УДК 621.391

Анализ систем с переменной структурой в классе обобщенных характеристических функций

К.А. Рыбаков, И.Л. Сотскова

Рассматривается новый подход к решению задачи теоретико-вероятностного анализа многомерных стохастических систем с переменной структурой, т.е. систем, для которых характерно скачкообразное изменение отдельных параметров или структуры в целом. Предлагается использование спектральной формы математического описания систем [2,5,6,7]. В работе приведены уравнения и алгоритм решения задачи в спектральной области.

Постановка задачи

Система описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито:

$$\begin{aligned} &dX = f^{<k>}\left(t, X(t)\right)dt + \sigma^{<k>}\left(t, X(t)\right)dW(t), \\ &k = 1,2,...,N, \\ &X(t_0) = X_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $X \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $W(t)$ – α -мерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от X_0; $f^{<k>}(t,x)$ – вектор-функции размера $n \times 1$, $\sigma^{<k>}(t,x)$ – матричная функция размера $n \times \alpha$, k – номер структуры, N – число структур мультиструктурной системы, $t \in T = [t_0, t_1]$.

Начальное состояние системы X_0 задается плотностью вероятности $p_0^{<k>}(x)$ ($k = 1,2,...,N$).

Поглощение реализаций случайного процесса при переходе от k-ой структуры к r-ой характеризуется функцией $v_{kr}(t,x)$, а восстановление реализаций из r-ой структуры в k-ую функцией $u_{rk}(t,x)$ соответственно, и в общем случае они определяются так:

$$v_{kr}(t,x) = V_{kr}(t,x)\, p^{<k>}(t,x),\; u_{rk}(t,x) = U_{rk}(t,x)\, p^{<r>}(t,x), \tag{2}$$

где $V_{kr}(t,x)$ и $U_{rk}(t,x)$ – некоторые безынерционные линейные операторы, $p^{<k>}(t,x) = p(t,x,k)$ – совместная плотность вероятности смешанного вектора состояния $\begin{pmatrix} X & K \end{pmatrix}^T$, состоящего из компонент вектора состояния и номера структуры.

Функции $v_{kr}(t,x)$ образуют матричную функцию поглощения с нулевыми диагональными элементами, а $u_{rk}(t,x)$ – матричную функцию восстановления (также с нулевыми диагональными элементами):

$$v(t,x)=\begin{pmatrix} 0 & v_{12}(t,x) & \ldots & v_{1N}(t,x) \\ v_{21}(t,x) & 0 & \ldots & v_{2N}(t,x) \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ v_{N1}(t,x) & v_{N2}(t,x) & \ldots & 0 \end{pmatrix},\ u(t,x)=\begin{pmatrix} 0 & u_{21}(t,x) & \ldots & u_{N1}(t,x) \\ u_{12}(t,x) & 0 & \ldots & u_{N2}(t,x) \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ u_{1N}(t,x) & u_{2N}(t,x) & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

В случае восстановления реализаций случайного процесса без потерь выполняется равенство $v(t,x)=u^{T}(t,x)$.

Классификация систем с переменной структурой и возможные аналитические выражения для функций поглощения и восстановления подробно рассмотрены в [1].

Задача теоретико-вероятностного анализа состоит в следующем: по заданному уравнению системы (1), операторам $V_{kr}(t,x)$ и $U_{rk}(t,x)$ и распределению начального состояния найти совместную плотность вероятности $p^{<k>}(t,x)$ ($k,r=1,2,\ldots,N$).

Уравнения для плотностей вероятности

Совместная плотность вероятности $p^{<k>}(t,x)$ удовлетворяет обобщенному уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) [1]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left(p^{<k>}(t,x)\right)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_i^{<k>}(t,x)\,p^{<k>}(t,x)\right)+\\ +\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(g_{ij}^{<k>}(t,x)\,p^{<k>}(t,x)\right)-\sum_{r=1}^{N}v_{kr}(t,x)+\sum_{r=1}^{N}u_{rk}(t,x),\\ k=1,2,\ldots,N,\end{gathered}\tag{3}$$

в котором $g_{ij}^{<k>}(t,x)=\sum_{r=1}^{\alpha}\sigma_{ir}^{<k>}(t,x)\sigma_{jr}^{<k>}(t,x)$ – элементы матрицы диффузии.

