



Научная статья

УДК 539.411.4

URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=188826>

EDN: <https://www.elibrary.ru/PIKLSY>

Устойчивость и геометрически нелинейное деформирование компактных предповерхностных дефектов типа расслоений композитных панелей с анизотропной несимметричной структурой

Олег Владимирович Митрофанов¹, Максим Викторович Шкурин²✉

^{1, 2} Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Российская Федерация

² m.shkurin@mai.ru ✉, ORCID 0000-0001-8635-9628

Аннотация. В статье рассмотрены компактные прямоугольные предповерхностные дефекты типа расслоений в многослойных композитных панелях с учетом анизотропной (несбалансированной) несимметричной структуры. Для описания напряженно-деформированного состояния указанных дефектов использованы исходные соотношения наиболее общей математической модели, учитывающей мембранные, смешанные и изгибные жесткости. Рассматриваемые панели (дефекты) могут быть нагружены сжимающими и касательными потоками. В работе для компактных панелей получено аналитическое решение нелинейной задачи, причем прогиб в данном случае включает два члена, а с помощью метода Бубнова – Галеркина построена система нелинейных уравнений, связывающих действующую нагрузку и амплитуды прогиба. Записанная система уравнений позволяет проводить оценку нелинейного напряженно-деформированного поведения и критических напряжений для рассматриваемых предповерхностных компактных дефектов.

Ключевые слова: сжатие композитной панели, анизотропная несимметричная структура, геометрически нелинейное деформирование, предповерхностные дефекты

Для цитирования: Митрофанов О.В., Шкурин М.В. Устойчивость и геометрически нелинейное деформирование компактных предповерхностных дефектов типа расслоений композитных панелей с анизотропной несимметричной структурой // Вестник Московского авиационного института. 2026. Т. 33. № 3. С. 93–107. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=188826>

Original article

Buckling and Geometrically Nonlinear Deformation of Compact Near-Surface Delaminations in Composite Panels with an Asymmetric Anisotropic Layup

Oleg V. Mitrofanov¹, Maksim V. Shkurin²✉

^{1, 2} Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

² m.shkurin@mai.ru ✉, ORCID 0000-0001-8635-9628

© Митрофанов О.В., Шкурин М.В., 2026

Abstract

The emergence of defects and damages, requiring exact evaluation of the stress-strain condition (SSS) for their non-propagation prediction, while the structures from composite materials being operated is inevitable in modern aviation industry. Particular attention is being paid to the delamination type compact rectangular subsurface defects in smooth composite skins. Unlike the traditional regular zones design, where symmetric balanced structures are employed, actual subsurface delaminations often exhibit an anisotropic (unbalanced) and asymmetric layup. Analysis of such zones requires application of complex mathematical models as bending and plane stress states are not being separated in them.

The primary objective of this study consists in obtaining an analytical solution to the problem of buckling and post-buckling (geometrically nonlinear) deformation of the compact rectangular delaminations with account for the impact of structural anisotropy and asymmetry under the action of the compressive and shear loads.

Basic relations of the composite panel generalized mathematical model are being employed as a methodological foundation. Physical equations incorporate membrane, bending, and mixed stiffnesses. A system of two nonlinear von Kármán-type differential equations for asymmetric unbalanced structures is derived based on the equilibrium and strain compatibility equations, and by the Airy stress function introduction. To solve the boundary value problem of a simply supported panel, the Bubnov-Galerkin method was applied. The deflection function is approximated as a two-term series. Analytical integration of the equations allowed reducing the initial problem to a system of the two nonlinear algebraic equations with respect to the deflection amplitudes.

As the result of the research, a closed-form analytical solution was successfully obtained. The explicit analytical relationships and governing integration coefficients were derived for the stress-strain state computing at the post-buckling stage. Besides, compact analytical formulas for determining critical compressive and shear fluxes were established.

The obtained results are of significant practical interest for damage tolerance engineering in the aerospace sector. The derived analytical relationships allow for a rapid and reliable evaluation of the defects nonlinear behavior under combined loading conditions. Furthermore, they facilitate multivariant verification computations of the stress-strain state for the subsurface delaminations. This mathematical framework enables structural engineers to quickly and accurately assess the critical necessity of repair interventions. Ultimately, the proposed approach can be seamlessly integrated into the overarching survivability methodology of modern composite aviation structures, ensuring their reliable verification and safety while rigorously accounting for their complex asymmetric structural characteristics.

Keywords: composite panel compression; anisotropic asymmetric layup; geometrically nonlinear deformation; near-surface defects

For citation: Mitrofanov O.V., Shkurin M.V. Buckling and Geometrically Nonlinear Deformation of Compact Near-Surface Delaminations in Composite Panels with an Asymmetric Anisotropic Layup. *Aerospace MAI Journal*. 2026;33(3):93–107. (In Russ.). URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=188826>

List of Figures

Fig. Compact rectangular panel when compressed

Введение

При создании современных авиационных конструкций из композитных материалов допускается наличие дефектов и повреждений различных категорий [1], для которых необходимо определять напряженно-деформированное состояние для последующей оценки нераспространения за определенный период при эксплуатации воздушного судна. Объектами исследования в данной работе являются компактные прямоугольные предположенные поверхностные дефекты типа расслоений в гладких композитных обшивках авиационных конструкций. Исходная постановка задачи при рассмотрении поведения таких дефектов в общем случае требует проведения анализа устойчивости и определения напряженно-деформированного состояния (НДС)

при геометрически нелинейном деформировании компактных прямоугольных панелей с несбалансированной несимметричной укладкой. Отметим, что в этом случае желательно иметь аналитические решения определения НДС для возможной последующей экспертной оценки распространения дефектов с учетом сжатых сроков и достаточно большого объема вычислений, связанных с необходимостью оценки нескольких вариантов расположения дефектов (повреждений) по толщине, поскольку исходная информация о глубине залегания дефекта может иметь большую погрешность.

В большей части современной научно-технической литературы при рассмотрении задач поведения дефектов в композитных панелях, как правило, используют термин «анизотропные панели», кото-

рый в общем случае имеет очень широкое значение [2–4] и требует некоторых пояснений. Причиной широкого использования указанного термина является то, что для проектируемых конструкций существует теоретическая возможность варьирования прочностными и жесткостными характеристиками композитных панелей, которые должны иметь симметричную сбалансированную структуру, а также предсказуемый характер поведения при нагружении в плоскости. При рассмотрении же предповерхностных дефектов типа расслоений ситуация является более сложной и требует учета несбалансированности и несимметричности укладки, а также применения существенно более сложных математических моделей по сравнению с традиционными моделями для симметричных ортотропных панелей, применяемыми при проектировании. То есть актуальные задачи поверочного расчета дефектов требуют применения более сложных моделей, тогда как при проектировании регулярных гладких обшивок во всех авиационных конструкторских бюро используют симметричные ортотропные панели, при определении параметров которых не требуется сложных моделей и решений.

В связи с этим далее будем считать допустимым уточнение терминологии для последующих рассуждений в данной работе исходя из исследований наиболее известных классических монографий и некоторых современных работ. Отметим, что в монографии С.Г. Лехницкого [4, 1947], в которой рассмотрены анизотропные панели, в результирующие прикладные соотношения входили изгибные жесткости D_{16} и D_{26} , но при этом не учитывалась несимметричность композитного пакета. При рассмотрении задач изгиба и устойчивости в монографии [4] автор называл такие панели «неортотропными».

В широко известной теории конструкций из композитных материалов В.В. Васильева [5, 1988] предложены соотношения для анализа несимметричных панелей, где кроме мембранных B_{mn} и изгибных D_{mn} жесткостей учитываются смешанные жесткости C_{mn} , но не учитывается указанная выше несбалансированность композитного пакета (жесткости $D_{16} = 0$ и $D_{26} = 0$). Отметим, что разработанная теория [5] позволяет получать аналитические решения для большинства задач при обеспечении прочности и устойчивости современных композитных конструкций и широко применяется в авиационных конструкторских бюро. Также отметим, что использование соотношений теории [5] при рассмотрении задач исследования закритического деформирования композитных панелей несимметричной структуры и использовании метода Бубнова–Галеркина позволяет получать замкнутые аналитические решения геометрически нелинейных

задач и задач устойчивости, а итоговые формулы для несимметричных панелей приведены в работе [7, 2022]. Полученные итоговые аналитические выражения [7] для оценки критических напряжений, как правило, включают в себя два члена, причем один соответствует традиционным выражениям для критических напряжений ортотропных симметричных панелей, а второй член, имеющий знак минус, включает в себя члены, содержащие смешанные жесткости, и учитывает несимметричность структуры.

