56708	90,137	0,462	1,671
1,5 : 1,5	338,001	0,723	0,29094	-90,267	0,56	1,02
1,5 : 1,5	338,001	0,723	$6,78236 \cdot 10^{-3}$	101,538	0,718	0,728
0,5 : 2,5	562,701	0,723	0,70147	90,111	0,425	2,423
1,5 : 2,5	562,701	0,723	0,45198	90,172	0,498	1,32
1,5 : 2,5	562,701	0,723	0,64427	-90,121	0,44	2,033
2,5 : 2,5	562,701	0,723	0,1766	-90,44	0,615	0,878
2,5 : 2,5	562,701	0,723	$6,78236 \cdot 10^{-3}$	101,538	0,718	0,728
0,5 : 3,5	787,402	0,723	0,76537	90,102	0,41	3,083
1,5 : 3,5	787,402	0,723	0,58856	90,132	0,455	1,758
1,5 : 3,5	787,402	0,723	0,73791	-90,105	0,416	2,76
2,5 : 3,5	787,402	0,723	0,38869	90,2	0,521	1,183
2,5 : 3,5	787,402	0,723	0,51986	-90,15	0,476	1,506
3,5 : 3,5	787,402	0,723	0,12794	-90,608	0,641	0,829
3,5 : 3,5	787,402	0,723	$6,78236 \cdot 10^{-3}$	101,538	0,718	0,728

В таблице 5 приведены анализируемые порядки резонансов орбиты КА с орбитой Венеры (первое число соответствует количеству витков КА, второе – Венеры). Во втором столбце приведено время перелёта КА между двумя последовательными гравитационными манёврами у Венеры. В оставшихся

столбцах приведены некоторые элементы перелётной орбиты КА, такие как фокальный параметр, эксцентриситет, истинная аномалия начальной точки орбиты, радиусы перигелия и афелия гелиоцентрической орбиты КА.

Подчеркнём, что фокальный параметр всех вариантов π -резонансных траекторий оказался равен фокальному параметру Венеры. Истинная аномалия начальной точки перелётных орбит близка к $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{-\pi}{2}$. Подчеркнём, что косинус этой истинной аномалии во всех вариантах меньше нуля. Эксцентриситеты различных орбит существенно отличаются друг от друга, величина эксцентриситета варьируется от $6,78236 \cdot 10^{-3}$ для резонанса 0,5:0,5 до 0,76537 для резонанса 0,5:3,5. Для всех приведённых в таблице резонансных орбит косинус истинной аномалии начальной точки резонансных орбит оказался отрицательным, то есть условия (64) оказалось выполненным.

Далее опишем алгоритм анализа π -резонансного гравитационного манёвра у планеты.

Алгоритм анализа π -резонансного гравитационного манёвра

Пусть известны дата подлёта КА t_i к планете для π -резонансного гравитационного манёвра у неё, а также вектор гелиоцентрической скорости КА $\mathbf{V}_{SC}(t_i^-)$ при подлёте к планете. По соотношению (50) можно найти гиперболический избыток скорости КА при подлёте к планете $\mathbf{V}_\infty(t_i^-)$.

Вектор гиперболического избытка скорости после гравитационного манёвра (он зависит от параметров гравитационного манёвра) находится с использованием соотношения (59), гелиоцентрическая скорость КА после гравитационного манёвра – с использованием (51). Аналогично гравитационному манёвру с целым порядком резонанса гиперболический избыток скорости после гравитационного манёвра является функцией, зависящей от двух выбираемых параметров:

- угла поворота вектора гиперболического избытка скорости β ;
- угла, фиксирующего поворот плоскости гиперболы пролёта вокруг вектора гиперболического избытка скорости при подлёте к планете γ .

Отметим, что гелиоцентрическая траектория после гравитационного манёвра анализируется на плоскости двух выбираемых параметров. Оказывается, чтобы КА

выполнил π -резонансный гравитационный манёвр у планеты достаточно, чтобы удовлетворились одновременно два условия.

Условие 1. Условие заключается в поиске таких значений β и γ , которые удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} p(\beta, \gamma) - p_{fixed} = 0 \\ e(\beta, \gamma) - e_{fixed} = 0 \end{cases} \quad (65)$$

где $p(\beta, \gamma), e(\beta, \gamma)$ – фокальный параметр и эксцентриситет перелётной орбиты КА, как функции двух выбираемых параметров;

p_{fixed}, e_{fixed} – фокальный параметр и эксцентриситет орбиты КА, полученные из решения задачи Ламберта.

При решении системы уравнений (65) значения выбираемых параметров гравитационного манёвра находятся в диапазоне значений:

$$\beta \in \left[0^\circ; 2 \cdot \arcsin\left(\frac{1}{e_{min}}\right) \right], \gamma \in [0; 2\pi).$$

Условие 2. Требуется удовлетворить знак косинуса истинной аномалии точки траектории полёта КА после гравитационного манёвра (64).

Следует обратить внимание на то, что траектория перелёта КА планета-планета с угловой дальностью $\pi \cdot (2k - 1)$ характеризуется не только формой $p(\beta, \gamma)$ и размером $e(\beta, \gamma)$, но и вполне конкретным положением линии апсид, которое можно фиксировать значением истинной аномалии начальной точки траектории полёта КА после гравитационного манёвра $v_{0\,fixed}$. Т.е. выражение для произведения эксцентриситета перелётной орбиты КА на косинус истинной аномалии позволяет дополнить систему уравнений (65):

$$\begin{cases} p(\beta, \gamma) - p_{fixed} = 0 \\ e(\beta, \gamma) - e_{fixed} = 0 \\ \cos[v_0(\beta, \gamma)] = \frac{r_f - r_0}{e_{fixed} \cdot (r_0 + r_f)} \end{cases} \quad (66)$$

Свойства траекторий перелёта планета - планета с угловой дальностью $\pi \cdot (2k - 1)$ такие, что, обеспечивая требуемые значения фокального параметра и эксцентриситета, автоматически обеспечивается корректное значение знака косинуса истинной аномалии начальной точки траектории перелёта. Поэтому остаётся только проверить условие 2, а конкретнее знак истинной аномалии. Если

условие 2 удовлетворяется, то выбранный π -резонансный гравитационный манёвр реализовать возможно, если условие 2 не удовлетворяется, то такой возможности не существует.

Рассмотрим пример реализации рассмотренного алгоритма перехода на гелиоцентрическую орбиту, имеющую угловую дальность перелёта $\pi \cdot (2k - 1)$. 9 января 2029 года КА подлетает к Венере с гелиоцентрической скоростью:

$$\mathbf{V}_{SC}(t_i^-) = [34,536 \quad -0,048 \quad 5,158]^T \text{ км/с.}$$

Компоненты вектора гиперболического избытка скорости подлёта к планете и его величина следующие:

$$\mathbf{V}_{\infty}(t_i^-) = [2,431 \quad 13,534 \quad 7,197]^T \text{ км/с}$$

$$V_{\infty}(t_i^-) = 15,52 \text{ км/с.}$$

Величину максимального угла поворота вектора гиперболического избытка скорости подлёта находим из выражения (53). Она равна:

$$\beta_{max} = 19,913^{\circ}.$$

Зная дату подлёта КА к планете для перехода на π -резонансную гелиоцентрическую орбиту, в рамках метода грависфер нулевой протяжённости, можно получить два радиуса-вектора КА между двумя последовательными гравитационными манёврами. По двум положениям КА и времени перелёта можно найти все необходимые для последующего анализа характеристики перелётной траектории: гелиоцентрическую скорость КА и истинную аномалию в начальной точке перелётной траектории, фокальный параметр и эксцентриситет орбиты. Решения, полученные из решения задачи Ламберта, указаны в таблице 6.

Таблица 6 – Характеристики гелиоцентрической траектории перелёта для различных порядков резонансов

№ п.п.	Порядок резонанса	Длительность перелёта КА, сутки	Фокальный параметр перелётной орбиты, а.е.	Эксцентриситет перелётной орбиты КА	Истинная аномалия начальной точки перелётной орбиты КА, градусы
1	2	3	4	5	6
1	0,5 : 0,5	113,224	0,7233	$6,7828 \cdot 10^{-3}$	115,688
2	0,5 : 1,5	337,924	0,7233	0,56702	90,297
3	1,5 : 1,5	337,924	0,7233	0,29053	-90,58
4	0,5 : 2,5	562,624	0,7233	0,70145	90,24
5	1,5 : 2,5	562,624	0,7233	0,45192	90,373
6	1,5 : 2,5	562,624	0,7233	0,64423	-90,261
7	2,5 : 2,5	562,624	0,7233	0,17617	-90,957
8	0,5 : 3,5	787,324	0,7233	0,76535	90,22
9	1,5 : 3,5	787,324	0,7233	0,58853	90,286
10	1,5 : 3,5	787,324	0,7233	0,73789	-90,228
11	2,5 : 3,5	787,324	0,7233	0,38864	90,433
12	2,5 : 3,5	787,324	0,7233	0,51982	-90,324
13	3,5 : 3,5	787,324	0,7233	0,12751	-91,322

Далее проводим анализ траектории перелёта КА: находим элементы орбиты КА, время перелёта, как функций двух выбираемых параметров гравитационного манёвра β и γ . Из соотношений (59) и (51) находим вектор гиперболического избытка скорости, а также вектор гелиоцентрической скорости КА после гравитационного манёвра. По известным формулам находим возможные диапазоны для фокального параметра и эксцентриситета орбиты КА. Эти диапазоны оказались следующими:

$$p(\beta, \gamma) = 0,439 \dots 0,843 \text{ а. е.}$$

$$e(\beta, \gamma) = 0,281 \dots 0,477$$

Сравнив значения фокальных параметров и эксцентриситетов анализируемых порядков π -резонансных гелиоцентрических траекторий КА с полученными диапазонами решений из таблицы 6, отметим, что:

- фокальные параметры (таблица 6, столбец 4) всех вариантов находятся в диапазоне решений;

- в диапазоне возможных решений по эксцентриситету оказались следующие порядки резонансов:

№ п.п. из таблицы 6	3	5	11
Порядок резонанса	1,5:1,5	1,5:2,5	2,5:3,5

На рисунке 2.6 показаны изолинии эксцентриситета и фокального параметра после гравитационного манёвра у Венеры. По оси абсцисс отложен угол поворота вектора гиперболического избытка скорости после гравитационного манёвра (диапазон измерений β – от 0 до β_{max}). Вдоль оси ординат отложен угол γ ($0^\circ \dots 360^\circ$). Разноцветными линиями на графике показаны изолинии эксцентриситета, а коричневыми – фокального параметра.

Проблему существования решения системы уравнений (65) для каждого допустимого порядка резонанса можно анализировать с использованием построенных изолиний. Для этого требуется определить пересекаются (точнее имеют ли общие точки) или нет изолиния фокального параметра и изолиния эксцентриситета для каждого допустимого порядка резонанса.

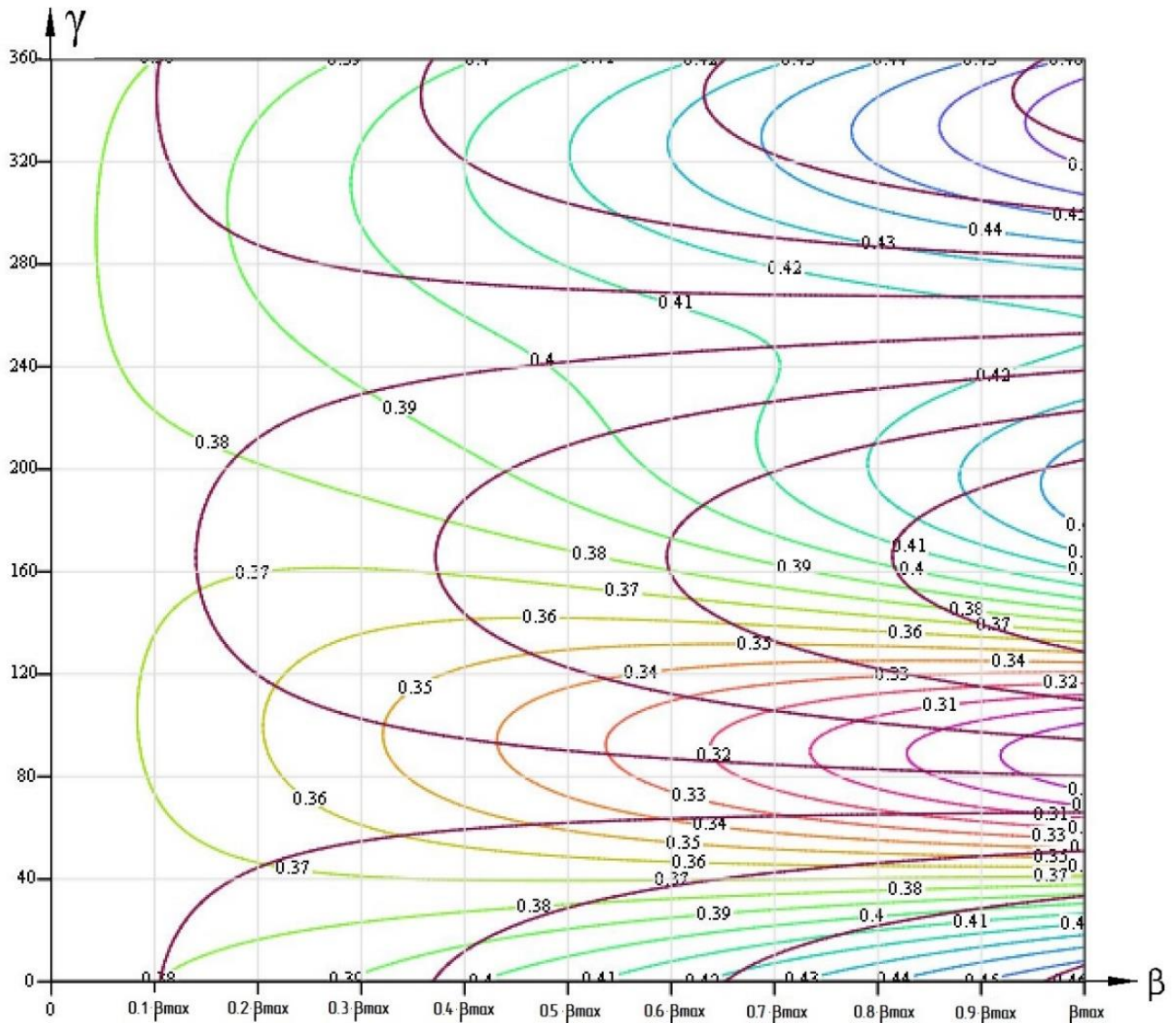


Рисунок 2.6 – Изолинии эксцентриситета и фокального параметра после гравитационного манёвра у Венеры на плоскости выбираемых параметров гравитационного манёвра

На рисунке 2.7(a) на плоскости β - γ показаны изолиния фокального параметра, равного 0,7233 (коричневая линия), и изолиния эксцентриситета, равного 0,29053 (красная линия). Эти значения (фокального параметра и эксцентриситета) соответствуют траектории полёта КА с № 3 в таблице 6 ($m = 1,5$; $n = 1,5$). Видно, что изолинии требуемых значений эксцентриситета и фокального параметра имеют общую точку. Это свидетельствует о том, что решение системы уравнений (65) существует, т.е. гравитационный манёвр у Венеры может перевести КА на траекторию рассматриваемого порядка резонанса.

Анализ рисунка 2.7(б) показывает, что рассматриваемый гравитационный манёвр не может перевести КА на резонансную с Венерой орбиту КА при порядке резонанса 1,5:2,5. Изолинии достижимых значений фокального параметра и эксцентриситета не пересекаются. Решение системы уравнений (65) не существует.

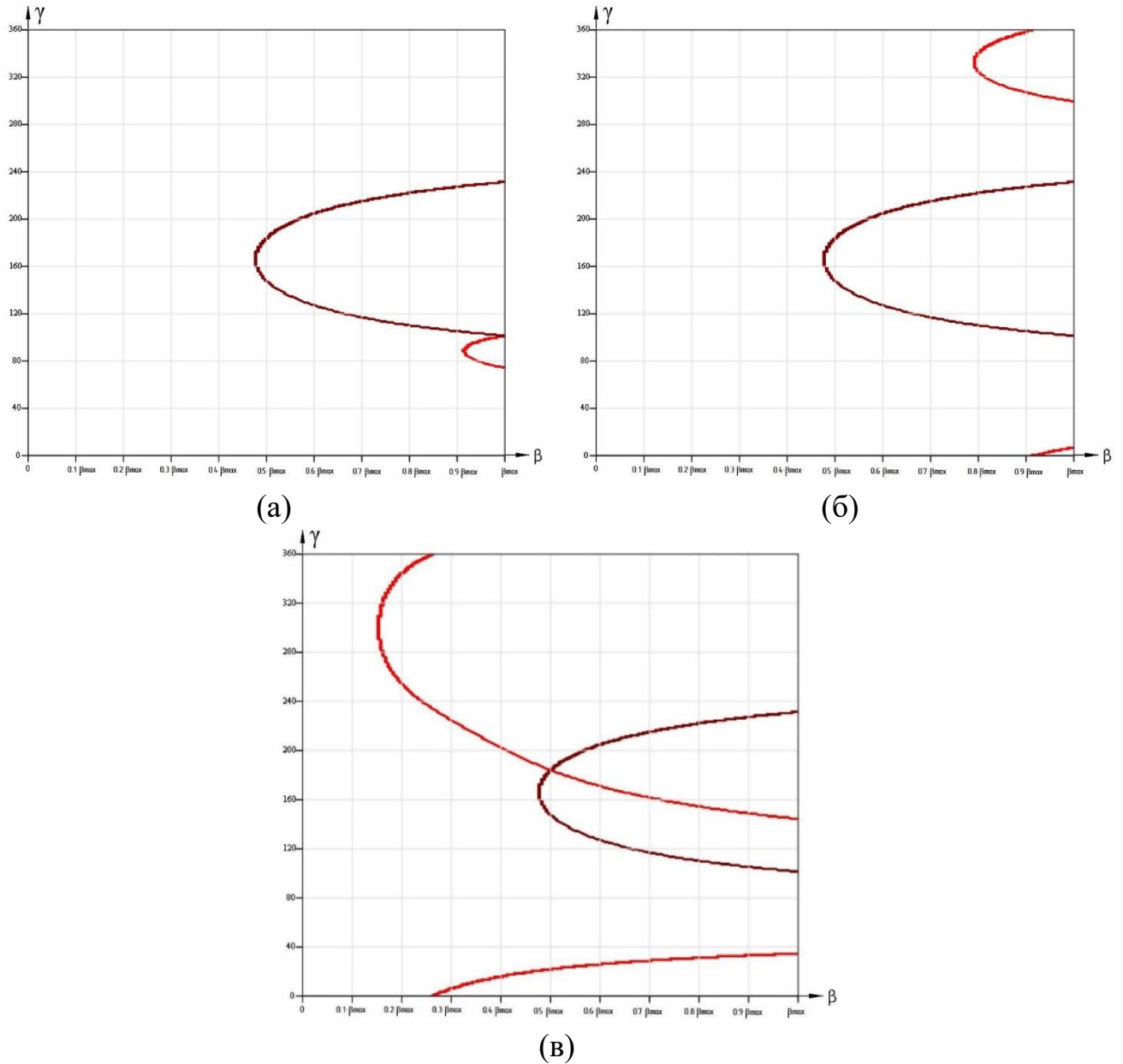


Рисунок 2.7 – Изолинии эксцентриситета (красная линия) и фокального параметра (коричневая линия) гелиоцентрической орбиты КА после гравитационного манёвра у Венеры, которая находится в орбитальном резонансе с орбитой Венеры для нескольких порядков резонанса:

а) 1,5:1,5; б) 1,5:2,5; в) 2,5:3,5

На рисунке 2.7(в) показаны изолиния фокального параметра, равного 0,7233, и изолиния эксцентриситета, равного 0,38864 (траектория полёта КА с № 11 в таблице 6, где $m = 2,5$; $n = 3,5$). Видно, что изолинии требуемых значений эксцентриситета и фокального параметра имеют общую точку. Это свидетельствует о том, что решение системы уравнений (65) существует. То есть гравитационный манёвр у Венеры может перевести КА на гелиоцентрическую траекторию рассматриваемого порядка 2,5:3,5.

Решение системы уравнений (65) существует для траекторий № 3 и № 11 при следующих выбираемых параметрах гравитационного манёвра:

$$- \beta = \beta_{max} = 19,913^\circ ; \gamma = 101,356^\circ \text{ (для резонанса } 1,5:1,5\text{);}$$

$$- \beta = 9,967^\circ ; \gamma = 184,079^\circ \text{ (для резонанса } 2,5:3,5\text{).}$$

На этом анализ полученных решений не окончен. Следующим этапом необходимо проверить выполнение условия (65).

Для рассматриваемой даты гравитационного манёвра $r_o = 0,72532$ а. е., $r_f = 0,72128$ а. е., т.е. $r_o > r_f$. Поэтому знак косинуса истинной аномалии начальной точки траектории перелёта должен удовлетворять условию: $\cos(v_0) < 0$. Для обеих траекторий (и для траектории № 3, и для траектории № 11) $\cos(v_0) < 0$, то есть условие (65) удовлетворяется. Полученные выбираемые параметры гравитационного манёвра обеспечивают перевод КА на π -резонансную орбиту с орбитой Венеры.

Таким образом, для рассмотренного как пример гравитационного манёвра у Венеры, осуществляемого 9 января 2029 года с вектором гелиоцентрической скорости КА на подлёте к Венере $\mathbf{V}_{SC}(t_i^-) = [34,536 \quad -0,048 \quad 5,158]^T$ км/с, оказалось возможным реализовать π -резонансные гравитационные манёвры только двух порядков: 1,5:1,5 и 2,5:3,5. π -резонансные гравитационные манёвры остальных 11-ти рассмотренных порядков (таблица 6) не могут быть реализованы.

2.5.3 Алгоритм определения параметров пассивного окolorезонансного гравитационного манёвра

Актуальной задачей современной механики космического полёта является поиск межпланетных траекторий КА в условиях сложных гравитационных полей. Для современного баллистического проектирования, направленного на освоение дальнего космоса, необходимо полномасштабное моделирование гелиоцентрической траектории с использованием резонансных гравитационных манёвров с учётом возмущающих факторов.

Многие авторы, как отмечалось ранее, пользуются следующей постановкой классической задачи: движение планеты, у которой осуществляется последовательность резонансных гравитационных манёвров с целым количеством витков, анализируется невозмущённым. Для того, чтобы КА перешёл на резонансную гелиоцентрическую орбиту, применяются условия, фиксирующие порядки резонансов (например, (1)). Положение планеты, у которой осуществляется последовательность резонансных гравитационных манёвров с целым количеством оборотов вокруг Солнца не изменяется. Отметим, что величина гиперболического избытка скорости при проведении всей цепочки резонансных гравитационных манёвров у планеты остаётся неизменной, изменяется исключительно направление этого вектора.

Однако, учёт гравитационных возмущений от планет Солнечной системы и многих других факторов (нецентральность гравитационного поля планеты, силы светового давления и другие факторы) могут привести к существенной деформации полученного решения. Следовательно, фактическое движение КА может значительно отклоняться от решения невозмущенной задачи межпланетного перелёта с последовательностью резонансных гравитационных манёвров с целым количеством витков.

В рамках данного исследования проводился синтез сложной перелётной траектории межпланетного КА с использованием точных эфемерид планет вдоль всей траектории выведения КА на целевую орбиту. Применяя эфемериды планет, следует учитывать некоторые особенности, которые состоят в следующем:

- из-за возмущённости орбиты планеты последовательные гравитационные манёвры осуществляются не в одной и той же точке пространства;
- исключаются условия, фиксирующие порядки резонансов (1);
- величина гиперболического избытка скорости при подлёте к планете не будет одной и той же при нескольких сближениях с планетой.

Таким образом, в промежутках между последовательными гравитационными манёврами гелиоцентрическая траектория КА не будет резонансной, но может быть близкой к ней (к орбите, находящейся в орбитальном резонансе с орбитой планеты, у которой проводится гравитационный манёвр). Условие (1) при этом не удовлетворяется. В работе предполагается возможность использовать почти резонансные орбиты, при которых угловые дальности между последовательными гравитационными манёврами почти равны $2\pi \cdot k$ и $\pi \cdot (2k - 1)$, где k – целое положительное число; т.е. n_i и m_i почти кратны π (из соотношения (1)). Такие орбиты будем называть околорезонансными гелиоцентрическими орбитами КА, а гравитационный манёвр, который переводит КА на эту орбиту – околорезонансным.

Предложенный подход позволяет исключить условие (1) из задачи сквозной оптимизации и тем самым расширить пространство поиска допустимых межпланетных траекторий.

Для расчёта околорезонансного гравитационного манёвра следует рассматривать параметры, представленные в таблице 7.

