

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи



Сидху Джуниор Саржит Сингх

**ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ КАНАЛОВ СЛОЖНЫХ ФОРМ С
РОМБИЧЕСКОЙ РЕЛЬЕФНОЙ СТРУКТУРОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

Специальность 05.07.05
«Тепловые, электроракетные двигатели и
энергоустановки летательных аппаратов»

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Семенов Василий Васильевич

Москва - 2018

Содержание

Введение.....	4
Глава 1. Обзор научно-технической информации по исследованию сверхзвукового обтекания потоком газа рельефной поверхности. Постановка задачи исследования.....	11
1.1. Вихревые механизмы образования возмущения давления.....	16
1.2. Механизм неравномерной абляции образования рельефных сеток.....	17
1.3. Нестационарные модели.....	20
1.4 Механизм поверхностной деформации.....	22
1.5 Испытание модельных сопловых насадков с ромбическим рельефом.....	25
1.6 Турбулентное течение вдоль шероховатой стенки.....	29
1.7. Постановка задачи исследования.....	34
Глава 2. Волновое сопротивление периодических плоских рельефов.....	36
2.1. Волновое сопротивление конечных плоских рельефов.....	36
2.2. Средний квадрат углов наклона периодических плоских рельефов.....	39
2.3. Особые плоские рельефы и их уникальные свойства.....	41
2.4. Параметры подобия конечных периодических плоских рельефов.....	42
2.5. Дефект периодических плоских рельефов.....	44
2.6. Дефект синусоидальных плоских рельефов.....	47
2.7. Выводы по главе.....	49
Глава 3. Критические режимы сверхзвукового обтекания потоком газа ромбических рельефов.....	51
3.1. Обозначения, допущения и краевые задачи линейной теории.....	52
3.2. Метод суперпозиции автомодельных частных решений.....	55
3.3. Аналитические решения автомодельных частных краевых задач.....	56
3.4. Сравнение результатов расчета с экспериментом.....	58
3.5. Строгое решение задачи Д.И. Блохинцева для ромбических рельефов.....	62
3.6. Критические значения углов α ромбических рельефов.....	65

3.7. Местные и полные коэффициенты волнового сопротивления трехмерных рельефов, представимых суммами плоских синусоидальных волн.....	65
3.8. Выводы по главе.....	66
Глава 4. Вычислительные исследования волнового сопротивления поверхности стенки сопла с ромбическим рельефом. Анализ результатов расчетов.....	68
4.1. Численные методы трехмерного моделирования обтекания соплового насадка с ромбическим рельефом.....	68
4.1.1. Обоснование выбора модели.....	68
4.1.2. Математическая модель.....	72
4.1.3. Модель турбулентности.....	73
4.1.4. Граничные условия.....	75
4.1.5. Расчетная сетка.....	76
4.2. Расчет течения газа.....	77
4.3. Анализ результатов расчетов.....	89
4.3.1. Исследование влияния расположения ромбических выступов на поверхности насадка на силу волнового сопротивления.....	104
4.4. Выводы по главе.....	106
Заключение.....	107
Список использованных источников.....	109

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы

Как известно, реактивное сопло ракетного двигателя 1-ой ступени из-за фиксированной геометрической степени расширения большую часть траектории полета работает на нерасчетных режимах (в разреженной атмосфере), в результате чего оно имеет на высоте существенные потери тяги из-за недорасширения газа (не хватает стенки сопла).

Использование в двигателях первых ступеней ракет-носителей двухконтурных сопел, состоящих из земного сопла и высотного круглого насадка, может улучшить их тяговые характеристики [1 – 8].

При штатной работе ракетного двигателя с двухконтурным соплом неизбежно наступает режим обтекания высотного насадка сверхзвуковым потоком продуктов сгорания с высокой энтальпией торможения. При этом, если обтекаемые стенки насадка сделаны из композитного материала, то после превышения предела его термостойкости начинается абляция, при которой на композитных стенках образуются структуры перемежающихся выступов и впадин, похожие на ромбические рельефы.

После появления рельефов на изначально гладких стенках высотного насадка его вклад в тягу двигателя уменьшается на величину, равную силе волнового сопротивления его рельефных стенок. При последующей абляции материала высоты выступов и глубины впадин увеличиваются. Вследствие этого, потери тяги, вызванные волновым сопротивлением рельефных стенок, продолжают расти и, в итоге, они могут существенно уменьшить весь полезный эффект использования высотного насадка. Из вышесказанного следует актуальность изучения полей сверхзвукового обтекания ромбических рельефов.

За рубежом возникновение ромбического рельефа на поверхности аблирующих конусов исследовали Вильямс, Ингер, Шток, Лаганелли, Тобак, Кубота и другие [9 – 21].

В России рельефные структуры на стенках сопел с теплозащитным покрытием, которые возникали при их огневых стендовых испытаниях, обнаружили и детально исследовали Грязнов В.П. и Сергиенко А.А [22] в Центре им. М.В. Келдыша. В МАИ Семенов В.В. выполнил экспериментальные исследования волновых сопротивлений сопловых насадков с двоякопериодическими рельефами стенок, а также аналогичных пластин [31, 33, 35]. Он обнаружил существование нескольких кризисов обтекания рельефных поверхностей, в результате которых резко увеличиваются волновые потери, а также выявил, что наступление кризиса течения зависит не только от скорости потока – числа Маха, но и от отношения длин волн двоякопериодического рельефа стенки [24, 31, 32, 35].