Отметим, что в работах [6, 2018], [8, 1993] и [9, 2020] записаны соотношения, учитывающие одновременно общую анизотропию (несбалансированность) и несимметричность структуры панелей, причем в работе [8] указано, что изгиб и плоское напряженное состояние в рассматриваемом случае не разделяются, что существенно усложняет обсуждаемые задачи проектирования и поверочного расчета. В статье [10] представлены результаты многочисленных исследований панелей несимметричной структуры – от особенностей деформирования в процессе температурного отверждения до решения задач устойчивости с учетом последовательности укладки слоев.

Рассмотрим далее исследования, посвященные несимметричным панелям, представленные в работах Н.С. Азикова [11, 1998] и Л.А. Адеговой, М.В. Бобрышевой, А.Е. Щербининой [12, 2021]. Отметим, что проведенные сравнительные исследования композитных панелей с симметричными и несимметричными структурами в работах [11, 12] показали, что критические напряжения потери устойчивости и несущая способность первых выше, чем вторых. Это повышает актуальность рассматриваемых задач устойчивости и закритического деформирования компактных предповерхностных расслоений. Соотношения для моделей композитных панелей в работах [11, 12], для которых учитываются эффекты несимметричности пакета, показывают, что при одноосном нагружении имеют место дополнительные деформации и напряжения изгиба в плоскости. Указанное обстоятельство является причиной отмеченной выше неэффективности гладких несимметричных панелей в регулярных зонах по сравнению с симметричными панелями и простым объяснением того, что сложные задачи проектирования гладких несимметричных панелей в регулярных зонах авиационных конструкций при ограничениях по прочности и устойчивости рассматривать нецелесообразно. Некоторым исключением в последнем случае может быть задача проектирования панелей крыла обратной стреловидности при использовании несбалансированной симметричной структуры при рассмотрении до-

полнительных ограничений по жесткости при обеспечении безопасности от явлений аэроупругости.

Возвращаясь к указанному выше вопросу терминологии при рассмотрении расслоений в композитных панелях, отметим публикации Е.С. Тереховой и Ю.И. Бадрухина [13–15], которые посвящены анализу и рациональному проектированию гладких и подкрепленных композитных панелей. В работе [15] рассмотрены четыре типа укладки: 1) несимметричные несбалансированные, 2) симметричные несбалансированные, 3) несимметричные сбалансированные, 4) симметричные сбалансированные — и приведены численные и экспериментальные исследования коробления гладких и подкрепленных композитных панелей. На примере изготовленных панелей показано, что наибольшее коробление имеют панели с несбалансированной несимметричной укладкой. Из указанных выше работ [11–15] следует вывод об актуальности задач поверочного расчета, рассматриваемых в данной работе для компактных предповерхностных расслоений несбалансированной несимметричной структуры, которые имеют практический интерес, поскольку в общем случае расслоения могут иметь любую структуру, отличную от ортотропной. Для анализа закритического деформирования в работе [16] предложена математическая модель и представлены в общем виде исходные аналитические уравнения типа Кармана, аналогичные выражениям, приведенным в работах [7] и [21] для несимметричных и анизотропных структур. Примером интересной задачи является исследование нелинейного поведения прямоугольного компактного расслоения с анизотропной несимметричной структурой $[0^\circ/+45^\circ]$ при воздействии даже одноосного сжатия и возникновении мембранных и дополнительных изгибных и сдвиговых напряжений при закритическом деформировании расслоения. Отметим, что большой практический интерес имеют и задачи возможного последующего распространения рассматриваемых дефектов, относящиеся к направлению живучести авиационных конструкций. В этом случае следует выделить работу [17], в которой предложена методология обеспечения эксплуатационной живучести и безопасности авиаконструкций из КМ. Также отметим актуальные работы Н.В. Турбина с соавторами [18, 19], в которых рассматриваются актуальные прикладные задачи живучести несущих композитных конструкций при циклическом нагружении.

Целью данной работы является получение аналитического решения для оценки закритического деформирования компактных расслоений с учетом анизотропной (несбалансированной) несимметричной структуры. Отметим, что аналитические решения аналогичных задач по оценке

геометрически нелинейного поведения коротких поверхностных дефектов с несимметричной или анизотропной симметричной структурой приведены в работах [20] и [21]. Для достижения цели данной работы необходимо сначала записать соотношения, учитывающие две особенности (несимметричность и анизотропию) одновременно, и затем, применив метод Бубнова–Галеркина, получить аналитическое решение в виде системы уравнений относительно двух амплитуд прогиба.

Аналитический алгоритм решения геометрически нелинейной задачи

Запишем исходные соотношения для рассматриваемой задачи исследования устойчивости и закритического деформирования композитных панелей несбалансированной несимметричной структуры. Уравнения равновесия имеют вид [5, 6]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0; \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \bar{p} &= 0; \\ \bar{p} &= q - N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Запишем физические соотношения с учетом членов, относящихся к панелям несимметричной несбалансированной структуры [6]:

$$\begin{aligned} N_x &= B_{11}\varepsilon_x + B_{12}\varepsilon_y + B_{13}\gamma_{xy} + C_{11}k_x + C_{12}k_y + C_{13}\chi_{xy}; \\ N_y &= B_{21}\varepsilon_x + B_{22}\varepsilon_y + B_{23}\gamma_{xy} + C_{21}k_x + C_{22}k_y + C_{23}\chi_{xy}; \\ N_{xy} &= B_{31}\varepsilon_x + B_{32}\varepsilon_y + B_{33}\gamma_{xy} + C_{31}k_x + C_{32}k_y + C_{33}\chi_{xy}; \\ M_x &= C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + C_{13}\gamma_{xy} + D_{11}k_x + D_{12}k_y + D_{13}\chi_{xy}; \\ M_y &= C_{21}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y + C_{23}\gamma_{xy} + D_{21}k_x + D_{22}k_y + D_{23}\chi_{xy}; \\ M_{xy} &= C_{31}\varepsilon_x + C_{32}\varepsilon_y + C_{33}\gamma_{xy} + D_{31}k_x + D_{32}k_y + D_{33}\chi_{xy}, \end{aligned} \quad (4)$$

где B_{mn} — мембранные жесткости панели; C_{mn} — смешанные жесткости панели; D_{mn} — изгибные жесткости панели; $\gamma_{xy} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$; $\chi = \alpha_{xy} = \alpha_{yx}$.

Геометрически нелинейные соотношения с учетом больших прогибов запишем в виде [4]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$k_x = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; k_y = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}; \chi_{xy} = -2\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}. \quad (6)$$

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; N_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (8)$$

Имеем уравнение совместности деформаций в традиционном виде [4]:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right). \quad (7)$$

При введении функции Эри воспользуемся равенствами [5, 6]

Первые три равенства системы (4) представим в виде

$$\begin{aligned} B_{11}\varepsilon_x + B_{12}\varepsilon_y + B_{13}\varepsilon_{xy} &= N_x - (C_{11}k_x + C_{12}k_y + C_{13}\chi_{xy}); \\ B_{21}\varepsilon_x + B_{22}\varepsilon_y + B_{23}\varepsilon_{xy} &= N_y - (C_{21}k_x + C_{22}k_y + C_{213}\chi_{xy}); \\ B_{31}\varepsilon_x + B_{32}\varepsilon_y + B_{33}\varepsilon_{xy} &= N_{xy} - (C_{31}k_x + C_{32}k_y + C_{313}\chi_{xy}). \end{aligned} \quad (9)$$

В данном случае с учетом определения функции Эри (8) из системы (9), используя метод Крамера для системы трех линейных уравнений относительно трех неизвестных деформаций в символьном виде, можно получить аналитические выражения для определения деформаций и коэффициентов неоднородной системы. Имеем деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= K_{11} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + K_{12} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + K_{13} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + K_{14} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + K_{15} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + K_{16} \left(-2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right); \\ \varepsilon_y &= K_{21} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + K_{22} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + K_{23} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + K_{24} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + K_{25} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + K_{26} \left(-2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right); \\ \gamma_{xy} &= K_{31} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + K_{32} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + K_{33} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + K_{34} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + K_{35} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + K_{36} \left(-2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Коэффициенты K_{mn} приведены в приложении А.