Таблица 7 – Параметры, применяющиеся для анализа пассивного околорезонансного гравитационного манёвра

Характеристика	Наименование характеристики	Примечание
1	2	3
$V_{SC}(t_i^-)$	гелиоцентрическая скорость КА при подлёте к планете	входной параметр расчёта
t_i	дата гравитационного манёвра	входной параметр расчёта
$V_{planet}(t_i)$	гелиоцентрическая скорость планеты	эфемеридные данные
$r_{planet}(t_i)$	радиус–вектор планеты	эфемеридные данные

Характеристика	Наименование характеристики	Примечание
1	2	3
r_{pmin}^{planet}	минимальный радиус пролёта КА у планеты (включает в себя средний радиус планеты)	исходные данные
μ_{planet}	гравитационные параметр планеты	исходные данные
β	угол поворота вектора гиперболического избытка скорости	выбираемый параметр схемы полёта
γ	угол, фиксирующий положение плоскости пролётной гиперболы	выбираемый параметр схемы полёта
$V_{sc}(t_i^+)$	гелиоцентрическая скорость КА после гравитационного манёвра	расчётная характеристика

Рассмотрим модель пассивного гравитационного манёвра. В рамках метода грависфер нулевой протяжённости продолжительностью гравитационного манёвра пренебрегаем. Гравитационный манёвр рассматривается как мгновенное изменение вектора гелиоцентрической скорости КА. Ограничения, которые накладываются на гравитационные манёвры, описываются соотношениями (56)(58).

Следуя формализму принципа максимума, получим выражения для условий трансверсальности при рассмотрении модели гравитационного манёвра. Как известно, условия трансверсальности в промежуточной точке (точке гравитационного манёвра) – это условия, связывающие значения сопряжённых переменных к фазовым переменным до и после гравитационного манёвра.

При гравитационном манёвре должны выполняться пять ограничений:

- четыре скалярных ограничений типа равенства (56), (58);
- одно ограничение типа неравенства (57).

В общем виде ограничения можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{g}_j(\mathbf{X}) = 0, & j = 1, \dots, q \\ \mathbf{g}_j(\mathbf{X}) \leq 0, & j = q + 1 \end{cases} \quad (67)$$

где $\mathbf{g}_j(\mathbf{X})$ – ограничения в точке гравитационного манёвра, зависящие от фазового вектора \mathbf{X} ;

$q = 4$ – количество ограничений типа равенства.

Применимо к нашей постановке задачи перечисленные ограничения можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
 g_1 &= r_x(t_i) - r_{planet_x}(t_i) = 0 \\
 g_2 &= r_y(t_i) - r_{planet_y}(t_i) = 0 \\
 g_3 &= r_z(t_i) - r_{planet_z}(t_i) = 0 \\
 g_4 &= |\mathbf{V}_{SC}(t_i^-) - \mathbf{V}_{planet}(t_i)|^2 - |\mathbf{V}_{SC}(t_i^+) - \mathbf{V}_{planet}(t_i)|^2 = 0 \\
 g_5 &= \beta(t_i) - \beta_{max}(t_i) \leq 0
 \end{aligned} \tag{68}$$

где $\mathbf{r}_{planet}(t_i) = [r_{planet_x}(t_i) \ r_{planet_y}(t_i) \ r_{planet_z}(t_i)]^T$ – компоненты радиуса-вектора планеты, у которой совершается гравитационный манёвр.

Вводим векторы сопряжённых переменных до и после гравитационного манёвра соответственно:

$$\begin{aligned}
 &[\psi_{r_x}(t_i^-) \ \psi_{r_y}(t_i^-) \ \psi_{r_z}(t_i^-) \ \psi_{V_x}(t_i^-) \ \psi_{V_y}(t_i^-) \ \psi_{V_z}(t_i^-)]^T \\
 &[\psi_{r_x}(t_i^+) \ \psi_{r_y}(t_i^+) \ \psi_{r_z}(t_i^+) \ \psi_{V_x}(t_i^+) \ \psi_{V_y}(t_i^+) \ \psi_{V_z}(t_i^+)]^T
 \end{aligned}$$

Размерность этих векторов - 6. Так как масса КА при пассивном гравитационном манёвре остаётся неизменной, то и сопряжённая к ней переменная не меняется $\psi_m(t_i^-) - \psi_m(t_i^+) = 0$. Исключаем уравнения для массы и её сопряжённой переменной из дальнейшего анализа, тем самым уменьшая количество выбираемых параметров схемы перелёта.

Функция Лагранжа имеет вид:

$$\begin{aligned}
 L(\mathbf{X}, \mathbf{v}) &= f(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^{q+1} \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{g}_j(\mathbf{X}) \\
 L(\mathbf{X}, \mathbf{v}) &= f(\mathbf{X}) + v_1 \cdot [r_x(t_i) - r_{planet_x}(t_i)] + v_2 \cdot [r_y(t_i) - r_{planet_y}(t_i)] + v_3 \\
 &\quad \cdot [r_z(t_i) - r_{planet_z}(t_i)] + v_4 \\
 &\quad \cdot [|\mathbf{V}_{SC}(t_i^-) - \mathbf{V}_{planet}(t_i)|^2 - |\mathbf{V}_{SC}(t_i^+) - \mathbf{V}_{planet}(t_i)|^2] + v_5 \\
 &\quad \cdot [\cos(\beta(t_i)) - \cos(\beta_{max}(t_i))]
 \end{aligned} \tag{69}$$

где $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_5)$ – множители Лагранжа;

$\mathbf{r}(t_i) = [r_x(t_i); r_y(t_i); r_z(t_i)]^T$ – гелиоцентрический радиус-вектор КА.

Была проанализирована часть внеинтегрального члена вариации функционала для анализируемого гравитационного манёвра с добавлением вариации ограничений в этой же точке. После того, как коэффициенты при вариации координат КА приравняли нулю, получили соотношения:

$$\begin{cases} \psi_{r_x}(t_i^-) - \psi_{r_x}(t_i^+) + v_1 = 0 \\ \psi_{r_y}(t_i^-) - \psi_{r_y}(t_i^+) + v_2 = 0 \\ \psi_{r_z}(t_i^-) - \psi_{r_z}(t_i^+) + v_3 = 0 \end{cases} \quad (70)$$

Таким образом, сопряжённый вектор к радиусу-вектору КА после гравитационного манёвра имеет скачок, который находим из общего решения краевой задачи:

$$\begin{aligned} \Psi_r(t_i^+) &= \Psi_r(t_i^-) + \mathbf{v}_j \\ j &= 1, \dots, 3 \end{aligned} \quad (71)$$

Коэффициенты при вариации скорости КА до и после гравитационного манёвра приравняем нулю. Воспользуемся условиями дополняющей нежёсткости для условий типа неравенств. Необходимо проанализировать два возможных случая:

1. КА осуществляет гравитационный манёвр на высоте больше минимальной высоты пролёта у планеты ($v_5 = 0$);
2. КА пролетает у планеты на минимально возможной высоте (выражение при множителе v_5 должно равняться нулю).

Запишем полученные соотношения для первого случая (случая, когда КА пролетает у планеты на высоте, большей h_{min}):

$$\begin{cases} \Psi_V(t_i^-) + 2 \cdot v_4 \cdot \mathbf{V}_\infty(t_i^-) = 0 \\ -\Psi_V(t_i^+) - 2 \cdot v_4 \cdot \mathbf{V}_\infty(t_i^+) = 0 \end{cases} \quad (72)$$

Из системы уравнений (72) можно выделить несколько свойств гравитационного манёвра:

1. Модуль базис-вектора при подлёте к планете $\psi_V(t_i^-)$ равен модулю базис-вектора при отлёте от планеты $\psi_V(t_i^+)$.
2. Базис-вектор при подлёте к планете $\Psi_V(t_i^-)$ коллинеарен или антиколлинеарен вектору гиперболического избытка скорости при подлёте к планете $\mathbf{V}_\infty(t_i^-)$.

3. Базис-вектор при отлёте от планеты $\Psi_V(t_i^+)$ коллинеарен или антиколлинеарен вектору гиперболического избытка скорости при отлёте от планеты $V_\infty(t_i^+)$.

Рассмотрим второй тип гравитационного манёвра. Если гравитационный манёвр выполняется на предельно малом удалении от небесного тела, то справедливы условия:

$$\begin{cases} \Psi_V(t_i^-) + 2 \cdot v_4 \cdot V_\infty(t_i^-) + v_5 \cdot \left[V_\infty(t_i^+) - 2 \cdot V_\infty(t_i^-) \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot (1 - B)}{(1 + B)^3} \right) \right] = 0 \\ \Psi_V(t_i^+) + 2 \cdot v_4 \cdot V_\infty(t_i^+) - v_5 \cdot V_\infty(t_i^-) = 0 \end{cases} \quad (73)$$

где $B = \frac{r_{\pi min}^{planet} \cdot [V_\infty(t_i^-)]^2}{\mu_{planet}}$

Выбираемыми параметрами гравитационного манёвра будем рассматривать 8 скалярных параметров:

$$\Psi_r(t_i^+), V_\infty(t_i^+), v_4, v_5$$

Запишем краевые условия для пассивного гравитационного манёвра:

- случай, когда высота перицентра гиперболы пролёта КА больше минимально допустимой:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{SC}(t_i^-) - \mathbf{r}_{planet}(t_i) = 0 \\ V_\infty(t_i^-) - V_\infty(t_i^+) = 0 \\ v_5 = 0 \\ \Psi_V(t_i^-) + 2 \cdot v_4 \cdot V_\infty(t_i^-) = 0 \end{cases} \quad (74)$$

- случай, когда гравитационный манёвр обеспечивает максимальный угол поворота вектора гиперболического избытка скорости:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{SC}(t_i^-) - \mathbf{r}_{planet}(t_i) = 0 \\ V_\infty(t_i^-) - V_\infty(t_i^+) = 0 \\ \beta(t_i) - \beta_{max}(t_i) = 0 \\ \Psi_V(t_i^-) + 2 \cdot v_4 \cdot V_\infty(t_i^-) + v_5 \cdot \left[V_\infty(t_i^+) - 2 \cdot V_\infty(t_i^-) \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot (1 - B)}{(1 + B)^3} \right) \right] = 0 \end{cases} \quad (75)$$

Ещё одной оптимизируемой характеристикой гравитационного манёвра является время t_i . Рассмотрим условие оптимальности даты выполнения гравитационного манёвра. Поскольку вариация времени слева t_i^- и справа t_i^+ в точке гравитационного манёвра равны, то нулю следует приравнять коэффициент этой вариации:

$$H(t_i^-) - H(t_i^+) + \frac{d(-m(t_f))}{dt_i^-} - \frac{d(-m(t_f))}{dt_i^+} + \sum_j^{q+l} \mathbf{v}_j \cdot \left(\frac{d\mathbf{g}_j(\mathbf{X})}{dt_i^-} - \frac{d\mathbf{g}_j(\mathbf{X})}{dt_i^+} \right) = 0 \quad (76)$$

где $H(t_i^-), H(t_i^+)$ - функция Гамильтона в точке до и после гравитационного манёвра соответственно;

$$H(t_i^-) = \Psi_r(t_i^-)^T \cdot \mathbf{V}_{SC}(t_i^-) + \Psi_V(t_i^-)^T \cdot \frac{d\mathbf{V}_{SC}(t_i^-)}{dt_i^-} + \psi_m(t_i^-) \cdot \delta t_i^- \cdot \frac{P}{w}$$

$$H(t_i^+) = \Psi_r(t_i^+)^T \cdot \mathbf{V}_{SC}(t_i^+) + \Psi_V(t_i^+)^T \cdot \frac{d\mathbf{V}_{SC}(t_i^+)}{dt_i^+} + \psi_m(t_i^+) \cdot \delta t_i^+ \cdot \frac{P}{w}$$

При этом необходимо учитывать, что $\psi_m(t_i^-) - \psi_m(t_i^+) = 0$.

Подставив все необходимые величины и преобразовав соотношение, окончательно получаем условие оптимальности даты гравитационного манёвра:

$$\Psi_r(t_i^+)^T \cdot \mathbf{V}_\infty(t_i^+) - \Psi_r(t_i^-)^T \cdot \mathbf{V}_\infty(t_i^-) + [\Psi_V(t_i^+) - \Psi_V(t_i^-)]^T \cdot \left(\frac{-\mathbf{r}}{r^3} - \frac{d\mathbf{V}_{planet}(t_i)}{dt_i} \right) = 0 \quad (77)$$

В условие (77) входит векторная разность ньютоновского гравитационного ускорения КА в момент совершения гравитационного манёвра и ускорения планеты в этот же момент времени относительно Солнца. Указанная векторная разность является малой величиной, поэтому многие авторы ею пренебрегают. Также поступим и мы.

При этом условие оптимальности даты гравитационного манёвра можно упростить до выражения вида:

$$\Psi_r(t_i^+)^T \cdot \mathbf{V}_\infty(t_i^+) - \Psi_r(t_i^-)^T \cdot \mathbf{V}_\infty(t_i^-) = 0 \quad (78)$$

2.5.4 Математическая модель при описании движения КА при гравитационном манёвре, переводящим КА на целевую гелиоцентрическую орбиту с фиксированным наклонением

Как упоминалось выше в п. 1.5 раздела 1, параметры последнего гравитационного манёвра у планеты выбираются таким образом, чтобы удовлетворялось заданное ограничение по наклонению целевой гелиоцентрической орбиты к плоскости солнечного экватора (2). При этом остальные элементы орбиты рассматривались нефиксированными. При такой постановке задачи для записи условий трансверсальности целесообразно перейти

к анализу движения КА, рассматривая классические элементы орбиты КА относительно системы координат, основной плоскостью которой является плоскость солнечного экватора в качестве нового фазового вектора. Воспользуемся соотношениями из п. 2.4. При этом легко удастся записать условия трансверсальности при последнем гравитационном манёвре, опираясь на математический аппарат, использующий канонические преобразования в гамильтоновой механике.

Целевая гелиоцентрическая орбита фиксируется только наклоном к плоскости солнечного экватора (2), остальные её элементы (например, фокальный параметр p , эксцентриситет e , долгота восходящего узла Ω , аргумент перигелия ω), как и характеристика, определяющая положение КА на орбите (истинная аномалия в начальной точке целевой орбиты v_0) не заданы. Необходимые условия оптимальности этих элементов могут быть записаны в виде равенства нулю сопряжённых переменных к этим характеристикам ψ_p , ψ_e , ψ_Ω , ψ_ω , ψ_{v_0} . Следовательно, пять соответствующих условий оптимальности имеют вид:

$$\begin{cases} \psi_p(t_f^+) = 0 \\ \psi_e(t_f^+) = 0 \\ \psi_\Omega(t_f^+) = 0 \\ \psi_\omega(t_f^+) = 0 \\ \psi_{v_0}(t_f^+) = 0 \end{cases} \quad (79)$$

При удовлетворении условиям (79) КА после гравитационного манёвра у планеты переходит на целевую гелиоцентрическую орбиту с оптимальными значениями фокального параметра p , эксцентриситета e , долготы восходящего узла Ω , аргумента перигелия ω и истинной аномалии v_0 .

Для использования условий оптимальности в виде равенств (83) предлагается использовать аппарат канонических преобразований. Приведённое выше равенство (48) ($\Psi_X = \frac{\partial Y^T}{\partial X} \cdot \Psi_Y$) даёт возможность связать сопряжённые переменные к одному набору вектора фазовых координат \mathbf{X} с сопряжёнными переменными к другому набору \mathbf{Y} . Рассматриваемый в настоящем подразделе вектор фазовых координат \mathbf{Y} отличается от аналогичного вектора фазовых координат п. 2.4 одной последней

компонентой. В п. 2.4 этой компонентой был элемент орбиты ($n \cdot t_\pi$); вместо него вводится истинная аномалия начальной точки гелиоцентрической орбиты после гравитационного манёвра v_0 .

Для рассматриваемого состава векторов \mathbf{X} и \mathbf{Y} равенство (49) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \psi_{r_x} \\ \psi_{r_y} \\ \psi_{r_z} \\ \psi_{V_x} \\ \psi_{V_y} \\ \psi_{V_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dp}{dV_x} & \frac{de}{dV_x} & \frac{di}{dV_x} & \frac{d\Omega}{dV_x} & \frac{d\omega}{dV_x} & \frac{d(v_0)}{dV_x} \\ \frac{dp}{dV_y} & \frac{de}{dV_y} & \frac{di}{dV_y} & \frac{d\Omega}{dV_y} & \frac{d\omega}{dV_y} & \frac{d(v_0)}{dV_y} \\ \frac{dp}{dV_z} & \frac{de}{dV_z} & \frac{di}{dV_z} & \frac{d\Omega}{dV_z} & \frac{d\omega}{dV_z} & \frac{d(v_0)}{dV_z} \\ \frac{dp}{dr_x} & \frac{de}{dr_x} & \frac{di}{dr_x} & \frac{d\Omega}{dr_x} & \frac{d\omega}{dr_x} & \frac{d(v_0)}{dr_x} \\ \frac{dp}{dr_y} & \frac{de}{dr_y} & \frac{di}{dr_y} & \frac{d\Omega}{dr_y} & \frac{d\omega}{dr_y} & \frac{d(v_0)}{dr_y} \\ \frac{dp}{dr_z} & \frac{de}{dr_z} & \frac{di}{dr_z} & \frac{d\Omega}{dr_z} & \frac{d\omega}{dr_z} & \frac{d(v_0)}{dr_z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_e \\ \psi_{inc} \\ \psi_\Omega \\ \psi_\omega \\ \psi_{v_0} \end{pmatrix} \quad (80)$$

Используя условие оптимальности (79), удастся записать (80) в виде:

$$\begin{pmatrix} \psi_{r_x}(t_i^+) \\ \psi_{r_y}(t_i^+) \\ \psi_{r_z}(t_i^+) \\ \psi_{V_x}(t_i^+) \\ \psi_{V_y}(t_i^+) \\ \psi_{V_z}(t_i^+) \end{pmatrix} = \left[\frac{di}{dV_x(t_i^+)}; \frac{di}{dV_y(t_i^+)}; \frac{di}{dV_z(t_i^+)}; \frac{di}{dr_x(t_i^+)}; \frac{di}{dr_y(t_i^+)}; \frac{di}{dr_z(t_i^+)} \right]^T \cdot \psi_{inc}(t_i^+) \quad (81)$$

где $\psi_{inc}(t_i^+)$ – сопряжённая переменная к наклонению орбиты КА после гравитационного манёвра.

Компоненты вектора Лоудена после гравитационного манёвра, входящие в вектор сопряженных переменных в (81), можно вычислить по формуле:

$$\Psi_V^{opt}(t_f^+) = \begin{pmatrix} \frac{di}{dV_x(t_i^+)} \\ \frac{di}{dV_y(t_i^+)} \\ \frac{di}{dV_z(t_i^+)} \end{pmatrix} \cdot \psi_{inc}(t_f^+) \quad (82)$$

После записи производных от наклона по компонентам вектора скорости выражение для базис-вектора $\Psi_V^{opt}(t_f^+)$ удаётся представить, как функцию характеристик траектории КА после последнего гравитационного манёвра, компонент радиуса-вектора КА, компонент вектора его гелиоцентрической скорости и сопряжённой переменной к наклону, в виде:

$$\Psi_V^{opt}(t_f^+) = \frac{-1}{\sin(i) \cdot \sqrt{\sigma^2}^3} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \cdot (V_y \cdot r_z - V_z \cdot r_y) \\ c_1 \cdot (V_z \cdot r_x - V_x \cdot r_z) \\ c_1 \cdot (V_x \cdot r_y - V_y \cdot r_x) \end{pmatrix} \cdot \psi_{inc}(t_f^+) \quad (83)$$

где $c_1 = r_x \cdot (V_z \cdot r_x - V_x \cdot r_z) - r_y \cdot (V_y \cdot r_z - V_z \cdot r_y)$;

$$\sigma^2 = (V_x \cdot r_y - V_y \cdot r_x)^2 + (V_y \cdot r_z - V_z \cdot r_y)^2 + (V_z \cdot r_x - V_x \cdot r_z)^2.$$

Таким образом, базис-вектор $\Psi_{VSunEqv}(t_f^+)$ после последнего гравитационного манёвра в системе координат, с основной плоскостью, совпадающей с плоскостью солнечного экватора, должен удовлетворять векторному условию:

$$\Psi_{VSunEqv}(t_f^+) - \Psi_V^{opt}(t_f^+) = 0 \quad (84)$$

Напомним, что все гелиоцентрические перелёты до последнего гравитационного манёвра анализируются в гелиоцентрической эклиптической системе координат. Пусть в результате анализа получены характеристики траектории в момент подлёта КА к планете для последнего гравитационного манёвра. Обозначим этот момент как t_f^- . Предполагаем известными вектор гелиоцентрической скорости КА $V_{SC}(t_f^-)$, вектор гиперболического избытка скорости при подлёте к планете $V_\infty(t_f^-)$, базис-вектор в момент подлёта КА к планете $\Psi_V(t_f^-)$. Тогда вектор гиперболического избытка скорости после гравитационного манёвра $V_\infty(t_f^+)$ является функцией параметров гравитационного манёвра и определяется с использованием соотношения (59). Вектор гелиоцентрической скорости КА $V_{SC}(t_f^+)$ после гравитационного манёвра находится как сумма $V_\infty(t_f^+)$ и вектора гелиоцентрической скорости планеты в момент гравитационного манёвра $V_{planet}(t_f)$. Базис-вектор после последнего гравитационного манёвра $\Psi_V(t_f^+)$ определяется или с использованием последнего

равенства из соотношений (75), если гравитационный манёвр выполняется с минимально допустимой высотой перицентра пролётной гиперболы. В противном случае с использованием равенства из (74).

Для нахождения $\Psi_V^{opt}(t_f^+)$ с использованием равенства (83) и нахождения $\Psi_{VSunEqv}(t_f^+)$ в системе координат, с основной плоскостью, совпадающей с плоскостью солнечного экватора (гелиоцентрическая гелиоэкваториальная система координат (ГГСК)), можно использовать матрицу перехода от эллиптической системы координат ГЭСК к рассматриваемой системе ГГСК. Обозначим эту матрицу как Λ . Для любого вектора \mathbf{Z} , известного в системе ГЭСК, нахождение его компонент в системе ГГСК \mathbf{Z}_1 справедливо:

$$\mathbf{Z}_1 = \Lambda \cdot \mathbf{Z} \quad (85)$$

Матрица Λ находится как произведение трёх матриц, описывающих три поворота системы координат при переходе от ГЭСК к ГГСК [36].

Первый поворот осуществляется вокруг оси Ox на угол $\varepsilon = 23,439291111^\circ$ между земным экватором и плоскостью эклиптики для эпохи J2000.0. Матрица перехода к геоэкваториальной системе координат имеет вид:

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varepsilon) & \sin(\varepsilon) \\ 0 & -\sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \quad (86)$$

Второй поворот осуществляется вокруг оси Oz на угол $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{Sun}\right)$, где $\alpha_{Sun} = 286,13^\circ$ - прямое восхождение северного полюса Солнца. Матрица этого перехода имеет вид:

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} \sin(\alpha_{Sun}) & \cos(\alpha_{Sun}) & 0 \\ -\cos(\alpha_{Sun}) & \sin(\alpha_{Sun}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (87)$$

Третий поворот осуществляется вокруг оси Ox на угол $\left(\frac{\pi}{2} - \delta_{Sun}\right)$, где $\delta_{Sun} = 63,87^\circ$ - склонение северного полюса Солнца. Матрица этого перехода имеет вид:

$$\Lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\delta_{Sun}) & \cos(\delta_{Sun}) \\ 0 & -\cos(\delta_{Sun}) & \sin(\delta_{Sun}) \end{pmatrix} \quad (88)$$

Полную матрицу перехода можно вычислить по следующему соотношению:

$$\Lambda = \Lambda_3 \cdot \Lambda_2 \cdot \Lambda_1$$

Подставим в это выражение все необходимые параметры и получим:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{pmatrix} \quad (89)$$

где $\Lambda_{11} = \sin(\alpha_{Sun})$;

$\Lambda_{21} = -\cos(\alpha_{Sun}) \cdot \sin(\delta_{Sun})$;

$\Lambda_{31} = \cos(\alpha_{Sun}) \cdot \cos(\delta_{Sun})$;

$\Lambda_{12} = \cos(\varepsilon) \cdot \cos(\alpha_{Sun})$;

$\Lambda_{22} = \cos(\varepsilon) \cdot \sin(\alpha_{Sun}) \cdot \sin(\delta_{Sun}) - \sin(\varepsilon) \cdot \cos(\delta_{Sun})$;

$\Lambda_{32} = -\sin(\varepsilon) \cdot \sin(\delta_{Sun}) - \cos(\varepsilon) \cdot \cos(\delta_{Sun}) \cdot \sin(\alpha_{Sun})$;

$\Lambda_{13} = \sin(\varepsilon) \cdot \cos(\alpha_{Sun})$;

$\Lambda_{23} = \cos(\varepsilon) \cdot \cos(\delta_{Sun}) + \sin(\varepsilon) \cdot \sin(\alpha_{Sun}) \cdot \sin(\delta_{Sun})$;

$\Lambda_{33} = \cos(\varepsilon) \cdot \sin(\delta_{Sun}) - \sin(\varepsilon) \cdot \sin(\alpha_{Sun}) \cdot \cos(\delta_{Sun})$.