В настоящее время строгая нелинейная теория обтекания рельефных стенок сопел и их волнового сопротивления отсутствует. Поэтому все без исключения теоретические результаты по волновому сопротивлению рельефных стенок сопел получены в рамках акустического приближения, т. е. с помощью приближенных моделей обтекания, в которых используются точные решения краевых задач, но для линеаризованных уравнений газовой динамики с линеаризованными граничными условиями [22 – 35]. При этом, однако, большинство из указанных теоретических результатов относятся к частному случаю сверхзвукового обтекания бесконечных пластин с периодическими или двоякопериодическими рельефами. [22 – 35].

Целью диссертационной работы является разработка методики расчета коэффициентов волнового сопротивления, возникающего при сверхзвуковом обтекании стенок сопловых насадков с ромбическим рельефом.

Диссертация состоит из введения, 4 глав с выводами по главам и общих выводов, списка использованных источников.

В первой главе проведен обзор научной информации по исследованию обтекания потоком рельефной поверхности головной части летательного аппарата. Приводится расчетно-экспериментальный материал по исследованию волнового сопротивления, возникающего при обтекании сверхзвуковым потоком газа

поверхности различных тел (конуса, цилиндра и пластины) с ромбической рельефной структурой. В заключение главы определяются задачи исследования.

Вторая глава посвящена выводу аналитических формул, описывающих зависимость полных коэффициентов волнового сопротивления периодических плоских рельефов стенок сопловых насадков от параметров их подобия.

В третьей главе предложен метод, с помощью которого получено математически строгое решение краевой задачи Д.И. Блохинцева в случае обтекания при $0 < M < \infty$ трехмерных рельефов стенки соплового насадка, сводимых к суммам синусоидальных волн.

В четвертой главе приводятся результаты вычислительных исследований волнового сопротивления пластины, которая представляет собой элемент стенки сопла. Она имеет с обеих сторон одинаковые ромбические рельефы, наветренную острую кромку и боковые бортики и обтекается сверхзвуковым потоком газа.

Рельефы на стенке сопла возникают, когда они деформируются при изготовлении или испытаниях, разгораются и искажаются в процессе эксплуатации. В этом случае могут возникнуть еще и дополнительные потери тяги из-за волнового сопротивления, возникающего при сверхзвуковом обтекании потоком газа стенки сопла с рельефной поверхностью.

Кроме того, был проведен сравнительный анализ расчетов волнового сопротивления плоских сопловых насадков с ромбической рельефной поверхностью с разными углами ромба с экспериментальными данными, полученными при сравнительном испытании плоских сопловых насадков с ромбической рельефной поверхностью на дифференциальной установке, работающей на сжатом холодном воздухе [31, 33, 35]. Во время эксперимента изменялся угол ромба рельефной поверхности пластин.

Целью работы являются:

Разработка методики расчета коэффициентов волнового сопротивления, возникающего при сверхзвуковом обтекании стенок сопловых насадков с ромбическим рельефом.

Задачи работы:

Задачами работы являются:

1. Обосновать в рамках линейной теории формулу для аналитической зависимости полных коэффициентов волнового сопротивлений конечных плоских периодических рельефов стенки соплового насадка от их параметров подобия.
2. Строго решить краевую задачу обтекания однородным потоком трехмерных рельефов стенок сопловых насадков, заданных суммами плоских синусоидальных волн. Для нестрогих оценок полных коэффициентов волнового сопротивления конечных ромбических рельефов стенки соплового насадка применить строгие решения, найденные для бесконечных аналогов изучаемых ромбических рельефов.
3. Используя CFD-продукт ANSYS, численно смоделировать эксперименты, в которых путем обдува сжатым воздухом на дифференциальной установке соплового насадка измерена сила волнового сопротивления его стенки с ромбическим рельефом при различных углах ромба.

Научная новизна работы:

1. Аналитическим путем получены формулы, описывающие зависимость полных коэффициентов волнового сопротивления конечных периодических плоских рельефов стенки соплового насадка от параметров их подобия. Доказано, что конечный периодический плоский рельеф стенки насадка с дробным значением волнового числа имеет один неполный период, вклад которого в полный коэффициент волнового сопротивления рельефа сопла может быть как отрицательным, так и положительным.
2. Впервые в рамках линейной теории математически точно решена стационарная краевая задача трехмерного обтекания потоком пластины – элемента стенки сопла,

у которой ромбический рельеф ее обтекаемой поверхности задан в виде суммы плоских синусоидальных волн, характерных для сопловых насадков.

3. Доказано, что поле обтекания ромбического рельефа с критическим значением его угла ромба нельзя определить в рамках линейной теории из-за деления на ноль, которую называют кризисом сверхзвукового обтекания стенки соплового насадка.

Теоретическая и практическая значимость результатов работы

Коэффициенты волнового сопротивления, возникающего при обтекании сверхзвуковым потоком стенки соплового насадка с ромбическим рельефом, могут быть использованы при проектировании двухконтурных реактивных сопел двигателей и других элементов летательного аппарата.

Методология и методы диссертационного исследования

Поставленные цели достигались путем расчетно-теоретических исследований. Для проведения вычислительных исследований использовались компьютерные технологии - программный комплекс ANSYS CFX. При этом результатов расчетов сравнивались с экспериментальными данными других авторов.

