На правах рукописи

Кулешов Александр Сергеевич

Точные решения некоторых задач динамики твердого тела

Специальность 1.1.7. —
«Теоретическая механика, динамика машин»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2025

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники механико – математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Официальные оппоненты:

Мухарлямов Роберт Гарабшевич,
доктор физико – математических наук, профессор, профессор Института физических исследований и технологий факультета физико – математических и естественных наук федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»,

Степанов Сергей Яковлевич,
доктор физико – математических наук, доцент, старший научный сотрудник отдела механики федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук»,

Кудряшов Николай Алексеевич,
доктор физико – математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ».

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико – технический институт (национальный исследовательский университет)».

Защита состоится 13 февраля 2026 года в 10:00 на заседании диссертационного совета 24.2.327.08, созданного на базе федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», по адресу: 125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, д.4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МАИ и на сайте МАИ по ссылке: `https://mai.ru/events/defence/doctor/?ELEMENT_ID=185936`

Автореферат разослан « » ________________ 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н., с.н.с. Гидаспов В.Ю.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В механике никогда не ослабевал интерес к интегрируемым задачам. Нахождение новых интегрируемых случаев дифференциальных уравнений движения различных механических систем, а также нахождение решений в квадратурах для этих случаев — одна из главных задач теоретической механики. Проблема точного интегрирования дифференциальных уравнений движения имеет несколько аспектов. Геометрический аспект связан с качественным исследованием регулярного поведения траекторий интегрируемых систем. Примером здесь служит известная геометрическая теорема Лиувилля о расслоении фазового пространства вполне интегрируемой гамильтоновой системы на инвариантные торы с условно – периодическими движениями. Конструктивный аспект связан с отысканием условий, при выполнении которых можно указать алгоритм явного решения дифференциальных уравнений при помощи квадратур. В качестве примеров здесь можно указать теорему Эйлера – Якоби об интегрируемости системы n уравнений, допускающих $n-2$ независимых первых интеграла и инвариантную меру, и теорему Ли о системах с разрешимой группой симметрий. Указанные алгоритмы дают принципиальную возможность отыскания полного решения системы дифференциальных уравнений движения, однако их реализация упирается в довольно сложные проблемы (например, в явное решение систем алгебраических уравнений). В связи с этим возникает ещё один важный аспект рассматриваемого круга вопросов — явное решение систем дифференциальных уравнений. Для определённых классов дифференциальных уравнений, опираясь на их специфическую структуру, можно использовать специальные методы и алгоритмы. Примером здесь служит широкий и важный, с точки зрения приложений, класс линейных дифференциальных уравнений. Исследование движения многих механических систем и изучение многих задач математической физики приводится к решению линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Если при помощи замены независимой переменной удается привести коэффициенты соответствующего линейного дифференциального уравнения к виду рациональных функций независимой переменной, то для такого уравнения необходимые и достаточные условия разрешимости в лиувиллевых функциях определяются с помощью так называемого алгоритма Ковачича. Лиувиллевы функции строятся последовательно из рациональных функций при помощи алгебраических операций, неопределенного интегрирования и взятия экспоненты заданного выражения. С помощью этих операций можно получить логарифмические функции, тригонометрические функции, эллиптические функции, но не сложные специальные функции типа функций Лежандра, Бесселевых функций или гипергеометрических функций Гаусса. Можно сказать, что общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, выраженное через лиувиллевы функции, наиболее точно соответствует понятию "решение в замкнутой форме" или "решение в квадратурах".

В 1986 году американский математик Дж. Ковачич представил конструктивный алгоритм [1], позволяющий найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами, выраженное через лиувиллевы функции независимой переменой. Если у данного линейного дифференциального уравнения второго порядка нет лиувиллевых решений, то алгоритм также позволяет установить этот факт.

Целью данной диссертационной работы является решение в лиувиллевых функциях ряда задач классической механики, решение которых приводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Это задача о качении тяжелого тела вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости и сфере, задача о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения, а также задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в частном случае интегрируемости, известном как случай Гесса. Выписываются условия на параметры задач, при которых возможно интегрирование в лиувиллевых функциях дифференциальных уравнений движения.

Научная новизна и основные результаты. Все включенные в диссертацию результаты являются новыми. В работах соискателя с соавторами (которые в основном являются учениками соискателя) исследован вопрос о существовании лиувиллевых решений в задаче о качении тяжелого динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения (тела вращения) по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости и абсолютно шероховатой сфере. Исследован вопрос о существовании лиувиллевых решений в ряде задач о качении тяжелого однородного шара по неподвижной абсолютно шероховатой поверхности вращения. Также исследован вопрос о существовании лиувиллевых решений в частном случае интегрируемости Гесса задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Найдены в явном виде два дополнительных к интегралу энергии первых интеграла в задаче о движении тяжелого тела вращения по

абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости в случае, когда поверхность тела и распределение масс в нём удовлетворяют условию Х. М. Муштари. Получен общий вид поверхности, ограничивающей катящееся твердое тело, для которого справедливо условие Х. М. Муштари.

2. Полностью исследован вопрос о существовании лиувиллевых решений в ряде задач о качении тяжелого твердого динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения (тела вращения), по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Рассмотрены случаи, когда катящееся твердое тело представляет собой круглый диск, диск со смещенным центром масс, динамически симметричный тор, динамически симметричный параболоид вращения, динамически симметричный эллипсоид вращения, а также веретенообразное тело. Доказано, что задачи о качении по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости круглого диска, диска со смещенным центром масс и динамически симметричного тора не интегрируются в лиувиллевых функциях. Напротив, задача о качении тяжелого динамически симметричного параболоида, центр масс которого расположен в фокусе образующей параболы, интегрируется в лиувиллевых функциях при любых значениях параметров задачи. В задаче о качении динамически симметричного эллипсоида получены условия на параметры задачи, при которых данная задача интегрируется в лиувиллевых функциях.
3. Полностью исследован вопрос о существовании лиувиллевых решений в случае Гесса задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Доказано, что задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в частном случае интегрируемости Гесса может быть проинтегрирована в лиувиллевых функциях только в двух случаях: если распределение масс в твердом теле соответствует случаю интегрируемости Лагранжа, или если постоянная первого интеграла площадей равна нулю.
4. Полностью исследован вопрос о существовании лиувиллевых решений в ряде задач о качении тяжелого однородного шара по абсолютно шероховатой поверхности вращения с вертикальной осью симметрии. Доказано, что задачи о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения второго порядка, а также по циклоидальной поверхности и по поверхности Бельтрами интегрируются в лиувиллевых функциях. Указан явный вид общего решения линейного дифференциального уравнения второго порядка, к интегрированию которого

приводится решение соответствующих задач. Доказано также, что в случае качения тяжелого однородного шара по тору решение соответствующей задачи выражается с помощью функций Гойна, а в случае качения тяжелого однородного шара по катеноиду решение задачи выражается с помощью функций Лежандра.

5. Полностью исследован вопрос о существовании лиувиллевых решений в задаче о качении без проскальзывания динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по сфере. Качение тела происходит под действием сил, имеющих результирующую, приложенную в центре масс тела, направленную к центру опорной сферы и зависящую только от расстояния между центром масс тела и центром опорной сферы. Доказано, что задача о качении неоднородного динамически симметричного шара по сфере под действием таких сил интегрируется в лиувиллевых функциях.

Теоретическая и практическая значимость работы. Проведенные в диссертационной работе исследования позволили получить условия, при выполнении которых некоторые задачи динамики твердого тела могут быть проинтегрированы в явном виде в классе лиувиллевых функций. Диссертация носит теоретический характер. Результаты диссертации могут применяться при проведении исследований в МГУ им. М. В. Ломоносова, Санкт – Петербургском государственном университете, Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете), Московском физико – техническом институте (национальном исследовательском университете), Национальном ядерном университете МИФИ и других научно – исследовательских центрах, занимающихся исследованием классических задач динамики твердого тела.

Методология и методы исследования. Результаты проведенного исследования обоснованы методами теоретической механики и качественными методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений, а также методами высшей алгебры и комплексного анализа. В первой главе диссертации для описания и обоснования алгоритма Ковачича используются методы высшей алгебры и комплексного анализа. Во второй главе применяется теория движения механических систем с неголономными связями и качественная теория дифференциальных уравнений. Указанные теории и методики используются и в других главах диссертации, с третьей по пятую. Также в диссертации использовалась компьютерная система аналитических символьных вычислений Maple.

Степень достоверности. Все положения, выносимые на защиту, обоснованы при помощи строгих математических методов, а также методов исследования, принятых в теоретической механике, высшей алгебре и комплексном анализе. Все аналитические вычисления, проведенные в работе, проходили повторную проверку при помощи комплекса символьных вычислений Maple.

Апробация работы. Результаты работы прошли апробацию на ряде международных и российских конференций.

1. Международная конференция «Классические задачи динамики твердого тела», посвященная 80-летию со дня рождения П.В. Харламова. Донецк, Украина, 23 – 25 июня 2004 года.
2. IUTAM Symposium on Multiscale Problems in Multibody System Contacts. Stuttgart, Germany, February 20 – 23, 2006.
3. Международная конференция «Моделирование, управление и устойчивость (MCS - 2012)», Крым, Севастополь, Украина, 10 – 14 сентября 2012 года.
4. XVI Международная конференция «Dynamical System Modelling and Stability Investigation (DSMSI – 2013)», Киев, Украина, 29 – 31 мая 2013 года.
5. XLI Международная летняя школа – конференция «Advanced Problems in Mechanics (APM – 2013)», Репино, Санкт – Петербург, Россия, 1 – 6 июня 2013 года.
6. XLII Международная летняя школа – конференция «Advanced Problems in Mechanics (APM – 2014)», Репино, Санкт – Петербург, Россия, 30 июня - 5 июля 2014 года.
7. 8th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC – 2014), Vienna, Austria, July 6 – July 11, 2014.
8. Международная научная конференция по механике «VII Поляховские чтения», Санкт – Петербург, Россия, 2 – 6 февраля 2015 года.
9. IUTAM – 2015 Symposium on Analytical Methods in Nonlinear Dynamics. Frankfurt, Germany, July 6 – 9, 2015.
10. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, Россия, 20 – 24 августа 2015 года.
11. X Всероссийская научная конференция «Нелинейные колебания механических систем», Нижний Новгород, Россия, 26 – 29 сентября 2016 года.
12. Научная конференция «Ломоносовские чтения – 2017», Москва, Россия, 17 – 26 апреля 2017 года.

13. XI Международная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление», Казань, Россия, 13 – 17 июня 2017 года.
14. Международная научная конференция по механике «VIII Поляховские чтения», Санкт – Петербург, Россия, 30 января – 2 февраля 2018 года.
15. Научная конференция «Ломоносовские чтения – 2018», Москва, Россия, 16 – 25 апреля 2018 года.
16. XIV Международная научная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления», Москва, Россия, 30 мая – 1 июня 2018 года.
17. Международная научная конференция «Динамические системы в науке и технологиях (DSST – 2018)», Крым, Алушта, Россия, 17 – 21 сентября 2018 года.
18. XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Уфа, Россия, 19 – 24 августа, 2019 года.
19. XV Международная научная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления», Москва, Россия, 3 – 5 июня 2020 года.
20. XX Международная конференция «Математической моделирование и суперкомпьютерные технологии», Нижний Новгород, Россия, 23 – 27 ноября 2020 года.
21. Научная конференция «Ломоносовские чтения – 2020», Москва, Россия, 21 – 30 октября 2020 года.
22. Международная научная конференция по механике «IX Поляховские чтения», Санкт – Петербург, Россия, 9 – 12 марта 2021 года.
23. Международная научная конференция «Regular and Chaotic Dynamics: in memory of Alexey V. Borisov», Москва, Россия, 22 ноября – 3 декабря 2021 года.
24. XXIII Международная конференция «Математической моделирование и суперкомпьютерные технологии», Нижний Новгород, Россия, 13 – 26 ноября 2023 года.
25. 22-я Международная конференция «Авиация и космонавтика», Москва, Россия, 20 - 24 ноября 2023 года.
26. XIV Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ - 2024). Москва, Россия, 17 - 20 июня 2024 года.

27. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль, Россия, 28 июня - 3 июля 2024 года.
28. Международная научная конференция по механике «X Поляховские чтения», Санкт – Петербург, Россия, 23 – 26 сентября 2024 года.

Результаты диссертации также были представлены соискателем на следующих научных семинарах.