Таким образом, базис-вектор $\Psi_{V_{SunEqv}}(t_f^+)$ после последнего гравитационного манёвра в системе координат, с основной плоскостью, совпадающей с плоскостью солнечного экватора, определяется как произведение матрицы Λ на $\Psi_V(t_f^+)$. Базис-вектор $\Psi_V^{opt}(t_f^+)$ определяется с использованием (83), при этом компоненты радиуса-вектора КА и компоненты его скорости, входящие в правые части (83) находятся с использованием матрицы перехода. Например, компоненты вектора скорости после последнего гравитационного манёвра в системе координат, с основной плоскостью, совпадающей с плоскостью солнечного экватора, находятся как произведение матрицы Λ на $V_{SC}(t_f^+)$.

Заканчивая анализ характеристик последнего гравитационного манёвра, стоит заметить, что этот анализ позволил формализовать условия оптимальности этого гравитационного манёвра в виде векторного равенства (84). Среди выбираемых параметров схемы перелёта появился новый параметр – сопряжённая переменная к наклонению КА после последнего гравитационного манёвра $\psi_{inc}(t_f^+)$, входящая в выражение (83) для базис-вектора $\Psi_V^{opt}(t_f^+)$.

2.6 Заключение по разделу 2

Таким образом, в разделе приведены:

1. Математические модели, описывающие движение КА на отдельных участках рассматриваемой сложной схемы выведения КА с комбинированной двигательной установкой на целевую гелиоцентрическую орбиту. Оптимизация траектории КА на всех участках рассматриваемой схемы перелёта (на геоцентрическом участке отлета КА от Земли, оптимального движения КА, на гелиоцентрических участках, на участках гравитационных манёвров).

2. Математическая модель для анализа пассивного оптимального движения КА в рамках задачи двух тел с использованием канонических преобразований в гамильтоновой механике.

3. Анализ нерезонансного гравитационного манёвра, как элемента сложной схемы межпланетного перелёта.

4. Анализ резонансного гравитационного манёвра, переводящего КА на гелиоцентрическую орбиту с угловой дальностью $2\pi \cdot k$ (резонансный гравитационный манёвр с целым числом витков вокруг Солнца), где k – целое положительное число.

5. Анализ π -резонансного гравитационного манёвра, переводящего КА на гелиоцентрическую орбиту планета–планета с угловой дальностью $\pi \cdot (2k - 1)$, где k – целое положительное число.

6. Анализ пассивного околорезонансного гравитационного манёвра.

Все используемые для анализа математические модели включают необходимые условия оптимальности принципа максимума.

3 Математическая постановка задачи сквозной оптимизации выведения КА с комбинированной двигательной установкой на целевую орбиту.

Формулировка многоточечной краевой задачи

3.1 Постановка задачи сквозной оптимизации межпланетной траектории транспортной космической системы с комбинированной двигательной установкой с использованием последовательности гравитационных манёвров

Анализируемую задачу сквозной оптимизации траектории выведения КА на гелиоцентрическую орбиту для исследования Солнца можно рассматривать как задачу теории оптимального управления. Эта теория даёт методы для определения наиболее выгодных траекторий полёта КА с минимальными затратами, рассматриваемыми в качестве критерия оптимальности (3).

В данном подразделе сформулирована задача сквозной оптимизации траектории КА при его выведении на гелиоцентрическую орбиту для исследования Солнца, использующую последовательность гравитационных манёвров. В частности, выбран набор независимых параметров траектории выведения КА на целевую орбиту, приведены необходимые условия оптимальности. Проблема сведена к многоточечной краевой задаче, в которой количество краевых условий равно количеству выбираемых параметров.

3.2 Анализируемая схема перелёта транспортной системы на гелиоцентрическую орбиту с заданным наклоном

Анализируется сложная схема выведения транспортной системы с комбинированной двигательной установкой на гелиоцентрическую орбиту для исследования Солнца с использованием некоторой последовательности гравитационных манёвров.

Схема выведения КА на целевую орбиту с фиксированным наклоном состоит из следующих этапов:

1. РН «Союз-2.1б» выводит транспортную космическую систему, состоящую из КА и ХРБ, на низкую околоземную орбиту.

2. ХРБ «Фрегат» при старте с базовой околоземной орбиты обеспечивает транспортной космической системе некоторый гиперболический избыток скорости. Этот гиперболический избыток скорости определяет некоторый импульс скорости при старте с опорной околоземной орбиты. После выхода на гиперболу отлёта от Земли ХРБ отделяется от КА.

3. Затем реализуется перелёт к Венере КА с маршевой ЭРДУ с использованием нерезонансного гравитационного манёвра у Земли. Участок перелёта Земля–Земля и Земля–Венера предполагают возможность включения ЭРДУ КА. Количество активных участков, а также длительность работы ЭРДУ являются выбираемыми параметрами схемы полёта.

4. КА совершает последовательность пассивных околорезонансных гравитационных манёвров у Венеры, переводящих КА на гелиоцентрическую орбиту с угловыми дальностями, почти равными $2 \cdot \pi k$ и $\pi \cdot (2k - 1)$, где k – целое положительное число, с постепенным повышением наклона гелиоцентрических орбит. Количество гравитационных манёвров у Венеры является выбираемым параметром схемы полёта. На всех участках планета–планета предполагается возможность включения маршевой двигательной установки КА.

5. Последний гравитационный манёвр у Венеры переводит КА на нерезонансную траекторию. Параметры гравитационного манёвра выбираются таким образом, чтобы обеспечить заданное наклонение орбиты КА к плоскости солнечного экватора.

3.3 Выбираемые характеристики анализируемой схемы выведения транспортной космической системы с комбинированной двигательной установкой

Выбираемыми характеристиками для анализируемого маршрута являются:

- дата старта от Земли t_0 ;

- длительность участка разгона при старте транспортной системы с опорной околоземной орбиты t_{01} ;
- программа угла тангажа (угол между вектором тяги ракетного двигателя и плоскостью местного горизонта) на участке работы двигателя ХРБ «Фрегат»;
- даты проведения гравитационных манёвров у планет t_i , где $i = 1, \dots, N$; N – количество гравитационных манёвров;
- вектор гиперболического избытка скорости при старте от Земли $V_{\infty}(t_{01})$;
- векторы гиперболических избытков скоростей при подлёте к планете для гравитационного манёвра у неё $V_{\infty}(t_i)$, где $i = 1, \dots, N$; N – количество гравитационных манёвров;
- количество гравитационных манёвров N ;
- параметры всех гравитационных манёвров;
- программа управления движением КА на гелиоцентрических участках перелёта: количество активных и пассивных участков, даты начала и конца этих участков;
- направление вектора тяги ЭРДУ на активных участках перелёта планета-планета.

Среди перечисленных характеристик присутствуют программы управления движением КА на всех участках перелёта. Принцип максимума позволил найти эти программы как функции компонент вектора сопряжённых переменных и свести задачу к краевой задаче для систем дифференциальных уравнений. Ниже перечислены неизвестные параметры краевой задачи и приведён полный набор краевых условий, что позволило сформулировать рассматриваемую многоточечную краевую задачу.

Анализируемая задача рассматривается как $(N + 2)$ -точечная, где N – количество гравитационных манёвров в рамках анализируемой задачи сквозной оптимизации. При этом соотношения для каждого (например, i -ого) гравитационного манёвра, определяющие связь характеристик траектории КА после гравитационного манёвра с её характеристиками до этого манёвра, рассматриваются как связь характеристик в начальной точке $(i+1)$ -ого

гелиоцентрического перелёта с характеристиками в конечной точке i -ого гелиоцентрического перелёта КА. Общее число участков траектории состоит из участков 4-х типов:

- *Тип 1.* Геоцентрический участок старта КА с околоземной орбиты с выходом на гиперболу отлёта от Земли.
- *Тип 2.* Первый гелиоцентрический участок Земля–планета с подлётом к планете для первого гравитационного манёвра.
- *Тип 3.* Несколько $(N - 2)$ промежуточных гелиоцентрических участков планета–планета.
- *Тип 4.* Последний гелиоцентрический перелёт планета–планета, заканчивающийся последним гравитационным манёвром, с выходом на целевую гелиоцентрическую орбиту.

Оптимальная траектория выведения КА на целевую гелиоцентрическую орбиту определяется большим числом параметров. Эти параметры и являются неизвестными параметрами краевой задачи, к которой принцип максимума даёт возможность свести оптимизационную проблему. При формулировке краевой задачи был выделен набор, так называемых независимых параметров. Остальные параметры рассматривались, как функции независимых благодаря использованию некоторых из условий оптимизации. Такой приём помогает понизить порядок краевой задачи. В п. 3.4 перечислены независимые выбираемые параметры и приведён алгоритм нахождения остальных параметров. В п. 3.5 приведены все краевые условия, которые должны быть удовлетворены выбором независимых выбираемых параметров.

3.4 Независимые выбираемые параметры анализируемой схемы выведения транспортной космической системы на целевую гелиоцентрическую орбиту

Перечислим параметры, выбранные в качестве независимых, с указанием в квадратных скобках количества анализируемых скалярных параметров каждого перечисляемого пункта. При перечислении будет отмечать, к какому из четырёх

типов участков относятся параметры, и фиксировать число рассматриваемых параметров.

Начнём с участка первого типа – **геоцентрического участка старта КА с околоземной орбиты**. Независимыми выбираемыми параметрами для участка рассматриваются следующие четыре параметра: $\psi_m(0), \vartheta_0, \psi_r(0), t_{01}$. Они введены в виде (17) в п. 2.2 раздела 2: *[4 скалярных параметра]*.

Для первого гелиоцентрического перелёта (участка Земля–планета) независимыми выбираемыми параметрами рассматриваются:

- дата старта t_0 (дата отсчитывалась от некоторой выбранной опорной даты – 01.01.2027 г.): *[1 скалярный параметр]*;
- величина вектора гиперболического избытка скорости при старте КА от Земли $V_\infty(t_{01})$ и углы, характеризующие направление этого вектора (α_{oV_∞} – прямое восхождение и δ_{oV_∞} – склонение): *[3 скалярных параметра]*;
- вектор сопряжённых переменных к радиусу-вектору КА в начальной точке гелиоцентрического перелёта Земля–планета $\Psi_r(t_0)$: *[3 скалярных параметра]*;
- величина переменной, сопряжённой к массе КА в начальной точке гелиоцентрического перелёта Земля–планета $\psi_m(t_0)$: *[1 скалярный параметр]*;
- дата окончания участка (дата первого гравитационного манёвра) t_1 : *[1 скалярный параметр]*;

Общее количество скалярных параметров для первого гелиоцентрического перелёта равно 9.

Для каждого из $(N - 2)$ **промежуточных гелиоцентрических перелётов планета–планета** независимыми выбираемыми параметрами рассматриваются:

- даты окончания участков $t_i, (i = 1, \dots, N - 2)$: *[1 скалярный параметр для каждого участка]*;
- векторы гиперболических избытков скорости в начальной точке участка $V_\infty(t_i^+), (i = 1, \dots, N - 2)$: *[3 скалярных параметра для каждого участка]*;
- векторы сопряжённых переменных к гелиоцентрическому радиусу-вектору КА в начальной точке участка $\Psi_r(t_i^+), (i = 1, \dots, N - 2)$: *[3 скалярных параметра для каждого участка]*;

- множители Лагранжа ν_{4_i}, ν_{5_i} , ($i = 1, \dots, N - 2$), входящие в равенства (74) и (75), при описании гравитационного манёвра в начальной точке участка: [2 скалярных параметра для каждого участка];

Общее количество скалярных параметров для всех $(N - 2)$ промежуточных гелиоцентрических перелётов планета–планета равно $9 \cdot (N - 2)$.

Для последнего гелиоцентрического перелёта планета–планета независимыми выбираемыми параметрами рассматриваются:

- дата последнего гравитационного манёвра t_N : [1 скалярный параметр];
- вектор гиперболического избытка скорости в начальной точке участка $\mathbf{V}_\infty(t_{N-1}^+)$: [3 скалярных параметра];
- векторы сопряжённых переменных к гелиоцентрическому радиусу-вектору КА в начальной точке участка $\Psi_r(t_{N-1}^+)$: [3 скалярных параметра];
- множители Лагранжа ν_{4_i}, ν_{5_i} , ($i = N - 1, N$), входящие в равенства (74) и (75) при описании гравитационного манёвра в начальной и конечной точках участка: [4 скалярных параметра];
- вектор гиперболического избытка скорости после последнего гравитационного манёвра $\mathbf{V}_\infty(t_N^+)$: [3 скалярных параметра];
- сопряжённая переменная к наклонению целевой гелиоцентрической орбиты (орбиты после последнего гравитационного манёвра) ψ_{inc} : [1 скалярный параметр].

Общее количество скалярных параметров для участка равно 15.

Таким образом, перечислено $(9N + 10)$ независимых выбираемых параметров схемы перелёта. Приведём соотношения, которыми можно пользоваться для определения параметров схемы перелёта, не попавших в набор независимых параметров. В частности, соотношения по которым можно найти векторы начальных условий при интегрировании систем дифференциальных уравнений, описывающих оптимальное движение КА на всех участках траектории.

Геоцентрический участок

Для интегрирования системы дифференциальных уравнений (16) по введённым независимым параметрам схемы перелёта рассматриваемого участка требуется определить базис–вектор в начальной точке траектории. Это осуществляется таким образом: величина базис–вектора определяется с использованием равенства (14). Компоненты базис–вектора находятся с использованием равенства (15).

Первый гелиоцентрический перелёт

Гелиоцентрический радиус–вектор КА в начальной точке траектории совпадает с радиусом–вектором Земли, определяемом датой начала перелёта на участке. Вектор скорости КА в начальной точке траектории равен векторной сумме гелиоцентрической скорости Земли и вектора гиперболического избытка скорости, который рассматривается как независимый выбираемый параметр схемы перелёта. К независимым параметрам схемы перелёта отнесены вектор, сопряжённый к радиусу–вектору КА и сопряжённая к массе переменная в начальной точке участка. Для интегрирования системы дифференциальных уравнений (36) на рассматриваемом гелиоцентрическом участке траектории по введённым независимым параметрам схемы перелёта рассматриваемого участка требуется определить базис–вектор в начальной точке траектории. Это осуществляется так: из условий принципа максимума [41] следует, что орт базис–вектора в начальной точке траектории перелёта $\mathbf{ort}\psi_V(t_{01})$ совпадает с ортом вектора гиперболического избытка, фиксируемого его прямым восхождением α_{oV_∞} и склонением δ_{oV_∞} . Поэтому справедливо:

$$\mathbf{ort}\psi_V(t_{01}) = \mathbf{ort}V_\infty(t_{01}) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_{oV_\infty}) \cdot \cos(\delta_{oV_\infty}) \\ \sin(\alpha_{oV_\infty}) \cdot \cos(\delta_{oV_\infty}) \\ \sin(\delta_{oV_\infty}) \end{pmatrix} \quad (90)$$

Величина базис-вектора $\psi_V(t_0)$ в начальной точке гелиоцентрической траектории при старте от Земли может быть найдена из условия оптимальности величины гиперболического избытка скорости. Это условие может быть записано в виде [41]:

$$\psi_V(t_0) + \psi_m(t_0) \cdot \frac{\partial m(t_0)}{\partial V_\infty(t_{01})} = 0 \quad (91)$$

В последнем равенстве $\frac{\partial m(t_0)}{\partial V_\infty(t_{01})}$ представляет собой производную от массы КА в начале гелиоцентрического перелёта при старте от Земли по величине гиперболического избытка скорости. Эта производная рассматривается как функция величины гиперболического избытка скорости и приведена в равенстве (22). $\psi_m(t_0)$ – сопряжённая переменная к массе КА. Эта переменная введена в набор независимых выбираемых параметров оптимизируемой схемы перелёта.

Промежуточные гелиоцентрические перелёты планета–планета

Для рассматриваемых участков гелиоцентрические радиусы–векторы КА в начальных точках участков совпадают с радиусами–векторами планет, определяемыми датами начала участков. Векторы скоростей КА в начальных точках участков равны векторным суммам гелиоцентрических скоростей планеты и гиперболических избытков скоростей. Масса КА в начальной точке участка равна массе КА в конечной точке предыдущего участка.

Для интегрирования системы дифференциальных уравнений (36) на рассматриваемых гелиоцентрических участках траектории по введённым независимым параметрам схемы перелёта рассматриваемых участков требуется определить базис-векторы в начальных точках рассматриваемых участков траектории. Воспользовавшись вторыми соотношениями систем равенств (72) и (73), можно получить равенство, справедливое для обоих типов гравитационных манёвров:

$$\Psi_V^+(t_i) = -2 \cdot v_{4i} \cdot V_\infty^+(t_i) + v_{5i} \cdot V_\infty^-(t_i) \quad (92)$$

Записанное условие включает вектор гиперболического избытка скорости при подлёте к планете (этот вектор находится в результате интегрирования системы дифференциальных уравнений на предыдущем участке траектории), вектор гиперболического избытка скорости после гравитационного манёвра в начальной точке рассматриваемого участка траектории (этот вектор включен в список независимых выбираемых параметров схемы перелёта) и множители

Лагранжа v_{4i} и v_{5i} , которые тоже входят в список независимых выбираемых параметров.

Так как при гравитационном манёвре масса КА не изменяется (гравитационный манёвр рассматривается пассивным), то используя условия оптимальности принципа максимума, можно утверждать, что сопряжённая к массе переменная при гравитационном манёвре не меняется, т.е. $\psi_m^+(t_i) = \psi_m^-(t_i)$, где $i = 1, \dots, N - 1$.

Последний гелиоцентрический перелёт планета–планета

Начальные условия для интегрирования уравнений оптимального движения КА на последнем перелёте планета–планета определяются абсолютно так же, как и на промежуточных участках.

Приведённое описание даёт возможность по параметрам, входящим в список независимых выбираемых параметров схемы перелёта, найти начальные условия для решения задачи Коши для всех введённых участков траектории, получить условия движения КА в конце всех участков.

Перейдём к перечислению краевых условий рассматриваемой $(N + 2)$ -точечной краевой задачи.

3.5 Краевые условия анализируемой многоточечной задачи оптимизации

Проанализируем краевые условия (условия движения в конечных точках) для всех участков траектории.

Для геоцентрического участка выхода на гиперболу отлёта от Земли конечные условия записаны в виде 4-х условий (19):

$$\begin{pmatrix} (V_r(t_{01}))^2 + (V_n(t_{01}))^2 - \frac{2}{r(t_{01})} - (V_\infty(t_{01}))^2 \\ \psi_{Vr}(t_{01}) - \psi_r(t_{01}) \cdot V_r(t_{01}) \cdot (r(t_{01}))^2 \\ \psi_{Vn}(t_{01}) - \psi_r(t_{01}) \cdot V_n(t_{01}) \cdot (r(t_{01}))^2 \\ \psi_m(t_{01}) - 1 \end{pmatrix} = 0$$

Первое из этих условий обеспечивает величину гиперболического избытка скорости при старте от Земли, остальные три условия являются условиями трансверсальности: (*4 скалярных условия*).

Условие оптимальности даты старта t_0 (даты начала первого гелиоцентрического перелёта Земля–планета) имеет вид:

$$\Psi_r(t_0)^T \cdot V_\infty(t_{01}) - P \cdot \psi(t_0) \cdot \delta(t_0) = 0$$

В последнее равенство входят вектор гиперболического избытка скорости при старте от Земли $V_\infty(t_{01})$, вектор $\Psi_r(t_0)$, сопряжённый к радиусу-вектору КА, функция переключения двигателя ЭРДУ $\psi(t_0)$ и функция тяги $\delta(t_0)$ в начальной точке первого гелиоцентрического перелёта: (*1 скалярное условие*).

Условие оптимальности дат гравитационных манёвров (78) имеет вид:

$$\Psi_r^+(t_i)^T \cdot V_\infty^+(t_i) - \Psi_r^-(t_i)^T \cdot V_\infty^-(t_i) = 0$$

В условие входят векторы гиперболических избытков скоростей до и после гравитационного манёвра, а также векторы $\Psi_r(t_i)$, сопряжённые к радиусу-вектору КА также до и после гравитационного манёвра: (*N скалярных условий*).

Вектор граничных условий и условий оптимальности в точке подлёта КА к планете для гравитационного манёвра около неё (в конечных точках всех гелиоцентрических перелётов планета-планета) имеет вид (74), если высота перицентра гиперболы пролёта КА больше минимально допустимой, или (75), если КА осуществляет пролёт у планеты на минимально допустимой высоте. Эти системы равенств включают два векторных и два скалярных равенства. Т.е. для каждого из рассматриваемых гравитационных манёвров должно быть исследовано $8N$ скалярных краевых условий: (*$8N$ скалярных условий для всех N гравитационных манёвров*).

После последнего гравитационного манёвра КА должен оказаться на гелиоцентрической орбите с заданным наклоном. Т.е. должно быть выполнено краевое условие (2): (*1 скалярное условие*).

Оптимизация нефиксированных элементов целевой гелиоцентрической орбиты реализуется удовлетворением векторного условия трансверсальности (84): (*3 скалярных условия*).

Последнее условие, обеспечивающее максимальную массу КА на целевой орбите, записывается в виде условия: $\psi_m(t_N) - 1 = 0$: (1 скалярное условие).

Итого перечислено:

$$4 + 1 + N + 8N + 1 + 3 + 1 = 9N + 10 \text{ скалярных условий.}$$

Число условий равно числу перечисленных ранее независимых выбираемых параметров схемы перелёта. Краевая многоточечная $(N + 2)$ -точечная задача сформулирована. Её порядок равен $9N + 10$. Напомним, что здесь N – число гравитационных манёвров в схеме перелёта.

3.6 Заключение по разделу 3

Таким образом, в данном разделе, используя принцип максимума, приведён полный набор условий оптимальности. Сформулирована $(N + 2)$ -точечная краевая задача. Её порядок равен $(9N + 10)$.

4 Численные результаты проектно-баллистического анализа траектории выведения транспортной космической системы на целевую гелиоцентрическую орбиту

В данном разделе приведены численные характеристики нескольких проанализированных траекторий выведения КА на целевую гелиоцентрическую орбиту. Рассмотрена возможность достижения наклонения 30° к плоскости экватора Солнца с использованием околорезонансных гелиоцентрических орбит КА с орбитой Венеры:

- с почти целыми порядками резонансов;
- с использованием почти целых и π -резонансов.

Можно отметить, что для рассматриваемой постановки $(N + 2)$ -точечной задачи сквозной оптимизации (N – количество гравитационных манёвров) из-за высокого порядка $(9N + 10)$ оказалась достаточно сложной. Необходимо принимать во внимание тот факт, что существует большое число локальных решений. Получить адекватное решение анализируемой задачи получилось следующим образом:

1. Первоначальный поиск решения проводился в рамках упрощённой вспомогательной задачи. Этому поиску посвящён раздел 4.1.

2. Полученные результаты решения вспомогательной задачи применялись в качестве начального приближения для поставленной в разделе 3 задачи сквозной оптимизации.

4.1 Анализ вспомогательной задачи. Выбор последовательности орбит КА, резонансных с орбитой Венеры

Для получения нулевого приближения предложено отказаться от решения сформулированной проблемы сквозной оптимизации. Первоначальный поиск траектории, включая последовательность резонансных гелиоцентрических орбит

КА с орбитой Венеры, предлагаем проводить в рамках упрощённой (вспомогательной задачи).

Для того, чтобы целевая гелиоцентрическая орбита КА имела наклонение 30° к плоскости солнечного экватора, величина гиперболического избытка скорости при подлёте к Венере (для последующих гравитационных манёвров у неё) должна быть достаточно большой. В цепочку резонансных гравитационных манёвров у Венеры добавляется один нерезонансный гравитационный манёвр у Земли. Он позволяет достичь некоторой оптимальной величины гиперболического избытка скорости у Венеры. Последовательность гравитационных манёвров у Венеры осуществляется в одной и той же точке или в противоположной точке орбиты планеты. Т.е. движение Венеры после первого подлёта КА к ней рассматривается невозмущённым.

Постановка вспомогательной задачи оптимизации сложной схемы межпланетного перелёта следующая:

1. Предполагается, что ХРБ «Фрегат» обеспечил КА старт с опорной околоземной орбиты. После выхода на гиперболу отлёта от Земли «Фрегат» отделяется от КА.

2. На гелиоцентрическом участке перелёта Земля–Земля предусматривается возможность работы ЭРДУ КА. На данном участке перелёта имеется возможность включения маршевой двигательной установки.

3. Затем реализуется перелёт к Венере КА с использованием нерезонансного гравитационного манёвра у Земли с некоторой фиксированной величиной гиперболического избытка скорости. На траектории Земля – Венера рассматривается возможность работы двигательной установки КА.