Начальные и краевые условия для обобщенного уравнения ФПК:

$$\begin{gathered}p^{<k>}(t,x)\Big|_{t=t_0}=p_0^{<k>}(x),\\ p^{<k>}(t,x)\Big|_{x=\pm\infty}=0,\\ k=1,2,\ldots,N.\end{gathered}\tag{4}$$

Вероятность нахождения системы в k-ом состоянии (структуре) $P^{<k>}(t)$ вычисляется так:

$$P^{<k>}(t)=\int_{\mathbb{R}^n}p^{<k>}(t,x)\,dx,$$

и совместная плотность вероятности удовлетворяет условию нормировки:

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^n} p^{<k>}(t,x)\,dx = \sum_{k=1}^{N} P^{<k>}(t) = 1.$$

Таким образом, исходная задача сводится к системе дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа (3) с начальным условием и условиями на границе (4). Для решения задачи (3), (4) применим математический аппарат спектрального метода, использование которого позволяет свести исходную систему дифференциальных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений и получить решение в явном виде.

Анализ систем с переменной структурой в спектральной области

В основе спектрального метода лежит представление функций совокупностью коэффициентов разложения в обобщенный ряд Фурье. Произвольной функции $h(t,x) \in L_2(\Omega)$ соответствует гипервектор $H(n+1,0)$, а оператору $\mathcal{A}$, определенному на пространстве $L_2(\Omega)$, соответствует многомерная матрица $A(n+1,n+1)$:

$$\mathcal{S}\left[h(t,x)\right] = \left\{H_m\right\},\ H_m = \left(h, e_m\right)_{L_2(\Omega)},$$

$$\mathcal{S}\left[\mathcal{A}\right] = \left\{A_{ml}\right\},\ A_{ml} = \left(\mathcal{A} e_l, e_m\right)_{L_2(\Omega)},$$

где $\{e_m\}$ – ортонормированный базис пространства $L_2(\Omega)$, $\Omega = T \times \mathbb{R}^n$, $m,l = (j,i_1,\ldots,i_n)$ – мультииндексы ($j,i_1,\ldots,i_n = 0,1,\ldots$). Через $M(p,q)$ обозначается многомерная матрица [4] размерности $p+q$, имеющая p строчных и q столбцовых индексов. При таких обозначениях плоская матрица записывается как $M(1,1)$, а вектор-столбец – $V(1,0)$.

Если $\left\{q(j,t)\right\}_{j=0}^{\infty}$ – ортонормированный базис пространства $L_2(T)$, $\left\{p_1(i_1,x_1)\right\}_{i_1=0}^{\infty}$, …, $\left\{p_n(i_n,x_n)\right\}_{i_n=0}^{\infty}$ – ортонормированные базисы пространства $L_2(\mathbb{R})$, то

$$\left(h, e_m\right)_{L_2(\Omega)} = \int_T dt \int_{\mathbb{R}^n} h(t,x)\, q(j,t)\, p(i,x)\,dx,$$

где $p(i,x) = p_1(i_1,x_1)\ldots p_n(i_n,x_n)$ – базис пространства $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Обратное спектральное преобразование определяется следующим образом:

$$h(t,x) = \mathcal{S}\left[H\right] = \sum_m H_m e_m = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty} H_{j,i_1,\ldots,i_n}\, q(j,t)\, p_1(i_1,x_1)\ldots p_n(i_n,x_n).$$

Аналогом обобщенного уравнения ФПК (2) в спектральной области является уравнение обобщенной характеристической функции [6,7]:

$$
\begin{aligned}
&P^{t}\left(n+1,n+1\right)\cdot \Phi^{<k>}\left(n+1,0\right)-q\left(1,0;t_0\right)\otimes \Phi_0^{<k>}\left(n,0\right)=\\
&=-\sum_{i=1}^{n}P_i^{x}\left(n+1,n+1\right)\cdot F_i^{<k>}\left(n+1,n+1\right)\cdot \Phi^{<k>}\left(n+1,0\right)+\\
&+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}P_{ij}^{xx}\left(n+1,n+1\right)\cdot G_{ij}^{<k>}\left(n+1,n+1\right)\cdot \Phi^{<k>}\left(n+1,0\right)-\\
&-\sum_{r=1}^{N}V_{kr}\left(n+1,n+1\right)\cdot \Phi^{<k>}\left(n+1,0\right)+\sum_{r=1}^{N}U_{rk}\left(n+1,n+1\right)\cdot \Phi^{<r>}\left(n+1,0\right),\\
&k=1,2,...,N,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $P^{t}\left(n+1,n+1\right)$ соответствует оператору $\frac{\partial}{\partial t}\left[\cdots\right]$, а $P_i^{x}\left(n+1,n+1\right)$ и $P_{ij}^{xx}\left(n+1,n+1\right)$ операторам $\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\cdots\right]$ и $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[\cdots\right]$; $F_i^{<k>}\left(n+1,n+1\right)$ и $G_{ij}^{<k>}\left(n+1,n+1\right)$ – многомерные нестационарные передаточные функции [6,7] усилительных звеньев с коэффициентами усиления $f_i^{<k>}\left(t,x\right)$ и $g_{ij}^{<k>}\left(t,x\right)$; $\Phi^{<k>}\left(n+1,0\right)$ – обобщенная характеристическая функция [6,7] (нестационарная спектральная характеристика [5] искомой плотности вероятности), $\Phi_0^{<k>}\left(n,0\right)$ – нестационарная спектральная характеристика функции $p_0^{<k>}\left(x\right)$; $q\left(1,0;t_0\right)$ – вектор значений базисных функций пространства $L_2\left(T\right)$ в точке t_0; $V_{kr}\left(n+1,n+1\right)$ и $U_{rk}\left(n+1,n+1\right)$ многомерные нестационарные передаточные функции, соответствующие операторам $V_{kr}\left(t,x\right)$ и $U_{rk}\left(t,x\right)$.