1. Семинар по аналитической механике и теории устойчивости имени В. В. Румянцева под руководством профессора А. А. Зобовой, профессора Е. И. Кугушева (механико – математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова).
2. Семинар «Гамильтоновы системы и статистическая механика» под руководством академика РАН В. В. Козлова, академика РАН Д. В. Трещева и члена – корреспондента РАН С. В. Болотина (механико – математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова).
3. Семинар секции теоретической механики имени профессора Н. Н. Поляхова Санкт – Петербургского Дома учёных РАН (под руководством профессора А. А. Тихонова).
4. Научный семинар «Дифференциальная геометрия и приложения» под руководством академика РАН А. Т. Фоменко (механико – математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова).
5. Научный семинар «Динамические системы и механика» под руководством профессора П. С. Красильникова, профессора Б. С. Бардина (Московский авиационный институт (технический университет)).
6. Семинар по теории управления и динамике систем под руководством академика РАН Ф. Л. Черноусько (Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН).
7. Научный семинар «Механика систем» имени академика РАН А.Ю. Ишлинского под руководством академика РАН В.Ф. Журавлева, академика РАН Д.М. Климова (Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 44 научных работах, из которых – одна монография, 22 статьи – в журналах, входящих в перечень ВАК и индексируемых в международных системах цитирования Web of Science, Scopus или RSCI, и 21 публикация – в различных журналах и сборниках трудов конференций.

Личный вклад автора. Диссертационная работа подготовлена на основе статей, опубликованных соискателем лично или в соавторстве. Вклад соискателя в работы, опубликованные в соавторстве (согласно списку «Публикации в журналах из перечня ВАК и международных систем цитирования Web of Science, Scopus или RSCI»), характеризуется следующим образом. В статьях [3, 13] вклад соискателя составляет 50%; он состоит в постановке задачи (совместно с А.В. Карапетяном), в подборе всех примеров, использующих теорию, изложенную в работах [3, 13], а также в полном аналитическом и численном исследовании указанных примеров. В работах [7–9, 15–18, 21–23] вклад соискателя составляет 90% и заключается в постановке задачи, выборе методики изучения рассматриваемых систем, а также в проведении всех аналитических исследований и численных расчетов. В работе [19] вклад соискателя составляет 90%; соискателю принадлежит выбор метода исследования рассматриваемой задачи, а также проведение всех аналитических вычислений и механическая и геометрическая интерпретация полученных результатов. В работах [10–12, 14] вклад соискателя составляет 75% и заключается в постановке задачи, проведении всех аналитических исследований и интерпретации полученных результатов. Вклад соискателя в работы, опубликованные в соавторстве (согласно списку «Прочие работы») характеризуется следующим образом. В работах [26, 39–44] вклад соискателя составляет 90% и заключается в постановке задачи, выборе метода исследования и полном аналитическом и численном исследовании рассматриваемых задач. В работах [32–36] вклад соискателя составляет 75% и заключается в постановке задачи и проведении всех аналитических расчетов.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы из 204 наименований. Работа содержит 13 иллюстраций и одну таблицу. Общий объем диссертации составляет 356 страниц.

Содержание работы.

Во **введении** обоснована актуальность диссертационной работы и проведен обзор литературы по изучаемой проблеме. Сформулирована цель работы, описаны изучаемые в работе задачи, а также сформулирована научная новизна работы.

Первая глава диссертации посвящена обсуждению теоретических основ алгоритма Ковачича. Представлено полное описание самого алгоритма, а также дано обоснование, как с помощью алгоритма находятся лиувиллевы решения линейного дифференциального уравнения второго порядка.

Рассмотрим дифференциальное поле $\mathbb{C}(x)$ рациональных функций одного комплексного переменного x. Примем стандартные обозначения $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ для множества целых чисел и множества рациональных чисел. Наша задача состоит в том, чтобы найти решение дифференциального уравнения

$$z'' + a(x)\, z' + b(x)\, z = 0, \tag{1}$$

где $a(x), b(x) \in \mathbb{C}(x)$. В работе Дж. Ковачича [1] был предложен алгоритм, позволяющий найти в явном виде так называемые лиувиллевы решения дифференциального уравнения (1), то есть решения, выражающиеся через лиувиллевы функции. В свою очередь, лиувиллевы функции являются элементами лиувиллева поля, где лиувиллево поле определяется следующим образом.

Определение. Пусть F – дифференциальное поле функций одного комплексного переменного x, которое содержит $\mathbb{C}(x)$, то есть F – поле характеристики ноль с операцией дифференцирования $()'$, действующей на элементы этого поля по правилам $(a+b)' = a' + b'$ и $(ab)' = a'b + ab'$ для любых a и b из F. Поле F называется лиувиллевым, если существует последовательность (башня) конечных расширений полей

$$\mathbb{C}(x) = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_n = F,$$

получающаяся присоединением одного элемента, такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, n$

$$F_i = F_{i-1}(\alpha), \text{ где } \frac{\alpha'}{\alpha} \in F_{i-1}$$

(то есть F_i образуется присоединением экспоненты неопределённого интеграла над F_{i-1}) или

$$F_i = F_{i-1}(\alpha), \text{ где } \alpha' \in F_{i-1}$$

(то есть F_i образуется присоединением неопределенного интеграла над F_{i-1}) или F_i является конечным алгебраическим расширением над F_{i-1} (то есть $F_i = F_{i-1}(\alpha)$ и α удовлетворяет полиномиальному уравнению конечной степени вида

$$a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n = 0,$$

где $a_j \in F_{i-1}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ и не все равны нулю). $\square$

Основное достоинство алгоритма Ковачича состоит в том, что он позволяет не просто установить факт существования или несуществования лиувиллева решения уравнения (1), но и предъявить его в явном виде, когда оно существует.

Для того, чтобы привести дифференциальное уравнение (1) к более простому виду, сделаем замену переменных

$$y\left(x\right)=z\left(x\right)\exp\left(\frac{1}{2}\int a(x)dx\right). \tag{2}$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$y''=R\left(x\right)y,\quad R\left(x\right)=\frac{1}{2}a'+\frac{1}{4}a^2-b,\quad R\left(x\right)\in\mathbb{C}\left(x\right). \tag{3}$$

В дальнейшем будем предполагать, что дифференциальное уравнение второго порядка, с которым имеет дело алгоритм, записывается в виде (3). Следующая теорема, доказанная Дж. Ковачичем [1], определяет структуру решения данного дифференциального уравнения.

Теорема 1 (Дж. Ковачич [1]). Для дифференциального уравнения (3) справедливы только следующие 4 случая.

1. Дифференциальное уравнение (3) имеет решение вида

$$\eta=\exp\left(\int\omega(x)dx\right),$$

   и $\omega\left(x\right)\in\mathbb{C}\left(x\right)$ (лиувиллево решение типа 1).
2. Дифференциальное уравнение (3) имеет решение вида

$$\eta=\exp\left(\int\omega(x)dx\right),$$

   где $\omega\left(x\right)$ – алгебраическая функция степени 2 над $\mathbb{C}\left(x\right)$, и случай 1 не имеет места (лиувиллево решение типа 2).
3. Все решения дифференциального уравнения (3) являются алгебраическими над $\mathbb{C}\left(x\right)$ и случаи 1 и 2 не имеют места. Решение уравнения (3) имеет в данном случае вид

$$\eta=\exp\left(\int\omega(x)dx\right)$$

   и $\omega\left(x\right)$ – алгебраическая функция степени 4, 6 или 12 над $\mathbb{C}\left(x\right)$ (лиувиллево решение типа 3).
4. Дифференциальное уравнение (3) не имеет лиувиллевых решений. □

Следующая теорема, доказанная а работе Дж. Ковачича [1], определяет условия, необходимые для того, чтобы один из трёх первых случаев, перечисленных в Теореме 1, имел место, то есть чтобы у уравнения (3) существовало лиувиллево решение специального вида, указанного при описании соответствующего случая.

Теорема 2 (Дж. Ковачич [1]). Для дифференциального уравнения (3) следующие условия являются необходимыми для того, чтобы один из трёх первых случаев, перечисленных в Теореме 1, имел место, то есть чтобы у уравнения (3) существовало лиувиллево решение специального вида, указанного при описании соответствующего случая.

1. Каждый полюс функции $R(x)$ имеет порядок 1 или чётный порядок. Порядок $R(x)$ в точке $x = \infty$ чётный или выше, чем второй.
2. Функция $R(x)$ имеет по меньшей мере один полюс или порядка 2 или нечётного порядка, большего чем 2.
3. Функция $R(x)$ не имеет полюсов порядка большего, чем 2. Порядок полюса функции $R(x)$ в точке $x = \infty$ равен по меньшей мере 2. Если разложение функции $R(x)$ в сумму простых дробей имеет вид

$$R(x) = \sum_i \frac{\alpha_i}{(x - c_i)^2} + \sum_j \frac{\beta_j}{x - d_j},$$

то для любого i должны выполняться условия

$$\sqrt{1 + 4\alpha_i} \in \mathbb{Q}, \quad \sum_j \beta_j = 0$$

и, кроме того,

$$\sqrt{1 + 4\gamma} \in \mathbb{Q}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j d_j. \quad \square$$

Для нахождения лиувиллева решения типа 1 у дифференциального уравнения (3) алгоритм Ковачича формулируется следующим образом (подробности см. в [1]). Предположим, что необходимые условия для существования решения в случае 1 выполнены и обозначим через Γ множество конечных полюсов функции $R(x)$.

Шаг 1. Для каждого $c \in \Gamma \bigcup \{\infty\}$ определим рациональную функцию $\left[\sqrt{R}\right]_c$ и два комплексных числа α_c^+ и α_c^- так, как описано ниже.

(c_1) Если $c \in \Gamma$ и c – полюс порядка 1, то

$$\left[\sqrt{R}\right]_c = 0, \quad \alpha_c^+ = \alpha_c^- = 1.$$

(c_2) Если $c \in \Gamma$ и c – полюс порядка 2, то

$$\left[\sqrt{R}\right]_c = 0.$$

Пусть b – коэффициент при $\frac{1}{(x-c)^2}$ в разложении функции $R(x)$ на простые дроби. Тогда

$$\alpha_c^{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4b}.$$

(c_3) Если $c \in \Gamma$ и c – полюс порядка $2\nu \geq 4$ (необходимо чётного порядка в силу соответствующих условий Теоремы 2), тогда функция $\left[\sqrt{R}\right]_c$ представляет собой сумму членов, которая включает в себя все $\frac{1}{(x-c)^i}$ для $2 \leq i \leq \nu$ в разложении функции $\sqrt{R}$ в ряд Лорана в окрестности точки c. Причём для этой функции $\left[\sqrt{R}\right]_c$ имеются два выражения, различающиеся знаком; любое из них может быть выбрано. Таким образом,

$$\left[\sqrt{R}\right]_c = \frac{a}{(x-c)^{\nu}} + \cdots + \frac{d}{(x-c)^2}.$$

Пусть b – коэффициент при $\frac{1}{(x-c)^{\nu+1}}$ у функции $R - \left[\sqrt{R}\right]_c^2$. Тогда имеем:

$$\alpha_c^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{b}{a} + \nu\right).$$

(∞_1) Если порядок полюса функции $R(x)$ в точке $x = \infty$ больше, чем 2, то

$$\left[\sqrt{R}\right]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = 0, \quad \alpha_\infty^- = 1.$$

(∞_2) Если порядок полюса функции $R(x)$ в точке $x = \infty$ равен 2, то

$$\left[\sqrt{R}\right]_\infty = 0.$$

Пусть b – коэффициент при $\frac{1}{x^2}$ в разложении в ряд Лорана функции $R(x)$ в окрестности точки $x = \infty$. Тогда имеем:

$$\alpha_\infty^\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4b}.$$

(∞_3) Если порядок полюса функции $R(x)$ в точке $x = \infty$ равен $-2\nu \leq 0$ (и является чётным в силу условий Теоремы 2), тогда функция $\left[\sqrt{R}\right]_\infty$ представляет собой сумму членов со степенями x^i, $0 \leq i \leq \nu$ разложения в ряд Лорана функции $\sqrt{R}$ в окрестности точки $x = \infty$ (может быть выбрана одна из двух возможностей). Тогда

$$\left[\sqrt{R}\right]_\infty = ax^\nu + \cdots + d.$$

Пусть b – коэффициент при $x^{\nu-1}$ у функции $R - \left[\sqrt{R}\right]_\infty^2$. Тогда имеем:

$$\alpha_\infty^\pm = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{b}{a} - \nu\right).$$

<u>Шаг 2.</u> Для каждого семейства знаков $s = (s(c))_{c\in\Gamma\bigcup\{\infty\}}$, где $s(c)$ может быть как знаком $+$, так и знаком $-$, положим

$$d = \alpha_\infty^{s(\infty)} - \sum_{c\in\Gamma}\alpha_c^{s(c)}. \tag{4}$$

Если d является неотрицательным целым числом, то введем функцию

$$\theta = \sum_{c\in\Gamma}\left(s(c)\left[\sqrt{R}\right]_c + \frac{\alpha_c^{s(c)}}{x-c}\right) + s(\infty)\left[\sqrt{R}\right]_\infty$$

Если d не является неотрицательным целым числом, то соответствующее семейство знаков s исключается из рассмотрения. Если таким образом из рассмотрения будут исключены все возможные семейства знаков s, значит дифференциальное уравнение (3) не имеет лиувиллевых решений типа 1.

