Труды МАИ. 2025. № 142
Trudy MAI. 2025. No. 142. (In Russ.)

Научная статья
УДК 539.3
URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=185101
EDN: https://www.elibrary.ru/AJTZWK

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЙ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Фан Тунг Шон

Государственный технический университет имени Ле Куй Дона,

Ханой, Вьетнам

sonphantungk49@gmail.com

Аннотация. В последние годы наблюдается стремительное развитие методов искусственного интеллекта и, в частности, глубокого машинного обучения, что открывает новые горизонты для решения прикладных задач математической физики. Одним из наиболее перспективных направлений на этом пути являются физически обоснованные нейронные сети (Physically Informed Neural Networks, PINN), которые позволяют интегрировать априорную информацию о физико-математических моделях в процесс обучения нейросетей. Это делает возможным построение решений сложных дифференциальных уравнений, описывающих разнообразные процессы в механике сплошных сред, без необходимости построения сетки, характерной для традиционных численных методов.

***Ключевые слова*:** термоупругость, волновые процессы, физически обоснованные нейронные сети, глубокое обучение, машинное обучение, нестационарные процессы, PINN, механика деформируемого твердого тела, обратные задачи, теплопроводность

Для цитирования: Фан Тунг Шон. Применение технологий машинного обучения к исследованию термоупругих волновых процессов // Труды МАИ. 2025. № 142. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=185101

Original article

APPLICATION OF MACHINE LEARNING TECHNOLOGIES TO THE STUDY OF THERMOELASTIC WAVE PROCESSES

Phan Tung Son

[1]Le Quy Don Technical University,

Ha Noi, Viet Nam

sonphantungk49@gmail.com

Abstract. In recent years, there has been a rapid development of artificial intelligence technologies and, in particular, deep learning methods, which opens up new horizons for solving applied problems in mathematical physics. One of the most promising areas in this field is the use of Physically Informed Neural Networks (PINNs), which allow prior information about physical and mathematical models to be embedded directly into the training process. This enables the construction of solutions to complex differential equations describing various processes in continuum mechanics, without the need for meshing, which is typical of traditional numerical methods.

This paper is devoted to the application of deep learning methods to the modeling and analysis of transient processes in structural elements, such as elastic and thermoelastic layers. The study focuses on solving direct problems in the mechanics of deformable solids: the problem of nonstationary oscillations of an elastic layer, the problem of heat conduction in a thermally conductive layer, and the coupled thermoelasticity problem with mutual influence of mechanical and thermal fields. These problems have significant practical relevance for analyzing structures under varying loads and thermal effects, especially in aerospace and mechanical engineering.

The proposed approach is based on the use of PINNs, which approximate the desired solutions by parametric neural network models. Each problem formulation includes a corresponding loss function that incorporates residuals of the governing differential equations, initial and boundary conditions, and model parameters. Collocation points used for evaluating the loss function are randomly distributed in the space-time domain, which ensures flexibility and generality of the method.

For each problem, the results obtained via PINNs are compared with exact analytical solutions (constructed using the method of separation of variables) and numerical results obtained by the finite difference method. It is shown that with proper selection of the neural network architecture and hyperparameters (such as number of hidden layers, neurons per layer, activation functions, optimization algorithms, etc.), high approximation accuracy can be achieved, comparable to that of classical numerical techniques. Special attention is paid to the analysis of convergence and error estimation. The numerical experiments demonstrate that increasing the network complexity improves accuracy, although at the cost of higher

computational expenses. The hyperbolic tangent activation function proved to be the most effective in this study.

A key advantage of the proposed approach is its universality: the same code, with minor modifications, can be used for both forward and inverse problem settings. This is especially important in the presence of experimental data with uncertainties, where traditional methods become unstable. Furthermore, the method can be easily adapted to problems with variable physical parameters, complex geometries, or high dimensionality.

In conclusion, it is emphasized that the PINN-based approach demonstrates high accuracy, robustness, and flexibility in solving problems of continuum mechanics. It can be effectively used as either an auxiliary or standalone tool for the analysis of transient thermoelastic processes, acoustics, structural dynamics, as well as in solving inverse design and system diagnostics problems. The results presented in this work confirm the strong potential of further research in this area, including noisy and contact problems, as well as problems involving nonlinear material behavior.

Keywords**:** thermoelasticity, wave processes, physically informed neural networks (PINN), deep learning, machine learning, transient processes, mechanics of deformable solids, inverse problems, heat conduction

For citation**:** Phan Tung Son. Application of machine learning technologies to the study of thermoelastic wave processes. *Trudy MAI*. 2025. No. 142. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=185101

1. Введение

Методы машинного обучения и, в частности, нейросетевые подходы к решению задач математической физики, в последние годы получили

значительное развитие. Одним из наиболее перспективных направлений стало использование Physics-Informed Neural Networks (PINN) — нейросетевых моделей, в которые непосредственно встраиваются физические законы, представленные в виде дифференциальных уравнений. Такие подходы позволяют эффективно решать как прямые, так и обратные задачи, используя ограниченные объемы данных и априорную информацию о физике процесса [1].

PINN-концепция, предложенная в [1], позволяет объединить данные наблюдений с математическими моделями за счёт включения невязок уравнений в функцию потерь. Это делает возможным решение задач, где традиционные методы, такие как конечно-разностные или конечно-элементные, могут оказаться неэффективными или труднореализуемыми. Метод PINN находит применение в механике сплошных сред, теплопереносе, биомедицинской инженерии, электромагнетизме и других отраслях [2–4].

Современные исследования направлены на развитие различных модификаций базового PINN. Среди них — вариационные PINN (VPINN), устойчивые и консервативные схемы (CPINN), дробные PINN (fPINN) [4], а также стохастические и байесовские подходы. В статье [3] представлена обобщённая схема XPINN, позволяющая разбивать вычислительную область на поддомены и обучать независимые нейросети, что существенно ускоряет обучение и повышает точность.

Авторы [2] предложили библиотеку DeepXDE, которая стала стандартным инструментом в области решения дифференциальных уравнений с помощью глубокого обучения. Отдельное внимание в литературе уделяется устойчивости и

обобщающим способностям PINN. В частности, в [5] представлены оценки обобщающей ошибки и показано, что она может существенно возрастать при неправильном выборе архитектуры или весов в функции потерь.

Развиваются и гибридные подходы — объединение PINN с методами plug-and-play, генеративными моделями, сверточными автоэнкодерами [6], а также внедрение PINN в рамках нейронных операторов и deep equilibrium models [7], [8]. Многообещающие результаты продемонстрированы при решении задач с нестационарными данными, дробными уравнениями [9], а также при параметрической идентификации [10].

Вопросы устойчивости и сходимости PINN активны обсуждаются в ряде работ [11–13], предлагаются методы регуляризации, весовой балансировки, а также автоматизированный выбор архитектуры [14].

Примеры применения PINN включают обратные задачи в биофизике [15], задачи идентификации в механике [16], а также геофизические задачи [17], задачи переноса в пористых средах [18], обучение решений уравнений Шредингера [19] и численное моделирование в инженерии [20].