Далее, подставляя деформации (10) в уравнение совместности деформаций (7), можно получить первое нелинейное уравнение Кармана для рассматриваемых структур:

$$L_1(F) - L_2(W) + L_5(W) = 0, \quad (11)$$

где операторы

$$L_1(F) = K_{40}^F \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + K_{31}^F \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + K_{22}^F \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + K_{13}^F \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + K_{04}^F \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}; \quad (12)$$

$$L_2(w) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right); \quad (13)$$

$$L_5(w) = K_{40}^w \left(-\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + K_{31}^w \left(-\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} \right) + K_{22}^w \left(-\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + K_{13}^w \left(-\frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \right) + K_{04}^w \left(-\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \quad (14)$$

и коэффициенты

$$\begin{aligned} K_{40}^F &= K_{21}; K_{31}^F = K_{23} - K_{13}; K_{22}^F = K_{11} + K_{22} - K_{33}; \\ K_{13}^F &= K_{13} - K_{32}; K_{04}^F = K_{12}; K_{40}^w = K_{24}; K_{31}^w = K_{26} - K_{34}; \\ K_{22}^w &= K_{14} + K_{25} + K_{36}; K_{13}^w = K_{16} - K_{35}; K_{04}^w = K_{15}. \end{aligned} \quad (15)$$

Далее запишем три уравнения системы (4) для моментов с учетом деформаций (10) и в итоге имеем с учетом дополнительно вводимых вспомогательных обозначений

$$\begin{aligned}
M_x &= (C_{11}K_{11} + C_{12}K_{21} + C_{13}K_{31}) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + (C_{11}K_{12} + C_{12}K_{22} + C_{13}K_{32}) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \\
&- (C_{11}K_{13} + C_{12}K_{23} + C_{13}K_{33}) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + D_{11} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + D_{12} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_{13} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = \\
&= K_{40}^F \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + K_{04}^F \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - K_{22}^F \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + D_{11} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + D_{12} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_{13} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right); \\
M_y &= (C_{21}K_{11} + C_{22}K_{21} + C_{23}K_{31}) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + (C_{21}K_{12} + C_{22}K_{22} + C_{23}K_{32}) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \\
&- (C_{11}K_{13} + C_{12}K_{23} + C_{13}K_{33}) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + D_{21} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + D_{22} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_{23} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = \\
&= K_{40}^{Fy} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + K_{04}^{Fy} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - K_{22}^{Fy} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + D_{21} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + D_{22} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_{23} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right); \\
M_{xy} &= (C_{31}K_{11} + C_{32}K_{21} + C_{33}K_{31}) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + (C_{31}K_{12} + C_{32}K_{22} + C_{33}K_{32}) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \\
&- (C_{31}K_{13} + C_{32}K_{23} + C_{33}K_{33}) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + D_{31} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + D_{32} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_{33} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = \\
&= K_{40}^{Fxy} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + K_{04}^{Fxy} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - K_{22}^{Fxy} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + D_{31} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + D_{32} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_{33} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right).
\end{aligned} \tag{16}$$

Проведем дальнейшие преобразования и, выражая из уравнений (2) перерезывающие силы Q_x и Q_y , подставляя результат в (3), а далее используя соотношения (16), получим с учетом определения функции Эри второе нелинейное уравнение типа Кармана с учетом особенностей несимметричных несбалансированных структур

$$L_4(w) - L_3(F, w) - L_6(F) = 0, \tag{17}$$

где операторы

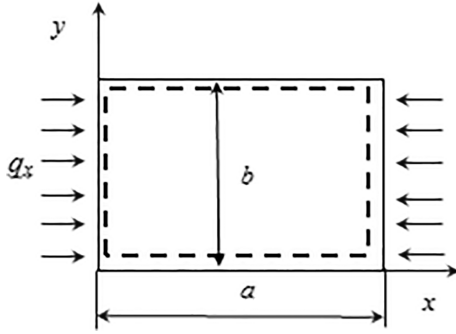
$$L_3(F, w) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \tag{18}$$

$$L_4(w) = \bar{K}_{40}^w \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \bar{K}_{31}^w \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + \bar{K}_{22}^w \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \bar{K}_{13}^w \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + \bar{K}_{04}^w \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}; \tag{19}$$

$$L_6(F) = \bar{K}_{40}^F \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \bar{K}_{31}^F \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + \bar{K}_{22}^F \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \bar{K}_{13}^F \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + \bar{K}_{04}^F \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \tag{20}$$

и коэффициенты, зависящие от структуры рассматриваемого композитного пакета,

$$\begin{aligned}
\bar{K}_{40}^F &= K_{40}^F = (C_{11}K_{11} + C_{12}K_{21} + C_{13}K_{31}); \\
\bar{K}_{31}^F &= K_{22}^{Fxy} + 2K_{40}^{Fxy} = (C_{31}K_{13} + C_{32}K_{23} + C_{33}K_{33}) + 2(C_{31}K_{11} + C_{32}K_{21} + C_{33}K_{31}); \\
\bar{K}_{22}^F &= K_{04}^F + K_{22}^{Fxy} + K_{40}^{Fy} = (C_{11}K_{12} + C_{12}K_{22} + C_{13}K_{32}) + (C_{31}K_{13} + C_{32}K_{23} + C_{33}K_{33}) + \\
&\quad + (C_{21}K_{11} + C_{22}K_{21} + C_{23}K_{31}); \\
\bar{K}_{13}^F &= K_{22}^{Fy} + 2K_{04}^{Fxy} = (C_{21}K_{13} + C_{22}K_{23} + C_{23}K_{33}) + 2(C_{31}K_{12} + C_{32}K_{22} + C_{33}K_{32}); \\
\bar{K}_{04}^F &= K_{04}^{Fy} = (C_{21}K_{12} + C_{22}K_{22} + C_{23}K_{32}); \\
\bar{K}_{40}^w &= D_{11}; \bar{K}_{31}^w = D_{13} + D_{31}; \bar{K}_{22}^w = D_{12} + 2D_{33} + D_{21}; \bar{K}_{13}^w = D_{23} + D_{32}; \bar{K}_{04}^w = D_{22}.
\end{aligned} \tag{21}$$



Компактная прямоугольная панель при сжатии

Равенства (11) и (17) являются искомыми геометрически нелинейными уравнениями типа Кармана для композитных панелей с несбалансированной несимметричной структурой.

Рассматривая случай шарнирного опирания компактной прямоугольной панели (см. рисунок), будем использовать прогиб в виде

$$W = f_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + f_2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}, \quad (22)$$

где f_{mn} – амплитуды прогиба.