4. После первого гравитационного манёвра у Венеры КА переходит на последовательность гелиоцентрических орбит, находящихся в резонансе с орбитой Венеры. На участках Венера–Венера включение ЭРДУ КА не предполагается. Рассматривается возможность использования перелётных орбит КА с угловыми дальностями $2\pi \cdot k$ и $\pi \cdot (2k - 1)$, где k – целое положительное число. Движение КА анализируется в рамках ограниченной задачи двух тел с применением приведённых соотношений из п.п. 2.5.1 и 2.5.2.

5. Параметры последнего (нерезонансного) гравитационного манёвра у Венеры выбираются таким образом, чтобы обеспечить максимальное наклонение целевой орбиты КА к плоскости солнечного экватора.

Выбираемыми параметрами анализируемой схемы маршрута рассматривались:

- дата старта от Земли t_0 ;
- дата гравитационного манёвра у Земли t_1 и первого гравитационного манёвра у Венеры t_2 ;
- вектор гиперболического избытка скорости при старте от Земли $\mathbf{V}_\infty(t_{01})$;
- величина гиперболического избытка скорости при первом подлёте к Венере $V_\infty(t_2)$;
- количество гравитационных манёвров N у Венеры;
- параметры всех гравитационных манёвров у Венеры β_i и γ_i ;
- программа управления движением КА на гелиоцентрических участках перелёта Земля–Земля и Земля–Венера: количество активных и пассивных участков, даты начала и конца этих участков;
- направление вектора тяги ЭРДУ на активных участках перелёта Земля – Земля и Земля - Венера;
- вектор сопряжённых переменных в начальной точке гелиоцентрической траектории при старте от Земли $\Psi_r(t_0), \Psi_v(t_0), \psi_m(t_0)$;
- вектор сопряжённых переменных после гравитационного манёвра у Земли;
- неизвестные множители Лагранжа, введённые при описании условий оптимизации (71) и (72) гравитационных манёвров у Земли и Венеры.

Некоторые условия оптимальности из задачи сквозной оптимизации не были задействованы, а именно:

- условия оптимальности дат гравитационных манёвров у Венеры;
- условия оптимальности для элементов целевой орбиты КА;
- условия оптимальности гиперболических избытков скорости у Венеры.

Критерием выбора характеристик является массовый критерий:

$$J(\mathbf{a}, \mathbf{u}(t)) = -m(t_2) \quad (93)$$

где $m(t_2)$ – масса КА в момент первого подлёта к Венере;

t_2 – дата первого гравитационного манёвра у Венеры.

Т.е. максимизируется масса КА, доставляемая в окрестность Венеры для гравитационного манёвра у неё.

Отметим, что количество выбираемых скалярных параметров для вспомогательной задачи выведения КА на целевую гелиоцентрическую орбиту несколько больше, чем ограничений. Поэтому краевая задача принципа максимума не является «замкнутой». Однако полученные решения можно в дальнейшем использовать в качестве начальных приближений для синтеза многосоставной перелётной траектории КА уже в точных эфемеридах для рассматриваемой задачи сквозной оптимизации.

Анализ наклонений гелиоцентрической орбиты после гравитационного параметра как функций двух параметров β_i и γ_i проводится с использованием изолиний на плоскости выбираемых параметров гравитационного манёвра. Выбирается точка на резонансной линии, соответствующая максимальному наклонению. Выбор порядков резонансов осуществляется методом перебора.

Стоит отметить, что величина гиперболического избытка скорости у Венеры является внешним оптимизируемым параметром схемы выведения КА. Анализ вспомогательной задачи велся для величин гиперболического избытка скорости, находящихся в диапазоне от 17,5 км/с до некоторой минимальной величины. Анализ функции переключения для всех рассмотренных величин гиперболического избытка скорости показал, что на гелиоцентрическом участке Земля–Земля функция переключения всегда имеет три активных и три пассивных участка, траектория перелёта Земля–Венера – всегда оказывается пассивной. С уменьшением величины гиперболического избытка скорости при подлёте КА к Венере уменьшались по времени активные участки полёта КА на траектории Земля–Земля. Удовлетворительными считались те траектории, для которых при минимальной величине $V_\infty(t_2)$ наклонение итоговой гелиоцентрической орбиты КА к плоскости солнечного экватора не меньше 30° . Важным результатом проведённого анализа можно считать следующее свойство рассматриваемой схемы

перелёта: максимальная масса КА, доставляемого на рабочую гелиоцентрическую орбиту с заданным наклоном к плоскости солнечного экватора, соответствует минимальной величине гиперболического избытка скорости при выполнении последовательностей гравитационных манёвров у Венеры.

4.1.1 Анализ численных результатов решения вспомогательной задачи траектории выведения КА на гелиоцентрическую орбиту с использованием последовательности гравитационных манёвров у Венеры с целым порядком резонансов

Для эпохи запуска 2027 г. оптимальная величина гиперболического избытка скорости оказалась равной 15,45 км/с. В таблице 8 представлены некоторые характеристики гелиоцентрической траектории Земля–Земля–Венера, полученные при решении вспомогательной задачи. Величина гиперболического избытка скорости при первом подлёте КА к Венере 15,45 км/с.

Таблица 8 - Характеристики траектории КА на маршруте Земля–Земля–Венера. Вспомогательная задача

Дата старта от Земли	6 февраля 2027 г.
Длительность гелиоцентрического перелёта Земля-Земля	419,666 суток
Дата гравитационного манёвра у Земли	1 апреля 2028 г.
Длительность гелиоцентрического перелёта Земля-Венера	58,865 суток
Дата первого гравитационного манёвра у Венеры	30 мая 2028 г.
Величина гиперболического избытка скорости при старте от Земли	1440,412 м/с
Масса КА после отделения ХРБ	1898,10 кг
Требуемая масса ксенона на траектории Земля-Земля	297,42 кг
Вектор гиперболического избытка скорости при подлёте к Венере	$\begin{pmatrix} 2,247 \\ 15,14 \\ 2,10 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}}$
Величина гиперболического избытка скорости при подлёте к Земле для гравитационного манёвра у неё	7,462 км/с
Требуемая масса ксенона на траектории Земля-Венера	0 кг
Масса КА при подлёте к Венере	1600,68 кг

На рисунке 4.1 приведена функция переключения двигателя вдоль гелиоцентрического участка траектории Земля–Земля. Движение КА на траектории перелёта Земля–Венера, как уже упоминалось, оказалось пассивным. Вдоль оси абсцисс отложено время перелёта в сутках, по оси ординат – функция переключения маршевой двигательной установки КА. Красными линиями изображены активные участки полёта, т.е., когда $\psi > 0$, а чёрными кривыми – пассивные участки полёта ($\psi < 0$).

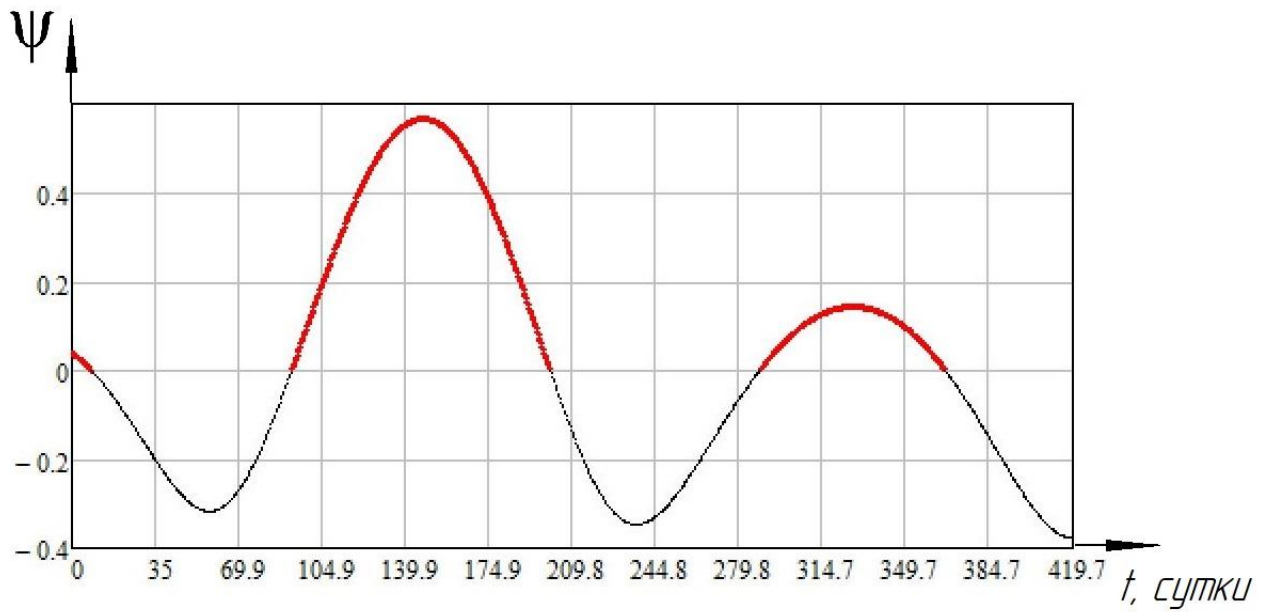


Рисунок 4.1 – Функция переключения на гелиоцентрической участке
Земля–Земля

В таблице 9 представлены результаты анализа возможных цепочек резонансных гелиоцентрических орбит КА с орбитой Венеры с угловой дальностью $2\pi \cdot k$, где k – целое положительное число.

Таблица 9 – Характеристики траекторий выведения КА на гелиоцентрическую орбиту, использующих последовательность резонансных с Венерой орбит с угловой дальностью $2 \cdot \pi k$, где k – целое положительное число

№ п.п.	ГМ ² 3 ³	β_2 , градусы	ГМ3	β_3 , градусы	ГМ4	β_4 , градусы	ГМ5	β_5 , градусы	Длительность выведения КА, годы
		γ_2 , градусы		γ_3 , градусы		γ_4 , градусы		γ_5 , градусы	
		i_2 , градусы		i_3 , градусы		i_4 , градусы		i_5 , градусы	
		$r_{\pi 2}, R_{Sun}$		$r_{\pi 3}, R_{Sun}$		$r_{\pi 4}, R_{Sun}$		$r_{\pi 5}, R_{Sun}$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1:1	β_{max}	1:1	β_{max}	1:1	β_{max}	-	β_{max}	3,156
		94,405		84,723		78,448		30	
		16,581		23,61		27,93		30,025	
		97,281		112,24		132,824		110,371	
2	1:1	β_{max}	1:1	β_{max}	4:3	β_{max}	-	β_{max}	4,386
		94,405		84,723		31,428		49	
		16,581		23,61		27,611		30,02	
		97,281		112,24		91,75		103,148	
3	1:1	β_{max}	1:1	β_{max}	5:4	β_{max}	-	β_{max}	5,002
		94,405		84,723		44,942		41	
		16,581		23,61		28,133		30,071	
		97,281		112,24		102,581		104,87	

² ГМ – гравитационный манёвр;

³ Число при гравитационном манёвре указывает его порядковый номер в анализируемой схеме полёта КА

№ п.п.	ГМ ²³	β_2 , градусы	ГМ3	β_3 , градусы	ГМ4	β_4 , градусы	ГМ5	β_5 , градусы	Длительность выведения КА, годы
		γ_2 , градусы		γ_3 , градусы		γ_4 , градусы		γ_5 , градусы	
		i_2 , градусы		i_3 , градусы		i_4 , градусы		inc_5 , градусы	
		$r_{\pi 2}, R_{Sun}$		$r_{\pi 3}, R_{Sun}$		$r_{\pi 4}, R_{Sun}$		$r_{\pi 5}, R_{Sun}$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	1:1	β_{max}	4:3	β_{max}	3:2	β_{max}	-	β_{max}	5,002
		94,405		37,703		43,177		57,838	
		16,581		22,354		27,506		30,028	
		97,281		79,829		76,17		99,704	

Отметим, что методика перебора всех возможных порядков резонансов является весьма длительным процессом. С целью сокращения объёма расчётов внесём некоторые временные ограничения на траекторию КА: длительность выведения КА на последнюю гелиоцентрическую орбиту должна быть не более 5,5 лет. Длительность полёта КА с момента старта с околоземной орбиты до первого подлёта к Венере составила 478,531 суток. Т.е. КА на резонансных гелиоцентрических орбитах может находиться 1530,301 суток, что соответствует 6 виткам Венеры вокруг Солнца:

$$N_{Venus} = \frac{T - (t_2 - t_0)}{T_{Venus}} \approx 6 \text{ витков}$$

где N_{Venus} – максимальное количество витков Венеры;

$T = 5,5$ лет;

$T_{Venus} = 224,705$ суток – период орбиты Венеры.

Максимальный угол поворота для рассматриваемого гиперболического избытка скорости $V_\infty(t_2) = 15,45 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ равен:

$$\beta_{max} = 20,066^\circ$$

Во втором, четвёртом, шестом и восьмом столбцах таблицы 9 указаны порядки резонансов гелиоцентрических орбит после последовательности гравитационных манёвров у Венеры. В третьем, пятом, седьмом и девятом столбцах приведены выбираемые параметры гравитационных манёвров β_i и γ_i , а также наклонение гелиоцентрической орбиты КА после гравитационного манёвра к плоскости экватора Солнца и величина радиуса перигелия $r_{\pi i}$ в радиусах Солнца. В девятом столбце под параметром inc_5 понимается максимально реализуемое наклонение после 4–го гравитационного манёвра у Венеры для выбранной последовательности резонансов.

В десятом столбце указана длительность выведения КА на итоговую гелиоцентрическую орбиту с наклонением $i_5 \geq 30^\circ$.

Результатом перебора всевозможных порядков резонансов оказались четыре траектории, представленные в таблице 9. Для рассматриваемой траектории движения КА характерно то, что после четвёртого гравитационного манёвра у

Венеры наклонение гелиоцентрической орбиты удовлетворяло вышеперечисленным ограничениям на наклонение и время полёта.

Траектория № 1 из таблицы 9 имеет наименьшее время перелёта. Понятно, что можно продолжить цепочку гравитационных манёвров у Венеры, чтобы ещё больше повысить наклонение. При этом данное решение совершенно не отразится на оптимизируемой массе КА. Однако, следует заметить, что после каждого гравитационного манёвра существенно увеличивается радиус перигелия гелиоцентрической орбиты. Если вместо нерезонансного ГМ5 использовать гравитационный манёвр с порядком резонанса 1:1, то радиус перигелия $r_{\pi 5}$ окажется равным $154,431 \cdot R_{Sun}$ (0,718 а. е.). Величина этого радиуса (она очень близка к величине гелиоцентрического радиуса-вектора Венеры) излишне велика. Проведение качественного мониторинга околосолнечного пространства с такого расстояния может оказаться затруднительным.

Траектории № 2–4 по времени перелёта оказались более продолжительными траектории № 1. Однако отвергать возможность их использования не стоит. Так, например, траектория № 4 интересна тем, что все четыре гелиоцентрические орбиты КА после гравитационных манёвров у Венеры имеют довольно низкие перигелии (их радиусы меньше $100 \cdot R_{Sun}$ (0,465 а. е.)). Использовать области перигелиев для наблюдения Солнца представляется целесообразным.

4.1.2 Анализ вспомогательной задачи траектории выведения КА на гелиоцентрическую орбиту с использованием последовательности гравитационных манёвров у Венеры с включением π -резонансных гравитационных манёвров

Для эпохи запуска 2027 г. оптимальная величина гиперболического избытка скорости оказалась равной 15,5 км/с. Оказалось, что не всегда имеются решения задачи Ламберта или удаётся удовлетворить системе уравнений (66).

В таблице 10 приведены полученные при решении вспомогательной задачи основные характеристики траектории Земля–Земля–Венера с величиной гиперболического избытка скорости при первом подлёте к Венере 15,5 км/с.

Максимальный угол поворота для $V_{\infty}(t_2) = 15,5 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ равен:

$$\beta_{\max}(t_2) = 19,956^{\circ}$$

Таблица 10 - Численные результаты траектории КА Земля–Земля–Венера

Дата старта от Земли	31 января 2027 г.
Длительность гелиоцентрического перелёта Земля–Земля	432,217 суток
Дата гравитационного манёвра у Земли	7 апреля 2028 г.
Длительность гелиоцентрического перелёта Земля–Венера	54,493 суток
Дата первого гравитационного манёвра у Венеры	31 мая 2028 г.
Величина гиперболического избытка скорости при старте от Земли	1419,393 м/с
Масса КА после отделения ХРБ	1900,63 кг
Требуемая масса ксенона на траектории Земля–Земля	316,36 кг
Вектор гиперболического избытка скорости при подлёте к Венере	$\begin{pmatrix} 1,740 \\ 15,256 \\ 2,114 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}}$
Величина гиперболического избытка скорости при подлёте к Земле для гравитационного манёвра у неё	7,787 км/с
Требуемая масса ксенона на траектории Земля–Венера	0 кг
Масса КА при подлёте к Венере	1584,26 кг

На рисунке 4.2 приведена функция переключения вдоль гелиоцентрического участка траектории Земля–Земля. На траектории перелёта Земля–Венера ЭРДУ КА не используется. Вдоль оси абсцисс отложено время перелёта в сутках, по оси ординат – функция переключения маршевой двигательной установки КА. Активные и пассивные участки полёта изображены красными и чёрными линиями соответственно.

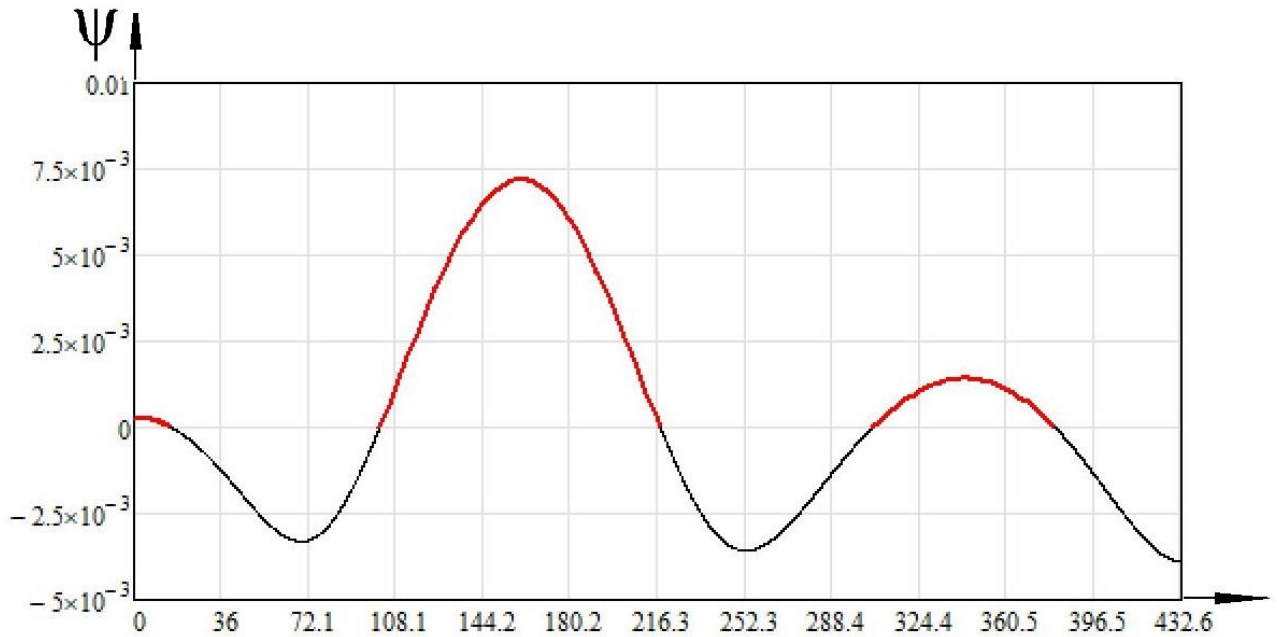


Рисунок 4.2 – Функция переключения на гелиоцентрическом участке
Земля–Земля

КА на резонансных гелиоцентрических орбитах может находиться 1522,122 суток. За это время Венера может совершить 6 оборотов вокруг Солнца:

$$N_{Venus} = \frac{T - (t_2 - t_0)}{T_{Venus}} \approx 6,5 \text{ витков}$$

где N_{Venus} – максимальное количество витков Венеры;

$T = 5,5$ лет;

$T_{Venus} = 224,698$ суток – период Венеры.

Далее воспользуемся алгоритмом и соотношениями из раздела 2 (п.п. 2.5.2).

Для даты подлёта к Венере (31 мая 2028 г.) составляется таблица, в которой указаны все возможные порядки π -резонансных траекторий и величины фокальных параметров, эксцентриситетов и истинных аномалий начальных точек орбит КА после гравитационного манёвра (см. таблицу 11). Каждая строка таблицы соответствует рассматриваемой резонансной орбите. Ниже по тексту номер строки таблицы будем считать номером соответствующей резонансной орбиты.

Таблица 11 – Характеристики гелиоцентрической траектории перелёта КА Венера–Венера с различными угловыми дальностями $\pi \cdot (2k - 1)$, где k – целое положительное число, для даты отлёта от Венеры 31 мая 2028 г. (юлианская дата 2461923.26446)

№ п.п.	Порядок резонанса	Длительность перелёта КА, сутки	Фокальный параметр перелётной орбиты, а.е.	Эксцентриситет перелётной орбиты КА	Истинная аномалия начальной точки перелётной орбиты КА, градусы
1	2	3	4	5	6
1	0,5 : 0,5	113,203	0,723	$6,751 \cdot 10^{-3}$	118,322
2	0,5 : 1,5	337,908	0,723	0,567	90,324
3	1,5 : 1,5	337,908	0,723	0,291	-90,623
4	0,5 : 2,5	562,613	0,723	0,701	90,262
5	1,5 : 2,5	562,613	0,723	0,452	90,406
6	1,5 : 2,5	562,613	0,723	0,644	-90,285
7	2,5 : 2,5	562,613	0,723	0,176	-91,043
8	0,5 : 3,5	787,319	0,723	0,765	90,24
9	1,5 : 3,5	787,319	0,723	0,589	90,312
10	1,5 : 3,5	787,319	0,723	0,738	-90,228
11	2,5 : 3,5	787,319	0,723	0,389	90,472
12	2,5 : 3,5	787,319	0,723	0,52	-90,353
13	3,5 : 3,5	787,319	0,723	0,128	-91,442

При первом подлёте к Венере фокальный параметр и эксцентриситет находятся в диапазонах:

$$p(t_2) = 0,412 \dots 0,796 \text{ а. е.}$$

$$e(t_2) = 0,412 \dots 0,511$$

Анализируем при каких порядках резонанса фокальный параметр и эксцентриситет резонансной гелиоцентрической орбиты оказываются находящимися в приведённых диапазонах. Оказывается, что этому условию удовлетворяют только резонансные орбиты № 5 и № 12. Возможные порядки

π -резонансов получились такими: 1,5:2,5 и 2,5:3,5. Однако система уравнений (66) и для этих порядков резонанса не имеет решений. Это обстоятельство иллюстрируется рисунком 4.3. На нём на плоскости параметров гравитационного манёвра (ось абсцисс – угол поворота асимптоты гиперболы β ; ось ординат – угол γ , фиксирующий плоскость гравитационного манёвра) показаны изолинии эксцентриситета и фокального параметра резонансных орбит № 5 (левый рисунок) и № 12 (правый рисунок).