Кроме того, в отечественной научной литературе также активно исследуются методы, сочетающие машинное обучение и математическое моделирование. В частности, в работах [21–25] представлены подходы к построению и обучению нейросетей, решению обратных задач, задачам прогнозирования и интеграции ИИ в инженерные системы. Применение таких методов к задачам механики и теплопроводности рассматривается, в том числе, с использованием аналитических решений и синтетических данных [26].

Таким образом, текущие тренды в области PINN предполагают развитие адаптивных, распределённых и стохастически устойчивых архитектур, способных решать широкий круг инженерных и физических задач с учётом ограниченности и зашумлённости данных.

2. Математическая постановка задачи

Этот раздел представляет математическую постановку для исследуемых нестационарных процессов, происходящих в термоупругом слое постоянной толщины h.

Предположим, что все искомые и заданные функции зависят только от времени t и одной пространственной координаты x прямоугольной декартовой системы координат.

На слой воздействуют массовые силы $F(x,t)$ и массовые источники тепла $Q(x,t)$, а также поверхностная сила (давление) $p(t)$ и поверхностный тепловой поток $q(t)$. Нижняя граница слоя предполагается жестко закреплённой в условиях отсутствия внешнего теплового потока (см. рис. 1).

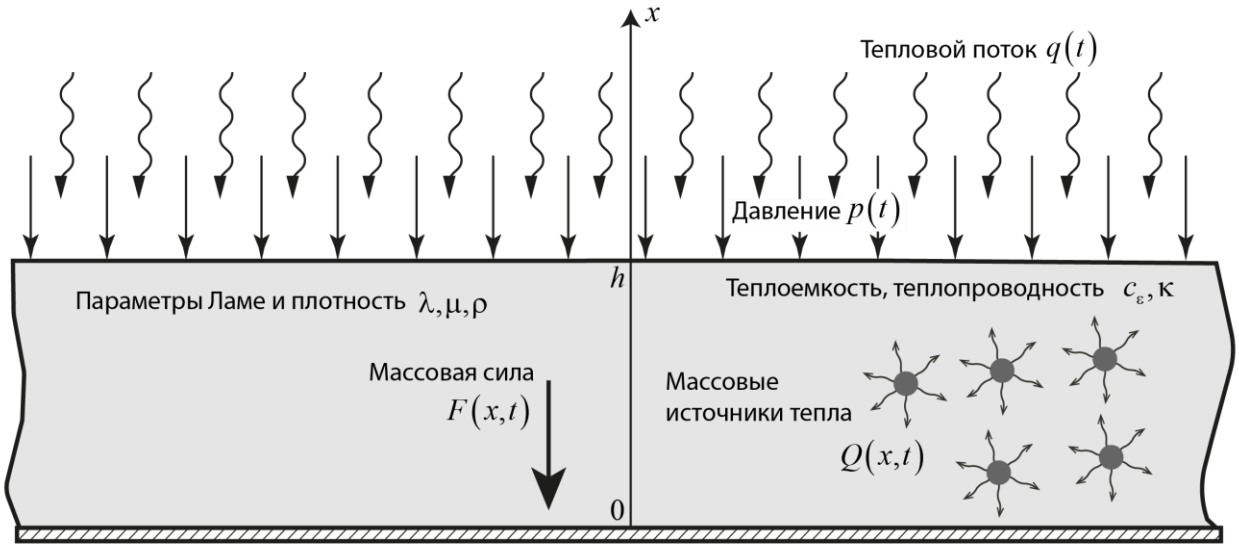

Рис. 1. Постановка задачи.

Процессы распространения упругих и тепловых волн в слое описываются системой уравнений связанной термоупругости с начальными и граничными условиями (штрих здесь и далее означает производную по координате x, а точка – производную по времени t) [27]:

$$\begin{gathered} \ddot{u} = u'' - \alpha\vartheta' + F(x,t),\ \dot{\vartheta} = \kappa\vartheta'' - \beta\dot{u}' + Q(x,t); \\ u\big|_{t=0} = 0,\ \dot{u}\big|_{t=0} = 0,\ \vartheta\big|_{t=0} = 0; \\ u\big|_{x=0} = 0,\ \vartheta'\big|_{x=0} = 0,\ u'\big|_{x=1} = p(t),\ \vartheta'\big|_{x=1} = q(t). \end{gathered} \tag{1}$$

При записи всех уравнений и соотношений здесь и далее использована следующая система безразмерных величин (звездочкой обозначены размерные параметры):

$$x = \frac{x^*}{h},\ t = \frac{c_1 t}{h},\ c_1^2 = \frac{E}{\rho},\ u = \frac{u^*}{h},\ \vartheta = \frac{\vartheta^*}{T_0},\ \alpha = \frac{\alpha^* T_0}{1-2\nu},\ \kappa = \frac{\kappa^*}{\rho c_\varepsilon c_1 h},\ \beta = \frac{c_1^2}{c_{\varepsilon 0}}\frac{\alpha^*}{(1-2\nu)},$$

где E, ν, ρ – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала слоя, – перемещение, ϑ – изменение температуры (T_0 – начальная температура слоя), α – коэффициент линейного температурного расширения, c_ε – удельная теплоемкость при постоянной деформации, κ – коэффициент теплопроводности, c_1 – скорость волн растяжения-сжатия в слое.

3. Решение задачи с помощью метода конечных разностей

Аналитическое решение задачи (1) имеет весьма громоздкий вид. Поскольку задача имеет простую геометрию, гораздо удобнее её решать численно с использованием метода конечных разностей.

Для повышения устойчивости численного решения задачи термоупругости используется центральная неявная конечно-разностная схема второго порядка. В отличие от явных схем, неявный подход позволяет использовать более крупные шаги по времени без потери устойчивости и точности, что особенно важно при моделировании термомеханических процессов в упругих телах.

С этой целью создаём пространсвенно-временную сетку с постоянными шагами Δx по координате и Δt по времени:

$$x_i = i\Delta x, \quad t^n = n\Delta t, \quad i = 0,1,\ldots,N, \quad n = 0,1,\ldots,M. \tag{2}$$

Конечно-разностная аппроксимация задачи (1) имеет вид:

$$\begin{gathered}\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} - \alpha \cdot \frac{\vartheta_{i+1}^{n+1} - \vartheta_{i-1}^{n+1}}{2h} + F_i^{n+1}, \\ \frac{\vartheta_i^{n+1} - \vartheta_i^n}{\Delta t} = \kappa \cdot \frac{\vartheta_{i+1}^{n+1} - 2\vartheta_i^{n+1} + \vartheta_{i-1}^{n+1}}{h^2} - \frac{\beta}{2h\Delta t}\left[(u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) - (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)\right] + Q_i^{n+1};\end{gathered} \tag{3}$$

$$u_i^0 = 0, \quad u_i^1 = 0, \quad \vartheta_i^0 = 0; \tag{4}$$

$$u_0^n = 0, \quad \vartheta_1^n = \vartheta_0^n, \quad u_N^n = u_{N-1}^n + hp^n, \quad \vartheta_N^n = \vartheta_{N-1}^n + hq^n. \tag{5}$$