Положения, выносимые на защиту:

1. Аналитическим путем полученные формулы, описывающие зависимость полных коэффициентов волнового сопротивления конечных периодических плоских рельефов стенки соплового насадка от параметров их подобия.
2. Метод расчета сверхзвукового обтекания газовым потоком пластины – элемента стенки сопла, у которой ромбический рельеф ее обтекаемой поверхности задан в виде суммы плоских синусоидальных волн, позволяющий получить в рамках линейной теории точные формулы для определения коэффициентов волнового сопротивления ромбического рельефа стенки соплового насадка.
3. Результаты вычислительных исследований сверхзвукового обтекания газовым потоком стенок сопловых плоских насадков, имеющих ромбические рельефы с различными углами ромба.

Достоверность результатов работы

Достоверность результатов работы обеспечена:

- использованием современных математических методов и сертифицированной программы ANSYS для решения прикладных задач газовой динамики (номер лицензии № 632255).
- удовлетворительным согласованием результатов численного моделирования с экспериментальными данными испытаний сопловых плоских насадков с ромбическим рельефом на дифференциальной установке.

Апробация результатов работы

Основные результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях, которые являются международными:

1. XLII Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения», Москва, 12–15 апреля 2016.
2. XX Юбилейная Международная конференция по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам, Алушта, 24–31 мая 2017.
3. 16-я Международная конференция «Авиация и космонавтика», Москва, 20 – 24 Ноябрь 2017.

Публикации, отражающие полноту изложения материалов диссертации

Основные результаты диссертационной работы в полном объеме опубликованы в 5 научных работах, 2 из которых являются статьями в рецензированных научных изданиях.

Личный вклад автора

Все результаты, представленные в работе, получены либо лично автором, либо при его непосредственном участии. Так, выбор программ расчета и математических моделей, построение рабочей сетки для трехмерного численного моделирования обтекания стенки соплового насадка с ромбическим рельефом, обработка полученных результатов, а также сравнение расчетных данных с экспериментальными данными выполнены лично соискателем.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, 4 глав с выводами по главам и общих выводов, списка использованных источников. Объём диссертации составляет 115 страницы машинописного текста, в том числе 48 рисунков и 7 таблиц. Библиография диссертации: 68 наименования.

ГЛАВА I. ОБЗОР НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ПОТОКОМ ГАЗА РЕЛЬЕФНОЙ ПОВЕРХНОСТИ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

За рубежом были проведены многочисленные исследования по выявлению основных механизмов возникновения на поверхности головной части летательного аппарата упорядоченной рельефной структуры в виде выступов и впадин [9]. В работах [9 – 21, 23] отмечается, что появлению такого рельефа на поверхности различных материалов способствует турбулентный пограничный слой. В качестве примера на рис. 1.1. показана рельефная поверхность тефлонового конуса с полууглом при вершине 36° [9, 14, 15].

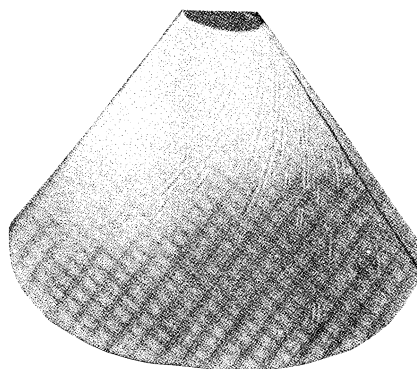


Рис. 1.1. Рельефная структура на поверхности тефлонового конуса [9, 14, 15]

Практический интерес к явлению образования ромбических рельефов на поверхности головной части связан с тем, что они оказывают влияние на температуру поверхности и динамику полета летательного аппарата.

В работе [10] экспериментально исследовалось влияние ромбических рельефов, образующихся на головной части ракеты, на динамику её полета, которое проявляется во взаимодействии рельефа с моментом крена.

Так, в работе [10] показано, что у аблирующих конусов образовывались рельефы на поверхности, что изменяли моменты крена. Во время испытаний было выявлено три типа рельефной структуры: продольные канавки, турбулентные клинья и рельефная сетка.

Причем при ромбической рельефной сетке возникает наибольший момент крена.

Было установлено, что рельефная сетка образуется пересекающимися спиральными канавками с правым и левым направлениями спирали на поверхности тела и угол наклона спирали (волновой угол) зависит от числа Маха на границе пограничного слоя [10].

Было сделано предположение о существовании у поверхности модели системы стоячих волн, из чего следовал вывод о невозможности возникновения рельефной структуры на поверхности в дозвуковом потоке.

Была также выявлена связь между изменением длины волны рельефной сетки и давлением потока, а также между изменением шага рельефной сетки в направлении течения и поверхностным трением.

Одним из первых работ, привлечших внимание к явлению образования рельефных узоров на поверхности, были работы Кэннинга [11, 12]. В этих исследованиях определялись характеристики потока и конфигурации модели, при которых возникали рельефные сетки.

Отмечается, что образование рельефных сеток на поверхности конусов из лексана наблюдалось при возникновении турбулентного течения. Был установлен факт того, что рельефная сетка образуется пересекающимися спиральными канавками на поверхности тела. Предполагается, что рельефная сетка возникает в результате пересечений конусов Маха. Была построена экспериментальная зависимость угла наклона спирали в функции числа Маха на границе пограничного слоя (рис. 1.2) [9]. Анализ экспериментальных данных дал возможность предположить о существовании у поверхности модели системы стоячих волн. Из чего можно сделать вывод о невозможности возникновения рельефной сетки в случае дозвукового потока.

