

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи

УДК 539.3



Сафронов Павел Андреевич

**ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ ИЗГИБАЕМЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ С УЧЕТОМ
РАЗНОСОПРОТИВЛЯЕМОСТИ МАТЕРИАЛА**

Специальность 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., проф. Мовчан А.А.

Москва, 2019 г.

Содержание

Введение	3
Глава 1. Обзор моделей поведения и явления разнсопротивляемости сплавов с памятью формы	13
1.1. Явление разнсопротивляемости сплавов с памятью формы.....	13
1.2. Обзор моделей термомеханического поведения сплавов с памятью формы	23
Глава 2. Изотермический изгиб пластинок и балок из сплавов с памятью формы в мартенситном фазовом состоянии	32
2.1. Решение задачи об изгибе балок из сплава с памятью формы с учетом разнсопротивляемости.....	34
2.2. Решение задачи об изгибе балок из сплава с памятью формы с учетом упругих деформаций и разнсопротивляемости.....	42
2.3. Решение задачи о изгибе пластинок из сплава с памятью формы с учетом упругих деформаций и разнсопротивляемости.....	52
2.4. Выводы	65
Глава 3. Прямое термоупругое фазовое превращение, протекающее в пластинках и балках из сплавов с памятью формы под действием постоянного изгибающего момента	66
3.1. Решение задачи о прямом мартенситном превращении в балке из сплава с памятью формы с учетом разнсопротивляемости	67
3.2. Решение задачи о прямом мартенситном превращении в балке из сплава с памятью формы с учетом упругих деформаций и разнсопротивляемости.....	73
3.3. Решение задачи о прямом мартенситном превращении в пластинке из сплава с памятью формы с учетом упругих деформаций и разнсопротивляемости	84
3.4. Решение задачи о прямом мартенситном превращении в балке из сплава с памятью формы с учетом упругих деформаций и разнсопротивляемости в связанной термомеханической постановке	95
3.5. Выводы.....	108
Заключение	110
Список используемой литературы	112

Введение

Сплавы с памятью формы (СПФ) это уникальные материалы представляющие собой твердые растворы на основе, как правило двух, реже трех и более атомов металлов, в которых возможны термоупругие фазовые превращения.

Термоупругие мартенситные переходы были открыты Г.В. Курдюмовым и Л.Г. Хандросом в 1948 г. [1]. Первый промышленный СПФ, способный накапливать и восстанавливать деформации величиной до 10%, а также позволяющий регулировать характерные температуры фазовых превращений при изменении химического состава на этапе производства – никелид-титана (NiTi), был получен в середине 20 века, в Ливеморской лаборатории, [2].

Считается, что в общем случае материал элемента конструкции, выполненного из СПФ типа никелида титана может находиться в простейшем случае в одном из двух состояний – аустенитном или мартенситном. Высокотемпературное аустенитное состояние можно охарактеризовать как высокопрочное фазовое состояние с высокосимметричной объёмно-центрированной кристаллической решеткой. Низкотемпературное мартенситное фазовое состояние характеризуется существенно меньшим модулем упругости по отношению к аустенитному, а структура кристаллической решетки в этом случае – моноклинная, с искажениями. Термоупругий переход из аустенитного в мартенситное фазовое состояние при охлаждении образца из СПФ принято называть прямым фазовым переходом (ПФП) [3]. Если ПФП происходит только за счет охлаждения образца в отсутствии внешних механических нагрузок, то мартенситные мезоэлементы будут иметь хаотическую ориентацию. В результате ПФП получится сдвойникованный мартенсит, средняя деформация формоизменения которого по отношению к исходному аустенитному состоянию равна нулю. Если ПФП происходит при охлаждении образца из СПФ под действием не нулевых постоянных внешних механических нагрузок, в таком случае будут накапливаться фазовые деформации, девиатор которых соосен с девиатором действующего внешнего напряжения, а материал образца приобретет структуру частично или полностью ориентированного мартенсита. В результате такого превращения образец будет обладать деформацией прямого превращения, величина которой может достигать до 10% (для полностью ориентированного мартенсита). Для того, чтобы снять деформацию ПФП необходимо нагреть образец из СПФ через интервал температур обратного фазового превращения (ОФП) [3]. При этом деформация полностью или частично снимается.

Актуальность темы исследования. Уникальные свойства СПФ позволяют использовать данные интеллектуальные материалы при проектировании широкого класса устройств. Активный элемент таких устройств выполнен из СПФ, который чаще всего работает на

растяжение – сжатие, кручение или изгиб. Первый вариант позволяют инициировать значительные усилия, в то время как второй и третий предоставляют более широкие кинематические возможности. В рабочих элементах из СПФ, простой формы, работающих на растяжение – сжатие, как правило, наблюдается однородное напряженно – деформированное состояние, причем вид напряженного состояния (одноосное растяжение или одноосное сжатие) в каждый момент времени одинаков во всех точках активного элемента, т.е. не зависит от координат тела. Круг решенных задач такого типа, в силу их простоты, достаточно широк. В то же время, напряженно – деформированное состояние работающих на изгиб активных элементов является существенно неоднородным, а вид напряженного состояния может зависеть от координат точек тела, причем граница между областями растяжения и сжатия заранее не известна и должна определяться в процессе решения краевой задачи. Задачи такого типа значительно сложнее, а решенных задач значительно меньше. Поэтому разработка методов теоретического анализа элементов из СПФ, работающих на изгиб является актуальной задачей.

В настоящей диссертационной работе рассматриваются элементы конструкций, активная часть которых выполнена из СПФ и работает на изгиб в виду широких кинематических возможностей таких устройств. В самом простом случае работу этих устройств можно разделить на два этапа. На первом этапе элементу конструкции необходимо задать измененную форму, сделать его активным – этап «холостого хода». Здесь могут быть использованы два подхода, описанных ранее: накопление неупругих деформаций может идти согласно процессу ПФП под действием ненулевых внешних сил, или благодаря явлению МН, при котором требуется изотермически продеформировать элемент конструкции за предел упругости материала. Второй этап подразумевает «рабочий ход» активного элемента путем его нагрева, например, за счет пропускания через него электрического тока. Явление памяти формы позволяет восстановить первоначальную форму активному элементу, совершается полезная работа или инициируются значительные реактивные усилия.

Этап поведение активных элементов из СПФ на этапе «рабочего хода» достаточно подробно исследован и в простейших случаях полного снятия фазово – структурных деформаций при обратном превращении может быть сведен к решению соответствующих упругих задач. Что же касается описания этапа холостого хода, то такие задачи, как правило, к упругим не сводятся, являются существенно нелинейными и являются менее исследованными. В диссертации рассматриваются именно такие, актуальные проблемы.

Среди мало исследованных свойств можно выделить влияние вида напряженного состояния (далее для краткости «разносопротивляемость») СПФ. Данное свойство характерно для всех описанных ранее явлений. Так, разносопротивляемость заключается в значительном несовпадении кривых деформирования в пространстве интенсивность напряжений –

интенсивность деформаций при изотермическом нагружении образцов в режиме мартенситной неупругости (МН) из СПФ [4]. Асимметрия петли гистерезиса при жестком циклическом симметричном изотермическом нагружении также вызвана наличием данного свойства [5]. Деформации, накапливаемые в процессе ПФП под действием одинаковых по модулю величин сжимающих и растягивающих нагрузок, могут существенно отличаться [6] из-за наличия разносопротивляемости. Описанное свойство необходимо учитывать при проектировании и решении соответствующих краевых задач для класса устройств, активный элемент которых работает преимущественно на изгиб, поскольку в поперечном сечении таких элементов будут действовать одновременно и растягивающие и сжимающие напряжения.

Для создания устройства с активным элементом из СПФ необходимо предварительно решить класс краевых задач, способных корректно описывать поведение этих сплавов в процессе их эксплуатации. Задачи, моделирующие термомеханическое поведение СПФ можно условно разделить на 2 класса: изотермические и неизотермические. К первому классу можно отнести моделирование явления МП в простейшей постановке, когда процесс нагружения считается достаточно медленным, или теплообмен с окружающей средой является интенсивным, так, что температура образца из СПФ может условно считаться постоянной. К неизотермическому классу задач можно отнести моделирование явлений прямого и обратного фазового перехода, а также МП, при котором происходит достаточно быстрое нагружение образца. Кроме того, при рассмотрении явления сверхупругости отмечено влияние механических напряжений на характерные температуры фазовых переходов. Так, решение задач о прямом и обратном ФП можно разделить на три группы. В простейшей постановке зависимости между напряжениями и характерными температурами ФП не учитываются, рассматриваются достаточно медленные процессы, обратное влияние фазовых переходов на температурный режим не учитывается. Такая постановка задачи считается несвязной. Напротив, связанная постановка учитывает изменение характерных температур ФП вследствие роста механических напряжений, однако все еще рассматриваются медленные процессы. Наконец, наиболее полной считается дважды связанная термомеханическая постановка. Здесь, помимо связи напряжений и температур ФП, учитывается и возможность поглощения или выделения тепла ФП, а также диссипативные свойства СПФ.

СПФ обладают уникальными силовыми и кинематическими возможностями по сравнению с классическими конструкционными материалами. Однако, широкому применению конструкций на основе этих сплавов в авиационной промышленности препятствует объективная сложность не только описания характерных явлений, но и решение соответствующих краевых задач. Таким образом, решение краевых задач, способных моделировать различные явления, характерные для СПФ, является актуальной проблемой механики деформируемых твердых тел.

Степень разработки темы исследования. В последнее время появляется большое количество работ, посвященных моделированию термомеханического поведения простейших элементов конструкций из СПФ. Однако, большая часть этих работ посвящена изотермическим явлениям, к которым можно отнести МН, и, при выполнении ряда обстоятельств, сверхупругость. Если предположить, что температура образца не меняется в ходе его нагружения, то явление сверхупругости можно отнести к классу изотермических процессов. Напротив, редко публикуются решения задач, в которых учитывается выделение или поглощение латентного тепла ФП, другими словами – термомеханическая связность, при этом разнсопротивляемость, как правило, не учитывается.

Так, моделированию явления сверхупругости при изотермическом изгибе балки из СПФ посвящена работа [7]. Авторами предложена простейшая одномерная модель поведения NiTi, способная учитывать несовпадение кривых деформирования материала за счет использования разных упругих модулей при растяжении и сжатии. Однако, в работе не приведены достаточные обоснования ни факта наличия разномодульности NiTi, ни возможности моделирования свойства разнсопротивляемости путем учета только разномодульности. Кроме того, распределение напряжений в поперечном сечении балки априорно полагалось кусочно-линейным, что привело к появлению серьезных погрешностей решения.

Описанию термомеханического поведения СПФ с монокристаллической структурой посвящены следующие работы. Моделирование изотермического изгиба балки в рамках явления сверхупругости показано в [8] на основе принципов [9-12]. В работе предполагался одновременный фазовый переход по всей высоте сечения балки, а упругие константы материала (модуль упругости, коэффициент Пуассона) претерпевали скачкообразное изменение при переходе из аустенитной фазы в мартенситную. На основе одномерной микромеханической модели [13,14] получено решение задач о изотермическом изгибе балки [15], а также о изотермическом растяжении и сжатии стержней [16] из монокристаллического нитинола. Обе работы посвящены явлению сверхупругости и учитывают анизотропию материала элементов. Ввиду сложности определяющих соотношений, поиск численного решения проводился в конечно-элементном (КЭ) комплексе ABAQUS. Консольный изотермический изгиб балки из СПФ рассмотрен в [17] на основе результатов [18]. Авторам удалось оценить отклик балки в режиме сверхупругости для разных значений сосредоточенной силы, с учетом анизотропии ее материала. Решение получено методом конечных элементов (МКЭ) с использованием только 3 КЭ по высоте поперечного сечения балки. При этом средний КЭ, через который проходит плоскость симметрии балки, наделялся только упругими свойствами, а также предполагалось, что нейтральная плоскость не выходит за геометрические границы этого элемента. Более того, авторы работы столкнулись с проблемой «запирания сдвига» при использовании столь малого

числа точек интегрирования по высоте сечения балки. В работе [19] получено решение задач о растяжении и сжатии стержней из монокристаллических СПФ в связанной термомеханической постановке. Рассматриваются явления ПФП и сверхупругости с возможностью учета анизотропии материала. Рассуждения ведутся в рамках микромеханической модели, представленной в этой же работе. В силу чрезмерной сложности системы разрешающих соотношений, все изыскания по поиску численного решения проводились в КЭ комплексе ABAQUS.

Для описания поведения СПФ с поликристаллической микроструктурой чаще всего используют модели феноменологического типа. Однако, при решении задачи о растяжении и сжатии стержней [19-21] с использованием результатов [22], сделана попытка описания термомеханического поведения стержней из СПФ с поликристаллической микроструктурой с помощью микромеханических моделей. Для этого, каждому из 729 КЭ модели одного стержня присваивалось уникальное направление главных осей анизотропии. Результат моделирования изотермического сверхупругого поведения балок и стержней из СПФ показал неплохое совпадение с экспериментальными данными. Однако, даже для моделирования одноосного растяжения и сжатия стержней из СПФ потребовались колоссальные вычислительные ресурсы. В работе [23] получено решение задачи о изгибе балки из СПФ в одномерной по напряжениям постановке на основе микромеханической модели [24-26]. Моделируются явления МН в изотермической постановке, а также ПФП под действием постоянного изгибающего момента в связанной термомеханической постановке. Свойство разносопротивляемости поликристаллических СПФ не учитывается. Сверхупругому поведению балок и стержней из СПФ при изотермическом нагружении посвящены работы [27,28]. Использована одномерная модель поведения интеллектуальных материалов, представленная в первой работе. Рассматриваются процессы однократного, а также жесткого циклического нагружения осевой силой и изгибающим моментом стержней и балок соответственно. Учитывается разносопротивляемость растяжению и сжатию СПФ. Решение удалось получить только с помощью МКЭ. Решению задачи о изотермическом консольном изгибе балки из СПФ в режиме сверхупругости посвящена работа [29]. В работе используется одномерный аналог модели [30], способной описать только процесс нагружения элемента, а также выполнен учет свойства разносопротивляемости. Решение получено с помощью МКЭ. Работа [31] посвящена моделированию сверхупругого поведения пластинки из СПФ при чистом изгибе на основе модели [32], с применением модификаций [33], позволяющих учесть свойство разносопротивляемости. Решение получено с использованием КЭ-комплекса ABAQUS.

Отдельно следует отметить работу [34], в которой получено аналитическое решение задачи о изотермическом консольном и трехточечном изгибе балки из СПФ с поликристаллической

микроструктурой в режиме сверхупругости. Рассуждения построены на основе одномерных, модифицированных для учета свойства разносопротивляемости вариантов соотношений [35,36]. Дело в том, что моделирование явления сверхупругости даже в изотермической постановке на основе моделей [35,36] и им аналогичных, происходит в основном с использованием МКЭ ввиду объективной сложности получаемых систем уравнений. Трудоемкость получения аналитического решения получившейся системы разрешающих уравнений привела авторов работы к необходимости введения дополнительных априорных предположений. Так, выражение для продольных деформаций имеет конечную форму и предполагает линейную зависимость от продольных напряжений и параметра фазового состава. Таким образом, приняты априорные гипотезы о кусочно-линейном распределении продольных напряжений и параметра фазового состава по высоте сечения балки, что негативно сказалось на точности полученных результатов. Вопросам устойчивости стрижней и пластинок из СПФ без учета свойства разносопротивляемости посвящены труды [37-55] на основе модели [56-60].

Практика применения реальных устройств с активным элементом из СПФ показывает, что в подавляющем большинстве случаев предпочтение отдается сплавам с поликристаллической микроструктурой. Это связано с двумя факторами: поведение таких СПФ лучше поддается прогнозированию, и они относительно недороги в производстве, в то время как СПФ с монокристаллической микроструктурой свойственна сильная анизотропия свойств. Большинство известных работ, посвященных исследованию поведения при изгибе простейших балок из СПФ и с учетом разносопротивляемости, затрагивает только явление сверхупругости в изотермической постановке. Причем, в большинстве случаев решение удается получить только с привлечением МКЭ. Таким образом, можно утверждать, что вопросы о моделировании явлений МН, а также ПФП в связанной постановке при изгибе балок из СПФ с учетом разносопротивляемости являются недостаточно исследованными.

Цели и задачи работы.

1. Определение зависимости кривизны от момента для элементов из СПФ, изгибаемых в режиме мартенситной неупругости или прямого термоупругого мартенситного превращения в рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях для случая изгиба балок и цилиндрического изгиба пластин.
2. Разработка методик анализа НДС активных элементов конструкций, выполненных из разносопротивляющихся СПФ, напряжения в которых меняются немонотонно при внешнем термосиловом воздействии.
3. Анализ влияния разносопротивляемости и упругой разномодульности на решение рассматриваемых задач.

4. Анализ влияния структурного превращения и механизмов упрочнения материала, в частности, равномерного и неравномерного упрочнения представительного объема разносопротивляющегося СПФ при ФП, на решение рассматриваемых задач.

Научная новизна.

1. Разработаны алгоритмы анализа НДС активных элементов конструкций, выполненных из СПФ и работающих на изгиб. Представленные алгоритмы могут быть использованы при решении краевых задач о прямом мартенситном превращении в связанной термомеханической постановке в балках и пластинках из СПФ с учетом разносопротивляемости этих материалов.

2. На основе модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях получено численное решение задач об изотермическом нагружении балок и пластинок монотонно возрастающим изгибающим моментом в мартенситном фазовом состоянии. Выполнен учет явления разносопротивляемости растяжению и сжатию для СПФ, решение получено как с учетом, так и без учета упругой составляющей полных деформаций, исследовано влияние упругой разномодульности на полученное решение. Система разрешающих соотношений получена в аналитическом виде.

3. На основе той же модели поведения СПФ получено численное решение задач о прямом мартенситном фазовом превращении в пластинке и балке под действием постоянного изгибающего момента в рамках положений об АППН. Выполнен учет свойства разносопротивляемости этих материалов, показано влияние упругой разномодульности на полученное решение.

4. На основе той же модели получено численное решение задачи о ПФП в балке в связанной термомеханической постановке. Выполнен учет явления разносопротивляемости этих материалов, в том числе выполнен учет влияния вида НДС на характерные температуры ФП. Установлено влияние неоднородности упрочнения представительного объема разносопротивляющегося СПФ при переходе из аустенитного в мартенситное фазовое состояние.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Полученные в рамках настоящего диссертационного исследования решения краевых задач учитывают наиболее актуальные явления и свойства, характерные для СПФ, в том числе разносопротивляемость, и являются основополагающими при проектировании реальных конструкций, активный элемент которых работает преимущественно на изгиб. Полученные в диссертации результаты позволяют:

1. Устанавливать рекомендуемый и допускаемый уровни внешних термомеханических нагрузок при переводе в активное состояние элемента конструкции из разносопротивляющегося СПФ;
2. Устанавливать кривизну (перемещения) на этапе холостого хода активного элемента из разносопротивляющегося СПФ;
3. Рационально выбирать материал и геометрические параметры активного элемента будущего устройства исходя из необходимости обеспечения требуемых величин прочности и жесткости, а также массово-габаритных характеристик конечного изделия.

Настоящее диссертационное исследование выполнено в том числе при поддержке РФФИ, проект №17-01-00216.

Полученные в ходе диссертационного исследования результаты позволили разработать методику, содержащую общие рекомендации и указания по разработке и внедрению в существующие конструкции воздухозаборников турбореактивных двигателей, устройства саморегулирования формы входной части воздухозаборника, способного адаптироваться как к штатным, так и нештатным режимам полета летательного аппарата (ЛА), а также значительно повышать эффективность работы силовой установки на больших скоростях. Данное положение подтверждается Актом о внедрении результатов диссертационного исследования на предприятии ПАО «Компания «Сухой» «ОКБ Сухого».

Методы исследования.

1. Модель нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях.
2. Аналитические методы решения краевых задач механики СПФ, основанные на положении об активных процессах пропорционального нагружения (АППН).
3. Качественные методы исследования поведения решений в предельных случаях.
4. Явные и неявные схемы пошагового численного решения связанных задач механики СПФ в приращениях.

Степень достоверности результатов. Достоверность результатов, полученных в рамках диссертационного исследования, подтверждается следующими положениями:

1. Решение всех краевых задач настоящей диссертационной работы выполнено в рамках современной нелинейной модели деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях. Используемая модель позволяет качественно и количественно верно описывать широкий класс явлений, характерных для адаптивных материалов. Данное положение подтверждается многократной апробацией данной модели при решении краевых задач

термомеханики СПФ, а полученные результаты отвечают соответствующим экспериментальным данным.

2. При численном моделировании явлений мартенситной неупругости и прямого мартенситного фазового превращения в рамках положений об активных процессах пропорционального нагружения изгибаемых элементов, дифференциальное соотношение для неупругих деформаций сходится к конечному алгебраическому уравнению.

3. Достоверность решения задачи о ПФП в балке под действием постоянного изгибающего момента в связанной термомеханической постановке подтверждается использованием многократно апробированного метода пошагового интегрирования Эйлера в неявной форме, а также установленной сходимостью в предельном случае полученного численного решения к точному решению аналогичной задачи, полученному в рамках положений об АППН.

Апробация результатов исследования. Результаты решения всех краевых задач, а также основные выводы настоящего диссертационного исследования апробированы на следующих конференциях:

1. XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, 20-24 августа 2015г.
2. 5-й Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных конструкций, сложных и гетерогенных сред». Москва, 15-17 декабря 2015г.
3. 6-й Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных конструкций, сложных и гетерогенных сред» имени И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. Москва, 16-18 ноября 2016г.
4. XLIV Международной молодежной научной конференции «Гагаринские чтения». Москва, 17-20 апреля 2018г.
5. 3-й Международной конференции «Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций», посвященной 80-летию ИМАШ РАН. Москва, 23-25 октября 2018г.
6. 8-й Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных конструкций, сложных и гетерогенных сред» имени И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. Москва, 18-1 декабря 2018г.

Положения, выносимые на защиту.

1. Постановка задач изгиба для активных элементов конструкций, выполненных из СПФ с учетом разносопротивляемости этого материала на основе модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях.

2. Разработанные алгоритмы анализа НДС активных элементов конструкций из разнородных СПФ в связанной и несвязанной термомеханических постановках.

3. Решение задач о чистом/ цилиндрическом изотермическом изгибе балок/ пластинок из СПФ с учетом разнородности в мартенситном состоянии под действием монотонно возрастающей нагрузки.

4. Решение задач о ПФП в балке/ пластинке из разнородного СПФ под действием постоянного изгибающего момента в рамках положений об АППН.

5. Решение задачи о ПФП в балке из разнородного СПФ под действием постоянного изгибающего момента в связанной термомеханической постановке, с учетом неоднородности упрочнения представительного объема материала балки в процессе ФП.

Глава 1. Обзор моделей поведения и явления разнсопротивляемости сплавов с памятью формы

Первая глава настоящего диссертационного исследования посвящена литературному обзору явления разнсопротивляемости СПФ и моделей, способных предсказывать термомеханическое поведение этих материалов. В данной главе выявлены режимы работы активных элементов конструкций, при которых явление разнсопротивляемости оказывает значительное влияние на поведение этих элементов. Представлен краткий обзор моделей поведения СПФ, а также показаны наиболее удачные модификации этих моделей для учета свойства разнсопротивляемости.

1.1. Явление разнсопротивляемости сплавов с памятью формы

Исследованию термомеханического поведения СПФ посвящен достаточно широкий круг работ, однако, всего несколько десятков работ позволяют судить о наличии свойства разнсопротивляемости, и, лишь единицы из них посвящены целенаправленному изучению данного явления. Под разнсопротивляемостью здесь подразумевается зависимость процесса деформирования образцов из этих материалов от вида напряженного состояния. В иностранной литературе данное свойство можно встретить под названием «асимметрия кривых деформирования». Зачастую, при анализе термомеханического поведения СПФ, данное свойство ошибочно подменяют понятием анизотропии. Далее будет показано, что свойство разнсопротивляемости характерно для СПФ с поликристаллической микроструктурой, которые, по понятным причинам, принято считать изотропными материалами. С другой стороны, для СПФ с монокристаллической микроструктурой характерна сильная анизотропия механических свойств, влияние которой на термомеханическое поведение сплавов в разы превосходит влияние свойства разнсопротивляемости. Таким образом, учет последнего является крайне сложной задачей для монокристаллических СПФ.

Явление разнсопротивляемости отмечено при изотермическом простом и сложном нагружении образцов из СПФ монокристаллической структуры в мартенситном состоянии в работах [5,61-74]. Так, в работе [62] показаны результаты исследования при одноосном изотермическом растяжении и сжатии образцов из $Ni_{50.8}Ti$ в мартенситном состоянии. В работе отмечено несовпадение кривых деформирования даже для малых значений напряжений, рис. 1.1, 1.2. При достижении сжимающих и растягивающих напряжений порядка 500МПа наблюдается двукратная разница в величине достигнутых полных деформаций, рис. 1.1. Помимо количественного, наблюдается и качественное различие кривых деформирования. Так, диаграмма растяжения имеет достаточно протяженный участок с малым упрочнением, аналогичный площадке текучести, наблюдаемый при растяжении обычных сталей за предел

пропорциональности. С другой стороны, диаграмма сжатия на протяжении всего процесса деформирования демонстрирует достаточно высокий уровень упрочнения, без явной площадки текучести, рис. 1.1, 1.2. Различие в начальных наклонах кривых деформирования при нагружении наталкивает на заключение о наличии разномодульности у СПФ, рис. 1.1 (материал образцов отожжен в течении 1,5 часов при температуре $T_{отжиг} = 400^{\circ}\text{C}$). На рис. 1.2 показаны диаграммы деформирования образцов из этого же материала, но прошедшие уже 15-ти часовой отжиг при температуре $T_{отжиг} = 500^{\circ}\text{C}$, при этом начальные наклоны кривых деформирования очень близки. Начальные участки диаграмм при разгрузке снова указывают на наличие разномодульности, причем, независимо от термомеханической обработки материала. С другой стороны, известны результаты испытаний образцов при одноосном растяжении и сжатии с близкими условиями термомеханической обработки этого же материала, [63]. Здесь, помимо наличия свойства разносопротивляемости, отмечено совпадение наклонов начальных участков диаграмм растяжения и сжатия как при нагружении образцов, так и при их разгрузке. Таким образом, наличие свойства разномодульности в рамках явления мартенситной неупругости не может быть однозначно установлено ввиду противоречивости известных результатов экспериментов не только [62,63], но и [64-71]. Сравнивая абсолютные величины растягивающих и сжимающих напряжений, необходимых для достижения деформации, например, $\varepsilon = 0,02$ можно заключить, что термическая обработка оказывает влияние на явление разносопротивляемости ($\sigma_{раст} \approx \sigma_{сжат} \approx 350\text{МПа}$ при $T_{отжига} = 400^{\circ}\text{C}$; $\sigma_{раст} \approx 250\text{МПа}$ и $\sigma_{сжат} \approx 350\text{МПа}$ при $T_{отжига} = 500^{\circ}\text{C}$), рис. 1.1 и 1.2. Данное заключение не противоречит результатам [64-71], однако установленный в последних уровень влияния термической обработки на свойство разносопротивляемости оказывается существенно ниже, что может быть связано с недостаточной точностью проведенных экспериментов [62].

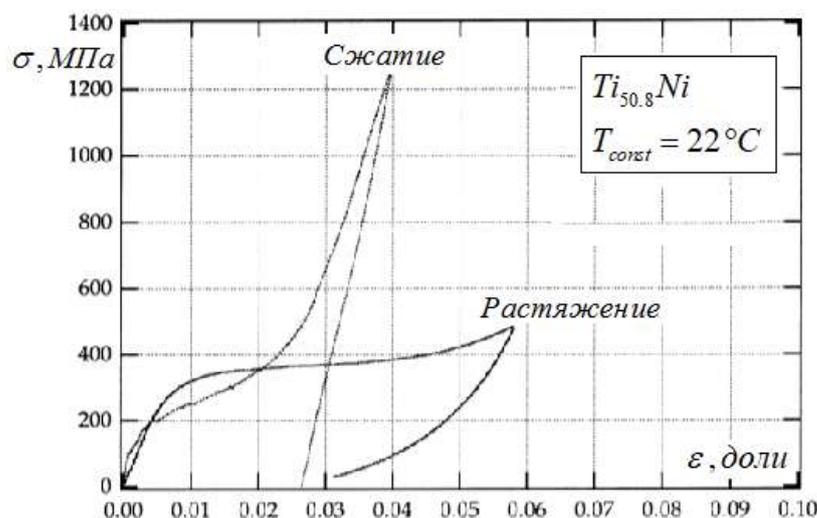


Рис. 1.1. Кривые $\varepsilon - \sigma$. Растяжение и сжатие $Ni_{50.8}Ti$ в режиме МН, $T_{отжига} = 400^{\circ}\text{C}$, [62].

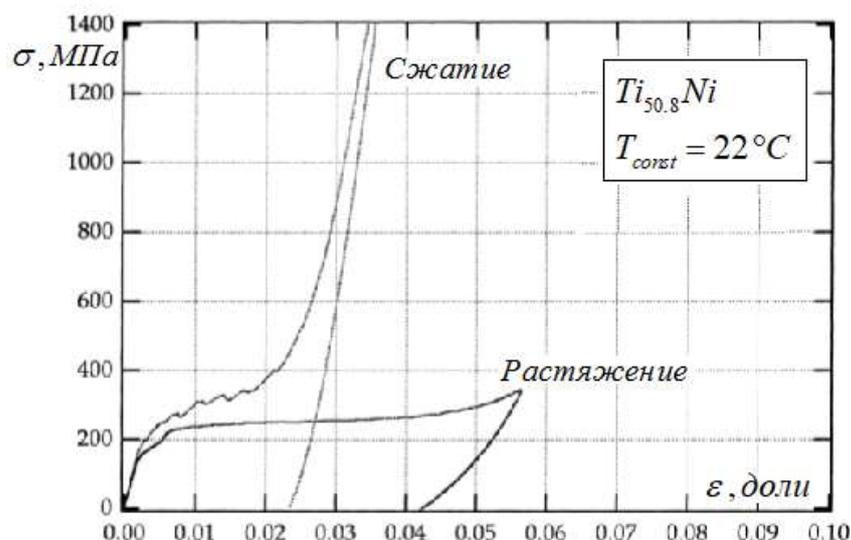


Рис. 1.2. Кривые $\varepsilon - \sigma$. Растяжение и сжатие $Ni_{50.8}Ti$ в режиме МН, [62].

Изучению влияния термомеханической обработки на поведение при растяжении и сжатии образцов из $NiTi$ в мартенситном состоянии посвящены труды [5,64]. В работе [64] установлено, что образцы из поликристаллического никелида титана, полученные в результате отливки в соответствующие формы без последующей обработки, демонстрируют практически симметричное поведение в тестах на одноосное растяжение и сжатие. Однако, образцы из того же материала, полученные в результате горячей прокатки, при изотермическом нагружении растягивающей нагрузкой накапливают вдвое большие деформации по отношению к случаю нагружения равной по модулю величины сжимающей силой. Таким образом, авторы [64] полагают, что свойство разносопротивляемости приобретает сплавом после термомеханической обработки. С другой стороны, в трудах [5] представлены результаты исследования влияния температуры и времени отжига без механической обработки на диаграммы деформирования при изотермическом растяжении и сжатии образцов из нитинола. Установлено, что величина температуры отжига оказывает незначительное влияние на поведение кривой изотермического сжатия вплоть до значения деформаций 6%, рис. 1.3. В работе показано, рис. 1.4, что термическая обработка образцов качественно меняет диаграмму растяжения: в области средних значениях напряжений появляется зона с чрезвычайно малым упрочнением и признаками неустойчивого деформирования. Авторы работы [5] полагают, что свойство разносопротивляемости приобретает сплавом даже не после термомеханической обработки, а в результате отжига. Заключение авторов [5,64] о сущности явления разносопротивляемости СПФ не согласуется с известными результатами, а факт положения диаграммы растяжения выше диаграммы сжатия на протяжении всего процесса деформирования, рис. 1.3 и 1.4, является, как минимум странным.

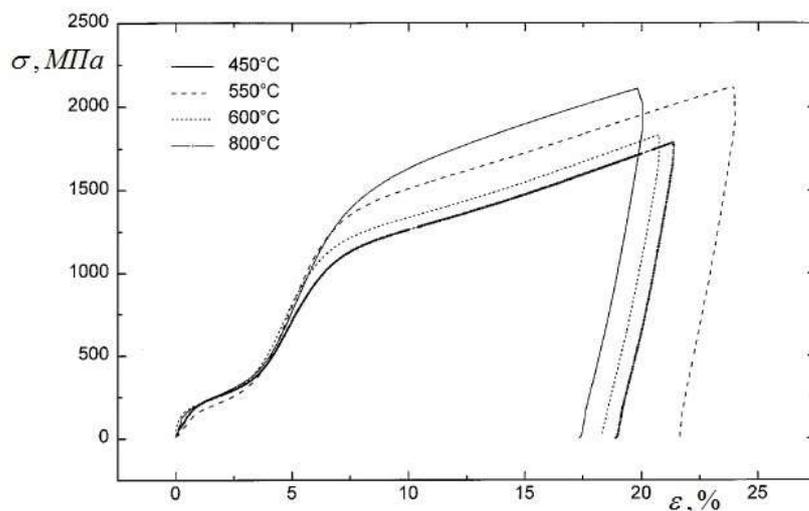


Рис. 1.3. Кривые $\varepsilon - \sigma$. Изотермическое сжатие в режиме МН, [5].

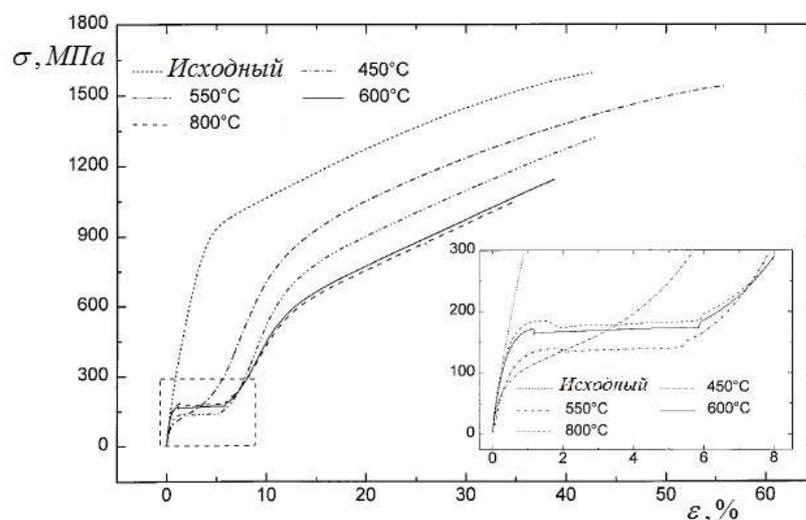


Рис. 1.4. Кривые $\varepsilon - \sigma$. Изотермическое растяжение в режиме МН, [5].

В работе [5] также показаны результаты жесткого циклического нагружения образцов из нитинола, отожженных при температуре $T_0 = 550^\circ\text{C}$, рис. 1.5. При амплитуде нагружения $\varepsilon_1 = 1\%$ разнесопротивляемость оказывает незначительное влияние на кривые деформирования. Однако, при циклическом нагружении образцов с амплитудой $\varepsilon_2 = 2\%$ и $\varepsilon_3 = 4\%$ отмечается сильная асимметрия петли гистерезиса. Причем, с ростом числа циклов нагружения, разница в максимальных значениях напряжений, достигаемых за полуцикл растяжения и сжатия растет, однако этот рост является ограниченным. Помимо количественного, отметим и качественное различие кривых деформирования на этапах растяжения и сжатия. Так, диаграмма деформирования на полуцикле растяжения оказывается чувствительной к виду напряженного состояния и демонстрирует малое упрочнение с момента пересечения оси напряжений. С другой стороны, диаграмма деформирования на протяжении всего полуцикла сжатия демонстрирует высокий уровень упрочнения, а при пересечении оси напряжений упрочнение становится еще

более интенсивным. Таким образом, диаграмма сжатия демонстрирует чувствительность к виду деформированного состояния.

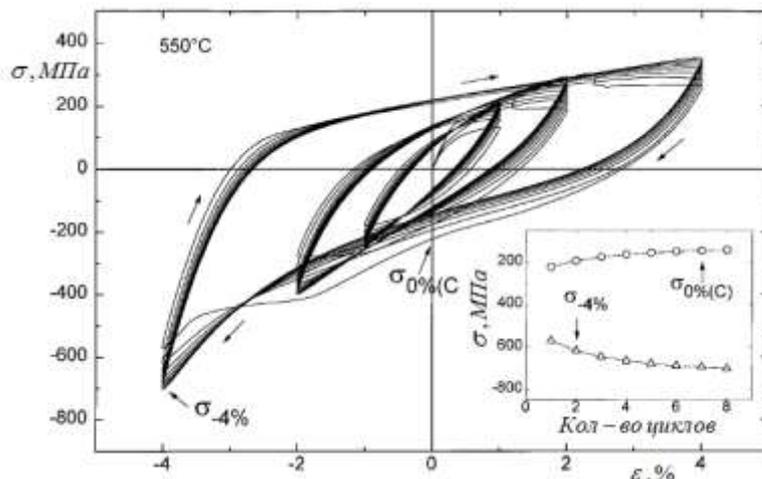


Рис. 1.5. Кривые $\varepsilon - \sigma$. Изотермическое жесткое циклическое нагружение. Отжиг при $T = 550^\circ\text{C}$, [5].

В настоящее время только две работы [75,76] посвящены исследованию явления разносопротивляемости при охлаждении образцов из СПФ через интервал температур ПФП под действием постоянной сжимающей или растягивающей нагрузки. На рис. 1.6 показан процесс накопления фазовых деформаций при охлаждении образцов из сплава на основе меди под действием сжимающих и растягивающих нагрузок. Установлено [75], что под действием осевой нагрузки абсолютной величиной $|\sigma_1| = 100\text{МПа}$, величина накапливаемой фазовой деформации оказывается одинаковой в случае сжимающей и растягивающей нагрузки. Однако, при нагрузке величиной $|\sigma_2| = 300\text{МПа}$ отмечено значительное несоответствие величины накопленной фазовой деформации ($\varepsilon_{\text{раст}} = 6\%$ и $\varepsilon_{\text{сжат}} = 5\%$) и температур начала ПФП ($M_s^\sigma \approx 35^\circ\text{C}$ при растяжении и $M_s^\sigma \approx 20^\circ\text{C}$ при сжатии). На обратном этапе (явление памяти формы вследствие нагрева), процесс «снятия» неупругих деформаций при постоянной растягивающей нагрузке ($\sigma = 300\text{МПа}$) смещен в сторону больших температур по отношению к случаю сжимающей нагрузки ($\sigma = -300\text{МПа}$). При этом, температура окончания интенсивного «снятия» неупругих деформаций при постоянной растягивающей нагрузке составляет $M_{f,\text{растяж}}^\sigma \approx 110^\circ\text{C}$ против $M_{f,\text{сжатие}}^\sigma \approx 70^\circ\text{C}$ - в случае сжимающей нагрузки. Первоначальный уровень деформаций образцов в аустенитном состоянии под действием растягивающей и сжимающей нагрузки абсолютной величиной $|\sigma_1| = 100\text{МПа}$ составил $\varepsilon_{\text{раст}} \approx 0,9\%$ и $\varepsilon_{\text{сжат}} \approx 0,5\%$ соответственно, в случае действия нагрузки абсолютной величиной $|\sigma_2| = 300\text{МПа}$, составил $\varepsilon_{\text{раст}} \approx \varepsilon_{\text{сжат}} \approx 1\%$. Отмеченный высокий уровень деформации образца из СПФ при изотермическом растяжении в

аустенитном состоянии при относительно невысоком уровне напряжений ($\sigma = 100 \text{ МПа}$) является весьма странным, а диаграммы соответствующего изотермического нагружения осевой растягивающей нагрузкой вплоть до напряжений $\sigma = 300 \text{ МПа}$ в [75] не приведены. Попытки установления или численной оценки явления разномодульности при изотермическом нагружении в аустенитном состоянии в [75] не проведено, а опубликованные результаты эксперимента не позволяют заключить о наличии разномодульности у СПФ на основе меди.

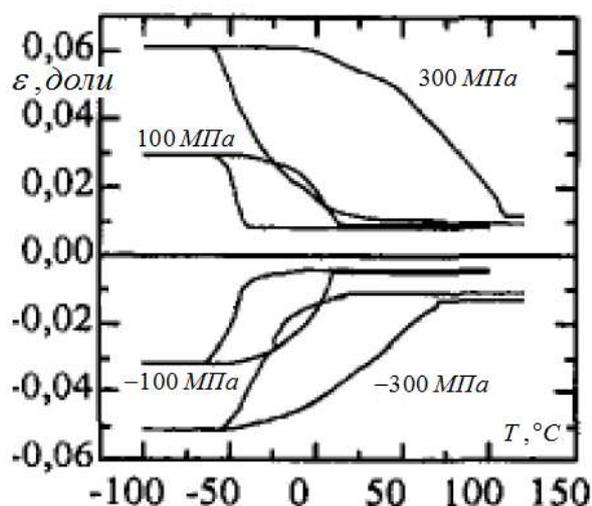


Рис. 1.6. Кривые $\varepsilon^{ph} - T$. Явление ПФП, CuAlZnMn, [75].

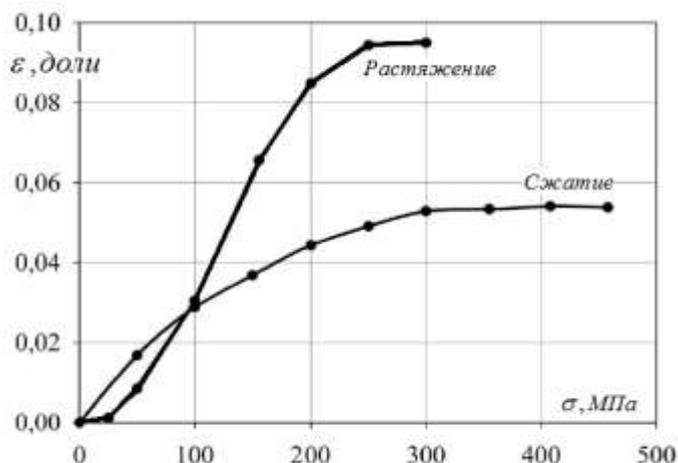


Рис. 1.7. Кривые $\varepsilon^{ph} - \sigma$. Фазовые деформации на момент окончания ПФП, NiTi, [76].