Здесь

$$u_i^n = u\left(x_i, t^n\right),\ \vartheta_i^n = \vartheta\left(x_i, t^n\right),\ F_i^{n+1} = F\left(x_i, t^n\right),\ Q_i^{n+1} = Q\left(x_i, t^n\right),$$
$$p^n = p\left(t^n\right),\ q^n = q\left(t^n\right).$$

Для дальнейшего построения численного решения используется метод прогонки. Отметим, что в задачах, описываемых системой связанных уравнений (например, термоупругости), на каждом временном слое возникает необходимость решения системы линейных уравнений относительно двух неизвестных векторов. Прямое исключение одного из неизвестных разрушает трёхдиагональную структуру и приводит к неэффективным алгоритмам. Поэтому используется метод *векторной прогонки*, сохраняющий блочную трёхдиагональную структуру системы.

Каждая пара $(u_i^{n+1}, \vartheta_i^{n+1})$ участвует в двух уравнениях. Представим систему (3) в векторной форме:

$$\mathbf{A}_i \mathbf{y}_{i-1} + \mathbf{B}_i \mathbf{y}_i + \mathbf{C}_i \mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{d}_i, \quad i = 1, \ldots, N-1,$$

где

$$\mathbf{y}_i = \begin{bmatrix} u_i^{n+1} \\ \vartheta_i^{n+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i \in \mathrm{R}^{2\times 2}, \quad \mathbf{d}_i \in \mathrm{R}^2.$$

Алгоритм векторной прогонки состоит в следующем. Сначала выполняется так называемый прямой ход метода прогонки. При этом определяются матрицы перехода $\mathbf{a}_i$ и векторы свободных членов $\mathbf{b}_i$:

$$\mathbf{a}_1 = -\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{C}_1,\ \mathbf{b}_1 = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{d}_1,\ \mathbf{a}_i = -\left(\mathbf{B}_i + \mathbf{A}_i\mathbf{a}_{i-1}\right)^{-1}\mathbf{C}_i,$$
$$\mathbf{b}_i = \left(\mathbf{B}_i + \mathbf{A}_i\mathbf{a}_{i-1}\right)^{-1}\left(\mathbf{d}_i - \mathbf{A}_i\mathbf{b}_{i-1}\right),\ i = 2,\ldots,N-1. \quad (6)$$

Затем, в обратном ходе метода прогонки, определяются вектора искомых величин:

$$\mathbf{y}_{N-1} = \mathbf{b}_{N-1},\ \mathbf{y}_i = \mathbf{a}_i\mathbf{y}_{i+1} + \mathbf{b}_i,\ i = N-2,\ldots,1. \quad (7)$$

Векторная неявная конечно-разностная схема (2)-(7) обладает рядом важных преимуществ при решении задач связанной термоупругости. Во-первых, она устойчива при больших шагах по времени и не требует соблюдения жёсткого условия Куранта. Во-вторых, она обеспечивает одновременное и согласованное вычисление перемещений и температурных отклонений, что исключает временные смещения и накопление ошибок. Метод надёжен при наличии сильной термомеханической связи, допускает использование переменных и нелинейных коэффициентов и сохраняет численную устойчивость. Кроме того, блочная структура системы позволяет эффективно применять векторную прогонку с линейной вычислительной сложностью, что делает метод пригодным для расчёта больших задач с высокой точностью.

4. Метод решения, основанный на технологии PINN (физически информированные нейронные сети)

В качестве альтернативного подхода построения приближённого решения системы уравнений термоупругости (1) используется метод физически информированных нейронных сетей (PINN, Physics-Informed Neural Networks), позволяющий аппроксимировать решение дифференциальных уравнений с помощью

обучаемых нейросетевых моделей. В данной работе применяется раздельная аппроксимация перемещения $u(x,t)$ и приращения температуры $\vartheta(x,t)$ с использованием двух независимых нейронных сетей [27]:

$$u(x,t) \approx \mathrm{N}_u(x,t;\theta_u),\ \vartheta(x,t) \approx \mathrm{N}_\vartheta(x,t;\theta_\vartheta), \tag{8}$$

где θ_u и θ_ϑ – множества обучаемых переменных (весов и сдвигов) соответствующих сетей.

Суть метода PINN состоит в том, что исходной начально-краевой задаче ставиться в соответсвие задача математической опимизации, состоящая в поиске минумума функции потерь (невязки по уравнениям, начальным и граничным условиям) на объединённом множестве $\theta_u \cup \theta_\vartheta$ обучаемых переменных нейронных сетей $\mathrm{N}_u(x,t;\theta_u)$ и $\mathrm{N}_\vartheta(x,t;\theta_\vartheta)$ в точках коллокации.

Для этого вводятся следующие множества точек:

– внутренние точки (коллокации): множество $\Omega_r = \{(x_i,t_i)\}_{i=1}^{N_r} \subset \Omega \times (0,T)$, где вычисляется невязка по уравнениям в частных производных (N_r – число внутренних точек коллокации, $\Omega = (0,1)$, T – конечный момент времени);

– начальные точки: множество $\Omega_0 = \{(x_j,0)\}_{j=1}^{N_0} \subset \Omega \times \{0\}$ для соблюдения начальных условий (N_0 – число начальных точек коллокации);

– граничные точки: множество $\partial\Omega_b = \{(x_b,t_k)\}_{k=1}^{N_b}$, где $x_b = 0$ или $x_b = 1$, для применения граничных условий (N_b – число граничных точек коллокации).

Функция потерь L включает:

Невязку по уравнению движения:

$$\mathrm{L}_u = \frac{1}{N_r}\sum_{i=1}^{N_r}\left|\frac{\partial^2 \mathrm{N}_u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \mathrm{N}_u}{\partial x^2} + \Lambda\frac{\partial \mathrm{N}_\vartheta}{\partial x} - F\left(x_i, t_i\right)\right|^2$$

Невязку по уравнению теплопроводности:

$$\mathrm{L}_\vartheta = \frac{1}{N_r}\sum_{i=1}^{N_r}\left|\frac{\partial \mathrm{N}_\vartheta}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 \mathrm{N}_\vartheta}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^2 \mathrm{N}_u}{\partial x \partial t} - Q\left(x_i, t_i\right)\right|^2$$

Невязку по начальным условиям:

$$\mathrm{L}_{IC} = \frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{N_0}\left(|\,\mathrm{N}_u(x_j,0)\,|^2 + |\,\partial_t \mathrm{N}_u(x_j,0)\,|^2 + |\,\mathrm{N}_\vartheta(x_j,0)\,|^2\right)$$