В работе [13] были проведены исследования, направленные на определение условий образования рельефной сетки. С целью изучения условий возникновения рельефной сетки были проведены испытания моделей.

Испытания проводились для:

- определения, является ли сверхзвуковое течение необходимым условием для образования рельефной сетки;
- оценки влияния формы вершины конуса;
- выяснения, образуется ли рельефная сетка на двумерных моделях, как и на конических;
- получения количественных данных по углу, шагу и глубине рельефной сетки;
- определения изменения рельефной сетки и унос материала с поверхности во времени.

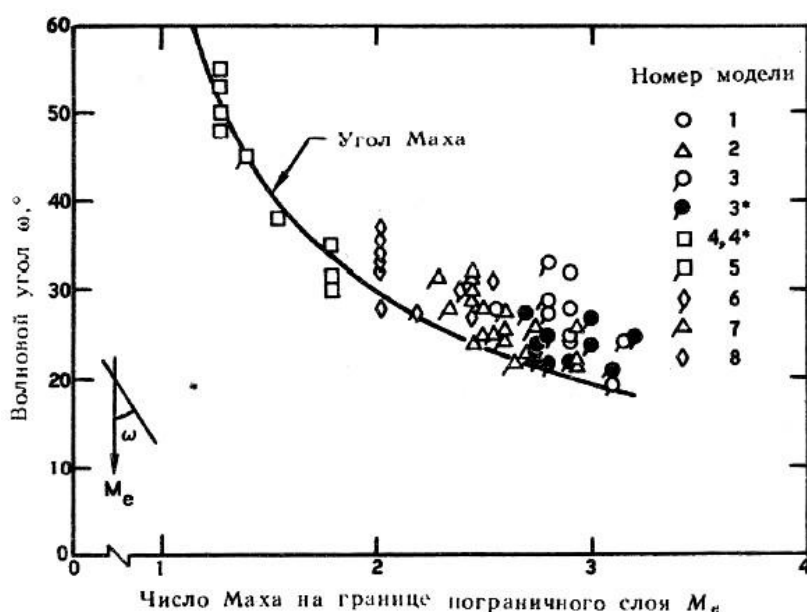


Рис. 1.2. Зависимость волнового угла от числа Маха [9]

С целью выяснения условий существования сверхзвукового потока были испытаны конусы из люцита с различными углами при вершине. Конус с полууглом при вершине 50° имел отчетливую рельефную сетку (рис. 1.3) [9, 13], но при угле на вершине 55° рельефная сетка уже отсутствовала. Интересные результаты были получены при испытаниях конуса с полууглом при вершине 55° под углом атаки 5° (рис. 1.4) [9, 13]. Было установлено, что на поверхности конуса одновременно существуют две зоны (сверхзвукового и дозвукового) течений (дозвуковая зона располагалась на наветренной стороне конуса, сверхзвуковая – на подветренной стороне).

Испытания показали, что рельефная сетка возникает на верхней (подветренной) стороне конуса, а на нижней (наветренной) стороне она отсутствует. Таким образом, было установлено, что для образования рельефной сетки необходимо существование сверхзвукового течения.

Было обнаружено, что существование сверхзвукового потока и турбулентного пограничного слоя является необходимым, но недостаточным условием для образования рельефной сетки.

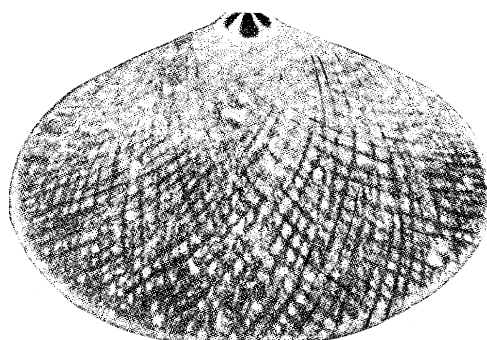


Рис. 1.3. Конус из люсита после испытаний при $M = 1,3$ [9, 13]



Рис. 1.4. Конус из люсита [9, 13]

В связи с этим было сделано предположение, что третьим условием возникновения рельефной сетки на поверхности является существование достаточно тонкого пограничного слоя, для которого распределение давления на поверхности модели по существу совпадает с распределением давления в этом слое. Это позволило заключить, что механизм процесса определяется ударными волнами, которые порождаются возмущениями давления и вызывают неравномерную абляцию поверхности, что и создает рельефный рисунок.

В работе [14] было установлено, что для возникновения рельефной сетки необходим переход течения потока газа вдоль стенки в турбулентный режим. Были исследованы обугливающиеся материалы (графит, фенольный нейлон и дерево), сублимирующий абляционный материал (эпоксидная смола) и два плавящихся абляционных материала (тефлон и лавсан).

При испытании модели из нейлона на огневом стенде на поверхности её кормовой части возникала рельефная сетка. Однако при испытаниях конической

модели из фенольного графита со сферической носовой частью и кормовой частью из фенольного нейлона рельефная сетка образовывалась только на кормовой части модели. Возможное объяснение указанного явления состоит в следующем: либо газовый поток вблизи носовой части модели был ламинарным, либо модели не подсвечивались, вследствие чего рельефная сетка существовала, но не была обнаружена.

Еще один из результатов работы Лаганелли и Нестлера [14] состоит в том, что на поверхности плавящихся и сублимирующих материалов образуются канавки (рис. 1.5) [9, 14].