<u>Шаг 3.</u> Для каждого семейства знаков s, сохраненных на предыдущем шаге, будем искать многочлен P степени d (постоянная d определяется формулой (4)), удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$P'' + 2\theta P' + \left(\theta' + \theta^2 - R\right)P = 0.$$

Если такой многочлен отыщется для какого-либо из семейств знаков s, то функция

$$\eta = P \exp\left(\int \theta\left(x\right) dx\right)$$

является искомым решением дифференциального уравнения (3). Если ни для одного из семейств s многочлен P найти не удалось, то дифференциальное уравнение (3) не имеет лиувиллевых решений типа 1.

Теперь сформулируем алгоритм Ковачича для поиска лиувиллевых решений типа 2 дифференциального уравнения (3). Обозначим через Γ множество конечных полюсов функции $R\left(x\right)$.

__**Шаг 1.**__ Для каждого $c \in \Gamma \bigcup \{\infty\}$ определим множество E_c следующим образом.

(c_1) Если $c \in \Gamma$ – полюс порядка 1, то

$$E_c = \{4\}\,.$$

(c_2) Если $c \in \Gamma$ – полюс порядка 2, и b – коэффициент при $\frac{1}{(x-c)^2}$ в разложении функции $R\left(x\right)$ в сумму простых дробей, то

$$E_c = \left\{\left(2 + k\sqrt{1+4b}\right)\bigcap \mathbb{Z}\right\},\ k = 0, \pm 2.$$

(c_3) Если $c \in \Gamma$ – полюс порядка $\nu > 2$, то

$$E_c = \{\nu\}\,.$$

(∞_1) Если порядок полюса функции $R\left(x\right)$ в точке $x = \infty$ больше, чем 2, то

$$E_\infty = \{0, 2, 4\}\,.$$

(∞_2) Если порядок полюса функции $R\left(x\right)$ в точке $x = \infty$ равен 2, и b – коэффициент при $\frac{1}{x^2}$ в разложении в ряд Лорана функции R в окрестности точки $x = \infty$, тогда

$$E_\infty = \left\{\left(2 + k\sqrt{1+4b}\right)\bigcap \mathbb{Z}\right\},\ k = 0, \pm 2.$$

(∞_3) Если порядок полюса функции $R\left(x\right)$ в точке $x = \infty$ равен $\nu < 2$, то

$$E_\infty = \{\nu\}\,.$$

Шаг 2. Рассмотрим наборы чисел $s = (e_\infty, e_c)$, $c \in \Gamma$, где $e_c \in E_c$, $e_\infty \in E_\infty$ и хотя бы одно из этих чисел в каждом наборе является нечётным. Пусть

$$d = \frac{1}{2}\left(e_\infty - \sum_{c\in\Gamma} e_c\right). \tag{5}$$

Если d – неотрицательное целое число, то соответствующий набор чисел s должен быть сохранен. В противном случае он должен быть отброшен. Если таким образом будут отброшены все возможные наборы чисел s, значит дифференциальное уравнение (3) не имеет лиувиллевых решений типа 2.

Шаг 3. Для каждого набора чисел s, сохраненного на предыдущем шаге, образуем рациональную функцию

$$\theta = \frac{1}{2}\sum_{c\in\Gamma}\frac{e_c}{x-c} \tag{6}$$

и попытаемся отыскать многочлен степени d (где d определяется формулой (5)) такой, что

$$P''' + 3\theta P'' + \left(3\theta^2 + 3\theta' - 4R\right) P' + \left(\theta'' + 3\theta\theta' + \theta^3 - 4R\theta - 2R'\right) P = 0. \tag{7}$$

Если успех достигнут, и соответствующий многочлен удалось найти, тогда положим

$$\varphi = \theta + \frac{P'}{P}$$

и пусть ω – решение квадратного уравнения (алгебраического уравнения степени 2) вида

$$\omega^2 - \varphi\omega + \frac{1}{2}\varphi' + \frac{1}{2}\varphi^2 - R = 0.$$

Тогда функция

$$\eta = \exp\left(\int \omega(x)\, dx\right)$$

является лиувиллевым решением типа 2 дифференциального уравнения (3). Если ни для одного из наборов чисел s многочлен P найти не удалось, то дифференциальное уравнение (3) не имеет лиувиллевых решений типа 2.

Теперь сформулируем алгоритм Ковачича для поиска лиувиллевых решений типа 3 дифференциального уравнения (3). Как и прежде, обозначим через Γ множество конечных полюсов функции $R(x)$. Отметим, что в силу необходимых условий, в Случае 3 функция $R(x)$ не может иметь полюсов порядка большего, чем 2.

<u>Шаг 1.</u> Для каждого $c \in \Gamma \bigcup \{\infty\}$ определим множество E_c следующим образом.

(c_1) Если $c \in \Gamma$ – полюс порядка 1, то

$$E_c = \{12\}.$$

(c_2) Если $c \in \Gamma$ – полюс порядка 2, и b – коэффициент при $\frac{1}{(x-c)^2}$ в разложении функции $R(x)$ в сумму простых дробей, то

$$E_c = \left\{ \left(6 + k\sqrt{1+4b}\right) \bigcap \mathbb{Z} \right\}, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6.$$

(∞) Если разложение функции $R(x)$ в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид

$$R = \frac{b}{x^2} + \cdots,$$

где b – комплексное число и, возможно, $b = 0$, тогда

$$E_\infty = \left\{ \left(6 + k\sqrt{1+4b}\right) \bigcap \mathbb{Z} \right\}, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6.$$

<u>Шаг 2.</u> Рассмотрим наборы чисел $s = (e_\infty, e_c)$, $c \in \Gamma$, где $e_c \in E_c$, $e_\infty \in E_\infty$. Пусть

$$d = e_\infty - \sum_{c \in \Gamma} e_c. \tag{8}$$

Если d – неотрицательное целое число, то соответствующий набор чисел s должен быть сохранен. В противном случае он должен быть отброшен. Если таким образом будут отброшены все возможные наборы чисел s, значит дифференциальное уравнение (3) не имеет лиувиллевых решений типа 3.

<u>Шаг 3.</u> Для каждого набора чисел s, сохраненного на предыдущем шаге, образуем рациональную функцию

$$\theta = \sum_{c \in \Gamma} \frac{e_c}{x - c} \tag{9}$$

и многочлен

$$S = \prod_{c \in \Gamma} (x - c) \,. \tag{10}$$

Теперь будем искать многочлен P степени d, удовлетворяющий системе уравнений, которую можно рекуррентно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} &P_{12} = -P, \\ &P_{i-1} = -SP_i' + ((12-i)\,S' - S\theta)\,P_i - (12-i)\,(i+1)\,S^2 R P_{i+1}, \\ &P_{-1} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Второе из соотношений (11) используется при $i = 12, \ldots, 0$. Смысл последнего соотношения состоит в том, что когда мы вычислим P_{-1}, пользуясь второй из формул, мы должны приравнять его к нулю.
Если успех достигнут, то пусть ω – корень алгебраического уравнения вида

$$\sum_{i=0}^{12} \frac{S^i P_i}{(12-i)!} \omega^i = 0. \tag{12}$$

Тогда функция

$$\eta = \exp\left(\int \omega\,(x)\,dx\right)$$

является лиувиллевым решением типа 3 дифференциального уравнения (3). Если ни для одного из наборов чисел s получить многочлены P_i не удалось, то дифференциальное уравнение (3) не имеет лиувиллевых решений типа 3.

В дальнейшем в главах диссертации со второй по пятую алгоритм Ковачича применяется для нахождения лиувиллевых решений ряда задач классической механики, решение которых приводится к нахождению общего решения некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка.

Во второй главе диссертации рассматривается задача о качении без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, ось симметрии которой совпадает с осью динамической симметрии тела (тела вращения). Предположим, что центр тяжести тела G расположен на оси симметрии $G\zeta$, а моменты инерции тела относительно главных центральных осей инерции $G\xi$ и $G\eta$, перпендикулярных $G\zeta$, равны между собой. Точку соприкосновения тела с плоскостью обозначим через M. Движение происходит в однородном поле тяжести (Рис. 1).

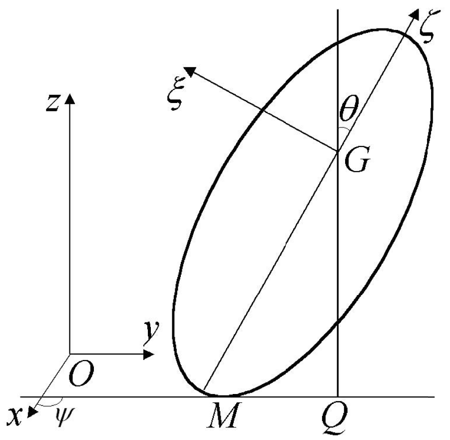

Рис. 1.

Пусть $Oxyz$ – неподвижная система координат с началом в некоторой точке плоскости Oxy, по которой катится тело. Обозначим через θ угол между осью динамической симметрии тела и вертикалью. Расстояние GQ от центра тяжести до плоскости Oxy будет функцией угла θ (см. [2]):

$$GQ = f(\theta). \tag{13}$$

Для описания движения тела конкретизируем расположение осей системы координат $G\xi\eta\zeta$. Пусть ось $G\xi$ все время лежит в плоскости вертикального меридиана $M\zeta$, а ось $G\eta$ перпендикулярна этой плоскости. Таким образом, система координат $G\xi\eta\zeta$ движется и в пространстве и в теле. Пусть ξ, η, ζ – координаты точки касания M тела и плоскости в системе координат $G\xi\eta\zeta$. Тогда $\eta = 0$, а ξ и ζ будут функциями угла θ, причем [2]:

$$\xi = -f(\theta)\sin\theta - f'(\theta)\cos\theta, \quad \zeta = -f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\sin\theta. \tag{14}$$

Обозначим через p, q, r компоненты вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела в проекции на оси системы координат $G\xi\eta\zeta$. Пусть m – масса тела, A_1 – его момент инерции относительно осей $G\xi$ и $G\eta$, а A_3 – момент инерции относительно оси $G\zeta$. Ускорение силы тяжести обозначим через g. Тогда уравнения движения тела могут быть записаны в виде [2]:

$$\begin{gathered}\left[A_1 + m\left(\xi^2+\zeta^2\right)\right]\frac{dq}{dt} = mgf'(\theta) + (A_3 r - A_1 p \operatorname{ctg}\theta)\, p - \\ - mp\,(\zeta\operatorname{ctg}\theta + \xi)\,(p\zeta - r\xi) - mq\left(\xi\frac{d\xi}{dt} + \zeta\frac{d\zeta}{dt}\right), \\ A_1\frac{dp}{dt} + A_3\frac{\zeta}{\xi}\frac{dr}{dt} = (A_1 p\operatorname{ctg}\theta - A_3 r)\, q, \\ \frac{d}{dt}(p\zeta - r\xi) - \frac{A_3}{m\xi}\frac{dr}{dt} = (\zeta\operatorname{ctg}\theta + \xi)\, pq, \quad q = -\frac{d\theta}{dt}.\end{gathered} \tag{15}$$

Здесь ξ и ζ – функции угла θ, определяемые по формулам (14). Система уравнений (15) является замкнутой системой четырех дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций времени p, q, r, θ.

Будем считать, что $\theta \neq \text{const}$. Тогда, используя последнее из уравнений (15), перейдем во втором и третьем из уравнений (15) к новой независимой переменной – углу θ. Получим

$$\begin{gathered} A_1 \frac{dp}{d\theta} + A_3 \frac{\zeta}{\xi} \frac{dr}{d\theta} = -A_1 p \operatorname{ctg}\theta + A_3 r, \\ \zeta \frac{dp}{d\theta} - \frac{A_3 + m\xi^2}{m\xi} \frac{dr}{d\theta} = -\left(\zeta \operatorname{ctg}\theta + \xi + \zeta'\right) p + \xi' r. \end{gathered} \tag{16}$$

Линейные уравнения первого порядка (16) приводят к одному линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\begin{gathered} \frac{d^2 r}{d\theta^2} + \left[\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{3m\left(A_1\xi\xi' + A_3\zeta\zeta'\right)}{\Delta} - \frac{\dfrac{d}{d\theta}\left(\xi\left(\xi+\zeta'\right)\right)}{\xi\left(\xi+\zeta'\right)}\right] \frac{dr}{d\theta} + \\ + \frac{m\xi\left(\xi+\zeta'\right)}{\Delta\sin\theta}\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\left(A_1\xi' - A_3\zeta\right)\sin\theta}{\xi+\zeta'}\right) - A_3\sin\theta\right] r = 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Здесь через Δ обозначено выражение

$$\Delta = A_1 A_3 + A_1 m\xi^2 + A_3 m\zeta^2.$$

Интегрирование линейного дифференциального уравнения второго порядка (17) или системы (16) дает зависимость p и r от θ с двумя произвольными постоянными; затем интегрирование задачи заканчивается в квадратурах.