Невязку по граничным условиям:

$$\mathrm{L}_{BC} = \frac{1}{N_b}\sum_{k=1}^{N_b}\left(|\,\mathrm{N}_u(0,t_k)\,|^2 + |\,\partial_x \mathrm{N}_u(1,t_k) - p(t_k)\,|^2 + |\,\partial_x \mathrm{N}_\vartheta(0,t_k)\,|^2 + |\,\partial_x \mathrm{N}_\vartheta(1,t_k) - q(t_k)\,|^2\right)$$

Общая функция потерь представляет собой сумму:

$$\mathrm{L}\left(\theta_u, \theta_\vartheta\right) = \mathrm{L}_u + \mathrm{L}_\vartheta + \mathrm{L}_{IC} + \mathrm{L}_{BC}. \tag{9}$$

С использованием различных методов организуется поиск минимума функции $\mathrm{L}\left(\theta_u, \theta_\vartheta\right)$ (или процесс «обучения» нейронных сетей) на множестве обучаемых параметров. На каждом шаге цикла весь объединённый набор точек $\mathrm{D} = \Omega_r \cup \Omega_0 \cup \partial\Omega_b$ проходит через процесс обучения. Операция прохода всех точек коллокации через процесс обучения называется «эпохой».

Для минимизации функции потерь в процессе обучения нейронных сетей в данной работе используется комбинация двух методов градиентной оптимизации: Adam и L-BFGS [27]. На начальном этапе применяется метод Adam, который обеспечивает устойчивое и быстрое приближение к области минимума даже при неустойчивых или шумных градиентах. Он адаптивно регулирует шаг обучения для

каждого параметра, что позволяет эффективно настраивать структуру нейросети в фазе начального приближения.

После того как решение достигает устойчивой области, оптимизация продолжается методом L-BFGS. Это квазиньютоновский алгоритм, который учитывает кривизну функции потерь и использует информацию о прошлых шагах и градиентах. Метод обеспечивает быструю и точную сходимость, особенно на гладких участках функции. Он работает по всему набору данных, что делает его особенно эффективным в задачах PINN, где важна согласованность по всей области определения.

Такое сочетание (сначала Adam, затем L-BFGS) позволяет объединить преимущества обоих подходов: стабильность и гибкость на старте, высокую точность и быстрое достижение минимума на завершающем этапе обучения.

5. Пример расчётов

В качестве примера рассмотрим решение следующей задачи связанной нестационарной термоупругости (1) со следующими параметрами и заданными функциями:

$$\begin{gathered}\alpha = 8.85\cdot 10^{-3},\ \kappa = 2.96\cdot 10^{-9},\ \beta = 1.64,\\ Q(x,t) = \sin(10t),\ F(x,t) = 0,\ q(t) = \sin(t),\ p(t) = -0.1t.\end{gathered} \tag{10}$$

Значения безразмерных параметров α, κ, β соответствуют принятию в качестве материала слоя стали с размерными характеристиками: $E = 210\cdot 10^9$ Па, $\nu = 0.3$, $\rho = 7850$ кг/м^3, $\alpha = 11.8\cdot 10^{-6}$ 1/К , $\kappa = 58$ Вт/(м·К), $c_\varepsilon = 482$ Дж/(кг·К), $T_0 = 300$ К.

Представленные выше алгоритмы решения методом конечных разностей и методом PINN были реализованы на языке программирования Python в среде JupyterLab. Конечный момент времени $T = 3$. В случае построения решения методом конечных разностей строилась равномерная пространственно-временная сетка с одинаковым размером шага 10^{-2} по координате и времени. При решении методом PINN использовались две одинаковые по структуре нейронные сети, содержащие 3 полносвязных внутренних слоя по 100 нейронов в каждом. В качестве функций активации связей использовалась функция гиперболического тангенса. Множество точек коллакации состояло из 3000 внутренних точек, 300 начальных точек, 200 граничных точек на каждой из пространсвенных границ $x = 0$ и $x = 1$. Количество эпох обучения методом Adam равнялось 4000. В методе L-BFGS использовано 3000 итераций.

На рис. 2-5 представлены распределения перемещений по координате x в различные моменты времени. Сплошная кривая соответствует решению, полученному методом конечных разностей (МКР), штриховая кривая – методом глубокого машинного обучения (PINN). Аналогичные графики для распределения температуры представлены на рис. 6-9.

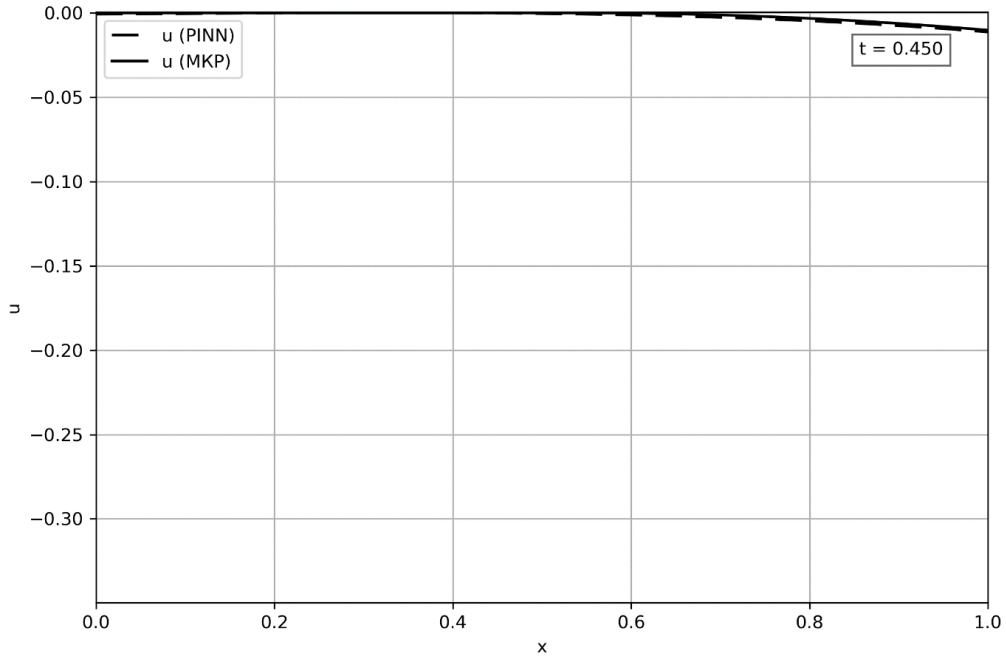

Рис. 2. Распределение перемещений в момент времени $t = 0.45$.