Приведем также явный вид операторов $P^{t}\left(n+1,n+1\right)$, $P_i^{x}\left(n+1,n+1\right)$, $P_{ij}^{xx}\left(n+1,n+1\right)$:

$$P^{t}\left(n+1,n+1\right)=P\left(1,1\right)\otimes \overbrace{E\left(1,1\right)\otimes ...\otimes E\left(1,1\right)}^{n},$$

$$P_i^{x}\left(n+1,n+1\right)=E\left(1,1\right)\otimes \overbrace{E\left(1,1\right)\otimes ...\otimes \underbrace{\left(-\mathrm{P}^{T}\left(1,1\right)\right)}_{i}\otimes ...\otimes E\left(1,1\right)}^{n},$$

$$P_{ij}^{xx}\left(n+1,n+1\right)=E\left(1,1\right)\otimes \overbrace{E\left(1,1\right)\otimes ...\otimes \underbrace{\left(-\mathrm{P}^{T}\left(1,1\right)\right)}_{i}\otimes ...\otimes \underbrace{\left(-\mathrm{P}^{T}\left(1,1\right)\right)}_{j}\otimes ...\otimes E\left(1,1\right)}^{n},$$

где $P\left(1,1\right)$ – двумерная нестационарная передаточная функция дифференцирующего звена первого рода [5] в базисе пространства $L_2\left(T\right)$, $\mathrm{P}\left(1,1\right)$ – двумерная нестационарная передаточная функция дифференцирующего звена второго рода [5] в базисе пространства $L_2\left(\mathbb{R}\right)$, $E\left(1,1\right)$ – плоская единичная матрица.

Систему (5) можно переписать следующим образом:

$$
\begin{cases}
A_{11}(n+1,n+1)\cdot \Phi^{<1>}(n+1,0)+\ldots+A_{1N}(n+1,n+1)\cdot \Phi^{<N>}(n+1,0)= \\
\qquad = q(1,0;t_0)\otimes \Phi_0^{<1>}(n,0), \\
\ldots \\
A_{N1}(n+1,n+1)\cdot \Phi^{<1>}(n+1,0)+\ldots+A_{NN}(n+1,n+1)\cdot \Phi^{<N>}(n+1,0)= \\
\qquad = q(1,0;t_0)\otimes \Phi_0^{<N>}(n,0),
\end{cases} \tag{6}
$$

где

$$
A_{kr}(n+1,n+1)=\begin{cases}
P^{t}(n+1,n+1)+\sum_{i=1}^{n} P_i^{x}(n+1,n+1)\cdot F_i^{<k>}(n+1,n+1)- \\
\qquad -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} P_{ij}^{xx}(n+1,n+1)\cdot G_{ij}^{<k>}(n+1,n+1)+\sum_{r=1}^{N} V_{kr}(n+1,n+1),\ k=r, \\
-U_{rk}(n+1,n+1),\ k\neq r,
\end{cases}
$$

$k,r=1,2,\ldots,N.$

Обозначим через $A(n+2,n+2)$ многомерную матрицу, имеющую $n+2$ строчных и $n+2$ столбцовых индексов

$$
A(n+2,n+2)=\left(\begin{array}{c|c|c}
A_{11}(n+1,n+1) & \ldots & A_{1N}(n+1,n+1) \\
\hline
\ldots & & \ldots \\
\hline
A_{N1}(n+1,n+1) & \ldots & A_{NN}(n+1,n+1)
\end{array}\right), \tag{7}
$$