На рис. 1.7 показаны диаграммы деформирования образцов из равноатомного никелида титана для явления ПФП под действием постоянной растягивающей или сжимающей нагрузки [76]. Важно понимать, что каждая точка приведенных кривых соответствует величине накопленной фазовой деформации в рамках одного эксперимента по охлаждению образца. Поведение представленных диаграмм доказывает наличие свойства разносопротивляемости у поликристаллических СПФ в рамках явления ПФП: наблюдается почти двукратное превосходство фазовых деформаций, накапливаемых за процесс охлаждения под действием

растягивающей нагрузки по отношению к аналогичной деформации при сжатии для средних и больших величин действующих напряжений. Помимо этого, в работах [75,76] установлено совпадение накопленных фазовых деформаций под действием растягивающих и сжимающих напряжений абсолютной величиной порядка $|\sigma| \approx 100 \text{ МПа}$, пусть и для разных СПФ.

Явление разносопротивляемости отмечено при исследовании сверхупругого поведения образцов из различных СПФ в работах [20,77-87]. Влияние вида напряженного состояния на кривые сверхупругого поведения СПФ является закономерным ввиду наличия сразу двух механизмов неупругого деформирования (накопление фазовых и структурных деформаций) на этапе нагружения, для которых явление разносопротивляемости характерно, что установлено ранее. Однако, отмечен различный уровень влияния разносопротивляемости на эти два механизма неупругого деформирования. В связи с комплексным характером процесса накопления фазовых и структурных деформаций при сверхупругом поведении СПФ, количественная оценка влияния разносопротивляемости на механизмы МН и ПФП в опытах на сверхупругость является крайне сложной задачей. На этапе разгрузки сверхупругого поведения реализуется механизм памяти формы, влияние напряженного состояния на которое вообще не характерно.

Влияние вида напряженного состояния на механическое поведение образцов из никелида титана в первоначально аустенитном состоянии при изотермическом одноосном растяжении и сжатии исследовано в [20]. Оказывается, кривые деформирования сильно различаются от точки начала интенсивного роста неупругих деформаций, инициированного возрастающей внешней нагрузкой, рис. 1.8. Причем, переход от упругого деформирования к интенсивному накоплению фазово-структурных деформаций отвечает напряжению $\sigma \approx 400 \text{ МПа}$ в случае растяжения и абсолютному напряжению $\sigma \approx 550 \text{ МПа}$ в случае сжатия при постоянной внешней температуре $T_0 = 25^\circ \text{C}$. Диаграмма сверхупругой петли при растяжении в полтора раза шире петли при сжатии вдоль оси деформаций, и во столько же раз уже вдоль оси напряжений. При растяжении образца из нитинола, кривая деформирования вновь демонстрирует достаточно протяженный участок с крайне малым упрочнением, характерный для диаграммы МН никелида титана. Отмечен практически идентичный наклон кривых деформирования на начальном участке этапа нагружения, что свидетельствует об очень близком значении упругих модулей в аустенитном состоянии. В случае разгрузки начальный наклон диаграммы растяжения существенно меньше начального наклона кривой сжатия, однако, ранее установлено, что в случае накопления неупругих деформаций по механизму МН – на диаграмме деформирования отсутствует начальный строго упругий участок. Таким образом, установить явное наличие разномодульности

в режиме МН не удалось. Более того, ни в одной из приведенных работ не сделано попыток проведения количественной оценки явления разномодульности.

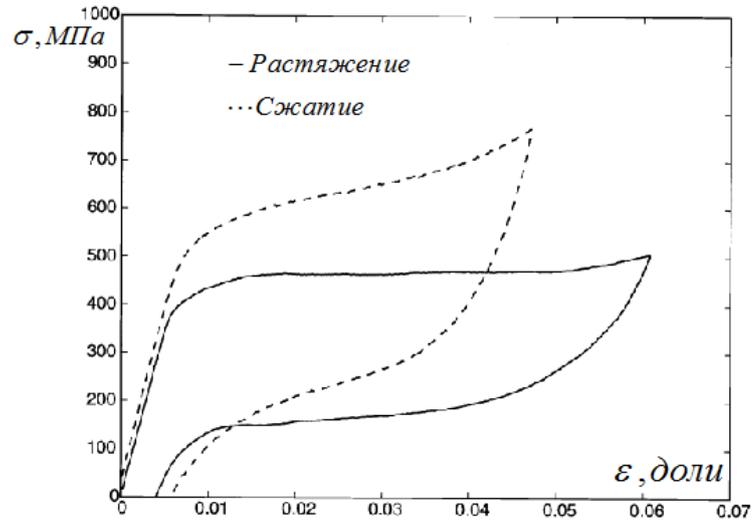


Рис. 1.8. Кривые $\varepsilon - \sigma$. Явление сверхупругости, $T_0 = 25^\circ\text{C}$, [20].

В работах [77,78] показаны экспериментальные данные по поиску такой поверхности нагружения в пространстве напряжений для образца из NiTi, при нахождении на которой начинается процесс прямого фазового превращения под действием механических напряжений при постоянной температуре T (явление сверхупругости), рис. 1.9, 1.10. В работах проведены эксперименты на простое и комбинированное нагружение трубок из нитинола: одноосное растяжение и сжатие, кручение и некоторые совмещенные случаи нагружения. Установлено, что при одинаковой температуре образца из нитинола, напряжения при одноосном растяжении, необходимые для инициации процесса ПП в полтора раза меньше аналогичных напряжений в случае одноосного сжатия, рис. 1.9. В трудах [79] установлено, что уровень интенсивности напряжений начала накопления неупругих деформаций в режиме сверхупругости в случае одноосного растяжения и кручения практически совпадает, что подтверждается результатами [77], рис. 1.9.

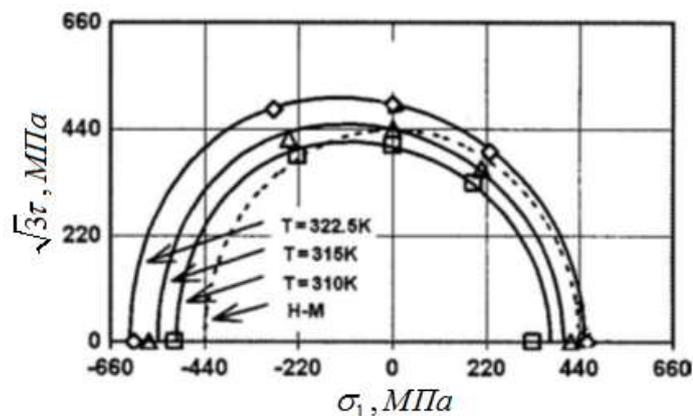


Рис. 1.9. Поверхности $F(\sigma_1, \sqrt{3}\tau)$. Явление сверхупругости, $T_0 = 37^\circ\text{C}$; 42°C ; $49,5^\circ\text{C}$, [77].

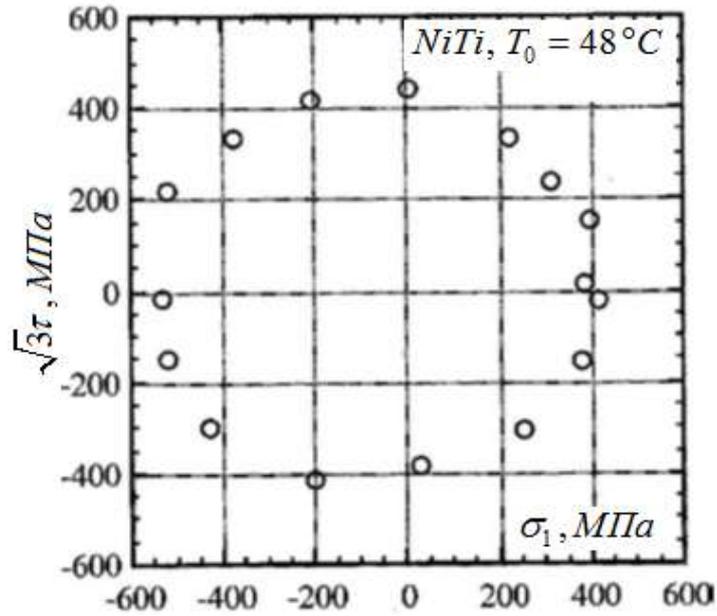


Рис. 1.10. Поверхность $F(\sigma_1, \sqrt{3}\tau)$. Явление сверхупругости, $T_0 = 48^\circ\text{C}$, [78].

Монокристаллические СПФ обладают сильной анизотропией механических свойств, [88-93]. В работе [88] исследован термомеханический отклик образцов из СПФ в рамках явления ПФП под действием постоянной внешней растягивающей и сжимающей нагрузки. В качестве материала образцов выступали монокристаллические никелид-титановые сплавы с включениями меди (NiTiCu) с разными направлениями главных осей анизотропии ([001] и [012]). На рис. 1.11 показаны диаграммы ПФП для направления [001] монокристаллического NiTiCu под действием постоянной внешней нагрузки, инициирующей напряжение в поперечном сечении образца на уровне $|\sigma| = 100\text{МПа}$. Максимальные деформации, достигаемые на конец этапа охлаждения при растяжении более чем в два раза превышают деформации при сжатии. Ранее отмечено, что аналогичные деформации в случае растяжения и сжатия образцов из поликристаллического NiTi [76] и NiTiCu [75] равны. На рис. 1.12 показаны диаграммы ПФП для направления [012] монокристаллического NiTiCu под действием постоянной внешней растягивающей и сжимающей нагрузки, инициирующей напряжение в поперечном сечении образца на уровне $|\sigma| = 125\text{МПа}$. Здесь, максимальная достигаемая деформация в случае растяжения уже превышает в 1,5 раза аналогичную деформацию при сжатии. Такое значительное отличие в уровне накапливаемых деформаций в процессе ПФП при растяжении и сжатии для поликристаллических сплавов NiTiCu с одинаковым химическим составом и термомеханической обработкой не может быть объяснено в рамках явления разноспротивляемости, и является прямым следствием сильнейшей анизотропии механических свойств СПФ.

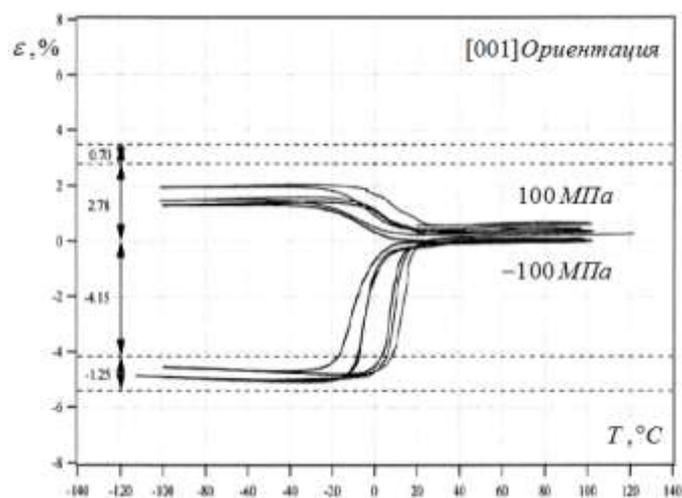


Рис. 1.11. Кривые $\varepsilon^{ph} - T$. Явление ПФП, [001] монокристаллический NiTiCu, [88].

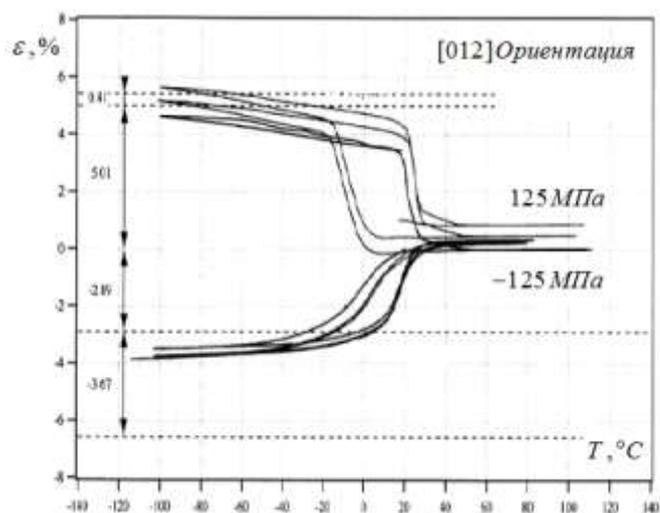


Рис. 1.12. Кривые $\varepsilon^{ph} - T$. Явление ПФП, [012] монокристаллический NiTiCu, [88].

В данном разделе настоящего диссертационного исследования установлено, что явление разнсопротивляемости характерно для поликристаллических СФП: кривые деформирования образцов из таких материалов демонстрируют качественную и количественную зависимость от вида напряженно-деформированного состояния. Исследование аспектов данного влияния позволило сформировать список рекомендаций, которым должна отвечать модель, способная корректно описывать термомеханическое поведение элементов конструкций из СПФ с учетом разнсопротивляемости этих материалов.

1. Явление разнсопротивляемости необходимо учитывать для СПФ с поликристаллической микроструктурой. Моделирование термомеханического поведения монокристаллических СПФ прежде требует учета анизотропии механических свойств материала.

2. Необходимо учитывать существенно различную степень влияния разносопротивляемости на процесс накопления неупругих деформаций согласно механизмам структурного и фазового переходов.
3. Необходимо учитывать тот факт, что диаграмма накопления неупругих деформаций по механизму структурного перехода в случае растягивающей нагрузки чувствительна к виду напряженного состояния, а в случае сжимающей нагрузки – к виду деформированного состояния.
4. Необходимо учитывать зависимость характерных температур фазовых переходов не только от интенсивности действующих механических напряжений, но и от вида напряженно-деформированного состояния.
5. Рекомендуется реализовать возможность учета свойства разномодульности СПФ, поскольку, опираясь на существующие данные, точно установить отсутствие данного явления в аустенитном или мартенситном фазовом состоянии не представляется возможным.

1.2. Обзор моделей термомеханического поведения сплавов с памятью формы

Проектирование конструкций, в основе работы которых лежит активный элемент из СПФ, прежде требует решения соответствующих краевых задач, направленных на качественно и количественно верное воспроизведение термомеханического поведения такого элемента в рамках рассматриваемого явления. Постановке и решению краевых задач всегда предшествует выбор модели поведения используемого материала. В настоящее время, разработано достаточно большое количество моделей, способных описывать широкий класс явлений, присущих СПФ. Качественно, такие модели можно разделить на два основных типа – микроструктурные и феноменологические. Микроструктурные модели развивались в работах [36,94-104].

Для решения краевых задач термомеханики СПФ с учетом разносопротивляемости чаще применяются феноменологические модели [34,36,85,105-115], которые прямо учитывают результаты испытаний образцов из поликристаллических СПФ и позволяют качественно верно описывать макроскопическое поведение этих материалов. Если речь идет именно об учете свойства разносопротивляемости, а не разномодульности [7], то все приведенные модели используют аналоги теории пластического течения [116] для описания процесса накопления неупругих деформаций и позволяют моделировать лишь сверхупругое поведение СПФ, а также явление мартенситной неупругости ввиду схожести результирующих диаграмм деформирования в этих случаях. Так, в работах [34,36,105-115] используется понятие потенциала неупругих деформаций $\Phi(I_1, J_2, J_3)$, в общем случае являющегося функцией инвариантов тензора и

девиатора напряжений и одного или нескольких параметров модели. Скорость накопления неупругих деформаций (1.1) пропорциональна производной от используемого потенциала по компонентам тензора напряжений.

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{phst} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi(I_1, J_2, J_3)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.1)$$

Здесь ε_{ij}^{phst} - тензор неупругих деформаций, скалярный множитель $\dot{\lambda}$, во всех приведенных работах [34,36,105-115] считается пропорциональным параметру фазового состава $\dot{\xi}$. Так, скорость изменения неупругих деформаций оказывается пропорциональной $\dot{\xi} > 0$ на этапе сверхупругого изотермического нагружения, либо $\dot{\xi} < 0$ на этапе изотермической разгрузки.

Представленные работы можно разделить на несколько групп согласно критерию представления потенциала неупругого деформирования: это работы первой группы [31,34,36,105-107], где $\Phi = \Phi(I_1, J_2)$, и работы второй группы [31,36,85,108-115], где $\Phi = \Phi(J_2, J_3)$. Группа три, где $\Phi = \Phi(I_1, J_2, J_3)$, представлена лишь одной работой [36].

Первая группа моделей предполагает зависимость потенциала неупругого деформирования (1.2) от первого инварианта тензора и второго инварианта девиатора напряжений для моделирования явления разнсопротивляемости и записана в форме Прагера-Друкера.

$$\Phi(I_1, J_2) = \beta \sqrt{3J_2} + \gamma I_1 \quad (1.2)$$

Здесь, I_1, J_2 - первый инвариант тензора и второй инвариант девиатора напряжений, β, γ - параметры материала, позволяющие моделировать свойство разнсопротивляемости. Отметим, что в случае $\gamma = 0$ получается классический критерий Мизеса [116,117], в рамках которого возможно описание только изотропных материалов без разнсопротивляемости, при этом параметр β приобретает смысл верхнего предела фазовых деформаций в рамках ассоциированного закона течения. Выполнив дифференцирование потенциала неупругих деформаций (1.2) по компонентам тензора напряжений, перепишем уравнение (1.1) для скорости изменения тензора неупругих деформаций в виде

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{phst} = \dot{\lambda} \left(\frac{3\beta}{2} \frac{\sigma'_{ij}}{\sqrt{3J_2}} + \gamma I \right) \quad (1.3)$$

Здесь, σ'_{ij}, I - девиатор тензора напряжений и единичная матрица соответственно. Таким образом, скорость накопления неупругих деформаций складывается из двух составляющих – девиаторной и объемной. С учетом $\dot{\lambda} \sim \dot{\xi}$, объемная часть неупругих деформаций оказывается пропорциональной параметру фазового состава и не зависит от действующих в данный момент

напряжений. Оба данных положения хорошо согласуются с результатами экспериментов [76]. С другой стороны, первая часть неупругих деформаций, отвечающая за формоизменение представительного объема материала, не зависит от интенсивности действующих напряжений. Данное положение не отвечает результатам экспериментов [5,61,76] и является серьезным недостатком моделей, в которых потенциал пластического деформирования принимается в виде $\Phi = \Phi(I_1, J_2)$.

Вторая группа моделей предполагает зависимость потенциала неупругого деформирования от второго и третьего инвариантов девиатора напряжений для моделирования явления разносопротивляемости. Причем, данная зависимость встречается либо в классической форме Прагера-Лоде, (1.4), в работах [31,105-110,112,114,115] (с точностью до обозначений), либо выраженная через функцию параметра вида девиатора напряжений $f(y_\sigma)$, (1.5), труды [85,111,113]. Известны два вида представления данной функции, с использованием тригонометрических функций (1.6), [111], и с использованием экспоненциальной зависимости (1.7), [113].

$$\Phi_1(J_2, J_3) = m\sqrt{3J_2} + n\frac{J_3}{J_2} - \sigma_0^{AM}(T) \quad (1.4)$$

$$\Phi_2(J_2, J_3) = \gamma\sigma_i f(y_\sigma) - \sigma_0^{AM}(T) \quad (1.5)$$

$$f(y_\sigma) = \cos\left[\frac{\cos^{-1}(1-a(1-y_\sigma))}{3}\right] \quad (1.6)$$

$$f(y_\sigma) = h - c \cdot \exp[-d(y_\sigma + 1)] \quad (1.7)$$

Здесь, m, n, γ - параметры материала, значения которых определяются экспериментально, $\sigma_0^{AM}(T)$ - скалярная величина, пропорциональная пороговой интенсивности напряжений при одноосном нагружении образцов из СПФ в режиме сверхупругости, при которой начинается интенсивное неупругое деформирование материала для фиксированной температуры T . J_2, J_3 - второй и третий инварианты девиаторной части тензора напряжений. Параметр вида девиатора

напряжений принимается в виде $y_\sigma = \frac{27 \det(\sigma'_{ij})}{2 \sigma_i^3} = \frac{27}{2} \frac{J_3}{(3J_2)^{3/2}}$, где предельные значения

$y_\sigma = 1, 0, -1$ достигаются в случае одноосного растяжения, чистого сдвига и одноосного сжатия соответственно. Параметры a, h, c - подбираются согласно результатам экспериментов, причем $a \in (0, 1)$. Вообще, существуют два независимых параметра для описания вида напряженного состояния изотропных материалов – это параметр жесткости напряженного состояния и параметр

вида девиатора напряжений. Поскольку среднее давление не оказывает влияние на накопление неупругих деформаций СПФ, использование первого параметра нецелесообразно. Таким образом, при решении краевых задач о термомеханическом поведении СПФ используется именно параметр вида девиатора напряжений. Выполнив дифференцирование потенциала неупругих деформаций (1.4) по компонентам тензора напряжений, уравнение для скорости изменения тензора неупругих деформаций примет вид

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{phst} = \dot{\lambda} \cdot m \left[\frac{3\sigma'_{ij}}{2\sqrt{3J_2}} + n \frac{\sqrt{3J_2} \left(\sigma'_{ij}\sigma'_{ij} - \frac{2}{3}J_2 \right) I - 3J_3\sigma'_{ij}}{(3J_2)^2} \right] \quad (1.8)$$

Скоростные соотношения для неупругих деформаций (1.8) для случая $\Phi = \Phi_1(J_2, J_3)$, по отношению к случаю $\Phi = \Phi(I_1, J_2)$, (1.3), имеют сложный, нелинейный вид. Использование потенциала пластических деформаций в форме $\Phi = \Phi_2(J_2, J_3)$, (1.5-1.7), сделает скоростные соотношения для неупругих деформаций еще более нелинейными. Принимая во внимание тот факт, что моделирование сверхупругого поведения балок и стержней в одномерной по напряжениям постановке в большинстве случаев требует применения МКЭ даже при условии использования соотношения $\Phi = \Phi(I_1, J_2)$, [34,106,107], получить аналитическое решение даже простейшей краевой задачи основываясь на соотношении $\Phi = \Phi(J_2, J_3)$ будет трудно.

В работе [36] автор сделал попытку описания потенциала неупругого деформирования используя сразу три инварианта тензора напряжений

$$\Phi(I_1, J_2, J_3) = m\sqrt{3J_2} + n\frac{J_3}{J_2} + pI_1 \quad (1.9)$$

Очевидно, что предложенный вариант соотношений (1.9) для $\Phi = \Phi(I_1, J_2, J_3)$, обладает сразу всеми недостатками моделей первой и второй групп. В [36] наглядно продемонстрированы качественные различия в форме поверхности текучести при использовании различных подходов к описанию потенциала неупругого деформирования, рис.1.13.

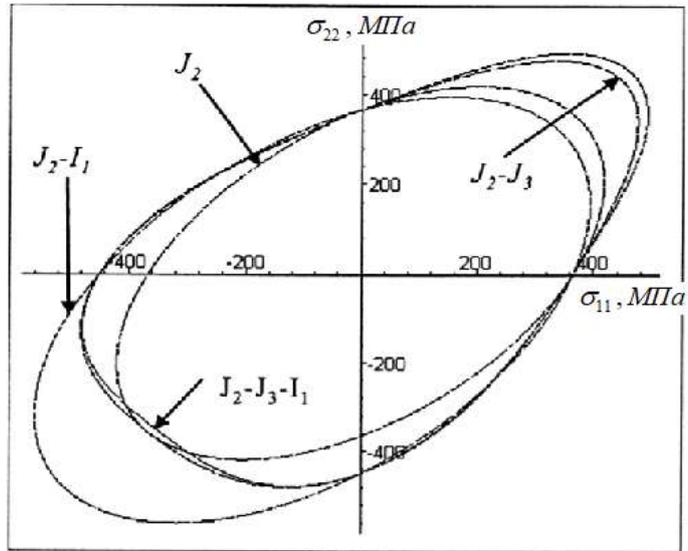


Рис. 1.13. Форма поверхности текучести для различных видов функции Φ , [36].

Ранее отмечалось, почти все известные решения краевых задач термомеханики СПФ с учетом свойства разносопротивляемости посвящены моделированию сверхупругого поведения балок и стержней. При этом, чаще всего используются модели, не учитывающие возможность структурного перехода, это ранние модели Бо и Лагудаса [35] и Лекселлента [117]. Предпочтение отдается именно таким моделям, поскольку, моделирование сверхупругого поведения СПФ без учета структурного перехода позволяет значительно упростить постановку задачи и ограничиться использованием закона пластического течения в пространстве напряжений (1.1) в ассоциированной форме и положить параметр Лагранжа просто равным $\dot{\lambda} = \dot{\xi}$. В таком случае легко заметить, например, при $\xi = 1$ и $\dot{\xi} = 0$ (явление МН), как бы не изменялись действующие напряжения, накопление неупругих деформаций (1.1) происходить не будет. Однако, при использовании модели, в рамках которой возможен структурный переход, например [56-60], имеет смысл воспроизводить закон пластического течения уже в не ассоциированной (в полной) форме, а скоростное соотношение для скалярного множителя Лагранжа представлять в виде $\dot{\lambda} = f(\dot{\xi}, \dot{\sigma}_i)$, например [110], (1.10). Таким образом, скорость накопления неупругих деформаций будет зависеть от приращений параметра фазового состава и интенсивности напряжений, $\dot{\epsilon}_{ij} = f(\dot{\xi}, \dot{\sigma}_i)$, что согласуется с результатами экспериментов и позволит моделировать, в том числе, структурный переход. Однако, возникает новое ограничение: при использовании модели $\Phi = \Phi(I_1, J_2)$ и $\Phi = \Phi(I_1, J_2, J_3)$, легко показать, (1.3, 1.10), что объемная часть скорости накопления неупругих деформаций станет функцией действующих напряжений. Данное положение не согласуется с экспериментальными данными. Таким образом, доступной для использования остается лишь модель $\Phi = \Phi(J_2, J_3)$, а с учетом варианта соотношений для

параметра $d\lambda$ (1.10) и с учетом нелинейной зависимости неупругих деформаций от напряжений (1.8), такой подход к моделированию термомеханического поведения СПФ с учетом свойства разносопротивляемости является достаточно сложным.

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{kl}} d\sigma_{kl} - 2K(\varepsilon^{phst}, T) \frac{\partial K(\varepsilon^{phst}, T)}{\partial T} dT}{2K(\varepsilon^{phst}, T) \frac{\partial K(\varepsilon^{phst}, T)}{\partial \varepsilon^{phst}} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{pq}} \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{pq}}}} \quad (1.10)$$

Как итог, сам подход, предполагающий наличие единого потенциала текучести, в рамках которого происходит описание явления разносопротивляемости для двух различных механизмов накопления неупругих деформаций, является неудачным. Использование двух различных потенциалов, вероятно, позволит упростить результирующие соотношения, однако подход, в рамках которого непосредственно записываются скоростные соотношения для компонент неупругих деформаций кажется куда более привлекательным. Последним предположением отвечает модель нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [56-60], представление полных деформаций в рамках которой имеет аддитивный характер

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{phst} + \varepsilon_{ij}^T \quad (1.11)$$

Здесь, ε_{ij}^{phst} - тензор фазово-структурных (неупругих) деформаций, $\varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^T$ - тензоры упругих, и температурных деформаций, для которых справедливы выражения

$$\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^{\prime e} + \varepsilon_{kk}^e, \varepsilon_{ij}^{\prime e} = \frac{\sigma_{ij}^{\prime}}{2G(q)}, \varepsilon_{kk}^e = \frac{\sigma_{kk}}{K(q)}, \varepsilon_{ij}^T = \alpha_t (T - T_0) \delta_{ij} \quad (1.12)$$

$$\frac{1}{G(q)} = \frac{q}{G_M} + \frac{1-q}{G_A}, \frac{1}{K(q)} = \frac{q}{K_M} + \frac{1-q}{K_A}$$

Тензор фазово-структурных деформаций также имеет аддитивное представление

$$\varepsilon_{ij}^{phst} = \varepsilon_0 q \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^{\prime phst}, d\varepsilon_{ij}^{\prime phst} = d\varepsilon_{ij}^{\prime ph} + d\varepsilon_{ij}^{\prime st} \quad (1.13)$$

Приращение фазовых деформаций формоизменения представительного объема СПФ имеет вид

$$d\varepsilon_{ij}^{\prime ph} = \begin{cases} \omega_{ij}^+ dq, \omega_{ij}^+ = \frac{3}{2} \rho_{ld}(\mu_\sigma) \frac{\sigma_{ij}^{\prime}}{\sigma_i} (1 - qf(q)) F_1(\sigma_i) + f(q) \varepsilon_{ij}^{\prime phst}, dq > 0 \\ \omega_{ij}^- dq, \omega_{ij}^- = \frac{\varepsilon_{ij}^{\prime phst}}{q}, dq < 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

Приращение структурных деформаций на случаи прямого и обратного мартенситного перехода представлено в виде

$$d\varepsilon_{ij}^{st} = \frac{3}{2} \rho_{2d}(\mu_\sigma) \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} q F_2'(\sigma_i) d\sigma_i \quad (1.15)$$

Параметр фазового состава в полных циклах фазовых переходов определяется согласно следующему блоку уравнений

$$q = \frac{1}{2} (1 - \cos(\pi t_\sigma)), t_\sigma = \begin{cases} \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0}, M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\omega_{ij}^+ \sigma'_{ij} + Z(\sigma_{ij}) + \sigma_{kk} \varepsilon_0}{\Delta S_0}, dq > 0 \\ 1 - \frac{A_s^\sigma - T}{A_s^0 - A_f^0}, A_s^\sigma = A_s^0 + \frac{\omega_{ij}^- \sigma'_{ij} Z(\sigma_{ij}) + \sigma_{kk} \varepsilon_0}{\Delta S_0}, dq < 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

$$6Z(\sigma_{ij}) = \frac{\sigma_{kk}^2 \Delta K}{K_A K_M} + \frac{\sigma_i^2 \Delta G}{G_A G_M}, \Delta K = K_A - K_M, \Delta G = G_A - G_M \quad (1.17)$$

Выражение для скорости механической диссипации вытекает из первого и второго законов термодинамики и записывается в виде

$$D_1 = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{phst} - \frac{\partial \Psi}{\partial q} \dot{q} \geq 0, \Psi = \Psi(\sigma_{ij}, T, q) \quad (1.18)$$

Уравнение энергетического баланса замыкает систему определяющих соотношений

$$k_q \Delta T = C_\sigma \dot{T} + T \alpha_i \dot{\sigma}_{kk} - \left(\Delta U_0 + \frac{\sigma_{kk} \varepsilon_0}{3} + \omega_{ij} \sigma'_{ij} \right) \dot{q} - \rho_{2d}(\mu_\sigma) q F_2'(\sigma_i) \sigma_i \dot{\sigma}_i \quad (1.19)$$

В выражениях (1.11-1.19) приняты следующие обозначения: $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^{phst}, \varepsilon_{ij}^T$ - тензоры полных, упругих, фазово-структурных и температурных деформаций, $\sigma_{ij}, \sigma_{kk}, \sigma'_{ij}, \sigma_i$ - тензор, первый инвариант тензора, девиатор тензора и интенсивность напряжений, K, G - утроенный объемный модуль и модуль сдвига, величины, относящиеся к мартенситному фазовому состоянию отмечены нижним индексом «М», к аустенитному фазовому состоянию – «А», α_i - коэффициент линейного температурного расширения, δ_{ij} - единичная матрица, q - параметр фазового состава, имеющий смысл количества мартенситной фазы в аустенитно-мартенситном состоянии, $\rho_{1d}(\mu_\sigma), \rho_{2d}(\mu_\sigma)$ - максимальная интенсивность фазовой и структурной деформаций для заданного значения параметра вида напряженного состояния (μ_σ) , определяемая непосредственно из эксперимента на МН и ПФП соответственно, ε_0 - линейная деформация объемного эффекта реакции ПФП, $F_{1,2}(\sigma_i)$ - интегральные функции распределения интенсивностей микронапряжений в представительном объеме СПФ в аустенитном и мартенситном состоянии соответственно, $f(q)$ - материальная функция, определяющая вклад процессов зарождения и развития мартенситных мезоэлементов в накопление неупругих

деформаций и удовлетворяет неравенству $0 \leq f(q) \leq 1/q$, M_s, M_f, A_s, A_f - характерные температуры начала и окончания процессов прямого и обратного фазового превращений соответственно, верхним индексом «0» отмечены температуры в отсутствии механических напряжений, индексом « σ » - соответствуют некоторому преднагруженному состоянию, Ψ - термодинамический потенциал Гиббса, полагается функцией напряжений, температуры и параметра фазового состава, k_q - коэффициент теплопроводности, ΔT - оператор Лапласа от температуры, C_σ - теплоемкость единицы объема для фиксированных напряжений, $\Delta U_0, \Delta S_0$ - скачки объемных плотностей внутренней энергии и энтропии при переходе из мартенситного в аустенитное фазовое состояние для отсчетной температуры T_0 . Точка в выражениях (1.18, 1.19) обозначает производную от соответствующей переменной по времени.

Накопление неупругих деформаций в элементе конструкции из СПФ существенно зависит от пути термомеханического нагружения образца (достаточно вспомнить диаграмму сверхупругого поведения образца из СПФ, рис. 1.8: одному уровню напряжений могут соответствовать несколько деформированных состояний, даже в рамках одного вида нагружения). Данное положение учитывается в рассматриваемой модели, поскольку соотношения для фазово-структурных деформаций имеют дифференциальную форму (1.13). Выражение для фазовых деформаций (1.15) содержит функцию $f(q)$, использование которой позволяет оценивать деформацию формоизменения представительного объема СПФ не только за счет зарождения, но и за счет развития мартенситных мезоэлементов в процессе ПФП, в конечном счете позволяя воспроизводить термомеханическое поведение образцов из СПФ, наблюдаемое в опытах на ориентированное превращение.

С точки зрения учета свойства разнсопротивляемости СПФ, модель нелинейного деформирования [56-60] также обладает рядом преимуществ по отношению к ранее рассмотренным моделям. Так, аддитивный характер скоростных соотношений для неупругих деформаций (1.13) позволяет учесть разную степень влияния свойства разнсопротивляемости на процессы накопления фазовых и структурных деформаций, путем представления параметров ρ_{1d}, ρ_{2d} и функций $F_{1,2}(\sigma_i)$ зависящими от вида напряженного состояния. Объемная часть неупругих деформаций (1.13) при этом не затрагивается, а ее учет остается качественно и количественно верным: такая деформаций не зависит от действующих напряжений и накапливается пропорционально изменению параметра фазового состава. При таком подходе, соотношения (1.16) позволят учесть влияние вида напряженного состояния на характерные температуры начала прямого и обратного фазовых переходов M_s^σ, A_s^σ . Температуры окончания фазовых переходов не имеют априорных соотношений, а определяются непосредственно из

решения как актуальная температура образца в момент достижения параметром фазового состава предельных значений ($q = 0$ или $q = 1$). Простейшая модификация соотношений (1.12) позволяет воспроизвести явление разномодульности, в случае, если рассматриваемый материал окажется таковым.

Таким образом, модель нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях позволяет моделировать отклик образцов из этих материалов для широкого класса явлений, а ее простейшая модификация позволяет качественно верно учитывать разнсопротивляемость при решении краевых задач изгиба для активных элементов конструкций.

Глава 2. Изотермический изгиб пластинок и балок из сплавов с памятью формы в мартенситном фазовом состоянии

Явление мартенситной неупругости заключается в существенно нелинейном характере деформирования образцов из СПФ в мартенситном фазовом состоянии при их изотермическом нагружении. При этом материал образца накапливает неупругие деформации (до 10%) по механизму структурного перехода, заключающегося в раздвойниковании и переориентации мартенсита. Считается, что материал образца первоначально находится в состоянии хаотического мартенсита, а накопление структурных деформаций происходит от момента начала нагружения (отсутствует пороговое значение напряжений начала накопления неупругих деформаций, [64-71]). Перевод материала образца в состояние хаотического мартенсита обычно происходит проведением ПФП в отсутствие механических напряжений, при этом накапливаются объемные деформации фазового превращения (эффект объемной реакции). В свою очередь, деформирование представительного объема СПФ по механизму структурного перехода сопровождается сильным формоизменением без изменения объема, таким образом, структурные деформации являются девиатором, (1.15).

На практике, явление мартенситной неупругости чаще всего используется для задания первоначальной формы элементу конструкции – перевод в активное состояние. Таким образом, проектирование реальных конструкций и оценка НДС их элементов невозможны без решения соответствующих краевых задач, посвященных изотермическому поведению таких элементов в мартенситном фазовом состоянии.

В данной главе рассматриваются задачи об изотермическом чистом и консольном изгибе балок сплошного прямоугольного сечения, а также задача о цилиндрическом изгибе пластинки постоянной толщины из СПФ под действием монотонно возрастающего изгибающего момента (сосредоточенной силы в случае консольного изгиба). Принимаются обычные кинематические гипотезы Бернулли-Эйлера (касательные и поперечные нормальные напряжения считаются малыми). В задаче о цилиндрическом изгибе пластинки принимается набор гипотез Кирхгоффа-Лява, а также гипотеза о плоском деформированном состоянии в отношении второй компоненты тензора полных деформаций. Материал балок и пластинки находится в мартенситном состоянии, таким образом параметр фазового состава $q=1$ по всему сечению и не меняется в процессе деформирования. Расчеты ведутся для значений параметров, соответствующих равноатомному никелиду титана.

Модель нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях предполагает представление девиатора неупругих деформаций в достаточно сложной, дифференциальной форме (1.13-1.15). Однако, при выполнении группы условий, данное

выражение может быть существенно упрощено. В частности, если происходит пропорциональное изменение компонент девиатора напряжений, отсутствует разгрузка, а процесс начинается из полностью аустенитного состояния или из состояния полностью сдвойникового мартенсита и выполняются соотношения (2.1), то рассматриваемый процесс можно классифицировать как активный, а нагружение считается пропорциональным. Положения об активных процессах пропорционального нагружения строго доказаны в рамках используемой модели [56-60], и, при выполнении вышеуказанных условий, девиатор фазово-структурных деформаций перестает быть функцией истории изменения независимых переменных σ'_{ij}, q и определяется лишь начальной и конечной точками процесса. Таким образом, соотношения (1.13-1.15) могут быть проинтегрированы, и, при начальных условиях $\varepsilon_{ij}^{phst}(q_0, \sigma_{ij}^{r0}) = \varepsilon_{ij}^0$, выражение для девиатора неупругих деформаций принимает конечный вид (2.2). Если начальные условия удовлетворяют соотношению $\varepsilon_{ij}^0 = \frac{3}{2} \frac{\sigma_{ij}^{r0}}{\sigma_i^0} \rho_d q_0$, выражение (2.2) дополнительно упрощается, принимая вид (2.3).

$$\begin{cases} F_1(\sigma_i) = F_2(\sigma_i) = F(\sigma_i) \\ \rho_1(\mu_\sigma) = \rho_2(\mu_\sigma) = \rho(\mu_\sigma) \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_{ij}^{phst} = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} F_{1,2}(\sigma_i) \rho_d q + \left(\varepsilon_{ij}^0 - \frac{3}{2} \frac{\sigma_{ij}^{r0}}{\sigma_i^0} \rho_d q_0 \right) \exp\left(\int_{q_0}^q f(q) dq \right) \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_{ij}^{phst} = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} F_{1,2}(\sigma_i) \rho_d q \quad (2.3)$$

Покажем, что рассматриваемые задачи об изотермическом чистом и консольном изгибе балок, а также цилиндрическом изгибе пластинки из СПФ в мартенситном состоянии правомерно решать с использованием гипотез об АППН. При решении задач об изгибе балок приняты кинематические гипотезы Бернулли-Эйлера, и только одна компонента тензора напряжений будет отлична от нуля. Таким образом, условие пропорционального изменения компонент девиатора напряжений выполняется для случая изгиба балок. При решении задачи о цилиндрическом изгибе пластинки пропорциональное изменение компонент девиатора напряжений будет установлено в соответствующем разделе. Ранее уже отмечалось, что материал балок и пластинки первоначально находится в состоянии сдвойникового (хаотического) мартенсита ($q = 1$), а нагружение происходит монотонно возрастающим изгибающим моментом или сосредоточенной силой (отсутствует разгрузка). Таким образом, принимается следующее значение параметра $\rho(\mu_\sigma) = \rho_2(\mu_\sigma)$, а в качестве функции распределения интенсивностей микронапряжений $F(\sigma_i) = F_2(\sigma_i)$.

2.1. Решение задачи об изгибе балок из сплава с памятью формы с учетом разнсопротивляемости

В виду малости деформаций объемного эффекта реакции фазового перехода по отношению к величине фазово-структурных деформаций, соответствующая величина в (1.13) опускается, и выражение для тензора неупругих деформаций запишется в виде

$$\varepsilon_{ij}^{phst} = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} F_2(\sigma_i) \rho_d q \quad (2.4)$$

Левую и правую часть выражения (2.4) умножим саму на себя и свернем по двум индексам. Принимая во внимание, что $\varepsilon_i^{phst} = \sqrt{2\varepsilon_{ij}^{phst} \varepsilon_{ij}^{phst} / 3}$, а также $q=1$ в режиме МН, интенсивность неупругих деформаций можно переписать в виде

$$\varepsilon_i^{phst} = F_2(\sigma_i) \rho_d \quad (2.5)$$

Поскольку поиск решения задачи ведется в рамках гипотез Бернулли-Эйлера, в одномерной по напряжениям постановке, то $|\varepsilon^{phst}| = \varepsilon_i^{phst}$, $|\sigma| = \sigma_i$, а выражение для продольной неупругой деформации примет вид

$$|\varepsilon^{phst}| = F_2(\sigma) \rho_d \quad (2.6)$$

В работе [72] установлено, что в качестве интегральной функции распределения интенсивности микронапряжений в рамках явления МН хорошо подходит распределение Вейбулла $F_2(\sigma) = 1 - \exp(-\sigma^\alpha)$, $\sigma \geq 0$, аргумент которой удобно обезразмерить путем деления на некоторое характерное напряжение σ_0 : $\varphi_2(\sigma/\sigma_0) = F_2(\sigma)$.