Подставляя прогиб (22) в уравнение совместности деформаций (11), можно получить дифференциальное уравнение в частных производных для определения функции напряжений Эри. Решение указанного уравнения в рассматриваемом случае представим в виде (обозначения A_{mn} приведены в приложении В):

$$\begin{aligned} F = & A_1 f_1^2 \cos \frac{2\pi x}{a} + A_2 f_1^2 \cos \frac{2\pi y}{b} + \\ & + A_3 f_1 f_2 \cos \left(\frac{3\pi x}{a} - \frac{\pi y}{b} \right) + A_4 f_1 f_2 \cos \left(\frac{3\pi x}{a} + \frac{\pi y}{b} \right) + \\ & + A_5 f_1 f_2 \cos \left(\frac{\pi x}{a} - \frac{3\pi y}{b} \right) + A_6 f_1 f_2 \cos \left(\frac{\pi x}{a} + \frac{3\pi y}{b} \right) + \\ & + A_7 f_2^2 \cos \frac{4\pi x}{a} + A_8 f_2^2 \cos \frac{4\pi y}{b} + \\ & + A_9 f_1 \cos \left(\frac{\pi x}{a} - \frac{\pi y}{b} \right) + A_{10} f_1 \cos \left(\frac{\pi x}{a} + \frac{\pi y}{b} \right) + \\ & + A_{11} f_2 \cos \left(\frac{2\pi x}{a} - \frac{2\pi y}{b} \right) + A_{12} f_2 \cos \left(\frac{2\pi x}{a} + \frac{2\pi y}{b} \right) - \\ & - \frac{T_x y^2}{2} - \frac{T_y x^2}{2} + S_{xy} xy, \end{aligned} \quad (23)$$

здесь T_x , T_y , S_{xy} – усилия, действующие на пластину.

Используя далее метод Бубнова–Галеркина, отметим, что рассматриваемая задача сводится

к интегрированию, результаты которого будут иметь достаточно громоздкие выражения. С учетом соотношений (11) и (17) введем следующие обозначения исходя из удобства дальнейших записей результатов интегрирования системы уравнений:

$$\int_0^b \int_0^a [L_4(W) - L_3(F, W) - L_6(F)] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = 0; \quad (24)$$

$$\int_0^b \int_0^a [L_4(W) - L_3(F, W) - L_6(F)] \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} dx dy = 0; \quad (25)$$

запишем равенства

$$\begin{aligned} I_{1-1}^{(1)} &= \int_0^b \int_0^a \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy; \\ I_{1-1}^{(2)} &= \int_0^b \int_0^a \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy; \\ I_{1-1}^{(3)} &= \int_0^b \int_0^a \left[-2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy; \quad (26) \\ I_{2-1} &= \int_0^b \int_0^a [L_4(w)] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy; \\ I_{3-1} &= \int_0^b \int_0^a [L_6(F)] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy; \\ I_{2-1} &= \int_0^b \int_0^a [L_4(w)] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy; \\ I_{3-1} &= \int_0^b \int_0^a [L_6(F)] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy; \\ I_{1-2}^{(1)} &= \int_0^b \int_0^a \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} dx dy; \\ I_{1-2}^{(2)} &= \int_0^b \int_0^a \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} dx dy; \\ I_{1-2}^{(3)} &= \int_0^b \int_0^a \left[-2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} dx dy; \\ I_{2-2} &= \int_0^b \int_0^a [L_4(w)] \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} dx dy; \\ I_{3-2} &= \int_0^b \int_0^a [L_6(F)] \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} dx dy. \end{aligned} \quad (27)$$

Результаты аналитического интегрирования приведены в приложении С.

Запишем выражения для определения членов, относящихся к действующим сжимающим и касательным нагрузкам

$$\begin{aligned} & \int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(-\frac{T_x y^2}{2} \right) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(f_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + f_2 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \right) \right) \left(\sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \right) dx dy = -\frac{\pi^2 b f_1}{4a} T_x; \\ & \int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(-\frac{T_x y^2}{2} \right) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(f_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + f_2 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \right) \right) \left(\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \right) dx dy = -\frac{\pi^2 b f_2}{a} T_x; \\ & \int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} (S_{xy}) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(f_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + f_2 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \right) \right) \left(\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \right) dx dy = \frac{16 f_2}{9} S_{xy}; \\ & \int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (S_{xy}) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(f_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + f_2 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \right) \right) \left(\sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \right) dx dy = \frac{16 f_1}{9} S_{xy}. \end{aligned} \quad (28)$$

Исходя из определения функции Эри в данном случае, запишем выражение для продольных напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{\pi^2}{b^2} \left[4A_2 f_1^2 \cos \frac{2\pi y}{b} + 16A_8 f_2^2 \cos \frac{4\pi y}{b} + A_3 f_1 f_2 \cos \frac{\pi(ay-3bx)}{ab} + \right. \\ & \quad + A_4 f_1 f_2 \cos \frac{\pi(ay+3bx)}{ab} + 9A_5 f_1 f_2 \cos \frac{\pi(-3ay+bx)}{ab} + 9A_6 f_1 f_2 \cos \frac{\pi(3ay+bx)}{ab} + \\ & \quad \left. + A_{10} f_1 \cos \frac{\pi(ay+bx)}{ab} + 4A_5 f_2 \cos \frac{\pi(2ay-2bx)}{ab} + 4A_6 f_2 \cos \frac{\pi(2ay+2bx)}{ab} + 4A_9 f_1 \cos \frac{\pi(ay-bx)}{ab} \right] - \frac{T_x}{\delta}; \\ \sigma_y &= \frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\pi^2}{a^2} \left[4A_1 f_1^2 \cos \frac{2\pi x}{a} + 16A_7 f_2^2 \cos \frac{4\pi x}{a} + 9A_3 f_1 f_2 \cos \frac{\pi(ay-3bx)}{ab} + \right. \\ & \quad + 9A_4 f_1 f_2 \cos \frac{\pi(ay+3bx)}{ab} + A_5 f_1 f_2 \cos \frac{\pi(-3ay+bx)}{ab} + 9A_6 f_1 f_2 \cos \frac{\pi(3ay+bx)}{ab} + \\ & \quad \left. + A_{10} f_1 \cos \frac{\pi(ay+bx)}{ab} + 4A_{11} f_2 \cos \frac{\pi(2ay-2bx)}{ab} + 4A_{12} f_2 \cos \frac{\pi(2ay+2bx)}{ab} + A_9 f_1 \cos \frac{\pi(ay-bx)}{ab} \right]; \\ \tau_{xy} &= -\frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\pi^2}{ab} \left[3A_3 f_1 f_2 \frac{\pi(ay-3bx)}{ab} - 3A_4 f_1 f_2 \frac{\pi(ay+3bx)}{ab} + 3A_5 f_1 f_2 \frac{\pi(-3ay+bx)}{ab} - 3A_6 f_1 f_2 \cos \frac{\pi(3ay+bx)}{ab} + \right. \\ & \quad \left. + A_{10} f_1 \frac{\pi(ay+bx)}{ab} - 4A_{11} f_2 \cos \frac{\pi(2ay-2bx)}{ab} + 4A_{12} f_2 \frac{\pi(2ay+2bx)}{ab} - 3A_9 f_2 \cos \frac{\pi(ay-bx)}{ab} \right] - \frac{S_{xy}}{\delta}. \end{aligned} \quad (29)$$