аналогично

$$
\Phi(n+2,0)=\left(\begin{array}{c}
\Phi^{<1>}(n+1,0) \\
\hline
\ldots \\
\hline
\Phi^{<N>}(n+1,0)
\end{array}\right),\ B(n+2,0)=\left(\begin{array}{c}
q(1,0;t_0)\otimes \Phi_0^{<1>}(n,0) \\
\hline
\ldots \\
\hline
q(1,0;t_0)\otimes \Phi_0^{<N>}(n,0)
\end{array}\right), \tag{8}
$$

тогда система (6) примет вид:

$$
A(n+2,n+2)\cdot \Phi(n+2,0)=B(n+2,0), \tag{9}
$$

и в этом случае решение задачи анализа в спектральной области можно явно выразить:

$$
\Phi(n+2,0)=A^{-1}(n+2,n+2)\cdot B(n+2,0). \tag{10}
$$

Для получения совместной плотности вероятности в пространственно-временной области применим формулу обратного спектрального преобразования:

$$
p^{<k>}(t,x)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty}\Phi_{j,i_1,\ldots,i_n}^{<k>} q_j(t)\, p_{i_1}(x_1)\ldots p_{i_n}(x_n),\quad k=1,2,\ldots,N. \tag{11}
$$

Целесообразно рассмотреть возможные частные случаи системы уравнений (6). Если система состоит из двух структур ($N=2$), то решение задачи анализа можно получить достаточно просто без перехода к многомерным матрицам более высокой размерности.

Рассмотрим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} A_{11}\left(n+1,n+1\right)\cdot \Phi^{<1>}\left(n+1,0\right)+A_{12}\left(n+1,n+1\right)\cdot \Phi^{<2>}\left(n+1,0\right)= q\left(1,0;t_0\right)\otimes \Phi_0^{<1>}\left(n,0\right), \\ A_{21}\left(n+1,n+1\right)\cdot \Phi^{<1>}\left(n+1,0\right)+A_{22}\left(n+1,n+1\right)\cdot \Phi^{<2>}\left(n+1,0\right)= q\left(1,0;t_0\right)\otimes \Phi_0^{<2>}\left(n,0\right). \end{cases} \quad (12)$$

Выражая $\Phi^{<2>}\left(n+1,0\right)$ из второго уравнения системы (12) и, подставляя в первое, получим, что

$$\Phi^{<1>}\left(n+1,0\right)=\left[A_{11}\left(n+1,n+1\right)-A_{12}\left(n+1,n+1\right)\cdot A_{22}^{-1}\left(n+1,n+1\right)\cdot A_{21}\left(n+1,n+1\right)\right]^{-1}\times$$
$$\times\left[q\left(1,0;t_0\right)\otimes \Phi_0^{<1>}\left(n,0\right)-A_{12}\left(n+1,n+1\right)\cdot A_{22}^{-1}\left(n+1,n+1\right)\cdot\left(q\left(1,0;t_0\right)\otimes \Phi_0^{<2>}\left(n,0\right)\right)\right],$$

аналогично получается выражение для $\Phi^{<2>}\left(n+1,0\right)$:

$$\Phi^{<2>}\left(n+1,0\right)=\left[A_{22}\left(n+1,n+1\right)-A_{21}\left(n+1,n+1\right)\cdot A_{11}^{-1}\left(n+1,n+1\right)\cdot A_{12}\left(n+1,n+1\right)\right]^{-1}\times$$
$$\times\left[q\left(1,0;t_0\right)\otimes \Phi_0^{<2>}\left(n,0\right)-A_{21}\left(n+1,n+1\right)\cdot A_{11}^{-1}\left(n+1,n+1\right)\cdot\left(q\left(1,0;t_0\right)\otimes \Phi_0^{<1>}\left(n,0\right)\right)\right].$$

Вторым важным случаем являются системы, в которых возможны только однонаправленные переходы между структурами. Подобные задачи возникают при анализе систем с возможными нарушениями (отказ оборудования). При такой постановке задачи матрица поглощения будет верхней треугольной, а матрица восстановления, соответственно, нижней треугольной, и тогда система (6) примет вид:

$$\begin{cases} A_{11}\left(n+1,n+1\right)\cdot \Phi^{<1>}\left(n+1,0\right)= q\left(1,0;t_0\right)\otimes \Phi_0^{<1>}\left(n,0\right), \\ A_{21}\left(n+1,n+1\right)\cdot \Phi^{<1>}\left(n+1,0\right)+A_{22}\left(n+1,n+1\right)\cdot \Phi^{<2>}\left(n+1,0\right)= \\ \qquad = q\left(1,0;t_0\right)\otimes \Phi_0^{<2>}\left(n,0\right), \\ \ldots \\ A_{N1}\left(n+1,n+1\right)\cdot \Phi^{<1>}\left(n+1,0\right)+\ldots+A_{NN}\left(n+1,n+1\right)\cdot \Phi^{<N>}\left(n+1,0\right)= \\ \qquad = q\left(1,0;t_0\right)\otimes \Phi_0^{<N>}\left(n,0\right). \end{cases} \quad (13)$$