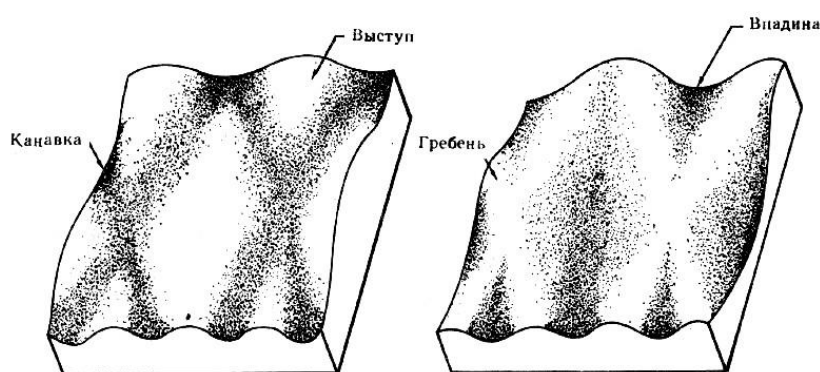


Рис. 1.5. Типы ромбической рельефной сетки на поверхности аблирующих материалов [9, 14]

Как видно из рис. 1.5, рельефная сетка на поверхности плавящихся и сублимирующих материалов характеризуется наличием двух семейств канавок (правого и левого направлений), между которыми образуется ромбообразный выступ.

В работе [15] были проведены исследования по выявлению влияния поверхностных возмущений на образование рельефной сетки. Были испытаны конусы из тефлона с полууглом при вершине 36° (рис. 1.1) [9, 14, 15] в аэродинамической трубе с целью выявления влияния наличия на поверхности конусов поперечных и продольных рядов отверстий из штифтов различного расположения. Было установлено, что возмущающие отверстия и штифты оказывали лишь местное влияние на характеристики рельефной сетки, но не определяли процесс развития поверхностной структуры в целом.

Таким образом, рассмотренные выше экспериментальные данные и возможные механизмы возникновения рельефной сетки на поверхности тел привели к разработке нескольких механизмов возникновения рельефной сетки, которые приводятся ниже.

1.1. Вихревые механизмы образования возмущения давления

Экспериментальное подтверждение существования продольных вихрей выше по потоку от поверхности с рельефной сеткой вызвало проведение многочисленных теоретических и экспериментальных исследований для выяснения возможной взаимосвязи между рельефным рисунком и вихрями.

В работе [16] показано, что скос потока, который изменяется периодически вдоль размаха крыла, вызывает возмущения давления. Поле возмущенного давления имеет максимумы на пересечении линий Маха (рис. 1.6) [9, 16].

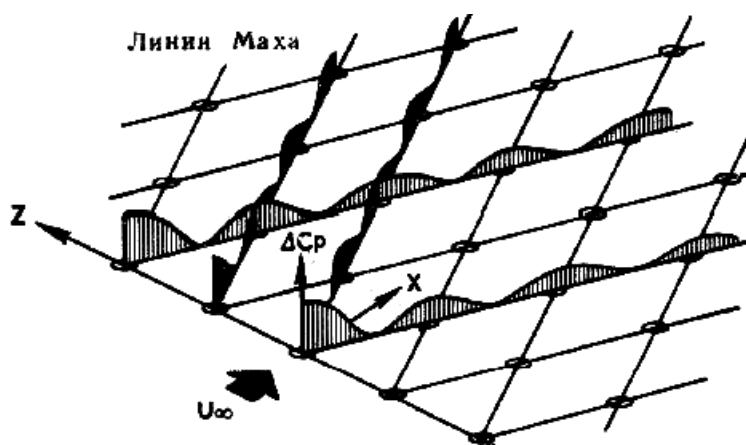


Рис. 1.6. Распределение возмущений давления на рельефной сетке [9, 16]

Было сделано предположение, что такое распределение давления на поверхности приводит к возникновению наблюдаемой в экспериментах рельефной сетки.

Были проведены исследования по выявлению возможной роли продольных вихрей в возникновении рельефной сетки [17]. Для этого во время эксперимента вводили вихри различной интенсивности в пограничный слой и оценивали влияние, которое они оказывают на возникающую рельефную сетку. Такие вихри

вводились с помощью элементов шероховатости, имеющих различные высоту, диаметр и шаг, и уступов различной высоты на стенке. Было установлено, что рельефная сетка, по существу, не менялась, хотя характеристики элементов шероховатости и высота уступов существенно варьировались. Таким образом, наличие продольных вихрей не является необходимым условием образования рельефной сетки.

1.2. Механизм неравномерной абляции образования рельефных сеток

На основании возникновения рельефной сетки на поверхности сублимирующих материалов, был изучен процесс образования рельефной сетки с использованием механизма неравномерной абляции.

Как указывалось выше, на поверхности тел, обтекаемых газовым потоком, рельефная сетка возникала лишь в тех случаях, когда пограничный слой был турбулентным, а скорость истечения была сверхзвуковая ($M > 1$). При этом общий подход основывался на использовании линеаризованных уравнений для исследования сверхзвукового турбулентного пограничного слоя, возмущаемого поверхностью стенки рельефной формы.

В работе [18] рассматривались различные по сложности стационарные аналитические модели — от простого представления пограничного слоя и граничных условий на стенке до сложных моделей, учитывающих вязкий подслой и подвод массы. При этом пограничный слой рассматривался в виде невязкого внешнего потока и вязкого подслоя. Поток у стенки волновой формы считался двумерным.