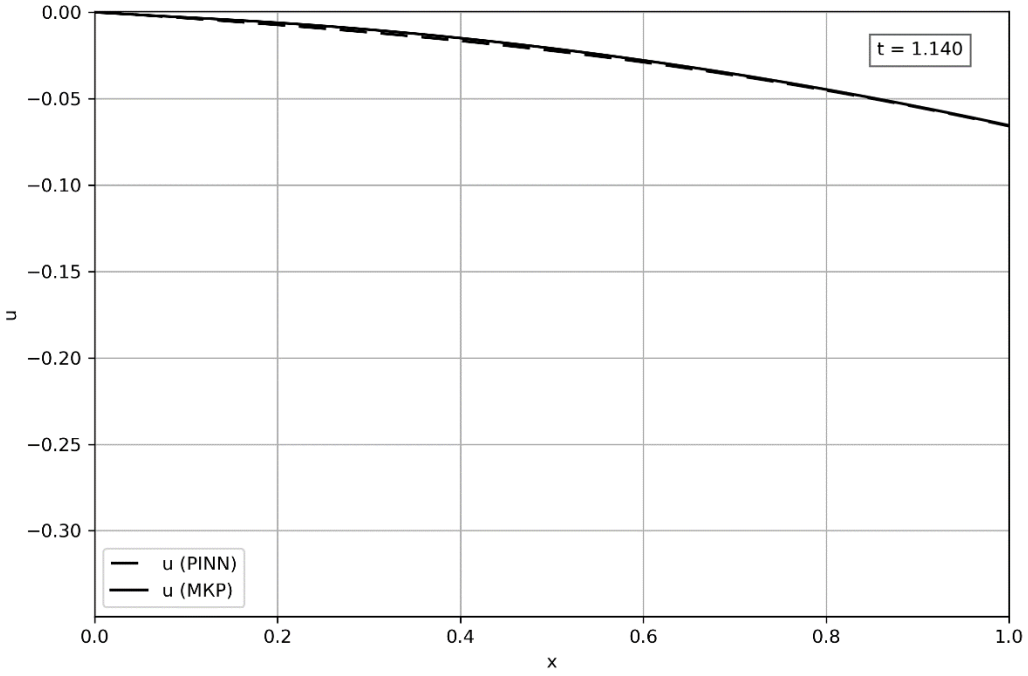

Рис. 3. Распределение перемещений в момент времени $t = 1.14$.

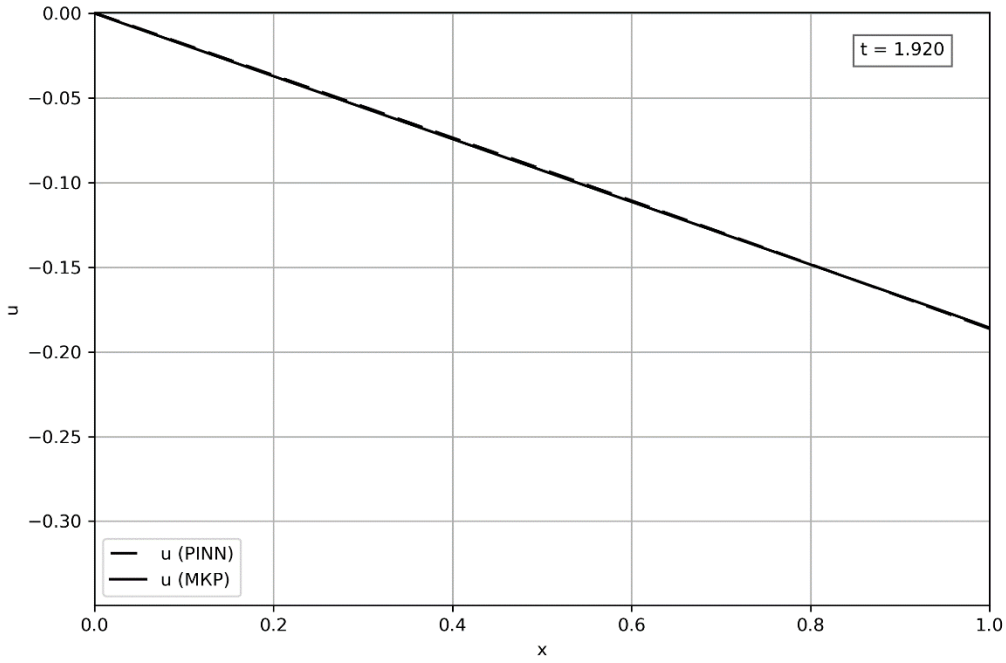

Рис. 4. Распределение перемещений в момент времени $t = 1.92$.

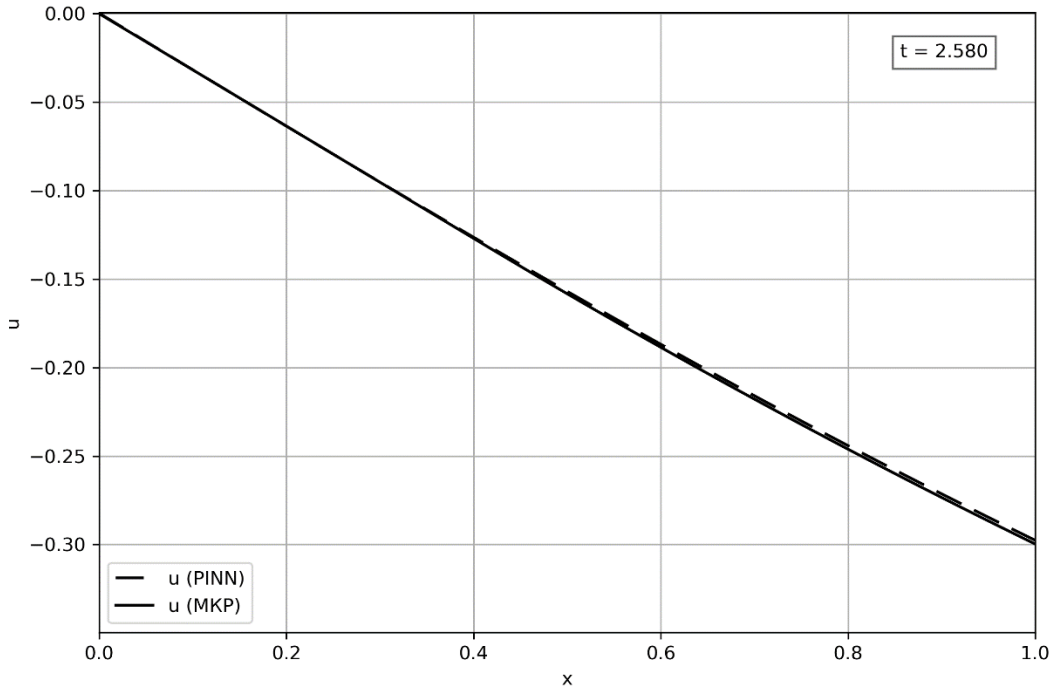

Рис. 5. Распределение перемещений в момент времени $t = 2.58$.