Таким образом, решение задачи о качении тяжелого тела вращения по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости приводится к нахождению общего решения линейного дифференциального уравнения второго порядка (17).

В работе Х.М. Муштари [3] основное внимание было уделено телам, ограниченным такой поверхностью, чтобы дифференциальное уравнение (17) имело частное решение $r = r_0 = \text{const}$. Очевидно, что в этом случае координаты точки касания ξ и ζ должны удовлетворять уравнению

$$\frac{\left(A_3\zeta - A_1\xi'\right)\sin\theta}{\xi+\zeta'} = A_3\left(\cos\theta + \ell\right), \tag{18}$$

которое принято называть условием Х.М. Муштари. Здесь ℓ – произвольная постоянная. В работе Х.М. Муштари [3] при $\ell = 0$ были указаны два частных решения уравнения (18). Они имеют вид

$$A_3 = \frac{2}{3}A_1, \quad f(\theta) = \frac{\lambda}{\sin\theta}, \quad \xi = \frac{\lambda\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \lambda, \quad \zeta = -\frac{2\lambda\cos\theta}{\sin\theta}, \tag{19}$$

$$A_3 = 2A_1, \quad f(\theta) = \frac{\lambda}{\cos\theta}, \quad \xi = -\frac{2\lambda\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \zeta = \frac{\lambda\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \lambda, \tag{20}$$

где λ – произвольная постоянная. Поверхность, определяемая условиями (19), образуется при вращении дуги параболы вокруг оси, проходящей через ее фокус, а поверхность, определяемая условиями (20), представляет собой параболоид вращения.

Во второй главе диссертации было получено обобщение результатов Х.М. Муштари. А именно, были доказаны следующие утверждения.

Теорема 3. При выполнении условия Х.М. Муштари (18) система уравнений (16) допускает два первых интеграла

$$U_1 = [A_1 p\sin\theta + A_3 r\cos\theta + \ell A_3 r]\sqrt{\Delta} = k_1 = \mathrm{const},$$

$$U_2 = r - mk_1\int\frac{\xi\,(\xi+\zeta')}{\Delta^{\frac{3}{2}}\sin\theta}d\theta = k_2 = \mathrm{const}. \quad \square$$

Теорема 4. При $\ell = 0$ общее решение уравнения (18) имеет вид:

$$f\,(\theta) = \frac{\lambda_1}{\cos\theta}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{(k-2)}{2\,(k-1)},\ 2;\ \frac{1}{\cos^2\theta}\right) + \frac{\lambda_2}{\sin\theta}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{(3k-2)}{2\,(k-1)},\ 2;\ \frac{1}{\sin^2\theta}\right), \tag{21}$$

где λ_1 и λ_2 – произвольные постоянные, $F\,(a,\ b,\ c; w)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, а $k = A_3/A_1$. $\square$

Таким образом, условию Х.М. Муштари (18) при $\ell = 0$ удовлетворяют поверхности, меридианное сечение которых определяется формулой (21). Тем самым, обнаружено целое семейство поверхностей, для которых справедливо условие Х. М. Муштари (18). Показано, каким образом в это семейство входят два частных случая (19) и (20), изученные в работе Х. М. Муштари [3].

При $\ell \neq 0$ условие Х.М. Муштари записывается следующим образом:

$$((k-1)\cos\theta - k\ell)\,f''\sin\theta + k\,(\ell\cos\theta - 1)\,f' + (k-1)\,f\sin\theta\cos\theta = 0.$$

Сделаем в данном уравнении замену независимой переменной по формуле $1+\cos\theta = 2x$. Тогда уравнение примет вид:

$$x\left(x-1\right)\left[x-\frac{\left(k\left(\ell+1\right)-1\right)}{2\left(k-1\right)}\right]\frac{d^2f}{dx^2}\;+\;\left(x^2-x-\frac{1}{4\left(k-1\right)}\right)\frac{df}{dx}+$$
$$+\;\left(\frac{1}{2}-x\right)f=0.$$

Полученное уравнение представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка, называемое уравнением Гойна [4]. Таким образом, показано, что при $\ell \neq 0$ условию Х.М. Муштари удовлетворяют поверхности, меридианное сечение которых определяется с помощью функций Гойна.

В дальнейшем во второй главе диссертации изучается движение по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости различных тел, для которых выписывается в явном виде линейное дифференциальное уравнение (17), и при помощи алгоритма Ковачича выясняется, при каких условиях у полученного уравнения существуют лиувиллевы решения.

В § 7 работы исследуется движение круглого диска радиуса R по неподвижной горизонтальной плоскости. В случае движения диска дифференциальное уравнение (17) имеет вид:

$$\frac{d^2r}{d\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{dr}{d\theta}-Br=0,\quad B=\frac{mR^2A_3}{A_1\left(A_3+mR^2\right)},\quad \theta\in\left(0,\pi\right).$$

Сделаем в этом уравнении замену независимой переменной по формуле $\cos\theta = x$. Тогда оно примет вид уравнения с рациональными коэффициентами

$$\frac{d^2r}{dx^2}-\frac{2x}{1-x^2}\frac{dr}{dx}-\frac{B}{1-x^2}r=0. \tag{22}$$

Применение алгоритма Ковачича к уравнению (22) приводит к следующему результату.

Теорема 5. При всех $B>0$ уравнение (22) не имеет лиувиллевых решений. $\square$

В § 8 рассматривается задача о движении круглого диска радиуса R со смещенным вдоль оси симметрии на расстояние h центром масс. В этом случае линейное дифференциальное уравнение (17) имеет вид:

$$\frac{d^2r}{d\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dr}{d\theta}-\frac{A_3mR\left(R\sin\theta+h\cos\theta\right)}{\left(A_1A_3+A_1mR^2+A_3mh^2\right)\sin\theta}r=0. \tag{23}$$

Если сделать в этом уравнении замену независимой переменной по формуле $\operatorname{ctg}\theta = x$ и ввести обозначения

$$A = \frac{A_3 mhR}{A_1A_3 + A_1mR^2 + A_3mh^2}, \; B = \frac{A_3mR^2}{A_1A_3 + A_1mR^2 + A_3mh^2},$$

то дифференциальное уравнение (23) запишется так:

$$\frac{d^2r}{dx^2} + \frac{x}{x^2+1}\frac{dr}{dx} - \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2}r = 0. \tag{24}$$

Применение алгоритма Ковачича к дифференциальному уравнению (24) приводит к следующему результату.

Теорема 6. При всех $A > 0$, $B > 0$ уравнение (24) не имеет лиувиллевых решений. $\square$

В § 9 рассматривается движение по абсолютно шероховатой плоскости динамически симметричного тора. Пусть R – радиус меридиана тора на экваторе, и $a + R$ – радиус экваториальной окружности, центр которой совпадает с центром масс тора. Тогда дифференциальное уравнение (17) принимает вид:

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} + b_1\frac{dr}{d\theta} + b_2 r = 0, \quad \theta \in (0, \pi), \tag{25}$$

$$b_1 = \frac{a\cos\theta}{(R\sin\theta + a)\sin\theta} + \frac{3mR\left((A_1 - A_3)\,R\sin\theta + A_1 a\right)\cos\theta}{\Delta},$$

$$b_2 = \frac{m\,(R\sin\theta + a)\left(R\,(A_1 - A_3)\left(1 - 2\sin^2\theta\right) - A_3 a\sin\theta\right)}{\Delta\sin\theta},$$

$$\Delta = (A_1 - A_3)\,mR^2\sin^2\theta + 2A_1mRa\sin\theta + A_1A_3 + A_1ma^2 + A_3mR^2.$$

Сделаем в уравнении (25) замену независимой переменной по формуле $\sin\theta = x$ и введем обозначение $B = a/R$. Тогда уравнение (25) перепишется в виде

$$\frac{d^2r}{dx^2} + d_1\frac{dr}{dx} + d_2 r = 0, \tag{26}$$

$$d_1 = \frac{B}{x\,(x+B)} + \frac{x}{x^2-1} + \frac{3mR^2\left((A_1 - A_3)\,x + A_1B\right)}{\Delta},$$

$$d_2 = \frac{mR^2\,(x+B)\left((A_1 - A_3)\left(2x^2 - 1\right) + A_3Bx\right)}{x\,(x^2-1)\,\Delta},$$

$$\Delta = (A_1 - A_3)\,mR^2x^2 + 2A_1BmR^2x + A_1A_3 + A_1B^2mR^2 + A_3mR^2.$$

Применение алгоритма Ковачича к дифференциальному уравнению (26) приводит к следующему результату.

Теорема 7. При всех значениях параметров задачи уравнение (26) не имеет лиувиллевых решений. □

В § 10 работы рассматривается задача о движении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости динамически симметричного параболоида вращения. Будем считать, что параметр параболы, являющейся меридианом параболоида, равен 2λ, а центр масс параболоида расположен в фокусе образующей параболы. В этом случае дифференциальное уравнение (17) имеет вид:

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} + b_1\frac{dr}{d\theta} + b_2 r = 0, \tag{27}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\cos^2\theta - 4}{\sin\theta\cos\theta} + \frac{6\left(A_3 - 2\left(A_3 - A_1\right)\cos^2\theta\right)m\lambda^2\sin\theta}{\Delta\cos\theta}, \\ b_2 &= \frac{2m\lambda^2\left(A_3 - 2A_1\right)\left(1+\cos^2\theta\right)}{\Delta}, \\ \Delta &= \left(A_1A_3 + 4m\lambda^2\left(A_3 - A_1\right)\right)\cos^4\theta - 4m\lambda^2\left(A_3 - A_1\right)\cos^2\theta + A_3 m\lambda^2. \end{aligned}$$

Сделаем в уравнении (27) замену независимой переменной по формуле $\cos^2\theta = x$ и введем обозначение $B = m\lambda^2$. Тогда уравнение (27) перепишется в виде дифференциального уравнения с рациональными коэффициентами

$$\frac{d^2r}{dx^2} + d_1\frac{dr}{dx} + d_2 r = 0, \tag{28}$$

$$d_1 = \frac{5-3x}{2x(1-x)} - \frac{3(A_3 - 2(A_3 - A_1)x)B}{x\Delta}, \quad d_2 = \frac{(A_3 - 2A_1)B(x+1)}{2x(1-x)\Delta},$$

$$\Delta = (A_1A_3 + 4(A_3 - A_1)B)x^2 - 4(A_3 - A_1)Bx + A_3B.$$

Применение алгоритма Ковачича к дифференциальному уравнению (28) приводит к следующему результату.

Теорема 8. При всех значениях параметров задачи общее решение уравнения (28) выражается через лиувиллевы функции. □

Таким образом доказано, что задача о качении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости динамически симметричного параболоида вращения, центр масс которого расположен в фокусе образующей параболы, интегрируется в квадратурах.

В § 11 работы рассматривается движение по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости веретенообразного тела из работы Х.М. Муштари [3]. Будем считать, что расстояние от вершины образующей параболы до ее фокуса равно λ. Тогда дифференциальное уравнение (17) в случае движения веретенообразного тела имеет вид:

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} + b_1\frac{dr}{d\theta} + b_2 r = 0, \tag{29}$$

$$b_1 = \frac{(4\sin^4\theta - 24\sin^2\theta + 15)\cos\theta}{(1-2\sin^2\theta)(3-2\sin^2\theta)\sin\theta} - \frac{6(A_1 - 2(A_1 - A_3)\sin^2\theta)m\lambda^2\cos\theta}{\Delta\sin\theta},$$

$$b_2 = \frac{(3A_3 - 2A_1)m\lambda^2(1-2\sin^2\theta)^2}{\Delta(3-2\sin^2\theta)},$$

$$\Delta = (A_1A_3 + 4(A_1 - A_3)m\lambda^2)\sin^4\theta - 4(A_1 - A_3)m\lambda^2\sin^2\theta + A_1 m\lambda^2.$$

Сделаем в уравнении (29) замену независимой переменной по формуле $\sin^2\theta = x$ и введем обозначение $B = m\lambda^2$. В результате уравнение (29) перепишется следующим образом:

$$\frac{d^2r}{dx^2} + d_1\frac{dr}{dx} + d_2 r = 0, \tag{30}$$

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{18 - 53x + 48x^2 - 12x^3}{2x(1-x)(1-2x)(3-2x)} - \frac{3(A_1 - 2(A_1 - A_3)x)B}{x\Delta}, \\ d_2 &= \frac{(3A_3 - 2A_1)(1-2x)^2 B}{4x(1-x)(3-2x)\Delta}, \\ \Delta &= (A_1A_3 + 4B(A_1 - A_3))x^2 - 4B(A_1 - A_3)x + A_1 B. \end{aligned}$$

Применение алгоритма Ковачича к линейному дифференциальному уравнению (30) приводит к следующему результату.