Результаты расчета тефлонового конуса, показанного на рис. 1.1, приведены на рис. 1.7 [9]. Из рис. 1.7 видно, что результат является удовлетворительным при высоких тепловых потоках, характерных для аблирующей стенки. Расчеты с варьированием угла волны (λ – угол между образующей сетки и плоскостью поперечного сечения тела) показали, что длины волн имеют максимальную скорость усиления.

Результаты, подобные полученным с использованием вихревых профилей, имели место и в случае обычных профилей числа Маха в пограничном слое. Однако они получены в условиях существенно более низких температур стенки. Соответствующие расчеты проводились при значениях числа Маха на границе пограничного слоя $M = 5$ и $M = 10$.

Результаты расчетов для вихревых профилей приведены на рис. 1.8 [9], где волновой угол, соответствующий максимальному усилению, представлен в зависимости от числа Маха на границе пограничного слоя.

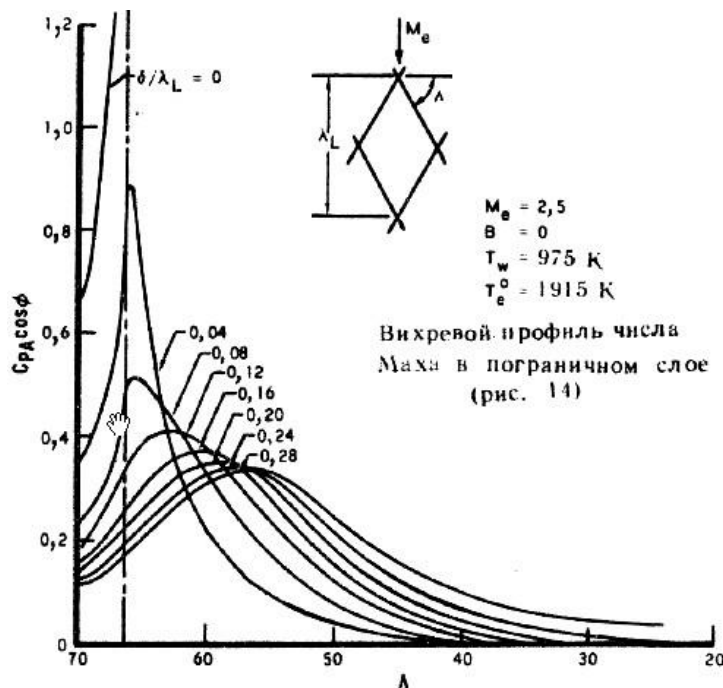


Рис. 1.7. Результаты расчета тефлонового конуса [9]

На рис. 1.8 M_e – число Маха на внешней границе пограничного слоя, B – параметр вдува со стенки, T_w° – температура стенки и T_e° – температура торможения на границе пограничного слоя. Вертикальная штрих-пунктирная линия характеризует угол Маха.

Видно, что волновой угол примерно равен углу Маха для малых значений отношения δ/λ_L , но с увеличением этого отношения он становится больше угла Маха, и это различие возрастает с увеличением M_e .

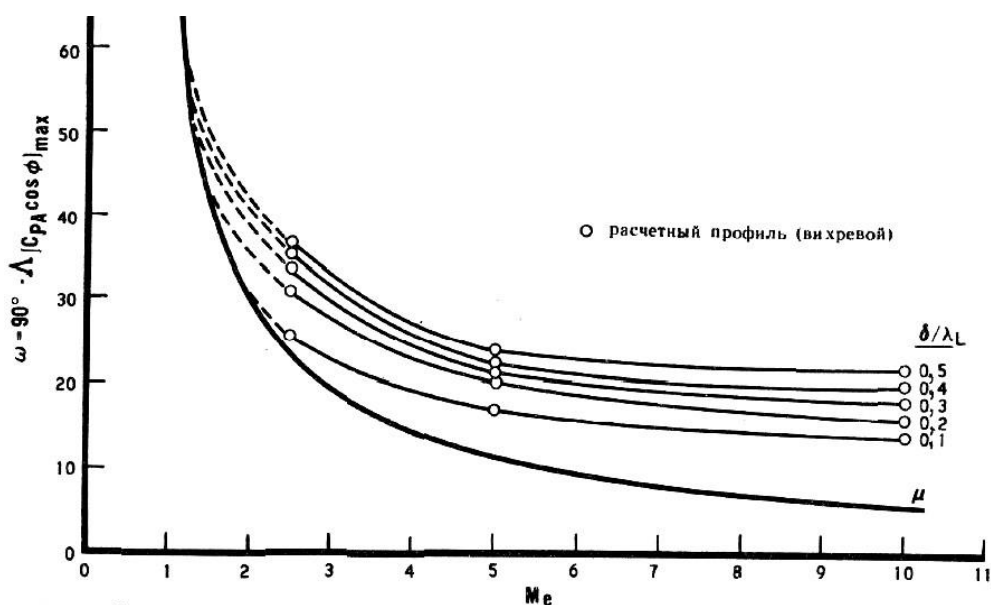


Рис. 1.8. Зависимость волнового угла от числа Маха [9]

Указанные результаты использовались при выборе комбинации внешнего течения (невязкого) с различными внутренними (вязкими) и при разработке модели динамической реакции поверхности. Результаты расчетов по различным комбинированным теориям сравниваются на рис. 1.9 [9] с экспериментальными данными для тефлона и других материалов.