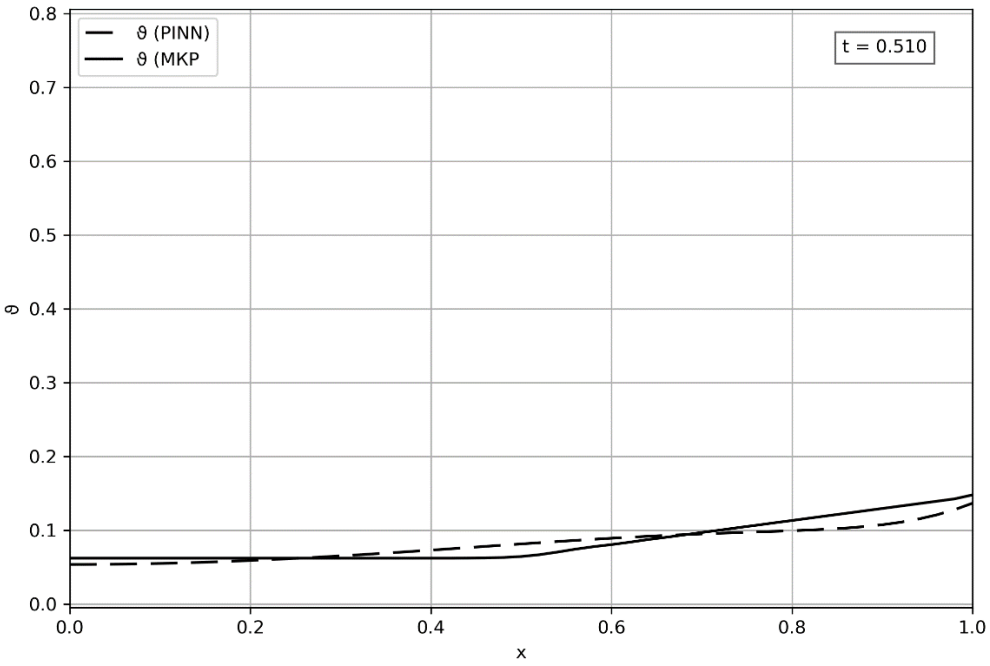

Рис. 6. Распределение приращения температуры в момент времени $t = 0.51$.