Представление выражения для продольных неупругих деформаций в виде (2.7) позволяет выполнить учет разнсопротивляемости материала.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_t^{phst} = \rho_t \varphi_t \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0t}} \right), \varphi_t \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0t}} \right) = 1 - \exp \left(- \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0t}} \right)^{\alpha_t} \right), \sigma > 0 \\ \varepsilon_c^{phst} = \rho_c \varphi_c \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0c}} \right), \varphi_c \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0c}} \right) = - \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{|\sigma|}{\sigma_{0c}} \right)^{\alpha_c} \right) \right), \sigma < 0 \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Здесь и далее по тексту, величины, обозначенные нижним индексом «*t*» - относятся к растяжению, индексом «*c*» - к сжатию. Известно, при изгибе балки в рамках классических гипотез Бернулли-Эйлера, часть ее поперечного сечения испытывает напряжения растяжения, а другая часть – напряжения сжатия. Плоскость, разделяющая эти две части сечения, называется нейтральной (НП), а продольные деформации на ней отсутствуют. Если материал балки является

разносopотивляющимся (или разномодульным, в случае обычного упругого материала), положение НП будет отличным от плоскости симметрии балки, рис. 2.1. Поскольку поиск решения задачи происходит в одномерной по напряжениям постановке, вид напряженного состояния при переходе через НП меняется скачкообразно, а в пределах верхней и нижней полуплоскостей сечения не меняется вовсе. Таким образом, зависимость параметров материала ρ_t, σ_0, α от вида напряженного состояния правомерно представить в простой форме – достаточно использовать различные значения этих параметров в случае растягивающих и сжимающих напряжений: $\rho_t, \sigma_{0t}, \alpha_t$ для $\sigma > 0$ и $\rho_c, \sigma_{0c}, \alpha_c$ для $\sigma < 0$. Сами значения параметров $\rho_t, \sigma_{0t}, \alpha_t$ и $\rho_c, \sigma_{0c}, \alpha_c$ определяются из экспериментов на одноосное растяжение и сжатие в режиме МН соответственно. Функция φ_c доопределена нечетным образом: $\varphi_c(x) = -\varphi_c(|x|), x < 0$.

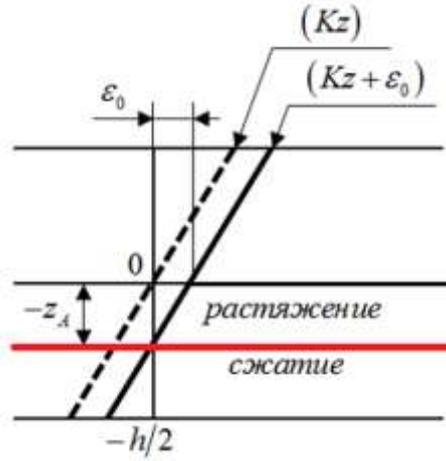


Рис. 2.1 Поперечное сечение балки. Положение НП.

В рамках рассматриваемой задачи упругие деформации полагаются малыми по отношению к структурным, поэтому выражение для полных деформаций (1.11) с учетом (2.7) принимает вид

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \rho_t \varphi_t \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0t}} \right), \varphi_t \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0t}} \right) = 1 - \exp \left(- \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0t}} \right)^{\alpha_t} \right), \sigma > 0 \\ \varepsilon_c = \rho_c \varphi_c \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0c}} \right), \varphi_c \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0c}} \right) = - \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{|\sigma|}{\sigma_{0c}} \right)^{\alpha_c} \right) \right), \sigma < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Согласно гипотезе плоских сечений, полная продольная деформация волокна в поперечном сечении балки на расстоянии z от плоскости симметрии балки определяется согласно зависимости:

$$\varepsilon = kz + \varepsilon_0 \quad (2.9)$$

где z - поперечная координата в сечении балки, отсчитываемая от плоскости симметрии, k - кривизна балки. Параметр ε_0 имеет смысл продольной деформации волокон в плоскости

симметрии балки, и может быть представлен как $\varepsilon_0 = kA$, где $A = -z_A$ координата нейтральной плоскости, рис. 2.1. Причем, некоторые предварительные соображения позволяют поставить в соответствие положительной величине $A > 0$ смещение нейтральной плоскости в сторону сжатых волокон (в нижнюю полуплоскость сечения балки).

Продольные напряжения могут быть выражены из (2.8) и с учетом (2.9) представлены в виде

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_{0t} \varphi_t^{-1} \left(\frac{kz + \varepsilon_0}{\rho_t} \right), 0.5 \geq z \geq z_a \\ \sigma = -\sigma_{0c} \varphi_c^{-1} \left(-\frac{(kz + \varepsilon_0)}{\rho_c} \right), -0.5 \leq z < z_a \end{cases} \quad (2.10)$$

где функции $\varphi_t^{-1}, \varphi_c^{-1}$ обратные к φ_t, φ_c . Изгибающий момент в рассматриваемом сечении балки определяется согласно принципу суперпозиции интегралов от сжимающих и растягивающих напряжений по соответствующим областям сечения Φ_c и Φ_t , и может быть записан в виде:

$$M = \sigma_{0c} \int_{\Phi_c} \varphi_c^{-1} \left(\frac{\kappa z + \varepsilon_0}{\rho_c} \right) z dz - \sigma_{0t} \int_{\Phi_t} \varphi_t^{-1} \left(-\frac{\kappa z + \varepsilon_0}{\rho_t} \right) z dz \quad (2.11)$$

Соотношения (2.10) устанавливают вид зависимости продольных напряжений от двух независимых переменных: k и ε_0 (с учетом $q=1$ для явления МН). Таким образом, для известной кривизны k , продольные напряжения в поперечном сечении балки опередить нельзя без знания величины ε_0 , в этом смысле задача считается статически неопределимой. Для определения положения НП необходимо использовать дополнительное соотношение, в качестве которого удобно использовать уравнение равновесия отсеченной части балки в проекции на продольную ось

$$\sigma_{0c} \int_{\Phi_c} \varphi_c^{-1} \left(\frac{\kappa z + \varepsilon_0}{\rho_c} \right) dz - \sigma_{0t} \int_{\Phi_t} \varphi_t^{-1} \left(-\frac{\kappa z + \varepsilon_0}{\rho_t} \right) dz = 0 \quad (2.12)$$

Объединим уравнения (2.8), (2.10-2.12) в систему, позволяющую описать механическое поведение балки из СПФ в режиме МН с учетом разносопротивляемости этого материала:

$$\begin{cases}
\varepsilon = \rho_t \varphi_t(s), s > 0 \\
\varepsilon = -\rho_c \varphi_c(ss_{ic}), s < 0 \\
s = \varphi_t^{-1}(y(\xi+a)/(\rho_t)), 0.5 \geq \xi \geq -a \\
s = -s_{ic}^{-1} \varphi_c^{-1}(-y(\xi+a)/(\rho_c)), -0.5 \leq \xi < -a \\
\mu = \int_{-a}^{0.5} \varphi_t^{-1}\left(\frac{y(\xi+a)}{\rho_t}\right) \xi d\xi - \frac{1}{s_{ic}} \int_{-0.5}^a \varphi_c^{-1}\left(-\frac{y(\xi+a)}{\rho_c}\right) \xi d\xi \\
s_{ic} \int_{-a}^{0.5} \varphi_t^{-1}\left(\frac{y(\xi+a)}{\rho_t}\right) d\xi - \int_{-0.5}^a \varphi_c^{-1}\left(-\frac{y(\xi+a)}{\rho_c}\right) d\xi = 0
\end{cases} \quad (2.13)$$

Здесь приняты следующие обозначения и безразмерные величины: b, h - параметры сечения балки, ширина и высота соответственно, $s = \sigma/\sigma_{0t}$ - безразмерные продольные напряжения, $\xi = z/h$ - безразмерная поперечная координата, значения которой лежат в пределах $-0.5 \leq \xi \leq 0.5$, $y = kh$ - безразмерная кривизна, имеющая физический смысл продольной деформации волокна на удалении h от плоскости симметрии, $a = \varepsilon_0/kh$ - безразмерное положение нейтральной плоскости, отсчитываемое от плоскости симметрии, $\mu = M/\sigma_{0t}bh^2$ - безразмерный изгибающий момент, $s_{ic} = \sigma_{0t}/\sigma_{0c}$ - безразмерный параметр.

Система соотношений (2.13) определяет механическое поведение балки из СПФ с учетом разносопротивляемости этого материала при изотермическом нагружении монотонно возрастающим изгибающим моментом. Материал балки в начальный момент находится в состоянии хаотического мартенсита.

Последнее уравнение (равновесия в проекции на продольную ось) системы (2.13) имеет особенность в области малых значений безразмерного изгибающего момента $\mu \rightarrow 0$. Так, если $\mu \rightarrow 0$, значение безразмерной кривизны балки также мало $y \rightarrow 0$, а уравнение равновесия вырождается в равенство вида $0 = 0$, положение нейтральной плоскости из которого в начальный момент нагружения определить не удастся. Для разрешения данной проблемы предлагается представить логарифмическую функцию в виде ряда Тейлора, причем, ограничимся лишь первым членом ряда в силу $x \rightarrow 0$

$$\varphi^{-1}(x) = (-\ln(1-x))^{1/\alpha} \approx x^{1/\alpha} + \dots \quad (2.14)$$

Для удобства представления дальнейших рассуждений введем обозначение $(1/\alpha_c) = \bar{\alpha}_c, (1/\alpha_t) = \bar{\alpha}_t$. С учетом принятого обозначения и выражения (2.14), уравнение равновесия в проекции на продольную ось примет вид

$$\left(\frac{y}{\rho_t}\right)^{\bar{\alpha}_t} \int_0^{0.5+a} (\xi+a)^{\bar{\alpha}_t} d(\xi+a) = \frac{-1}{s_{ic}} \left(\frac{y}{\rho_c}\right)^{\bar{\alpha}_c} \int_{a-0.5}^0 (-\xi-a)^{\bar{\alpha}_c} d(-\xi-a) \quad (2.15)$$

Проинтегрируем полученное выражение и перегруппируем входящие в него переменные следующим образом

$$(y)^{\bar{\alpha}_t - \bar{\alpha}_c} = D \frac{(0,5 - a)^{1 + \bar{\alpha}_c}}{(0,5 + a)^{1 + \bar{\alpha}_t}} \quad (2.16)$$

где $D = s_{tc}^{-1} \frac{(\rho_t)^{\bar{\alpha}_t}}{(\rho_c)^{\bar{\alpha}_c}} \frac{\bar{\alpha}_t + 1}{\bar{\alpha}_c + 1}$ - некоторый параметр, определяемый только константами материала.

Выражение (2.16) позволяет установить положение НП при $y \rightarrow 0$. Рассмотрим несколько случаев. Если $\bar{\alpha}_t > \bar{\alpha}_c, (\alpha_t < \alpha_c)$, то левая часть уравнения (2.16) будет стремиться к 0. Тогда, правая часть уравнения (2.16) также обязана стремиться к 0, (2.17). Данному положению отвечают два возможных значения положения НП: $a = 0,5$ и $a = \infty$. Поскольку положение НП не может выходить за физические пределы сечения балки, остается только одно возможное значение $a = 0,5$.

$$\bar{\alpha}_t > \bar{\alpha}_c, (\alpha_t < \alpha_c), \lim_{y \rightarrow 0} (y)^{\bar{\alpha}_t - \bar{\alpha}_c} = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} D \frac{(0,5 - a)^{1 + \bar{\alpha}_c}}{(0,5 + a)^{1 + \bar{\alpha}_t}} = 0 \quad (2.17)$$

С другой стороны, если $\bar{\alpha}_t < \bar{\alpha}_c, (\alpha_t > \alpha_c)$, левая часть уравнения (2.16) будет стремиться к ∞ . Следовательно, правая часть этого же уравнения также обязана стремиться к бесконечности, (2.18). Данному положению отвечают два возможных значения положения НП: $a = -0,5$ и $a = \infty$. Опять же, поскольку положение НП не может выходить за физические пределы сечения балки, остается только одно возможное значение $a = -0,5$.

$$\bar{\alpha}_t < \bar{\alpha}_c, (\alpha_t > \alpha_c), \lim_{y \rightarrow 0} (y)^{\bar{\alpha}_t - \bar{\alpha}_c} = \infty \Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} D \frac{(0,5 - a)^{1 + \bar{\alpha}_c}}{(0,5 + a)^{1 + \bar{\alpha}_t}} = \infty \quad (2.18)$$

Существует третий случай, когда $\bar{\alpha}_t = \bar{\alpha}_c = \bar{\alpha}, (\alpha_t = \alpha_c)$. Тогда, предельное положение НП определяется из линейного уравнения (2.19).

$$D \left(\frac{0,5 - a}{0,5 + a} \right)^{1 + \bar{\alpha}} - 1 = 0 \Rightarrow a = 0,5 \frac{1 - \bar{D}}{1 + \bar{D}}, \quad \bar{D} = \left(s_{tc} \left(\frac{\rho_c}{\rho_t} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{\alpha / (\alpha + 1)} \quad (2.19)$$

Таким образом, положение нейтральной плоскости в начальный момент нагружения является функцией только параметров материала (2.20) и стремится к верхней кромке сечения балки, продольные волокна которой испытывают напряжения сжатия в случае $\bar{\alpha}_t > \bar{\alpha}_c, (\alpha_t < \alpha_c)$, к нижней кромке балки, продольные волокна которой испытывают напряжения растяжения в

случае $\bar{\alpha}_t < \bar{\alpha}_c, (\alpha_t > \alpha_c)$, или определяются из линейного уравнения (2.19) в случае $\bar{\alpha}_t = \bar{\alpha}_c = \bar{\alpha}, (\alpha_t = \alpha_c)$.

$$a = \begin{cases} 0,5 \text{ при } \bar{\alpha}_t > \bar{\alpha}_c, (\alpha_t < \alpha_c), \\ 0,5 \frac{1-\bar{D}}{1+\bar{D}}, \text{ при } \bar{\alpha}_t = \bar{\alpha}_c, (\alpha_t = \alpha_c), \\ -0,5 \text{ при } \bar{\alpha}_t < \bar{\alpha}_c, (\alpha_t > \alpha_c). \end{cases} \quad (2.20)$$

Предлагается следующий алгоритм решения системы (2.13). Сечение балки в направлении поперечной оси ξ дискретизируется достаточно большим количеством точек. В начальный момент времени положение НП считается известным, (2.20). Параметры μ, ε, s, y в начальный момент принимаются равными $\mu_0 = \varepsilon_{00} = s_{00} = y_0 = 0$. Далее, удобно воспользоваться полуобратным методом. Сначала необходимо задать массив значений для безразмерной кривизны $y = \{0..y_{\max}\}$. Для каждого заданного значения безразмерной кривизны y_j , на основе последнего уравнения равновесия (2.13) выполняется поиск актуальных положений НП a_j . Затем, на основе установленных пар значений кривизны и НП (y_j, a_j) , с помощью предпоследнего уравнения (2.13) определяется актуальные значения безразмерного изгибающего момента μ_j . Далее, средний блок уравнений системы (2.13) позволяет установить распределение безразмерных нормальных напряжений $s_j(\xi)$, а верхний блок уравнений – распределение продольных деформаций $\varepsilon_j(\xi)$ по высоте сечения балки ξ .

Ниже представлены результаты численного моделирования явления мартенситной неупругости в балке из СПФ под действием монотонно возрастающего изгибающего момента. Приведены графические зависимости безразмерной кривизны y и безразмерного положения нейтральной плоскости a от величины безразмерного изгибающего момента μ , рис. 2.3, 2.4 соответственно. Параметры материалов для кривых 1-6 указаны в табл. 2.1 под советующими номерами. Так, параметры материала для кривой 1 соответствуют образцам из равноатомного никелида титана ($Ni_{50}Ti_{50}$), прошедшего температурную обработку – отжиг при температуре $450^{\circ}C$ в течении 30 минут, [72,74]. Кривые 2-4 демонстрируют влияние каждого из параметров материала, используемых для аппроксимации диаграммы МН, на поведение исследуемых зависимостей. Параметры материала 5 установлены таким образом, чтобы кривые деформирования для растяжения и сжатия пересекались в области небольших значений напряжений, [62], рис. 2.2. Кривая 6 предполагает одинаковые значения параметров материала

при одноосном растяжении и сжатии, таким образом, она не учитывает явление разносопротивляемости.

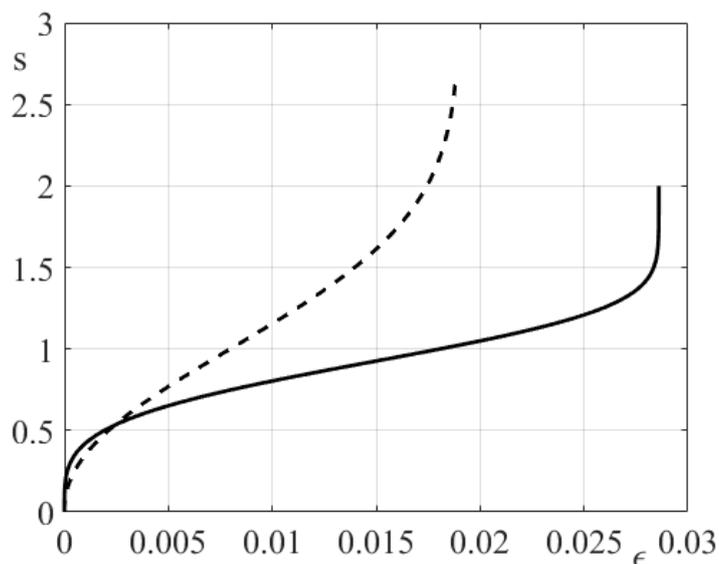


Рис. 2.2. Диаграмма МН для материала 5.

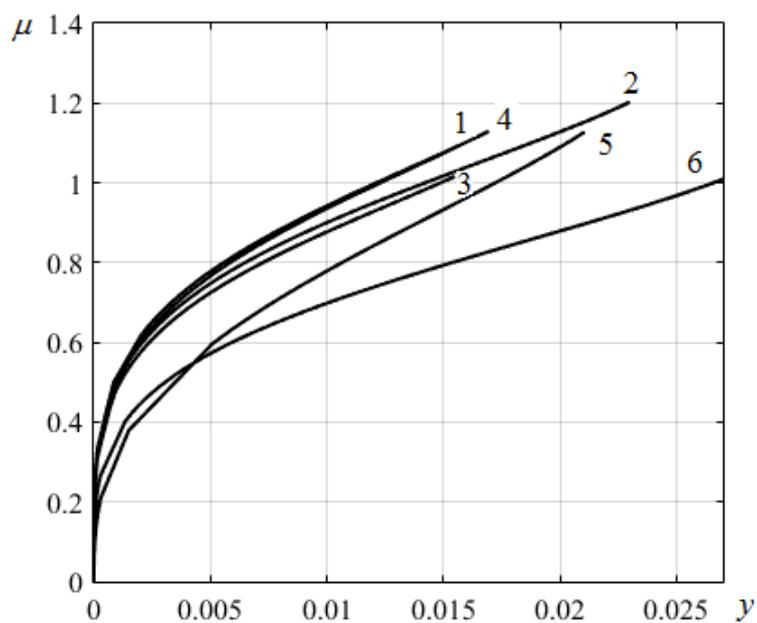


Рис. 2.3. Кривые $\mu - y$, материалы 1-6.

На рис. 2.3. показана зависимость кривизны балки от безразмерного изгибающего момента для материалов 1-6. Обычно, при решении задач изгиба балочных элементов конструкций из СПФ без учета разносопротивляемости, параметры материала выбираются в соответствии с результатами экспериментов на одноосное растяжение образцов из аналогичного материала. Поскольку при испытаниях образцы из СПФ демонстрируют меньшую податливость при одноосном сжатии, чем при одноосном растяжении, очевидно, что учет разносопротивляемости материала при изгибе балки приведет к уменьшению прогиба, а соответственно и кривизны для одного и того же значения изгибающего момента по сравнению со случаем одинаково сопротивляющегося материала. Так, для средних и больших значений безразмерного

изгибающего момента $\mu = 0,6..1$, наблюдается двукратное отличие в результирующей кривизне балки для случаев разно- и одинаково сопротивляющегося материала, кривые 1 и 6. Наибольшее влияние на поведение рассматриваемой зависимости оказывают параметры материала: максимальная деформация ρ_d и параметра σ_0 , в то время как влияние показателя α в распределении Вэйбулла оказывается существенно ниже. В области малых значений изгибающего момента $\mu = 0,1..0,5$ материал 5 оказывается несколько податливее, чем одинаково сопротивляющийся материал 6. Дальнейший рост изгибающего момента меняет картину на противоположную, материал 6 демонстрирует значительную податливость в сравнении с материалом 5.

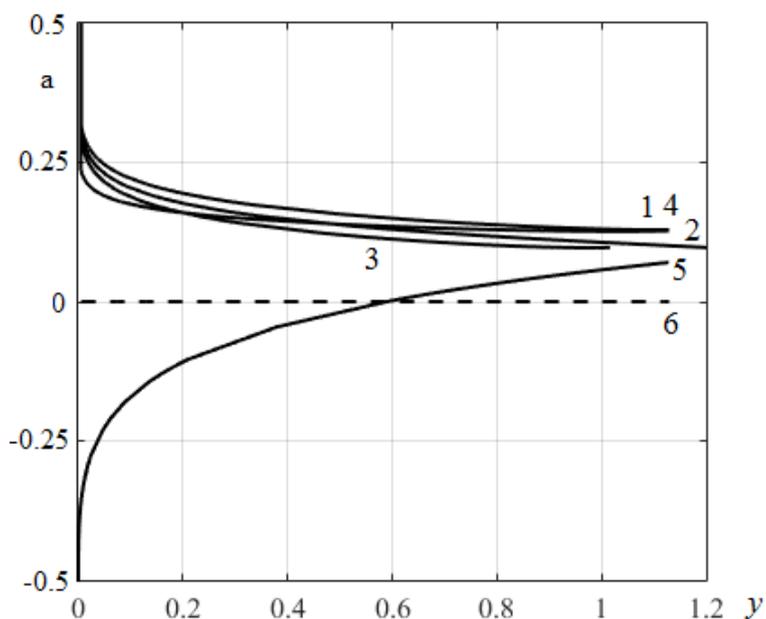


Рис. 2.4. Кривые $a - y$, материалы 1-6.

На рис. 2.3. показано изменение положения НП, связанное с ростом кривизны балки y в процессе ее нагружения изгибающим моментом для материалов 1-6. Напомним, что положительной величине a соответствует смещение НП в сторону сжатых волокон. Так, материалы 1-4 демонстрируют смещение НП в сторону сжатых волокон на 10-15% от высоты сечения балки на протяжении всего активного процесса нагружения. В начальный момент времени, положение НП отвечает $a_0 = 0,5$, что согласуется с полученными результатами (2.20), поскольку материалы 1-4 отвечают условию $\alpha_i < \alpha_c$. В случае материала 5, для которого справедливо неравенство $\alpha_i > \alpha_c$, положение НП отвечает $a_0 = -0,5$, что опять же согласуется с (2.20). Материал 6 является одинаково сопротивляющимся, а положение НП в данном случае закономерно совпало с плоскостью симметрии балки.

Таблица 2.1. Параметры $\rho_t, \rho_c, \sigma_{0t}, \sigma_{0c}, \alpha_c, \alpha_t$ материалов 1-6.

Номер кривой	Вид нагрузки	ρ_d , доли	σ_0 , МПа	α
Кривая 1	Растяжение	0,0286	144,7	3,847
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88
Кривая 2	Растяжение	0,0286	144,7	3,847
	Сжатие	0,0209	216,6	4,88
Кривая 3	Растяжение	0,0286	144,7	3,847
	Сжатие	0,0132	180,65	4,88
Кривая 4	Растяжение	0,0286	144,7	3,847
	Сжатие	0,0132	216,6	4,3635
Кривая 5	Растяжение	0,0286	144,7	3,847
	Сжатие	0,019	190,6	2,2
Кривая 6	Растяжение	0,0286	144,7	3,847
	Сжатие	0,0286	144,7	3,847

Таким образом, явление разнсопротивляемости оказывает значительное влияние на податливость и, соответственно, на кривизну балки в процессе ее изгиба в режиме МН. При этом, положение нейтральной плоскости сильно отклоняется от плоскости симметрии балки (до 15% по высоте сечения). В рамках рассматриваемой постановки задачи установлено, что положение НП в начальный момент стремится к одной из границ поперечного сечения балки и определяется соотношением показателей степени в распределении Вэйбулла. Данное положение требует дальнейшего анализа уже при решении задач о чистом изгибе балки в режиме МН в более общей постановке, например, с учетом упругой составляющей полных деформаций, чему и посвящен следующий параграф настоящего диссертационного исследования.

2.2. Решение задачи об изгибе балок из сплава с памятью формы с учетом упругих деформаций и разнсопротивляемости

Данный параграф посвящен решению задачи о чистом и консольном изотермическом изгибе балки из СПФ в мартенситном фазовом состоянии. Выполнен учет свойства разнсопротивляемости, а поиск решения задачи ведется в одномерной по напряжениям постановке. Набор гипотез, принятый в прошлой задаче актуален и для рассматриваемой задачи, кроме одной: здесь учитывается упругая составляющая полных продольных деформаций. Таким образом, соотношения (2.8) для полных продольных деформаций теперь имеют вид:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{plast} \quad (2.21)$$

где, ε^e - упругие продольные деформации, для которых справедливы соотношения

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E_M} \quad (2.22)$$

Здесь E_M - модуль Юнга в мартенситном фазовом состоянии. С учетом разнсопротивляемости материала, выражений (2.8) и (2.21-2.22), полные продольные деформации могут быть представлены в виде

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \frac{\sigma}{E_{Mt}} + \rho_t \varphi_t \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0t}} \right), \varphi_t \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0t}} \right) = 1 - \exp \left(- \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0t}} \right)^{\alpha_t} \right), \sigma > 0 \\ \varepsilon_c = \frac{\sigma}{E_{Mc}} + \rho_c \varphi_c \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0c}} \right), \varphi_c \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0c}} \right) = - \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{|\sigma|}{\sigma_{0c}} \right)^{\alpha_c} \right) \right), \sigma < 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

В предыдущем параграфе было показано, что при решении задачи об изгибе балки в одномерной постановке, вид напряженного состояния при переходе через НП меняется скачкообразно. Таким образом, зависимость параметров материала ρ_d, σ_0, α от вида напряженного состояния снова представлена в простейшей форме – использованы различные значения этих параметров в случае растягивающих и сжимающих напряжений: $\rho_t, \sigma_{0t}, \alpha_t$ для $\sigma > 0$ и $\rho_c, \sigma_{0c}, \alpha_c$ для $\sigma < 0$. Помимо разнсопротивляемости, выражение (2.23) позволяет учитывать и разномодульность материала, путем использования различных значений модуля Юнга $E_M = E_{Mt}$ при $\sigma > 0$ и $E_M = E_{Mc}$ при $\sigma < 0$. В отличие от предыдущей задачи, соотношения (2.23) не позволяют в явном виде получить выражение для продольных напряжений. Таким образом, помимо положения нейтральной плоскости, распределение нормальных продольных напряжений в поперечном сечении балки также заранее неизвестно. В связи с этим, уравнения (2.11) и (2.12) для определения изгибающего момента и уравнение равновесия в проекции на продольную ось требуют записи в более общем виде:

$$M = \int_{\Phi_c} \sigma_c(z) z dz + \int_{\Phi_t} \sigma_t(z) z dz \quad (2.24)$$

$$\int_{\Phi_c} \sigma_c(z) dz + \int_{\Phi_t} \sigma_t(z) dz = 0 \quad (2.25)$$

Здесь, Φ_c, Φ_t - области в поперечном сечении балки, в пределах которых волокна балки испытывают сжимающие или растягивающие напряжения соответственно. Объединим выражения (2.9), (2.23-2.25) в систему уравнений (2.26), позволяющую описать механическое поведение балки из СПФ в режиме МН под действием монотонно возрастающего изгибающего момента.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = y\xi + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = ya \\ \varepsilon = \frac{s_t}{e_{mt}} + \rho_t \varphi_t(s_t), \quad s > 0 \\ \varepsilon = \frac{s_c}{e_{mc}} + \rho_c \varphi_c(s_c s_{ic}), \quad s < 0 \\ \mu = \int_{-a}^{0.5} s_t(\xi) \xi d\xi + \int_{-0.5}^a s_c(\xi) \xi d\xi \\ \int_{-a}^{0.5} s_t(\xi) d\xi + \int_{-0.5}^{-a} s_c(\xi) d\xi = 0 \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Здесь дополнительно введены следующие безразмерные величины:

$e_{mt} = E_{Mt} / \sigma_{0t}$, $e_{mc} = E_{Mc} / \sigma_{0t}$ - безразмерные модули упругости первого рода в мартенситном фазовом состоянии.

Система соотношений (2.26) определяет механическое поведение балки из СПФ с учетом разносопротивляемости и разномодульности этого материала при изотермическом нагружении монотонно возрастающим изгибающим моментом. Материал балки в начальный момент находится в состоянии хаотического мартенсита.

Как и при решении предыдущей задачи, последнее уравнение (равновесия в проекции на продольную ось) системы (2.26) требует дополнительного исследования в области малых значений безразмерного изгибающего момента $\mu \rightarrow 0$. Для этого предпримем следующие рассуждения. Поскольку $\mu \rightarrow 0$, то $y \rightarrow 0$, и, как следствие, продольные напряжения также малы, $s \rightarrow 0$. Представим функцию распределения интенсивности микронапряжений в виде ряда Тейлора и ограничимся лишь первым членом в силу малости ее аргумента

$$\varphi(x) = 1 - \exp(-x^\alpha) \approx 1 - (1 - x^\alpha + \dots) \approx x^\alpha, \quad \text{при } x \rightarrow 0 \quad (2.27)$$

Принимая во внимание (2.27), установим вид уравнения для полных продольных деформаций для малых $s \rightarrow 0$:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \varepsilon = \begin{cases} \frac{s_t}{e_{mt}} + s_t^{\alpha_t} \approx \frac{s_t}{e_{mt}}, & s \rightarrow +0, \alpha_t > 1 \\ \frac{s_c}{e_{mc}} + s_c^{\alpha_c} \approx \frac{s_c}{e_{mc}}, & s \rightarrow -0, \alpha_c > 1 \end{cases} \quad (2.28)$$

С учетом (2.28), запишем уравнение равновесия в проекции на продольную ось в виде:

$$\int_{-a}^{0.5} e_{mt} y(\xi + a) \xi d\xi + \int_{-0.5}^{-a} e_{mc} y(\xi + a) \xi d\xi = 0 \quad (2.29)$$

Проинтегрируем данное выражение и разрешим получившееся квадратное уравнение относительно положения нейтральной плоскости

$$a_{1,2} = 0.5(\sqrt{e} \pm 1) / (\sqrt{e} + 1), \quad e = e_{mc} / e_{mt} \quad (2.30)$$

Принимая во внимание физическую ограниченность значений $-0,5 \leq a \leq 0,5$, решение для нейтральной плоскости примет окончательный вид

$$a_0 = \frac{1 \sqrt{e} - 1}{2 \sqrt{e} + 1} \quad (2.31)$$

где $e = e_{mc} / e_{mt}$ - отношение модулей упругости первого рода. Таким образом, соотношения (2.31) однозначно определяют предельное положение нейтральной плоскости при $\mu \rightarrow 0$, которое не зависит ни от параметров материала $\alpha_t, \alpha_c, \rho_t, \rho_c, \sigma_{0t}, \sigma_{0c}$, ни от численного значения упругих модулей, а только от их отношения $e = e_{mc} / e_{mt}$.

Предлагается следующий алгоритм решения системы (2.26). Поскольку установить зависимость $s = s(y, \varepsilon_0)$ в явном виде не удалось, то, в отличие от предыдущей задачи, где последовательно решались уравнения системы (2.13), система (2.26) требует совместного решения входящих в нее блоков уравнений. Сечение балки в направлении поперечной оси ξ дискретизируется достаточно большим количеством точек. В начальный момент времени положение НП a_0 считается известным, (2.31). Параметры μ, ε, s, y в начальный момент принимаются равными $\mu_0 = \varepsilon_{00} = s_{00} = y_0 = 0$. Далее, удобно воспользоваться полуобратным методом:

1. Задаем массив значений для безразмерной кривизны $y = \{0..y_{\max}\}$. Предельное значение кривизны y_{\max} определяется в ходе решения задачи и соответствует достижению фазово-структурной продольной деформации ее предельному значению на границе поперечного сечения балки $\varepsilon_j(0,5) = \rho_t$ или $\varepsilon_j(-0,5) = \rho_c$. Дальнейшее нагружение балки может привести к ухудшению функциональных свойств СПФ.
2. Определяем значение продольных деформаций $\varepsilon_j(\xi)$ на основе текущего значения безразмерной кривизны y_j и положения НП a_j . На первом шаге необходимо использовать значения положения НП с предыдущей итерации a_{j-1} .

3. С использованием значения продольных деформаций $\varepsilon_j(\xi)$, второе и третье уравнения системы (2.26) позволяют определить распределение напряжений по высоте сечения балки $s_j(\xi)$.
4. Найденные напряжения $s_j(\xi)$ подставляются в последнее уравнение равновесия (2.26). Происходит уточнение положения НП a_j . Шаги 2-4 повторяются до тех пор, пока очередное уточнение y_j не станет отличаться от величины, установленной на предыдущем шаге, на малую величину. Только тогда возможен переход к шагу 5.
5. Продольные напряжения $s_j(\xi)$ и положение НП a_j подставляются в предпоследнее уравнение (2.26), определяется значение безразмерного изгибающего момента μ_j . Теперь возможен переход к шагу 1 и y_{j+1} .

Ниже представлены результаты численного моделирования явления мартенситной неупругости в балке из СПФ при чистом изгибе. Учитывается разнсопротивляемость, а также проведена оценка влияния разномодульности на полученные зависимости. На рис. 2.5. показано изменение положения НП, связанное с ростом кривизны балки y в процессе ее нагружения изгибающим моментом для материалов 1-4. Параметры материалов для кривых 1-4 указаны в табл. 2.2 под советующими номерами. Так, параметры материала для кривой 1 соответствуют равноатомному никелиду титана ($Ni_{50}Ti_{50}$), прошедшему температурную обработку – отжиг при температуре $450^{\circ}C$ в течении 30 минут, [72,74]. Кривые 2-4 демонстрируют влияние каждого из параметров материала, используемых для аппроксимации диаграммы МН, на поведение исследуемых зависимостей. Явление разномодульности для материалов 1-5 не моделируется. В связи с этим, положение НП в начальной момент нагружения балок из материалов 1-5 совпадает с плоскостью симметрии балки, что полностью согласуется с (2.31). Максимальное смещение НП от плоскости симметрии балки составляет порядка 8% от высоты сечения для разнсопротивляющегося материала 1 и достигается в момент $\mu = \mu_{\max}$. Учет упругой составляющей полных деформаций привел к снижению смещения НП a , поскольку в прошлой задаче максимальное значение a отмечено на уровне 15% от h . Пунктирная линия на рис. 2.5 соответствует решению без учета свойства разнсопротивляемости, поэтому положение a закономерно совпадает с плоскостью симметрии балки.

На рис. 2.6 показана зависимость кривизны балки от безразмерного изгибающего момента для материалов 1-4. Вновь учет разнсопротивляемости материала при изгибе балки, кривая 1, приводит к уменьшению прогиба, а соответственно и кривизны для одного и того же значения изгибающего момента по сравнению со случаем одинаково сопротивляющегося материала

(штриховая кривая). Максимальное отличие в кривизне балок с учетом и без учета разносопротивляемости для средних и больших значений изгибающего момента $\mu = 0,12..0,2$ достигает 40-70% (большие значения соответствуют большей величине μ). При решении аналогичной задачи без учета упругих деформаций, аналогичная разница в кривизне балок превышала 100%.

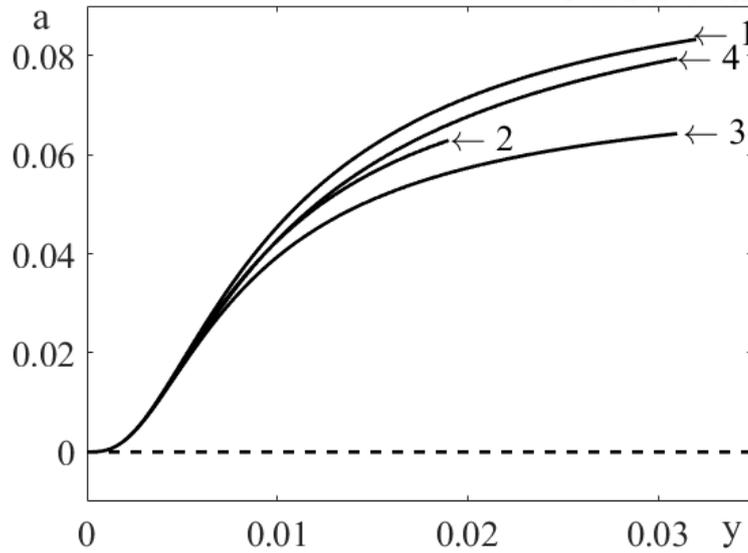


Рис. 2.5. Кривые $a - y$, материалы 1-4 из табл. 2.2.

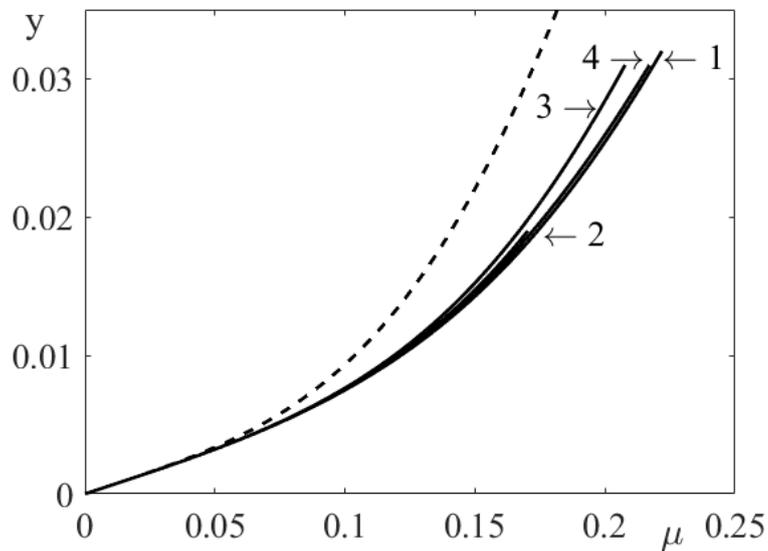


Рис. 2.6. Кривые $y - \mu$, материалы 1-4 из табл. 2.2.

Таблица 2.2. Параметры $\rho_t, \rho_c, \sigma_{0t}, \sigma_{0c}, \alpha_c, \alpha_t, e$ материалов 1-4.

Номер кривой	Вид нагрузки	ρ_d , доли	σ_0 , МПа	α	$e = \frac{e_{mc}}{e_{mt}}$
Кривая 1	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	1
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	
Кривая 2	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	1
	Сжатие	0,0209	216,6	4,88	
Кривая 3	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	1

Кривая 4	Сжатие	0,0132	180,65	4,88	1
	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	
	Сжатие	0,0132	216,6	4,3635	

Влияние разномодульности на положение нейтральной плоскости в процессе монотонного нагружения балки показано на рис. 2.7. Здесь, кривые 1-5 отвечают материалам, параметры которых указаны в табл. 2.3 под соответствующими номерами. Так, все материалы 1-5 являются разносопротивляющимися, однако параметр $e = e_{mc}/e_{mt}$ у них разный. Принимая во внимание кривые 1-4 на рис. 2.5, а также сравнивая их с положением кривых 1-5 на рис. 2.7, можно подтвердить тот факт, что положение НП в начальный момент нагружения a_0 определяется лишь отношением модулей упругости материала. Также отметим, что при увеличении упругого модуля, соответствующего растяжению материала в сравнении с модулем, соответствующим сжатию ($e_{mt} > e_{mc}$), положение нейтральной плоскости ожидаемо смещается в зону сечения балки, испытывающую напряжения растяжения ($\Delta a < 0$).

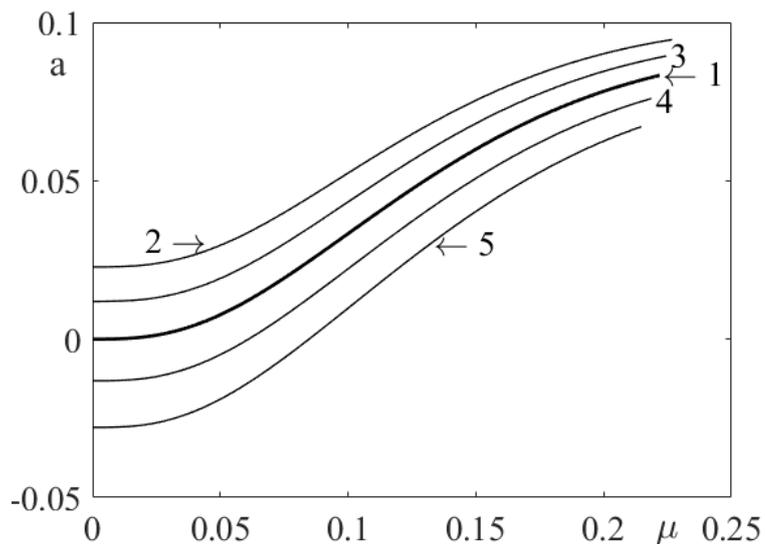


Рис. 2.7. Кривые $a - \mu$, материалы 1-5 из табл. 2.3.

Таблица 2.3. Параметры $\rho_t, \rho_c, \sigma_{0t}, \sigma_{0c}, \alpha_c, \alpha_t, e$ материалов 1-5.

Номер кривой	Вид нагрузки	ρ_d , доли	σ_0 , МПа	α	$e = e_{mc}/e_{mt}$
Кривая 1	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	1
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	
Кривая 2	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	1,2
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	
Кривая 3	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	1,1
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	
Кривая 4	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	0,9
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	
Кривая 5	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	0,8
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	

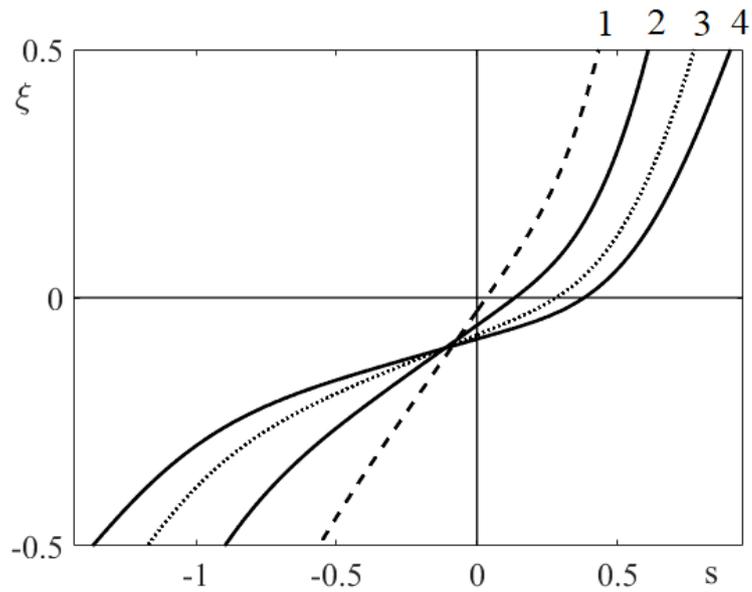


Рис. 2.8. Кривые $s - \xi$, $\mu = (0.2, 0.4, 0.7, 1)\mu_{\max}$.