Теорема 9. Уравнение (30) имеет лиувиллевы решения только при выполнении условия

$$A_3 = \frac{2}{3}A_1. \quad \square$$

В § 12 работы рассматривается движение по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости динамически симметричного эллипсоида вращения. Пусть a_1 и a_3 – полуоси эллипсоида. Дифференциальное уравнение (17) имеет в этом случае вид:

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} + b_1\frac{dr}{d\theta} + b_2 r = 0, \ \theta \in (0, \pi) \tag{31}$$

$$b_1 = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{4a_3^2\cos\theta}{\left(a_1^2\sin^2\theta + a_3^2\cos^2\theta\right)\sin\theta} + \frac{3}{a_1^2\sin^2\theta + a_3^2\cos^2\theta}\times$$
$$\times\frac{\left(A_1a_1^2 - A_3a_3^2\right)ma_1^2a_3^2\sin\theta\cos\theta}{\left(\left(A_1 + ma_3^2\right)A_3a_3^2 - \left(A_3 + ma_1^2\right)A_1a_1^2\right)\cos^2\theta + \left(A_3 + ma_1^2\right)A_1a_1^2},$$
$$b_2 = -\frac{1}{a_1^2\sin^2\theta + a_3^2\cos^2\theta}\times$$
$$\times\frac{ma_1^2\left(A_3\left(a_3^2 - a_1^2\right)^2\sin^4\theta + a_3^2\left(A_1a_1^2 - A_3a_3^2\right)\left(1 + \cos^2\theta\right)\right)}{\left(\left(A_1 + ma_3^2\right)A_3a_3^2 - \left(A_3 + ma_1^2\right)A_1a_1^2\right)\cos^2\theta + \left(A_3 + ma_1^2\right)A_1a_1^2}.$$

Сделаем в уравнении (31) замену независимой переменной по формуле $\cos^2\theta = x$ и введем обозначения

$$\frac{A_3}{A_1} = A \in (0, 2), \quad \frac{ma_1^2}{A_1} = B, \quad \frac{a_3^2}{a_1^2} = C.$$

В результате уравнение (31) примет вид уравнения с рациональными коэффициентами

$$\frac{d^2r}{dx^2} + d_1\frac{dr}{dx} + d_2r = 0, \tag{32}$$

$$d_1 = \frac{3x - 1}{2x\,(x - 1)} + \frac{2C}{(x - 1)\left((1 - C)\,x - 1\right)} +$$
$$+\frac{3\,(AC - 1)\,BC}{2\left((1 - C)\,x - 1\right)\left((A + B - (1 + BC)\,AC)\,x - (A + B)\right)},$$
$$d_2 = \frac{\left(A\,(1-C)^2\,x^2 + \left(C - A - A\,(1-C)\,(1-3C)\right)x + C - A + 2A\,(1-C)\right)B}{4x\,(x - 1)\left((1 - C)\,x - 1\right)\left((A + B - (1 + BC)\,AC)\,x - (A + B)\right)}.$$

Применение алгоритма Ковачича к дифференциальному уравнению (32) приводит к следующему результату.

Теорема 10. Для почти всех значений параметров задачи дифференциальное уравнение (32) не имеет лиувиллевых решений. $\square$

В **третьей главе** работы рассматривается другая классическая задача механики – задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса. Рассмотрим движение твердого тела с одной закрепленной точкой O в однородном поле сил тяжести. Введем подвижную систему координат $Ox_1x_2x_3$, оси которой совпадают с главными осями инерции тела для точки O. Пусть M – масса тела, g – ускорение свободного падения, A_s – моменты инерции тела относительно осей Ox_s, $(s = 1, 2, 3)$; ω_s, γ_s и x_s – проекции на оси Ox_s вектора мгновенной угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}$, единичного вектора $\boldsymbol{\gamma}$, направленного по вертикали вверх, и радиуса – вектора центра масс тела соответственно. Уравнения движения тела в системе координат $Ox_1x_2x_3$ имеют вид уравнений Эйлера – Пуассона:

$$\begin{aligned}
&A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\,\omega_2\omega_3 = Mg\,(x_3\gamma_2 - x_2\gamma_3)\,,\\
&A_2\dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3)\,\omega_1\omega_3 = Mg\,(x_1\gamma_3 - x_3\gamma_1)\,,\\
&A_3\dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1)\,\omega_1\omega_2 = Mg\,(x_2\gamma_1 - x_1\gamma_2)\,,\\
&\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2.
\end{aligned} \tag{33}$$

Известно, что для решения уравнений Эйлера – Пуассона достаточно найти четыре независимых первых интеграла системы (33). При любых значениях параметров A_s, x_s, $s = 1, 2, 3$ известны три независимых первых интеграла системы (33) – интеграл энергии

$$H = \frac{1}{2}\left(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2\right) + Mg\,(x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3) = E,$$

интеграл площадей $K = A_1\omega_1\gamma_1 + A_2\omega_2\gamma_2 + A_3\omega_3\gamma_3 = k$ и геометрический интеграл $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$.

В 1890 году В. Гесс показал [5], что при выполнении условий

$$x_3 = 0, \quad A_2\,(A_3 - A_1)\,x_2^2 = A_1\,(A_2 - A_3)\,x_1^2, \quad A_2 > A_3 > A_1 \tag{34}$$

уравнения (33) допускают частный четвертый интеграл, имеющий вид:

$$A_1\omega_1x_1 + A_2\omega_2x_2 = 0. \tag{35}$$

Если ввести обозначения

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$$

$$L_1 = A_1\omega_1\cos\alpha + A_2\omega_2\sin\alpha,\; L_2 = A_2\omega_2\cos\alpha - A_1\omega_1\sin\alpha,\; L_3 = A_3\omega_3,$$

$$\nu_1 = \gamma_1\cos\alpha + \gamma_2\sin\alpha,\; \nu_2 = \gamma_2\cos\alpha - \gamma_1\sin\alpha,\; \nu_3 = \gamma_3,$$

то интеграл Гесса (35) принимает вид $L_1 = 0$, а уравнения (33) с учётом этого интеграла переписываются следующим образом:

$$\begin{gathered}
\dot{L}_2 = bL_2L_3 + \nu_3\Gamma, \quad \dot{L}_3 = -bL_2^2 - \nu_2\Gamma, \quad \dot{\nu}_1 = c\,(L_3\nu_2 - L_2\nu_3)\,,\\
\dot{\nu}_2 = bL_2\nu_3 - cL_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = (c\nu_1 - b\nu_2)\,L_2,
\end{gathered} \tag{36}$$

где b, c и Γ – постоянные параметры, имеющие вид

$$b = \frac{(A_1 - A_2)\,x_1x_2}{A_1A_2\,(x_1^2 + x_2^2)},\; c = \frac{1}{A_3},\; \Gamma = Mg\sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Система уравнений (36) допускает следующие первые интегралы

$$c\left(L_2^2+L_3^2\right)+2\Gamma\nu_1=2E;\ L_2\nu_2+L_3\nu_3=k;\ \nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1.$$

Вводя безразмерные переменные и параметры

$$L_2=\sqrt{\frac{\Gamma}{c}}y,\ L_3=\sqrt{\frac{\Gamma}{c}}z,\ t=\frac{\tau}{\sqrt{\Gamma c}},\ d_1=\frac{b}{c},\ h=\frac{E}{\Gamma},\ k_1=k\sqrt{\frac{c}{\Gamma}}$$

запишем систему уравнений (36) и первые интегралы в безразмерной форме

$$\frac{dy}{d\tau}=d_1yz-\nu_3,\ \frac{dz}{d\tau}=-d_1y^2+\nu_2,$$

$$\frac{d\nu_1}{d\tau}=z\nu_2-y\nu_3,\ \frac{d\nu_2}{d\tau}=d_1y\nu_3-z\nu_1,\ \frac{d\nu_3}{d\tau}=y\nu_1-d_1y\nu_2,$$
$$\frac{y^2+z^2}{2}+\nu_1=h,\quad y\nu_2+z\nu_3=k_1,\quad \nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1.$$

Вводя новые переменные по формулам

$$y=\sigma\cos\varphi,\quad z=\sigma\sin\varphi,\quad u=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

получим, что функция $u\left(\sigma\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Риккати:

$$\frac{du}{d\sigma}+\frac{\left(d_1\sigma^3-k_1\right)u^2-d_1\sigma^3-k_1}{\sigma\sqrt{4h\sigma^4-\sigma^6+4\left(1-h^2\right)\sigma^2-4k_1^2}}=0,$$

из которого можно получить линейное дифференциальное уравнение второго порядка с рациональными коэффициентами. Применение к этому уравнению алгоритма Ковачича приводит к следующему результату.

Теорема 11. Лиувиллевы решения в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса существуют только если выполнено одно из двух условий: $d_1=0$ (распределение масс в твердом теле соответствует случаю Лагранжа) или если $k_1=0$ (постоянная интеграла площадей равна нулю). □

В **четвертой главе** диссертации рассматривается классическая задача о качении тяжелого однородного шара по абсолютно шероховатой поверхности вращения. Пусть однородный шар катится по произвольной выпуклой абсолютно шероховатой поверхности под действием сил, результирующая которых проходит через центр масс G шара, совпадающий с его геометрическим центром. Для описания движения шара введем подвижную систему координат $Gx_1x_2x_3$, ось Gx_3 которой направлена по нормали к опорной поверхности. Направления осей Gx_1 и Gx_2 определим позднее. Пусть вектор скорости $\boldsymbol{v}_G$ центра масс шара, вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ шара и вектор угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ системы координат $Gx_1x_2x_3$ имеют компоненты u, v, w; ω_1, ω_2, ω_3; θ_1, θ_2, θ_3 в проекции на оси системы координат $Gx_1x_2x_3$. Очевидно, что $w = 0$, поскольку шар не отрывается от опорной поверхности во время движения. Обозначим через F_1, F_2, N компоненты силы реакции в проекции на те же оси, а через X, Y, P – компоненты результирующей силы, приложенной к центру масс шара. Пусть M – масса шара, R – его радиус, J – момент инерции шара относительно любой оси, проходящей через его центр масс. Уравнения движения шара имеют вид:

$$M\dot{u} - M\theta_3 v = X + F_1,\ M\dot{v} + M\theta_3 u = Y + F_2,\ M\theta_1 v - M\theta_2 u = P + N; \quad (37)$$

$$\begin{gathered} J\dot{\omega}_1 + J\theta_2\omega_3 - J\theta_3\omega_2 = F_2 R, \quad J\dot{\omega}_2 + J\theta_3\omega_1 - J\theta_1\omega_3 = -F_1 R, \\ \dot{\omega}_3 + \theta_1\omega_2 - \theta_2\omega_1 = 0; \end{gathered} \quad (38)$$

$$u - R\omega_2 = 0, \quad v + R\omega_1 = 0. \quad (39)$$

Исключая F_1, F_2, ω_1, ω_2 из уравнений (37)–(39), получаем:

$$\dot{u} - \theta_3 v = \frac{R^2 X}{J + MR^2} + \frac{JR\theta_1\omega_3}{J + MR^2}, \quad \dot{v} + \theta_3 u = \frac{R^2 Y}{J + MR^2} + \frac{JR\theta_2\omega_3}{J + MR^2}. \quad (40)$$

Центр масс G шара движется по поверхности, полученной из данной опорной поверхности смещением по нормали на расстояние, равное радиусу R шара. Направим оси Gx_1 и Gx_2 по касательным к линиям кривизны этой поверхности. Будем считать, что данная поверхность является поверхностью вращения, которая задается относительно некоторой неподвижной системы координат уравнением

$$\boldsymbol{r} = \left(\rho\left(q_1\right)\cos q_2,\ \rho\left(q_1\right)\sin q_2,\ \zeta\left(q_1\right)\right). \quad (41)$$