По комбинированной теоретической модели поверхностного течения удельный тепловой поток находится в фазе с давлением на поверхности и невязкое решение позволяет определить в явной форме зависимость волнового угла от параметра длины волны. Результаты расчета по такой теории хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Таким образом, полученная на основании модели неравномерной абляции зависимость волнового угла от отношения толщины пограничного слоя к составляющей длины волны в направлении течения хорошо согласуются с экспериментальными данными.



Рис. 1.9. Корреляция экспериментальных данных по волновому углу [9]

1.3. Нестационарные модели

В работе [19] для анализа проблемы в случае сублимирующего абляционного материала использован нестационарный подход. Основная идея нестационарного подхода состоит в предположении о том, что по аналогии с теорией ламинарной устойчивости на стационарный турбулентный поток влияет возмущение (волнистая стенка).

Было установлено, что возмущения установившегося турбулентного потока, возникающие при образовании рельефной сетки вследствие пульсаций считались пренебрежимо малыми по сравнению с возмущениями, создаваемыми волнистой поверхностью. Поэтому физические параметры потока считались состоящими из стационарной величины и возмущения, которые можно представить в виде ряда Фурье с членами, соответствующими ряду Фурье волнистой поверхности.

В работе [19] проведены также два независимых исследования сублимирующего абляционного материала. В первом случае устойчивость исследовалась с помощью нестационарной модели, включающей вязкий подслой. Используя интегральное решение для вязкого подслоя для невязкой внешней части пограничного слоя, были описаны пульсации удельного теплового потока в зависимости от волнового числа на стенке, ее коэффициента теплопроводности и комплексной волновой скорости. В случае

коэффициента температуропроводности, равного нулю (тепло-изолированная стенка), решение для всех волновых чисел является неустойчивым и не позволяет определить наиболее вероятные значения длины волны и волнового угла. Для материала с конечным значением коэффициента теплопроводности оказалось возможным определить наиболее вероятное значение указанных величин (рис. 1.10).

На рис. 1.10 [9, 19], θ – волновой угол, а $\alpha = 2\pi\delta/\lambda$ – безразмерное продольное волновое число (λ – длина волны), c_i – коэффициент усиления, $K_s/v_s\delta$ – параметр температуропроводности (K_s – коэффициент температуропроводности поверхности, v_s – средняя скорость абляции поверхности, а δ – толщина пограничного слоя). При $M_\infty = 2,6$ угол Маха μ составляет $22,6^\circ$. Отметим, что максимальная неустойчивость соответствует углу θ в диапазоне между 25° и 35° . Это несколько больше соответствующего угла Маха, что также согласуется с данными рис. 1.2.

Численное решение общей задачи нестационарного вязкого течения сверхзвукового турбулентного пограничного слоя у волнистой стенки с граничными условиями на поверхности Лиз и Кубота [19] получили также для сублимирующего абляционного материала.

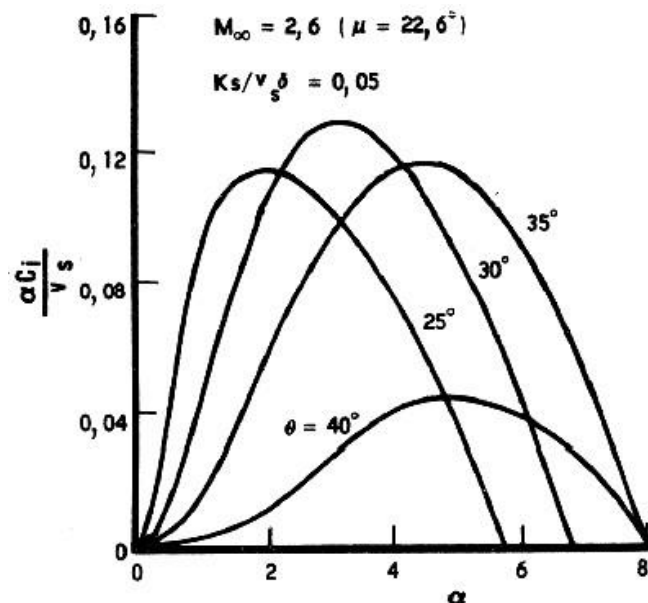


Рис. 1.10. Характеристики неустойчивости [9, 19]

Были получены данные для тефлона, который рассматривался как сублимирующий материал, для значения числа Маха на границе пограничного слоя $M = 2,6$. Были определены области максимальной неустойчивости в координатах волновое число – волновой угол; эти расчеты показали, что наиболее вероятной является рельефная сетка с волновым углом $33 - 38^\circ$.

Таким образом, исследования Ингера и Конрада, Лью и Ли, а также Лиза и Куботы [9, 18] показывают, что можно прогнозировать условия образования рельефной сетки на основании анализа пограничного слоя и характеристик сублимирующего абляционного материала.

1.4. Механизм поверхностной деформации

Есть предположение, что рельефная сетка образуется вследствие неравномерной деформации (а не неравномерной абляции), вызванной ползучестью материала [20].

Результаты расчетов, проведенных поперек пограничного слоя числом Маха $M = 3$, представлены на рис. 1.11 и 1.12 [9, 20]. В этих расчетах волновая скорость и скорость усиления возмущений принимались равными нулю.