На рис. 2.8 показано распределение безразмерных нормальных продольных напряжений по высоте сечения балки. Кривые 1-4 построены в различные моменты процесса нагружения балки монотонно возрастающим изгибающим моментом, $\mu = (0.2, 0.4, 0.7, 1)\mu_{\max}$. Таким образом, распределение нормальных напряжений в сечении балки отличается от линейного распределения, соответствующего классической постановке задачи об изгибе балки даже для небольших значений изгибающего момента ($\mu = 0, 2\mu_{\max}$). При этом отличие между кривыми, соответствующими напряжениям растяжения и сжатия увеличивается с ростом изгибающего момента.

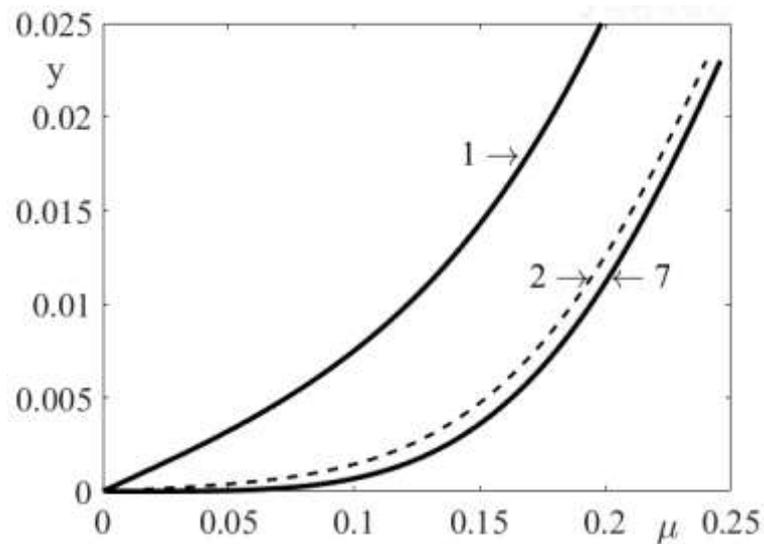


Рис. 2.9. Кривые $y - \mu$, материалы 1-7 из табл. 2.4.

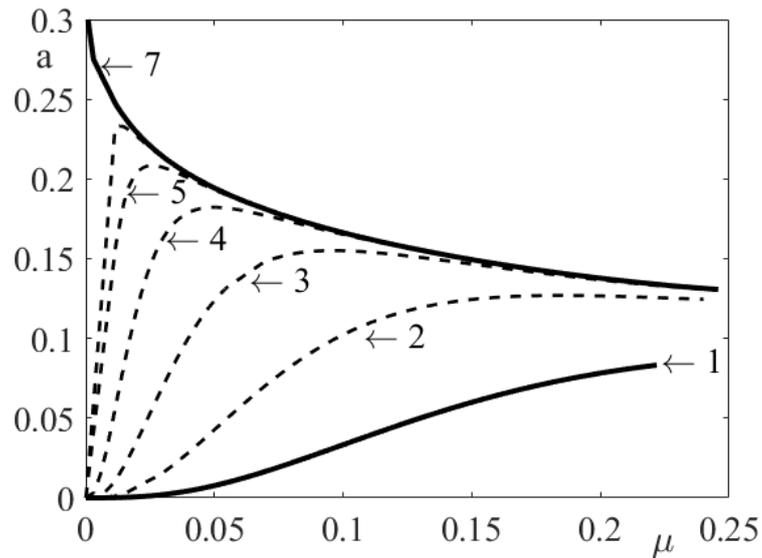


Рис. 2.10. Кривые $a - \mu$, материалы 1-7 из табл. 2.4.

На рис. 2.9 и 2.10 показана история изменения кривизны балки и положения НП в процессе ее нагружения монотонно возрастающим изгибающим моментом. Параметры материала для кривых 1-7 соответствуют величинам из табл. 2.4. Таким образом, кривые 2-6 показывают стремление решения задачи об изгибе балки с учетом упругих деформаций, кривая 1, к решению аналогичной задачи, но без учета упругих деформаций, кривая 7, при редуцировании упругой составляющей полных продольных деформаций. Можно утверждать, что учет упругой составляющей полных деформаций выполнен верно относительно решения, полученного в предыдущем параграфе.

Таблица 2.4. Параметры $\rho_t, \rho_c, \sigma_{0t}, \sigma_{0c}, \alpha_c, \alpha_t, E$ материалов 1-7.

Номер кривой	Нагрузка	ρ_d , доли	σ_0 , МПа	α	$E_{Mc} = E_{Mt} = E$, МПа
Кривая 1	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	28000
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	
Кривая 2	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	$28000 \cdot 10^1$
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	
Кривая 3	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	$28000 \cdot 10^2$
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	
Кривая 4	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	$28000 \cdot 10^3$
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	
Кривая 5	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	$28000 \cdot 10^4$
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	
Кривая 6	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	$28000 \cdot 10^5$
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	
Кривая 7	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	-
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	

Для решения задач о консольном изотермическом изгибе балки из СПФ в режиме МН, блок уравнений (2.26) необходимо дополнить следующими соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \int_0^v \left(\int_0^g y(\zeta) d\zeta \right) d\vartheta \\ \mu = p(1-\nu), p \neq 0, g = 0 \\ \mu = g(1-\nu)^2, p = 0, g \neq 0 \end{array} \right. \quad (2.32)$$

здесь приняты следующие безразмерные величины: $\nu = x/L$ - безразмерная координата по длине балки, $p = PL/h^2b\sigma_{0r}$ - безразмерная сосредоточенная сила, приложенная к свободному концу балки, $g = GL^2/2h^2b\sigma_{0r}$ - безразмерная интенсивность распределенной нагрузки по всей длине балки.

На рис. 6а и 6б приведены зависимости безразмерного прогиба балки по ее длине для задач консольного изгиба под действием безразмерной сосредоточенной силы $p = 0,175$ и безразмерной распределенной нагрузки интенсивностью $g = 0,175$ соответственно.

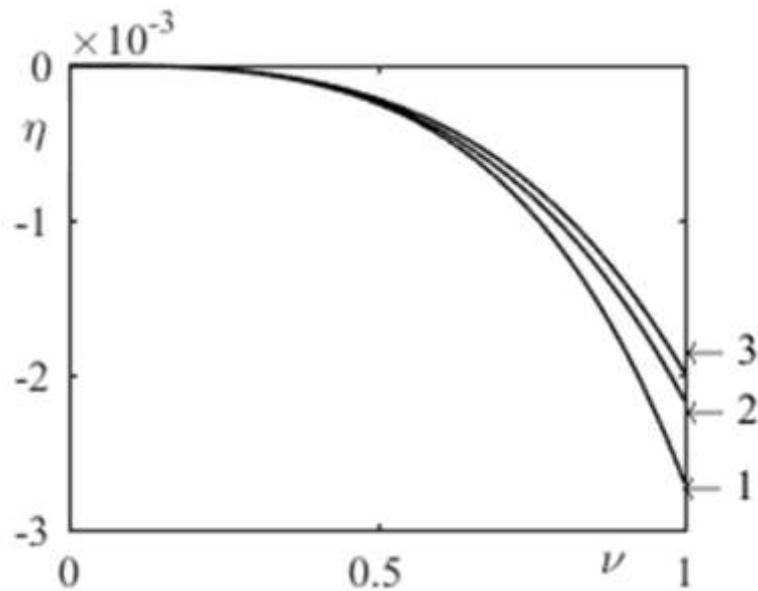


Рис. 2.11. Кривые $\eta - \nu$, от действия сосредоточенной силы p .

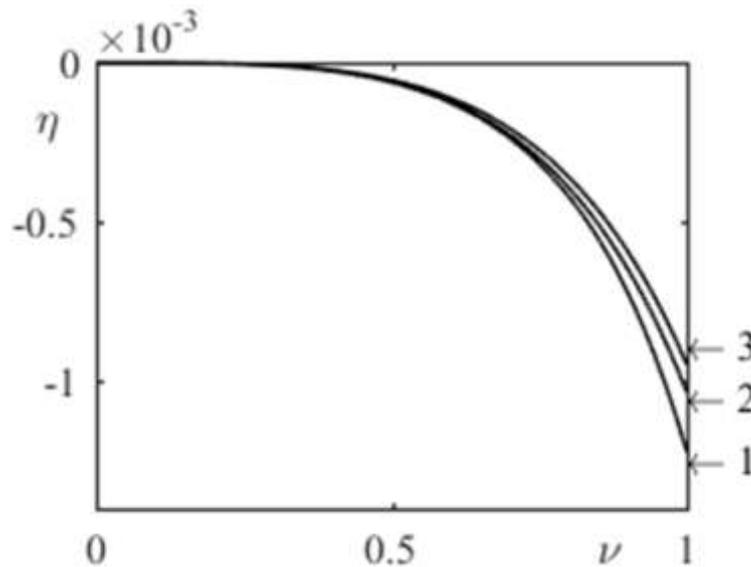


Рис. 2.11. Кривые $\eta - \nu$, от действия распределенной нагрузки g .

Кривые, обозначенные цифрой 1 на рис. 2.10 и 2.11 получены для случая одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию материала балок. Кривые, отмеченные цифрой 2 соответствуют решению с учетом разносопротивляемости и с учетом упругих деформаций, однако без учета разномодульности ($e = E_c / E_t = 1$). Наконец кривые 3, демонстрирующие наименьшую податливость балок и соответствуют случаю, когда учитывается и разносопротивляемость и разномодульность ($e = E_c / E_t = 1,2$) материала. Отличие в максимальных прогибах свободного конца балки для кривых 1 и 2 составляет порядка 23,5%, для кривых 1 и 3 – порядка 36,5%. Столь существенные различия в максимальных прогибах показывают необходимость учитывать и свойство разносопротивляемости и свойство разномодульности при решении краевых задач изгиба для элементов из СПФ в режиме МН. В рамках рассматриваемой постановки задачи также установлено, что положение НП в начальный момент нагружения определяется отношением упругих констант материала. Распределение продольных напряжений в поперечном сечении балки является существенно нелинейным даже для небольших значений нагрузки. Полученное решение демонстрирует сходимость к точному решению аналогичной задачи без учета упругих деформаций, рассмотренной в предыдущем параграфе.

2.3. Решение задачи о изгибе пластинок из сплава с памятью формы с учетом упругих деформаций и разносопротивляемости

Данный параграф посвящен решению задачи о цилиндрическом изгибе пластинки малой постоянной толщины из СПФ в мартенситном фазовом состоянии. Учитывается свойство разносопротивляемости и реализована возможность учета свойства разномодульности

рассматриваемого материала. Процесс нагружения является активным и пропорциональным, так, что справедливы положения об АППН. Механический отклик пластинки ищется в рамках гипотез Крихгофа-Лява. Также, пластинка считается недеформируемой в направлении оси Y , рис. 2.12. Это позволяет записать выражение для компоненты ε_y тензора полных деформаций, с учетом аддитивности его представления, в виде (2.33).

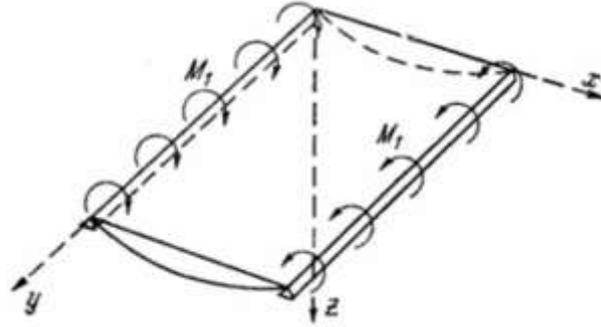


Рис. 2.12. Цилиндрический изгиб пластинки из СПФ.

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^e + \varepsilon_y^{phst} = 0 \quad (2.33)$$

здесь ε_y^e - упругая составляющая, ε_y^{phst} - фазово-структурная составляющая тензора полных деформаций в направлении оси Y , для которых, с учетом $q = 1$, справедливы соотношения:

$$\varepsilon_y^e = \frac{1}{E_m}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad \varepsilon_y^{phst} = \rho_D \frac{3}{2} \frac{\sigma_y'}{\sigma_i} \varphi(\sigma_i) \quad (2.34)$$

Здесь, σ_x, σ_y - компоненты тензора напряжений в направлении осей X, Y соответственно, $\nu = 0,3$ - упругий коэффициент Пуассона. Подставим (2.34) в (2.33), а также принимая во внимание $\sigma_y' = \frac{2\sigma_y - \sigma_x}{3}$ и $\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y}$, получим соотношения для σ_y компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_y = \sigma_x \left(\frac{\nu + 0,5BE_m}{1 + BE_m} \right), \quad B = \rho_d \varphi(\sigma_i) \frac{1}{\sigma_i} \quad (2.35)$$

Полученное выражение не позволяет в явном виде выразить σ_y через σ_x и параметры материала, поскольку правая часть выражения зависит от интенсивности напряжений σ_i . Однако, в конечном счете, вторая компонента тензора напряжений является функцией многих аргументов $\sigma_y = \sigma_y(\sigma_x, \nu, E_m, \rho_d, \alpha, \sigma_0)$.

Поскольку рассматриваемая задача о цилиндрическом изгибе пластинки является двумерной в пространстве напряжений и деформаций, выражение для полных продольных деформаций с учетом (2.4,2.21) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xt} = \frac{\sigma_{xt} - \nu\sigma_{yt}}{E_{Mt}} + \frac{1}{2}\rho_t \frac{2\sigma_{xt} - \sigma_{yt}}{\sigma_i} \varphi_t(\sigma_i / \sigma_{0t}), \sigma > 0 \\ \varepsilon_{xc} = \frac{\sigma_{xc} - \nu\sigma_{yc}}{E_{Mc}} + \frac{1}{2}\rho_c \frac{2\sigma_{xc} - \sigma_{yc}}{\sigma_i} \varphi_c(\sigma_i / \sigma_{0c}), \sigma < 0 \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Соотношения (2.36) позволяют учитывать, как разномодульность, так и разносопротивляемость СПФ. Остановимся подробнее на последнем. В настоящее время известны лишь три работы [72,74,76], которые посвящены исследованию влияния вида напряженного состояния на диаграммы МН и ПФП образцов из СПФ, предварительно прошедших одинаковую термомеханическую обработку и позволяют верно идентифицировать используемую модель. В данных работах приведены результаты экспериментов только на одноосное растяжение и сжатие образцов. Таким образом, результаты влияния вида напряженного состояния на диаграммы МН или ПФП для промежуточных вариантов нагружения (опыты на кручение, двухосное нагружение) в настоящее время отсутствуют. Поэтому, зависимость параметров материала от вида напряженного состояния в настоящее время может быть представлена только линейной функцией, например, $\rho_d = a_1 \cdot \mu_\sigma + a_2$, где

$$\mu_\sigma = \frac{27}{2} \frac{\det(\sigma'_{ij})}{\sigma_i^3}. \text{ При решении задач об изгибе балки в одномерной постановке, в прошлых}$$

параграфах показано, что вид напряженного состояния при переходе через НП меняется скачкообразно, а в пределах верхней и нижней полуплоскости сечения балки не меняется вовсе.

Таким образом, было возможным лишь кусочно-постоянное представление $\rho_d = \begin{cases} \rho_t, \sigma > 0 \\ \rho_c, \sigma < 0 \end{cases}$. При

решении задачи о цилиндрическом изгибе пластинки в рамках гипотез Кирхгофа-Лява и предположении о плоском деформированном состоянии (ПДС) значение параметра вида напряженного состояния не только терпит разрыв на нейтральной плоскости, но и меняется по высоте сечения как в верхней, так и в нижней его половине. Однако, эти изменения не значительны и допускают процедуру осреднения. Таким образом, в рамках задачи о цилиндрическом изгибе пластинки вновь принимается кусочно-постоянная зависимость параметров материала от координаты по высоте сечения.

Поскольку распределение нормальных продольных напряжений не может быть установлено из (2.35,2.36) в явном виде и считается неизвестным, уравнения (2.11) и (2.12) для определения

изгибающего момента и уравнение равновесия в проекции на продольную ось требуют записи в более общем виде:

$$M = \int_{\phi_c} \sigma_{xc}(z) z dz + \int_{\phi_t} \sigma_{xt}(z) z dz \quad (2.37)$$

$$\int_{\phi_c} \sigma_{xc}(z) dz + \int_{\phi_t} \sigma_{xt}(z) dz = 0 \quad (2.38)$$

Объединим выражения (2.9), (2.35-2.38) в систему уравнений (2.39), позволяющую описать механическое поведение пластинки из СПФ в режиме МН при цилиндрическом изгибе монотонно возрастающим моментом.

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \varepsilon = y\xi + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = ya \\ 2) \quad \varepsilon_{xt} = \frac{s_{xt} - \nu s_{yt}}{e_t} + \frac{1}{2} \rho_t \frac{2s_{xt} - s_{yt}}{s_{it}} \varphi_t(s_{it}), \quad s > 0 \\ 3) \quad \varepsilon_{xc} = \frac{s_{xc} - \nu s_{yc}}{e_c} + \frac{1}{2} \rho_c \frac{2s_{xc} - s_{yc}}{s_{ic}} \varphi_c(s_{ic} s_{ic}), \quad s < 0 \\ 4) \quad s_{yt} = s_{xt} \left(\frac{\nu + 0,5 B_{1t} e_t}{1 + B_{1t} e_t} \right), \quad B_{1t} = \rho_t \varphi_t(s_{it}) \frac{1}{s_{it}} \\ 5) \quad s_{yc} = s_{xc} \left(\frac{\nu + 0,5 B_{1c} e_c}{1 + B_{1c} e_c} \right), \quad B_{1c} = \rho_c \varphi_c(s_{ic} s_{ic}) \frac{1}{s_{ic}} \\ 6) \quad \mu = \int_{-a}^{0,5} s_{xt}(\xi) \xi d\xi + \int_{-0,5}^a s_{xc}(\xi) \xi d\xi \\ 7) \quad \int_{-a}^{0,5} s_{xt}(\xi) d\xi + \int_{-0,5}^a s_{xc}(\xi) d\xi = 0 \end{array} \right. \quad (2.39)$$

Здесь дополнительно использованы следующие безразмерные величины:

$$s_{it} = \sqrt{\sigma_{xt}^2 + \sigma_{yt}^2 - \sigma_{xt} \sigma_{yt}} / \sigma_{0t}, \quad s_{ic} = \sqrt{\sigma_{xc}^2 + \sigma_{yc}^2 - \sigma_{xc} \sigma_{yc}} / \sigma_{0t} \quad - \quad \text{безразмерные интенсивности}$$

напряжений.

Система соотношений (2.39) определяет механический отклик пластинки из СПФ с учетом разносопротивляемости и разномодульности этого материала при изотермическом цилиндрическом изгибе монотонно возрастающим изгибающим моментом. Материал пластинки в начальный момент находится в состоянии хаотического мартенсита.

Уравнения (4,5,7) системы (2.39) имеют особенность в области малых значений продольных нормальных напряжений $s_x \rightarrow 0$. Так, все три уравнения вырождается в равенство вида $0 = 0$, при этом положение нейтральной плоскости и поперечные нормальные напряжения определить

используя данные уравнения не удастся. Для этого предпримем следующие рассуждения. Используя представление функции распределения интенсивности микронапряжений в виде ряда Тейлора (2.27), используем только первый член ряда и определим предел отношения компонент тензора напряжений $\frac{s_y}{s_x}$ при переходе через нейтральную плоскость с помощью (4,5) блока (2.39):

$$\lim_{s_x \rightarrow +0} \left(\frac{s_y}{s_x} \right) = \frac{\nu + 0,5e_t \rho_t s_x^{\alpha_t - 1}}{1 + e_t \rho_t s_x^{\alpha_t - 1}} = \nu, \quad \lim_{s_x \rightarrow -0} \left(\frac{s_y}{s_x} \right) = \frac{\nu + 0,5e_c \rho_c |s_x|^{\alpha_c - 1}}{1 + e_c \rho_c |s_x|^{\alpha_c - 1}} = \nu \quad (2.40)$$

Таким образом, в режиме МН, независимо от внешней нагрузки, а также от разносопротивляемости или разномодульности материала, на нейтральной плоскости пластинки из СПФ $\lim_{s_x \rightarrow \pm 0} \left(\frac{s_y}{s_x} \right) = \nu$. Тогда, параметр вида девиатора напряжений $\mu_\sigma = \frac{27 \det(\sigma'_{ij})}{2 \sigma_i^3}$ на НП,

может быть представлен в виде $\lim_{s_x \rightarrow 0} \mu_\sigma = \text{sign}(s_x) \frac{3 \nu (2\nu^2 - 5\nu + 2)}{(\nu^2 - \nu + 1)^{3/2}}$. Очевидно, при приближении

к НП со стороны сжатых и растянутых волокон, параметр вида девиатора напряжений будет иметь разные пределы, (2.41). Это означает, что параметр вида девиатора напряжений терпит разрыв первого рода при нулевых продольных напряжениях $s_x = 0$ в рамках рассматриваемой постановки задачи.

$$\lim_{s_x \rightarrow +0} \mu_\sigma = 0,4358, \quad \lim_{s_x \rightarrow -0} \mu_\sigma = -0,4358, \quad \text{при } \nu = 0,3 \quad (2.41)$$

Исследование уравнения (7) системы (2.39) выполнено аналогично выкладкам из предыдущего параграфа. Принимая во внимание (2.40), а также повторяя рассуждения (2.27-2.30), установлено, что положение нейтральной плоскости a_0 в начальный момент нагружения пластинки не зависит ни от параметров материала $\alpha_t, \alpha_c, \rho_t, \rho_c, \sigma_{0t}, \sigma_{0c}$, ни от численного значения модулей упругости, а только от их отношения $e = \frac{e_{mc}}{e_{mt}}$, (2.31).

Предлагается следующий алгоритм решения системы (2.39). Поскольку задачу можно отнести к классу статически неопределимых, система (2.39) требует совместного решения входящих в нее блоков уравнений. Сечение в направлении оси ξ дискретизируется достаточно большим количеством точек. В начальный момент времени положение НП a_0 считается известным, (2.31). Параметры μ, ε, s, y в начальный момент принимаются равными $\mu_0 = \varepsilon_{x00} = s_{x00} = s_{y00} = y_0 = 0$. Для формирования алгоритма решения задачи воспользуемся полуобратным методом. Здесь, ссылки на формулы (1-7) относятся к блокам системы (2.39).

1. Задаем массив значений для безразмерной кривизны $y = \{0..y_{\max}\}$. Предельное значение кривизны y_{\max} определяется в ходе решения задачи и соответствует достижению фазово-структурной продольной деформации ее предельному значению на границе поперечного сечения пластинки $\varepsilon_{x,j}(0,5) = \rho_t$ или $\varepsilon_{x,j}(-0,5) = \rho_c$. Дальнейшее нагружение пластинки может привести к ухудшению функциональных свойств СПФ.

2. Определяем значение продольных деформаций $\varepsilon_{x,j}(\xi)$ на основе текущего значения безразмерной кривизны y_j и положения НП a_j , уравнение (1). На первом шаге необходимо использовать значения положения НП с предыдущей итерации a_{j-1} .

3. Используя значение продольных деформаций $\varepsilon_{x,j}(\xi)$, уравнения (2,3) позволяют определить распределение напряжений по высоте сечения пластинки $s_{x,j}(\xi)$. На первом шаге необходимо использовать значения поперечных напряжений с предыдущей итерации $s_{y,j-1}(\xi)$.

3.1. Используя значения $s_{x,j}(\xi)$, с помощью уравнений (4,5) уточняем $s_{y,j}(\xi)$. Затем, возвращаемся в пункт 3. Шаги 3-3.1 повторяются до тех пор, пока очередное уточнение $s_{x,j}(\xi)$ не станет отличаться от величины, установленной на предыдущем шаге, на малую величину. Только тогда возможен переход к шагу 4.

4. Найденные напряжения $s_{x,j}(\xi)$ и $s_{y,j}(\xi)$ подставляются в последнее уравнение равновесия (7). Происходит уточнение положения НП a_j . Шаги 2-4 повторяются до тех пор, пока очередное уточнение y_j не станет отличаться от величины, установленной на предыдущем шаге, на малую величину. Только тогда возможен переход к шагу 5.

5. Продольные и поперечные напряжения $s_{x,j}(\xi)$ и $s_{y,j}(\xi)$, а также положение НП a_j подставляются в уравнение (6), определяется значение безразмерного изгибающего момента μ_j . Теперь возможен переход к шагу 1 и y_{j+1} .

Ниже показаны результаты численного моделирования явления МН при чистом цилиндрическом изгибе пластинки из СПФ под действием монотонно возрастающего изгибающего момента. Учитывается разносопротивляемость, а также проведена оценка влияния разномодульности на полученные зависимости. На рис. 2.13, 2.14 приведены зависимости безразмерной кривизны и безразмерного положения нейтральной плоскости от величины безразмерного изгибающего момента. Значение параметров материала для кривых 1-5 приведены в табл. 2.5.

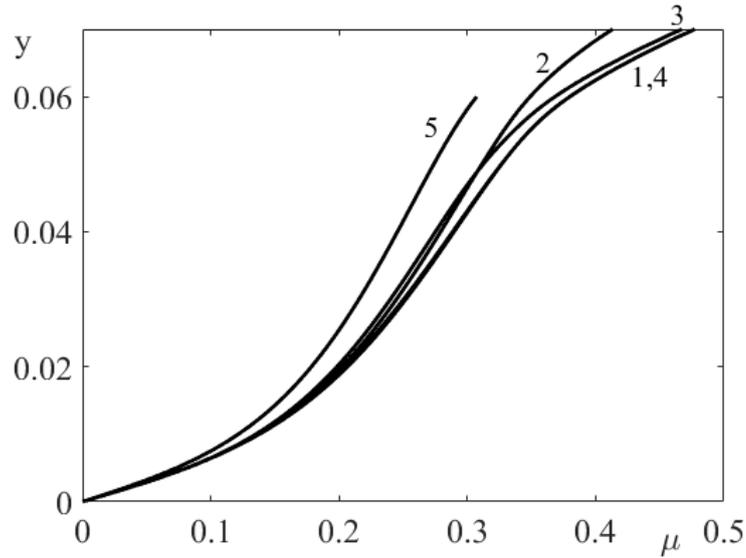


Рис. 2.13. Кривые $y - \mu$, материалы 1-5 из табл. 2.5.

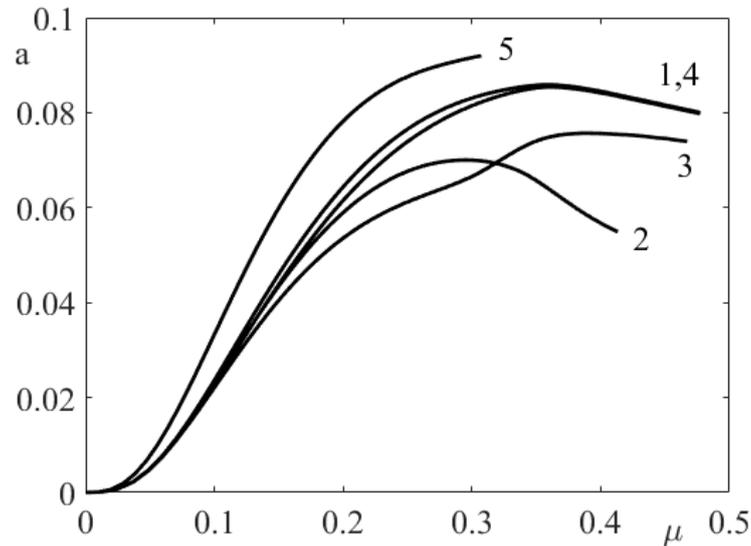


Рис. 2.14. Кривые $y - \mu$, материалы 1-4 из табл. 2.5.

Кривая 1 на рис. 2.13 и 2.14 соответствует поведению пластинки из равноатомного никелида титана ($Ni_{50}Ti_{50}$), прошедшего температурную обработку – отжиг при температуре $450^{\circ}C$ в течении 30 минут. Кривые 2-4 показывают степень влияния каждого из параметров материала $\rho_t, \rho_c, \sigma_{0t}, \sigma_{0c}, \alpha_c, \alpha_t$ на кривизну пластинки, рис. 2.13 и на положение нейтральной плоскости, рис. 2.14. Кривая 5 на данных рисунках показывает решение аналогичной задачи об изгибе балки в рамках гипотез Бернулли – Эйлера, приведенной в предыдущем параграфе. Поскольку цилиндрическая жесткость пластинки выше изгибной жесткости балки, то податливость балки, а соответственно и ее кривизна, ожидаемо выше податливости (кривизны) аналогичной пластинки для равных значений безразмерного изгибающего момента.

Таблица 2.5. Параметры $\rho_t, \rho_c, \sigma_{0t}, \sigma_{0c}, \alpha_c, \alpha_t, e$ материалов 1-5.

Номер кривой	Вид нагрузки	ρ_d , доли	σ_0 , МПа	α	$e = \frac{e_{mc}}{e_{mt}}$
Кривая 1,5	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	1
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	
Кривая 2	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	1
	Сжатие	0,0209	216,6	4,88	
Кривая 3	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	1
	Сжатие	0,0132	180,65	4,88	
Кривая 4	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	1
	Сжатие	0,0132	216,6	4,3635	

Кривые 1-5 на рис. 2.14 отвечают решению без учета разномодульности материала пластинки ($e = E_c / E_t = 1$). Положение нейтральной плоскости в области малых значений изгибающего момента определяется только отношением упругих модулей, и в начальный момент времени совпадает с плоскостью симметрии пластинки, что соответствует (2.31). В свою очередь влияние разномодульности материала пластинки на положение нейтральной плоскости показано на рис. 2.15. Здесь кривые 1-3 построены для отношения упругих модулей $e = E_c / E_t = 1, 2; 1$ и $0, 8$ соответственно. Штриховой линией на рис. 2.15 отмечено решение аналогичной задачи об изгибе балки, параметры материала которой соответствуют материалу 1 из табл. 2.5. Как и в случае с изгибом балки, увеличение упругого модуля, соответствующего сжатию материала в сравнении с модулем, отвечающим растяжению ($E_c > E_t$), способствует смещению положения нейтральной плоскости в зону сжатых волокон. Интересно отметить, что для значения безразмерного изгибающего момента $\mu \approx 0,32$ происходит некое насыщение диаграммы $y - \mu$, рис 2.13, дальнейший рост кривизны пластинки становится менее интенсивным. В тоже время, отклонение НП от плоскости симметрии пластинки достигает максимальных значений, рис. 2.14 и 2.15. Дальнейший рост изгибающего момента приводит к стремлению НП вернуться к первоначальному положению.

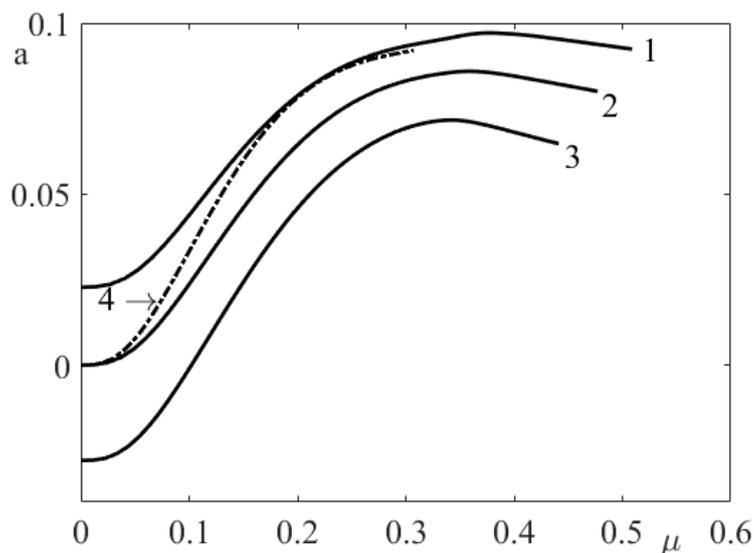


Рис. 2.15. Кривые $a - \mu$, материалы 1-3 соответствуют $e = E_c / E_t = 1, 2; 1$ и $0,8$.

На рис. 2.16 представлены эпюры нормальных безразмерных напряжений по сечению пластинки для материала 1 из табл. 2.5. Штриховая кривая отвечает решению задачи о цилиндрическом изгибе пластинки под действием безразмерного изгибающего момента величиной $\mu = 0,2\mu_{\max}$, в то время как сплошная – моменту величиной $\mu = \mu_{\max} = 0,4772$. Отметим, что с ростом безразмерного изгибающего момента, эпюра безразмерных нормальных напряжений по сечению пластинки принимает все более и более нелинейный характер, рис. 2.16.

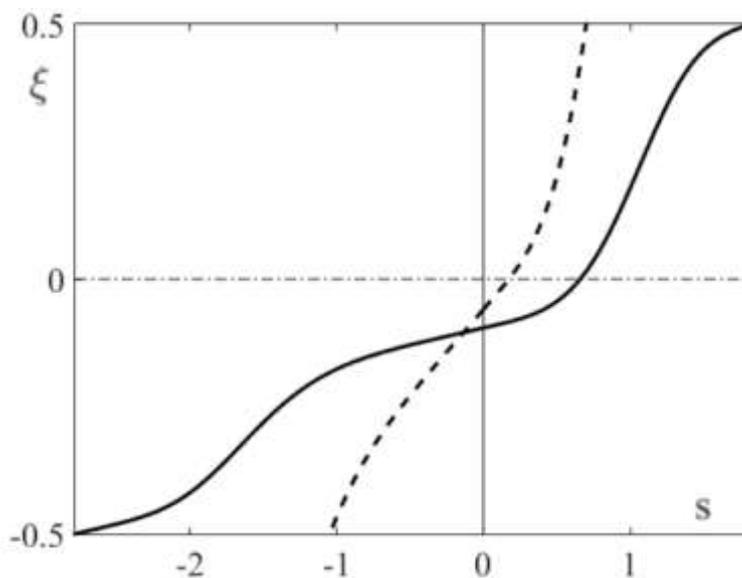


Рис. 2.16. Кривые $s - \xi$. $\mu = 0,2\mu_{\max}$ (---), $\mu = \mu_{\max} = 0,4772$ (-).

На рис. 2.17 показана история изменения структурных (сплошная кривая) и упругих (штриховая кривая) деформаций крайних волокон в сечении пластинки с ростом безразмерного изгибающего момента. Оказывается, для небольших значений изгибающего момента, вплоть до $\mu \leq 0,15\mu_{\max}$, упругая составляющая полных деформаций превосходит структурную составляющую. Таким образом, процесс накопления деформаций для малых значений

изгибающего момента ($\mu \leq 0,15\mu_{\max}$) определяется разномодульным поведением материала, что согласуется с полученными ранее результатами относительно зависимости положения нейтральной плоскости от величины изгибающего момента, рис. 2.16. Дальнейший рост изгибающего момента $0,15\mu_{\max} < \mu \leq 0,7\mu_{\max}$ приводит к интенсивному накоплению структурных деформаций в крайних волокнах пластинки. Однако, для значений $\mu > 0,75\mu_{\max}$ кривые структурных деформаций испытывают состояние насыщения, что вызывает дальнейший интенсивный прирост уже упругих деформаций.

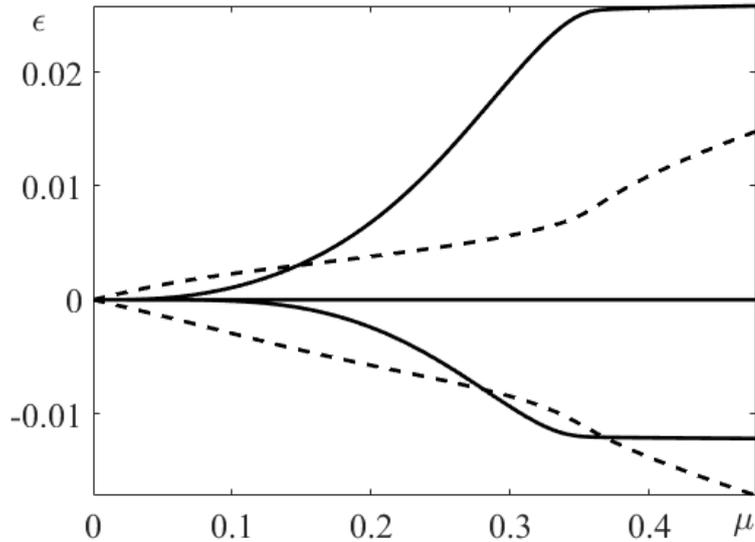


Рис. 2.17. Кривые $\varepsilon_x - \mu$. ε_x^e (---), ε_x^{plst} (—).

На рис. 2.18 показано распределение отношения s_y/s_x по высоте сечения пластинки для $\mu = 0,2\mu_{\max}$ - штриховые кривые и $\mu = \mu_{\max} = 0,4772$ - сплошные кривые. Отметим, что величина отношения s_y/s_x значительно отличается от результатов классического решения аналогичной упругой задачи, для которой $s_y = \nu s_x$. Обе кривые проходят через точку $s_y/s_x = 0,3$ при пересечении нейтральной плоскости, что согласуется с (2.40). В ходе численного решения задачи установлено, что само отношение компонент тензора напряжений ограничено значениями $0,3 \leq s_y/s_x < 0,5$. Такое поведение s_y/s_x вполне закономерно и подтверждается следующими положениями. В рамках рассматриваемой модели предполагается аддитивное представление тензора полных деформаций через упругую и фазово-структурную составляющую, (2.21). Накопление деформаций по механизму упругого деформирования предполагает классическое отношение $s_y = \nu s_x$. В свою очередь, механизм накопления структурных деформаций предполагает материал пластинки несжимаемым в мартенситном состоянии, $s_y = 0,5s_x$. Таким образом, результирующее значение s_y/s_x зависит от распределения вкладов упругой и

структурной составляющих в деформирование представительного объема СПФ и не может выходить за пределы $0,3 \leq s_y/s_x < 0,5$.

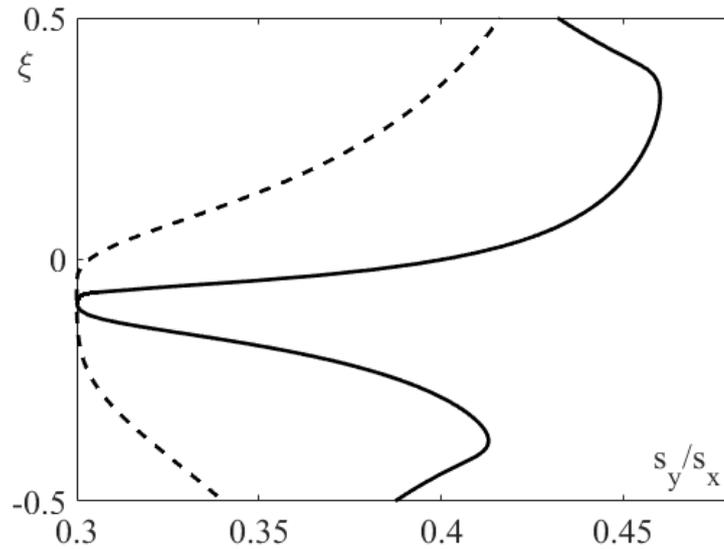


Рис. 2.18. Кривые $(s_y/s_x) - \xi$. $\mu = 0,2\mu_{\max}$ (---), $\mu = \mu_{\max} = 0,4772$ (-).

На рис. 2.19 показана история изменения отношения s_y/s_x в крайних волокнах пластинки ($\xi = \pm 0,5$) с ростом изгибающего момента, сплошная кривая соответствует отношению растягивающих напряжений, штриховая – отношению сжимающих напряжений. Показанные кривые демонстрируют насыщение при $\mu \approx 0,32$, при этом отношение s_y/s_x достигает максимального значения $s_y/s_x \approx 0,46$ в случае растяжения и $s_y/s_x \approx 0,415$ при сжатии.

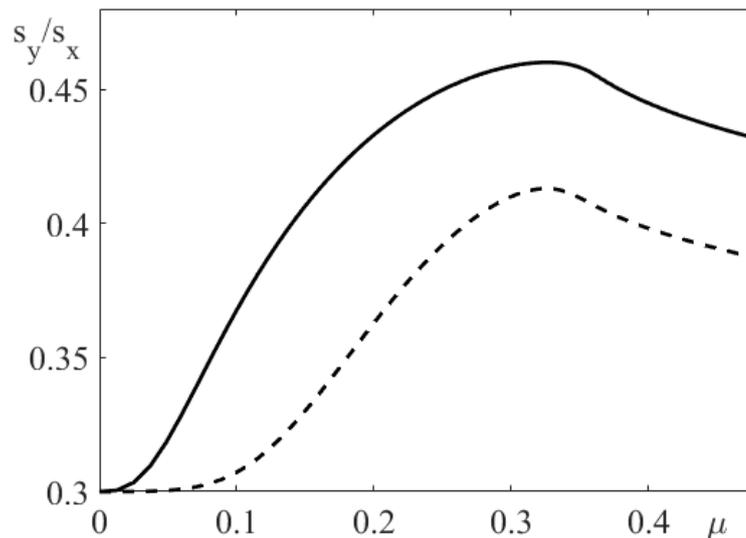


Рис. 2.19. Кривые $(s_y/s_x) - \mu$, $\xi = \pm 0,5$. Сжатие (---), растяжение (-).