Решение этой системы также возможно без перехода к многомерным матрицам более высокой размерности, оно заключается в последовательном выражении неизвестных $\Phi^{<k>}\left(n+1,0\right)$, начиная с $\Phi^{<1>}\left(n+1,0\right)$, т.е.

$$\Phi^{<1>}\left(n+1,0\right)=A_{11}^{-1}\left(n+1,n+1\right)\cdot\left(q\left(1,0;t_0\right)\otimes \Phi_0^{<1>}\left(n,0\right)\right),$$
$$\Phi^{<2>}\left(n+1,0\right)=A_{22}^{-1}\left(n+1,n+1\right)\cdot\left(q\left(1,0;t_0\right)\otimes \Phi_0^{<2>}\left(n,0\right)-A_{21}\left(n+1,n+1\right)\cdot \Phi^{<1>}\left(n+1,0\right)\right),$$
$$\ldots$$
$$\Phi^{<N>}\left(n+1,0\right)=A_{NN}^{-1}\left(n+1,n+1\right)\cdot\left(q\left(1,0;t_0\right)\otimes \Phi_0^{<N>}\left(n,0\right)-\sum_{r=1}^{N-1}A_{Nr}\left(n+1,n+1\right)\cdot \Phi^{<r>}\left(n+1,0\right)\right).$$

Третий случай – это системы, в которых возможны переходы только между соседними структурами, т.е. матрица (7) имеет трехдиагональную структуру и система (6) примет вид:

$$
\begin{cases}
A_{11}\left(n+1,n+1\right)\cdot \Phi^{<1>}\left(n+1,0\right)+A_{12}\left(n+1,n+1\right)\cdot \Phi^{<2>}\left(n+1,0\right)= q\left(1,0;t_0\right)\otimes \Phi_0^{<1>}\left(n,0\right),\\
A_{21}\left(n+1,n+1\right)\cdot \Phi^{<1>}\left(n+1,0\right)+A_{22}\left(n+1,n+1\right)\cdot \Phi^{<2>}\left(n+1,0\right)+\\
\quad + A_{23}\left(n+1,n+1\right)\cdot \Phi^{<3>}\left(n+1,0\right)= q\left(1,0;t_0\right)\otimes \Phi_0^{<2>}\left(n,0\right),\\
\ldots\\
A_{N,N-1}\left(n+1,n+1\right)\cdot \Phi^{<N-1>}\left(n+1,0\right)+A_{NN}\left(n+1,n+1\right)\cdot \Phi^{<N>}\left(n+1,0\right)=\\
\quad = q\left(1,0;t_0\right)\otimes \Phi_0^{<N>}\left(n,0\right).
\end{cases}
\tag{14}
$$

Решение (14) проводится в два этапа аналогично методу прогонки; прямой ход:

$$
\begin{cases}
\tilde{A}_{11}\left(n+1,n+1\right)=A_{11}\left(n+1,n+1\right),\\
\tilde{B}_{1}\left(n+1,0\right)=q\left(1,0;t_0\right)\otimes \Phi_0^{<1>}\left(n,0\right),\\
\tilde{A}_{kk}\left(n+1,n+1\right)=A_{kk}\left(n+1,n+1\right)-A_{k,k-1}\left(n+1,n+1\right)\cdot \tilde{A}^{-1}_{k-1,k-1}\left(n+1,n+1\right)\cdot A_{k-1,k}\left(n+1,n+1\right),\\
\tilde{B}_{k}\left(n+1,0\right)=q\left(1,0;t_0\right)\otimes \Phi_0^{<k>}\left(n,0\right)-A_{k,k-1}\left(n+1,n+1\right)\cdot \tilde{A}^{-1}_{k-1,k-1}\left(n+1,n+1\right)\cdot \tilde{B}_{k-1}\left(n+1,0\right),\\
k=2,3,\ldots,N.
\end{cases}
$$

