УДК 519.642.7

СТРОГОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПО АДАМАРУ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ АЭРОДИНАМИКИ, ДЛЯ ЦЕЛЫХ СТЕПЕНЕЙ ОСОБЕННОСТИ

В.Ю. СМИРНОВ

Изучаются несобственные интегралы по Адамару, встречающиеся в математических моделях аэродинамики и других задачах математической физики. Рассматривается случай сильной особенности внутри отрезка интегрирования. Исследуются целые степени особенности. Доказывается теорема существования несобственного интеграла по Адамару в рассматриваемом случае. Дается строгое определение интеграла в смысле конечного значения по Адамару для целых степеней особенности. Для интеграла по Адамару приводится явное выражение. Приводится также выражение для интеграла по Адамару, не содержащее несобственных интегралов, которое удобно применять в математических моделях.

В задачах математической физики часто встречаются уравнения, содержащие несобственные интегралы. В частности, несобственные интегралы возникают при использовании формулы Био-Савара-Лапласа, закона Кулона или закона всемирного тяготения. Например, в математических моделях аэродинамики, основанных на методе дискретных вихрей, при вычислении скорости в контрольной точке от дискретного вихря возникает несобственный интеграл второго рода следующего вида:

$$I_1 = \int_{-l_j}^{l_j} \frac{f(s)}{s^2} ds, \tag{1}$$

Рассматриваемый интеграл необходимо понимать в смысле конечного значения по Адамару, поскольку он не существует ни по Риману, ни в смысле главного значения по Коши [1 - 3].

Докажем для интегралов, существующих в смысле конечного значения по Адамару, теорему существования.

Вопрос о вычислении интеграла I_1 сводится к исследованию функции вида

$$I(\varepsilon) = \int_L \frac{v(x)}{x^n} dx, \tag{2}$$

где L=[a, b]/(-ε, ε) и 0∈(a, b), а функция v(x) имеет в некоторой окрестности точки 0 производную порядка *n* и интегрируема по Риману на отрезке [a, b]. Здесь n – некоторое натуральное число. В силу сказанного подынтегральная функция на отрезках [a, -ε] и [ε, b] имеет первообразную F(x) и справедливо следующее соотношение:

$$\int\limits_L \frac{v(x)}{x^n}dx = F(x)\Big|_a^{-\varepsilon} + F(x)\Big|_\varepsilon^b = F(x)\Big|_a^b - F(x)\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon},$$

где принято обозначение

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Поскольку функция v(x) n раз дифференцируема, то в окрестности нуля ее можно разложить в ряд Тейлора. В результате в окрестности нуля функцию $v(x)/x^n$ можно представить в виде

$$\frac{v(x)}{x^n} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i!}\frac{v^{(i)}(0)}{x^{n-i}} + g(x), \tag{3}$$

где g(x) – ограниченная в ε - окрестности точки 0 функция.

Для функций вида $1/x^n$, входящих в разложение (3), существует первообразная, равная

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{x^{n-1}}, & n > 1, \\ \ln|x|, & n = 1. \end{cases}$$

С учетом этого разность значений первообразной в точках -ε и ε можно представить при n>1 в виде

$$F(\varepsilon) - F(-\varepsilon) = F(x)\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{v^{(i)}(0)}{i!}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1}{x^{n-i}}dx\right] + \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g(x)dx.$$

Следовательно,

$$F(x)\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \left[-\sum_{i=0}^{n-2}\frac{1}{i!}\frac{v^{(i)}(0)}{n-i-1}\frac{1}{x^{n-i-1}} + \frac{v^{(i)}(0)}{(n-1)!}\ln|x|\right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g(x)dx =$$

$$= -\sum_{i=0}^{n-2}\frac{1}{i!}\frac{v^{(i)}(0)}{n-i-1}\frac{1-(-1)^{n-i-1}}{\varepsilon^{n-i-1}} + \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g(x)dx \tag{4}$$

или

$$F(x)\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = -\sum_{i=0}^{n-2}\frac{1}{i!}\frac{v^{(i)}(0)}{n-i-1}\frac{1-(-1)^{n-i-1}}{\varepsilon^{n-i-1}} + \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g(x)dx.$$

Нетрудно заметить, что при n≤1 существует следующий предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F(x)\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 0,$$

и, следовательно, в этом случае интеграл (2) существует и равен

$$\int\limits_L \frac{v(x)}{x^n} dx = F(x)\ \Big|_a^b .$$

Причем этот интеграл существует по Риману при n < 1 и в смысле главного значения по Коши при n = 1.

Однако при n>1 указанный предел не существует, и интеграл расходится.