Система разрешающих соотношений (2.39) позволяет решать задачи о консольном цилиндрическом изгибе пластинки из СПФ. Для этого она должна быть дополнена соотношениями

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \int_0^v \left(\int_0^g \int_0^g y(\zeta) d\zeta \right) d\vartheta \\ \mu = p(1-\nu), p \neq 0, g = 0 \\ \mu = g(1-\nu)^2, p = 0, g \neq 0 \end{array} \right. \quad (2.42)$$

здесь приняты следующие безразмерные величины: $\eta = zh/L^2$ - безразмерный прогиб пластинки, $\nu = x/L$ - безразмерная координата по длине пластинки, $p = PL/h^2\sigma_{0r}$ - безразмерная распределенная нагрузка, приложенная к свободной кромке пластинки, $g = GL^2/2h^2\sigma_{0r}$ - безразмерная интенсивность распределенной по всей поверхности пластинки нагрузки. Здесь P и G - размерные плотности соответствующих распределенных нагрузок.

На рис. 2.20 и 2.21 приведены зависимости безразмерного прогиба пластинки по ее длине для задач консольного цилиндрического изгиба под действием безразмерной распределенной силы интенсивностью $p = 0,175$ и безразмерной распределенного давления $g = 0,175$ соответственно.

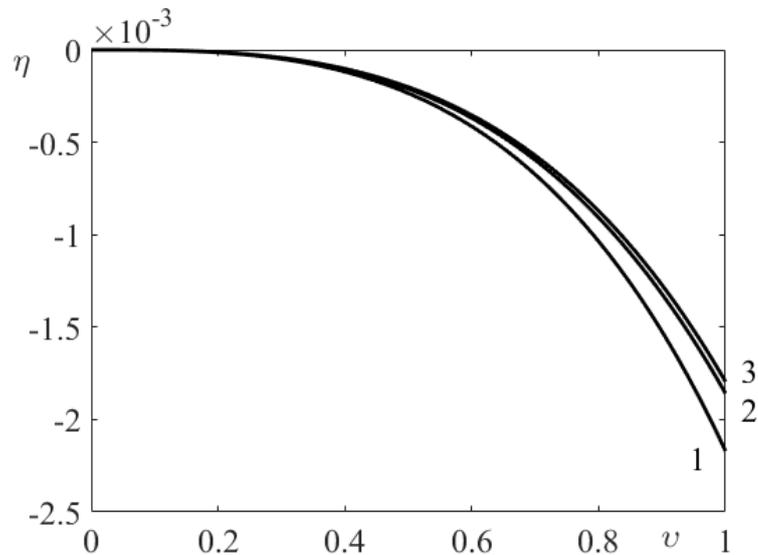


Рис. 2.20. Кривые $\eta - \nu$, от действия сосредоточенной силы p .

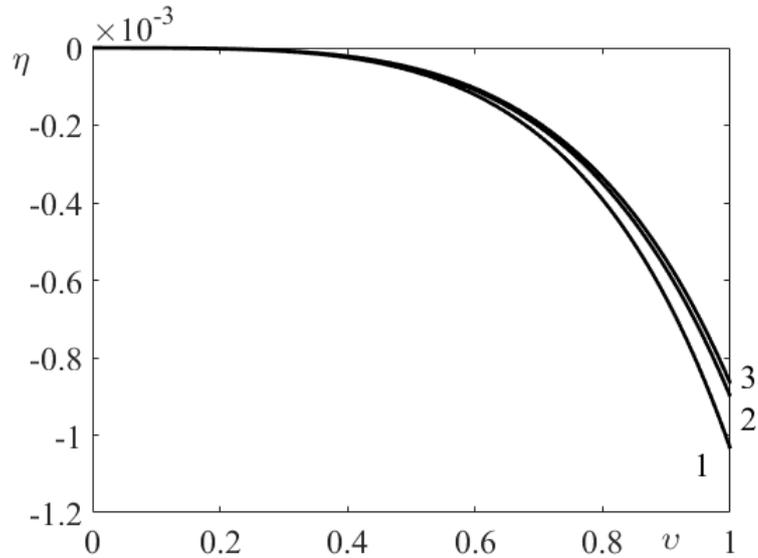


Рис. 2.21. Кривые $\eta - \nu$, от действия распределенной нагрузки g .

Кривые, отмеченные цифрой 2 на рис. 2.20 и 2.21 соответствуют решению задачи о цилиндрическом изгибе пластинки с учетом разносопротивляемости и с учетом упругих деформаций, однако без учета разномодульности ($e = E_c / E_t = 1$). Кривые 3, демонстрирующие наименьшую податливость пластинки и соответствуют случаю, когда учитывается и разносопротивляемость и разномодульность ($e = E_c / E_t = 1, 2$) материала. Кривые, обозначенные цифрой 1 соответствуют решению аналогичных задач о консольном изгибе балки. Как видно из поведения кривых 1 и 2, пластинка из СПФ закономерно оказывается на 15-20% жестче аналогичной балки из СПФ при равных прочих условиях, поскольку цилиндрическая жесткость пластинки выше изгибной жесткости балки при одинаковых геометрических параметрах сечения.

В данном параграфе получено решение о чистом и консольном цилиндрическом изгибе пластинки из СПФ в мартенситном фазовом состоянии. Выполнен учет свойства разносопротивляемости и разномодульности этого материала. Показано качественное и количественное влияние данных явлений на НДС пластинки. Установлено положение нейтральной плоскости при монотонном нагружении пластинки возрастающим изгибающим моментом. Показано, что положение НП в начальный момент нагружения определяется отношением упругих характеристик материала. Распределение продольных и поперечных напряжений в сечении пластинки является существенно нелинейным даже для небольших значений нагрузки. Установлено, что отношение компонент тензора напряжений соответствует классическому представлению $s_y / s_x = \nu$ только на нейтральной плоскости пластинки. Для остальных волокон пластинки справедливо неравенство $0,3 \leq s_y / s_x < 0,5$. Значительное отличие в результирующей кривизне пластинки при решении краевых задач изгиба с учетом и без учета

разносопротивляемости диктуют необходимость учета данного явления при проектировании устройств, активный элемент которых выполнен из СПФ и представляет собой пластинку, работающую преимущественно на изгиб.

2.4. Выводы

1. В представленной главе разработан подход к оценке НДС элементов конструкций из СПФ, работающих на изгиб в мартенситном фазовом состоянии. Выполнен учет свойства разносопротивляемости этих материалов.

2. Получены системы разрешающих соотношений и представлены алгоритмы их решения, позволяющие выполнять численное моделирование процессов изотермического чистого и консольного изгиба балки, а также чистого и консольного цилиндрического изгиба пластинки из СПФ в режиме МН.

3. Проведен анализ влияния свойства разносопротивляемости на действующие в поперечном сечении напряжения, на положение нейтральной плоскости и на податливость балок и пластинок из СПФ. Показано, что не учет данного явления приведет к количественно неверной оценке НДС активных элементов конструкций.

4. Показано влияние упругих деформаций на решение задач об изгибе балки и пластинки из СПФ в мартенситном фазовом состоянии. Установлено, что данный вид деформаций также необходимо учитывать при решении задач изгиба активных элементов конструкций.

5. Проведен анализ влияния свойства упругой разномодульности на НДС балок и пластинок при изгибе. Показано, что если материал активного элемента конструкции помимо разносопротивляемости обладает и разномодульностью, то последнее свойство также необходимо учитывать при решении задач изгиба.

6. Для задачи об изгибе балки без учета упругих деформаций установлено, что положение нейтральной плоскости в начальный момент нагружения стремится к крайним волокнам в поперечном сечении балки и определяется отношением параметров материала, отвечающим за моделирование разносопротивляемости.

7. Для задачи о изгибе балки и цилиндрическом изгибе пластинки с учетом упругих деформаций показано, что положение НП в начальный момент нагружения определяется отношением модулей упругости материала. В случае отсутствия разномодульности, НП в начальный момент нагружения совпадает с плоскостью симметрии.

8. Установлено, что отношение компонент тензора напряжений соответствует классическому представлению $s_y/s_x = \nu$ только на нейтральной плоскости пластинки. Для остальных частей сечения пластинки справедливо неравенство $0,3 \leq s_y/s_x < 0,5$.

Глава 3. Прямое термоупругое фазовое превращение, протекающее в пластинках и балках из сплавов с памятью формы под действием постоянного изгибающего момента

Задать начальную форму элементу конструкции из СПФ (перевести его в активное состояние), помимо явления МН можно и благодаря процессу ПФП. Пусть балка из СПФ первоначально находится в высоко температурном аустенитном состоянии, при $T = T_0$. Далее, к балочному элементу конструкции прикладывается внешняя нагрузка (например, изгибающий момент, μ_0), значение которой фиксируется на некотором уровне ($\mu_0 = const$). Это приведет к деформированию балки по обычному упругому закону с аустенитными значениями упругих констант. При этом, начальная температура образца должна отвечать условию $T_0 \geq M_s^{\sigma(\mu_0)}$, чтобы избежать накопления деформаций сверхупругости в процессе приложения μ_0 . Затем начинается процесс охлаждения балки через интервал температур ПФП, сопровождаемый накоплением фазово-структурных деформаций, девиатор которых соосен с девиатором действующих напряжений от нагрузки μ_0 , а величина деформаций зависит от самих напряжений. Материал балки в процессе ПФП переходит из аустенитного в мартенситное фазовое состояние, а параметр фазового состава меняет свое значение от 0 (аустенит) до 1 (мартенсит).

Модель нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях предполагает представление девиатора неупругих деформаций в достаточно сложной, дифференциальной форме (1.13-1.15). Помимо этого, действующие в поперечном сечении балки или пластинки механические напряжения оказывают значительное влияние на характерные температуры фазовых переходов, (1.16). Такая постановка задачи получила в литературе название связной термомеханической. Однако, получить решение краевой задачи в рамках такой постановки достаточно сложно, а само решение получается приближенным, поскольку разрешающее уравнение для девиатора фазово-структурных деформаций записано в дифференциальной форме, а сами деформации являются функцией историей изменения входящих в нее независимых переменных (σ, q) . В итоге, в рамках связной постановки данное уравнение не удастся проинтегрировать, а для его решения применяются численные методы пошагового интегрирования. Однако, при выполнении ряда условий и применении соответствующих гипотез, возможно записать блок уравнений (1.13-1.15) в конечном виде, что позволят получить решение краевой задачи строго в рамках принятых гипотез. В случае отсутствия изменений напряжений с ростом параметра фазового состава в процессе прямого превращения становятся применимы положения об АППН. В таком случае скоростные соотношения для девиатора неупругих деформаций могут быть проинтегрированы и, при

начальных условиях $\varepsilon_{ij}^0 = \frac{3}{2} \frac{\sigma_{ij}^{r0}}{\sigma_i^0} \rho_d q_0$, записаны в виде (2.24). При этом, в качестве функции распределения интенсивностей микронапряжений следует использовать $F(\sigma_i) = F_1(\sigma_i)$, а накопления неупругих деформаций по механизму структурного перехода не происходит.

В данной главе рассматриваются задачи о монотонном охлаждении балок и пластинок из СПФ, находящихся под действием постоянного изгибающего момента (состояние чистого изгиба) или нагруженные постоянной силой соответствующей плотности. Моделирование процесса ПФП в балке и пластинке из СПФ происходит как в несвязной, так и в связной термомеханической постановке. Как и в прошлой главе, для балок и пластинок принимаются обычные кинематические гипотезы Бернулли-Эйлера и Кирхгофа-Лява соответственно. Материал пластинки в поперечном направлении считается недеформируемым. Первоначально, материал балок и пластинок находится в аустенитном фазовом состоянии ($q_0 = 0$), а для начальной температуры выполняется условие $T_0 \geq M_s^\sigma$.

3.1. Решение задачи о прямом мартенситном превращении в балке из сплава с памятью формы с учетом разнсопротивляемости

Данный параграф посвящен моделированию явления ПФП в балке из СПФ под действием постоянного изгибающего момента. Учитывается свойство разнсопротивляемости данного материала, а поиск решения задачи ведется в рамках несвязной постановки, с применением соответствующего набора гипотез. В виду малости деформаций эффекта объемной реакции по отношению к величине фазово-структурных деформаций формоизменения, соответствующая величина в (1.13) опускается, и выражение для тензора неупругих деформаций имеет вид (2.4). Учитывая одномерность по напряжениям постановки задачи, выражение (2.4) может быть преобразовано к виду

$$\left| \varepsilon^{phst} \right| = q F_1(\sigma) \rho_d \quad (3.1)$$

Влиянием упругих деформаций пренебрегается. Рассматриваются достаточно медленные процессы охлаждения, при которых распределение температуры по сечению в каждый момент времени можно считать равномерным. Задача решается в несвязной постановке. Поэтому из равномерности распределения по сечению температуры следует равномерность распределения по сечению параметра фазового состава.

В трудах [76] установлено, что в качестве интегральной функции распределения интенсивности микронапряжений для описания явления накопления фазовых деформаций под действием постоянных напряжений хорошо подходит распределение Лапласа

$F_1(\sigma) = \text{erf}(\sigma/\sqrt{2})$, аргумент которого удобно обезразмерить путем деления на некоторое характерное напряжение σ_0 : $\varphi_1(\sigma/\sigma_0) = F_1(\sigma)$.

Представление выражения для продольных неупругих деформаций в виде (3.2) позволяет выполнить учет разносопротивляемости материала.

$$\begin{cases} \varepsilon_t^{phst} = q\rho_t\varphi_t\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0t}}\right), \varphi_t\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0t}}\right) = \text{erf}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}\sigma_{0t}}\right), \sigma > 0 \\ \varepsilon_c^{phst} = q\rho_c\varphi_c\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0c}}\right), \varphi_c\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0c}}\right) = \text{erf}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}\sigma_{0t}}\right), \sigma < 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

При решении задачи об изгибе балки из СПФ в режиме МН в одномерной по напряжениям постановке, установлено, что вид напряженного состояния меняется скачкообразно при переходе через нейтральную плоскость, а в пределах верхней и нижней полуплоскостей балки не меняется вовсе. Таким образом, зависимость параметров материала от вида напряженного состояния принимает простую форму

$$\rho_d = \begin{cases} \rho_t, \sigma > 0 \\ \rho_c, \sigma < 0 \end{cases}, \quad \sigma_0 = \begin{cases} \sigma_{0t}, \sigma > 0 \\ \sigma_{0c}, \sigma < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Здесь, $\rho_t, \rho_c, \sigma_{0t}, \sigma_{0c}$ параметры материала, которые могут быть установлены непосредственно из эксперимента на ПФП в стержне из СПФ под действием постоянной осевой сжимающей или растягивающей нагрузки. В рамках рассматриваемой задачи упругие деформации полагаются малыми по отношению к структурным, поэтому выражение для полных деформаций (1.11) с учетом (3.2) принимает вид

$$\begin{cases} \varepsilon_t = q\rho_t\varphi_t\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0t}}\right), \varphi_t\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0t}}\right) = \text{erf}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}\sigma_{0t}}\right), \sigma > 0 \\ \varepsilon_c = q\rho_c\varphi_c\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0c}}\right), \varphi_c\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0c}}\right) = \text{erf}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}\sigma_{0t}}\right), \sigma < 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Согласно гипотезе плоских сечений, рис. 2.1, выражение для полных продольных деформаций на расстоянии z от нейтральной плоскости имеет вид (2.9). Используя данное выражение, продольные нормальные напряжения могут быть выражены из (3.4) и записаны в виде

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_{0t}\varphi_t^{-1}\left(\frac{kz + \varepsilon_0}{q\rho_t}\right), \sigma > 0 \\ \sigma = \sigma_{0c}\varphi_c^{-1}\left(\frac{kz + \varepsilon_0}{q\rho_c}\right), \sigma < 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Напомним, здесь функции $\varphi_t^{-1}, \varphi_c^{-1}$ обратные к φ_t, φ_c . Изгибающий момент в рассматриваемом сечении балки определяется может быть записан в виде:

$$M = \sigma_{0c} \int_{\phi_c} \varphi_c^{-1} \left(\frac{\kappa z + \varepsilon_0}{q \rho_c} \right) z dz + \sigma_{0t} \int_{\phi_t} \varphi_t^{-1} \left(\frac{\kappa z + \varepsilon_0}{q \rho_t} \right) z dz \quad (3.6)$$

Соотношения (3.6) устанавливают вид зависимости продольных напряжений от трех независимых переменных: k , ε_0 и q . Таким образом, для известных величин кривизны k и параметра фазового состава q , продольные напряжения в поперечном сечении балки опередить нельзя без знания величины ε_0 , в этом смысле задача считается статически неопределимой. Положение НП может быть установлено с помощью уравнения равновесия в проекции на отсеченную ось

$$\sigma_{0c} \int_{\phi_c} \varphi_c^{-1} \left(\frac{\kappa z + \varepsilon_0}{q \rho_c} \right) dz + \sigma_{0t} \int_{\phi_t} \varphi_t^{-1} \left(\frac{\kappa z + \varepsilon_0}{q \rho_t} \right) dz = 0 \quad (3.7)$$

Объединим уравнения (3.4-3.6) в систему, позволяющую описать термомеханическое поведение балки из СПФ при ПФП под действием постоянного изгибающего момента с учетом разносопротивляемости этого материала:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \ y = q\lambda(\mu) \\ 2) \ \varepsilon = \begin{cases} q\rho_t\varphi_t(s), & s > 0 \\ q\rho_c\varphi_c(ss_{ic}), & s < 0 \end{cases} \\ 3) \ s = \begin{cases} \varphi_t^{-1}(\lambda(\xi+a)/\rho_t), & s > 0 \\ s_{ic}^{-1}\varphi_c^{-1}(\lambda(\xi+a)/\rho_c), & s < 0 \end{cases} \\ 4) \ \mu = \int_{-a}^{0.5} \varphi_t^{-1} \left(\frac{\lambda(\xi+a)}{\rho_t} \right) \xi d\xi + \frac{1}{s_{ic}} \int_{-0.5}^a \varphi_c^{-1} \left(\frac{\lambda(\xi+a)}{\rho_c} \right) \xi d\xi \\ 5) \ s_{ic} \int_{-a}^{0.5} \varphi_t^{-1} \left(\frac{\lambda(\xi+a)}{\rho_t} \right) d\xi + \int_{-0.5}^a \varphi_c^{-1} \left(\frac{\lambda(\xi+a)}{\rho_c} \right) d\xi = 0 \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Здесь приняты те же безразмерные величины, что и при решении задачи о монотонном изгибе балки в режиме МН, (2.13). Однако, в системе (3.8) фигурирует дополнительное уравнение (1), использование которого правомерно при решении задачи в рамках гипотез об АППН и без учета упругих деформаций. Дело в том, что полные деформации в таком случае изменяются пропорционально параметру фазового состава, (3.4). В свою очередь, гипотеза плоских сечений предполагает линейную зависимость продольных деформаций от кривизны балки, (2.9). Объединяя представленные положения, легко отметить пропорциональный характер зависимости кривизны балки от параметра фазового состава.

Как и в случае с решением одномерной задачи об изгибе балки в режиме МН без учета упругих деформаций (2.13), последнее уравнение равновесия (5) блока (3.8) имеет особенность в

начальный момент процесса ПФП, когда $q_0 = 0$. При этом, значение кривизны так же мало, $y_0 \rightarrow 0$, что приводит к невозможности вычисления параметра λ из выражения (1). В связи с этим, положение НП из последнего уравнения (5) блока (3.8) в начальный момент охлаждения определить также не удастся. Для разрешения данной проблемы предлагается исключить параметр λ из уравнения (5) с помощью следующих рассуждений. Представим функцию $\varphi^{-1}(x)$ в виде ряда Тейлора, причем, ограничимся лишь первым членом ряда в силу $x \rightarrow 0$:

$$\varphi^{-1}(x) = \text{inverf}(x) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} x + \dots \quad (3.9)$$

Принимая во внимание полученное уравнение, установим вид уравнения равновесия (5) блока (3.8):

$$s_{tc} \int_0^{0.5+a} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \frac{\lambda(\xi+a)}{\rho_t} d(\xi+a) + \int_{-0.5+a}^0 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \frac{\lambda(\xi+a)}{\rho_c} d(\xi+a) = 0 \quad (3.10)$$

Проинтегрируем полученное выражение и перегруппируем входящие в него переменные, при этом параметр λ может быть исключен:

$$D_1(0,5+a)^2 = (0,5-a)^2 \quad (3.11)$$

Здесь, $D_1 = \frac{\sigma_{0t}\rho_c}{\sigma_{0c}\rho_t}$ - некоторый параметр, определяемый только константами материала.

Решая квадратное уравнение (3.11) и исключая один из полученных корней в силу физической ограниченности $-0,5 \leq a \leq 0,5$, установим положение НП при $y_0 \rightarrow 0$:

$$a = 0,5 \frac{1 - \sqrt{D_1}}{1 + \sqrt{D_1}} \quad (3.12)$$

Таким образом, положение НП в начальный момент охлаждения балки является только функцией параметров материала. Однако, НП остается на умеренном удалении от плоскости симметрии балки, в то время как при решении задачи об изгибе балки в режиме МН, НП стремилась к крайним волокнам сечения балки ($\xi = \pm 0,5$).

Предлагается следующий алгоритм решения системы (3.8). Сечение балки в направлении поперечной оси ξ дискретизируется достаточно большим количеством точек. В начальный момент времени положение НП a_0 считается известным, (3.12), параметр фазового состава $q_0 = 0$. Величина безразмерного изгибающего момента полагается известной $\mu = \mu_0$, и не меняется в процессе охлаждения балки. Далее, предполагается совместное решение уравнений (4,5) блока (3.8) для определения актуальных значений $\lambda(\mu_0)$ и a . Оказывается, в рамках рассматриваемой поставкой, величины $\lambda(\mu_0)$ и a не меняют своих значений в процессе

охлаждения балки. Затем, для значений $\lambda(\mu_0)$ и a происходит вычисление сначала продольных напряжений (3), а затем и продольных деформаций (2). Далее, среди неизвестных осталась только кривизна балки. Для этого, параметр фазового состава представляется в виде массива $q_j = \{0..1\}$, и, для каждого q_j , на основании (1) определяем в соответствующую кривизну y_j .

Ниже представлены результаты численного моделирования явления ПФП в балке из СПФ под действием постоянного изгибающего момента с учетом разнсопротивляемости этих материалов. На рис. 3.1 и 3.2 показаны зависимости безразмерной кривизны и положения нейтральной плоскости от величины изгибающего момента. Важно понимать, что каждая точка приведенных кривых показывает результат охлаждения балки под действием фиксированного значения изгибающего момента для материалов 1-4. Параметры материалов для кривых 1-4 указаны в табл. 3.1 под советующими номерами. Так, параметры материала для кривой 4 соответствуют никелиду титана ($Ni_{50}Ti_{50}$), прошедшего температурную обработку – отжиг при температуре $450^{\circ}C$ в течении 30 минут, [76]. Кривые 1 и 3 демонстрируют влияние каждого из параметров материала, используемых для аппроксимации диаграммы ПФП, на поведение исследуемых зависимостей. Материал 2 демонстрирует отклик балки из материала, для которого свойство разнсопротивляемости не моделируется.

Таблица 3.1. Параметры $\rho_t, \rho_c, \sigma_{0t}, \sigma_{0c}$ материалов 1-4.

Номер кривой	Вид нагрузки	ρ , доли	σ_0 , МПа
Кривая 1	Растяжение	0,056	169
	Сжатие	0,0465	169
Кривая 2	Растяжение	0,056	169
	Сжатие	0,056	169
Кривая 3	Растяжение	0,056	169
	Сжатие	0,056	189
Кривая 4	Растяжение	0,056	169
	Сжатие	0,0465	189

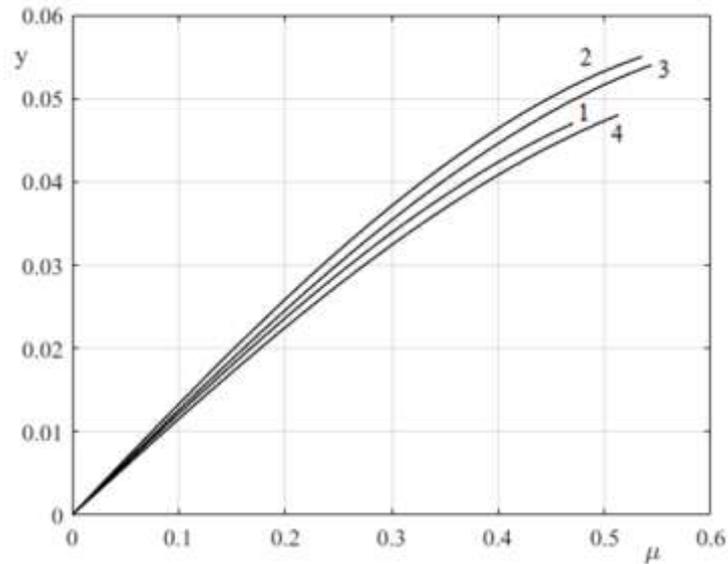


Рис. 3.1. Кривые $y - \mu$, материалы 1-4 из табл. 3.1.

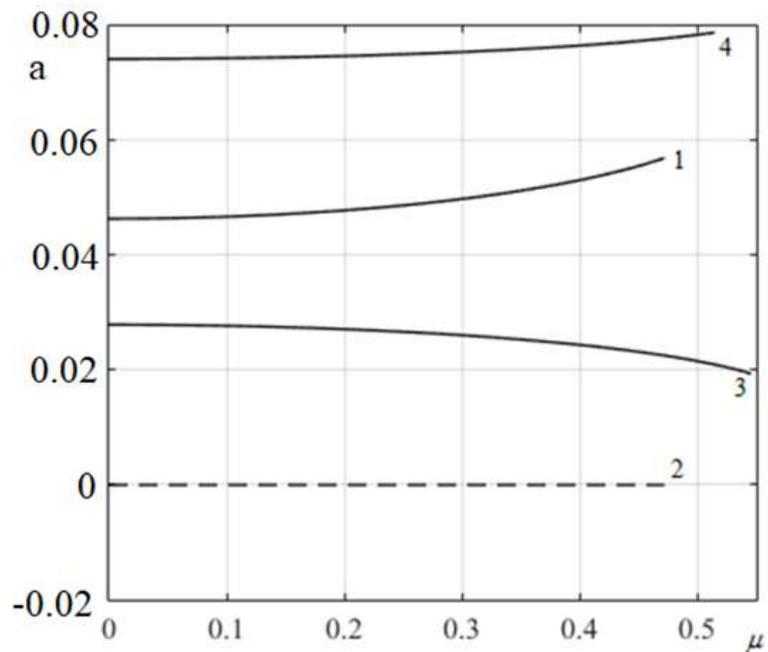


Рис. 3.2. Кривые $a - \mu$, материалы 1-4 из табл. 3.1.

Из рис. 3.1. видно, что учет свойства разнсопротивляемости (кривая 4) ведет к уменьшению податливости балки на 10-20% для средних и больших значений безразмерного изгибающего момента относительно классической постановки задачи изгиба, (кривая 2), для которой асимметрия кривых деформирования не учитывается. Согласно положениям кривых 1 и 3, учет свойства разнсопротивляемости даже по одному параметру материала приводит к значительному снижению податливости балки.

Положение кривой 4 на рис. 3.2 показывает, что максимальный уровень отклонения НП от плоскости симметрии балки достигает 7,5-8% от высоты поперечного сечения, ожидаемо, в сторону сжатых волокон. Вклад каждого из параметров материала (кривые 1,3) в смещение НП

является значительным. Материал 2 не учитывает свойство разносопротивляемости, таким образом кривая 2 закономерно совпадает с плоскостью симметрии балки.

Установлено, что явление разносопротивляемости оказывает значительное влияние на податливость, а соответственно и на кривизну балки в процессе ее охлаждения при ПФП под действием постоянного изгибающего момента. Кривизна балки в процессе ее охлаждения меняется пропорционально изменению параметра фазового состава. Положение нейтральной плоскости значительно отклоняется от плоскости симметрии балки (до 8% по высоте сечения). В рамках рассматриваемой постановки задачи без учета упругих деформаций установлено, что НП в начальный момент процесса охлаждения определяется соотношением параметров материала, и, в течение всего процесса охлаждения, не меняет своего положения. Данное положение требует дальнейшего анализа уже при решении задач о чистом изгибе балки в режиме МН в более общей постановке, например, с учетом упругой составляющей полных деформаций, чему и посвящен следующий параграф настоящего диссертационного исследования.

3.2. Решение задачи о прямом мартенситном превращении в балке из сплава с памятью формы с учетом упругих деформаций и разносопротивляемости

Данный параграф посвящен решению задачи о ПФП в балке из СПФ под действием постоянного изгибающего момента. Выполнен учет свойства разносопротивляемости, а поиск решения задачи ведется в одномерной по напряжениям постановке. Набор гипотез, принятый в прошлой задаче актуален и для рассматриваемой задачи, кроме одной: в данной постановке учитывается упругая составляющая продольных деформаций. Таким образом, справедливы соотношения (2.21) для полных продольных деформаций. Упругая составляющая полных деформаций может быть записана в виде:

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E(q)} \quad (3.13)$$

Предполагается осреднение по Рейсу для модуля упругости первого рода $\frac{1}{E(q)} = \frac{q}{E_M} + \frac{1-q}{E_A}$,

где E_A, E_M - модули Юнга в аустенитном и мартенситном фазовом состоянии соответственно. С учетом разносопротивляемости материала, выражений (2.8, 2.21, 3.13), полные продольные деформации могут быть представлены в виде

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \frac{\sigma}{E_t(q)} + q\rho_t\varphi_t\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0t}}\right), \varphi_t\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0t}}\right) = \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}\sigma_{0t}}\right), \sigma > 0 \\ \varepsilon_c = \frac{\sigma}{E_c(q)} + q\rho_c\varphi_c\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0c}}\right), \varphi_c\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0c}}\right) = \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}\sigma_{0c}}\right), \sigma < 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

В прошлом параграфе было показано, что при решении задачи о ПФП в балке в одномерной по напряжениям постановке, вид напряженного состояния при переходе через НП меняется скачкообразно. Таким образом, зависимость параметров материала ρ_d, σ_0 от вида напряженного состояния снова представлена простейшей кусочно-постоянной зависимостью (3.3) – использованы различные значения этих параметров в случае растягивающих и сжимающих напряжений. Помимо разнсопротивляемости, выражение (3.14) позволяет учитывать и разномодульность материала, путем использования различных значений модуля Юнга в случае одноосного растяжения и сжатия:

$$E_M = \begin{cases} E_{Mt}, & \sigma > 0 \\ E_{Mc}, & \sigma < 0 \end{cases}, \quad E_A = \begin{cases} E_{At}, & \sigma > 0 \\ E_{Ac}, & \sigma < 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

В отличие от предыдущей задачи, соотношения (3.14) не позволяют в явном виде получить выражение для продольных напряжений. Таким образом, помимо положения нейтральной плоскости, распределение нормальных продольных напряжений в поперечном сечении балки также заранее неизвестно. В связи с этим, уравнения (3.6) и (3.7) для определения изгибающего момента и уравнение равновесия в проекции на продольную ось требуют записи в более общем виде (2.24) и (2.25).

Объединим уравнения (2.21, 2.24, 2.25, 3.13, 3.14) в систему, позволяющую описать термомеханическое поведение балки из СПФ при ПФП под действием постоянного изгибающего момента с учетом разнсопротивляемости и упругих деформаций этого материала:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \varepsilon = y\xi + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = ya \\ 2) \quad \varepsilon = \frac{s_t}{e_t(q)} + q\rho_t\varphi_t(s_t), \quad s > 0 \\ 3) \quad \varepsilon = \frac{s_c}{e_c(q)} + q\rho_c\varphi_c(s_c), \quad s < 0 \\ 4) \quad \mu = \int_{-a}^{0.5} s_t(\xi)\xi d\xi + \int_{-0.5}^a s_c(\xi)\xi d\xi \\ 5) \quad \int_{-a}^{0.5} s_t(\xi) d\xi + \int_{-0.5}^a s_c(\xi) d\xi = 0 \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Здесь использованы те же безразмерные величины и обозначения, что и при решении предыдущих задач. Дополнительно введены: $e_t(q) = \frac{E_t(q)}{\sigma_{0t}}$, $e_c(q) = \frac{E_c(q)}{\sigma_{0c}}$ – безразмерные модули упругости первого рода, имеющие осреднение по Рейсу для параметра фазового состава.

Система (3.16) позволяет установить термомеханический отклик балки из СПФ при ПФП под действием постоянного изгибающего момента с учетом разнсопротивляемости и упругих

деформаций этого материала. Далее, при описании алгоритма решения задачи, будут использованы ссылки на формулы (1-5), которые имеют отношение только к системе (3.16) и справедливы в рамках настоящего параграфа. В начальный момент охлаждения, материал балки находится в аустенитном состоянии, $q_0 = 0$. Для решения задачи о ПФП с использованием системы (3.16) необходимо установить начальное НДС балки. Так, если обратиться к уравнениям (2,3) блока (3.16) с учетом $q_0 = 0$, окажется, что преднапряжение балки в аустенитном состоянии до потребной величины изгибающего момента μ_0 происходит по упругому закону деформирования:

$$s = \begin{cases} \varepsilon e_{Mt}, & s > 0 \\ \varepsilon e_{Mc}, & s < 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Используя (3.17) и гипотезу плоских сечений (1), проинтегрируем уравнение равновесия (5). В результате окажется, что положение НП a_0 в начальный момент охлаждения балки является функцией только отношения упругих модулей, а соотношения (2.31) справедливы и для моделирования процесса ПФП. Подставим в уравнение (5) соотношения (3.17). Проинтегрируем полученное выражение по соответствующим областям и выразим величину безразмерного изгибающего момента через величину ε_{00r} - продольная упругая деформаций крайнего волокна балки в растянутой зоне, ($\varepsilon_{00r} = y(\xi = 0,5)$):

$$\mu_0 = \frac{\varepsilon_{00r}}{12} (2a^2 (e_{mt} - e_{mc}) - a(e_{mt} + e_{mc}) + (e_{mc} - e_{mt})) \quad (3.18)$$

В дальнейшем, с помощью (3.18), удобно записывать граничное условие – величину постоянного безразмерного изгибающего момента μ_0 в терминах продольных упругих деформаций ε_{00r} на растянутой кромке сечения балки. В рамках рассматриваемой задачи используются следующие значения начальных деформаций крайних волокон балки: $\varepsilon_{00r} = 0,1\%$, $0,2\%$, $0,5\%$ и 1% . При условии заданных начальных деформаций ε_{00r} и параметров материала, положение НП в начальный момент охлаждения устанавливаются согласно (2.31), начальная кривизна балки определяется из гипотезы плоских сечений (2.9), а линейное распределение продольных напряжений может быть установлено из (3.17). Таким образом, начальное НДС балки считается известным.

В ходе решения предыдущей задачи о ПФП в балке без учета упругих деформаций, была принята априорная гипотеза о пропорциональном изменении кривизны балки относительно изменения параметра фазового состава, использование которой было правомерным в рамках принимаемых положений об АППН. В рассматриваемой задаче, в явном виде установить

характер данной зависимости не удалось. Предлагается следующий алгоритм решения системы (3.16):

1. Сначала необходимо представить параметр фазового состава в виде массива $q_j = \{0..1\}$. Предположим, что мы находимся на некотором j -м шаге поиска решения системы (3.16). Все величины с предыдущего шага ($j-1$) считаются известными.
2. Если, для текущего значения q_j мы впервые попадаем на данный шаг, необходимо задать малую величину $\Delta y > 0$. Очередное приближение по кривизне определяем с помощью $y_j = y_{j-1} + \Delta y$.
3. Для текущего значения y_j и a_j , с помощью (1) определяем распределение продольных деформаций по сечению балки $\varepsilon_j(\xi)$. В качестве первого приближения a_j может быть использовано значение с предыдущего шага, a_{j-1} .
4. На основании текущего значения $\varepsilon_j(\xi)$, из нелинейных уравнений (2,3) определяются актуальное распределение продольных напряжений $s_j(\xi)$.
5. Затем, найденные величины $s_j(\xi)$ и a_j подставляются в уравнение равновесия (5), происходит уточнение величины a_j . Далее, шаги 3-5 повторяются до тех пор, пока очередное приближение по положению НП a_j не станет отличаться от величины, определенной прошлым приближением – на заранее установленную малую величину. Только тогда возможен переход к шагу 6.
6. Продольные напряжения $s_j(\xi)$ и уточненная величина a_j подставляются в уравнение (4), происходит вычисление текущего значения изгибающего момента μ_j и сравнение с эталонным значением μ_0 . На основании этого сравнения происходит коррекция малой величины $\Delta y > 0$ и повторение шагов 2-6 до тех пор, пока разница $|\mu_j - \mu_0|$ не станет малой величиной. Только тогда возможен переход к шагу 1 и следующему значению q_{j+1} .

Предлагаемый алгоритм решения задачи о ПФП в балке под действием постоянного изгибающего момента на первый взгляд может показаться достаточно трудоемким. Однако, в ходе численного решения рассматриваемой задачи установлено, что зависимость кривизны балки от параметра фазового состава носит линейный характер, аналогичный установленному в предыдущем параграфе при решении задачи без учета упругих деформаций, $y = q\lambda(\mu)$. Таким

образом, уже на 4-5 шаге по параметру фазового состава ($q_j, j = 5$), величина Δu оказывается определенной с достаточной точностью и более не меняется в процессе охлаждения балки, ($\Delta u_j = const, j > 5$). Поскольку, при численном решении рассматриваемой задачи частота дискретизация параметра процесса обычно является достаточно высокой, ($q_j, j = 1..N \cdot 10^3$), установленный линейный характер зависимости $y = q\lambda(\mu)$ позволяет сильно снизить трудоёмкость решения задачи с использованием предложенного алгоритма.

Ниже представлены результаты численного моделирования явления ПФП в балке из СПФ под действием постоянного изгибающего момента с учетом разносопротивляемости этих материалов, а также с учетом упругих деформаций. На рис. 3.3 и 3.4 показана история изменения безразмерной кривизны и положения нейтральной плоскости в процессе охлаждения балки. Параметры материалов для кривых 1-4 указаны в табл. 3.2 под советующими номерами. Так, параметры материала для кривой 4 соответствуют равноатомному никелиду титана ($Ni_{50}Ti_{50}$), прошедшему температурную обработку – отжиг при температуре $450^{\circ}C$ в течении 30 минут, [76]. Кривые 1 и 3 демонстрируют влияние каждого из параметров материала, используемых для аппроксимации диаграммы ПФП, на поведение исследуемых зависимостей. Материал 2 демонстрирует отклик балки из материала, для которого свойство разносопротивляемости не моделируется. В ходе численного решения рассматриваемой задачи установлен линейный характер зависимости $y - q$, рис. 3.3, в то время как при решении задачи без учета упругих деформаций выявить характер данной зависимости удалось еще на этапе формирования системы разрешающих соотношений. Установлено, что учет свойства разносопротивляемости (кривая 4) ведет к уменьшению кривизны балки на момент окончания ПФП на 15-20% относительно одинаково сопротивляющегося материала, (кривая 2), для которой асимметрия кривых деформирования не учитывается. Согласно положениям кривых 1 и 3, учет свойства разносопротивляемости даже по одному параметру материала приводит к значительному снижению податливости балки.

Положение кривой 4 на рис. 3.4 показывает, что максимальный уровень отклонения НП от плоскости симметрии балки достигает 3,2% от высоты поперечного сечения, ожидаемо, в сторону сжатых волокон. При решении предыдущей задачи без учета упругих деформаций, максимальное отклонение НП составило порядка 7,5%. Помимо этого, разномодульность материалов 1-4 здесь не моделируется, таким образом НП в начальный момент процесса совпадает с плоскостью симметрии балки, (2.31). Следовательно, упругие деформации оказывают значительное влияние на положение НП в процессе охлаждения балки и должны обязательно учитываться при моделировании явления ПФП в балке под действием постоянного

изгибающего момента. Вклад каждого из параметров материала (кривые 1,3) в смещение НП является значительным. Материал 2 не учитывает ни свойство разносопротивляемости ни разномодульность, таким образом кривая 2 закономерно совпадает с плоскостью симметрии балки.

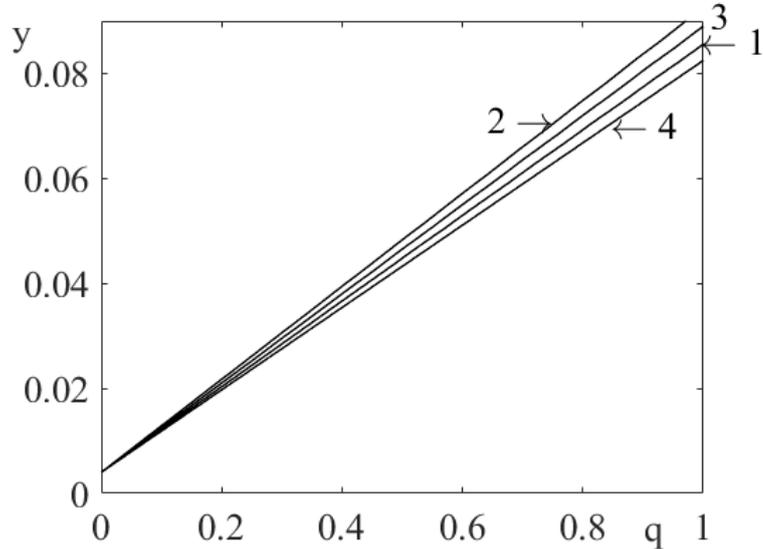


Рис. 3.3. Прямые $y-q$, материалы 1-4 из табл. 3.2.

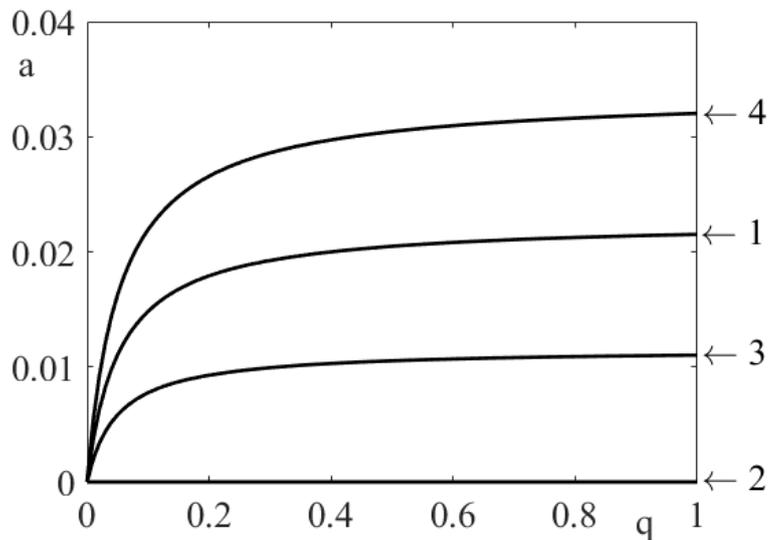


Рис. 3.4. Кривые $a-q$, материалы 1-4 из табл. 3.2.