Полученные выше громоздкие аналитические соотношения (24), (25), приведенные в приложении С, позволяют записать решение системы двух уравнений относительно амплитуд прогиба f_1 и f_2 , что является традиционной процедурой [20, 21] при рассмотрении задач устойчивости и закритического деформирования компактных панелей, нагруженных сжимающими и касательными потоками. Запишем полученные выше равенства для решения задачи устойчивости при отбрасывании нелинейных членов (при $f_i^2 \rightarrow 0$). Имеем итоговые уравнения относительно неизвестных амплитуд прогиба:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2}{36a^3 b^3} \left[9\pi^2 \bar{K}_{04}^w f_1 a^4 - 256 \bar{K}_{13}^w f_2 a^3 b + 9\pi^2 \bar{K}_{22}^w f_1 a^2 b^2 - 256 \bar{K}_{31}^w f_2 ab^3 + 9\pi^2 \bar{K}_{40}^w f_1 b^4 \right] + \\ & \frac{\pi^2 \bar{K}_{40}^F b (256 A_{11} f_2 + 256 A_{12} f_2 - 9\pi^2 A_{10} f_1 + 9\pi^2 A_9 f_1)}{36a^3} - \frac{\pi^2 \bar{K}_{31}^F (256 A_{11} f_2 - 256 A_{12} f_2 + 9\pi^2 A_{10} f_1 + 9\pi^2 A_9 f_1)}{36a^2} + \\ & + \frac{\pi^2 \bar{K}_{22}^F (256 A_{11} f_2 + 256 A_{12} f_2 + 9\pi^2 A_{10} f_1 + 9\pi^2 A_9 f_1)}{36ab} - \frac{\pi^2 \bar{K}_{13}^F (256 A_{11} f_2 - 256 A_{12} f_2 + 9\pi^2 A_{10} f_1 + 9\pi^2 A_9 f_1)}{36b^2} + \\ & + \frac{\pi^2 \bar{K}_{04}^F a (256 A_{11} f_2 + 256 A_{12} f_2 - 9\pi^2 A_{10} f_1 + 9\pi^2 A_9 f_1)}{36b^3} = \frac{\pi^2 b f_1}{4a} T_x + \frac{16 f_2}{9} S_{xy}; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{4\pi^2}{9a^3b^3} \left[9\pi^2 \bar{K}_{04}^w f_2 a^4 - 4\bar{K}_{13}^w f_1 \alpha^3 b + 9\pi^2 \bar{K}_{22}^w f_1 a^2 b^2 - 4\bar{K}_{31}^w f_1 \alpha b^3 + 9\pi^2 \bar{K}_{40}^w f_2 b^4 \right] + \\
 & + \frac{\pi^2 \bar{K}_{40}^F b (4A_{10}f_1 + 4A_9f_1 + 9\pi^2 A_{11}f_2 - 9\pi^2 A_{12}f_2)}{9a^3} - \frac{4\pi^2 \bar{K}_{31}^F (2A_9f_1 - 4A_{10}f_1 + 9\pi^2 A_{11}f_2 + 9\pi^2 A_{12}f_2)}{9a^2} + \\
 & + \frac{4\pi^2 \bar{K}_{22}^F (2A_9f_1 - 4A_{10}f_1 + 9\pi^2 A_{11}f_2 + 9\pi^2 A_{12}f_2)}{36ab} - \frac{\pi^2 \bar{K}_{13}^F (2A_9f_1 - 4A_{10}f_1 + 9\pi^2 A_{11}f_2 + 9\pi^2 A_{12}f_2)}{36b^2} + \\
 & + \frac{4\pi^2 \bar{K}_{04}^F \alpha (4A_{10}f_1 + 4A_9f_1 + 9\pi^2 A_{11}f_2 - 9\pi^2 A_{12}f_2)}{9b^3} = \frac{\pi^2 b f_2}{4a} T_x + \frac{16f_1}{9} S_{xy}.
 \end{aligned} \quad (31)$$

В компактном виде (30), (31) можно переписать в виде

$$G_{11}f_1 + G_{12}f_2 = \frac{4\pi b f_1}{4a} T_x + \frac{16f_2}{9} S_{xy}; \quad (32)$$

$$G_{21}f_1 + G_{22}f_2 = \frac{\pi^2 b f_2}{4a} T_x + \frac{16f_1}{9} S_{xy}, \quad (33)$$

где G_{mn} — коэффициенты, зависящие от характеристик анизотропной несимметричной структуры и геометрических размеров панели, которые можно выписать из уравнений (30), (31).

Далее из полученной системы уравнений (30), (31) при использовании численных процедур можно определить критические нагрузки при действии сжимающих и сдвиговых потоков. Более наглядно эту процедуру можно выписать используя систему в компактном виде (32), (33). В частности, при действии только сжимающих потоков и введении переменной $x = (f_2/f_1)$ можно свести систему уравнений к равенству относительного сжимающего потока и далее использовать условия минимума при $(\partial T_x / \partial x) = 0$, из которого можно определить экстремальное значение $x_{\min} = (G_{21}/G_{12})^{0.5}$. Далее полученную величину можно подставить в равенство, полученное из системы (32), (33) относительно сжимающего усилия, и получить выражение

$$T_x = \frac{2a}{\pi^2 b} \left[G_{11} + G_{22} + 2\sqrt{G_{12}G_{21}} \right] \quad (34)$$

для определения критического сжимающего потока. В силу громоздкости итоговые соотношения в данном случае не приводятся, но коэффициенты, приведенные в данной работе, позволяют учиты-

вать возможную несбалансированность и несимметричность композитного пакета.

Используя аналогичные рассуждения для случая сдвига из системы (32), (33), можно получить выражение для критического касательного потока в виде

$$S_{xy} = \frac{9}{32} \left[G_{12} + G_{21} + \sqrt{G_{11}G_{21}} + G_{22} \sqrt{\frac{G_{11}}{G_{21}}} \right], \quad (35)$$

также учитывающее возможную несбалансированность и несимметричность.

Выводы

1. Представлена система нелинейных уравнений типа Кармана и получены соответствующие коэффициенты для анализа устойчивости закритического деформирования прямоугольных панелей с учетом анизотропии (несбалансированности) и несимметричности композитной структуры.

2. Получено аналитическое решение задачи закритического деформирования компактных прямоугольных композитных панелей с учетом несбалансированной и несимметричной структуры. Задача сведена к решению нелинейной системы уравнений относительно амплитуд прогиба.

3. Используемый вид прогиба и записанные соотношения для напряжений могут применяться для выполнения поверочных расчетов и оценки нелинейного напряженно-деформированного состояния прямоугольных компактных поверхностных дефектов несбалансированной несимметричной структуры при сжатии и при сдвиге. Получены компактные аналитические выражения (34), (35) для определения критических сжимающих и касательных потоков.

Приложение А

Коэффициенты K_{mn} уравнения (10):

$$K_{11} = \frac{1}{\Delta} (B_{22}B_{33} - B_{23}B_{32}); \quad K_{12} = \frac{1}{\Delta} (B_{13}B_{32} - B_{12}B_{33}); \quad K_{13} = \frac{1}{\Delta} (B_{12}B_{23} - B_{13}B_{12});$$

$$K_{21} = \frac{1}{\Delta} (B_{31}B_{23} - B_{21}B_{33}); \quad K_{22} = \frac{1}{\Delta} (B_{11}B_{33} - B_{13}B_{31}); \quad K_{23} = \frac{1}{\Delta} (B_{21}B_{13} - B_{11}B_{22});$$

$$K_{31} = \frac{1}{\Delta} (B_{21}B_{32} - B_{22}B_{31}); \quad K_{32} = \frac{1}{\Delta} (B_{12}B_{31} - B_{11}B_{32}); \quad K_{33} = \frac{1}{\Delta} (B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21});$$

$$\Delta = B_{11}B_{22}B_{33} - B_{11}B_{23}B_{32} - B_{12}B_{31}B_{23} + B_{12}B_{31}B_{23} + B_{21}B_{13}B_{32} - B_{13}B_{22}B_{31};$$

$$K_{14} = \frac{1}{\Delta} (-B_{12}B_{23}C_{11} + B_{12}B_{33}C_{21} + B_{13}B_{32}C_{21} - B_{13}B_{32}C_{21} - B_{22}B_{33}C_{11} + B_{23}B_{32}C_{11});$$

$$K_{15} = \frac{1}{\Delta} (-B_{12}B_{23}C_{32} + B_{12}B_{33}C_{22} + B_{13}B_{22}C_{32} - B_{13}B_{32}C_{22} - B_{22}B_{33}C_{12} + B_{23}B_{32}C_{12});$$

$$K_{16} = \frac{1}{\Delta} (-B_{12}B_{23}C_{12} + B_{13}B_{22}C_{32} + B_{12}B_{33}C_{23} - B_{13}B_{32}C_{23} - B_{22}B_{33}C_{13} + B_{23}B_{32}C_{13});$$

$$K_{24} = \frac{1}{\Delta} (-B_{11}B_{23}C_{31} + B_{11}B_{33}C_{21} + B_{21}B_{13}C_{31} - B_{21}B_{33}C_{11} - B_{13}B_{31}C_{21} + B_{31}B_{23}C_{11});$$