Обратный ход:

$$
\begin{cases}
\Phi^{<N>}\left(n+1,0\right)=\tilde{A}^{-1}_{NN}\left(n+1,n+1\right)\cdot \tilde{B}_{N}\left(n+1,0\right),\\
\Phi^{<k-1>}\left(n+1,0\right)=\tilde{A}^{-1}_{k-1,k-1}\left(n+1,n+1\right)\cdot\left[\tilde{B}_{k-1}\left(n+1,0\right)-A_{k-1,k}\left(n+1,n+1\right)\cdot \Phi^{<k>}\left(n+1,0\right)\right],\\
k=N,\ldots,2.
\end{cases}
$$

Алгоритм решения задачи анализа спектральным методом

1. Выбрать систему базисных функций $\left\{q\left(j,t\right)\right\}_{j=0}^{\infty}$, $\left\{p_1\left(i_1,x_1\right)\right\}_{i_1=0}^{\infty}$, …, $\left\{p_n\left(i_n,x_n\right)\right\}_{i_n=0}^{\infty}$.
2. Найти спектральные характеристики всех элементов, входящих в обобщенное уравнение ФПК (3). В частности, двумерные нестационарные передаточные функции дифференцирующих звеньев, усилительных звеньев с соответствующими коэффициентами усиления.
3. Записать спектральный аналог обобщенного уравнения ФПК (5). Решить полученную систему линейных алгебраических уравнений (9).
4. По формуле обратного спектрального преобразования (11) получить ответ задачи в пространственно-временной области.

Для автоматизации решения задач спектральным методом, математическая модель которых включает обыкновенные дифференциальные уравнения или уравнения в частных производных, разработано программное обеспечение “Спектральный калькулятор” [3].

В качестве примера рассмотрим систему с двумя структурами:

$dX = sign\left(x\right)dt + dW\left(t\right),$

$dX = -sign\left(x\right)dt + dW\left(t\right),$

$p^{<1>}(t,x)\big|_{t=0} = N(x;\mu=0;\sigma=1)$ (нормальное распределение), $p^{<2>}(t,x)\big|_{t=0} = 0$,

$p^{<1>}(t,x)\big|_{x=\pm\infty} = p^{<2>}(t,x)\big|_{x=\pm\infty} = 0$,

$t \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}$,

Переход характеризуется марковским процессом с плотностью вероятности, не зависящей от фазовых координат:

$$v_{12}(t,x) = u_{12}(t,x) = \gamma(t)\, p^{<1>}(t,x),$$
$$v_{21}(t,x) = u_{21}(t,x) = \gamma(t)\, p^{<2>}(t,x),$$
$$\gamma(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t},\ t \geq 0, \\ 0,\ t < 0. \end{cases}$$

Базисные функции и порядок усечения [3]: по времени – полиномы Лежандра, ортогональные на отрезке $[0,1]$, усечение – 12; по фазовой координате – функции Эрмита, усечение – 12. Результаты представлены в виде графиков – сечений функций $p^{<1>}(t,x)$ и $p^{<2>}(t,x)$ по времени (при $\lambda = 2$):

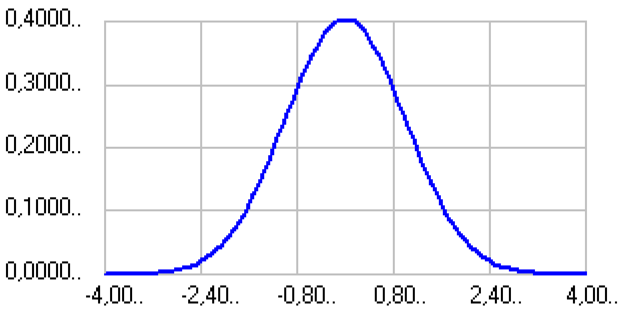

Рис. 1а. График $p^{<1>}(t=0.00,x)$.

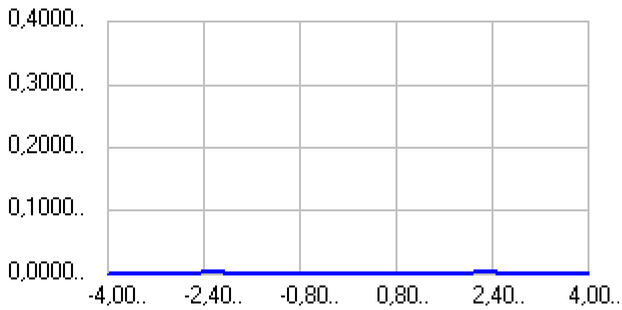

Рис. 1б. График $p^{<2>}(t=0.00,x)$.