На рис. 3.5 и 3.6 показано распределение безразмерных продольных напряжений по высоте сечения балки. Для наглядности, распределения напряжений отложены по оси $\xi_a = (\xi + a)$, начало которой совпадает с НП, а сжимающие напряжения перенесены в верхнюю полуплоскость сечения балки с противоположным знаком. Более жирные кривые соответствуют окончанию процесса охлаждения балки ($q=1$), а более тонкие – некоторой точке в начале процесса ($q=0,1$). Величина начальной деформации для обоих рисунков одинаковая,

$\varepsilon_{00r} = 0,2\%$, ($\mu_0 = 0,16568$). Рис. 3.5 отвечает постановке задачи с учетом только разносопротивляемости и соответствует материалу 4 из табл. 3.2. Рис. 3.6 отвечает постановке с учетом и разносопротивляемости и разномодульности ($e = E_c / E_t = 0,8$), материал 5 из табл. 3.3. Установлено, что с учетом упругой составляющей полных деформаций зависимость $y(q)$ остается линейной, рис. 3.3, однако положение нейтральной плоскости и распределение нормальных напряжений по сечению балки теперь являются функциями параметра фазового состава, рис. 3.4, 3.5 и 3.6.

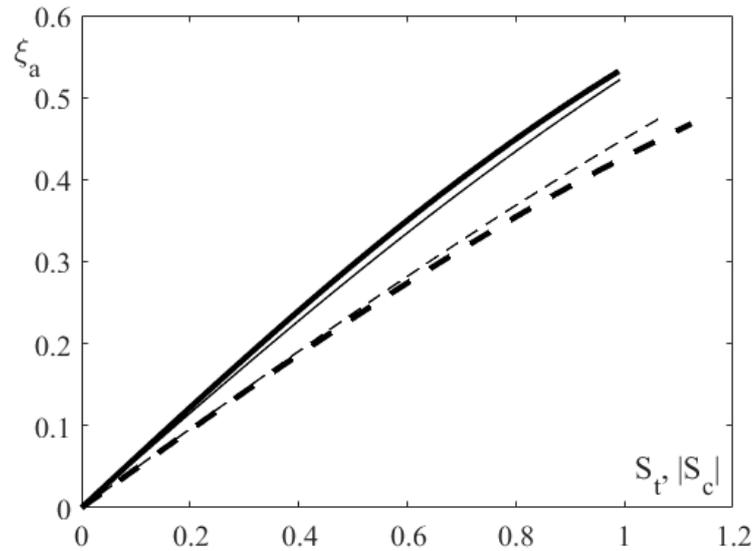


Рис. 3.5. Кривые $s - \xi_a$. (-) s_t , (--) s_c . Материал 4 из табл. 3.2.

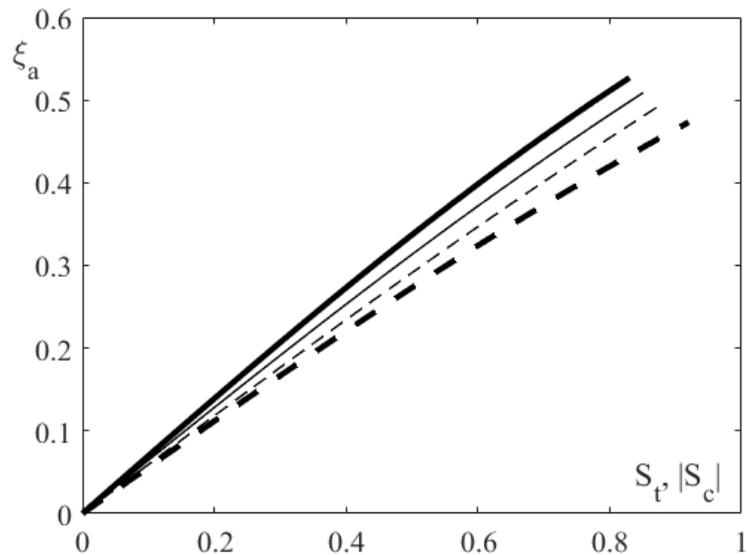
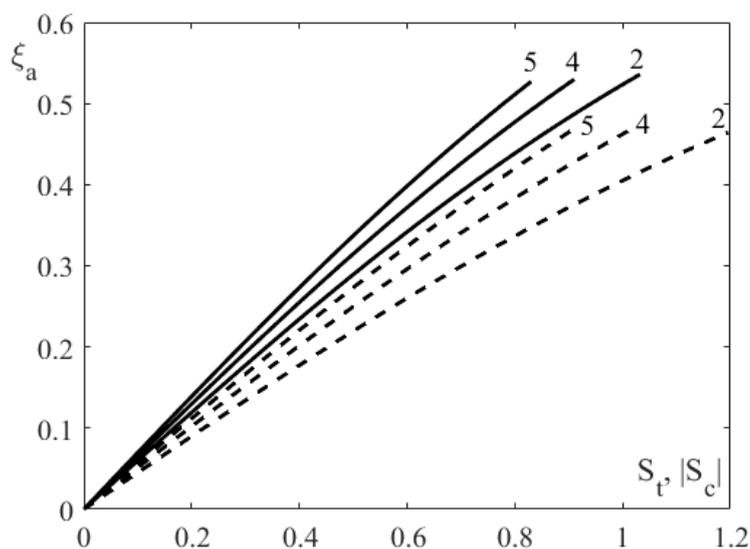
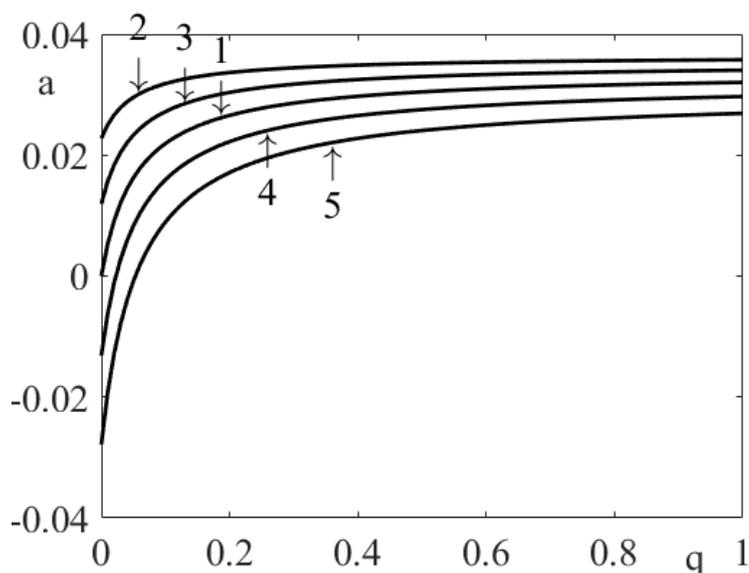


Рис. 3.6. Кривые $s - \xi_a$. (-) s_t , (--) s_c . Материал 5 из табл. 3.3.

Таблица 3.2. Параметры $\rho_t, \rho_c, \sigma_{0t}, \sigma_{0c}, e$ материалов 1-4 и начальные условия ε_{00t} .

Номер кривой	Вид нагрузки	ρ , доли	σ_0 , МПа	$e = E_c / E_t$	ε_{00t}
Кривая 1	Растяжение	0,056	169	1	0,2%
	Сжатие	0,0465	169		
Кривая 2	Растяжение	0,056	169	1	0,2%
	Сжатие	0,056	169		
Кривая 3	Растяжение	0,056	169	1	0,2%
	Сжатие	0,056	189		
Кривая 4	Растяжение	0,056	169	1	0,2%
	Сжатие	0,0465	189		

Ниже приведены результаты исследования влияния разномодульности (параметра $e = E_c / E_t$) на распределение безразмерных нормальных напряжений по высоте сечения, рис. 3.7, и на зависимость положения нейтральной плоскости от параметра фазового состава, рис. 3.8.

Рис. 3.7. Кривые $s - \xi_a$. (—) s_t , (---) s_c . Материалы 1-5 из табл. 3.3.Рис. 3.8. Кривые $a - q$, материалы 1-5 из табл. 3.3.

Поведение кривых на рис. 3.4 и 3.8 отвечают полученным ранее соотношениям (2.31), а именно: положение нейтральной плоскости при $q_0 = 0$ определяется только отношением упругих модулей, в то время как при средних и больших значениях q поведение $a(q)$ в большей степени зависит от параметров материала $\delta_t, \delta_c, \sigma_{0t}, \sigma_{0c}$.

Таблица 3.3. Параметры $\rho_t, \rho_c, \sigma_{0t}, \sigma_{0c}, e$ материалов 1-5 и начальные условия ε_{00t} .

Номер кривой	Вид нагрузки	ρ , доли	σ_0 , МПа	$e = E_c / E_t$	ε_{00t}
Кривая 1	Растяжение	0,056	169	1	0,2%
	Сжатие	0,0465	189		
Кривая 2	Растяжение	0,056	169	1,2	0,2%
	Сжатие	0,0465	189		
Кривая 3	Растяжение	0,056	169	1,1	0,2%
	Сжатие	0,0465	189		
Кривая 4	Растяжение	0,056	169	0,9	0,2%
	Сжатие	0,0465	189		
Кривая 5	Растяжение	0,056	169	0,8	0,2%
	Сжатие	0,0465	189		

На рис. 3.9 и 3.10 показаны зависимости $y(q)$ и $a(q)$ для разносопротивляющегося материала 4 из табл. 3.2. При этом кривые 1-4 отвечают решению задачи для разных значений начальной деформации крайних волокон $\varepsilon_{00t} = 0,1\%, 0,2\%, 0,5\%$ и 1% соответственно. Другими словами, кривые 1-4 получены для разных значений безразмерного изгибающего момента $\mu_0 = 0,08284; 0,16568; 0,4142$ и $0,8284$ соответственно. Отметим, что с ростом безразмерного изгибающего момента при прямом термоупругом превращении ожидаемо растет безразмерная кривизна балки, однако положение нейтральной плоскости стремится вернуться к плоскости симметрии балки. Такое поведение кривых 3-4 объясняется тем, что они построены для достаточно больших значений безразмерного изгибающего момента ($\mu_0 = 0,4142$ и $0,8284$), при которых значения упругих деформаций достигают тех же порядков, что и фазовые деформации. Поскольку данный график соответствует разносопротивляющемуся материалу, без учета свойства разномодульности, то смещение нейтральной плоскости к оси симметрии балки является закономерным.

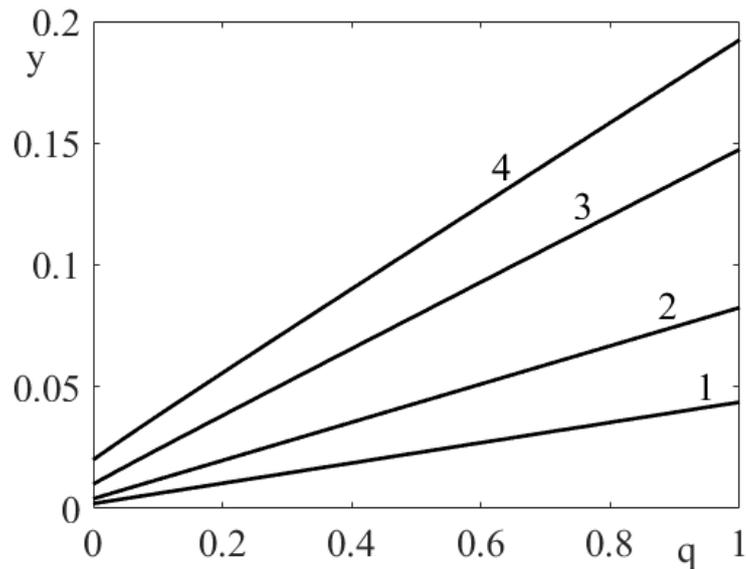


Рис. 3.9. Прямые $y-q$, $\varepsilon_{00r} = 0,1\%$, $0,2\%$, $0,5\%$ и 1% .

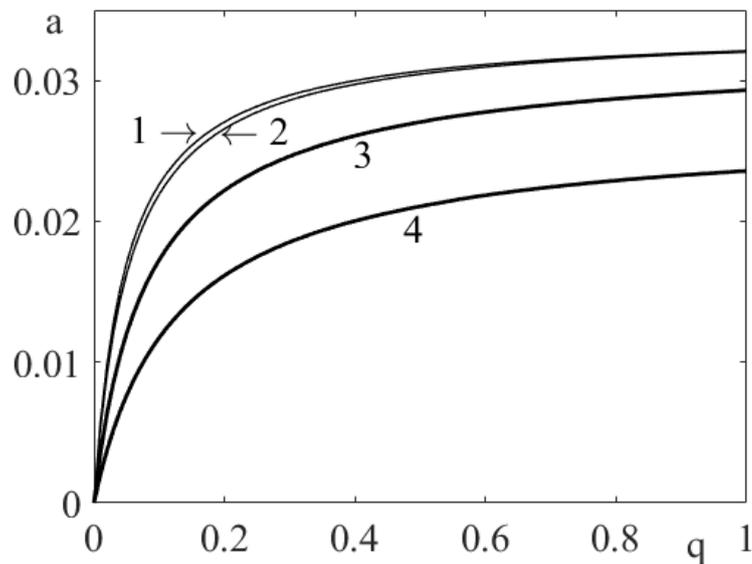


Рис. 3.10. Кривые $a-q$, $\varepsilon_{00r} = 0,1\%$, $0,2\%$, $0,5\%$ и 1% .

На рис. 3.11 показаны зависимости безразмерного положения нейтральной плоскости от параметра фазового состава. Кривые 1-5 построены для параметров материала, указанных в табл. 3.4. Таким образом, поведение кривых 1-5 демонстрируют сходимость решения задачи об изгибе балки с учетом упругих деформаций, кривая 1, к решению аналогичной задачи из предыдущего параграфа, но без учета упругих деформаций, кривая 5, при редуцировании упругой составляющей полных продольных деформаций. Таким образом, при редуцировании упругих деформаций снижается степень влияния параметра фазового состава на положение нейтральной плоскости, и, в конечном счете, a перестает быть функцией $a(q)$.

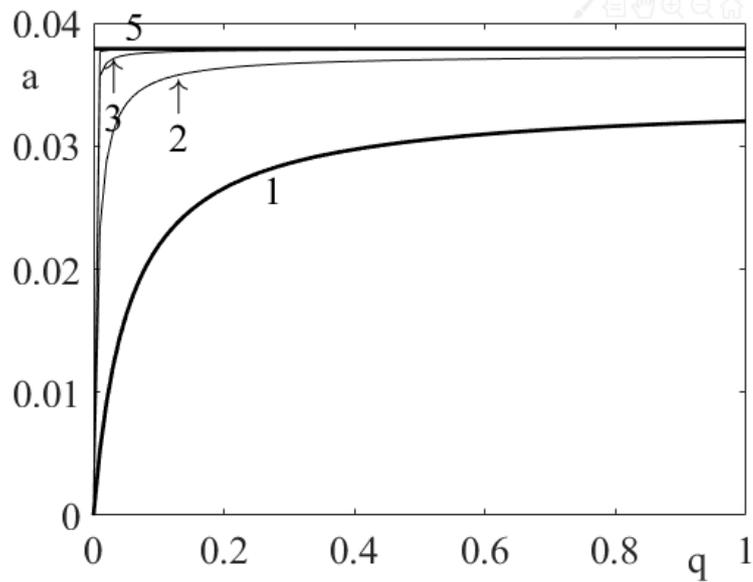


Рис. 3.11. Кривые $a - q$, материалы 1-5 из табл. 3.4.

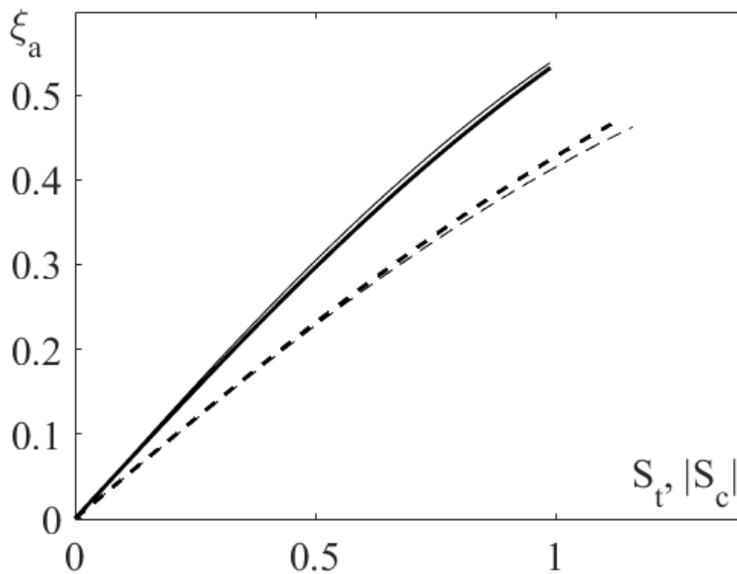


Рис. 3.12. Кривые $s - \xi_a$. (-) s_i , (--) s_c . Материалы 1-5 из табл. 3.4.

На рис. 3.12 показано распределение безразмерных продольных нормальных напряжений по высоте сечения балки. Более жирные кривые отвечают материалу 1 из табл.3.4 и соответствуют постановке задачи с учетом упругой составляющей полных деформаций, в то время как более тонкие – материалу 5 и постановке без учета упругих деформаций. Для наглядности, сжимающие напряжения перенесены в верхнюю полуплоскость балки с отрицательным знаком и отложены по оси $\xi_a = (\xi + a)$. Отметим слабовыраженную зависимость распределений напряжений в сечении балки от учета упругих деформаций. Это связано с отсутствием разномодульности ($e = E_c / E_t = 1$). Если вернуться к рис. 3.7, станет очевидно, что при отличии параметра разномодульности материала балки от единицы ($e \neq 1$), влияние учета упругих деформаций на распределение нормальных напряжений возрастет.

Таблица 3.4. Параметры $\rho_t, \rho_c, \sigma_{0t}, \sigma_{0c}, e$ материалов 1-5 и начальные условия ε_{00t} .

Номер кривой	Вид нагрузки	ρ , доли	σ_0 , МПа	ε_{00t}	E , МПа
Кривая 1	Растяжение	0,056	169	0,2%	E
	Сжатие	0,0465	189		
Кривая 2	Растяжение	0,056	169	0,2%	$E \cdot 10^1$
	Сжатие	0,0465	189		
Кривая 3	Растяжение	0,056	169	0,2%	$E \cdot 10^2$
	Сжатие	0,0465	189		
Кривая 4	Растяжение	0,056	169	0,2%	$E \cdot 10^3$
	Сжатие	0,0465	189		
Кривая 5	Растяжение	0,056	169	0,2%	-
	Сжатие	0,0465	189		

В настоящем параграфе показано, что при решении задачи о ПФП в балке под действием постоянного изгибающего момента с учетом разнсопротивляемости необходимо также учитывать и упругую составляющую полных деформаций. В ходе численного решения установлено, что кривизна балки в процессе ее охлаждения меняется пропорционально изменению параметра фазового состава. Нейтральная плоскость умеренно отклоняется от плоскости симметрии балки (до 4% по высоте сечения). В рамках рассматриваемой постановки задачи с учетом упругих деформаций установлено, что НП в начальный момент процесса охлаждения определяется соотношением Модулей Юнга при растяжении и сжатии. Помимо этого, положение НП изменяется в процессе охлаждения балки, в то время как при решении задачи без учета упругих деформаций положение НП не являлось функцией параметра фазового состава и не изменялось в процессе ПФП. Показано, если материал балки помимо разнсопротивляемости обладает и упругой разномодульностью, последнее свойство также необходимо учитывать при моделировании термомеханического поведения активного элемента конструкции в рамках явления ПФП.

3.3. Решение задачи о прямом мартенситном превращении в пластинке из сплава с памятью формы с учетом упругих деформаций и разнсопротивляемости

Данный параграф посвящен решению задачи о ПФП в пластинке малой постоянной толщины из СПФ под действием постоянного изгибающего момента, приложенного к двум противоположным торцам пластинки, рис. 2.12. Учитывается свойство разнсопротивляемости и реализована возможность учета свойства разномодульности рассматриваемого материала. Термомеханический отклик пластинки ищется в рамках гипотез Крихгофа-Лява. Также, пластинка считается недеформируемой в направлении оси Y , рис. 2.12. Таким образом, выражение для компоненты ε_y тензора полных деформаций, с учетом аддитивности его

представления сохраняет вид (2.33). Для упругой и фазовой составляющих поперечных деформаций, выражение (2.34) должно быть записано в более общем виде, с учетом изменения параметра фазового состава в процессе охлаждения пластинки:

$$\varepsilon_y^e = \frac{1}{E(q)}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad \varepsilon_y^{phst} = q\rho_D \frac{3}{2} \frac{\sigma_y'}{\sigma_i} \varphi(\sigma_i) \quad (3.19)$$

Подстановка (3.19) в условие плоского деформированного состояния (2.33) в отношении Y компоненты полных деформаций позволяет записать соотношения для σ_y компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_y = \sigma_x \left(\frac{\nu + 0,5BE(q)}{1 + BE(q)} \right), \quad B = q\rho_d \varphi(\sigma_i) \frac{1}{\sigma_i} \quad (3.20)$$

Полученное выражение не позволяет в явном виде выразить σ_y через σ_x и параметры материала, поскольку правая часть выражения зависит от интенсивности напряжений σ_i и параметра процесса ПФП q . Аналогичным образом не удалось установить явный вид зависимости $\sigma_y - \sigma_x$ при решении задачи о изгибе балки в режиме МН (предыдущая глава). Однако, в конечном счете, вторая компонента тензора напряжений является функцией $\sigma_y = \sigma_y(\sigma_x, q, \nu, E(q), \rho_d, \sigma_0)$.

Модификация соотношений (2.36) позволяет записать соотношения для полных продольных деформаций на случай ПФП

$$\begin{cases} \varepsilon_{xt} = \frac{\sigma_{xt} - \nu\sigma_{yt}}{E_t(q)} + \frac{1}{2} q\rho_t \frac{2\sigma_{xt} - \sigma_{yt}}{\sigma_i} \varphi_t(\sigma_i / \sigma_{0t}), \quad \sigma > 0 \\ \varepsilon_{xc} = \frac{\sigma_{xc} - \nu\sigma_{yc}}{E_c(q)} + \frac{1}{2} q\rho_c \frac{2\sigma_{xc} - \sigma_{yc}}{\sigma_i} \varphi_c(\sigma_i / \sigma_{0c}), \quad \sigma < 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

Соотношения (2.36) позволяют учитывать, как разномодульность, так и разносопротивляемость СПФ. Аналогично задаче о изгибе пластинки в режиме МН, оказывается, параметр μ_σ и в данной задаче имеет разрыв первого рода при переходе через НП во всех точках процесса, кроме $q_0 = 0$. Данное положение будет обосновано при исследовании подведения уравнения (3.20) вблизи НП. Помимо этого, значение параметра вида напряженного состояния меняется по высоте сечения как в верхней, так и в нижней его половине незначительно, и допускает процедуру осреднения. Параметры материала вновь определяются согласно (3.3).

Уравнение для изгибающего момента и уравнение равновесия в проекции на продольную ось сохраняют вид (2.37) и (2.38) соответственно. Объединим выражения (2.9), (2.37), (2.38), (3.20), (3.21) в систему уравнений (3.22), позволяющую описать

термомеханическое поведение пластинки из СПФ в процессе ПФП под действием постоянного изгибающего момента.

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \varepsilon = y\xi + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = ya \\ 2) \quad \varepsilon_{xt} = \frac{s_{xt} - \nu s_{yt}}{e_t(q)} + \frac{1}{2} q \rho_t \frac{2s_{xt} - s_{yt}}{s_i} \varphi_t(s_{it}), \quad s > 0 \\ 3) \quad \varepsilon_{xc} = \frac{s_{xc} - \nu s_{yc}}{e_c(q)} + \frac{1}{2} q \rho_c \frac{2s_{xc} - s_{yc}}{s_i} \varphi_c(s_{ic} s_{tc}), \quad s < 0 \\ 4) \quad s_{yt} = s_{xt} \left(\frac{\nu + 0,5 B_{1t} e_t(q)}{1 + B_{1t} e_t(q)} \right), \quad B_{1t} = q \rho_t \varphi_t(s_{it}) \frac{1}{s_{it}} \\ 5) \quad s_{yc} = s_{xc} \left(\frac{\nu + 0,5 B_{1c} e_c(q)}{1 + B_{1c} e_c(q)} \right), \quad B_{1c} = q \rho_c \varphi_c(s_{ic} s_{tc}) \frac{1}{s_{ic}} \\ 6) \quad \mu = \int_{-a}^{0,5} s_{xt}(\xi) \xi d\xi + \int_{-0,5}^a s_{xc}(\xi) \xi d\xi \\ 7) \quad \int_{-a}^{0,5} s_{xt}(\xi) d\xi + \int_{-0,5}^{-a} s_{xc}(\xi) d\xi = 0 \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Здесь использованы те же безразмерные величины и обозначения, что и при решении предыдущих задач. Система (3.22) позволяет установить термомеханический отклик пластинки из СПФ при ПФП под действием постоянного изгибающего момента с учетом разносопротивляемости и упругих деформаций этого материала. Далее, при описании алгоритма решения задачи, будут использованы ссылки на формулы (1-7), которые имеют отношение только к системе (3.22) и справедливы в рамках настоящего параграфа.

Сначала установим предел отношения компонент тензора напряжений $\frac{s_y}{s_x}$ при переходе через нейтральную плоскость. Для этого представим интегральную функцию распределения интенсивности микронапряжений в виде ряда Тейлора $\left(erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \right)$ и, ограничившись лишь первым членом, подставим результат в (4,5):

$$\lim_{s_x \rightarrow +0} \left(\frac{s_y}{s_x} \right) = \frac{\nu \sqrt{\pi} + e_t(q) \rho_t q}{\sqrt{\pi} + 2e_t(q) \rho_t q} = \beta_t, \quad \lim_{s_x \rightarrow -0} \left(\frac{s_y}{s_x} \right) = \frac{\nu \sqrt{\pi} + e_c(q) \rho_c q s_{tc}}{\sqrt{\pi} + 2e_c(q) \rho_c q s_{tc}} = \beta_c \quad (3.23)$$

Нетрудно заметить, (3.23), в начальный момент охлаждения пластинки ($q_0 = 0$), получается классическое отношение между компонентами тензора напряжений ($s_{yt} = \nu s_{xt}$). Однако, в любой точке процесса ПФП, кроме начальной ($q_0 = 0$), пределы отношения компонент тензора напряжений при стремлении к НП со стороны сжатых и растянутых волокон будут разные.

Параметр вида девиатора напряжений $\mu_\sigma = \frac{27}{2} \frac{\det(\sigma'_{ij})}{\sigma_i^3}$ на НП, может быть представлен в виде

$$\lim_{s_x \rightarrow \pm 0} \mu_\sigma = \text{sign}(s_x) \frac{3}{2} \frac{\beta(2\beta^2 - 5\beta + 2)}{(\beta^2 - \beta + 1)^{3/2}}, \text{ где } \lim_{s_x \rightarrow \pm 0} \begin{pmatrix} s_y \\ s_x \end{pmatrix} = \begin{cases} \beta_t, (s_x \rightarrow +0) \\ \beta_c, (s_x \rightarrow -0) \end{cases}. \text{ Видно, что при переходе}$$

через НП, параметр вида девиатора напряжений терпит разрыв первого рода.

Для решения задачи о ПФП с использованием системы (3.22) необходимо установить начальное НДС пластинки. Так, материал пластинки в начальный момент охлаждения находится в аустенитном состоянии, $q_0 = 0$. Если обратиться к уравнениям (2,3) блока (3.22) с учетом $q_0 = 0$, окажется, что преднапряжение пластинки в аустенитном состоянии до потребной величины изгибающего момента μ_0 происходит по упругому закону деформирования, (3.17). Используя (3.17) и гипотезу плоских сечений (1), проинтегрируем уравнение равновесия (7). В результате, положение НП a_0 в начальный момент охлаждения пластинки является функцией только отношения упругих модулей, а соотношения (2.31) справедливы и для моделирования процесса ПФП. Подставим соотношения (3.17) и (1) в (6) и проинтегрируем полученное выражение по соответствующим областям. Принимая во внимание ($s_{yt} = \nu s_{xt}$ при $q_0 = 0$), выразим величину безразмерного изгибающего момента через величину ε_{00t} - продольная упругая деформаций крайнего волокна пластинки в растянутой зоне, ($\varepsilon_{00t} = y(\xi = 0,5)$):

$$\mu_0 = \frac{\varepsilon_{00t}}{12(1-\nu^2)} (2a^2(e_{mt} - e_{mc}) - a(e_{mt} + e_{mc}) + (e_{mc} - e_{mt})) \quad (3.23)$$

Начальное распределение продольных и поперечных напряжений может быть установлено из уравнения (3.17) и условия $s_{yt} = \nu s_{xt}$ при $q_0 = 0$. Предлагается следующий алгоритм решения системы (3.22):

1. Сначала необходимо представить параметр фазового состава в виде массива $q_j = \{0..1\}$. Предположим, что мы находимся на некотором j -м шаге поиска решения системы (3.22). Все величины с предыдущего шага ($j-1$) считаются известными.
2. Если, для текущего значения q_j мы впервые попадаем на данный шаг, необходимо задать малую величину $\Delta y > 0$. Очередное приближение по кривизне определяем с помощью $y_j = y_{j-1} + \Delta y$.

3. Для текущего значения y_j и a_j , с помощью (1) определяем распределение продольных деформаций по сечению балки $\varepsilon_j(\xi)$. В качестве первого приближения a_j необходимо использовать значение с предыдущего шага, a_{j-1} .
4. На основании текущего значения $\varepsilon_j(\xi)$, из нелинейных уравнений (2,3) определяется распределение продольных напряжений $s_{x,j}(\xi)$. В качестве первого приближения $s_{y,j}(\xi)$ используются значения поперечных напряжений с предыдущего шага $s_{y,j-1}(\xi)$.
 5. Найденное распределение продольных напряжений $s_{x,j}(\xi)$ и параметр фазового состава q_j подставляются в уравнения (4,5), происходит уточнение распределения поперечных напряжений $s_{y,j}(\xi)$. Организуется итерационный процесс из шагов 4-5 до тех пор, пока очередное уточнение по $s_{x,j}(\xi)$ не станет отличаться от величины, определенной на предыдущей итерации на некоторую установленную малую величину.
6. Затем, найденные величины $s_{x,j}(\xi)$ и a_j подставляются в уравнение равновесия (7), происходит уточнение величины a_j . Далее, шаги 3-6 повторяются до тех пор, пока очередное приближение по положению НП a_j не станет отличаться от величины, определенной прошлым приближением – на заранее установленную малую величину. Только тогда возможен переход к шагу 7.
7. Продольные напряжения $s_{x,j}(\xi)$ и уточненная величина a_j подставляются в уравнение (6), происходит вычисление текущего значения изгибающего момента μ_j и сравнение с эталонным значением μ_0 . На основании этого сравнения происходит коррекция малой величины $\Delta u > 0$ и повторение шагов 2-7 до тех пор, пока разница $|\mu_j - \mu_0|$ не станет малой величиной. Только тогда возможен переход к шагу 1 и следующему значению q_{j+1} .

Ниже представлены результаты численного моделирования явления ПФП в пластинке из СПФ под действием постоянного изгибающего момента с учетом разносопротивляемости этих материалов, а также учетом упругих деформаций. На рис. 3.13 и 3.14 показана история изменения безразмерной кривизны и положения нейтральной плоскости в процессе охлаждения пластинки. Параметры материалов для кривых 1-4 указаны в табл. 3.2 под советующими номерами. Так,

параметры материала для кривой 4 соответствуют равноатомному никелиду титана ($Ni_{50}Ti_{50}$). Кривые 1 и 3 демонстрируют влияние каждого из параметров материала, используемых для аппроксимации диаграммы ПФП, на поведение исследуемых зависимостей. Материал 2 демонстрирует отклик пластинки из материала, для которого свойство разнсопротивляемости не моделируется. Кривые 4 и 5 показывают различие между решениями задач о изгибе пластинки и балки соответственно. В ходе решения задачи о ПФП в балке без учета упругих деформаций установлено явный линейный характер зависимости кривизны балки y от параметра фазового состава q . При учете упругих деформаций, данная зависимость утратила явный характер, однако, в ходе численного решения, удалось установить ее линейный вид. В ходе численного решения рассматриваемой задачи установлен слабовыраженный нелинейный характер зависимости $y - q$, рис. 3.13. Установлено, что учет свойства разнсопротивляемости (кривая 4) ведет к уменьшению кривизны балки на момент окончания ПФП на 15-20% относительно одинаково сопротивляющегося материала, (кривая 2), для которой асимметрия кривых деформирования не учитывается. Согласно положениям кривых 1 и 3, учет свойства разнсопротивляемости даже по одному параметру материала приводит к значительному снижению податливости балки.

Положение кривой 4 на рис. 3.4 показывает, что максимальный уровень отклонения НП от плоскости симметрии пластинки достигает 3,08% от высоты поперечного сечения, ожидаемо, в сторону сжатых волокон. При решении предыдущей задачи о ПФП в балке, смещение НП составило 3,2% - кривая 5. Помимо этого, разномодульность материалов 1-4 здесь не моделируется, таким образом НП в начальный момент процесса совпадает с плоскостью симметрии пластинки, (2.31). Следовательно, упругие деформации оказывают значительное влияние на положение НП в процессе охлаждения пластинки и должны обязательно учитываться при моделировании явления ПФП в пластинке под действием постоянного изгибающего момента. Вклад каждого из параметров материала (кривые 1,3) в смещение НП является значительным. Материал 2 не учитывает ни свойство разнсопротивляемости ни разномодульность, таким образом кривая 2 закономерно совпадает с плоскостью симметрии пластинки. Отметим, что разница в решениях задач о ПФП в пластинке и балке (кривые 4 и 5 соответственно) является незначительной с точки зрения положения НП ($\Delta a \approx 0.01 \cdot h$), и крайне весомой с точки зрения податливости активного элемента ($\Delta y \approx 20 - 25\%$).

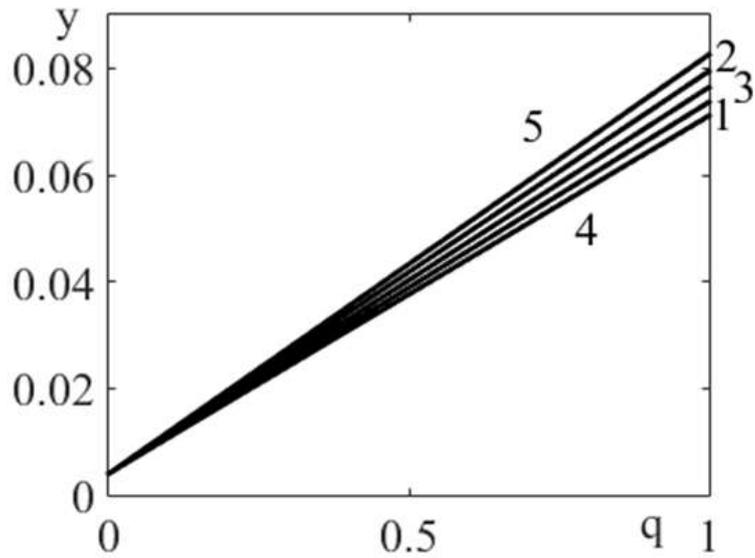


Рис. 3.13. Кривые $y - q$, материалы 1-4 из табл. 3.2.

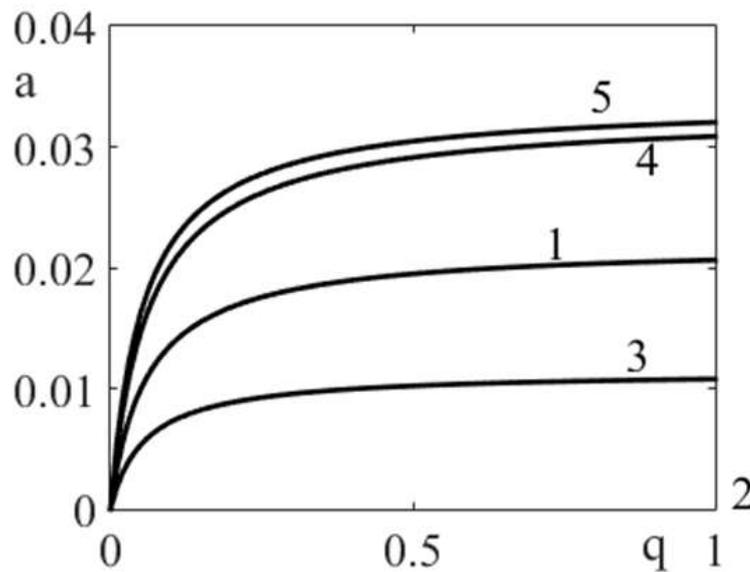


Рис. 3.14. Кривые $a - q$, материалы 1-4 из табл. 3.2.

На рис. 3.15 и 3.16 показана история изменения безразмерной кривизны и положения нейтральной плоскости в процессе охлаждения пластинки из разносопротивляющегося материала 2 из табл. 3.2. При этом кривые 1-4 отвечают решению задачи для значений безразмерного изгибающего момента $\mu_0 = 0,091$; $0,1821$; $0,4552$ и $0,9103$ соответственно. Важно отметить, что зависимость $y(q)$ демонстрирует слабовыраженный нелинейный характер (кривая 4 не совпадает с прямой штриховой линией, соединяющей начальную и конечную точки процесса). Установленная нелинейность сохраняется при увеличении точности численного решения. Положение кривых на рис. 3.16 показывает смещение положения нейтральной плоскости пластинки к оси ее симметрии с ростом начального изгибающего момента. Такое положение кривых можно объяснить тем фактом, что упругая составляющая полных деформаций достигает тех же порядков, что и фазовая составляющая (рис. 3.18) для больших значений

изгибающего момента ($\mu_0 \approx 0,9103$). При этом уменьшается отклонение нейтральной плоскости от плоскости симметрии в виду отсутствия разномодульности.

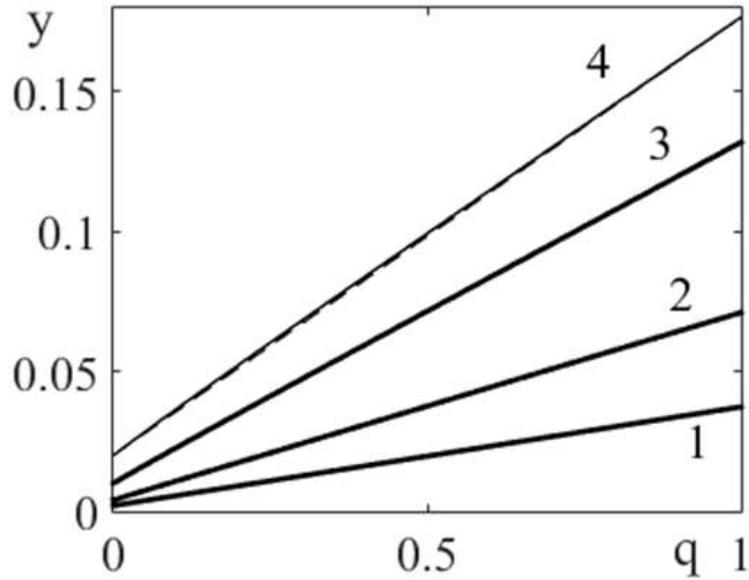


Рис. 3.15. Кривые $y-q$, $\varepsilon_{00t} = 0,1\%$, $0,2\%$, $0,5\%$ и 1% .

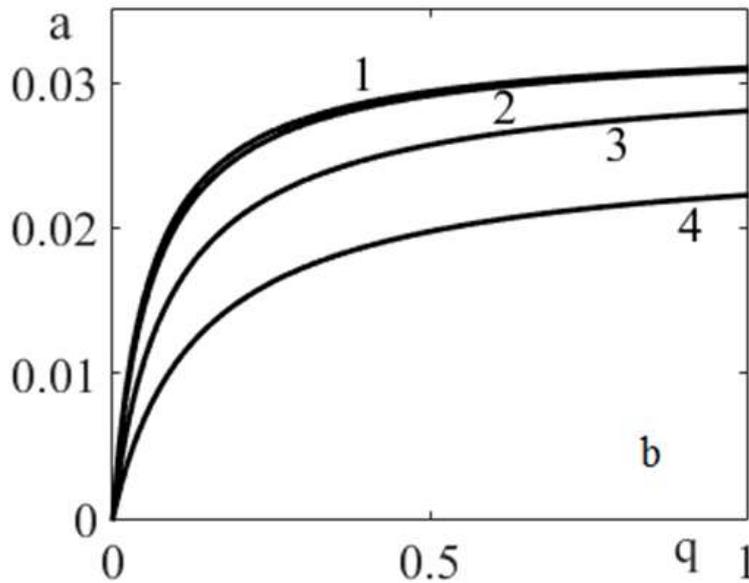


Рис. 3.16. Кривые $a-q$, $\varepsilon_{00t} = 0,1\%$, $0,2\%$, $0,5\%$ и 1% .

На рис. 3.17 показаны эпюры безразмерных нормальных продольных напряжений в сечении пластины. Кривые, отмеченные штриховыми линиями, соответствуют решению задачи в начале фазового превращения, $q_0 = 0$, сплошные линии соответствуют завершающему этапу превращения $q = 1$. Группы кривых 1-3 получены для различных значений изгибающего момента $\mu_0 = 0,1821$; $0,4552$ и $0,9103$ соответственно. Поведение данных кривых показывает, что эпюры нормальных напряжений в начальный момент фазового перехода демонстрируют

классический линейный характер, что строго соответствует постановке задачи. На завершающем этапе прямого превращения эпюры напряжений демонстрируют ярко выраженный нелинейный характер поведения до значения напряжений близкого к σ_{0r}, σ_{0c} , после чего происходит некоторое насыщение и дальнейший рост напряжений происходит по закону, близкому к линейному.