$$K_{26} = \frac{1}{\Delta} (-B_{11}B_{23}C_{32} - B_{21}B_{13}C_{32} - B_{11}B_{33}C_{23} + B_{21}B_{33}C_{13} + B_{13}B_{31}C_{23} - B_{31}B_{23}C_{13});$$

$$K_{26} = \frac{1}{\Delta} (-B_{11}B_{23}C_{32} - B_{21}B_{13}C_{32} - B_{11}B_{33}C_{23} + B_{21}B_{33}C_{13} + B_{13}B_{31}C_{23} - B_{31}B_{23}C_{13});$$

$$K_{34} = \frac{1}{\Delta} (-B_{11}B_{22}C_{31} + B_{11}B_{32}C_{21} + B_{12}B_{21}C_{31} - B_{12}B_{31}C_{21} - B_{21}B_{32}C_{11} - B_{22}B_{31}C_{11});$$

$$K_{35} = \frac{1}{\Delta} (-B_{11}B_{22}C_{32} + B_{11}B_{32}C_{22} + B_{12}B_{21}C_{32} - B_{12}B_{31}C_{22} - B_{21}B_{32}C_{12} + B_{22}B_{31}C_{12});$$

$$K_{36} = \frac{1}{\Delta} (-B_{11}B_{22}C_{32} + B_{12}B_{21}C_{32} + B_{11}B_{32}C_{23} - B_{12}B_{31}C_{23} - B_{21}B_{32}C_{13} + B_{22}B_{31}C_{13}).$$

Приложение ВОбозначения A_{mn} уравнения (23):

$$A_1 = \frac{1}{32K_{40}^F} \left(\frac{a}{b} \right)^2; \quad A_2 = \frac{1}{32K_{04}^F} \left(\frac{b}{a} \right)^2;$$

$$A_3 = \frac{1}{K_{04}^F \left(\frac{a}{b} \right)^2 - 3K_{13}^F \left(\frac{a}{b} \right) + 9K_{22}^F - 27K_{31}^F \left(\frac{b}{a} \right) + 81K_{40}^F \left(\frac{b}{a} \right)^2};$$

$$A_4 = \frac{1}{K_{04}^F \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 3K_{13}^F \left(\frac{a}{b} \right) + 9K_{22}^F + 27K_{31}^F \left(\frac{b}{a} \right) + 81K_{40}^F \left(\frac{b}{a} \right)^2};$$

$$A_5 = \frac{1}{81K_{04}^F \left(\frac{a}{b} \right)^2 - 27K_{13}^F \left(\frac{a}{b} \right) + 9K_{22}^F - 3K_{31}^F \left(\frac{b}{a} \right) + K_{40}^F \left(\frac{b}{a} \right)^2};$$

$$A_6 = \frac{1}{81K_{04}^F \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 27K_{13}^F \left(\frac{a}{b} \right) + 9K_{22}^F + 3K_{31}^F \left(\frac{b}{a} \right) + K_{40}^F \left(\frac{b}{a} \right)^2};$$

$$A_7 = \frac{1}{32K_{40}^F} \left(\frac{a}{b} \right)^2; \quad A_8 = \frac{1}{32K_{04}^F} \left(\frac{b}{a} \right)^2;$$

$$A_9 = \frac{1}{2 \left[K_{04}^F \left(\frac{a}{b} \right)^2 - K_{13}^F \left(\frac{a}{b} \right) + K_{22}^F - K_{31}^F \left(\frac{b}{a} \right) + K_{40}^F \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right]};$$

$$A_{10} = \frac{1}{2 \left[K_{04}^F \left(\frac{a}{b} \right)^2 + K_{13}^F \left(\frac{a}{b} \right) + K_{22}^F + K_{31}^F \left(\frac{b}{a} \right) + K_{40}^F \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right]};$$

$$A_{11} = \frac{1}{32 \left[K_{04}^F \left(\frac{a}{b} \right)^2 - K_{13}^F \left(\frac{a}{b} \right) + K_{22}^F - K_{31}^F \left(\frac{b}{a} \right) + K_{40}^F \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right]};$$

$$A_{12} = \frac{1}{32 \left[K_{04}^F \left(\frac{a}{b} \right)^2 + K_{13}^F \left(\frac{a}{b} \right) + K_{22}^F + K_{31}^F \left(\frac{b}{a} \right) + K_{40}^F \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right]}.$$

Приложение С

Результаты аналитического интегрирования уравнений (24), (25):

$$\begin{aligned}
 I_{1-1}^{(1)} = & -\frac{\pi^4 A_2 f_1^3}{2ab} - \frac{\pi^2 A_3 f_1 f_2 (32f_1 + 45\pi^2 f_2) - \pi^2 A_4 f_1 f_2 (32f_1 - 45\pi^2 f_2)}{180ab} - \\
 & - \frac{\pi^2 A_5 f_1 f_2 (32f_1 + 45\pi^2 f_2) - \pi^2 A_6 f_1 f_2 (32f_1 - 45\pi^2 f_2)}{20ab} - \frac{8\pi^4 A_8 f_2^3}{ab} + \\
 & + \frac{\pi^2 A_9 f_1 (32f_1 + 9\pi^2 f_2) - \pi^2 A_{10} f_1 (32f_1 - 45\pi^2 f_2)}{36ab} + \\
 & + \frac{\pi^2 A_{11} f_2 (8192f_2 + 225\pi^2 f_1) - \pi^2 A_{12} f_2 (8192f_2 - 225\pi^2 f_1)}{900ab}; \\
 I_{1-1}^{(2)} = & -\frac{\pi^4 A_1 f_1^3}{2ab} - \frac{\pi^2 A_3 f_1 f_2 (32f_1 + 45\pi^2 f_2) - \pi^2 A_4 f_1 f_2 (32f_1 - 45\pi^2 f_2)}{20ab} - \\
 & - \frac{\pi^2 A_5 f_1 f_2 (32f_1 + 45\pi^2 f_2) - \pi^2 A_6 f_1 f_2 (32f_1 - 45\pi^2 f_2)}{180ab} + \\
 & + \frac{\pi^2 A_9 f_1 (32f_1 + 9\pi^2 f_2) - \pi^2 A_{10} f_1 (32f_1 - 45\pi^2 f_2)}{36ab} + \\
 & + \frac{\pi^2 A_{11} f_2 (8192f_2 + 225\pi^2 f_1) - \pi^2 A_{12} f_2 (8192f_2 - 225\pi^2 f_1)}{900ab}; \\
 I_{1-1}^{(3)} = & \frac{\pi^2 A_3 f_1 f_2 (8f_1 + 15\pi^2 f_2) - \pi^2 A_4 f_1 f_2 (16f_1 - 15\pi^2 f_2)}{10ab} + \frac{\pi^2 A_5 f_1 f_2 (8f_1 + 15\pi^2 f_2) - \pi^2 A_6 f_1 f_2 (16f_1 - 15\pi^2 f_2)}{10ab} - \\
 & - \frac{\pi^2 A_9 f_1 (16f_1 + 9\pi^2 f_2) - \pi^2 A_{10} f_1 (8f_1 - 9\pi^2 f_2)}{18ab} - \frac{\pi^2 A_{11} f_2 (6272f_2 + 225\pi^2 f_1) - \pi^2 A_{12} f_2 (6272f_2 - 225\pi^2 f_1)}{450ab}; \\
 I_{2-1} = & \frac{\pi^2}{36a^3 b^3} \left[9\pi^2 \bar{K}_{04}^w f_1 a^4 - 256 \bar{K}_{13}^w f_2 a^3 b + 9\pi^2 \bar{K}_{22}^w f_1 a^2 b^2 - 256 \bar{K}_{31}^w f_2 a b^3 + 9\pi^2 \bar{K}_{40}^w f_1 b^4 \right]; \\
 I_{3-1} = & -\frac{64\pi^2 \bar{K}_{40}^F b (5A_1 f_1^2 + 16A_7 f_2^2)}{15a^3} - \frac{64\pi^2 \bar{K}_{04}^F a (5A_2 f_1^2 + 16A_8 f_2^2)}{15b^3} + \\
 & + \frac{\pi^2 \bar{K}_{40}^F b (256A_{11} f_2 + 256A_{12} f_2 - 9\pi^2 A_{10} f_1 + 9\pi^2 A_9 f_{12})}{36a^3} - \\
 & - \frac{\pi^2 \bar{K}_{31}^F (256A_{11} f_2 - 256A_{12} f_2 + 9\pi^2 A_{10} f_1 + 9\pi^2 A_9 f_1)}{36a^2} + \\
 & + \frac{\pi^2 \bar{K}_{22}^F (256A_{11} f_2 + 256A_{12} f_2 + 9\pi^2 A_{10} f_1 + 9\pi^2 A_9 f_1)}{36ab} - \\
 & - \frac{\pi^2 \bar{K}_{13}^F (256A_{11} f_2 - 256A_{12} f_2 + 9\pi^2 A_{10} f_1 + 9\pi^2 A_9 f_1)}{36b^2} + \\
 & + \frac{\pi^2 \bar{K}_{04}^F a (256A_{11} f_2 + 256A_{12} f_2 - 9\pi^2 A_{10} f_1 + 9\pi^2 A_9 f_1)}{36b^3}
 \end{aligned}$$