В уравнении (41) через q_1, q_2 обозначены гауссовы координаты на поверхности. Тогда компоненты θ_1, θ_2, θ_3 угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ системы координат $Gx_1x_2x_3$ будут равны

$$\theta_1 = h_2 k_2 \dot{q}_2, \quad \theta_2 = -h_1 k_1 \dot{q}_1, \quad \theta_3 = \frac{\dot{q}_2}{h_1}\frac{dh_2}{dq_1}. \quad (42)$$

Здесь через h_1, h_2 обозначены коэффициенты Ламе данной поверхности, а через k_1, k_2 – её главные кривизны, которые вычисляются по формулам

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dq_1}\right)^2}, \quad h_2 = \rho\left(q_1\right), \quad (43)$$

$$k_1 = \frac{\left(\dfrac{d^2\zeta}{dq_1^2}\dfrac{d\rho}{dq_1} - \dfrac{d\zeta}{dq_1}\dfrac{d^2\rho}{dq_1^2}\right)}{\left(\left(\dfrac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\dfrac{d\zeta}{dq_1}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad k_2 = \frac{\dfrac{d\zeta}{dq_1}}{\rho\sqrt{\left(\dfrac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\dfrac{d\zeta}{dq_1}\right)^2}}. \tag{44}$$

Компоненты скорости u и v центра масс G шара связаны с координатами q_1, q_2 и их производными соотношениями:

$$u = h_1\dot{q}_1, \quad v = h_2\dot{q}_2, \tag{45}$$

с учётом которых можно переписать выражения для компонент θ_1, θ_2, θ_3 угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ следующим образом:

$$\theta_1 = k_2 v, \quad \theta_2 = -k_1 u, \quad \theta_3 = \frac{v}{h_1 h_2}\frac{dh_2}{dq_1}. \tag{46}$$

Принимая во внимание формулы (42), (45), (46), а также уравнения (39), из третьего уравнения системы (38) получаем:

$$\dot{\omega}_3 = \frac{(k_1 - k_2)\, uv}{R} = \frac{(k_1 - k_2)\, vh_1\dot{q}_1}{R}.$$

Переходя в полученном уравнении к новой независимой переменной – координате q_1, запишем данное уравнение в виде

$$\frac{d\omega_3}{dq_1} = \frac{(k_1 - k_2)\, h_1}{R}v. \tag{47}$$

Поскольку движение шара происходит под действием силы тяжести, следовательно $Y = 0$. С учётом этого факта и формул (42), (45), (46), из второго уравнения системы (40) получаем

$$\dot{v} + \frac{v}{h_2}\frac{dh_2}{dq_1}\dot{q}_1 = -\frac{JRh_1k_1\dot{q}_1}{J + MR^2}\omega_3.$$

В полученном уравнении мы также перейдем к новой независимой переменной – координате q_1, в результате чего данное дифференциальное уравнение примет вид:

$$\frac{dv}{dq_1} + \frac{v}{h_2}\frac{dh_2}{dq_1} = -\frac{JRh_1k_1}{J + MR^2}\omega_3. \tag{48}$$

Система уравнений (47), (48) представляет собой систему двух линейных уравнений первого порядка относительно неизвестных v и ω_3. Решение задачи о качении шара по поверхности такой, что центр масс шара принадлежит заданной поверхности вращения, сводится к интегрированию системы уравнений (47), (48). Немного преобразуем данную систему. Введём новые переменные V и Ω по формулам

$$V = h_2 v = \rho\left(q_1\right) v, \quad \Omega = R\omega_3,$$

а также обозначим

$$\frac{J}{J+MR^2} = n^2 < 1.$$

Тогда система уравнений (47), (48) перепишется в виде

$$\frac{d\Omega}{dq_1} = \frac{h_1}{h_2}\left(k_1 - k_2\right) V, \quad \frac{dV}{dq_1} = -n^2 h_1 h_2 k_1 \Omega. \tag{49}$$

Систему уравнений (49) легко привести к одному линейному дифференциальному уравнению второго порядка относительно V

$$\frac{d^2V}{dq_1^2} - \frac{1}{h_1 h_2 k_1}\frac{d}{dq_1}\left[h_1 h_2 k_1\right]\frac{dV}{dq_1} + n^2\left(k_1 - k_2\right) h_1^2 k_1 V = 0. \tag{50}$$

Таким образом, задача о качении шара по неподвижной выпуклой поверхности под действием силы тяжести, в предположении, что центр масс G шара движется по заданной поверхности вращения, сводится к интегрированию уравнения (50).

Предположим, что при качении шара его центр движется по невырожденной поверхности вращения второго порядка. Пусть p и e – параметр и эксцентриситет кривой, определяющей меридиан соответствующей поверхности вращения. Тогда функции $\rho\left(q_1\right)$ и $\zeta\left(q_1\right)$, определяются формулами

$$\rho\left(q_1\right) = r\left(q_1\right)\sin q_1 = \frac{p\sin q_1}{1 - e\cos q_1}, \quad \zeta\left(q_1\right) = r\left(q_1\right)\cos q_1 = \frac{p\cos q_1}{1 - e\cos q_1}.$$

Дифференциальное уравнение второго порядка (50) запишется следующим образом:

$$\frac{d^2V}{dq_1^2} + \frac{2e - \left(1+e^2\right)\cos q_1}{\left(1+e^2-2e\cos q_1\right)\sin q_1}\frac{dV}{dq_1} - \frac{n^2 e^2 \sin^2 q_1}{\left(1+e^2-2e\cos q_1\right)^2}V = 0. \tag{51}$$

В уравнении (51) сделаем замену независимой переменной по формуле $\cos q_1 = x$. Тогда уравнение (51) примет вид уравнения с рациональными коэффициентами

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{2e}{(2ex-e^2-1)}\frac{dV}{dx}-\frac{n^2e^2}{(2ex-e^2-1)^2}V=0. \tag{52}$$

Применение алгоритма Ковачича к дифференциальному уравнению (52) приводит к следующему результату.

Теорема 12. Общее решение линейного дифференциального уравнения (52) выражается через лиувиллевы функции при любых значениях параметров задачи. □

Таким образом, задача о качении шара по поверхности такой, что при качении центр шара движется по невырожденной поверхности второго порядка, является интегрируемой в лиувиллевых функциях.

Пусть теперь поверхность, по которой катится шар, такова, что при качении шара по этой поверхности его центр принадлежит поверхности, полученной вращением арки циклоиды вокруг её оси симметрии. Функции $\rho(q_1)$ и $\zeta(q_1)$, параметрически задающие меридиан соответствующей поверхности вращения, имеют вид:

$$\rho(q_1)=a(1-q_1), \qquad \zeta(q_1)=-a\sqrt{1-q_1^2}-a\arcsin q_1+\frac{a\pi}{2}.$$

Дифференциальное уравнение (50) принимает в данном случае вид

$$\frac{d^2V}{dq_1^2}+\frac{1}{1-q_1^2}\frac{dV}{dq_1}-\frac{n^2}{4(1-q_1^2)}V=0. \tag{53}$$

Применение алгоритма Ковачича к уравнению (53) приводит к следующему результату.

Теорема 13. Общее решение линейного дифференциального уравнения (53) выражается через лиувиллевы функции при любых значениях параметров задачи. □

Таким образом, задача о качении шара по поверхности такой, что при качении центр шара движется по поверхности, образованной вращением арки циклоиды вокруг её оси симметрии, интегрируется в лиувиллевых функциях.

Пусть теперь абсолютно шероховатая поверхность, по которой катится шар, такова, что геометрическое место центров шара представляет собой тор. Тогда

$$\rho(q_1)=a+b\cos q_1, \quad \zeta(q_1)=b\sin q_1, \quad a>b>0.$$

Дифференциальное уравнение (50), к которому сводится решение задачи, имеет в данном случае вид

$$\frac{d^2V}{dq_1^2} + \frac{b\sin q_1}{a + b\cos q_1}\frac{dV}{dq_1} + \frac{n^2 a}{a + b\cos q_1}V = 0. \tag{54}$$

Делая в уравнении (54) замену независимой переменной по формуле $1 + \cos q_1 = 2x$ в вводя обозначение $a = b\,(1 - 2x_0)$, перепишем данное уравнение в виде:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2\,(x-1)} - \frac{1}{x - x_0}\right)\frac{dV}{dx} + \frac{(2x_0 - 1)\,n^2}{2x\,(x-1)\,(x-x_0)}V = 0. \tag{55}$$

Уравнение (55) представляет собой линейное дифференциальное уравнение Гойна [4]. Таким образом, справедливо следующее утверждение

Теорема 14. Решение задачи о качении шара по поверхности вращения такой, что при качении центр шара принадлежит поверхности тора, выражается с помощью функций Гойна. □

Пусть теперь поверхность, по которой катится шар, такова, что при качении шара по этой поверхности его центр принадлежит поверхности псевдосферы, называемой также поверхностью Бельтрами. Функции $\rho = \rho\,(q_1)$ и $\zeta = \zeta\,(q_1)$, параметрически задающие меридиан соответствующей поверхности вращения, имеют вид:

$$\rho\,(q_1) = a\sin q_1, \qquad \zeta\,(q_1) = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{q_1}{2} + \cos q_1\right),$$

где a – некоторая положительная постоянная. Тогда линейное дифференциальное уравнение второго порядка (50) запишется в виде

$$\frac{d^2V}{dq_1^2} - \frac{\cos q_1}{\sin q_1}\frac{dV}{dq_1} + \frac{n^2}{\sin^2 q_1}V = 0. \tag{56}$$

В дифференциальном уравнении (56) сделаем замену независимой переменной по формуле $\sin^2 q_1 = x$. Тогда уравнение (56) примет вид уравнения с рациональными коэффициентами

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{1}{2\,(x-1)}\frac{dV}{dx} - \frac{n^2}{4x^2\,(x-1)}V = 0. \tag{57}$$

Применение алгоритма Ковачича к линейному дифференциальному уравнению (57) приводит к следующему результату.

Теорема 15. Общее решение линейного дифференциального уравнения (57) выражается через лиувиллевы функции при любых значениях параметров задачи. □

Таким образом, задача о качении шара по поверхности такой, что при качении центр шара движется по поверхности псевдосферы, является интегрируемой в лиувиллевых функциях.

Рассмотрим, наконец, задачу о качении шара по поверхности такой, что при качении центр шара принадлежит поверхности катеноида. В этом случае функции $\rho = \rho(q_1)$ и $\zeta = \zeta(q_1)$, параметрически задающие меридиан поверхности катеноида вращения, имеют вид:

$$\rho(q_1) = a \operatorname{ch} q_1, \quad \zeta = aq_1,$$

где a – некоторая положительная постоянная. Тогда линейное дифференциальное уравнение второго порядка (50) записывается в виде

$$\frac{d^2V}{dq_1^2} + \frac{2n^2}{\operatorname{ch}^2 q_1} V = 0. \tag{58}$$

В дифференциальном уравнении (58) сделаем замену независимой переменной по формуле $\operatorname{ch}^2 q_1 = x$ и приведем его к виду уравнения с рациональными коэффициентами

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{2x-1}{2(x-1)} \frac{dV}{dx} + \frac{n^2}{2x^2(x-1)} V = 0. \tag{59}$$

При помощи алгоритма Ковачича в работе доказано, что дифференциальное уравнение (59) не имеет лиувиллевых решений. Однако удается установить, с помощью каких функций записывается общее решение дифференциального уравнения (59). Сделаем в этом уравнении замену переменных по формуле $V(x) = x^{\frac{1}{4}} W(x)$. Тогда дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $W(x)$, будет иметь вид:

$$x^2 \frac{d^2W}{dx^2} + \frac{(3x-2)x}{2(x-1)} \frac{dW}{dx} + \frac{x+1+8n^2}{16(x-1)} W = 0. \tag{60}$$

Делая теперь в уравнении (60) замену независимой переменной по формуле $z = \sqrt{1-x}$, приведем его к виду

$$\left(1-z^2\right) \frac{d^2W}{dz^2} - 2z \frac{dW}{dz} + \frac{z^2 - 2 - 8n^2}{4(1-z^2)} W = 0. \tag{61}$$

Уравнение (61) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка, называемое уравнением Лежандра. Его общее решение выражается через функции Лежандра. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 16. Решение задачи о качении шара по поверхности такой, что при качении центр шара принадлежит поверхности катеноида вращения, выражается с помощью функций Лежандра. □

В последней, **пятой главе** диссертации рассмотрена задача о качении тела вращения по поверхности сферы. Предполагается, что приложенные к твердому телу силы имеют равнодействующую, приложенную к центру масс S тела, направленную к центру O опорной сферы, и зависящую только от расстояния между точками S и O. Введем четыре системы координат (в скобках указаны единичные векторы осей):

$Ox_1y_1z_1$ $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ – неподвижная система координат с началом в центре опорной сферы;

$Sxyz$ $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ – система координат, жестко связанная с движущимся твердым телом; ее начало выбрано в центре масс S движущегося тела, а оси направлены по главным осям инерции;

$Puvn$ $(\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v, \boldsymbol{e}_n)$ – подвижная система координат с началом в точке контакта P тела с опорной сферой и осями, направленными по касательным к координатным линиям и по нормали к поверхности тела;

$Pu_1v_1n_1$ $(\boldsymbol{e}_{u_1}, \boldsymbol{e}_{v_1}, \boldsymbol{e}_{n_1})$ – подвижная система координат, оси которой направлены по касательным к координатным линиям и по нормали к опорной сфере.