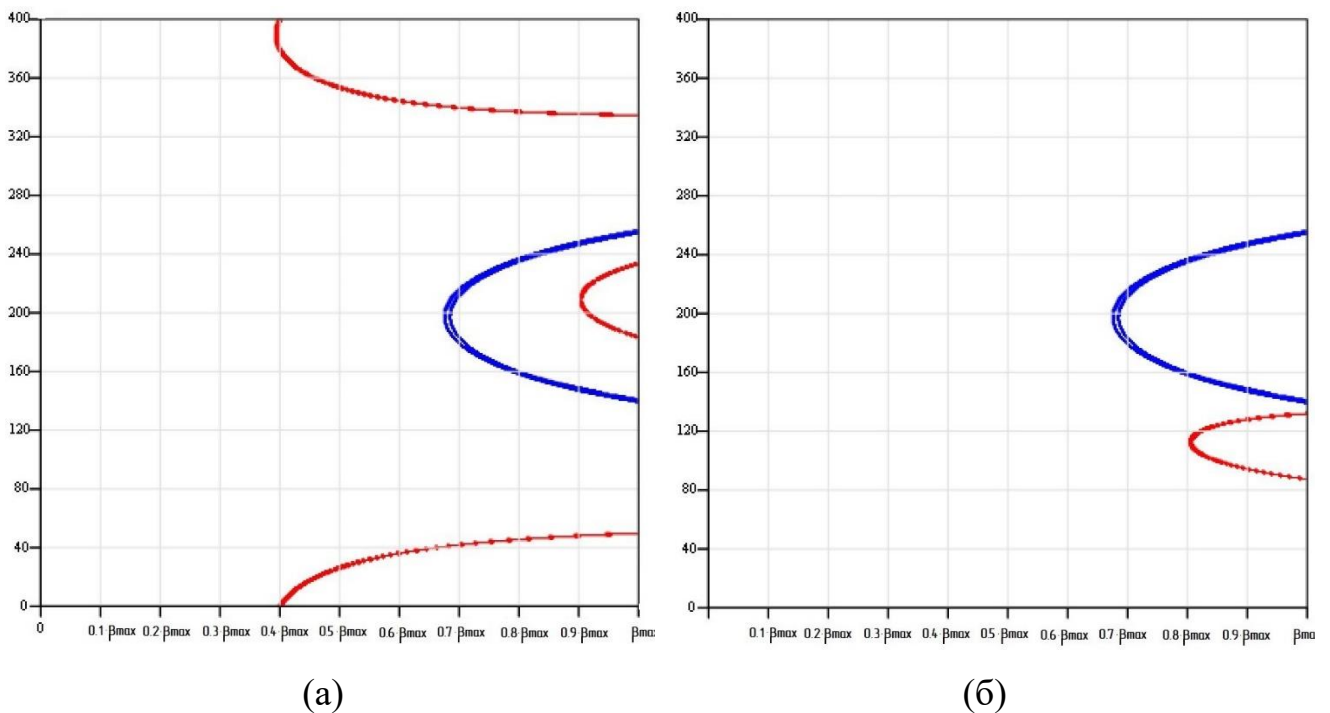


Рисунок 4.3 - Изолинии эксцентриситета (синяя линия) и фокального параметра (красная линия) гелиоцентрической орбиты КА после первого гравитационного манёвра у Венеры, которая находится в π -орбитальном резонансе с орбитой Венеры с порядками: а) 1,5:2,5; б) 2,5:3,5

Видно, что изолинии фокального параметра и эксцентриситета не имеют общих точек. Значит, на первом гравитационном манёвре у Венеры реализовать перелёт на π -резонансную орбиту нет возможности. Реализовать резонансы 2:1, 3:1 не удаётся. Поэтому воспользуемся резонансом 1:1, как резонансом, обеспечивающим минимальное время перелёта. Параметры гравитационного манёвра найдем из условия наибольшего наклона гелиоцентрической резонансной орбиты.

На рисунке 4.4 приведены изолинии наклоения орбиты КА к плоскости солнечного экватора (штриховые разноцветные линии) после первого гравитационного манёвра у Венеры на плоскости выбираемых параметров гравитационного манёвра β_1 и γ_1 . Числа на изолиниях – наклоения орбиты КА в градусах. Коричневая линия на плоскости определяет те параметры гравитационного манёвра, при которых гелиоцентрическая траектория после гравитационного манёвра находится в резонансе с орбитой Венеры с порядком резонанса 1:1.

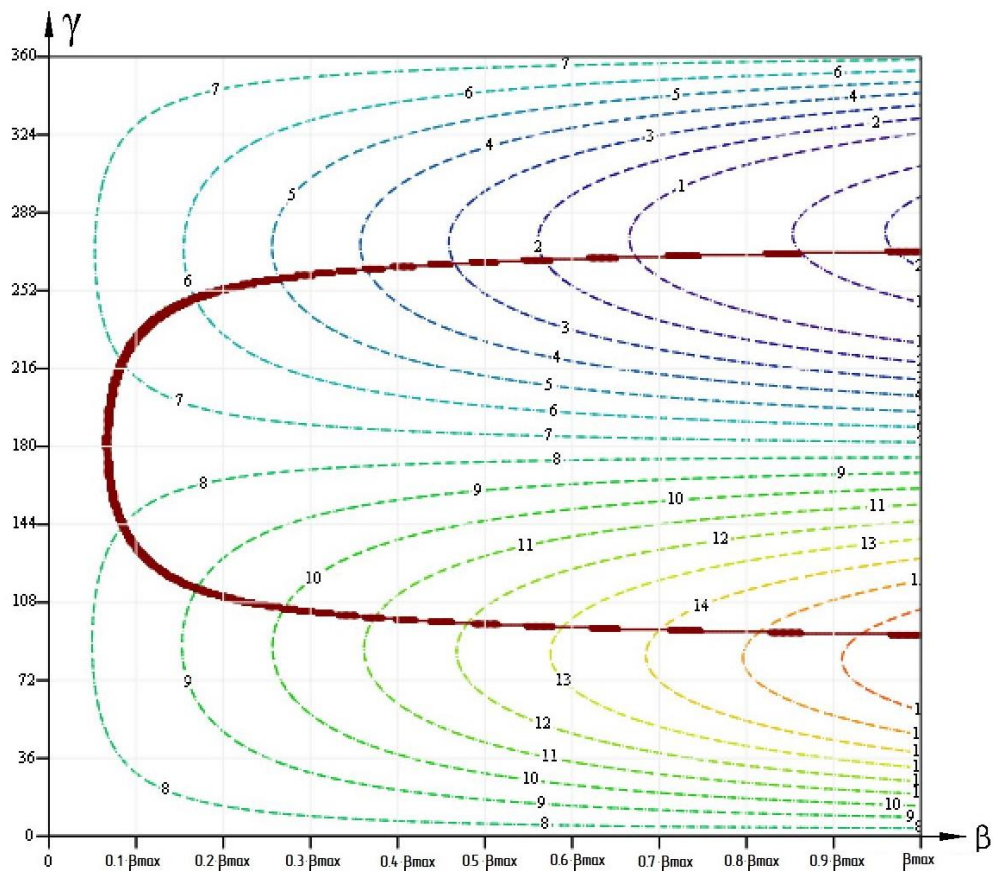


Рисунок 4.4 - Изолинии наклоения орбиты КА к плоскости солнечного экватора после первого гравитационного манёвра у Венеры (штриховые разноцветные линии). Точки коричневой линии обеспечивают резонанс с орбитой Венеры порядка 1:1

Из рисунка видно, что максимальное наклоение достигается в нижней правой точке коричневой линии, точки которой обеспечивают движение по резонансной орбите после гравитационного манёвра. Конкретные значения параметров гравитационного манёвра находятся в следующей последовательности.

Угол поворота асимптоты гиперболы при гравитационном манёвре принимается равным максимальному углу. Период обращения по орбите после гравитационного манёвра становится функцией одного параметра γ_1 . Этот параметр находится из условия обеспечения выбранного порядка резонанса (в данном случае находится такой параметр γ_1 , при котором период движения КА совпадает с периодом Венеры). Параметр γ_1 оказался равен $92,906^\circ$. Вектор гиперболического избытка скорости после первого гравитационного манёвра у Венеры $V_\infty = [1,820 \ 13,594 \ 7,221]^T$ км/с. Вектор гиперболического избытка скорости при повторном подлёте к Венере равен вектору гиперболического избытка скорости при отлёте от Венеры после первого гравитационного манёвра у неё.

Анализ второго гравитационного манёвра у Венеры даёт возможность найти диапазоны фокального параметра и эксцентриситета гелиоцентрических орбит КА после второго гравитационного манёвра:

$$p(t_3) = 0,439 \dots 0,844 \text{ а. е.}$$

$$e(t_3) = 0,28 \dots 0,477$$

Из π -резонансных орбит, приведённых в таблице 11, три орбиты: № 3 (с порядком резонанса 1,5:1,5), № 5 (1,5:2,5) и № 11 (2,5:3,5) имеют элементы (фокальный параметр и эксцентриситет), находящиеся в только что обозначенных диапазонах. Из этих трёх орбит одновременно обеспечить требуемые значения фокального параметра и эксцентриситета оказалось возможным только для орбит № 3 и № 11.

На рисунке 4.5 на плоскости выбираемых параметров гравитационного манёвра для этих двух траекторий показаны изолинии эксцентриситета и фокального параметра гелиоцентрической орбиты КА после гравитационного манёвра у Венеры, которая находится в π -орбитальном резонансе с орбитой Венеры. Приведённые изолинии имеют точки пересечения.

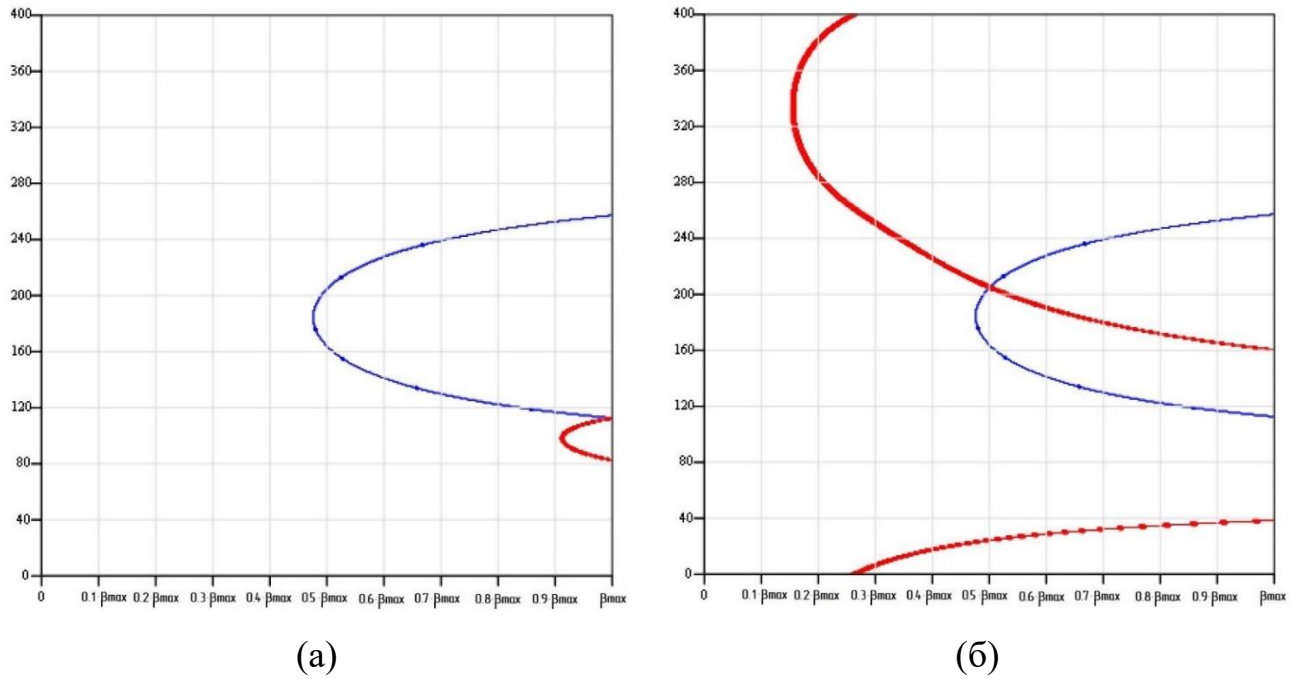


Рисунок 4.5 - Изолинии эксцентриситета (синяя линия) и фокального параметра (красная линия) гелиоцентрической орбиты КА после второго гравитационного манёвра у Венеры, которая находится в π -орбитальном резонансе с орбитой Венеры с порядками: а) 1,5:1,5; б) 2,5:3,5

Решение системы уравнений (65) для перехода на π -резонансную гелиоцентрическую орбиту № 3 из таблицы 11 удовлетворяется при $\beta(t_2) = 19,965^\circ$ и $\gamma(t_2) = 101,319^\circ$. Вектор гиперболического избытка скорости после второго гравитационного манёвра у Венеры оказался следующим:

$$V_\infty = [4,682 \ 9,253 \ -11,594]^T \text{ км/с.}$$

При третьем подлёте к Венере величина гиперболического избытка скорости изменилась, т.к. КА встретился с Венерой в противоположной точке её орбиты. Она стала равной $V_\infty(t_3) = 15,555 \frac{\text{км}}{\text{с}}$. Максимальный угол поворота нового вектора гиперболического избытка скорости равен: $\beta_{max}(t_3) = 19,838^\circ$. Наклонение гелиоцентрической орбиты КА после второго гравитационного манёвра у Венеры – $inc_3 = 22,827^\circ$.

Для нового положения Венеры (противоположной точки её орбиты) вновь составляется таблица характеристик π -резонансных гелиоцентрических орбит КА с угловыми дальностями $\pi \cdot (2k - 1)$, где k – целое положительное число, аналогичная таблице 11.

После третьего гравитационного манёвра у Венеры диапазон возможных значений фокального параметра и эксцентриситета оказался таким:

$$p(t_4) = 0,52 \dots 0,951 \text{ а. е.}$$

$$e(t_4) = 0,162 \dots 0,456$$

Из рассмотренных π -резонансных орбит четыре орбиты (их порядки резонансов 1,5:1,5; 1,5:2,5; 2,5:2,5 и 2,5:3,5) имеют элементы (фокальный параметр и эксцентриситет), находящиеся в только что записанных диапазонах. Но ни для одного порядка резонанса выбором параметров гравитационного манёвра не удастся обеспечить требуемые значения фокального параметра и эксцентриситета (не существует решения системы двух уравнений (66)). В связи с этим обстоятельством воспользуемся традиционными целочисленными порядками резонансов. Учитывая ограничение по времени выведения КА на целевую орбиту в 5,5 лет, анализировались резонансы с порядками: 1:1, 2:3 и 3:4.

На рисунке 4.6 на плоскости параметров третьего гравитационного манёвра у Венеры β_3 и γ_3 приведены изолинии наклона орбиты КА к плоскости солнечного экватора (штриховые разноцветные линии) после гравитационного манёвра. Точки коричневой линии рассматриваемой плоскости соответствуют таким параметрам гравитационного манёвра, которые обеспечивают перевод КА на резонансную орбиту с порядком резонанса с орбитой Венеры 1:1. Точки синих линий на плоскости соответствуют таким параметрам гравитационного манёвра, которые обеспечивают перевод КА на резонансную орбиту с порядком резонанса 2:3. Точки красных линий на плоскости – на орбиту с порядком резонанса 3:4.

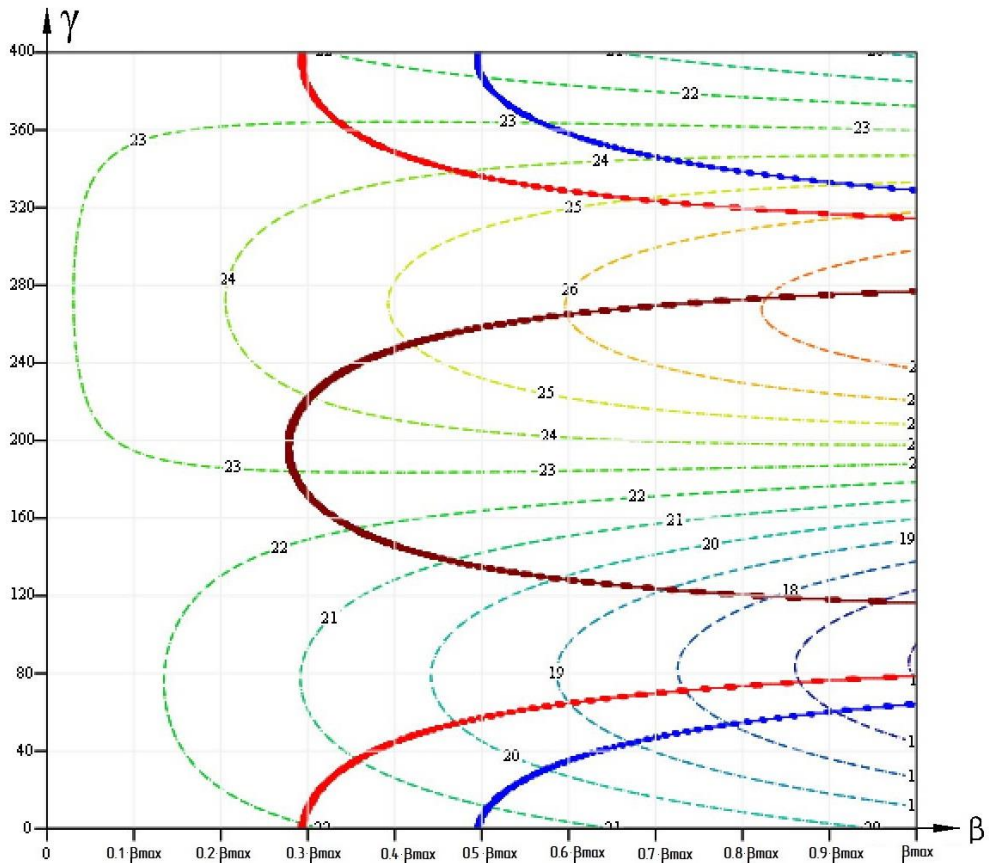


Рисунок 4.6 - Изолинии наклонения орбиты КА к плоскости солнечного экватора после третьего гравитационного манёвра у Венеры (штриховые разноцветные линии). Точки коричневой линии обеспечивают резонанс с орбитой Венеры порядка 1:1. Точки синих линий обеспечивают резонанс порядка 2:3. Точки красных линий - резонанс порядка 3:4

Анализ расположения линий на рисунке показывает, что наибольшее наклонение гелиоцентрической орбиты после третьего гравитационного манёвра у Венеры можно получить, используя резонанс с порядком 1:1. Удачно, что этот вариант самый выгодный и с точки зрения времени перелёта. Именно этот вариант порядка резонанса предлагается выбрать.

В таблице 12 приведены характеристики описанных выше вариантов схемы полёта, включающие π -резонансный гравитационный манёвр. Номер гравитационного манёвра помещён в первый столбец таблицы. Нумерация начинается с гравитационного манёвра с номером 2. Этот гравитационный манёвр является первым гравитационным манёвром у Венеры, так как схема перелёта КА включает гравитационный манёвр у Земли, который и нумеруется как 1-ый.

Во втором столбце таблицы приведены порядки резонансов, используемых для каждого из первых трёх гравитационных манёвров у Венеры. Последний гравитационный манёвр у Венеры нерезонансный. Выбираемые параметры гравитационного манёвра (β и γ) приведены в следующих двух столбцах таблицы. В последних двух столбцах приведены две важнейшие характеристики гелиоцентрических орбит после гравитационных манёвров: радиус перигелия и наклонение к плоскости солнечного экватора. Информация об этих характеристиках даёт возможность выбрать рациональный вариант порядка резонанса для конкретного гравитационного манёвра. Например, анализируя гравитационный манёвр № 3, можно утверждать, что использование резонансной орбиты с порядком 1,5:1,5 выгоднее, чем использование резонансной орбиты с порядком 2,5:3,5, так как наклонение резонансной орбиты с порядком резонанса 1,5:1,5 ($inc_3 = 22,827^\circ$) оказывается существенно больше наклонения резонансной орбиты с порядком резонанса 2,5:3,5 ($15,386^\circ$). Дополнительным преимуществом резонансной орбиты с порядком 1,5:1,5 является меньшее время перелёта КА по резонансной орбите.

Аналогичные выводы можно сделать, анализируя гравитационный манёвр № 4. Использование гравитационного манёвра с порядком резонанса 1:1, позволяет существенно увеличить наклонение гелиоцентрической орбиты КА после гравитационного манёвра (по сравнению с другими допустимыми порядками резонанса). Одновременно значительно уменьшается время полёта по гелиоцентрической орбите после гравитационного манёвра.

Анализируя характеристики траектории КА после последнего нерезонансного гравитационного манёвра № 4, можно увидеть, что желаемое наклонение итоговой гелиоцентрической орбиты на рассмотренных вариантах маршрута достигается только на одном из проанализированных вариантов. В таблице 12 серым цветом выделен этот вариант. В ней выделены строки маршрута, на котором эффективно решается рассматриваемая транспортная задача. Порядки резонансов на этой траектории оказались следующими:

1:1 \Rightarrow 1,5:1,5 \Rightarrow 1:1 \Rightarrow нерезонансный гравитационный манёвр

Таблица 12 - Характеристики траектории выведения КА на гелиоцентрическую орбиту, использующую последовательность орбит, включающую π -резонансную орбиту КА с орбитой Венеры

№ ГМ	Порядок резонанса		β_i , градусы	γ_i , градусы	$r_{\pi i}$, R_{Sun}	inc_i , градусы
1	2		3	4	5	6
2	1:1		$\beta_{max}(t_2)$	92,906	96,952	16,571
	1,5:2,5	не имеет решения	-	-	-	-
	2,5:3,5	не имеет решения	-	-	-	-
3	1,5:1,5		$\beta_{max}(t_2)$	101,353	120,475	22,827
	1,5:2,5	не имеет решения	-	-	-	-
	2,5:3,5		9,996	184,574	111,957	15,386
4	1:1		$\beta_{max}(t_3)$	236,913	119,915	27,692
	2:3		$\beta_{max}(t_3)$	327,237	144,297	22,696
	3:4		$\beta_{max}(t_3)$	297,482	145,388	25,176
	1,5:1,5	не имеет решения	-	-	-	-
	1,5:2,5	не имеет решения	-	-	-	-
	2,5:2,5	не имеет решения	-	-	-	-
	2,5:3,5	не имеет решения	-	-	-	-
5	нерезонансный после 1:1		$\beta_{max}(t_3)$	216	109,117	30,018
	нерезонансный после 2:3		$\beta_{max}(t_3)$	243,9	145,331	27,23
	нерезонансный после 3:4		$\beta_{max}(t_3)$	234	143,118	28,83

Таким образом, мы провели анализ проектно-баллистической схемы выведения КА с включением в последовательность гравитационных манёвров у Венеры одной π -резонансной гелиоцентрической орбиты. К сожалению, этот анализ показал, что реализовать перелёт с угловой дальностью 0,5 витка КА и 0,5 витка Венеры невозможно. Это связано с тем, что эксцентриситет орбиты Венеры очень мал: $6,751 \cdot 10^{-3}$. Такое маленькое значение ни разу не попало в диапазон возможных эксцентриситетов π -резонансных орбит после гравитационных манёвров у Венеры. Однако, если последовательность гравитационных манёвров выполнять у другой планеты (например, Меркурия, эксцентриситет орбиты которого равен 0,206) возможность использования резонанса 0,5:0,5 не исключается.

4.2 Задача сквозной оптимизации траектории выведения транспортной космической системы на целевую гелиоцентрическую орбиту по выбранному маршруту

Данный раздел посвящён описанию полученных численных результатов в рамках задачи сквозной оптимизации траектории выведения транспортной космической системы на гелиоцентрическую орбиту с использованием комбинированной двигательной установки. Анализ полученных траекторий выведения проводился с использованием всех выбираемых параметров схемы полёта (раздел 3, п. 3.4) и полного набора условий оптимальности (раздел 3, п. 3.5).

Полученные в п.п. 4.1.1 и 4.1.2 настоящего раздела решения вспомогательной задачи рассматриваются как начальные приближения для задачи сквозной оптимизации всего маршрута. После анализа вспомогательной (упрощённой) задачи были выбраны два маршрута межпланетного КА, численные результаты которых будут позже представлены.

Дальнейший анализ был проведён для выбранных схем полётов КА:

Траектория № 1

Земля \Rightarrow Земля \Rightarrow Венера $\overset{1:1}{\Rightarrow}$ Венера $\overset{4:3}{\Rightarrow}$ Венера $\overset{3:2}{\Rightarrow}$ Венера \Rightarrow целевая орбита

Траектория № 2

Земля \Rightarrow Земля \Rightarrow Венера $\xRightarrow{1:1}$ Венера $\xRightarrow{1,5:1,5}$ Венера $\xRightarrow{1:1}$ Венера \Rightarrow целевая орбита

Обе траектории выведения КА включают в себя пять гравитационных манёвров у планет, т.е. рассматриваемые траектории будут проанализированы в рамках 7–точечной краевой задачи. Порядок рассматриваемой краевой задачи – 55-ый.

Из полученного решения вспомогательной задачи в качестве начального приближения были использованы следующие параметры:

- даты старта и гравитационных манёвров;
- вектор гиперболического избытка скорости при отлёте от Земли;
- векторы гиперболических избытков скорости после всех гравитационных манёвров.

Ниже приведём результаты оптимизации полученных маршрутов.

4.2.1 Анализ численных результатов первой траектории выведения транспортной космической системы с комбинированной двигательной установкой на гелиоцентрическую орбиту с использованием последовательности околорезонансных гравитационных манёвров у Венеры

Проведено исследование первой траектории выведения транспортной космической системы на гелиоцентрическую орбиту с большим наклоном (30°) к плоскости экватора Солнца с одним нерезонансным гравитационным манёвром у Земли, тремя околорезонансными и одним нерезонансным гравитационными манёврами у Венеры. Был проведён анализ трёх околорезонансных гелиоцентрических орбит КА после трёх пассивных гравитационных манёвров у Венеры со следующей последовательностью резонансов: $1:1 \rightarrow 4:3 \rightarrow 3:2$.

Для рассмотренного сложного маршрута для эпохи старта 2027 года оказалась оптимальной дата старта 27 января 2027 г. (юлианская дата 2461432.927708022). Для сравнения при анализе вспомогательной задачи оптимальная дата старта была более поздней – 6 февраля 2027 г.

На рисунке 4.7 представлен геоцентрический участок разгона транспортной космической системы (КА и ХРБ) с околоземной орбиты в полярной системе координат. Началу этой системе координат соответствует гравитационный центр (центр Земли). Черной линией выделены границы Земли, синей – круговая околоземная орбита высотой 200 км. Красной линией изображена траектория КА с работающим двигателем ХРБ.