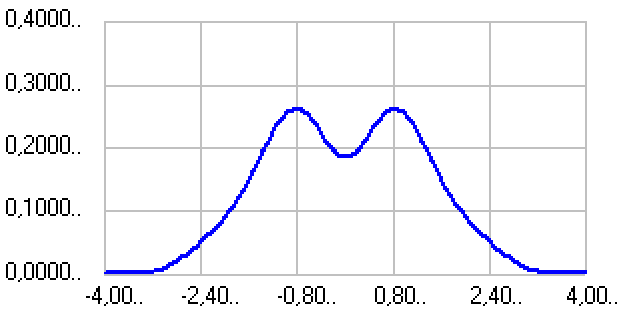

Рис. 2а. График $p^{<1>}(t=0.25,x)$.

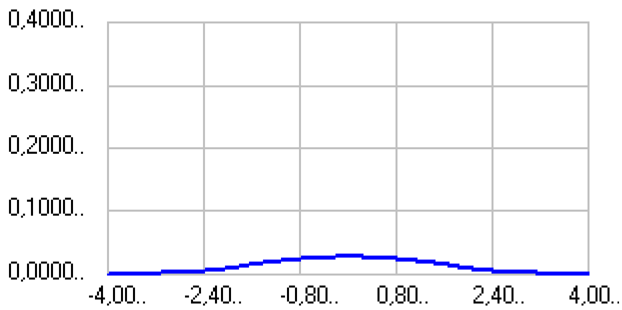

Рис. 2б. График $p^{<2>}(t=0.25,x)$.

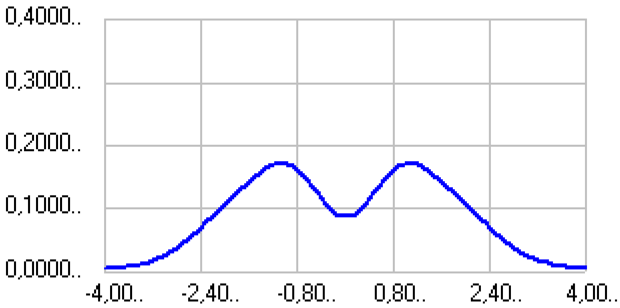

Рис. 3а. График $p^{<1>}\left(t=0.50,x\right)$.

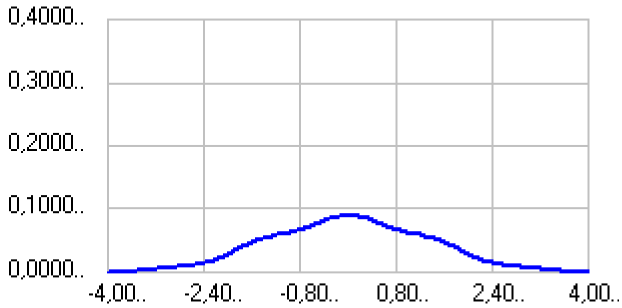

Рис. 3б. График $p^{<2>}\left(t=0.50,x\right)$.

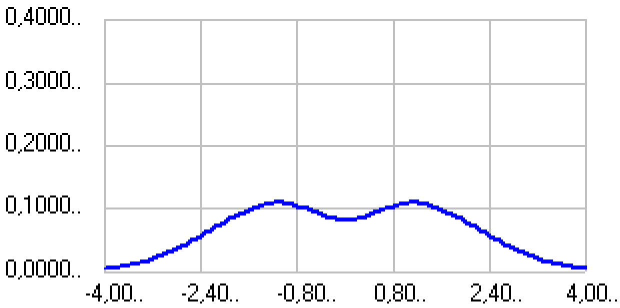

Рис. 4а. График $p^{<1>}\left(t=0.75,x\right)$.

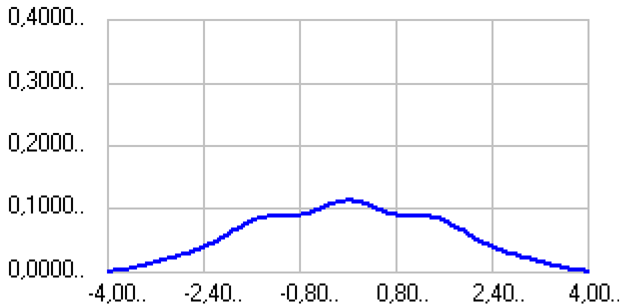

Рис. 4б. График $p^{<2>}\left(t=0.75,x\right)$.