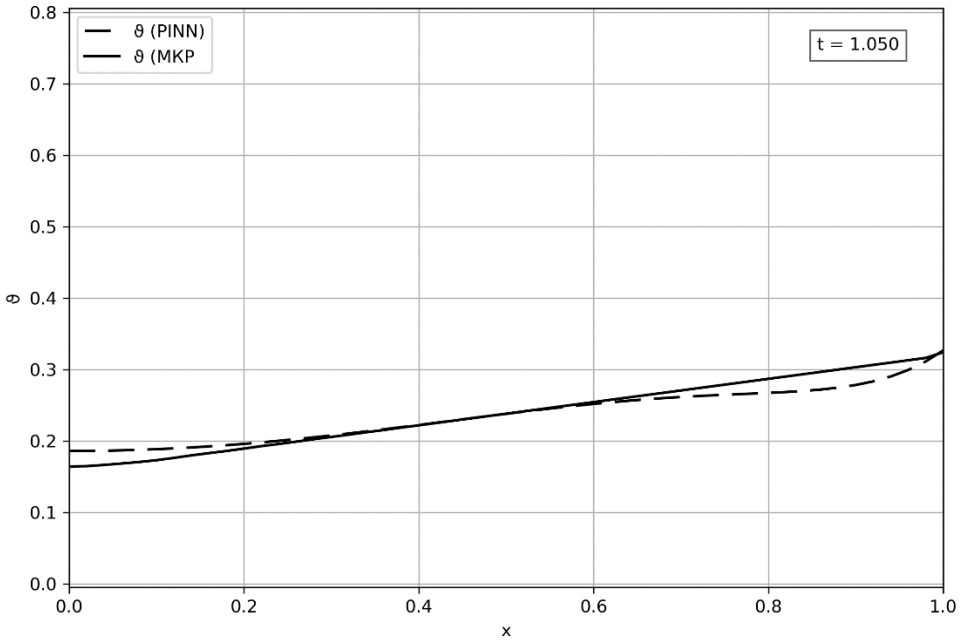

Рис. 7. Распределение приращения температуры в момент времени $t = 1.05$

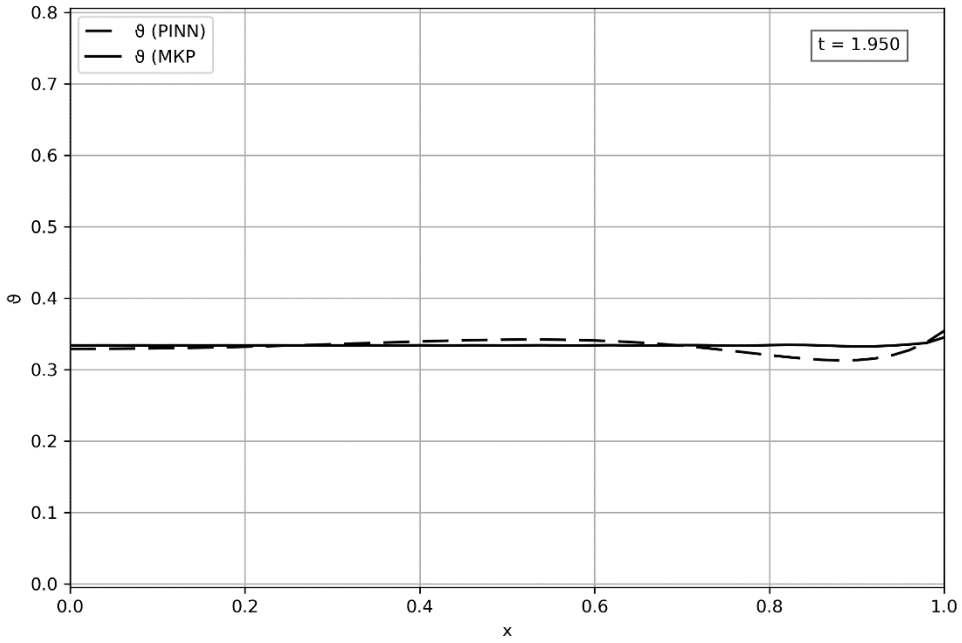

Рис. 8. Распределение приращения температуры в момент времени $t = 1.95$

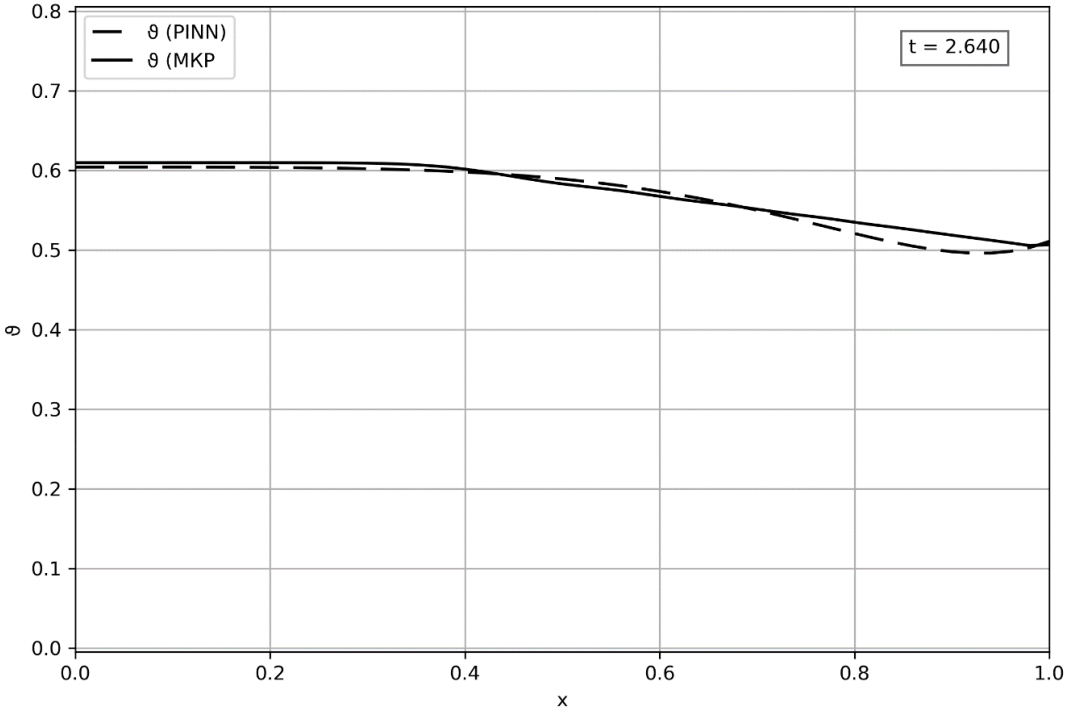

Рис. 9. Распределение приращения температуры в момент времени $t = 2.64$

Заключение

В работе представлен и обоснован подход к решению задач термоупругости, основанный на технологии физически информированных нейронных сетей (PINN). Метод позволяет эффективно аппроксимировать решение систем связанных дифференциальных уравнений без использования традиционной пространственно-временной сетки. Раздельная аппроксимация перемещений и температурных приращений с помощью двух нейросетей, а также использование комбинированной процедуры оптимизации (методы Adam и L-BFGS) обеспечили высокую точность приближённого решения, сравнимую с результатами, полученными методом конечных разностей. Полученные результаты могут служить основой для дальнейшего развития методов машинного обучения в механике сплошных сред и могут быть расширены на обратные задачи, контактные взаимодействия, задачи с нелинейными свойствами материалов и зашумлёнными экспериментальными данными.

Список источников

1. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // Journal of Computational Physics. 2019. V. 378, P. 686–707. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.10.045

2. Lu L., Meng X., Mao Z., Karniadakis G.E. DeepXDE: A deep learning library for solving differential equations // SIAM Review. 2021. V. 63, No. 1. P. 208–228. DOI: 10.1137/19M1274067

3. Jagtap A.D., Kawaguchi K., Karniadakis G.E. Extended physics-informed neural networks (XPINNs): A generalization of PINNs // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2020. V. 389, P. 114–190. DOI: 10.1016/j.cma.2021.114190

4. Pang G., Lu L., Karniadakis G.E. fPINNs: Fractional physics-informed neural networks for fractional PDEs // SIAM Journal on Scientific Computing. 2019. V. 41, No. 4. P. A2603–A2626. DOI: 10.1137/18M1229845

5. Mishra S., Molinaro R. Estimates on the generalization error of PINNs // IMA Journal of Numerical Analysis. 2023. V. 43. No. 1. P. 597–625. DOI: 10.1093/imanum/drac034

6. Zhu Y., Zabaras N., Koutsourelakis P.S., Perdikaris P. Physics-constrained deep learning for high-dimensional surrogate modeling and uncertainty quantification // Journal Computational Physics. 2019. V. 394, P. 56–81. DOI: 10.1016/j.jcp.2019.05.024

7. Wang S., Yu X., Perdikaris P. When and why PINNs fail to train: A neural tangent kernel perspective // Journal Computational Physics. 2021. V. 449, P. 110768. DOI: 10.1016/j.jcp.2021.110768

8. Wang P., Meng X., Zabaras N., Perdikaris P. Learning the solution operator of parametric partial differential equations with physics-informed neural networks // Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS). 2021. V. 34, P. 27588–27600.

9. Pang G., Lu L., Karniadakis G.E. FPINNs: Fractional PINNs for fractional PDEs // SIAM Journal on Scientific Computing. 2019. V. 41, No. 4. P. A2603–A2626. DOI: 10.1137/18M1229845

10. Raissi M., Karniadakis G.E. Hidden physics models: Machine learning of nonlinear partial differential equations // Journal Computational Physics. 2018. V. 357, P. 125–141. DOI: 10.1016/j.jcp.2017.11.039

11. Mishra S. A machine learning framework for data-driven acceleration of computations of differential equations // Mathematics and Mechanics of Solids. 2021. V. 26, No. 3–4. P. 359–373. DOI: 10.1177/1081286520946994

12. He J., Chen J., Mao Z., Karniadakis G.E. Nonlinear PINNs for nonlinear problems // Journal Computational Physics. 2020. V. 420, P. 109696. DOI: 10.1016/j.jcp.2020.109696

13. Wang S., Teng Y., Perdikaris P. Understanding and mitigating gradient flow pathologies in PINNs // SIAM Journal on Scientific Computing. 2021. V. 43, No. 5. P. A3055–A3081. DOI: 10.1137/20M1318043

14. Xu K., Zhang D., Karniadakis G.E. Solving stochastic inverse problems using PINNs // Journal Computational Physics. 2021. V. 425, P. 109913. DOI: 10.1016/j.jcp.2020.109913

15. Kissas G., et al. Machine learning in cardiovascular flows modeling with PINNs // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2020. V. 358, P. 112623. DOI: 10.1016/j.cma.2019.112623

16. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. V. 40, No. 4. P. 439–447. DOI: 10.1134/S1995080219040061

17. Tartakovsky A.M., Marrero C.O. PINNs for groundwater flow modeling in porous media // Advances in Water Resources. 2020. V. 141, P. 103610. DOI: 10.1016/j.advwatres.2020.103610

18. Geneva N., Zabaras N. Modeling PDE dynamics with physics-constrained deep autoregressive networks // Journal Computational Physics. 2020. V. 403, P. 109056. DOI: 10.1016/j.jcp.2019.109056

19. Fuks J.I., Maitra N.T. Predicting observables from Schrödinger equation using neural networks // Physical Review A. 2020. V. 102, No. 6. P. 062803. DOI: 10.1103/PhysRevA.102.062803

20. Sirignano J., Spiliopoulos K. DGM: A deep learning algorithm for PDEs // Journal Computational Physics. 2018. V. 375, P. 1339–1364. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.08.029

21. Ефимов Е.Н., Шевгунов Т.Я. Разработка и исследование методики построения нейронных сетей на основе адаптивных элементов // Труды МАИ. 2012. № 51. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=29159

22. Ананенко В.М. Аналитическая модель определения параметров движения орбитального объекта по результатам его наблюдений с борта космического аппарата на основе нейронной сети // Труды МАИ. 2023. № 133. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=177668