Положение точки контакта P на поверхности тела определяется радиусом-вектором

$$\boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{SP} = x\,(u, v)\,\boldsymbol{e}_1 + y\,(u, v)\,\boldsymbol{e}_2 + z\,(u, v)\,\boldsymbol{e}_3,$$

где u и v – гауссовы криволинейные координаты точки P на поверхности тела. Коэффициенты первых двух квадратичных форм поверхности катящегося тела обозначим E, F, G и L, M, N соответственно. Будем считать, что координатные линии на поверхности тела совпадают с ее линиями кривизны, поэтому $F = 0$, $M = 0$.

Сферическая поверхность радиуса R_1, по которой движется твердое тело, задается уравнениями:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_1 = \overrightarrow{OP} &= x_1\boldsymbol{e}_x + y_1\boldsymbol{e}_y + z_1\boldsymbol{e}_z = \\ &= R_1 \sin u_1 \cos v_1 \boldsymbol{e}_x + R_1 \sin u_1 \sin v_1 \boldsymbol{e}_y + R_1 \cos u_1 \boldsymbol{e}_z, \end{aligned}$$

где u_1 и v_1 – гауссовы криволинейные координаты точки P на сфере. Для единичных базисных векторов $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}_{u_1}$, $\boldsymbol{e}_{v_1}$, $\boldsymbol{e}_{n_1}$ имеем следующие формулы

$$\begin{gathered} \boldsymbol{e}_u = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial u}, \quad \boldsymbol{e}_v = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial v}, \quad \boldsymbol{e}_n = [\boldsymbol{e}_u \times \boldsymbol{e}_v]\,; \\ \boldsymbol{e}_{u_1} = \frac{1}{R_1}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_1}{\partial u_1}, \quad \boldsymbol{e}_{v_1} = \frac{1}{R_1\sin u_1}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_1}{\partial v_1}, \quad \boldsymbol{e}_{n_1} = [\boldsymbol{e}_{u_1} \times \boldsymbol{e}_{v_1}]\,. \end{gathered} \tag{62}$$

Выражения единичных базисных векторов $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_n$ через $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ можно записать в виде

$$\boldsymbol{e}_u = c_{11}\boldsymbol{e}_1 + c_{12}\boldsymbol{e}_2 + c_{13}\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_v = c_{21}\boldsymbol{e}_1 + c_{22}\boldsymbol{e}_2 + c_{23}\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_n = c_{31}\boldsymbol{e}_1 + c_{32}\boldsymbol{e}_2 + c_{33}\boldsymbol{e}_3,$$

причем коэффициенты $c_{i\,j}$ легко вычисляются, если воспользоваться формулами (62).

Будем определять положение тела гауссовыми координатами u, v, u_1, v_1, и углом θ между осями Pu и Pv_1. Предположим, что тело катится по опорной сфере без проскальзывания. Это условие приводит к тому, что на систему накладываются две неголономные связи, имеющие вид:

$$R_1\dot{u}_1 = -\sqrt{E}\dot{u}\sin\theta + \sqrt{G}\dot{v}\cos\theta, \quad R_1\dot{v}_1\sin u_1 = \sqrt{E}\dot{u}\cos\theta + \sqrt{G}\dot{v}\sin\theta. \tag{63}$$

Пусть векторы скорости $\boldsymbol{w}$ центра масс S и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела задаются в системе координат $Sxyz$ компонентами w_1, w_2, w_3 и ω_1, ω_2, ω_3 соответственно. Из условия того, что точка касания P тела находится в мгновенном покое, получим формулы, связывающие компоненты векторов $\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{\omega}$:

$$w_1 + \omega_2 z - \omega_3 y = 0,\ w_2 + \omega_3 x - \omega_1 z = 0,\ w_3 + \omega_1 y - \omega_2 x = 0, \tag{64}$$

а для компонент ω_1, ω_2, ω_3 вектора $\boldsymbol{\omega}$ справедливы следующие формулы:

$$\begin{gathered} \omega_1 = c_{11}\tau\dot{v} + c_{21}\sigma\dot{u} + c_{31}n, \quad \omega_2 = c_{12}\tau\dot{v} + c_{22}\sigma\dot{u} + c_{32}n, \\ \omega_3 = c_{13}\tau\dot{v} + c_{23}\sigma\dot{u} + c_{33}n, \end{gathered} \tag{65}$$

$$\begin{gathered} \tau = -\left(\frac{N}{G} - \frac{1}{R_1}\right)\sqrt{G}, \quad \sigma = \left(\frac{L}{E} - \frac{1}{R_1}\right)\sqrt{E}, \\ n = -\dot{\theta} + \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\dot{u} - \frac{\partial G}{\partial u}\dot{v}\right) - \dot{v}_1\cos u_1. \end{gathered} \tag{66}$$

Будем предполагать, что силы, действующие на твердое тело, имеют потенциал, и что потенциальная энергия V зависит лишь от координат u и v точки касания P. Такой случай будет иметь место, например, когда приложенные к твердому телу силы имеют равнодействующую, приложенную к центру масс S тела, направленную к центру O сферы и зависящую только от расстояния между S и O. Итак, пусть $V = V(u, v)$.

Пусть $\Theta = \Theta(\dot{u}, \dot{v}, u, v, n)$ – кинетическая энергия системы, вычисленная с учетом неголономных связей (63) и соотношений (64)-(66). Она может быть представлена следующим образом:

$$\Theta(\dot{u}, \dot{v}, u, v, n) = \frac{1}{2}\left(K_{11}\dot{u}^2 + 2K_{12}\dot{u}\dot{v} + K_{22}\dot{v}^2 + K_{33}n^2 + 2\left(K_{13}\dot{u} + K_{23}\dot{v}\right)n\right),$$

где коэффициенты K_{ij} являются функциями переменных u и v. Если мы обозначим через m массу движущегося тела и через ρ и ε расстояния от центра масс S тела до точки касания P и до касательной плоскости к поверхности тела в точке P

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \varepsilon = xc_{31} + yc_{32} + zc_{33},$$

то мы можем записать уравнения движения тела в таком виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{u}}\right) - \frac{\partial\Theta}{\partial u} = \sqrt{EG}\left(\frac{LN}{EG} - \frac{1}{R_1^2}\right)\frac{\partial\Theta}{\partial n}\dot{v} + \frac{\sqrt{E}}{R_1}\frac{1}{\tau}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{v}}n - \\
&\qquad - m\rho\frac{\partial\rho}{\partial u}n^2 - m\varepsilon\sqrt{EG}\left(\frac{N}{G} - \frac{1}{R_1}\right)n\dot{v} - \frac{\partial V}{\partial u}, \\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{v}}\right) - \frac{\partial\Theta}{\partial v} = -\sqrt{EG}\left(\frac{LN}{EG} - \frac{1}{R_1^2}\right)\frac{\partial\Theta}{\partial n}\dot{u} + \frac{\sqrt{G}}{R_1}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{u}}n - \\
&\qquad - m\rho\frac{\partial\rho}{\partial v}n^2 + m\varepsilon\sqrt{EG}\left(\frac{L}{E} - \frac{1}{R_1}\right)n\dot{u} - \frac{\partial V}{\partial v}, \\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial n}\right) = -\frac{\sqrt{G}}{R_1}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{u}}\dot{v} - \frac{\sqrt{E}}{R_1}\frac{1}{\tau}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{v}}\dot{u} + m\rho\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial\rho}{\partial v}\dot{v}\right)n - \\
&\qquad - m\varepsilon\frac{LG - NE}{\sqrt{EG}}\dot{u}\dot{v}.
\end{aligned} \tag{67}$$

Присоединяя к этим уравнениям уравнение (66) и уравнения связей (63), получим систему шести уравнений, из которой определяются все неизвестные u, v, n, θ, u_1, v_1 как функции времени.

Предположим теперь, что твердое тело, катящееся по сфере, является телом вращения, то есть его моменты инерции A_1 и A_2 относительно осей Sx и Sy равны между собой ($A_1 = A_2$), а поверхность, ограничивающая твердое тело, является поверхностью вращения вокруг оси Sz:

$$x = f(u)\cos v, \quad y = f(u)\sin v, \quad z = g(u). \tag{68}$$

Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial\rho}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial v} = 0,$$

и, кроме того, в выражении для кинетической энергии $\Theta(\dot{u}, \dot{v}, u, v, n)$ будем иметь

$$K_{12} = 0, \quad K_{13} = 0$$

а все остальные коэффициенты K_{ij} будут функциями только переменной u. В этом случае два последних уравнения системы (67) дают:

$$\frac{d}{dt}\left(K_{23}n + K_{22}\dot{v}\right) = \left(a_1 n + b_1\dot{v}\right)\dot{u}, \quad \frac{d}{dt}\left(K_{33}n + K_{23}\dot{v}\right) = \left(a_2 n + b_2\dot{v}\right)\dot{u}, \tag{69}$$

где коэффициенты K_{22}, K_{23}, K_{33}, a_1, a_2, b_1, b_2 являются функциями только переменной u. Переходя в уравнениях (69) к новой независимой переменной u, приведем уравнения (69) к виду

$$\frac{d}{du}\left(K_{23}n + K_{22}\dot{v}\right) = a_1 n + b_1\dot{v}, \quad \frac{d}{du}\left(K_{33}n + K_{23}\dot{v}\right) = a_2 n + b_2\dot{v}. \tag{70}$$

Система двух линейных уравнений первого порядка (70) сводится к одному линейному уравнению второго порядка. Если найти общее решение этого уравнения, то задача сводится к квадратурам.

Заметим, что в случае качения по сфере тела, ограниченного поверхностью (68), коэффициент $c_{23} = 0$, и следовательно, переменная $\dot{v}$ может быть выражена через переменные n и ω_3 – проекции угловой скорости на нормаль к поверхности тела и на ось динамической симметрии. Система уравнений (70) может быть представлена как система двух линейных уравнений относительно неизвестных n и ω_3, а из этой системы может быть получено одно линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно проекции ω_3 угловой скорости тела на его ось динамической симметрии. В случае движения по сфере неоднородного динамически симметричного шара радиуса R, поверхность которого задается уравнениями

$$x = R\sin u\cos v, \quad y = R\sin u\sin v, \quad z = R\cos u + a,$$

соответствующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$\frac{d^2\omega_3}{du^2} + f_1\frac{d\omega_3}{du} + f_2\omega_3 = 0, \tag{71}$$

$$f_1 = -\frac{2mR^2\left(A_3 - A_1\right)\sin^2 u\cos u + \left(3 - \cos^2 u\right)mRaA_3}{\left(A_1A_3 + A_1mR^2\sin^2 u + A_3m\left(R\cos u + a\right)^2\right)\sin u} +$$

$$+\frac{A_3\left(A_1 + mR^2 + ma^2\right)\cos u}{\left(A_1A_3 + A_1mR^2\sin^2 u + A_3m\left(R\cos u + a\right)^2\right)\sin u},$$

$$f_2 = \frac{mR^2\left(R_1^2 - R^2\right)\left(A_3 - A_1\right)\sin^2 u}{\left(A_1A_3 + A_1mR^2\sin^2 u + A_3m\left(R\cos u + a\right)^2\right)R_1^2}.$$

Сделаем в уравнении (71) замену независимой переменной по формуле $\cos u = x$. Тогда уравнение (71) перепишется в виде:

$$\frac{d^2\omega_3}{dx^2} + f_1\frac{d\omega_3}{dx} + f_2\omega_3 = 0, \tag{72}$$

$$f_1 = \frac{3\left(2x - x_1 - x_2\right)}{2\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)}, \quad f_2 = \frac{\left(R_1^2 - R^2\right)}{\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)R_1^2}.$$

Здесь x_1 и x_2 – корни уравнения

$$A_1A_3 + A_1mR^2\left(1 - x^2\right) + mA_3\left(Rx + a\right)^2 = 0.$$

Применение алгоритма Ковачича к линейному дифференциальному уравнению (72) приводит к следующему результату.

Теорема 17. Общее решение линейного дифференциального уравнения (72) выражается через лиувиллевы функции при любых значениях параметров задачи. □

Таким образом, задача о качении неоднородного динамически симметричного шара по сфере под действием потенциальных сил с потенциалом специального вида, интегрируется в лиувиллевых функциях.