При оптимальной величине гиперболического избытка скорости $V_{\infty}(t_{01}) = 1387,795 \frac{M}{c}$ продолжительность участка разгона составила 14,642 минуты. ХРБ потребовалось использовать 5226,10 кг топлива. Масса КА после отделения ХРБ составила 1904,357 кг.

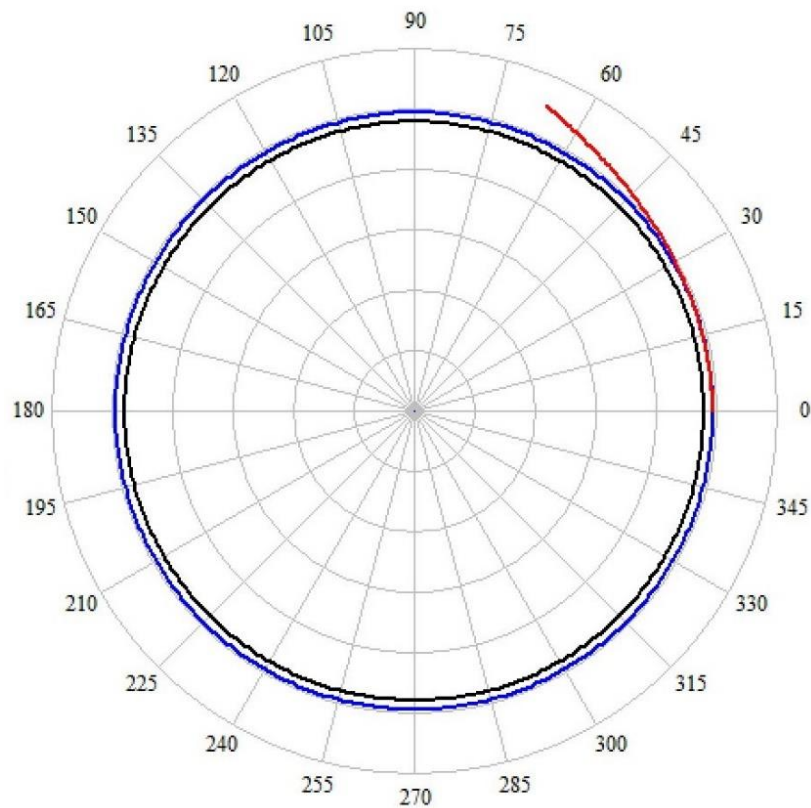


Рисунок 4.7 – Участок разгона КА ХРБ «Фрегат» при старте с круговой околоземной орбиты

На рисунке 4.8 представлена оптимальная программа по углу тангажа вдоль участка траектории КА с работающим двигателем ХРБ. На оптимальной траектории этот угол монотонно увеличивается от -9° до $+16,7^\circ$. Гравитационные потери скорости на траектории в данном случае составляют $\Delta V_g = 69,878 \frac{M}{c}$.

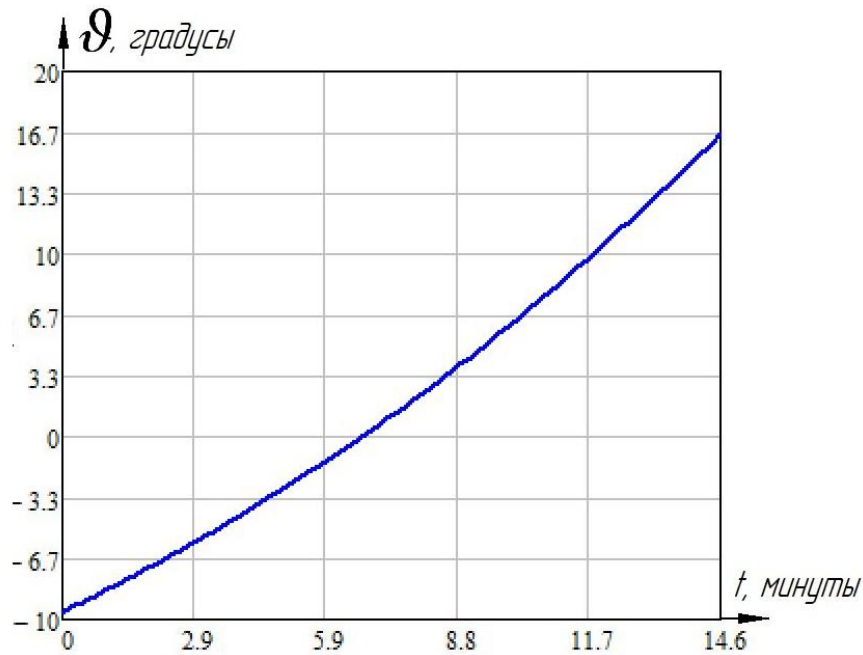


Рисунок 4.8 – Изменение угла тангажа как функции времени при старте с круговой околоземной орбиты

На рисунках 4.9 и 4.10 показаны проекции на плоскость эклиптики (xOy) и на плоскость xOz полученной оптимальной траектории гелиоцентрического перелёта (траектории № 1). В центре рисунка с координатами $[0; 0]$ расположено Солнце. Орбиты Земли и Венеры показаны тонкими синей и оранжевой линиями соответственно. В качестве единицы расстояния на рисунках используются а.е. На рисунках имеются условные знаки, пояснения к которым приведены в таблице 13.

Таблица 13 – Обозначения элементов на рисунках 4.9 и 4.10

Условные знаки	Обозначение
■	Точка старта (положение Земли в момент выхода КА с околоземной орбиты)
●	Точка выполнения гравитационного манёвра у Земли
●	Точки выполнения гравитационных манёвров у Венеры (4 шт.)
●	Солнце

Пассивные участки полёта КА вдоль всего маршрута изображены тонкой чёрной линией, активные участки – толстой красной. Анализ рисунков 4.9 и 4.10 показывает, что на траектории Земля–Земля есть три активных и три пассивных

участка. Гелиоцентрическая траектория начинается первым небольшим активным участком. После этого КА оказывается внутри орбиты Земли. Второй активный участок располагается в окрестности оскулирующего перигелия орбиты КА. На нём ЭРДУ увеличивают энергию гелиоцентрической орбиты, увеличивает величину оскулирующего радиуса афелия орбиты. Поэтому на последующем пассивном участке траектории КА оказывается вне орбиты Земли. В окрестности афелия оскулирующей орбиты КА ЭРДУ включается вновь. Длительности второго и третьего активных участков существенно больше длительности первого активного участка. На гелиоцентрическом перелёте Земля–Венера активных участков траектории нет. На гелиоцентрических околорезонансных орбитах Венера–Венера ЭРДУ КА включается несколько раз и работает весьма короткое время. Более подробный анализ будет проведён ниже.

Итоговая гелиоцентрическая орбита КА, имеющая наклонение 30° к плоскости солнечного экватора, имеет самое большое наклонение и к плоскости эклиптики. Это видно на рисунке 4.10.

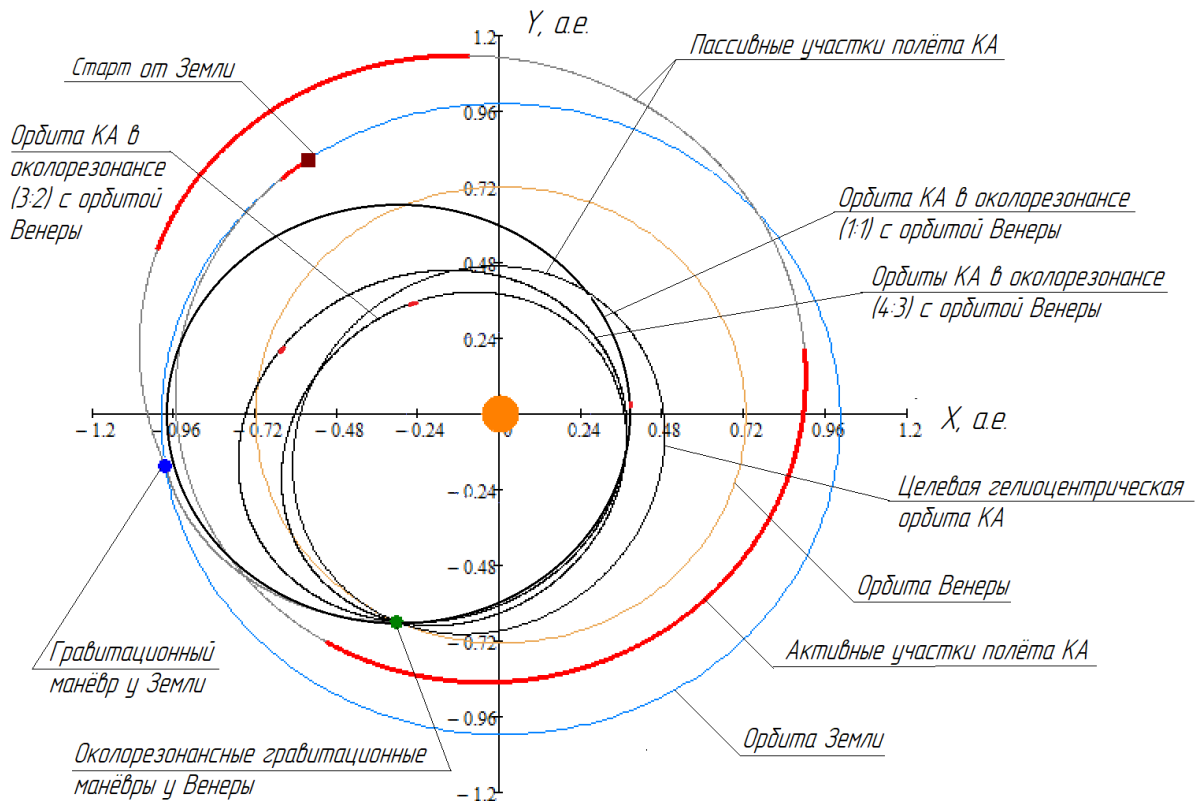


Рисунок 4.9 – Проекция на плоскость эклиптики гелиоцентрической траектории выведения КА № 1

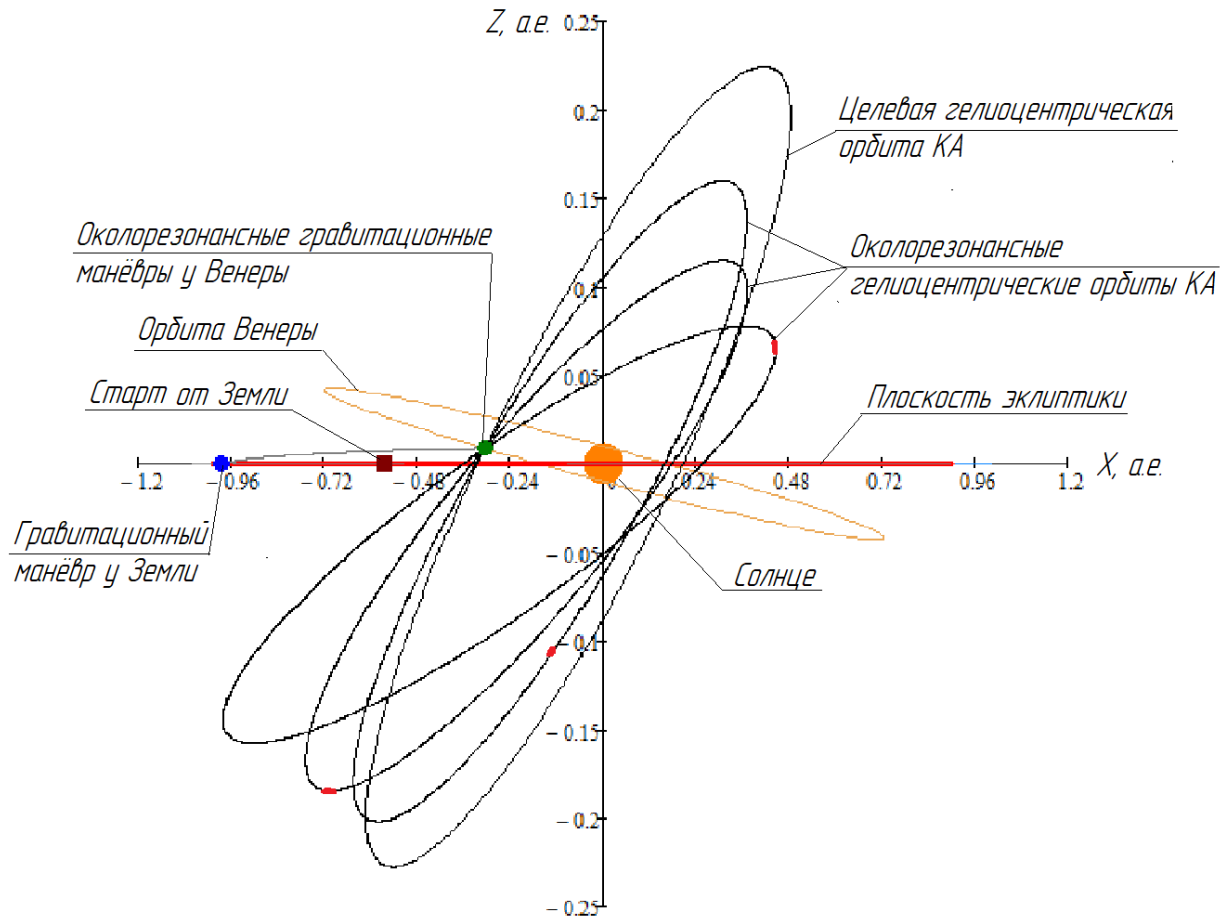


Рисунок 4.10 - Проекция на плоскость xOz гелиоцентрической траектории выведения КА № 1

В таблице 14 приведены основные временные характеристики гелиоцентрической траектории выведения КА № 1.

Таблица 14 – Основные временные характеристики гелиоцентрической траектории выведения КА на целевую орбиту вдоль оптимальной траектории № 1

Дата старта от Земли	27 января 2027 г.
Длительность гелиоцентрического перелёта Земля-Земля	429,586 суток
Дата гравитационного манёвра у Земли	1 апреля 2028 г.
Длительность гелиоцентрического перелёта Земля-Венера	59,148 суток
Дата первого гравитационного манёвра у Венеры	30 мая 2028 г.
Длительность гелиоцентрического перелёта Венера-Венера после второго гравитационного манёвра	224,703 суток
Дата второго гравитационного манёвра у Венеры	9 января 2029 г.

Длительность гелиоцентрического перелёта Венера-Венера после третьего гравитационного манёвра	674,103 суток
Дата третьего гравитационного манёвра у Венеры	14 ноября 2030 г.
Длительность гелиоцентрического перелёта Венера-Венера после четвёртого гравитационного манёвра	449,399 суток
Дата четвёртого гравитационного манёвра у Венеры	7 февраля 2032 г.

На рисунке 4.11 представлены зависимости от времени функции переключения тяги и функции тяги. На рисунке функция тяги изображена сплошной толстой чёрной линией, а функция переключения ЭРДУ - тонкой чёрной линией для пассивных участков и красной линией - для активных участков траектории движения КА.

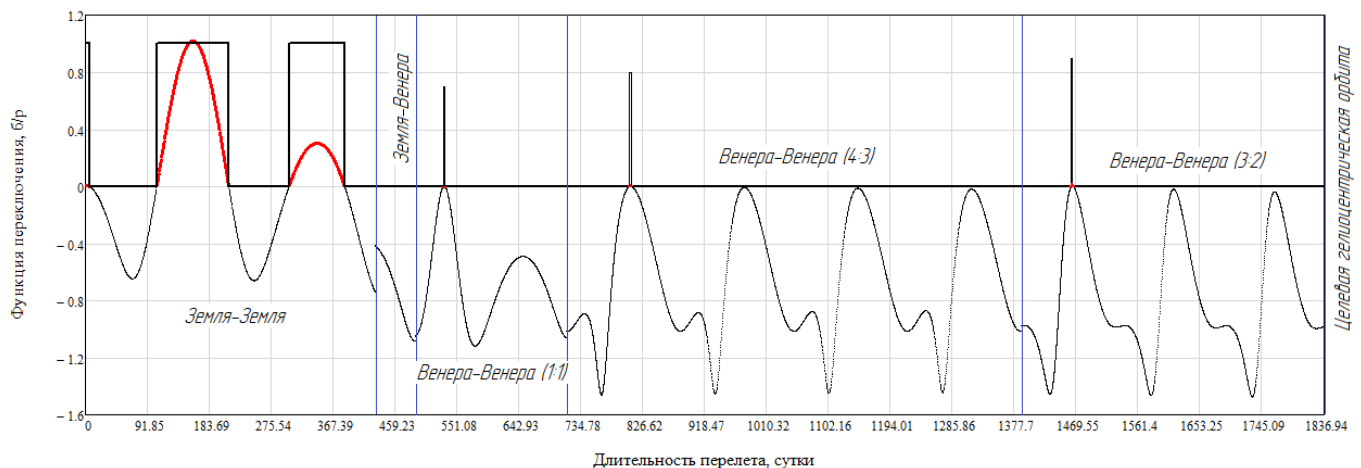


Рисунок 4.11 – Функция переключения тяги и функция тяги в задаче сквозной оптимизации траектории № 1 выведения КА

Продолжительность перелёта по маршруту Земля-Земля составила 429,586 суток. На траектории Земля-Земля есть три активных и три пассивных участка:

- активный участок, продолжительность которого составляет 5,847 суток;
- пассивный участок (100,015 суток);
- активный участок длительностью 106,74 суток;
- пассивный участок продолжительностью 89,385 дней;
- активный участок (82,367 суток);
- пассивный участок (45,233 суток).

На гелиоцентрическом участке перелёта Земля - Венера функция переключения меньше нуля, следовательно, ЭРДУ КА находится в выключенном состоянии, и КА подлетает к Венере для гравитационного манёвра у неё на пассивном участке траектории.

Определённый практический интерес представляют моменты включения двигательной установки КА на околорезонансных гелиоцентрических орбитах КА. После каждого околорезонансного гравитационного манёвра у Венеры на первом витке вокруг Солнца КА включает ЭРДУ на непродолжительное время с целью попасть в окрестность планеты для последующего гравитационного манёвра у неё.

Временные и массовые характеристики гелиоцентрической траектории КА приведены в таблице 15. В первом столбце этой таблицы указан порядковый номер гравитационного манёвра в рассматриваемой схеме полёта. Первый нерезонансный гравитационный манёвр совершается у Земли; остальные - у Венеры. Третий столбец показывает количество витков Венеры, совершённых за время полёта КА, вычисленное по формуле:

$$m_i = \frac{(t_i - t_{i-1})}{T_{Venus}} \quad (94)$$

где T_{Venus} – период Венеры;

$(t_i - t_{i-1})$ – длительность гелиоцентрического участка полёта планета–планета (в нашем случае Венера–Венера) между двумя последовательными гравитационными манёврами.

В четвёртом и пятом столбцах приведены время работы маршевой двигательной установки на гелиоцентрических участках планета–планета, а также масса ксенона, которую КА затратил на данном участке.

В шестом столбце таблицы 15 содержится информация о длительности полёта КА от даты старта КА с опорной околоземной орбиты до рассматриваемого гравитационного манёвра. В седьмом столбце указана масса КА в конце гелиоцентрического участка полёта планета–планета.

Таблица 15 – Временные и массовые характеристики гелиоцентрической траектории КА

№ ГМ	Резонанс	m_i	Продолжительность работы ЭРДУ КА, минуты	Затрачиваемая масса топлива ЭРДУ КА, кг	Время полёта КА, отсчитываемое от даты старта, годы	Масса КА в конце гелиоцентрического участка планета-планета, кг
1	2	3	4	5	6	7
1	-	-	0	0	1,176	1606,09
2	1 : 1	0,9999	56,473	0,060	1,338	1606,03
3	4 : 3	3,00002	81,886	0,087	1,953	1605,94
4	3 : 2	1,9999	71,532	0,076	3,800	1605,86
5	-	-	0	0	5,029	1605,86

Учёт влияния возмущений на траекторию Венеры приводит к небольшим смещениям КА вдоль орбиты при выполнении околорезонансных гравитационных манёвров, при этом положение плоскости орбиты остаётся практически неизменным. В связи с этим важно отметить, что величины m_i не являются целыми числами. Следствием возмущённости орбиты Венеры является то, что в рамках метода грависфер нулевой протяжённости КА на непродолжительное время включает маршевую двигательную установку, чтобы достичь окрестности Венеры для последующего гравитационного манёвра у неё. Конечная оптимизируемая масса КА оказалась равной 1605,86 кг. Длительность выведения транспортной космической системы на целевую гелиоцентрическую орбиту составила 5,029 лет.

На рисунке 4.12 показана зависимость расстояния КА от Солнца (голубая линия) и гелиоцентрической скорости КА (жёлтая линия) как функций времени. Вдоль оси абсцисс отложено время выведения КА в сутках. Величина радиуса-вектора КА на рисунке указана в радиусах Солнца, а гелиоцентрической скорости КА - в км/с. Красными кружками с порядковым номером указаны перигелии орбит КА на околорезонансных гелиоцентрических перелётах Венера–Венера. Из рисунка видно, что таких перигелиев 8.

На голубых кривых, показывающих расстояние КА–Солнце, имеются условные обозначения в виде цветных закрашенных кружков. Ими обозначено положение КА, когда он совершает гравитационный манёвр у планеты: Земля (фиолетовый кружок); Венера (зелёные кружки).

Анализ приведённой зависимости гелиоцентрической скорости КА от времени полёта показывает, что после каждого гравитационного манёвра КА величина гелиоцентрической скорости КА уменьшалась. Что на наш взгляд, является показателем рациональности траектории, так как константу энергии орбиты, с которой исследуется Солнце, желательно иметь малой.

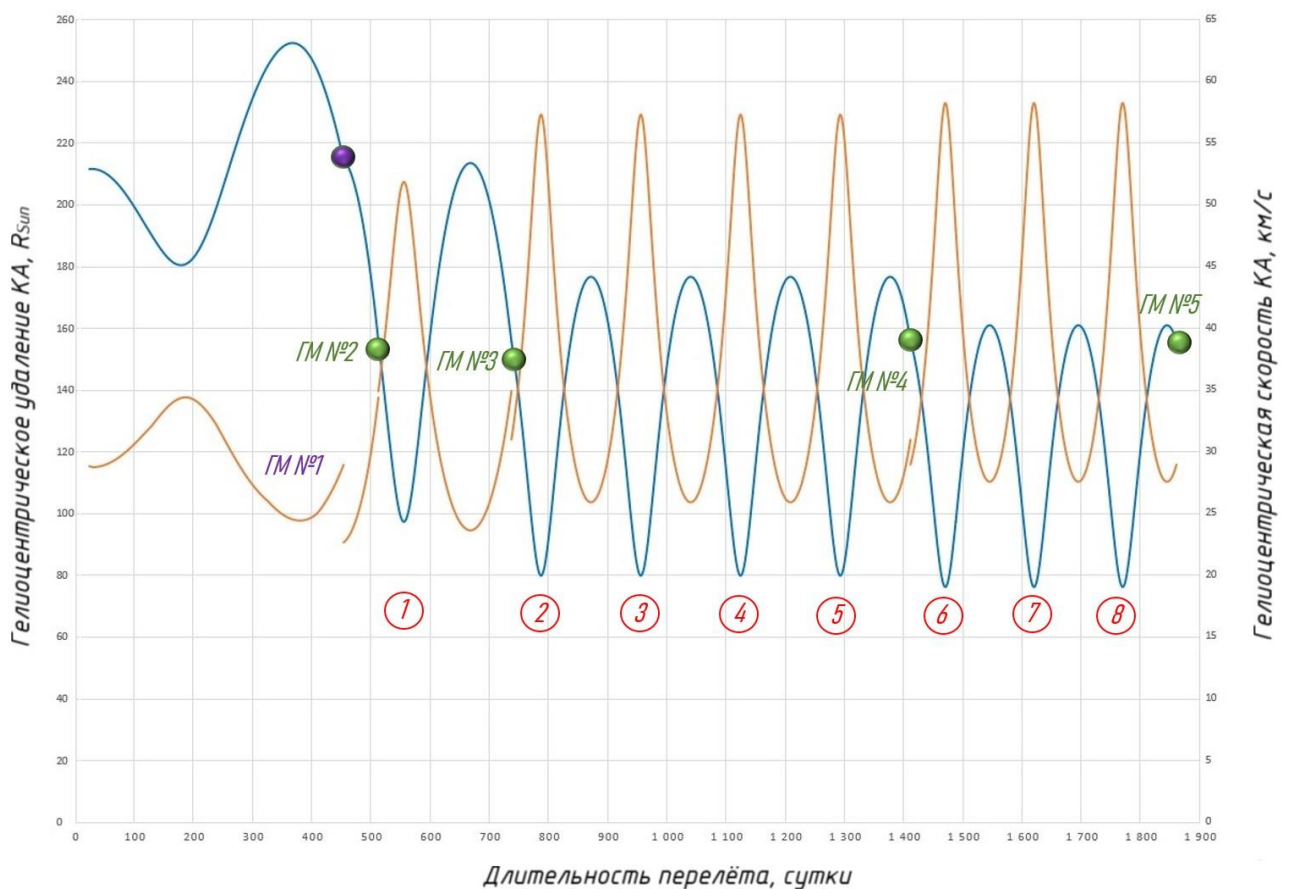


Рисунок 4.12 – Зависимость гелиоцентрического удаления КА и гелиоцентрической скорости КА от времени полёта

Основные характеристики гелиоцентрических орбит КА после гравитационных манёвров приведены в таблице 16.