и также

$$I_{1-2}^{(1)} = -\frac{\pi^4 A_1 f_1^3}{2ab} - \frac{\pi^2 A_3 f_1 f_2 (8192 f_2 + 315 \pi^2 f_1) - \pi^2 A_4 f_1 f_2 (16384 f_2 + 315 \pi^2 f_1)}{560ab} +$$

$$+ \frac{\pi^2 A_5 f_1 f_2 (8192 f_2 - 315 \pi^2 f_1) - \pi^2 A_6 f_1 f_2 (16384 f_2 + 315 \pi^2 f_1)}{5040ab} - \frac{8 \pi^4 A_7 f_2^3}{ab} +$$

$$+ \frac{\pi^2 A_9 f_1 (8192 f_2 + 225 \pi^2 f_1) - \pi^2 A_{10} f_1 (8192 f_2 - 225 \pi^2 f_1)}{3600ab} + \frac{512 \pi^2 A_{11} f_1 f_2 - 512 \pi^2 A_{12} f_1 f_2}{225ab},$$

$$I_{1-2}^{(2)} = -\frac{\pi^4 A_2 f_1^3}{2ab} - \frac{\pi^2 A_3 f_1 f_2 (8192 f_2 - 315 \pi^2 f_1) - \pi^2 A_4 f_1 f_2 (8192 f_2 + 315 \pi^2 f_1)}{5040ab} +$$

$$+ \frac{\pi^2 A_5 f_1 f_2 (8192 f_2 - 315 \pi^2 f_1) - \pi^2 A_6 f_1 f_2 (16384 f_2 - 315 \pi^2 f_1)}{560ab} - \frac{8 \pi^4 A_8 f_2^3}{ab} +$$

$$+ \frac{\pi^2 A_9 f_1 (8192 f_2 + 225 \pi^2 f_1) - \pi^2 A_{10} f_1 (8192 f_2 - 225 \pi^2 f_1)}{3600ab} + \frac{512 \pi^2 A_{11} f_1 f - 512 \pi^2 A_{12} f_1 f}{225ab},$$

$$I_{1-2}^{(3)} = -\frac{\pi^2 A_3 f_1 f_2 (1024 f_2 + 105 \pi^2 f_1) - \pi^2 A_4 f_1 f_2 (512 f_2 - 105 \pi^2 f_1)}{280ab} -$$

$$- \frac{\pi^2 A_5 f_1 f_2 (1024 f_2 + 105 \pi^2 f_1) - \pi^2 A_6 f_1 f_2 (1024 f_2 - 105 \pi^2 f_1)}{280ab} -$$

$$- \frac{\pi^2 A_9 f_1 (1024 f_2 + 225 \pi^2 f_1) - \pi^2 A_{10} f_1 (1024 f_2 - 225 \pi^2 f_1)}{1800ab} - \frac{64 \pi^2 A_{11} f_1 f_2 - 64 \pi^2 A_{12} f_1 f_2}{225ab},$$

$$I_{2-2} = \frac{4 \pi^2}{9 a^3 b^3} \left[9 \pi^2 \bar{K}_{04}^w f_2 a^4 - 4 \bar{K}_{13}^w f_1 a^3 b + 9 \pi^2 \bar{K}_{22}^w f_1 a^2 b^2 - 4 \bar{K}_{31}^w f_1 a b^3 + 9 \pi^2 \bar{K}_{40}^w f_2 b^4 \right];$$

$$I_{3-2} = -\frac{16 \pi^2 \bar{K}_{40}^F b f_1 f_2 (81 A_3 + 81 A_4 + A_5 + A_6)}{15 a^3} + \frac{16 \pi^2 \bar{K}_{31}^F f_1 f_2 (9 A_3 - 9 A_4 + A_5 - A_6)}{5 a^2} -$$

$$- \frac{48 \pi^2 \bar{K}_{22}^F f_1 f_2 (A_3 + A_4 + A_5 + A_6)}{5 ab} - \frac{8 \pi^2 \bar{K}_{13}^F f_1 f_2 (A_4 - 2 A_3 - 9 A_5 + 9 A_6)}{5 b^2} -$$

$$- \frac{16 \pi^2 \bar{K}_{04}^F a f_1 f_2 (A_3 + A_4 + 81 A_5 + 81 A_6)}{15 b^3} + \frac{\pi^2 \bar{K}_{40}^F b (4 A_{10} f_1 + 4 A_9 f_1 + 9 \pi^2 A_{11} f_2 - 9 \pi^2 A_{12} f_2)}{9 a^3} -$$

$$- \frac{4 \pi^2 \bar{K}_{31}^F (2 A_9 f_1 - 4 A_{10} f_1 + 9 \pi^2 A_{11} f_2 + 9 \pi^2 A_{12} f_2)}{9 a^2} + \frac{4 \pi^2 \bar{K}_{22}^F (2 A_9 f_1 - 4 A_{10} f_1 + 9 \pi^2 A_{11} f_2 + 9 \pi^2 A_{12} f_2)}{36 ab}$$

$$- \frac{\pi^2 \bar{K}_{13}^F (2 A_9 f_1 - 4 A_{10} f_1 + 9 \pi^2 A_{11} f_2 + 9 \pi^2 A_{12} f_2)}{36 b^2} + \frac{4 \pi^2 \bar{K}_{04}^F a (4 A_{10} f + 4 A_9 f + 9 \pi^2 A_{11} f_2 - 9 \pi^2 A_{12} f_2)}{9 b^3}.$$

Конфликт интересов / Conflict of Interests

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no relevant conflict of interests