23. Соколов Д.Ю. Применение искусственной нейронной сети для решения задач прогнозирования движения наземных объектов // Труды МАИ. 2022. № 123. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=165563. DOI: 10.34759/trd-2022-123-17

24. Касатиков Н.Н., Брехов О.М., Николаева Е.О. Интеграция технологий искусственного интеллекта и интернета вещей для расширенного мониторинга и оптимизации энергетических объектов в умных городах // Труды МАИ. 2023. № 131. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=175929. DOI: 10.34759/trd-2023-131-23

25. Малыгин И.В., Бельков С.А., Тарасов А.Д., Усвяцов М.Р. Применение методов машинного обучения для классификации радиосигналов // Труды МАИ. 2017. № 96. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=85797

26. Вестяк В.А., Земсков А.В. Решение обратной одномерной коэффициентной задачи связанной термоупругости для однородного слоя // Труды МАИ. 2012. № 53. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=29732

27. Фан Тунг Шон. Моделирование процессов нестационарных колебаний и теплопроводности в слое с применением технологий глубокого машинного обучения // Труды МАИ. 2025. № 140. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=184057

References

1. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*. 2019. V. 378, P. 686–707. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.10.045

2. Lu L., Meng X., Mao Z., Karniadakis G.E. DeepXDE: A deep learning library for solving differential equations. *SIAM Review*. 2021. V. 63, No. 1. P. 208–228. DOI: 10.1137/19M1274067

3. Jagtap A.D., Kawaguchi K., Karniadakis G.E. Extended physics-informed neural networks (XPINNs): A generalization of PINNs. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2020. V. 389, P. 114–190. DOI: 10.1016/j.cma.2021.114190

4. Pang G., Lu L., Karniadakis G.E. fPINNs: Fractional physics-informed neural networks for fractional PDEs. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2019. V. 41, No. 4. P. A2603–A2626. DOI: 10.1137/18M1229845

5. Mishra S., Molinaro R. Estimates on the generalization error of PINNs. *IMA Journal of Numerical Analysis.* 2023. V. 43. No. 1. P. 597–625. DOI: 10.1093/imanum/drac034

6. Zhu Y., Zabaras N., Koutsourelakis P.S., Perdikaris P. Physics-constrained deep learning for high-dimensional surrogate modeling and uncertainty quantification. *Journal Computational Physics*. 2019. V. 394, P. 56–81. DOI: 10.1016/j.jcp.2019.05.024

7. Wang S., Yu X., Perdikaris P. When and why PINNs fail to train: A neural tangent kernel perspective. *Journal Computational Physics*. 2021. V. 449, P. 110768. DOI: 10.1016/j.jcp.2021.110768

8. Wang P., Meng X., Zabaras N., Perdikaris P. Learning the solution operator of parametric partial differential equations with physics-informed neural networks. *Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*. 2021. V. 34, P. 27588–27600.

9. Pang G., Lu L., Karniadakis G.E. FPINNs: Fractional PINNs for fractional PDEs. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2019. V. 41, No. 4. P. A2603–A2626. DOI: 10.1137/18M1229845

10. Raissi M., Karniadakis G.E. Hidden physics models: Machine learning of nonlinear partial differential equations. *Journal Computational Physics*. 2018. V. 357, P. 125–141. DOI: 10.1016/j.jcp.2017.11.039

11. Mishra S. A machine learning framework for data-driven acceleration of computations of differential equations. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2021. V. 26, No. 3–4. P. 359–373. DOI: 10.1177/1081286520946994

12. He J., Chen J., Mao Z., Karniadakis G.E. Nonlinear PINNs for nonlinear problems. *Journal Computational Physics*. 2020. V. 420, P. 109696. DOI: 10.1016/j.jcp.2020.109696

13. Wang S., Teng Y., Perdikaris P. Understanding and mitigating gradient flow pathologies in PINNs. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2021. V. 43, No. 5. P. A3055–A3081. DOI: 10.1137/20M1318043

14. Xu K., Zhang D., Karniadakis G.E. Solving stochastic inverse problems using PINNs. *Journal Computational Physics*. 2021. V. 425, P. 109913. DOI: 10.1016/j.jcp.2020.109913

15. Kissas G., et al. Machine learning in cardiovascular flows modeling with PINNs. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2020. V. 358, P. 112623. DOI: 10.1016/j.cma.2019.112623

16. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019. V. 40, No. 4. P. 439–447. DOI: 10.1134/S1995080219040061

17. Tartakovsky A.M., Marrero C.O. PINNs for groundwater flow modeling in porous media. *Advances in Water Resources*. 2020. V. 141, P. 103610. DOI: 10.1016/j.advwatres.2020.103610

18. Geneva N., Zabaras N. Modeling PDE dynamics with physics-constrained deep autoregressive networks. *Journal Computational Physics*. 2020. V. 403, P. 109056. DOI: 10.1016/j.jcp.2019.109056

19. Fuks J.I., Maitra N.T. Predicting observables from Schrödinger equation using neural networks. *Physical Review A*. 2020. V. 102, No. 6. P. 062803. DOI: 10.1103/PhysRevA.102.062803

20. Sirignano J., Spiliopoulos K. DGM: A deep learning algorithm for PDEs. *Journal Computational Physics*. 2018. V. 375, P. 1339–1364. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.08.029

21. Efimov E.N., Shevgunov T.Ya. Development and Analysis of the Technique for the Building of Artificial Neural Networks Based on Adaptive Elements. *Trudy MAI*. 2012. No. 51. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=29159

22. Ananenko V.M. Analytical model of determination of orbital object motion parameters by results of its observations from spacecraft on the basis of neural network. *Trudy MAI*. 2023. No. 133. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=177668

23. Sokolov D.Yu. Application of artificial neural network for solving problems of forecasting the movement of ground objects. *Trudy MAI*. 2022. No. 123. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=165563. DOI: 10.34759/trd-2022-123-17

24. Kasatikov N.N., Brekhov O.M., Nikolaeva E.O. Integration of artificial intelligence and the Internet of things for advanced monitoring and optimization of energy facilities in smart cities. *Trudy MAI*. 2023. No. 131. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=175929. DOI: 10.34759/trd-2023-131-23

25. Malygin I.V., Bel'kov S.A., Tarasov A.D., Usvyatsov M.R. Machine learning methods in classification of radio signals. *Trudy MAI*. 2017. No. 96. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=85797

26. Vestyak V.A., Zemskov A.V. Solution of one-dimensional boundary value inverse problems for a homogeneous layer. *Trudy MAI*. 2012. No. 53. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=29732

27. Fan Tung Shon. Modeling of unsteady oscillations and thermal conductivity processes in a layer using deep machine learning technologies. *Trudy MAI*. 2025. No. 140. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=184057

Статья поступила в редакцию 18.05.2025
Одобрена после рецензирования 25.05.2025

Принята к публикации 25.06.2025

The article was submitted on 18.05.2025; approved after reviewing on 25.05.2025; accepted for publication on 25.06.2025