В первом столбце указан порядковый номер гравитационного манёвра. Во втором столбце записана величина гиперболического избытка скорости КА при гравитационном манёвре у планеты. В третьем и четвертом столбцах указаны

максимальный и используемый углы поворота вектора гиперболического избытка скорости при гравитационном манёвре. В пятом и шестом столбцах представлены величины радиусов перигелиев и афелиев соответственно. В столбцах 7–9 указаны долгота восходящего узла, наклонение к плоскости эклиптики и наклонение к плоскости экватора Солнца гелиоцентрических орбит КА после гравитационных манёвров.

Таблица 16 – Характеристики гравитационных манёвров и гелиоцентрических траекторий КА после пролёта у Земли и Венеры

№ ГМ	Величина гиперболического избытка скорости, км/с	Угол β_{max} , градусы	Угол β_i , градусы	Радиус перигелия, R_{Sun}	Радиус афелия, а.е.	Долгота восходящего узла, градусы	Наклонение орбиты КА к плоскости эклиптики, градусы	Наклонение орбиты КА к плоскости солнечного экватора, градусы
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	7,4595	61,872	61,872	86,9	1,002	191,329	0,649	7,551
2	15,4298	20,107	20,107	97,4	0,994	244,22	9,422	16,582
3	15,4273	20,113	20,113	79,9	0,822	245,478	15,193	22,36
4	15,4265	20,115	20,115	76,2	0,749	246,01	20,333	27,503
5	15,4303	20,106	20,106	100,0	0,726	246,186	22,837	30,00

Из анализа таблицы 16 видно, что после гравитационных манёвров КА постепенно увеличивает наклонение своих гелиоцентрических орбит. После пятого гравитационного манёвра КА достигает целевой гелиоцентрической орбиты с наклонением 30° к плоскости солнечного экватора.

Также видно, что величины гиперболических избытков скорости при подлёте к планете для гравитационного манёвра у неё не являются постоянными величинами. Диапазон полученных величин гиперболических избытков при гравитационных манёврах у Венеры такой: $V_\infty(t_i^-) = 15,4265 \dots 15,4303$ км/с. Все гравитационные манёвры у Земли и Венеры осуществляется на минимальной высоте пролётных гипербол.

После четвёртого гравитационного манёвра КА достигает своего максимального сближения с Солнцем $76,2 \cdot R_{Sun}$ (0,355 а.е.), а наклонение орбиты КА к плоскости экватора Солнца при этом составило $27,503^\circ$. С такого положения КА может проводить мониторинг Солнца в течение трёх витков вокруг Солнца (449,339 суток).

Последняя гелиоцентрическая орбита КА имеет наклонение 30° к плоскости солнечного экватора. Некоторые элементы орбиты КА не фиксировались и были оптимизируемыми параметрами анализируемой траектории:

- фокальный параметр 0,5671 а.е.;
- эксцентриситет 0,2187;
- наклонение (по отношению к плоскости эклиптики) $22,837^\circ$;
- долгота восходящего узла (измеренная в плоскости эклиптики) $246,184^\circ$;
- аргумент перигелия (по отношению к плоскости эклиптики) $177,5934^\circ$;
- аргумент широты (по отношению к плоскости эклиптики) $1,387^\circ$;
- истинная аномалия начальной точки целевой гелиоцентрической орбиты $183,7939^\circ$.

Информация о величине истинной аномалии начальной точки целевой гелиоцентрической орбиты даёт возможность утверждать, что радиус афелия целевой орбиты немного больше гелиоцентрического радиуса-вектора Венеры. Выбранный оптимизированный маршрут с последним гравитационным манёвром у Венеры позволил получить целевую гелиоцентрическую орбиту с минимальным радиусом афелия. Заметим также, что за счёт гравитационных манёвров радиус афелия гелиоцентрических орбит монотонно уменьшался от величины радиуса орбиты Земли до практически радиуса орбиты Венеры.

Ещё одно замечание, касающееся эксцентриситета полученной целевой орбиты. Этот эксцентриситет оказался относительно небольшим 0,219. Благодаря такому небольшому эксцентриситету появляется принципиальная возможность проводить солнечный мониторинг из всех точек итоговой гелиоцентрической орбиты.

4.2.2 Анализ численных результатов второй траектории выведения транспортной космической системы с комбинированной двигательной установкой на гелиоцентрическую орбиту с использованием последовательности околорезонансных гравитационных манёвров у Венеры

Приведём численные результаты оптимизации для второй траектории выведения КА на целевую гелиоцентрическую орбиту. Был проведён анализ трёх околорезонансных гелиоцентрических орбит КА после трёх пассивных гравитационных манёвров у Венеры со следующей последовательностью резонансов: $1:1 \rightarrow 1,5:1,5 \rightarrow 1:1$. Для эпохи старта 2027 года оптимальная дата старта - 27 января 2027 года (юлианская дата 2461433.049242831).

На рисунке 4.13 представлен геоцентрический участок разгона транспортной космической системы (КА и ХРБ) с околоземной орбиты высотой 200 км. После получения решения задачи сквозной оптимизации оптимальная величина гиперболического избытка скорости на гиперболе отлёта от Земли оказалась равной $V_{\infty}(t_{01}) = 1398,595 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Для того, чтобы обеспечить КА таким гиперболическим избытком скорости двигательной установке ХРБ потребовалось работать в течение 14,645 минут. Двигательная установка использовала 5309,38 кг топлива. Масса КА (после отделения ХРБ) в начале гелиоцентрического участка траектории Земля–Земля составила 1903,09 кг.

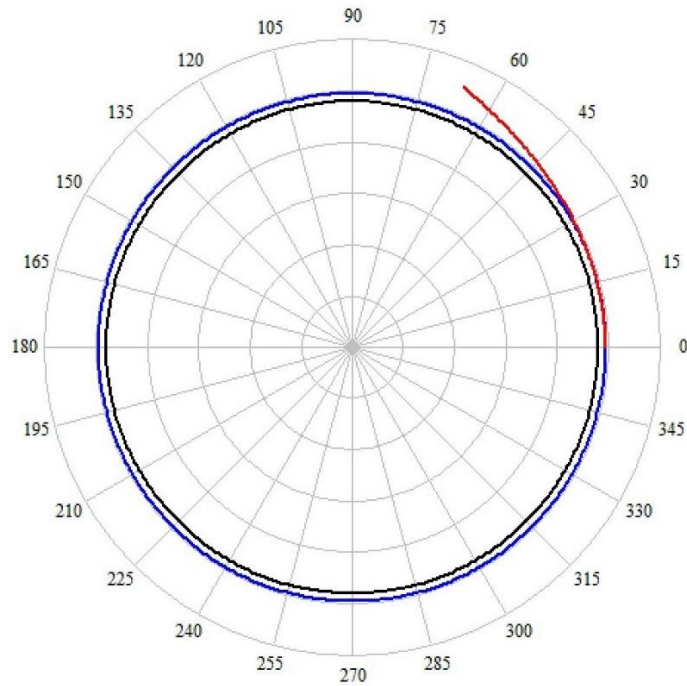


Рисунок 4.13 – Участок разгона КА ХРБ «Фрегат» при старте с круговой околоземной орбиты

На рисунке 4.14 представлено изменение угла тангажа вдоль участка работы двигателя ХРБ. На оптимальной траектории этот угол монотонно увеличивается от $-9,5^\circ$ до $+16,7^\circ$. Гравитационные потери в скорости на данном участке разгона КА составили $\Delta V_g = 71,308 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

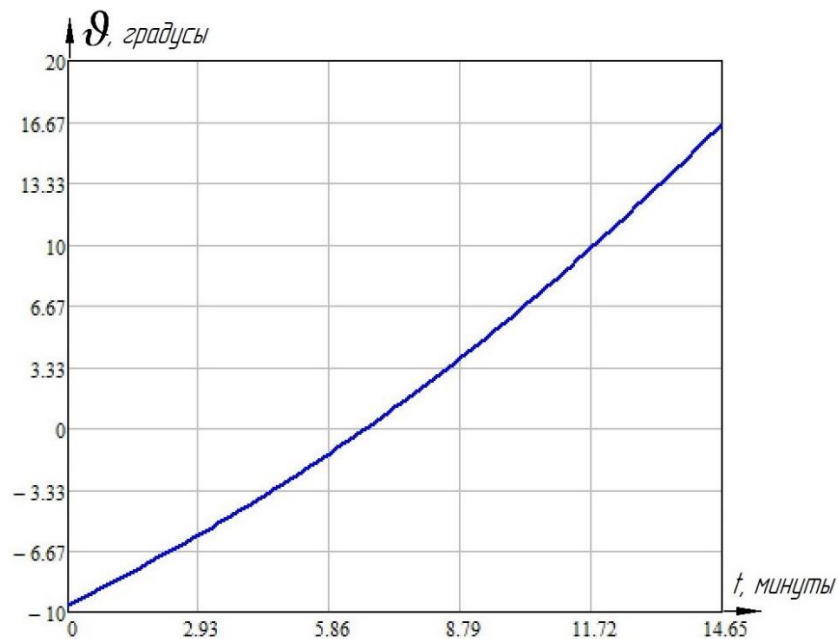


Рисунок 4.14 – Изменение угла тангажа как функции времени активного участка полёта КА и ХРБ при старте с круговой околоземной орбиты

Проекция оптимальной траектории межпланетного перелёта на плоскость эклиптики и на плоскость xOz представлены на рисунках 4.15 и 4.16 соответственно (единица расстояния вдоль осей координат – а.е.). Используются ранее введённые условные обозначения на рисунках 4.9 и 4.10, за исключением одного обстоятельства. На рассматриваемом маршруте гравитационный манёвр у Венеры осуществляется в окрестности двух противоположных точек её орбиты. Первые два резонансных гравитационных манёвра (с порядками резонанса 1:1 и 1,5:1,5) осуществляются в окрестности одной точки орбиты Венеры. Эта точка обозначена зелёным кружком. Третий (резонансный, с порядком резонанса 1:1) и четвёртый (нерезонансный) гравитационные манёвры осуществляются в окрестности точки орбиты Венеры, обозначенной фиолетовым ромбом.

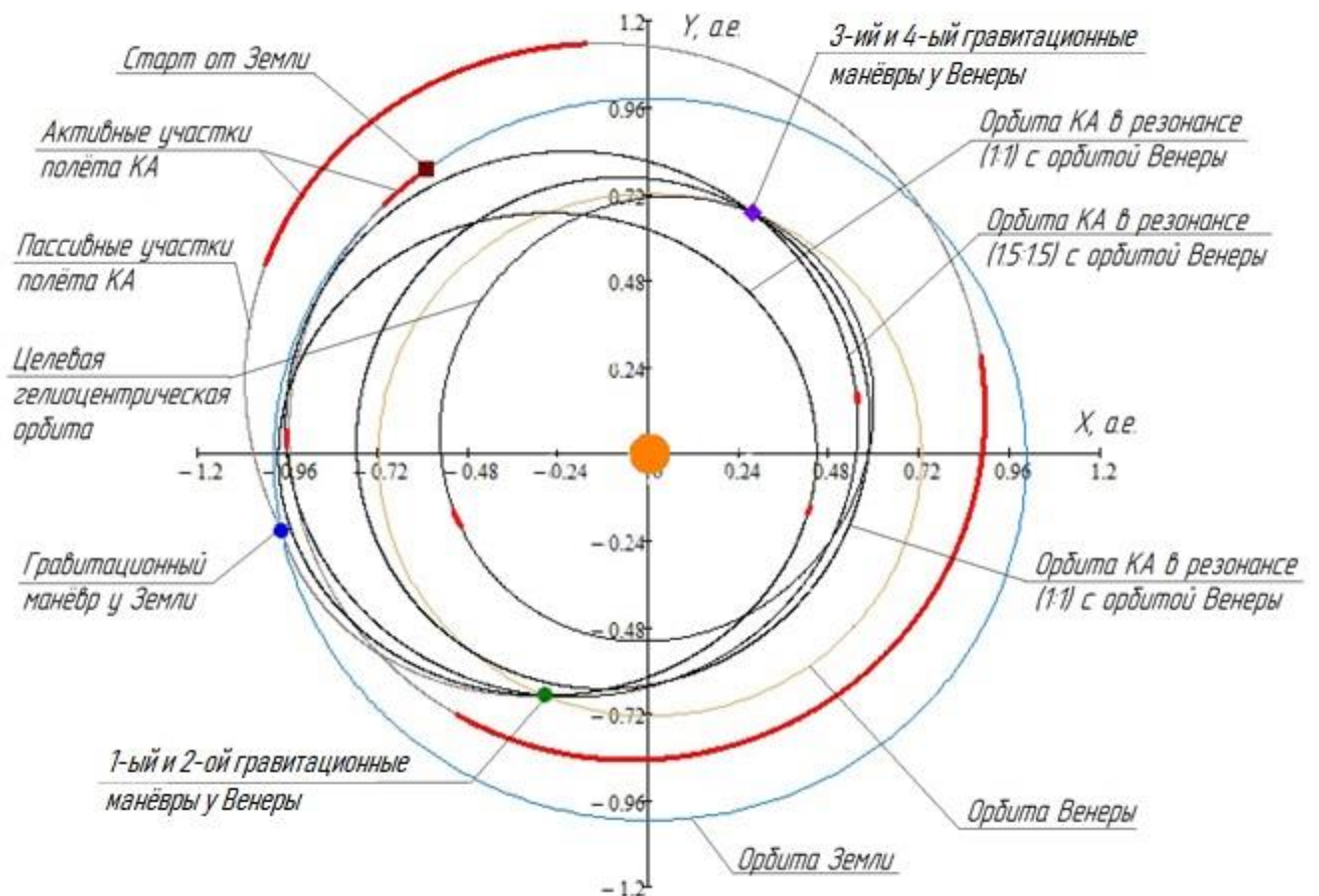


Рисунок 4.15 – Проекция на плоскость эклиптики гелиоцентрической траектории выведения КА № 2

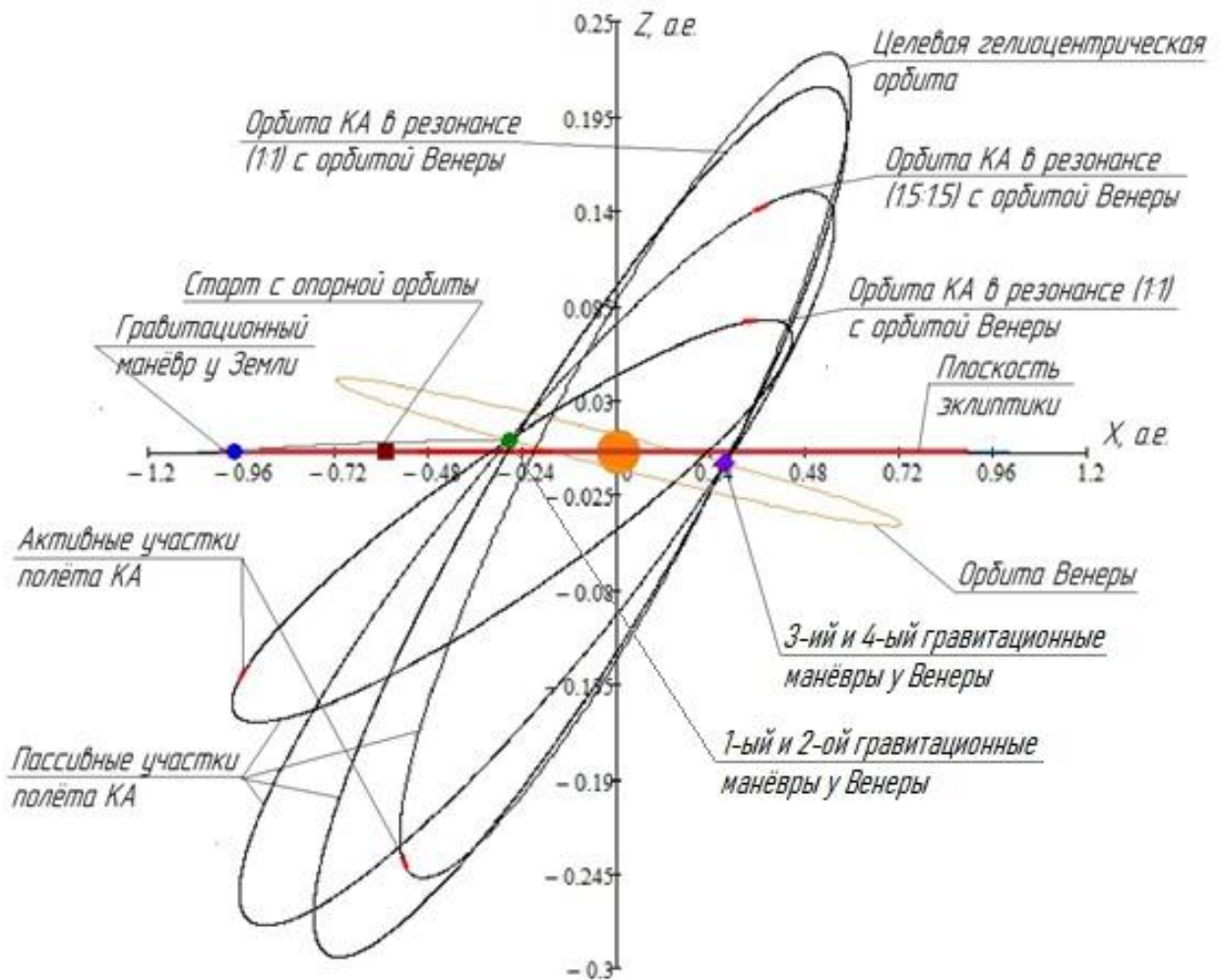


Рисунок 4.16 – Проекция на плоскость xOz гелиоцентрической траектории выведения КА № 2

В таблице 17 приведены основные временные характеристики гелиоцентрической траектории выведения КА № 2.

Таблица 17 – Основные временные характеристики гелиоцентрической траектории выведения КА на целевую орбиту вдоль оптимальной траектории № 2

Дата старта от Земли	27 января 2027 г.
Длительность гелиоцентрического перелёта Земля-Земля	430,23 суток
Дата гравитационного манёвра у Земли	1 апреля 2028 г.
Длительность гелиоцентрического перелёта Земля–Венера	58,402 суток
Дата первого гравитационного манёвра у Венеры	30 мая 2028 г.
Длительность гелиоцентрического перелёта Венера-Венера после второго гравитационного манёвра	224,698 суток

Дата второго гравитационного манёвра у Венеры	9 января 2029 г.
Длительность гелиоцентрического перелёта Венера-Венера после третьего гравитационного манёвра	337,918 суток
Дата третьего гравитационного манёвра у Венеры	13 декабря 2029 г.
Длительность гелиоцентрического перелёта Венера-Венера после четвёртого гравитационного манёвра	224,705 суток
Дата четвёртого гравитационного манёвра у Венеры	26 июля 2030 г.

На рисунке 4.17 представлены зависимости от времени функции переключения тяги и функции тяги. На рисунке функция тяги изображена сплошной толстой чёрной линией, а функция переключения ЭРДУ - тонкой чёрной линией для пассивных участков и красной линией - для активных участков траектории движения КА.

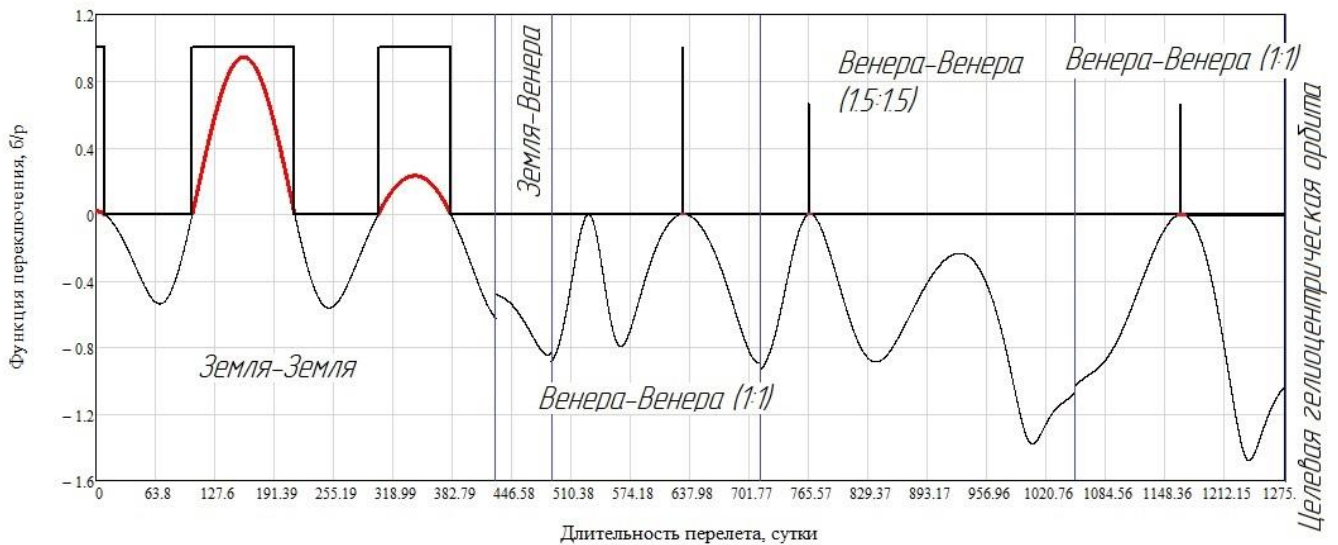


Рисунок 4.17 – Зависимость тяги и функции переключения от времени вдоль траектории № 2

На траектории Земля–Земля–Венера функция переключения очень похожа на функцию переключения на оптимальной траектории № 1. Рассмотрим детальнее гелиоцентрический участок Земля-Земля. Длительность полёта КА на этом участке составила 430,23 суток. На траектории Земля–Земля есть три активных и три пассивных участка:

- активный участок, продолжительность которого составляет 8,986 суток;

- пассивный участок (121,072 суток);
- активный участок длительностью 109,885 суток;
- пассивный участок продолжительностью 89,618 дней;
- активный участок (77,957 суток);
- пассивный участок (49,261 суток).

Гелиоцентрический участок перелёта Земля–Венера полностью пассивный: функция переключения на нём отрицательная.

В таблице 18 приведены основные временные и массовые характеристики по анализируемому маршруту, включающему π -резонансный гелиоцентрический перелёт Венера-Венера. Максимизируемая масса КА на конечной гелиоцентрической орбите получилась равной 1601,86 кг. Транспортной космической системе потребовалось 3,493 года на выполнение маршрута.

Таблица 18 – Временные и массовые характеристики гелиоцентрической траектории КА

№ ГМ	Резонанс	m_i	Продолжительность работы ЭРДУ КА, минуты	Затрачиваемая масса топлива ЭРДУ КА, кг	Время полёта КА, отсчитываемое от даты старта, годы	Масса КА в конце гелиоцентрического участка планета-планета, кг
1	2	3	4	5	6	7
1	-	-	0	0	1,178	1601,956
2	1 : 1	0,9999666	72,473	0,077	1,338	1601,879
3	1,5 : 1,5	1,503864	10,353	0,011	1,953	1601,868
4	1 : 1	0,9999948	7,53	0,008	2,878	1601,86
5	-	-	0	0	3,493	1601,86

Из анализа третьего столбца таблицы 18 видно, что из-за наличия возмущений на траекторию Венеры КА делает один почти полный оборот по гелиоцентрической околорезонансной орбите с порядком резонанса 1:1. При движении по околорезонансной орбите с порядком резонанса 1,5:1,5 КА делает немного больше полутора витка вокруг Солнца. Наконец, при движении по

последней околорезонансной орбите (порядок её резонанса 1:1) КА делает опять почти полный оборот вокруг Солнца.

На рисунке 4.18 показаны зависимости расстояния КА от Солнца (голубая линия) и гелиоцентрической скорости КА (жёлтая линия) как функций времени. На рисунке используются ранее введённые на рисунке 4.12 единицы и условные обозначения.