Список источников / References

1. *Advisory Circular AC20-107B Composite aircraft structure*. U.S. Department of Transportation Federal Aviation Administration, 08.09.2009.
2. Королев В.И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. М.: Машиностроение, 1965. 272 с.
Korolev VI. *Layered anisotropic plates and shells made of reinforced plastics*. Moscow: Mashinostroenie; 1965. 272 p. (In Russ.).
3. Ашкенази Е.К., Ганов Э.В. Анизотропия конструкционных материалов: Справочник. Л.: Машиностроение. Ленинградское отделение, 1980. 247 с.
Ashkenazi EK, Ganov EV. *Anisotropy of structural materials: Handbook*. Leningrad: Mashinostroenie. Leningradskoe otделение; 1980. 247 p. (In Russ.).
4. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: ОГИЗ, 1947. 354 с.
Lehnitsky SG. *Anisotropic plates*. Moscow: OGIZ; 1947. 354 p. (In Russ.).
5. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 270 с.
Vasiliev VV. *Mechanics of structures made of composite materials*. Moscow: Mashinostroenie; 1988. 270 p. (In Russ.).
6. Vasiliev VV, Morozov EV. *Advanced mechanics of composite materials and structures*. 4th ed. Elsevier; 2018. 882 p.
7. Митрофанов О.В. Прикладные геометрически нелинейные задачи при проектировании и расчетах композитных авиационных конструкций. М.: Изд-во МАИ, 2022. 164 с.
Mitrofanov OV. *Applied geometrically nonlinear problems in the design and calculations of composite aircraft structures*. Moscow: MAI; 2022. 164 p. (In Russ.).
8. Дудченко А.А., Елпатьевский А.Н., Лурье С.А. и др. Расчет пластин из композиционных материалов. М.: Изд-во МАИ, 1993. 68 с.
Dudchenko AA, Elpatyevsky AN, Lurie SA, et al. *Calculation of plates made of composite materials*. Moscow: MAI; 1993. 68 p. (In Russ.).
9. Гавва Л.М., Фирсанов В.В. Математические модели и методы расчета напряженно-деформированного состояния панелей летательных аппаратов из композиционных материалов с учетом технологии изготовления // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2020. № 3. С. 122–133. DOI: 10.31857/S057232992003006X
Gavva LM, Firsanov VV. Mathematical models and methods for calculating the stress-strain state of aircraft panels from composite materials taking into account the production technology. *Mechanics of Solids*. 2020;55(3):403–412. (In Russ.).
10. Хайер М. Механика пластин из несимметричных слоистых композитов // Прикладная механика композитов. Новое в зарубежной науке: Сборник статей; Пер. с англ. Вып. 44. М.: Мир, 1989. С. 143–175.
Khayer M. Mechanics of plates made of asymmetric layered composites. In: *Applied mechanics of composites. New in foreign science: A collection of articles*. No. 44. Moscow: Mir; 1989. p. 143–175. (In Russ.).
11. Азиков Н.С. Устойчивость и несущая способность пластин и панелей из слоистых композитов при сжатии и сдвиге: Дисс. ... д-ра техн. наук. М., 1998. 439 с.
Azikov NS. *Stability and bearing capacity of plates and panels made of layered composites under compression and shear*. Doctoral thesis. Moscow: MATI; 1998. 439 p. (In Russ.).
12. Адегова Л.А., Бобрышева М.В., Шербинина А.Е. Исследование потери устойчивости оболочки в зависимости от укладки слоев композиционного материала // Россия молодая: Сборник материалов XIII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (20–23 апреля 2021; Кемерово). Кемерово: Изд-во КузГТУ, 2021. С. 627071–627077.
Adegova LA, Bobrysheva MV, Shcherbinina AE. Investigation of shell stability loss depending on the laying of composite material layers. *Materialy XIII Vserossiiskoi nauchno-prakticheskoi konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem "Rossiya molodaya" (April 20–23, 2021; Kemerovo)*. Kemerovo: KuzGTU; 2021. p. 627071–627077. (In Russ.).
13. Бадрухин Ю.И., Терехова Е.С. Рациональное проектирование тонкостенных несущих панелей из слоистого композита при комбинированном нагружении // Вестник Московского авиационного института. 2023. Т. 30. № 4. С. 130–139. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=177614> EDN TTDWCL
Badrukhin YuI, Terekhova ES. Rational design of thin-walled load-bearing laminated composite panels under combined loading. *Aerospace MAI Journal*. 2023;30(4):130–139. (In Russ.). URL: <https://vestnikmai.ru/eng/publications.php?ID=177614>
14. Терехова Е.С. Влияние некоторых конструктивно-технологических аспектов проектирования изделий из слоистого композита на их несущую способность // Инженерный журнал: наука и инновации. 2024. № 10(154). DOI: 10.18698/2308-6033-2024-10-2393 EDN GJSRIC
Terekhova ES. Certain design and technological features in rational design of the thin-walled load-bearing panels made of laminated composite influencing their load capacity. *Engineering Journal: Science and Innovation*. 2024(10). (In Russ.).

15. Терехова Е.С. Рациональное проектирование панелей из слоистого композиционного материала по условиям прочности и устойчивости: Дисс. ... канд. техн. наук. Новосибирск, 2025. 140 с.
Terekhova ES. *Rational design of panels made of laminated composite material in terms of strength and stability*. PhD thesis. Novosibirsk: SibNIA named after S.A. Chaplygin; 2025. 140 p. (In Russ.).
16. Шкурин М.В., Митрофанов О.В., Гавва Л.М. Уточненная математическая модель для проектирования анизотропных композитных панелей конструкции планера самолета малой авиации при обеспечении устойчивости и прочности с учетом геометрически нелинейного поведения // Проблемы механики современных машин: Сборник статей IX Международной конференции (07–13 июля 2025; Улан-Удэ). Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2025. С. 287–298. DOI: 10.53980/9785907942622_287
Shkurin MV, Mitrofanov OV, Gavva LM. Refined mathematical model for designing anisotropic composite panels for small aircraft airframe structures while ensuring stability and strength taking into account geometrically nonlinear behavior. *Materialy IX Mezhdunarodnoi konferentsii "Problemy mekhaniki sovremennykh mashin"* (July 07–13, 2025; Ulan-Ude). Ulan-Ude: ESSUTM; 2025. p. 287–298. (In Russ.).
17. Ушаков А.Е. Методология обеспечения эксплуатационной живучести и безопасности авиаконструкций из ПКМ. М.: Физматлит, 2012. 204 с.
Ushakov AE. *Methodology for Ensuring Operational Survivability and Safety of Aircraft Structures Made of Polymer Composite Materials*. Moscow: Fizmatlit; 2012. 204 p. (In Russ.).
18. Погосян М.А., Турбин Н.В., Староверов О.А. и др. Исследование живучести деталей ЛА из конструкционных полимерных композиционных материалов в условиях циклического сжатия после удара // Вестник Московского авиационного института. 2025. Т. 32. № 4. С. 126–136. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=186674> EDN YRLMDS
Pogosyan MA, Turbin NV, Staroverov OA, Melnikova VA., et al. Investigation of the Damage Tolerance of Aircraft Polymer Composite Structures under Conditions of Cyclic Compression after Impact. *Aerospace MAI Journal*. 2025;32(4):126–136. (In Russ.). URL: <https://vestnikmai.ru/eng/publications.php?ID=186674>
19. Митрофанов О.В., Глаговский А.А., Турбин Н.В. и др. Расчетное сопровождение испытаний на эксплуатационную живучесть конструкций летательного аппарата из ПКМ // Проблемы прочности авиационных конструкций и материалов: Сборник тезисов докладов V Всероссийской научно-практической конференции (25–28 февраля 2026; Седова Заимка). Новосибирск: Изд-во СибНИА, 2026. С. 53–54. EDN ACSLER
Mitrofanov OV, Glagovsky AA, Turbin NV, et al. Design support of tests for the operational survivability of aircraft structures from PCM. *Materialy V Vserossiiskoi nauchno-prakticheskoi konferentsii "Problemy prochnosti aviatsonnykh konstrukttsii i materialov"* (February 25–28, 2026; Sedova Zaimka). Novosibirsk: SibNIA; 2026. p. 53–54 (In Russ.).
20. Mitrofanov O. Evaluation of the Buckling Stability and Geometrically Nonlinear Behavior of Square Composite Panels of an Unsymmetrical Structure in Shear. *Mechanics of Composite Materials*. 2021;57(3):301–308. DOI: 10.1007/s11029-021-09955-0 EDN RGMKWU
21. Митрофанов О.В., Шкурин М.В., Дудченко А.А. Оценка геометрически нелинейного поведения коротких поверхностных дефектов анизотропной структуры в композитных панелях при сжатии // Инженерный журнал: наука и инновации. 2024. № 4(148). DOI: 10.18698/2308-6033-2024-4-2353 EDN MZJESC
Mitrofanov OV, Shkurin MV, Dudchenko AA. Assessing geometrically nonlinear behavior of the anisotropic structure short surface defects in composite panels under compression. *Engineering Journal: Science and Innovation*. 2024(4). (In Russ.).

Статья поступила в редакцию / Received 10.08.2026
Одобрена после рецензирования / Revised 20.08.2026
Принята к публикации / Accepted 25.08.2026