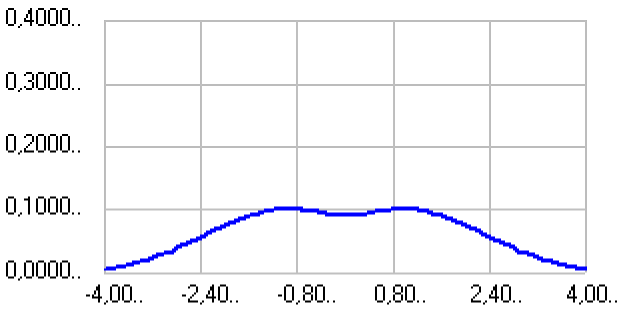

Рис. 5а. График $p^{<1>}\left(t=1.00,x\right)$.

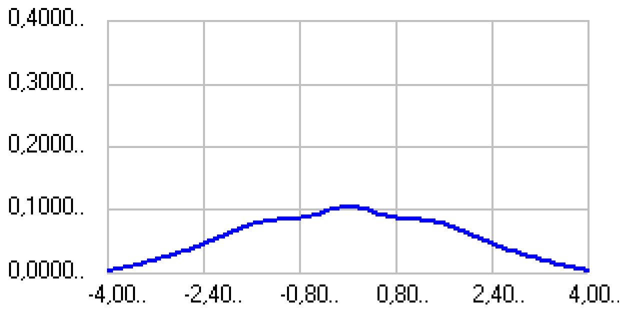

Рис. 5б. График $p^{<2>}\left(t=1.00,x\right)$.

Вероятность нахождения системы в одном из двух состояний:

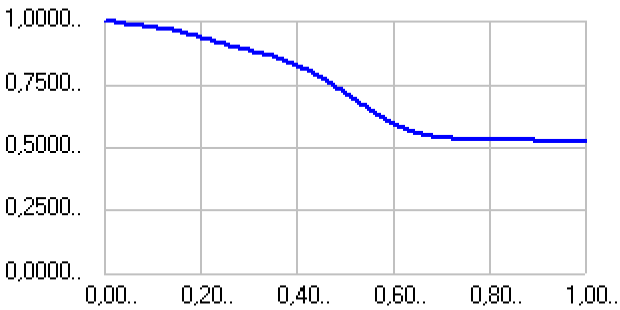

Рис. 6а. График $P^{<1>}\left(t\right)$.

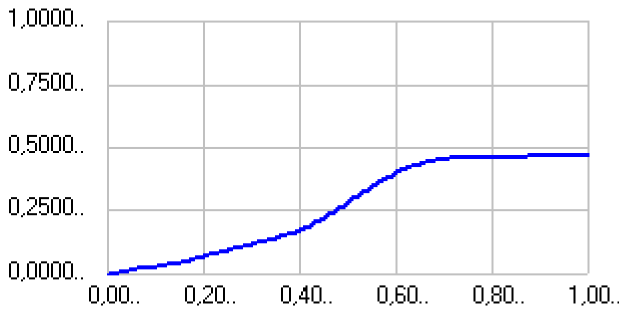

Рис. 6б. График $P^{<2>}\left(t\right)$.

Список литературы

1. Казаков И.Е. Статистическая динамика систем с переменной структурой. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
2. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа многомерных стохастических логико-динамических систем. // Нелинейный динамический анализ. Международный конгресс, Москва. 2002: Тез. докл. – М.: МАИ, 2002. – с. 196.
3. Рыбаков К.А. Программное обеспечение спектральных преобразований "Спектральный калькулятор". – http://rkit.chat.ru/spectrum (28.01.03)
4. Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. – Киев: Наукова думка, 1972. – 175 с.
5. Солодовников В.В., Семенов В.В., Пешель М., Недо Д. Расчет систем управления на ЦВМ: спектральный и интерполяционный методы. – М.: Машиностроение, 1979. – 664 с.
6. Сотскова И.Л. О спектральной форме представления задачи анализа логико-динамических систем. / Моск. авиационный ин-т. – Деп. в ВИНИТИ. – 21.08.97, № 2427. – 12 с.
7. Сотскова И.Л. Применение аппарата обобщенной характеристической функции к анализу стохастических систем управления ЛА. // Задачи стохастического управления: Тем. сб. науч. тр. – М.: МАИ, 1986. – с. 71-78.

Рыбаков Константин Александрович, аспирант кафедры математической кибернетики Московского авиационного института (государственного технического университета);
E-mail: rkmaster@mail.ru

Сотскова Ирина Леонидовна, доцент кафедры математической кибернетики Московского авиационного института (государственного технического университета), к.ф.-м.н.;
Контактный телефон: 158-48-11