В **заключении** еще раз сформулированы основные результаты и выводы диссертации.

Публикации по теме диссертации.

Монография.

1. Бардин Б.С., Кулешов А.С. Алгоритм Ковачича и его применение в задачах классической механики. М.: Издательство МАИ. 2020. 260 с.

Публикации в журналах из перечня ВАК и международных систем цитирования Web of Science, Scopus или RSCI.

2. Kuleshov A.S. On the Generalized Chaplygin Integral // Regular and Chaotic Dynamics. 2001. Vol. 6. № 2. P. 227–232.
3. Karapetyan A.V., Kuleshov A.S. Steady motions of nonholonomic systems // Regular and Chaotic Dynamics. 2002. Vol. 7. № 1. P. 81–117.
4. Кулешов А.С. Первые интегралы в задаче о качении тела вращения по шероховатой плоскости // Доклады РАН. 2003. Т. 391. № 3. С. 340–342. = Kuleshov A.S. First Integrals in the Problem of Rolling a Body of Revolution Over a Rough Plane // Doklady Physics. 2003. Vol. 48. № 7. P. 385–387.
5. Кулешов А.С. Первые интегралы в задаче о движении параболоида вращения по шероховатой плоскости // Доклады РАН. 2005. Т. 400. № 1. С. 46–48. = Kuleshov A.S. First Integrals in the Problem of the Motion of a Paraboloid of Revolution over a Rough Plane // Doklady Physics. 2005. Vol. 50. № 1. P. 37–39.
6. Кулешов А.С. О первых интегралах уравнений движения симметричного гиростата на абсолютно шероховатой плоскости // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. № 1. С. 40–45. = Kuleshov A.S. First Integrals of the Equations of Motion of a Symmetric Gyrostat on a Perfectly Rough Plane // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2006. Vol. 70. № 1. P. 36–41.
7. Dobrynin D.S., Kuleshov A.S. Solvable Cases in the Problem of Motion of a Heavy Rotationally Symmetric Ellipsoid on a Perfectly Rough Plane // Procedia IUTAM. 2016. Vol. 19. P. 161–168.
8. Кулешов А.С., Ифраимов С.В. О движении стержня по выпуклой поверхности // Вестник Санкт – Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2013. № 2. С. 105–110.
9. Ифраимов С.В., Кулешов А.С. О движении саней Чаплыгина по выпуклой поверхности // Автоматика и телемеханика. 2013. № 8. С. 80–90. = Ifraimov S.V., Kuleshov A.S. On the Motion of Chaplygin's Sledge over Convex Surface // Automation and Remote Control. 2013. Vol. 74. № 8. P. 1297–1306.

10. Кулешов А.С., Черняков Г.А. Применение алгоритма Ковачича для исследования задачи о движении тяжелого тела вращения по абсолютно шероховатой плоскости // Вестник Санкт – Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2013. № 4. С. 93–102.
11. Кулешов А.С., Черняков Г.А. О качении параболоида вращения по неподвижной абсолютно шероховатой плоскости // Вестник Санкт – Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2014. Т. 59. № 4. С. 624–631.
12. Кулешов А.С., Ицкович М.О. Несуществование лиувиллевых решений в задаче о движении эллипсоида вращения по абсолютно шероховатой плоскости // Вестник Санкт – Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 62. № 2. С. 291–299. = Kuleshov A.S., Itskovich M.O. Nonexistence of Liouvillian Solutions in the Problem of Motion of a Rotationally Symmetric Ellipsoid on a Perfectly Rough Plane // Vestnik. St. Petersburg University. 2017. Vol. 50. № 2. P. 173–179.
13. Karapetyan A.V., Kuleshov A.S. The Routh theorem for mechanical systems with unknown first integrals // Theoretical and Applied Mechanics. 2017. Vol. 44. № 2. P. 169–180.
14. Кулешов А.С., Черняков Г.А. Исследование задачи о движении тяжелого тела вращения по абсолютно шероховатой плоскости с помощью алгоритма Ковачича // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. 2018. Т. 145. С. 3–85. = Kuleshov A.S., Chernyakov G.A. Investigation of the Motion of a Heavy Body of Revolution on a Perfectly Rough Plane by the Kovacic Algorithm // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 245. № 4. P. 417–497.
15. Кулешов А.С., Катасонова В.А. О существовании лиувиллевых решений в задаче о качении динамически симметричного шара по сфере // Вестник Санкт – Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 63. № 4. С. 670–677. = Kuleshov A.S., Katasonova V.A. Existence of Liouvillian Solutions in the Problem of Rolling Motion of a Dynamically Symmetric Ball on a Perfectly Rough Sphere // Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. 2018. Vol. 51. № 4. P. 407–412.
16. Kuleshov A.S., Katasonova V.A. Existence of Liouvillian Solutions in the Problem of Motion of a Rotationally Symmetric Body on a Sphere // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. № 030015. P. 030015-1–030015-5.

17. Кулешов А.С., Соломина Д.В. Применение алгоритма Ковачича для исследования задачи о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения // Проблемы информатики. 2021. № 1. С. 15–24.
18. Кулешов А.С., Соломина Д.В. Лиувиллевы решения в задаче о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения // Вестник Санкт – Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8. № 4. С. 653–660. = Kuleshov A.S., Solomina D.V. Liouvillian Solutions in the Problem of Rolling of a Heavy Homogeneous Ball on a Surface of Revolution // Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. 2021. Vol. 54. № 4. P. 405–410.
19. Bardin B.S., Kuleshov A.S. Application of the Kovacic algorithm for the investigation of motion of a heavy rigid body with a fixed point in the Hess case // ZAMM. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2022. Vol 102. № 11.
20. Кулешов А.С. О приведении некоторых систем классической механики к системам Лиувилля // Труды МАИ. 2023. № 128. https://trudymai.ru/published.php?ID=171383
21. Кулешов А.С., Шишков А.А. Об интегрируемости в квадратурах задачи о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения второго порядка // Вестник Санкт – Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11. № 2. С. 347–353. = Kuleshov A.S., Shishkov A.A. On the Integrability in Quadratures of the Problem of Rolling a Heavy Homogeneous Ball on a Surface of Revolution of the Second Order // Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. 2024. Vol. 57. № 2. P. 236–240.
22. Кулешов А.С., Лобанова Е.В. Анализ интегрируемого случая Гесса в задаче о движении шара по гладкой горизонтальной плоскости // Труды МАИ. 2024. № 135. https://trudymai.ru/published.php?ID=179675
23. Косенко И.И., Кулешов А.С., Шишков А.А. Задача о качении шара по поверхности вращения и её численный анализ // Труды МАИ. 2024. № 136. https://trudymai.ru/published.php?ID=180666

Прочие работы.

24. Кулешов А.С. О первых интегралах уравнений движения тяжелого тела вращения на абсолютно шероховатой плоскости // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2002. № 68. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша. 19 с.
25. Кулешов А.С. О первых интегралах уравнений симметричного гиростата на абсолютно шероховатой плоскости // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2003. № 47. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша. 20 с.
26. Кулешов А.С., Зуева Д.С. К задаче о движении тела вращения по сфере // Динамические системы. 2018. Т. 8. № 1. С. 23–30.
27. Бардин Б.С., Кулешов А.С. Применение алгоритма Ковачича для исследования случая Гесса в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // Динамические системы. 2020. Т. 10. № 2. С. 197–204.
28. Кулешов А.С. Применение алгоритма Ковачича для исследования движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. 2021. Т. 202. С. 10–42.
29. Kuleshov A.S. On the first integrals of equations of motions of a heavy rotational symmetric body on a perfectly rough plane // Proceedings of the XXXI Summer School – Conference «Advanced Problems in Mechanics». St. Petersburg Polytechnical University Publishing. 2003. P. 213–220.
30. Кулешов А.С. О первых интегралах уравнений движения тяжелого тела вращения на шероховатой плоскости // Механика твердого тела. Межведомственный сборник научных трудов. 2004. Т. 34. С. 72–79.
31. Kuleshov A.S. First Integrals of Equations of Motion of a Heavy Rotational Symmetric Body on a Perfectly Rough Plane // Proceedings of the IUTAM Symposium on Multiscale Problems in Multibody System Contacts. Stuttgart, Germany, February 20–23, 2006. Springer. P. 103–110.
32. Chernyakov G.A., Kuleshov A.S. Investigation of the problem of motion of a heavy dynamically symmetric body on a perfectly rough plane by the Kovacic algorithm // Proceedings of the XLI Summer School–Conference «Advanced Problems in Mechanics». St. Petersburg Polytechnical University Publishing. 2013. P. 310–320.

33. Chernyakov G.A., Kuleshov A.S. Motion of a Rotationally Symmetric Paraboloid on a Perfectly Rough Plane // Proceedings of the XLII Summer School – Conference «Advanced Problems in Mechanics». St. Petersburg Polytechnical University Publishing. 2014. P. 177–183.
34. Chernyakov G.A., Kuleshov A.S. Investigation of the Problem of Motion of a Heavy Dynamically Symmetric Body on a Perfectly Rough Plane by the Kovacic algorithm // Proceedings of the 8th European Nonlinear Dynamics Conference ENOC – 2014. Vienna: Institute of Mechanics and Mechatronics. Vienna University of Technology. 2014. P. 453–458.
35. Кулешов А.С., Добрынин Д.С., Черняков Г.А. Исследование задачи о движении тяжелого тела вращения по шероховатой плоскости методом Ковачича // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов (Казань, 20 – 24 августа 2015 года). Казань: Изд-во Казанского университета. 2015. С. 2160–2161.
36. Ицкович М.О., Кулешов А.С. Лиувиллевы решения в задаче о качении эллипсоида вращения по абсолютно шероховатой плоскости // Аналитическая механика, устойчивость и управление. Труды XI Международной Четаевской конференции. Казань, 13 – 17 июня 2017 года. Казань: КНИТУ — КАИ. 2017. Т. 1. С. 214 – 224.
37. Kuleshov A.S. Application of the Kovacic algorithm to the Problem of Motion of a Heavy Rigid Body with a Fixed Point in a Hess Case // IEEE Proceeding of 2020 15th International Conference «Stability and Oscillations of Nonlinear Control System» (Pyatnitskiy's Conference). IEEE. 2020. P. 1–2.
38. Кулешов А.С. Лиувиллевы решения в задаче о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения // IX Поляховские чтения: Материалы международной научной конференции по механике, 9 – 12 марта 2021 года. Санкт – Петербург: Изд-во ВВМ. 2021. С. 112–113.
39. Кулешов А.С., Катасонова В.А. О существовании лиувиллевых решений в задаче о качении тела вращения по сфере // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4-х томах. Т. 1. Общая и прикладная механика. Уфа: РИЦ БашГУ. 2019. С. 110–111.
40. Kuleshov A.S., Dobrynin D.S. Motion of a Rotationally Symmetric Ellipsoid on a Fixed Perfectly Rough Horizontal Plane // Proceeding of the IEEE International Conference on Mechanics «Seventh Polyakhov's Reading». IEEE. 2015. P. 1–4.

41. Kuleshov A.S., Katasonova V.A. Liouvillian Solutions in the Problem of Motion of a Dynamically Symmetric Body on a Sphere // IEEE Proceeding of 2018 14th International Conference «Stability and Oscillations of Nonlinear Control System» (Pyatnitskiy's Conference). IEEE. 2018. P. 1–3.
42. Кулешов А.С., Соломина Д.В. Применение алгоритма Ковачича для исследования задачи о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. Труды XX Международной конференции, Нижний Новгород, 23 – 27 ноября 2020 года. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ. 2020. С. 228–233.
43. Kuleshov A.S., Solomina D.V. Application of the Kovacic algorithm to the Problem of Rolling of a Heavy Homogeneous Ball on a Surface of Revolution // MMST 2020. Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. Communications in Computer and Information Sciences. 2021. Vol. 1413. P. 169–177.
44. Кулешов А.С., Шишков А.А. О качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения второго порядка и по тору // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. Труды XXIII Международной конференции, Нижний Новгород, 13 – 16 ноября 2023 года. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ. 2023. С. 93–97.

Список цитируемых источников.

1. *Kovacic J.* An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations // Journal of Symbolic Computation. 1986. V. 2. P. 3–43.
2. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1897. Т. 9. Вып. 1. С. 10–16.
3. *Муштари Х.М.* О катании тяжелого твердого тела вращения по неподвижной горизонтальной плоскости // Математический сборник. 1932. Т. 39. № 1-2. С. 105-126.
4. *Ronveaux A.* Heun's Differential Equations. Oxford. Oxford University Press. 1995.
5. *Hess W.* Ueber die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // Mathematische Annalen. 1890. Bd. 37. Heft 2. S. 153–181.