Тем не менее, при n>1 существует предел вида

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int\limits_L \frac{v(x)}{x^n} dx - \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{i!} \frac{v^{(i)}(0)}{n-i-1} \frac{1-(-1)^{n-i-1}}{\varepsilon^{n-i-1}} \right).$$

Этот предел называется интегралом в смысле конечного значения по Адамару от подынтегральной функции и обозначается

$$* \int\limits_a^b \frac{v(x)}{x^n} dx .$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть функция v(x) имеет в некоторой окрестности точки $x_0 \in (a, b)$ производную порядка *n* и интегрируема по Риману на отрезке [a, b]. Тогда

$$* \int\limits_a^b \frac{v(x)}{(x-x_0)^n} dx = F(x)\ \Big|_a^b .$$

Итак, после доказательства теоремы существования определим интеграл в смысле конечного значения по Адамару от подынтегральной функции следующим образом

$$* \int\limits_a^b \frac{v(x)}{x^n} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int\limits_L \frac{v(x)}{x^n} dx - \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{i!} \frac{v^{(i)}(0)}{n-i-1} \frac{1-(-1)^{n-i-1}}{\varepsilon^{n-i-1}} \right). \qquad (5)$$

Следствием из теоремы является возможность интегрирования $* \int\limits_a^b \frac{v(x)}{(x-x_0)^n} dx$ по частям.

Действительно, имеем

$$\int \frac{v(x)}{(x-x_0)^n} dx = -\frac{1}{n-1} \frac{v(x)}{(x-x_0)^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{v'(x)}{(x-x_0)^{n-1}} dx =$$

$$= -\frac{1}{n-1} \frac{v(x)}{(x-x_0)^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)(n-2)} \frac{v'(x)}{(x-x_0)^{n-2}} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} \int \frac{v''(x)}{(x-x_0)^{n-2}} dx =$$

$$= \ldots =$$

$$= -\sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots(n-i-1)} \frac{v^{(i)}(x)}{(x-x_0)^{n-i-1}} + \frac{1}{(n-1)!} \int \frac{v^{(n-1)}(x)}{x-x_0} dx.$$

Отсюда получаем явное выражение для интеграла по Адамару

$$
{}^*\int_a^b \frac{v(x)}{(x-x_0)^n}dx =
$$

$$
= -\sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(n-1)(n-2)\dots(n-i-1)} \frac{v^{(i)}(x)}{(x-x_0)^{n-i-1}}\Bigg|_a^b + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b \frac{v^{(n-1)}(x)}{x-x_0}dx. \qquad (6)
$$

В качестве примера вычислим интеграл вида

$$
{}^*\int_a^b \frac{v(x)}{(x-x_0)^2}dx\,. \qquad (7)
$$

Таким образом, из полученного соотношения (6) в силу теоремы получаем следующее значение интеграла (7):

$$
{}^*\int_a^b \frac{v(x)}{(x-x_0)^2}dx = -\frac{v(b)}{b-x_0} + \frac{v(a)}{a-x_0} + \int_a^b \frac{v'(x)}{x-x_0}dx\,. \qquad (8)
$$

Аналогичный результат можно получить, выполнив формальное интегрирование по частям неопределенного интеграла:

$$
\int \frac{v(x)}{(x-x_0)^2}dx = -\int v(x)d\frac{1}{x-x_0} = -\frac{v(x)}{x-x_0} + \int \frac{v'(x)}{x-x_0}dx\,,
$$

как это было сделано в [3].

Интеграл в правой части выражения (8) существует в общем случае только в смысле главного значения по Коши. Однако если $v'(x_0)=0$, то подынтегральная функция интегрируема и по Риману. В частности, если x_0=0, а v(x)=1, то

$$
{}^*\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx = -2\,.
$$

Полученная выше формула (6) имеет существенный недостаток, который состоит в том, что интеграл в правой части существует в общем случае только в смысле главного значения по Коши.

С этим недостатком легко справиться, если еще раз выполнить интегрирование по частям:

$$
\int_a^b \frac{v^{(n-1)}(x)}{x-x_0}dx = v^{(n-1)}(x)\ln|x-x_0|\Bigg|_a^b - \int_a^b \ln|x-x_0|v^{(n)}(x)dx\,.
$$

Тогда выражение (6) приобретает вид:

$$
{}^{*}\int_a^b \frac{v(x)}{(x-x_0)^n}dx = -\sum_{i=0}^{n-2}\frac{1}{(n-1)(n-2)\dots(n-i-1)}\frac{v^{(i)}(x)}{(x-x_0)^{n-i-1}}\Bigg|_a^b + \\
+\frac{1}{(n-1)!}\left(v^{(n-1)}(x)\ln|x-x_0|\Bigg|_a^b - \int_a^b \ln|x-x_0|v^{(n)}(x)dx\right). \qquad (9)
$$

Последний интеграл в правой части выражения (9) существует уже в обычном смысле.

Таким образом несобственный интеграл по Адамару можно понимать в смысле данного выше определения, так как для него доказана теорема существования. Полученное выражение для интеграла по Адамару (9) не содержит несобственных интегралов и позволяет решать задачи математического моделирования, в частности в аэродинамике, обычными методами численного интегрирования.

Приведённые выше результаты носят универсальный характер, так как могут найти применение не только в аэродинамике, но и в других областях науки, например, математической физики, где встречаются несобственные интегралы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамар Ж. Задачи Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978.

2. Мусхелишвили Н.Н. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968.

3. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1995.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Смирнов Владимир Юрьевич, заведующий кафедрой Московского авиационного института (государственного технического университета), к.т.н., доцент.