На рис. 3.18 представлена история изменения безразмерных упругих (штриховые линии) и фазовых (сплошные кривые), деформаций в крайних волокнах сечения пластины в ходе ПФП. Ранее было показано, что изменение безразмерной кривизны пластины с ростом параметра фазового состава носит слабовыраженный нелинейный характер, поэтому аналогичная тенденция в изменении фазовых деформаций в крайнем волокне пластины является ожидаемой. Более жирные штриховые кривые отвечают решению задачи для значения изгибающего момента $\mu = 0,4552$, а более тонкие – значению $\mu = 0,9103$. При этом все четыре кривые имеют слабовыраженный нелинейный характер, который не исчезает при увеличении точности алгоритма численного решения задачи. Нелинейность изменения упругих деформаций крайних волокон пластинки связана с учетом разносопротивляемости материала и отклонением нейтральной плоскости от плоскости симметрии пластины. При решении задачи без учета разносопротивляемости, рассматриваемые кривые превращаются в прямые линии.

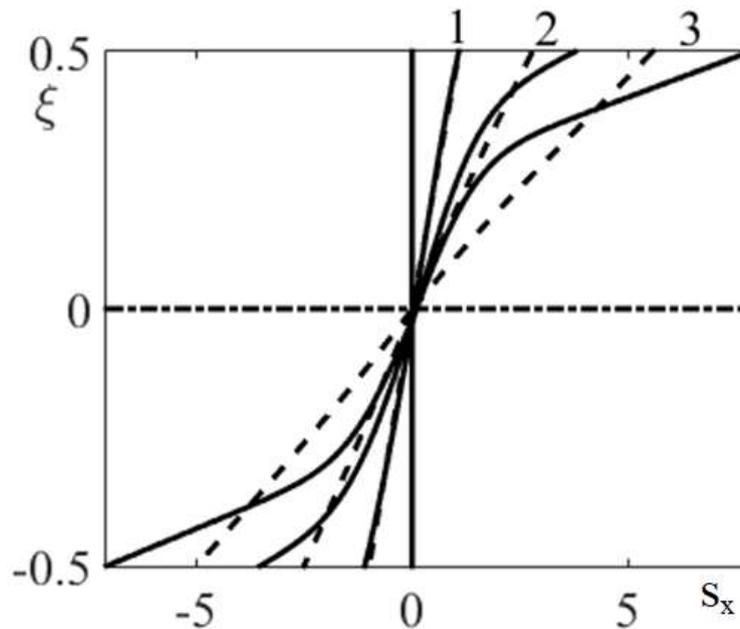


Рис. 3.17. Кривые $s - \xi$. (-) $q = 1$, (--) $q_0 = 0$. $\mu_0 = 0,1821$; $0,4552$ и $0,9103$.

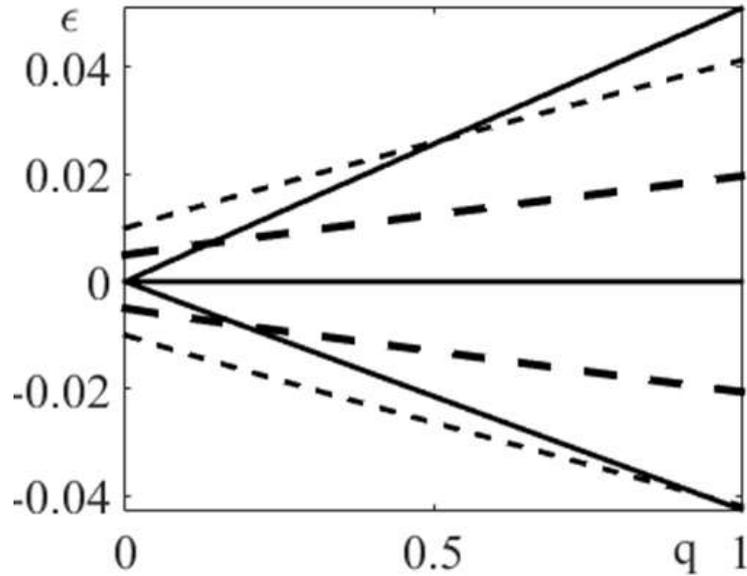


Рис. 3.18. Кривые $s-\xi_a$. (-) s_t , (--) s_c . $\mu_0=0,4552$ и $0,9103$.

На рис. 3.19 показано отношение s_y/s_x по высоте сечения балки для различных моментов ПВП: $q=0.2; 0.4; 0.6; 0.8$ и 1 , группы кривых 1-5 соответственно. При этом значение изгибающего момента для всех кривых составляет $\mu_0=0,9103$. Отметим, что отношение s_y/s_x значительно отличается от решения задачи о цилиндрическом изгибе пластинки из упругого изотропного материала в классической постановке, где $s_y/s_x = \nu$. Это связано с особенностью используемой модели нелинейного деформирования СПФ, для которой накопление неупругих деформаций подразумевает материал несжимаемым в мартенситном состоянии ($s_y/s_x = 0.5$). Таким образом, справедливо неравенство $0.3 \leq s_y/s_x < 0.5$. Как было установлено ранее, (3.23), отношение s_y/s_x действительно терпит разрыв первого рода при переходе через НП.

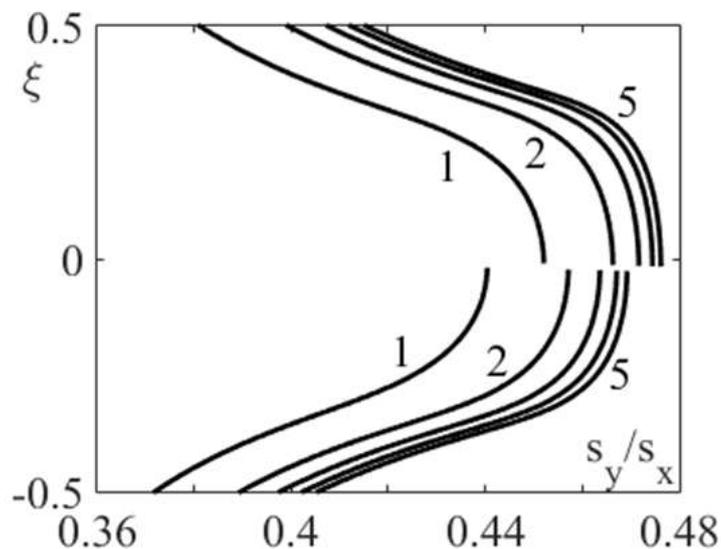


Рис. 3.19. Кривые $(s_y/s_x)-\xi$, $q=0.2; 0.4; 0.6; 0.8$ и 1 .

На рис. 3.20 показана история изменения отношения s_y/s_x в крайних волокнах пластины, сплошная кривая соответствует отношению растягивающих напряжений, штриховая – отношению сжимающих напряжений. Обе кривые берут свое начало из точки $s_y/s_x = 0,3$, что соответствует решению упругой задачи о цилиндрическом изгибе пластинки из СПФ в полностью аустенитном состоянии.

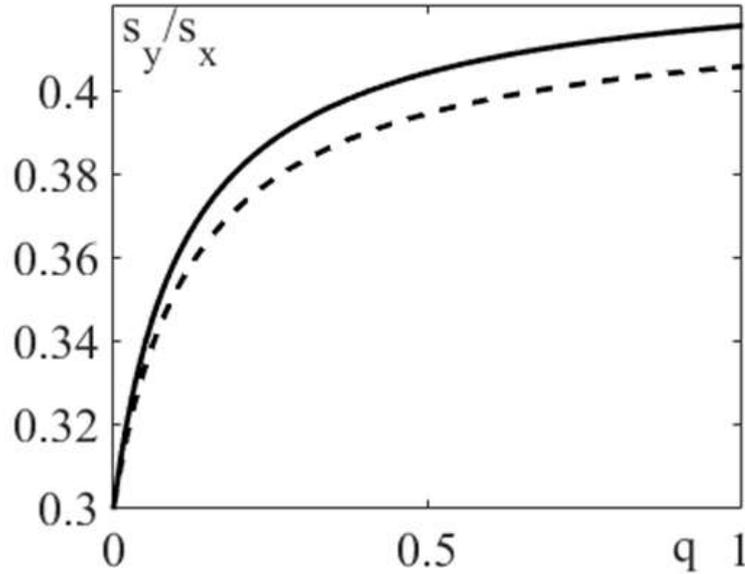


Рис. 3.20. Кривые $(s_y/s_x) - q$. $(-)$ (s_{yr}/s_{xr}) , $(--)$ (s_{yc}/s_{xc}) .

В настоящем параграфе получено решение задачи о ПФП в пластинке из СПФ с учетом разносопротивляемости и упругих деформаций, под действием постоянного изгибающего момента. Слабовыраженный нелинейный характер зависимости кривизны пластинки от параметра фазового состава удалось выявить только в ходе численного решения задачи. Нейтральная плоскость умеренно отклоняется от плоскости симметрии балки (до 4% по высоте сечения). В рамках рассматриваемой постановки задачи с учетом упругих деформаций установлено, что НП в начальный момент процесса охлаждения определяется соотношением Модулей Юнга при растяжении и сжатии. В ходе анализа системы разрешающих соотношений установлено, и по результатам численного решения подтверждено, что отношение Y к X компоненте тензора напряжений терпит разрыв первого рода при переходе через НП. Установлено, что нормальные продольные напряжения в сечении пластинки являются функцией параметра фазового состава ($s = s(q)$). Таким образом, задачу о цилиндрическом изгибе пластинки из СПФ, ровно, как и задачу об изгибе балки, с учетом разносопротивляемости и с учетом упругих деформаций для режима ПФП необходимо рассматривать в рамках связной постановки.

3.4. Решение задачи о прямом мартенситном превращении в балке из сплава с памятью формы с учетом упругих деформаций и разносопротивляемости в связанной термомеханической постановке

Данный параграф посвящен моделированию явления ПФП в балке из СПФ под действием постоянного изгибающего момента в связанной термомеханической постановке. Учитывается свойство разносопротивляемости данного материала, а также упругая составляющая полных деформаций. Поиск решения ведется в одномерной по напряжениям постановке. В задаче реализована возможность накопления неупругих деформаций сразу по двум механизмам – структурному и фазовому. Дополнительно исследовано влияние неоднородности упрочнения представительного объема СПФ при переходе из аустенитного в мартенситное фазовое состояние. Ввиду термомеханической связности постановки задачи, действующие механические напряжения в сечении балки оказывают влияние на характерные температуры ФП, что позволит дополнительно закрыть позицию с учетом влияния вида напряженного состояния на те же характерные температуры ФП. Распределение температуры по сечению в каждый момент времени считается равномерным, что соответствует медленным процессам охлаждения.

Согласно используемой модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях, девиатор неупругих деформаций имеет вид (1.12). Входящие в него компоненты фазовых и структурных деформаций в общем виде записаны в (1.14) и (1.15). В выражении для приращения фазовой деформации (1.14) материальная функция $f(q)$ определяет соотношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов при фазовом превращении. В работе не учитывается вклад развития мартенситных элементов в приращение фазовой деформации, принимается $f(q) = 0$. Выражение для параметра фазового состава имеет вид

$$q = \sin\left(\frac{\pi}{2} t_\sigma\right), \quad t_\sigma = \frac{M_s^\sigma - T}{\Delta M^0}, \quad M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\omega_{ij}^+ \sigma'_{ij}}{\Delta S_0}, \quad \Delta M^0 = M_s^0 - M_f^0 \quad (3.24)$$

Данная формулировка несколько отличается от используемой в основной модели (1.16). Здесь используется другая тригонометрическая функция - $\sin(x)$, которая соответствует более ранней модели [24-26]. Приращение параметра фазового состава получено путем дифференцирования группы выражений (3.24), с учетом одномерной постановки задачи ($\sigma_i = \sigma$, $\sigma'_{11} = 2\sigma/3$):

$$\begin{cases} dq = a_1^+ d|s| + b_1 dt_0, & s > 0 \\ dq = a_1^- d|s| + b_1 dt_0, & s < 0 \end{cases}, \text{здесь} \quad (3.25)$$

$$\begin{cases} a_1^+ = \frac{\pi \rho_{1r} \sqrt{1-q^2}}{2\delta S} (\varphi_{1r}(|s|) + |s| \varphi'_{1r}(|s|)), & s > 0 \\ a_1^- = \frac{\pi \rho_{1c} \sqrt{1-q^2}}{2\delta S} (\varphi_{1c}(|s|_{s_{1c}}) + |s|_{s_{1c}} \varphi'_{1c}(|s|_{s_{1c}})), & s < 0 \end{cases}, \quad b_1 = \frac{\pi \sqrt{1-q^2}}{2}$$

В (3.25) приняты следующие безразмерные переменные: $s = \sigma / \sigma_{01}^t$ - безразмерные продольные напряжения, $s_{1c} = \sigma_{01}^t / \sigma_{01}^c$, $\sigma_{01}^t, \sigma_{01}^c$ - параметры материала, получаемые напрямую из эксперимента на ПФП образца из СПФ, $\delta S = \Delta S_0 \Delta M^0 / \sigma_{01}^t$ - безразмерный скачек объемной плотности энтропии при переходе из аустенитного фазового состояния в мартенситное при отсчетной температуре T , $t_0 = (M_s^0 - T) / \Delta M^0$ - безразмерный параметр температуры.

С учетом ($ds_i = d|s|$, $d|s| = ds$ при $s > 0$ и $d|s| = -ds$ при $s < 0$) и $\left(s_{1c}^t = \sigma_{01}^t / \sigma_{02}^t, s_{1c}^c = \sigma_{01}^t / \sigma_{02}^c \right)$, одномерные варианты выражений для приращения фазовых (1.14) и структурных (1.15) продольных деформаций принимают вид

$$d\varepsilon^{ph} = \begin{cases} \rho_{1r} \varphi_{1r}(|s|) dq = \omega^+ dq, & d|s| > 0, dq > 0 \\ -\rho_{1c} \varphi_{1c}(|s|_{s_{1c}}) dq = \omega^- dq, & d|s| > 0, dq > 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

$$d\varepsilon^{st} = \begin{cases} \rho_{2r} q_{st} \varphi'_{2r}(|s|_{s_{1c}^t}) s_{1c}^t ds = r_1^+ ds, & s > 0, q > 0 \\ \rho_{2c} q_{st} \varphi'_{2c}(|s|_{s_{1c}^c}) s_{1c}^c ds = r_1^- ds, & s < 0, q > 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

Соотношения (3.27) соответствуют общему случаю, когда учитывается неоднородность упрочнения представительного объема СПФ при прямом мартенситном превращении. Если группа мартенситных ячеек dq_i в представительном объеме СПФ зародилась при действующих нормальных напряжениях σ_1 , то доориентация (структурный переход) данных мартенситных ячеек возможна, если действующие напряжения превосходят σ_2 , [60]. Величина q_{st} в представительном объеме СПФ может быть получена путем суммирования объемных долей всех мартенситных ячеек, принадлежащих данному представительному объёму $q_{st} = \sum_i dq_i \leq q$, для которых выполняются условия $\sigma \geq \sigma_2$

$$\sigma_2 = \sigma_{02} \left\{ -\ln \left(1 - \operatorname{erf} \left(\sigma_1 / \sqrt{2} \sigma_{01} \right) \right) \right\}^{1/\alpha} \quad (3.28)$$

В случае, если неоднородность упрочнения мартенсита и различия в диаграммах ПП и мартенситной неупругости (МН) не учитываются, то выполнения условия (3.28) не требуется,

таким образом, в структурном переходе участвует весь мартенсит в представительном объёме СПФ, $q_M = q$.

В случае, если структурный переход не учитывается вовсе, $d\varepsilon^{st} = 0$.

Выражения для упругих продольных деформаций имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon^e &= \frac{s}{e(q)}, & \frac{1}{e(q)} &= \frac{q}{e_m} + \frac{1-q}{e_A} \\ d\varepsilon^e &= \frac{ds}{e(q)} + s \frac{\Delta e}{e_A e_m} dq, & \Delta e &= e_A - e_m \end{aligned} \quad (3.29)$$

Здесь приняты следующие безразмерные переменные: $e_A = E_A / \sigma_{01}^t$, $e_m = E_m / \sigma_{01}^t$.

Разномодульность в настоящей задаче не рассматривается. Выражение для гипотезы плоских сечений в случае разносопротивляющегося материала (2.9) также представим в дифференциальном виде:

$$d\varepsilon = \xi dy + d\varepsilon_0 \quad (3.30)$$

В силу аддитивности представления полных продольных деформаций (1.11), а также (3.26-3.30) запишем:

$$\begin{cases} \xi dy + d\varepsilon_0 = \frac{ds}{e(q)} + d_1^+ a_1^+ ds + d_1^+ b_1 dt_0 + r_1^+ ds, & s > 0 \\ \xi dy + d\varepsilon_0 = \frac{ds}{e(q)} - d_1^- A_1 d\sigma + d_1^- b_1 dt_0 + r_1^- ds, & s < 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\text{где } d_1^+ = s \frac{\Delta e}{e_A e_m} + \omega^+, \quad d_1^- = s \frac{\Delta e}{e_A e_m} + \omega^-$$

С учетом соотношений ($d|s| = ds$ при $s > 0$ и $d|s| = -ds$ при $s < 0$), приращение напряжений может быть записано в виде

$$\begin{cases} ds = \xi c_1^+ dy + c_1^+ d\varepsilon_0 - c_2^+ dt_0, & s > 0 \\ ds = \xi c_1^- dy + c_1^- d\varepsilon_0 - c_2^- dt_0, & s < 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

$$\text{где } \frac{1}{c_1^+} = \frac{1}{e(q)} + d_1^+ a_1^+ + r_1^+, \quad c_2^+ = d_1^+ d_1 c_1^+, \quad \frac{1}{c_1^-} = \frac{1}{e(q)} - d_1^- a_1^- + r_1^- s_{ic}, \quad c_2^- = d_1^- b_1 c_1^-$$

Соотношения (3.32) справедливы в части сечения, где происходит фазовый переход. В общем случае, в растянутой и сжатой части сечения балки может быть по три зоны, рис. 3.21, приращение напряжений для которых запишем в виде (3.33-3.35).

Зона 1. Зона упругого деформирования с аустенитным упругим модулем:

$$ds = e_A \xi dy + e_A d\varepsilon_0, \quad (\xi_{0c} \leq \xi \leq \xi_{0r}) \quad (3.33)$$

Зона 2, $\xi_0 < \xi < \xi_{00}$. В этой зоне имеют место и фазовый и структурный переходы.

$$\begin{cases} ds = \xi c_1^+ dy + c_1^+ d\varepsilon_0 - c_2^+ dt_0, & (\xi_{0r} \leq \xi \leq \xi_{00r}) \\ ds = \xi c_1^- dy + c_1^- d\varepsilon_0 - c_2^- dt_0, & (\xi_{00c} \leq \xi \leq \xi_{0c}) \end{cases} \quad (3.34)$$

Зона 3. В этой части сечения балки фазовый переход полагается завершённым. Здесь происходит упругое деформирование с мартенситным упругим модулем, а также возможно накопление неупругих деформаций за счёт структурного перехода.

$$\begin{cases} ds = \xi c_3^+ dy + c_3^+ d\varepsilon_0, & s > 0, \quad 1/c_3^+ = \frac{1}{e(q)} + r_1^+, \quad (\xi_{00r} \leq z \leq 1/2) \\ ds = \xi c_3^- dy + c_3^- d\varepsilon_0, & s < 0, \quad 1/c_3^- = \frac{1}{e(q)} + r_1^- s_{tc}, \quad (-1/2 \leq z \leq \xi_{00c}) \end{cases} \quad (3.35)$$

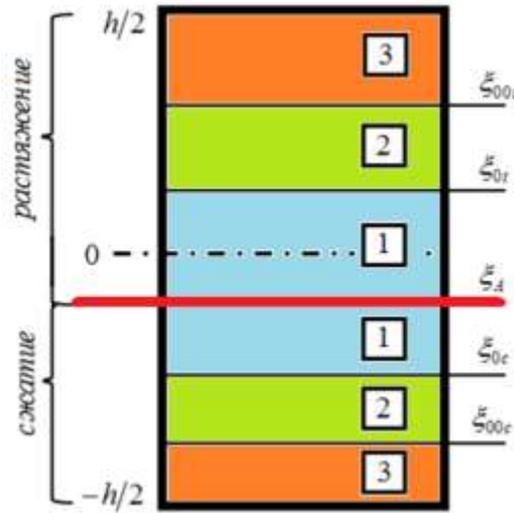


Рис. 3.21. Границы ФП в поперечном сечении балки.

Изгибающий момент в поперечном сечении балки может быть определен согласно выражению

$$\mu = \int_{-0.5}^{0.5} s \xi d\xi, \quad \text{где } \mu = M / \sigma'_{01} b h^2 \quad (3.36)$$

Приращение изгибающего момента определим с помощью (3.33-3.36) и запишем в виде:

$$d\mu = a_{11} dy + a_{12} d\varepsilon_0 - a_{13} dt_0 \quad (3.37)$$

Здесь применены следующие обозначения:

$$\begin{cases} a_{11} = \int_{-0.5}^{\xi_{00c}} \xi^2 c_3^- d\xi + \int_{\xi_{00c}}^{\xi_{0c}} \xi^2 c_1^- d\xi + \int_{\xi_{0c}}^{\xi_{0r}} \xi^2 e_A d\xi + \int_{\xi_{0r}}^{\xi_{00r}} \xi^2 c_1^+ d\xi + \int_{\xi_{00r}}^{0.5} \xi^2 c_3^+ d\xi \\ a_{12} = \int_{-0.5}^{\xi_{00c}} \xi c_3^- d\xi + \int_{\xi_{00c}}^{\xi_{0c}} \xi c_1^- d\xi + \int_{\xi_{0c}}^{\xi_{0r}} \xi e_A d\xi + \int_{\xi_{0r}}^{\xi_{00r}} \xi c_1^+ d\xi + \int_{\xi_{00r}}^{0.5} \xi c_3^+ d\xi \\ a_{13} = \int_{\xi_{00c}}^{\xi_{0c}} \xi c_2^- d\xi + \int_{\xi_{0c}}^{\xi_{0r}} \xi c_2^+ d\xi \end{cases} \quad (3.38)$$

Уравнение равновесия отсеченной части балки в проекции на продольную ось запишем в виде

$$p_x = \int_{-0.5}^{0.5} s d\xi, \quad \text{где } p_x = \frac{P_x}{bh\sigma_{01}^t} \quad (3.39)$$

Приращение продольной силы будет иметь вид

$$dp_x = a_{21}dy + a_{22}d\varepsilon_0 - a_{23}dt_0 \quad (3.40)$$

Здесь применены следующие обозначения:

$$\begin{cases} a_{21} = \int_{-0.5}^{\xi_{00c}} \xi c_3^- d\xi + \int_{\xi_{00c}}^{\xi_{0c}} \xi c_1^- d\xi + \int_{\xi_{0c}}^{\xi_{0r}} \xi e_A d\xi + \int_{\xi_{0r}}^{\xi_{00r}} \xi c_1^+ d\xi + \int_{\xi_{00r}}^{0.5} \xi c_3^+ d\xi \\ a_{22} = \int_{-0.5}^{\xi_{00c}} c_3^- d\xi + \int_{\xi_{00c}}^{\xi_{0c}} c_1^- d\xi + \int_{\xi_{0c}}^{\xi_{0r}} e_A d\xi + \int_{\xi_{0r}}^{\xi_{00r}} c_1^+ d\xi + \int_{\xi_{00r}}^{0.5} c_3^+ d\xi \\ a_{23} = \int_{\xi_{00c}}^{\xi_{0c}} c_2^- d\xi + \int_{\xi_{0r}}^{\xi_{00r}} c_2^+ d\xi \end{cases} \quad (3.41)$$

Принимая во внимание тот факт, что $d\mu = 0$, $dp_x = 0$, $a_{12} = a_{21}$, выражения (3.37) и (3.40)

можно объединить в систему

$$\begin{cases} a_{11}dy + a_{12}d\varepsilon_0 = a_{13}dt_0 \\ a_{12}dy + a_{22}d\varepsilon_0 = a_{23}dt_0 \end{cases} \quad (3.41)$$

решение которой может быть записано в виде

$$\begin{cases} dy = \frac{a_{13}a_{22} - a_{23}a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} dt_0 \\ d\varepsilon_0 = \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} dt_0 \end{cases} \quad (3.42)$$

Границу начала фазового превращения находим из условия

$$M_s^\sigma = T \quad (3.43)$$

Напряжения на границе области имеют вид $s = e_A (y\xi_0 + \varepsilon_0)$. С учетом (3.24) условие (3.43)

приведем к виду

$$e_A |y\xi_0 + \varepsilon_0| \rho_1 \varphi_1 (e_A |y\xi_0 + \varepsilon_0|) = -t_0 \delta S \quad (3.44)$$

Поскольку разномодульность материала не учитывается, начальное состояние балки будет определяться строго упругими соотношениями и начальной температурой T_0 , при которой на границах балки начнется фазовый переход можно найти из (3.44), положив $\xi_0 = \pm 0.5$, $\varepsilon_0 = 0$:

$$t_{00} = -\frac{|\varepsilon_{00}| e_A \rho_1 \varphi_1 (e_A |\varepsilon_{00}|)}{\delta S}, \quad \rho_1 = \begin{cases} \rho_{1r}, & \text{при } \xi_0 = +0.5 \\ \rho_{1c}, & \text{при } \xi_0 = -0.5 \end{cases} \quad (3.45)$$

Здесь ε_{00} - деформация крайнего волокна балки в начальном упругом состоянии.

В общем случае алгоритм численного решения задачи следующий. На первом этапе решается упругая классическая задача о чистом изгибе балки сплошного прямоугольного сечения. Поскольку разномодульность не учитывается, положение нейтральной плоскости на начальном этапе будет совпадать с плоскостью симметрии балки, ($\xi_A = 0$). Материал балки находится в полностью аустенитном состоянии. Для заданного начального изгибающего момента μ_0 определяется значение начальной кривизны y_0 и линейное распределение нормальных напряжений по сечению балки $s(\xi) = e_A y_0 \xi$. Значения температур t_{00r} и t_{00c} устанавливаются согласно выражению (3.45) для крайних волокон балки $\xi = 0,5$ и $\xi = -0,5$. Начальная температура t_{00} определяется из условия $t_{00} = \max(t_{00r}, t_{00c})$.

Предположим, на некотором шаге процесса охлаждения балки под действием постоянного изгибающего момента известны величины: $t_0, q(\xi), s(\xi), y, \varepsilon_0, \xi_{0r}, \xi_{0c}, \xi_{00r}, \xi_{00c}, \xi_A$.

1. Выполняется малый шаг по температуре $dt_0 > 0$, ($dT < 0$). Вычисляем новое значение температуры $t_0 = t_0 + dt_0$.
2. Для старых значений $q(\xi), s(\xi), y, \varepsilon_0, \xi_{0r}, \xi_{0c}, \xi_{00r}, \xi_{00c}, \xi_A$ и новой температуры t_0 определяются значения $q_{st}(\xi)$ для каждой точки поперечного сечения балки согласно алгоритму, представленному в [60].
3. Для новых значений t_0 и $q_{st}(\xi)$ определяем приращение безразмерной кривизны dy и $d\varepsilon_0$ согласно системе (3.42).
4. Для старых значений границ $\xi_{0r}, \xi_{0c}, \xi_{00r}, \xi_{00c}, \xi_A$ и новых значений $t_0, q_{st}(\xi), y, \varepsilon_0$ определяем приращений безразмерных продольных напряжений согласно (3.33-3.35). На данном этапе определяется новое положение нейтральной плоскости ξ_A путем поиска точки, в которой происходит смена знака эпюры безразмерных напряжений $s(\xi)$.
5. Для новых значений $t_0, s(\xi), y, \varepsilon_0, \xi_{0r}, \xi_{0c}, \xi_{00r}, \xi_{00c}, \xi_A, q_{st}$ находим приращение параметра фазового состава согласно (3.25).
6. Затем необходимо обновить положения границ окончания ФП ξ_{00r}, ξ_{00c} путем исключения той области сечения балки, где в результате предыдущего шага получилось $q^{new} = q^{old} + dq \geq 1$. Новые положения границ начала ФП ξ_{0r}, ξ_{0c} определяются из условий

$$\begin{cases} e_A |y\xi_{0c} + \varepsilon_0| \rho_{1c} \varphi_{1c} (e_A |y\xi_{0c} + \varepsilon_0|) = -t_0 \delta S, \xi_{0c} \leq \xi_A \\ e_A |y\xi_{0t} + \varepsilon_0| \rho_{1t} \varphi_{1t} (e_A |y\xi_{0t} + \varepsilon_0|) = -t_0 \delta S, \xi_{0t} \geq \xi_A \end{cases} \quad (3.46)$$

7. Далее организуется итерационный процесс: повторяются шаги 3-6, с определения приращения кривизны dy до установления новых границ начала и окончания ФП до тех пор, пока очередное приближение приращения dy не станет малым, по отношению к значению этой же величины на прошлом шаге итерационного процесса. При выполнении критерия сходимости возможен переход к пункту 1 и новый малый шаг по температуре $dt_0 > 0$, ($dT < 0$). Охлаждение балки продолжается до тех пор, пока обе границы окончания ФП ξ_{00t}, ξ_{00c} не достигнут положения нейтральной плоскости ξ_A . При этом, температура на момент окончания ПФП должна удовлетворять условию $T \geq M_f^0$ (поскольку в сечении балки есть плоскость, где продольные напряжения равны 0).

При численном решении задачи о ПП в балке из СПФ под действием постоянного изгибающего момента приняты следующие значения параметров: $\sigma_{01}^t = 169 \text{ МПа}$, $\sigma_{01}^c = 189 \text{ МПа}$, $\sigma_{02}^t = 242 \text{ МПа}$, $\sigma_{02}^c = 290 \text{ МПа}$, $\alpha_t = 2$, $\alpha_c = 2,2$, $\rho_{1t} = 0,056$, $\rho_{1c} = 0,0465$, $\rho_{2t} = 0,056$, $\rho_{2c} = 0,0465$, $\Delta S_0 = 0,43 \text{ МПа} / \text{K}$, $E_M = 28000 \text{ МПа}$, $E_A = 84000 \text{ МПа}$. Установленные значения параметров материала отвечают результатам, представленным в работе [75]. Параметры α_t, α_c дополнительно отвечают положению о том, что диаграмма мартенситной неупругости на плоскости напряжения – деформации находится выше вдоль оси напряжений, чем диаграмма прямого превращения, [60].

Рассматриваются четыре постановки задачи: решение задачи без учета структурных превращений и свойства разнсопротивляемости соответствует модели 1. Аналогичная постановка задачи, но с учетом разнсопротивляемости растяжению и сжатию СПФ отвечает модели 2. Решение задачи, полученное с учетом разнсопротивляемости и структурного перехода, однако без учета неоднородности упрочнения представительного объема СПФ – соответствует модели 3. Наконец, решение задачи с учетом всех вышеназванных явлений отвечает модели 4.

Ниже представлено решение задачи в виде эпюры безразмерных нормальных напряжений s по высоте сечения балки ξ . Значение безразмерного изгибающего момента $\mu_0 = 0.166$, что соответствует начальной деформации крайнего волокна балки $\varepsilon_{00} = 0.002$.

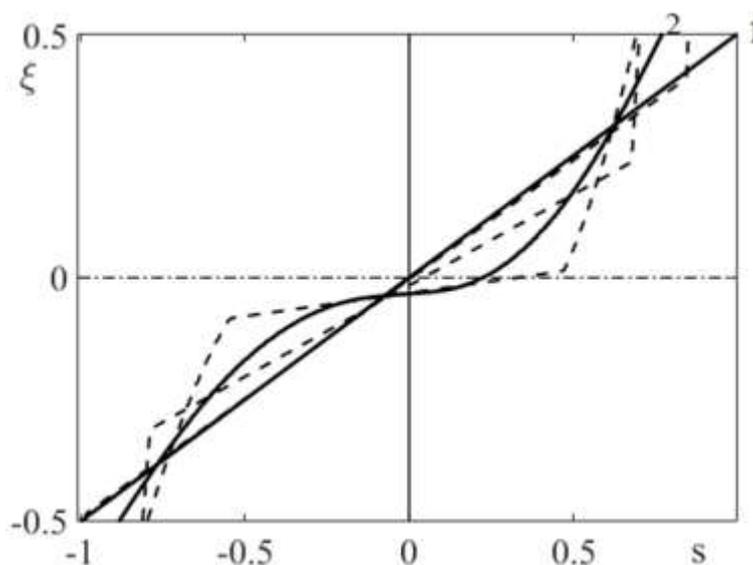


Рис. 3.22. Кривые $s = s(\xi)$, $\mu_0 = 0.166$, для $t_0 \leq t_0^*$.

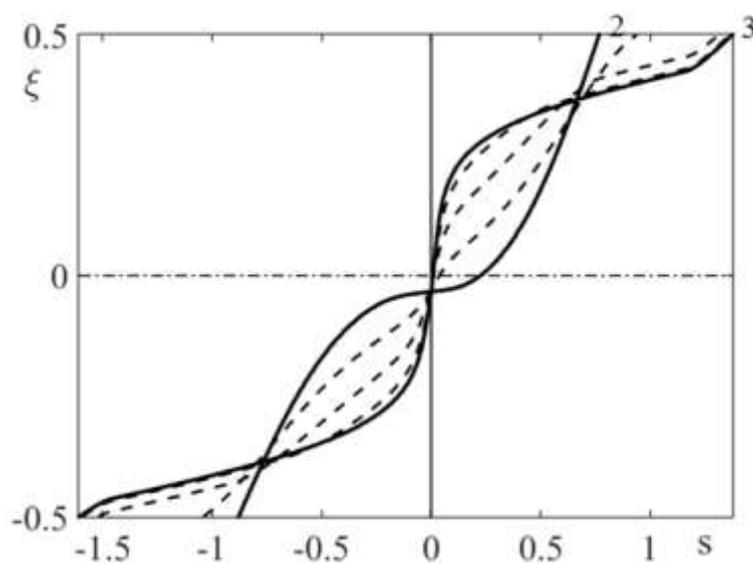


Рис. 3.23. Кривые $s = s(\xi)$, $\mu_0 = 0.166$, для $t_0 \geq t_0^*$.

На рис. 3.22 и 3.23 показаны кривые $s = s(\xi)$ для модели 4. Здесь 1 - соответствует начальному упругому решению задачи. Кривая 2 – распределение напряжений в сечении балки для температуры t_0^* , при которой обе границы начала ФП ξ_{0r} , ξ_{0c} впервые достигли нейтральной плоскости ξ_A . Далее будет показано, что обе границы ξ_{0r} , ξ_{0c} достигают нейтральной плоскости одновременно. Кривая 3 соответствует окончанию ФП во всех точках сечения балки. Пунктирные кривые соответствуют промежуточным этапам решения задачи.

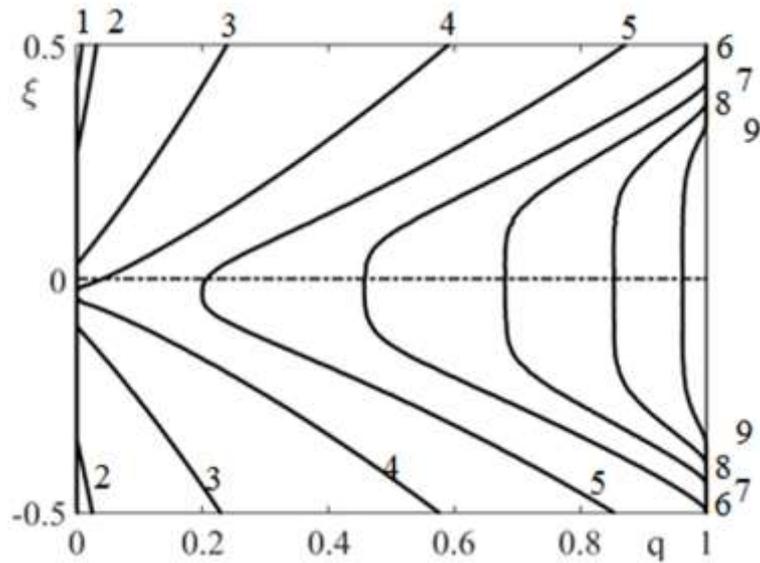


Рис. 3.24. Кривые $q = q(\xi)$ для различных t_0 , $\Delta t_0 = 0.1744$.

На рис. 3.24 показано распределение параметра фазового состава по высоте сечения балки в разные моменты охлаждения балки. Кривые 1-9 построены через равные промежутки $\Delta t_0 = 0.1744$. Используется модель 4. Из положения кривых 1-2 видно, что ФП начинается раньше в растянутой области сечения балки. В ходе численного решения задачи установлено, что помимо продольных деформаций, на нейтральной плоскости балки продольные напряжения также равны 0. Поэтому, наименьшие значения параметра фазового состава для промежуточных значений t_0 достигаются на нейтральной плоскости ξ_A в виду отсутствия напряжений на последней. Полученный результат соответствует соотношениям (3.24) и экспериментальным наблюдениям – механические напряжения сдвигают диаграмму ФП в сторону больших температур.

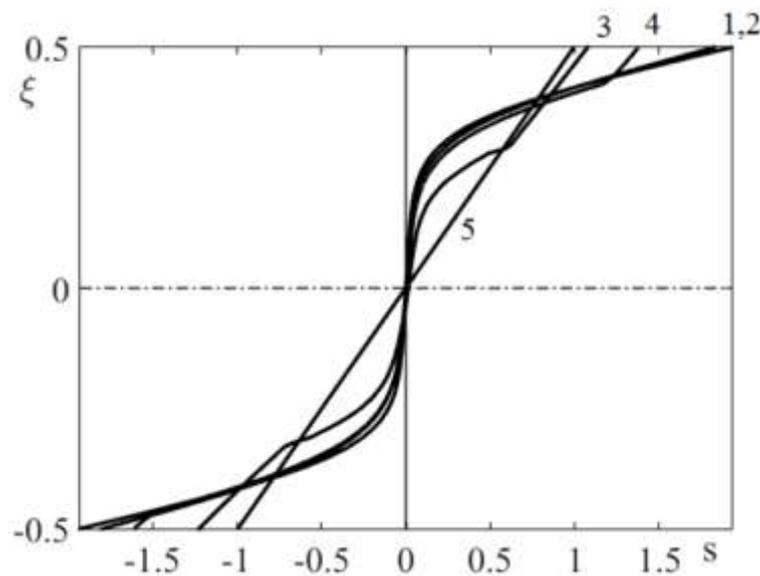


Рис. 3.25. Кривые $s = s(\xi)$, $\mu_0 = 0.166$, модели 1-4. Упругое решение – 5.

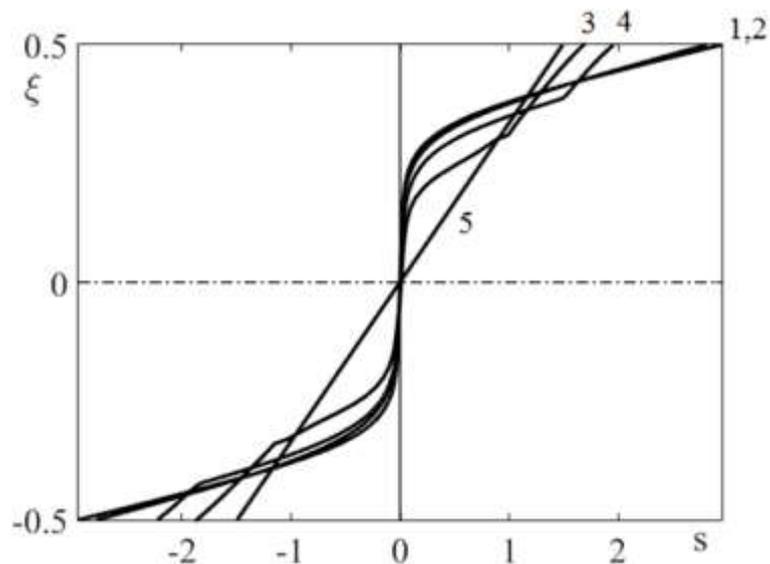


Рис. 3.26. Кривые $s = s(\xi)$, $\mu_0 = 0.249$, модели 1-4. Упругое решение – 5.

На рис. 3.25 и 3.26 показаны зависимости $s = s(\xi)$ для значений безразмерного изгибающего момента $\mu_0 = 0.166$ и 0.249 соответственно. Здесь, линии 5 – решение упругой задачи. Кривые 1-4 отвечают моделям 1-4 соответственно. В рамках модели 2 полагается, что структурный переход отсутствует, это приводит к завышенным значениям напряжений на границах сечения балки. Модель 3 предполагает наличие структурного перехода, однако без учета упрочнения СПФ. Это приводит к тому, что весь мартенсит в точке сечения балки участвует в структурном превращении, что в свою очередь приводит к чрезмерной релаксации и занижению значений напряжений в верхней и нижней четверти сечения балки. Модель 4 учитывает неоднородность упрочнения представительного объема СПФ при прямом мартенситном превращении, а также несовпадение кривых деформирования для явления ПФП и МН. Таким образом, кривая 4 занимает промежуточное положение между 2 и 3, релаксация напряжений присутствует в верхней и нижней четверти сечения и не является чрезмерной. Аналогичные результаты отмечены в [118] при решении задач о ПФП в стержне под действием постоянного крутящего момента.

На рис. 3.27 показаны зависимости $s = s(\xi)$ на момент окончания ПФП во всем сечении балки. Группы кривых 1-4 получены для различных значений безразмерного изгибающего момента $\mu_0 = 0.166, 0.249, 0.414, 0.828$. Сплошные кривые построены с учетом неоднородности упрочнения, модель 4, пунктирные – без учета структурного превращения, модель 2. Поведение кривых показывает, что наибольшее влияние структурного перехода на решение задачи достигается при средних значениях изгибающего момента $\mu_0 = 0.249$, ($\varepsilon_{00} = 0.003$). Для больших значений изгибающего момента $\mu_0 = 0.828$, ($\varepsilon_{00} = 0.01$), наличие структурного перехода

практически не влияет на решение задачи. Данные положения согласуются с известным решением задачи о ПФП в стержне под действием постоянного крутящего момента [118].

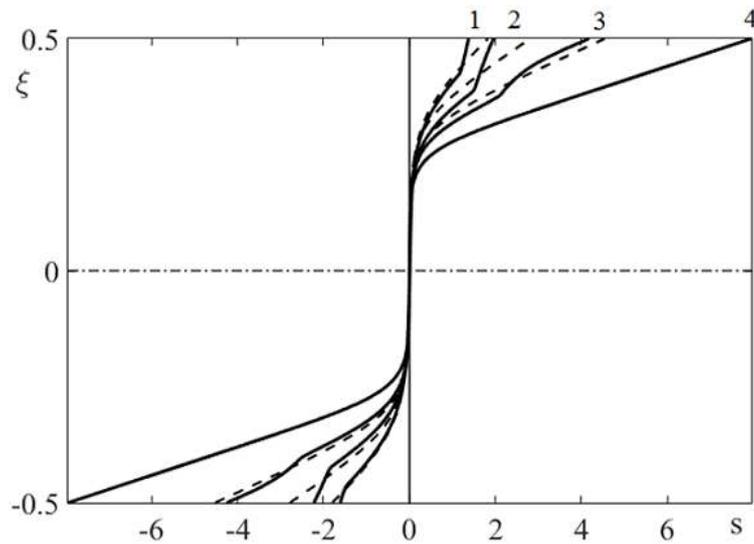


Рис. 3.27. Кривые $s = s(\xi)$, (--) модель 2, (-) модель 4, $\mu_0 = 0.166, 0.249, 0.414, 0.828$.