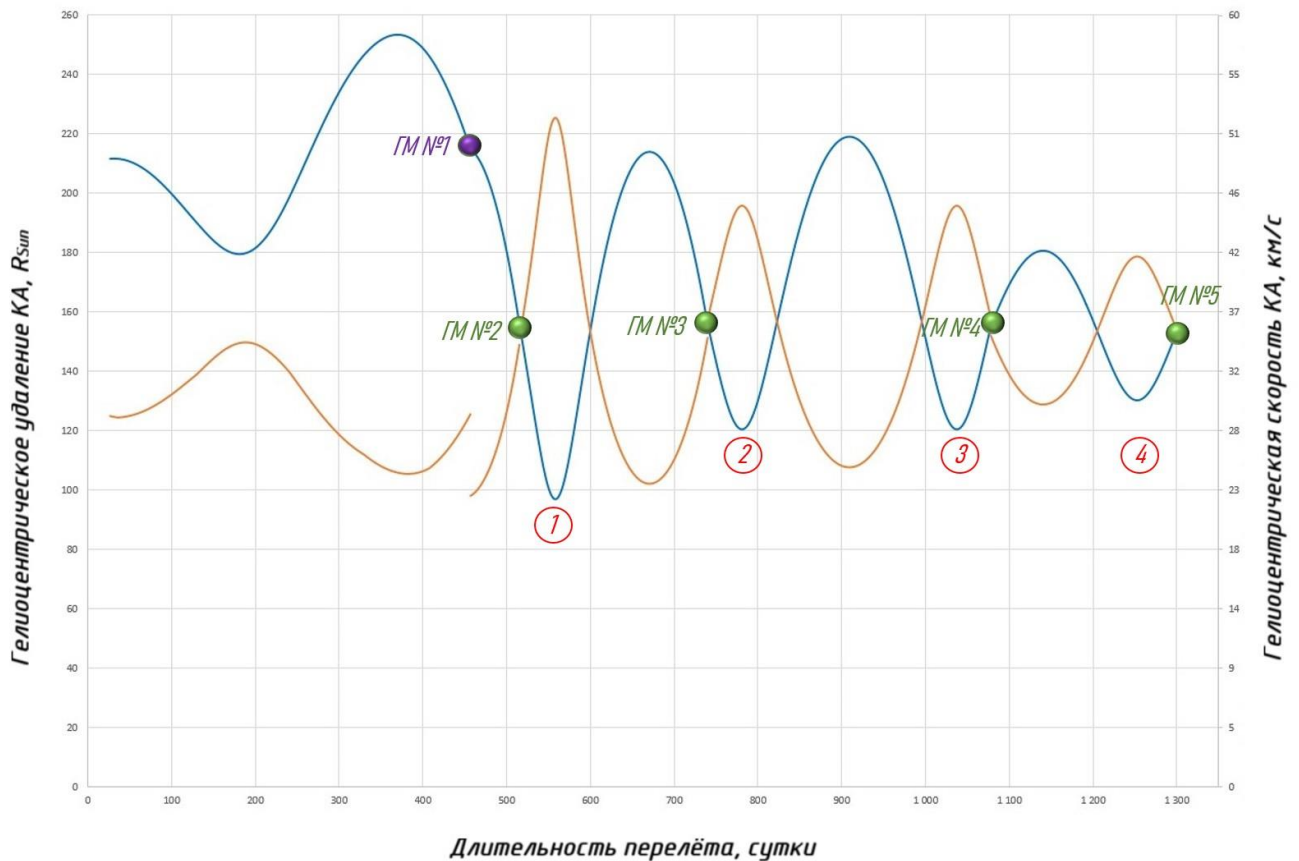


Рисунок 4.18 – Зависимости гелиоцентрического удаления КА и гелиоцентрической скорости КА от времени полёта

Анализ приведённой зависимости гелиоцентрического удаления КА от Солнца показывает, что после каждого гравитационного манёвра увеличивается величина радиуса перигелия орбит КА. Перелётные орбиты КА между последовательными гравитационными манёврами становятся менее вытянутыми, т.е. постепенно уменьшается эксцентриситет.

Основные характеристики гелиоцентрических орбит КА после гравитационных манёвров приведены в таблице 19.

В первом столбце указан порядковый номер гравитационного манёвра. Во втором столбце записана величина гиперболического избытка скорости КА при гравитационном манёвре у планеты. В третьем и четвёртом столбцах указаны максимальный и используемый углы поворота вектора гиперболического избытка скорости при гравитационном манёвре. В пятом и шестом столбцах представлены величины радиуса перигелия и афелия соответственно. В столбцах 7–9 указаны долгота восходящего узла, наклонение к плоскости эклиптики и наклонение к плоскости экватора Солнца гелиоцентрических орбит КА после гравитационных манёвров.

Таблица 19 – Характеристики гравитационных манёвров и гелиоцентрических траекторий КА после пролёта у Земли и Венеры

№ ГМ	Величина гиперболического избытка скорости, км/с	Угол β_{max} , градусы	Угол β_i , градусы	Радиус перигелия, R_{Sun}	Радиус афелия, а.е.	Долгота восходящего узла, градусы	Наклонение орбиты КА к плоскости эклиптики, градусы	Наклонение орбиты КА к плоскости солнечного экватора, градусы
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	7,521	61,373	61,373	86,42	1,003	192,118	0,657	7,561
2	15,5137	19,926	19,926	96,97	0,996	244,244	9,4275	16,587
3	15,5156	19,922	19,922	120,5	1,019	245,57	15,668	22,833
4	15,5663	19,814	19,814	130,28	0,841	246,046	20,468	27,632
5	15,568	19,81	19,81	112,9	0,724	246,209	22,834	30,00

В первом столбце указан порядковый номер гравитационного манёвра. Во втором столбце записана величина гиперболического избытка скорости КА при гравитационном манёвре у планеты. В третьем и четвёртом столбцах указаны максимальный и используемый углы поворота вектора гиперболического избытка скорости при гравитационном манёвре. В пятом и шестом столбцах представлены величины радиуса перигелия и афелия соответственно. В столбцах 7–9 указаны долгота восходящего узла, наклонение к плоскости эклиптики и наклонение к

плоскости экватора Солнца гелиоцентрических орбит КА после гравитационных манёвров.

После пятого гравитационного манёвра КА достигает целевой гелиоцентрической орбиты с наклоном 30° к плоскости солнечного экватора.

Величины гиперболических избытков скорости при подлёте к Венере для гравитационного манёвра у неё находятся в диапазоне $V_\infty(t_i^-) = 15,5137 \dots 15,568$ км/с. Все гравитационные манёвры у Венеры осуществляются на минимальной высоте пролётных гипербол, т.е. 400 км.

После своего первого гравитационного манёвра у Венеры КА переходит на гелиоцентрическую орбиту с минимальным радиусом перигелия, равным $96,97 \cdot R_{Sun}$ (0,451 а.е.). При этом длительность нахождения КА на этой орбите составляет всего 224,7 суток, а наклонение орбиты КА к плоскости экватора Солнца составляет $16,587^\circ$.

Последняя гелиоцентрическая орбита КА имеет наклонение 30° к плоскости солнечного экватора. Ниже приведены значения элементов итоговой орбиты КА, которые оптимизировались в рамках задачи сквозной оптимизации:

- фокальный параметр 0,6087 а.е.;
- эксцентриситет 0,1587;
- наклонение (по отношению к плоскости эклиптики) $22,834^\circ$;
- долгота восходящего узла (измеренная в плоскости эклиптики) $246,209^\circ$;
- аргумент перигелия (по отношению к плоскости эклиптики) $11,993^\circ$;
- аргумент широты (по отношению к плоскости эклиптики) $181,391^\circ$;
- истинная аномалия начальной точки целевой гелиоцентрической орбиты $169,398^\circ$.

4.3 Заключение по разделу 4

Проведено исследование двух оптимальных траекторий выведения КА для исследования Солнца на гелиоцентрическую орбиту с большим наклоном (30°) к плоскости экватора Солнца с одним гравитационным манёвром у Земли и последовательностью четырёх гравитационных манёвров у Венеры. В первой

траектории выведения КА используются только целые околорезонансные орбиты КА с орбитой Венеры, во второй схеме включена одна перелётная траектория Венера–Венера с угловой дальностью 3π .

В таблице 20 проведён сравнительный анализ двух траекторий выведения КА на целевую гелиоцентрическую орбиту. В этой таблице во втором и четвёртом столбцах приведены численные результаты решения вспомогательных задач, а в третьем и пятом столбцах – результаты задачи сквозной оптимизации.

Отметим, что использование полного набора условий оптимальности в задаче сквозной оптимизации позволило улучшить показатель, рассматриваемый в качестве критерия оптимизации, - величину массы КА, выводимую на итоговую гелиоцентрическую орбиту, по сравнению с вспомогательной задачей:

- для первой траектории конечная масса КА увеличилась на 5,18 кг;
- для второй траектории конечная масса КА увеличилась на 17,60 кг.

Для второй траектории выведения оптимизируемая масса КА увеличилась относительно существенно. Связано это с тем, что сдвинулась оптимальная дата старта и на гелиоцентрической траектории Земля–Земля на выполнение транспортной операции ЭРДУ истратил на 15,23 кг меньше ксенона. Анализируя таблицу, можно отметить, что возмущённое движение Венеры пусть и незначительно, но всё же влияет на траекторию выведения КА. В первую очередь, данное условие повлияло на величины гиперболических избытков скорости у Венеры:

	Величина гиперболического избытка скорости, км/с	
	Вспомогательная задача	Задача сквозной оптимизации
Траектория № 1	15,45	15,42...15,4303
Траектория № 2	15,5	15,5137...15,568

Ещё одним немаловажным аспектом проведённого численного анализа является то, что маршрут, включающий в себя π -резонансную гелиоцентрическую орбиту, позволил существенно сократить время выведения КА. Это время уменьшилось на 550,932 суток для вспомогательной задачи и на 560,987 суток для задачи с полным набором условий оптимальности.

Таблица 20 – Основные характеристики анализируемых траекторий выведения КА на целевую гелиоцентрическую орбиту

Параметр	Траектория № 1		Траектория № 2	
	Вспомогательная задача	ЗСО ⁴	Вспомогательная задача	ЗСО
1	2	3	4	5
Временные характеристики				
Оптимальная дата старта	06.02.2027	27.01.2027	31.01.2027	27.01.2027
Дата первого гравитационного манёвра	01.04.2028	01.04.2028	07.04.2028	01.04.2028
Дата второго гравитационного манёвра	30.05.2028	30.05.2028	31.05.2028	30.05.2028
Дата третьего гравитационного манёвра	09.01.2029	09.01.2029	09.01.2029	09.01.2029
Дата четвёртого гравитационного манёвра	15.11.2030	14.11.2030	13.12.2029	13.12.2029
Дата пятого гравитационного манёвра	07.02.2032	07.02.2032	26.07.2030	26.07.2030
Длительность выведения КА на целевую орбиту, сутки (годы)	1826,763 (5,002)	1836,939 (5,029)	1275,831 (3,493)	1275,952 (3,493)
Характеристики гравитационных манёвров				
Гиперболический избыток скорости при старте от Земли, м/с	1440,412	1387,795	1396,387	1398,595
Гиперболический избыток скорости при первом гравитационном манёвре, км/с	7,462	7,4595	7,787	7,521
Реализуемый угол β_i при первом гравитационном манёвре, градусы	61,846	61,872	61,297	61,373
Гиперболический избыток скорости при втором гравитационном манёвре, км/с	15,45	15,4298	15,5	15,5137
Реализуемый угол β_i при втором гравитационном манёвре, градусы	20,066	20,107	19,913	19,926

⁴ ЗСО сокращённо задача сквозной оптимизации

Параметр	Траектория № 1		Траектория № 2	
	Вспомогательная задача	ЗСО ⁴	Вспомогательная задача	ЗСО
1	2	3	4	5
Гиперболический избыток скорости при третьем гравитационном манёвре, км/с	15,45	15,4273	15,5	15,5156
Реализуемый угол β_i при третьем гравитационном манёвре, градусы	20,066	20,113	19,913	19,922
Гиперболический избыток скорости при четвёртом гравитационном манёвре, км/с	15,45	15,4265	15,5	15,5663
Реализуемый угол β_i при четвёртом гравитационном манёвре, градусы	20,066	20,115	19,913	19,814
Гиперболический избыток скорости при пятом гравитационном манёвре, км/с	15,45	15,4303	15,578	15,568
Реализуемый угол β_i при пятом гравитационном манёвре, градусы	20,066	20,106	19,79	19,81
Массовые характеристики				
Масса КА после отделения ХРБ, кг	1898,103	1904,357	1900,626	1903,09
Требуемая масса ксенона на траектории Земля-Земля-Венера, кг	297,423	298,27	316,363	301,135
Требуемая масса ксенона на гелиоцентрических орбитах КА, находящихся в резонансе с орбитой Венеры, кг	0	0,223	0	0,096
Суммарная масса затрачиваемого топлива ЭРДУ КА, кг	297,423	298,493	316,363	301,231
Конечная масса КА на целевой гелиоцентрической орбите, кг	1600,68	1605,864	1584,263	1601,86

Заключение

В рамках данной работы была разработана методика проектирования сложных схем межпланетных перелётов с использованием последовательности гравитационных манёвров у небесных тел, а также проанализирована задача сквозной оптимизации подобных баллистических схем межпланетных перелётов КА с комбинированной двигательной установкой, использующая полный набор условий оптимальности. Приведённые в настоящей работе условия оптимальности получены при использовании принципа максимума Понтрягина.

В рамках данной диссертационной работы сформулирована новая постановка задачи сквозной оптимизации траектории межпланетного перелёта КА с комбинированной двигательной установкой. Многоточечная задача сквозной оптимизации анализируется на примере выведения КА на гелиоцентрическую орбиту для проведения исследования Солнца. Предполагается, что эта орбита имеет фиксированное достаточно большое наклонение к плоскости солнечного экватора. Маршрут межпланетного перелёта КА включает в себя последовательность одного гравитационного манёвра у Земли и четырёх гравитационных манёвров у Венеры. Новая постановка задачи сквозной оптимизации траектории выведения КА с комбинированной двигательной установкой имеет несколько особенностей сравнительно с другими работами:

- используется полный набор условий оптимальности принципа максимума Понтрягина, позволяющий свести оптимизационную проблему к $(N + 2)$ -точечной краевой задаче, где N – количество гравитационных манёвров;

- величины и направление гиперболических избытков скоростей, используемых при гравитационных манёврах, являются оптимизируемыми характеристиками задачи сквозной оптимизации;

- используются условия оптимальности, обеспечивающие учёт ограничений по наклонению гелиоцентрических орбит КА;

- имеется возможность анализировать схему полёта с π -резонансными гравитационными манёврами.

В работе описаны математические модели движения КА с комбинированной двигательной установкой:

- участок разгона транспортной космической системы (ХРБ и КА) с опорной орбиты ИСЗ;
- гелиоцентрический участок траектории перелёта КА планета-планета с возможностью включения ЭРДУ КА;
- пассивные участки гелиоцентрической траектории перелёта КА;
- гравитационные манёвры, переводящие КА на гелиоцентрическую траекторию с угловыми дальностями $2\pi \cdot k$ и $\pi \cdot (2k - 1)$, где k – целое положительное число;
- пассивные околорезонансные гравитационные манёвры.

Проведён численный анализ двух траекторий выведения КА с комбинированной двигательной установкой в рамках анализируемой задачи сквозной оптимизации, использующий цепочку пассивных гравитационных манёвров, находящихся в орбитальном резонансе с орбитой Венеры:

- с целыми порядками резонансов;
- с целыми порядками резонансов и включением одного π -резонанса (с порядком резонанса 1,5:1,5).

Результат численного анализа оказался следующим: при практически одинаковой оптимальной дате старта с околоземной орбиты 27.01.2027 года маршрут, включающий в себя π -резонансную гелиоцентрическую траекторию перелёта Венера-Венера, позволил существенно сократить время выведения КА. Это время уменьшилось с 5,029 лет до 3,494 лет, т.е. на 560,987 суток. При этом конечная оптимизируемая масса КА (масса КА на целевой гелиоцентрической орбите) изменилась незначительно – уменьшилась на 4 кг. Данное исследование позволило доказать возможную целесообразность использования π -резонансных гравитационных манёвров при реализации сложных схем межпланетного полёта.

Список сокращений и условных обозначений

- ГГСК - гелиоцентрическая гелиоэкваториальная система координат;
- ГМ - гравитационный манёвр;
- ГЭСК - гелиоцентрическая эклиптическая система координат;
- ЕКА - европейское космическое агентство;
- ЗСО - задача сквозной оптимизации;
- ИСЗ - искусственный спутник Земли;
- КА - космический аппарат;
- НАСА - национальное управление США по авиации и исследованию космического пространства;
- ОДУ - обыкновенные дифференциальные уравнения;
- ОСК - орбитальная система координат;
- ОТ - ограниченная тяга;
- РН - ракета-носитель;
- ХДУ - химическая двигательная установка;
- ХРБ - химический разгонный блок;
- ЭВМ - электронная вычислительная машина;
- ЭРДУ - электроракетная двигательная установка.

Список литературы

1. Абалакин В.К. Основы эфемеридной астрономии // Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1979, с. 448.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука. 1988. – 552 с.
3. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Тучин А.Г. Виртуальные гравитационные манёвры при проектировании межпланетных перелётов // Препринты ИПМ. им. М.В. Келдыша. 2023. №39. 24 с.
4. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. О вариации наклона орбит небесных тел при совершении гравитационного манёвра в Солнечной системе // Препринты ИПМ. им. М.В. Келдыша. 2016. №15. 36 с.
5. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Формирование орбит космического аппарата с большим наклоном к эклиптике посредством многократных гравитационных манёвров // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2017. №2. 108-132 с.
6. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Гравитационные манёвры около Венеры для выхода на внеэклиптические положения. Резонансная асимптотическая скорость // Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы. 2019. Т. 53. №4. 256-264 с.
7. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Методика формирования больших наклонов орбиты КА с использованием гравитационных манёвров // Препринты ИПМ. им. М.В. Келдыша. 2015. №64. 32 с.
8. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Синтез последовательности гравитационных манёвров КА для достижения орбит с высоким наклоном к эклиптике // Препринты ИПМ. им. М.В. Келдыша. 2016. №43. 32 с.
9. Иванюхин А.В. Методы проектирования траекторий КА с электроракетными двигателями на основе анализа области существования решений

и исследования задачи о минимальной тяге диссертация на соискание учёной степени к.т.н.: 05.07.09 / Иванюхин А.В. М., 2015. 101 с.

10. Ивашкин В.В., Крылов И.В. Оптимизация траекторий космического аппарата с электроракетным двигателем малой тяги // Препринты ИПМ. Им. М.В. Келдыша. 2020. №94. 32 с.

11. Константинов М.С., Курасбедиани Р.Г. Анализ характеристик межпланетной траектории, использующей резонансные с орбитой планеты участки траектории, с учётом её реального движения // Известия высших учебных заведений. Т. 2, 2022. С. 85-93.

12. Константинов М.С., Лёб Х.В., Петухов В.Г. Применение высокочастотного ионного двигателя RIT-22 в проекте «Интергелио-Зонд». Электронный журнал «Труды МАИ», выпуск 60, 10 с.

13. Константинов М.С., Орлов А.А. Оптимизация траектории к Юпитеру космического аппарата с малой тягой с использованием двух гравитационных манёвров у Земли // Вестник МАИ. 2014. Т. 21, №1. С. 58-69.

14. Константинов М.С., Тейн М. Анализ одной схемы полёта КА для исследования Солнца // Электронный журнал «Труды МАИ», Выпуск 71, 2013, 24 с.

15. Константинов М.С., Тейн М. Оптимизация траектории выведения космического аппарата на рабочую гелиоцентрическую орбиту // Электронный журнал «Труды МАИ». 2013. № 67. 20 с.

16. Константинов М.С., Шевченко В.В. Проектно-баллистический анализ выведения космического аппарата на гелиоцентрическую орбиту с наклоном 30° к плоскости солнечного экватора // Вестник Московского авиационного института, 2024. Т.31. №2. С. 144-154.

17. Константинов М.С., Шевченко В.В. Оптимизация сложных схем межпланетного перелёта с почти резонансными гелиоцентрическими орбитами // Космонавтика и ракетостроение, 2026.

18. Константинов М.С. Сравнительный проектно-баллистический анализ использования химической и электроракетной двигательных установок в проекте солнечного зонда // Космические исследования, 2019. Т. 57. №5. С. 1-15.

19. Крылов И.В. Метод решения многоэкстремальной задачи оптимизации траекторий космического аппарата с электроракетной тягой // Космические исследования, 2020, т. 58, №3, с. 235-248.
20. Кузнецов В.Д., Зелёный Л.М. Космические проекты по солнечно-земной физике // Солнечно-земная физика. Т. 1. № 12, 2008. С. 83-92.
21. Кузнецов В.Д. Космические и внеатмосферные исследования Солнца // Успехи физических наук. Т. 195, №8, 2025. С. 858-874.
22. Кузнецов В.Д. Научные задачи проекта «Интергелиозонд» // Механика, управление и информатика, Т. 6(12), 2012. С. 5-14.
23. Кузнецов В.Д. Космические исследования Солнца // Космос: наука и проблемы XXI века, 209. С. 60-92.
24. Лёб Х.В., Петухов В.Г., Попов Г.А. Гелиоцентрические траектории космического аппарата с ионными двигателями для исследования Солнца // Электронный журнал «Труды МАИ». 2011. № 42. 22 с.
25. Маркеев А.П. Теоретическая механика: учебник для университетов // Москва: ЧеРо, 1999, 572 с.
26. Мирошниченко Л.И. Физика Солнца и солнечно-земных связей: учебное пособие // Под ред. М.И. Панасюка. – М.: Университетская книга, 2011. – 174 с.
27. Петухов В.Г. Оптимизация многовитковых перелётов между некомпланарными эллиптическими орбитами // Космические исследования. Т. 42, №3. С. 260-279.
28. Платов И.В., Симонов А.В., Константинов М.С. Выбор рационального варианта построения комбинированной двигательной установки и схемы полёта космического аппарата «Интергелио-зонд» // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2015. №4 (30). С. 31.
29. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматиздат, 1983. – 392 с.
30. Понтрягин Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении // М.: Наука, 1989.

31. Старинова О.Л. Расчёт межпланетных перелётов космических аппаратов с малой тягой. – Москва: ЛЕНАНД, 2020. – 200 с.
32. Старинова О.Л., Лобыкин А.А., Рожков М.А. Оптимизация гелиоцентрических перелётов космического аппарата с разнотипными электроракетными двигателями // Космическая техника и технологии, 2023, №1 (40), с. 94-104.
33. Суханов А.А. Астродинамика / А.А. Суханов - Москва: Ин-т космических исследований РАН, 2010. – 103 с.
34. Суханов А.А. Универсальное решение задачи Ламберта / А.А. Суханов. – Москва: ИКИ, 1987. – 25 с.
35. Царегородцев А.Ю. Баллистическое проектирование орбит космического аппарата с использованием гравитационных манёвров в проектах изучения приполярных областей Солнца из внеэклиптических положений // Препринты ИПМ. им. М.В. Келдыша. 2024. №34. 20 с.
36. В. А. Archinal, M.F. A`Hearn, E. Bowell, et al. Report of the IAU Working Group on cartographic coordinates and rotational elements, 2015 *Celest Mech Dyn Astr* (2018) 130:22. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10569-017-9805-5>.
37. Daniel F. Rayan, Laura A. Hayes. Solar Orbiter`s 2024 Major Flare Campaigns: An overview. // *Solar Physics*, 2025.
38. Janin J. Trajectory design for the Solar Orbiter mission // *Monografias de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza*. 25: 177-218, (2004).
39. Konstantinov M.S., Shevchenko V.V. Ballistic design of a solar probe into a heliocentric orbit with a large inclination to the solar equator // *AIP Conf. Proc.* 2549, 120004 (2023) // DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0107997>.
40. Konstantinov M.S. Analysis of the viability of using a sequence of gravitational maneuvers at the opposite points of the planet orbit // *Advances in the Astronautical Sciences*, Vol. 174, 2019.
41. Konstantinov M.S., M. Thein. Method of interplanetary trajectory optimization for the spacecraft with low thrust and swing-bys // *Acta Astronaut.* (2017) pp. 297-311.

42. Labunsky A.V., Popkov O.V., Sukhanov K.G. Multiple Gravity Assist Interplanetary Trajectories // ESI Book Series. L.: Gordon and Breach Publishers, 1998. P. 9-266.
43. Petukhov V., Ivanyuhin A., Popov G. et.al. Optimization of finite-thrust trajectories with fixed angular distance // Acta Astronaut, 2021. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.03.012>.
44. Sukhanov A.A. Close approach to Sun using gravity assists of the inner planets // Acta Astronaut. 45 (4-9), 177-185, 1999.
45. Y. Guo, Paul T., etc. Execution of Parker Solar Probe`s unprecedented flight to the Sun and early results // Acta Astronaut. 179 (2021) 425-438.
46. Y. Guo. Solar Probe plus: mission design challenges and trades // Acta Astronaut. 67 (2010) 1063-1072.
47. Yoon S.W., Petukhov V.G., Ivanyukhin A.V. An approach for the end-to-end optimization of low-thrust interplanetary trajectories using collinear libration points // Acta Astronaut. Vol. 221,2024. P. 12-25.