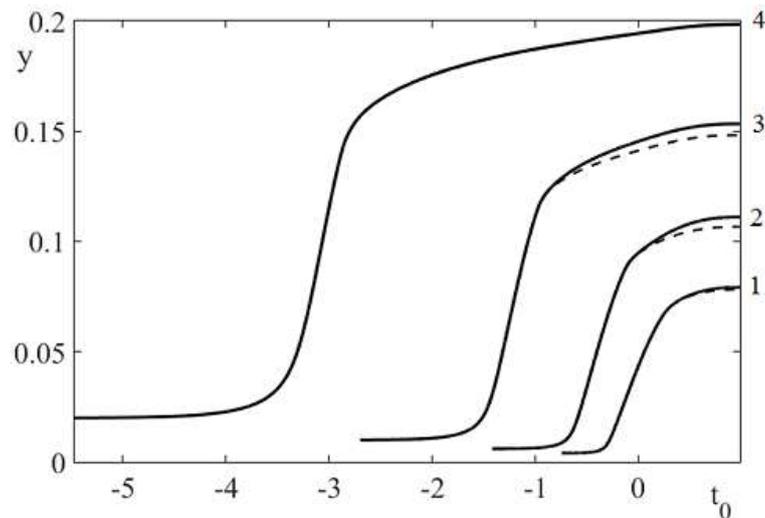


Рис. 3.28. Кривые $y = y(t_0)$, модели 2(--), 4(-), $\mu_0 = 0.166, 0.249, 0.414, 0.828$.

На рис. 3.28 показаны зависимости $y = y(t_0)$. Группы кривых 1-4 получены для различных значений безразмерного изгибающего момента $\mu_0 = 0.166, 0.249, 0.414, 0.828$. Сплошные кривые - модель 4, пунктирные – модель 2.

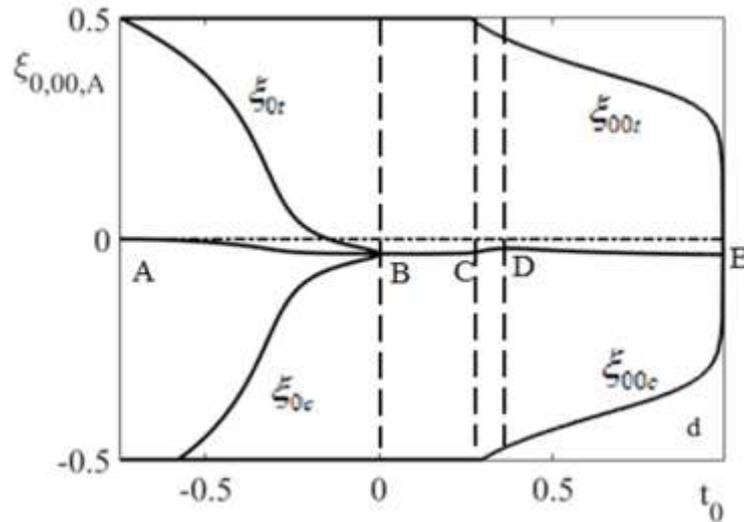


Рис. 3.29. Границы ФП, ξ_{0r} , ξ_{0c} , ξ_{00r} , ξ_{00c} , положение нейтральной плоскости ξ_A , модель 4.

На рис. 3.29 показана история изменения положения границ ФП ξ_{0r} , ξ_{0c} , ξ_{00r} , ξ_{00c} , а также положения нейтральной плоскости ξ_A в ходе фазового перехода. Используется модель материала 4, значение безразмерного изгибающего момента $\mu_0 = 0.166$, ($\varepsilon_{00} = 0.002$). Кривая А-В-С-D-E соответствует истории изменения положения нейтральной плоскости ξ_A при охлаждении балки. Поскольку разномодульность СПФ не учитывается, начальное упругое решение задачи предполагает совпадение нейтральной плоскости и плоскости симметрии балки в начальный момент времени, точка А. В точке В обе границы начала ФП ξ_{0r} , ξ_{0c} достигают нейтральной плоскости одновременно, при температуре $t_0 = 0$ ($T = M_s^0$). Это вызвано фактом отсутствием продольных напряжений на нейтральной плоскости балки, который был установлено в ходе численного решения задачи. Участок А-В этой кривой показывает смещение ξ_A в нижнюю полуплоскость балки в виду наличия прямого мартенситного перехода, для которого учитывается свойство разноспротивляемости. На участке В-С, кривая ξ_A выходит на некоторый установившийся уровень, поскольку все сечение балки участвует в ФП. На участке С-D кривая ξ_A демонстрирует стремление к плоскости симметрии. Такое поведение ξ_A обусловлено тем фактом, что в крайних волокнах балки уже закончился ФП, однако действующие напряжения все еще малы для инициализации структурного перехода. Таким образом, крайние волокна балки деформируются по упругому закону с мартенситным модулем, без разноспротивляемости. На участке D-E напряжения в сечении балки достигают значений, необходимых для инициализации структурного перехода. Таким образом, разноспротивляемость в данных зонах сечения балки снова учитывается, а нейтральная плоскости вновь стремится отдалиться от плоскости симметрии. Также отметим, что ФП на нижней границе сечения балки ξ_{0c} начинается гораздо

позже, чем на верхней границе, ξ_{0r} . Данное положение согласуется с экспериментами на ПФП при одноосном растяжении и сжатии образцов из СПФ, [75].

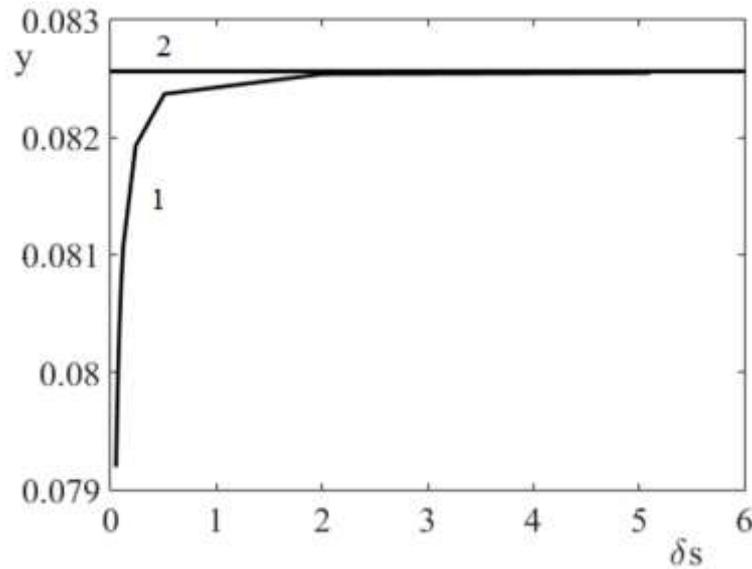


Рис. 3.30. Кривая $y = y(\delta S)$. 1 – Связная постановка, 2 – несвязная.

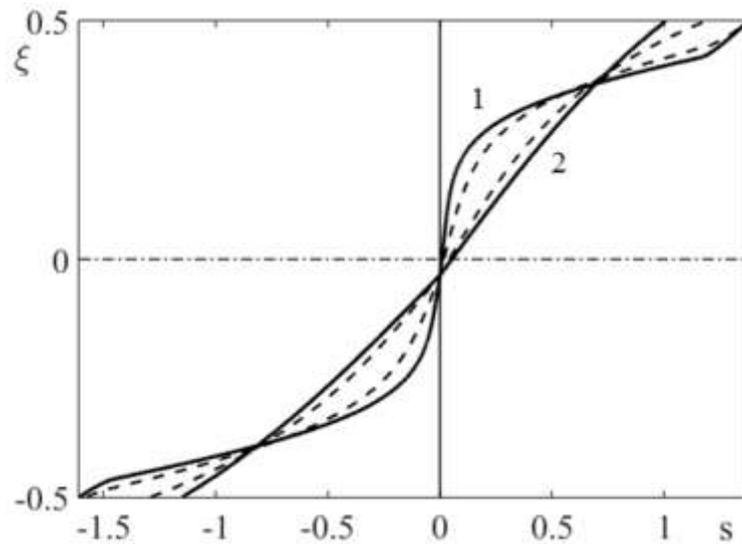


Рис. 3.31. Кривые $s = s(\xi)$ для различных δS . 1 – Связная постановка, 2 – несвязная.

На рис. 3.30 показано стремление решения задачи согласно модели 4 в связной постановке (кривая 1), к решению аналогичной задачи, но уже в несвязной постановке (линия 2, предыдущий параграф). Снижение связности постановки достигается путем увеличения значения скачка безразмерной объёмной плотности энтропии при переходе от мартенситного состояния к аустенитному δS . Из соотношений (3.24) видно, что увеличение значения данного параметра δS приводит к ослаблению влияния напряжений на характерные температуры протекания фазовых переходов, и, как следствие, снижению степени термомеханической связности задачи.

На рис. 3.31 показано аналогичное стремление зависимости $s = s(\xi)$ для связной постановки (

$\delta S = 0.0509$), кривая 1, к решению задачи в несвязной постановке, кривая 2. Промежуточные штриховые кривые отвечают значениям $\delta S = 0.075$ и $\delta S = 1.5$.

Получено численное решение задачи о прямом термоупругом фазовом превращении в балке из СПФ под действием постоянного изгибающего момента в связной постановке. Выполнен учет явления разнсопротивляемости растяжению и сжатию этих материалов, а также показано влияние однородного и неоднородного упрочнения представительного объема СПФ при фазовом превращении на решение задачи.

Установлено, что разнсопротивляемость СПФ приводит к значительному смещению нейтральной плоскости (плоскость в сечении балки, на которой отсутствуют продольные деформации) от плоскости симметрии в сторону сжатых волокон. В ходе численного решения задачи установлено, что на нейтральной плоскости балки отсутствуют продольные напряжения. Это способствует одновременному достижению границами начала ФП ξ_{0r}, ξ_{0c} и окончания ФП ξ_{00r}, ξ_{00c} положения нейтральной плоскости в моменты $T = M_s^0$ и $T = M_f^0$ соответственно. Показано, что эпюра нормальных напряжений в сечении балки при решении задачи в связной постановке сильно отличается от аналогичной эпюры, полученной при решении задачи в несвязной постановке. Распределение параметра фазового состава по сечению балки для различных t_0 имеет сильно нелинейный характер, в то время как при решении аналогичной задачи в несвязной постановке зависимость $q = q(\xi)$ априорно полагалась постоянной.

Учет неоднородности упрочнения представительного объема СПФ при фазовом превращении оказывает значительное влияние на решение задачи только для средних значений изгибающего момента.

Полученное решение задачи о ПП в балке из СПФ в связной постановке демонстрирует стремление к решению аналогичной задачи в несвязной постановке при увеличении численного значения параметра δS , отвечающего за термомеханическую связность постановки.

3.5. Выводы

1. В данном разделе разработан алгоритм решения задачи о ПФП в балке и пластинке из СПФ под действием постоянного изгибающего момента с учетом разнсопротивляемости этого материала.

2. Показано, что в случае применения положений об АППН, система разрешающих соотношений принимает аналитический вид.

3. Установлено, что в случае применения набора гипотез об АППН и решении задачи без учета упругих деформаций, удалось в явном виде установить линейный характер зависимости

кривизны балки от параметра фазового состава в процессе ПФП. В случае учета упругих деформаций, только из численного решения удалось установить линейный характер данной зависимости для ПФП в балке, и слабовыраженный нелинейный характер в пластинке.

4. Показано, что явление разносопротивляемости оказывает значительное влияние на смещение НП от плоскости симметрии балки / пластинки, а также на податливость элемента конструкции в процессе ПФП под действием постоянного изгибающего момента. Установлено, что положение НП в начальный момент процесса ПФП определяется только отношением модулей упругости. Данные положения диктует необходимость учитывать и разносопротивляемость и упругие деформации, а также явление упругой разномодульности, если рассматриваемый СПФ обладает последней, при моделировании поведения активных элементов конструкций, работающих на изгиб. Установлено, что на НП отсутствуют продольные механические напряжения.

5. Установлено, что в случае применения гипотезы о плоском деформированном состоянии в поперечном направлении при решении задачи о ПФП в пластинке, отношение компонент тензора напряжений соответствует классическому представлению $s_y/s_x = \nu$ только в начальный момент процесса ПФП, когда $q_0 = 0$. Для остальных точек процесса ПФП справедливо неравенство $0,3 \leq s_y/s_x < 0,5$.

6. Показано, что распределение параметра фазового состава имеет сильно нелинейный характер, который меняется в процессе ПФП в балке. Наименьшее значение параметра фазового состава в процессе охлаждения балки достигается на НП ввиду отсутствия напряжений на последней.

7. Установлено, что разносопротивляемость СПФ приводит к тому, что процесс ПФП на нижней и верхней кромках сечения балки начинается и заканчивается при разной температуре.

8. Установлен немонотонный характер изменения распределения продольных напряжений в поперечном сечении балки в процессе фазового превращения, таким образом, задачи о ПФП в балке/ пластинке из СПФ с учетом разносопротивляемости необходимо решать в связанной термомеханической постановке. В противном случае, неизбежны погрешности как в установлении НДС активного элемента конструкции, так и характерных температур ФП, которые также являются функцией вида напряженного состояния.

Заключение

В ходе проведения диссертационного исследования проработаны следующие основные позиции:

1. Выполнена модификация определяющих соотношений модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях для учета свойства разносопротивляемости этих материалов при решении задач изгиба. Дополнительно проработана возможность учета свойства упругой разномодульности.

2. Разработан алгоритм решения задач об изотермическом чистом и консольном изгибе балок и цилиндрическом изгибе пластинок из СПФ в мартенситном фазовом состоянии с учетом разносопротивляемости этих материалов.

3. Проведен анализ влияния свойства разносопротивляемости на действующие в поперечном сечении напряжения, на положение нейтральной плоскости и на податливость балок и пластинок из СПФ. Установлено, что не учет данного явления приведет к количественно неверной оценке НДС активных элементов конструкций.

4. Показано влияние упругих деформаций на решение задач об изгибе балки и пластинки из СПФ в мартенситном фазовом состоянии. Установлено, что данный вид деформаций также необходимо учитывать при решении задач изгиба активных элементов конструкций, в особенности, если материалу свойственна упругая разномодульность.

5. Для задачи об изгибе балки без учета упругих деформаций установлено, что положение нейтральной плоскости в начальный момент нагружения стремится к крайним волокнам в поперечном сечении балки и определяется отношением параметров материала, отвечающим за моделирование разносопротивляемости.

6. Для задачи об изгибе балки и цилиндрическом изгибе пластинки в мартенситном фазовом состоянии с учетом упругих деформаций показано, что положение НП в начальный момент нагружения определяется отношением упругих характеристик материала. В случае отсутствия разномодульности, НП совпадает с плоскостью геометрической симметрии сечения.

8. Установлено, что отношение компонент тензора напряжений соответствует классическому представлению $s_y/s_x = \nu$ только на нейтральной плоскости пластинки. Для остальных частей сечения пластинки справедливо неравенство $0,3 \leq s_y/s_x < 0,5$ при изотермическом изгибе пластинки.

9. Разработан алгоритм решения задачи о ПФП в балке и пластинке из СПФ под действием постоянного изгибающего момента с учетом разносопротивляемости этого материала.

10. Показано, что в случае применения положений об АППН, система разрешающих соотношений принимает вид конечных алгебраических уравнений.

11. Установлено, что в случае применения набора гипотез об АППН и решении задачи без учета упругих деформаций, удалось в явном виде установить линейный характер зависимости кривизны балки от параметра фазового состава в процессе ПФП. В случае учета упругих деформаций, только из численного решения удалось установить линейный характер данной зависимости для ПФП в балке, и слабовыраженный нелинейный характер в пластинке.

12. Показано, что явление разнсопротивляемости оказывает значительное влияние на смещение НП от плоскости симметрии балки / пластинки, а также на податливость элемента конструкции в процессе ПФП под действием постоянного изгибающего момента. Установлено, что положение НП в начальный момент процесса ПФП определяется только отношением модулей упругости. Данные положения диктует необходимость учитывать и разнсопротивляемость и упругие деформации, а также явление упругой разномодульности, если рассматриваемый СПФ обладает последней, при моделировании поведения активных элементов конструкций, работающих на изгиб. Установлено, что на НП отсутствуют продольные механические напряжения.

13. Установлено, что применение гипотезы о плоском деформированном состоянии в поперечном направлении при решении задачи о ПФП в пластинке, отношение компонент тензора напряжений соответствует классическому представлению $s_y/s_x = \nu$ только в начальный момент процесса ПФП, когда $q_0 = 0$. Для остальных точек процесса ПФП справедливо неравенство $0,3 \leq s_y/s_x < 0,5$.

14. Показано, что распределение параметра фазового состава имеет сильно нелинейный характер, который меняется в процессе ПФП в балке. Наименьшее значение параметра фазового состава в процессе охлаждения балки достигается на НП ввиду отсутствия напряжений на последней.

15. Установлено, что разнсопротивляемость СПФ приводит к тому, что процесс ПФП на нижней и верхней кромках сечения балки начинается и заканчивается при разной внешней температуре.

16. Установлен немонотонный характер изменения распределения продольных напряжений в поперечном сечении балки в процессе фазового превращения, таким образом, задачи о ПФП в балке/ пластинке из СПФ с учетом разнсопротивляемости необходимо решать в связанной термомеханической постановке. В противном случае, неизбежны погрешности как в установлении НДС активного элемента конструкции, так и характерных температур ФП, которые также являются функцией вида напряженного состояния.

Список используемой литературы

1. Курдюмов Г.В., Хандрос Л.Г. О термоупругом равновесии при мартенситном превращении // ДАН СССР. 1949. Т. 66. Вып. 2. С. 211-215.
2. Buehler W.J., Wiley R.C. Nickel-Bace Alloys // Unated States patent № 3174851. Priority date, 1.12.1961. Publication date, 23.03.1965.
3. Лихачев В.А. Материалы с эффектом памяти формы // Справочное изд. в 4х томах. СПб.: Изд. НИИХ СПбГУ. 1997.
4. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. Диаграммы мартенситной неупругости никелида титана при растяжении, сжатии и сжатии после растяжения // Механика композиционных материалов и конструкций. 2015. Т.21. №1. С. 83-93.
5. Liu Y., Xie Z., Humbeeckd J.V., Delaey L. Asymmetry of stress-strain curves under tension and compression for NiTi shape memory alloys // Acta mater. 1998. Vol.46. № 12. Pp. 4325–4338.
6. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. Выбор аппроксимаций диаграммы прямого превращения никелида титана при растяжении и сжатии // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2018. Т. 23. № 123-1. С. 459-463.
7. Plietsch R., Bourauel C., Drescher D., Nellen B. Analytical description of the bending behavior of NiTi shape-memory alloys // Journal of Materials Science. 1994. Vol. 29 № 22. Pp. 5892 – 5902.
8. Purohit P. K., Bhattacharya K. On beams made of a phase-transforming material // International Journal of Solids and Structures. 2002. Vol. 39 №. 13-14. Pp. 3907 – 3929.
9. Abeyaratne R., Knowles J.K. On the driving traction on a surface of a strain discontinuity in a continuum // J. Mech. Phys. Solids. 1990. Vol. 38. pp. 345.
10. Abeyaratne R., Knowles J.K. Kinetic relations the propagation of phase boundaries in solids // Arch. Rational Mech. Anal. 1991. Vol. 114. Pp. 119.
11. Eshelby J.D. // 1956. In: Solid State Physics, vol. 3. Academic press, New York, pp. 79–144.
12. Eshelby J.D. The elastic energy-momentum tensor // 1975. J. Elasticity. Vol. 5. Pp. 321.
13. Auriccio F., Lubliner J. A uniaxial model for shape-memory alloys // Int. J. Solids Struct. 1997. Vol. 34. Pp. 3601-3618.
14. Auriccio F., Sacco E. A 1D model for superelastic shape-memory-alloy beam // J. Intell. Mater. 1997. Vol. 8. Pp. 489-501.
15. Auricchio F., Sacco E. A temperature-dependent beam for shape-memory alloys: constitutive modelling, finite-element implementation and numerical simulations // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1999. Vol. 174. Pp. 171–190.

16. Auricchio F., Taylor R.L., Lubliner J. Shape-memory alloys: macromodelling and numerical simulations of the superelastic behavior // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1997. Vol. 143. Pp. 281-312.
17. Marfia S., Sacco E., Reddy J. N. Superelastic and shape memory effects in laminated shape-memory alloy beams // *AIAA Journal.* 2003. Vol. 41 №1. Pp. 100–109.
18. Marfia S., Sacco E., Reddy J. N. A new locking-free Timoshenko beam finite element // *Journal of Engineering Mechanics.* 2003. Vol. 129. № 12. P. 1475-1477.
19. Anand L., Gurtin M. E. Thermal effects in the superelasticity of crystalline shape-memory materials // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 2003. Vol. 51 №6. Pp. 1015 – 1058.
20. Thamburaja P., Anand L. Polycrystalline shape-memory materials: effect of crystallographic texture // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 2001. Vol. 49. № 4. Pp. 709 – 737.
21. Thamburaja P., Anand L. Superelastic behavior in tension torsion of an initially-textured Ti - Ni shape-memory alloy // *International Journal of Plasticity.* 2002. Vol. 18. № 11. Pp. 1607 – 1617.
22. Abeyaratne R., Knowles J. A continuum model for a thermoelastic solid capable of undergoing phase transitions // *J. Mech. Phys. Solids.* 1993. Vol. 41. Pp. 541–571.
23. Мовчан А.А. Исследование эффектов связности в задачах изгиба балок из сплава с памятью формы // *Прикладная механика и техническая физика.* 1998. Т. 39. № 1. С. 164-173.
24. Мовчан А.А. Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* 1995. № 1. С. 197-205.
25. Мовчан А.А. Выбор аппроксимации диаграммы перехода и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы // *ПМТФ.* 1995. Т. 36. № 2. С. 173-181.
26. Мовчан А.А. Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы // *Проблемы машиностроения и надежности машин.* 1994. № 6. С. 47-53.
27. Auricchio F., Sacco E. Thermo-mechanical modelling of a superelastic shape-memory wire under cyclic stretch in bending loadings // *International Journal of Solids and Structures.* 2001. Vol. 38. Pp. 6123 – 6145.
28. Auricchio F., Morganti S., Reali A., Urbano M. Theoretical and experimental study of the shape memory effect of beams in bending conditions // *Journal of Materials Engineering and Performance.* 2011. Vol. 20 № 4-5. Pp. 712 – 718.
29. Flor D. L. S., Urbina C., Ferrando F. Asymmetrical bending model for NiTi shape memory wires: Numerical simulations and experimental analysis // *Strain. An International journal for Experimental Mechanics.* 2011. Vol. 47. №3. Pp. 255 – 267.
30. Flor D. L. S., Urbina C., Ferrando F. Constitutive model of shape memory alloys: theoretical formulation and experimental validation // *Mater. Sci. Eng.* 2006. Vol. 427. Pp. 112–122.

31. Young-Jin K., Chang-Ho L., Joung-Hun K., Jae H.L. Numerical modelling of shape memory alloy plates considering tension/compression asymmetry and its verification under pure bending // *Solids and Structures*. 2018. Vol. 137. Pp. 77-88.
32. Brinson L.C. One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable // *J. of Intelligent Systems and Structures*. 1993. Vol. 4. Pp. 229-242.
33. Young-Jin K., Jeong J.-W., Lim J.H., Lee J.J. An enhanced Brinson model with modified kinetics for martensite transformations // *J. of Mechanical Science and Technology*. 2017. Vol. 3. Pp. 1157-1167.
34. Reza M., Reginald DR., Arash Y., Ken G. On superelastic bending of shape memory alloy beams // *International Journal of Solids and Structures*. 2013. Vol. 50. Pp. 1664–1680.
35. Boyd J. G., Lagoudas D.C., Thermodynamical constitutive model for shape memory materials. part I. the monolithic shape memory alloy // *International Journal of Plasticity*. 1996. Vol. 12. № 6. Pp. 805 – 842.
36. Qidwai M. A., Lagoudas D. C. On thermomechanics and transformation surfaces of polycrystalline NiTi shape memory alloy material // *International Journal of Plasticity*. 2000. Vol. 16. № 10. Pp. 1309 – 1343.
37. Жаворонок С.И. Нуштаев Д.В. Расширение возможностей моделирования процессов деформирования сплавов с эффектом памяти формы // *Международная научно-практическая конференция «Инженерные системы - 2011»*, сборник трудов. – 2011. – С. 78-83.
38. Нуштаев Д.В., Жаворонок С.И. Устойчивость и закритическое состояние сжатых стержней из СПФ при прямом мартенситном превращении // *Всероссийская научная конференция «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред»*, сборник трудов. – 2015. – С. 233-235.
39. Нуштаев Д.В., Жаворонок С.И., Улышников К.Ю., Овчаренко Е.А. Численно-экспериментальное исследование деформирования и устойчивости цилиндрической оболочки ячеистой структуры при осевом сжатии // *Труды Московского Авиационного института*. 2015. Т. 82.
40. Жаворонок С.И., Нуштаев Д.В. Решение задач о потере устойчивости и закритическом деформировании стержня с эффектом памяти в процессе фазового перехода // *7-я Всероссийская научная конференция с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред»*, сборник докладов. Москва, ИПРИМ РАН. – 2017. С. 86-89.
41. Жаворонок С.И., Нуштаев Д.В. О влиянии процесса мартенситного фазового перехода на устойчивость равновесия и закритическое деформирование стержня с памятью // *VI научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных*

конструкций при воздействии полей различной физической природы», тезисы докладов. Москва, МАИ. – 2017. – С. 55-57.

42. Zhavoronok S.I., Nushtaev D.V. Buckling of thin-walled structures with shape memory effect under thermoelastic phase transitions // 41st Solid Mechanics Conference Book of Abstract. IFTR, Polish Academy of Sciences. – 2018. – Pp. 344-345.

43. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. Dynamics of martensite phase transitions in shape memory beams under buckling and postbuckling conditions // IFAC. – 2018. – Vol. 51. № 2. – Pp. 873-878.

44. Жаворонок С.И., Нуштаев Д.В. Об устойчивости деформирования тонкостенных систем с эффектом памяти при неизотермических фазовых переходах // VII Международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы», тезисы докладов. Москва, МАИ. – 2018. – С. 57-59.

45. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Устойчивость стержня, претерпевающего прямое или обратное мартенситное превращение под действием сжимающих напряжений // Прикл. механика и техн. физика. 2003. Т. 44. № 3. С. 169–178.

46. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Анализ устойчивости при прямом термоупругом превращении под действием сжимающих напряжений // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2004. № 2. С. 132–144.

47. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Аналитическое решение связной задачи об устойчивости пластины из сплава с памятью формы при прямом термоупругом фазовом превращении // Прикл. матем. и механика. 2004. Т. 68. № 1. С. 60–72.

48. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Аналитическое решение связной задачи об устойчивости пластины из сплава с памятью формы при обратном мартенситном превращении // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 5. С. 164-178.

49. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Устойчивость круглой пластины из сплава с памятью формы при прямом мартенситном превращении // Прикл. матем. и механика. 2006. Т. 70. № 5. С. 869–881.

50. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Потеря устойчивости круглой пластины из сплава с памятью формы, вызванная обратным термоупругим мартенситным превращением // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 1. С. 117-130.

51. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г. Влияние структурного превращения и нелинейности процесса деформирования на устойчивость стержня из сплава с памятью формы // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2010. № 6. С. 137–147.

52. Сильченко Л.Г., Мовчан А.А., Мовчан И.А. Учет структурного превращения при анализе устойчивости круглой пластины из сплава с памятью формы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 5. С. 57–65.
53. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г. Устойчивость кольцевой пластины из сплава с памятью формы // Прикл. механика и техн. физика. 2011. Т. 52. № 2. С. 144–155.
54. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Казарина С.А., Жаворонок С.И., Сильченко Т.Л. Устойчивость стержней из никелида титана, нагружаемых в режиме мартенситной неупругости // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. № 3. С. 72–80.
55. Sil'chenko L.G., Movchan A.A., Sil'chenko O.L. Stability of cylindrical shell made from shape-memory alloys // Int. Appl. Mech. 2014. Vol. 50. № 2. Pp. 171–178.
56. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г. Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // Известия РАН. МТТ. 2010. №3. С.118-130.
57. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы // Известия РАН. МТТ. 2011. №2. С.44-56.
58. Мишустин И.В., Мовчан А.А. Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений // Известия РАН. МТТ. 2014. №1. С. 37-53.
59. Мишустин И.В., Мовчан А.А. Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы // Известия РАН. МТТ. 2015. №2. С. 78-95.
60. Казарина С.А., Сильченко А.Л., Мовчан А.А. Экспериментальное исследование и теоретическое описание процесса доориентации мартенсита после прямого фазового превращения в сплаве с памятью формы // Вестник Тамбовского университета. 2016. Т. 21. №3. С. 787-790.
61. Liu Y., Xie Z., Van Humbeeck, Delaey L. Some results on the detwinning process in NiTi shape memory alloys // Scripta Materialia. 1999. Vol. 41. № 12. pp. 1273-1281.
62. Gall K. Sechitoglu H., Chumlyakov Y.I. Kireeva I.V. Tension - compression asymmetry of the stress - strains response in aged single crystall and polycrystalline TiNi // Acta Mater. 1999. Vol. 47. № 4. Pp. 1203-1217.
63. Wasilevski R.J. The effect of applied stress on the martensitic transformation in TiNi. Metall. Trans. 1971. V. 2. No.11. P. 2973-2981.

64. Frick C.P., Ortega A.M., Tyber J., Gall K., Maier H.J. Multiscale structure and properties of cast and deformation processed polycrystalline NiTi shape-memory alloys // *Metallurgical and Materials Transactions A: Physical Metallurgy and Materials Science*. 2004. Vol. 34. № A7. Pp. 2013-2025.
65. Melton K., Mercier O. Fatigue of NITI thermoelastic martensites // *Acta Metallurgica*. 1979. Vol. 27. № 1. Pp. 137-144.
66. Jacobus K., Sehitoglu H., Balzer, M. Effect of stress state on the stress-induced martensitic transformation in polycrystalline Ni-Ti alloy // *Metallurgical and Materials Transactions A*. 1996. Vol. 27. № 10. Pp. 3066–3073.
67. Liu Y., Van Humbeeck J., Stalmans R., Delaey L. Some aspects of the properties of NiTi shape memory alloy // *Journal of Alloys and Compounds*. 1977. Vol. 247. Pp. 115-121.
68. Orgeas L., Favier D. Stress-induced martensitic transformations of a NiTi alloy in isothermal shear, tension and compression // *Acta Mater*. 1998. Vol. 46. Pp. 5579-5591.
69. Liu Y., Xie Z.L., Van Humbeeck J., Delaey L. Effect of texture orientation on the martensite deformation of NiTi shape memory alloy sheet // *Acta Mater*. 1999. Vol. 47. №. 2. Pp. 645-660.
70. Gall K., Sehitoglu H. The role of texture in tension–compression asymmetry in polycrystalline NiTi // *International Journal of Plasticity*. 1999. Vol. 15. Pp. 69–92.
71. Favier D., Liu Y., Orgeas L., Rio G. Mechanical Instability of NiTi in Tension, Compression and Shear // *IUTAM Symposium on Mechanics of Martensitic Phase Transformation in Solids*. 2002. Pp. 205–212.
72. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. Диаграммы мартенситной неупругости никелида титана при растяжении, сжатии и сжатии после растяжения // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2015. Т.21. №1. С. 83-93.
73. Qiu Y., Young M.L., Nie X. High Strain Rate Compression of Martensitic NiTi Shape Memory Alloy at Different Temperatures // *Metallurgical and Material Transactions A-Physics Metallurgy and Materials Science*. 2017. Vol 48A. Issue 2. Pp. 601-608.
74. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. Экспериментальная идентификация модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // *Деформация и разрушение материалов*. 2018. № 12. С. 2-11.
75. Sittner P., Novak V., Anisotropy of Cu-based shape memory alloys in tension/compression thermomechanical loads // *Trans. ASME. J. Eng. Mater. Technol.*- 1999. -Vol. 121. -No. 1. -P. 48-55.
76. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. Выбор аппроксимаций диаграммы прямого превращения никелида титана при растяжении и сжатии // *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*. 2018. Т. 23.

77. Raniecki B., Tanaka K., Ziolkowski A. Testing and modeling of NiTi SMA at complex stress state // *Materials Science Research International, Special technical publications*. 2001. Vol. 2. Pp. 327–334.
78. Bouvet C., Calloch S., Taillard K., Lexcelent C. Effect of multi-axial loading on pseudoelastic behavior of shape memory alloys // *International conference of heterogeneous materials mechanics (ICCHMM)*. 2003.
79. Adler P.H., Yu W., Pelion A.R., Zadno R., Duerig T.W., Barresi R. On the tensile and torsional properties of pseudoelastic NiTi // *Scripta Metallurgica et Materialia*. 1990. Vol. 24. Pp. 943-947.
80. Strnadel B., Ohashi S., Ohtsuka H., Ishihara T., Miyazaki S. Cyclic stress-strain characteristics of NiTi and TiNiCu shape memory alloys // *Mater. Science and Engineering: A*. 1995. Vol. 202. Pp. 148-156.
81. Strnadel B., Ohashi S., Ohtsuka H., Miyazaki S., Ishihara T. Effect of mechanical cycling on the pseudoelasticity characteristics of TiNi and TiNiCu alloys // *Mater. Science and Engineering: A*. 1995. Vol. 203. Pp. 187-196.
82. Plietsch R., Strength differential effect in pseudoelastic NiTi shape memory alloys. *Acta Materialia*. 1997. Vol. 45. № 6. Pp. 1417-2424.
83. Gall K., Sehitoglu H., Anderson R., Karaman I., Chumlyakov Y.I., Kireeva I.V. On the mechanical behavior of single crystal NiTi shape memory alloys and related polycrystalline phenomenon // *Materials Science and Engineering*. 2001. Vol. 317. Pp. 85–92.
84. Sehitoglu H., Zhang X. Y., Chumlyakov Y. I., Karaman I., Gall K., Maier H. J. Observations on stress-induced transformations in NiTi alloys// *IUTAM Symposium on mechanics of martensitic phase transformation in solids*. 2002. Pp. 103–109.
85. Lexcelent C., Boubakar M.L., Bouvet C., Calloch S. About modelling the shape memory alloy behavior based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions // *International Journal of Solids and Structures*. 2006. Vol. 43. Pp. 613–626.
86. Elibol C., Wagner V.F.-X. Strain rate effects on the localization of the stress-induced martensitic transformation in pseudoelastic NiTi under uniaxial tension, compression and compression-shear // *Materials Science and Engineering*. 2015. Vol. 643. Pp. 194–202.
87. Pereiro-Barcelo J., Bonet J.L. Ni-Ti SMA bars behavior under compression // *Construction and Building Materials*. 2017. Vol. 155. Pp. 348-362.
88. Sehitoglu H., Karaman I., Zhang X., Viswanath A., Chumlyakov Y., Maier H.J. Strain-temperature behavior of NiTiCu shape memory single crystals // *Acta Mater*. 2001. Vol. 49. Pp. 3621-3634.
89. Gall K., Sehitoglu H., Chumlyakov Y., Kireeva I.V. Pseudoelastic cyclic stress-strain response of over-aged single crystal Ti-50.8Ni // *Scripta Materialia*. 1999. Vol. 40. № 1. Pp. 7-12.

90. Sihitoglu H., Karaman I., Anderson R., Zhang X., Gall K., Maier H.J., Chumlyakov Y. Compressive response of NiTi single crystals // *Acta Mater.* 2000. Vol. 48. Pp. 3311-3326.
91. Sehitoglu H., Karaman I., Zhang X., Chumlyakov Y., Maier H.J. Deformation of fencoti shape memory single crystals // *Scripta Meater.* 2001. Vol. 44. Pp. 779-784.
92. Sehitoglu H., Jun J., Zhang X., Karaman I., Chymlyakov Y., Maier H.J., Gall K. Shape memory and pseudoelastic behavior of 51.5Ni-Ti single crystals in solutionized and averaged state // *Acta Mater.* 2001. Vol. 49. Pp. 3609-3620.
93. Sittner P., Novak V., Zarubova N. Deformation by moving interfaces from single crystal experiments to the modelling of industrial SMA // *Int. J. Mech. Sci.* 1998. Vol. 10. Pp. 159-172.
94. Волков А.Е., Евард М.Е., Курзенева Л.Н., Лихачев В.А., Сахаров В.Ю., Ушаков В.В. Математическое моделирование мартенситной неупругости и эффектов памяти формы // *ЖТФ.* 1996. Т. 66. Вып. 11. С. 3 34.
95. Evard M.E., Volkov A.E. Modeling of martensite accommodation effect on mechanical behavior of shape memory alloys // *Journal of Engineers and Technology. TASME.* 1999. Vol. 121. № 1. Pp. 102-104.
96. Волков А.Е. Микроструктурное моделирование деформации сплавов при повторяющихся мартенситных превращениях // *Изв. АН Физическая.* 2002. Т. №6. №9. С. 1290-1297.
97. Волков А.Е., Сахаров В.Ю. Термомеханическая макромодель сплавов с эффектом памяти формы // *Известия Академии наук. Серия физическая.* 2003. Т. 67. № 6. С. 846 852.
98. Беляев Ф.С., Волков А.Е. Евард М.Е. Микроструктурное моделирование обратимой и необратимой деформации при циклическом термомеханическом нагружении никелида титана // *Вестник Тамбовского Университета. Серия: Естественные и Технические Науки.* 2013. Т. 18. №4-2. С. 2025-2026
99. Volkov A.E., Belyaev F.S., Evard M.E., Volkova N.A. Model of the evolution of deformation effects and irreversible strain at thermal cycling of stressed TiNi alloy specimen // *MATEC Web of Conferences.* 2015. Vol. 33. Art. 03013. Pp. 5.
100. Belyaev F., Evard M., Volkov A., Volkova N. A microstructural model of SMA with microplastic deformation and effects accumulation: Application to thermocyclic loading // *Materials today: Proceedings.* 2015. Vol. 2. № 3. Pp. 583-587.
101. Brocca M., Brinson L.C., Bazant Z.P. Three-dimensional constitutive model for shape memory alloys based on microplane model // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 2002. Vol. 50. Pp. 1051 – 1077.
102. Novak V., Sittner P. Micromechanics modelling of NiTi polycrystalline aggregates transforming under tension and compression stress // *Materials Science and Engineering.* 2004. Vol. 378. Pp. 490-498.

103. Sittner P, Liu Y., Novak V. On the origin of Luders-like deformation of NiTi shape memory alloys // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2005. Vol. 53. Pp. 1719–1746.
104. Wang Y.F. The Effect of Grain Orientation on the Tensile–Compressive Asymmetry of Polycrystalline NiTi Shape Memory Alloy // *Wiley-VCH Verlag GmbH & Co*. 2007. Vol. 38. № 4. Pp. 294–298
105. Lubliner J., Auricchio F. Generalized plasticity and shape-memory alloys // *Int. J. Solids Structure*. 1996. Vol. 33. Pp. 991-1003.
106. Auricchio F., Taylor R. L., Lubliner J.. Shape-memory alloys: macromodelling and numerical simulations of the superelastic behavior // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1997. Vol.146. Pp. 281-312.
107. Olsen J.S., Zhang Z.L., Hals J.K., Lu H. Corrigendum: Effect of notches the behavior of superelastic round-bar NiTi-specimens // *Smart Mater. Struct.* 2012. Vol. 21. Pp. 12.
108. Patoor E., Eberhardt A., Berveiller M. Micromechanical modelling of superelasticity in shape memory alloys // *J. de Physique IV*. 1996. Vol. 1. Pp. 227-292.
109. Manach P.Y., Favier D. Shear and tensile thermomechanical behavior of equiatomic NiTi alloy // *Materials Science and Engineering*. 1997. Vol. A222. Pp. 45-57.
110. Gillet Y., Patoor E., Berveiller M. Calculation of pseudoelastic elements using a non-symmetrical thermomechanical transformation criterion and associated rule // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 1998. Vol. 9. Pp. 366-378.
111. LExcellent C., Vivet A., Bouvet C., Calloch S., Blanc P. Experimental and numerical determinations of the initial surface of phase transformation under biaxial loading in some polycrystalline shape-memory alloys // *journal of the Mechanics and Physics of solids*. 2002. Vol. 50. Pp. 2717-2735.
112. Auricchio F., Petrini L. A three-dimensional model describing stress-temperature induced solid phase transformations: solution algorithm and boundary value problems // *Int. J. for Numerical Methods in Engrg*. 2004. Vol. 61. Pp. 807-836.
113. Raniecki B., Mroz Z. Yield or martensitic phase transformation conditions and dissipation functions for isotropic, pressure-insensitive alloys exhibiting SD effect // *Acta Mech*. 2008. Vol. 195. Pp. 81-102.
114. Auricchio F., Reali A., Stefanelli U. A macroscopic 1D model for shape memory alloys including asymmetric behavior and transformation-dependent elastic properties // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*. 2009. Vol. 198. Pp. 1631-1637.
115. Zhu Y., Dui G. A macro-constitutive model of polycrystalline NiTi SMAs including tensile-compressive asymmetry and torsion pseudoelastic behaviors // *Int. J. of Engineering Science*. 2010. Vol. 48. Pp. 2099-2106.

116. Качанов Л.М. Основы теории пластичности // изд. Наука. 1969.

117. Leclercq S., Lexcellent C. A general macroscopic description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1996. Vol. 44. № 6. pp. 953-980.

118. Саганов Е.Б. Учет неоднородности упрочнения сплава с памятью формы в задаче о прямом мартенситном превращении в стержне круглого поперечного сечения при кручении // Механика композиционных материалов и конструкций. 2018. Т. 24. № 1. С. 82-92.