На рис. 1.11 показан фазовый угол между поверхностным давлением и стенкой синусоидальной формы в функции угла наклона, образующей рельефную сетку для турбулентного профиля пограничного слоя и различных значений волнового числа α , где $\alpha = 2\pi\delta/\lambda$ (δ – толщина пограничного слоя, λ – длина волны в направлении распространения волн).

Из рис. 1.11 видно, что сдвиг по фазе на 90° дает максимум давления в точке максимального угла наклона стенки, а сдвиг по фазе на 180° приводит к тому, что максимум давления оказывается во впадине между волнами.

Заметим, что при малых волновых числах пограничный слой имеет характеристики равномерного сверхзвукового пограничного слоя, за исключением углов наклона образующей λ , примерно равных углу Маха. С другой стороны, при больших волновых числах пограничный слой имеет дозвуковые характеристики и

в дозвуковой части пограничного слоя вблизи стенки происходит значительный сдвиг по фазе.

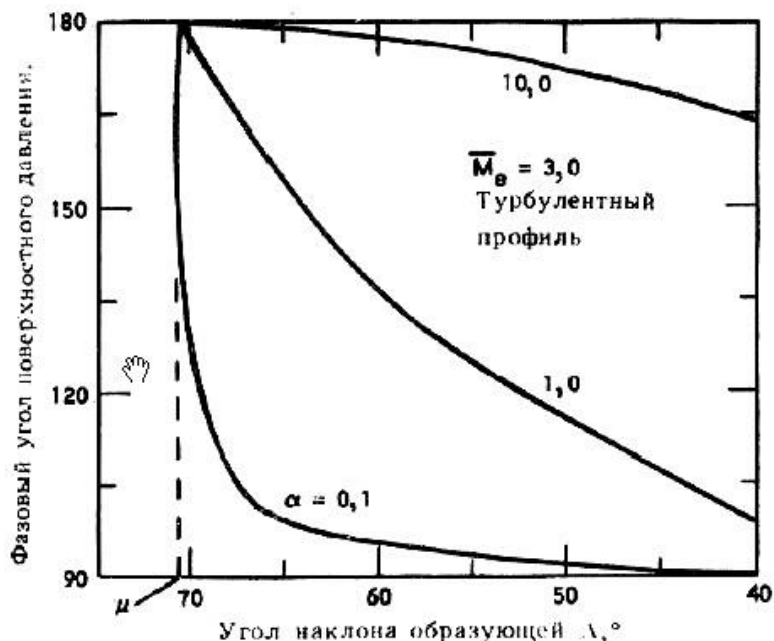


Рис. 1.11. Зависимость фазового сдвига поверхностного давления от угла наклона образующей рельефной поверхности [9, 20]

Результаты исследований по фазовому сдвигу поверхностного давления для трех типичных профилей чисел Маха в пограничном слое при постоянном небольшом значении волнового числа представлены на рис. 1.12. Видно, что ламинарный профиль имеет дозвуковые характеристики, тогда как ступенчатому профилю соответствует, в основном, сверхзвуковой пограничный слой. При больших волновых числах всем профилям соответствует дозвуковое течение.

Была также исследована устойчивость деформируемой поверхности при указанных выше характеристиках обтекания с помощью двух простых механических моделей деформируемой поверхности — моделей твердого тела Максвелла и Кельвина [20].

Механические модели, предназначенные для иллюстрации неупругого поведения материала, обычно состояются из элементов двух типов — упругой пружины, характеризующей упругую деформацию, и демпфера, соответствующего пластической деформации. При последовательном соединении таких обобщенных

элементов получается механическая модель Максвелла, а при параллельном соединении элементов — модель Кельвина.

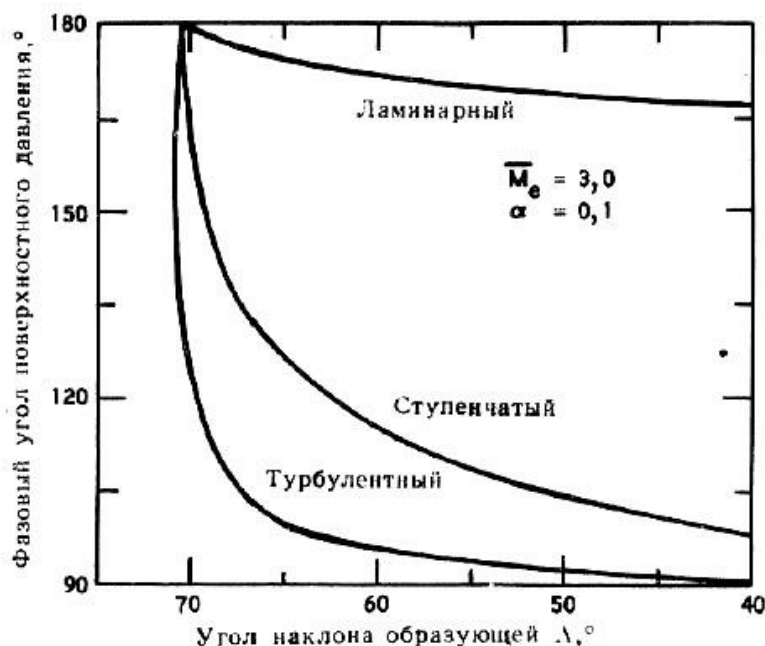


Рис. 1.12. Зависимость фазового сдвига поверхностного давления от угла наклона образующей рельефной поверхности [9, 20]

Исследования устойчивости показали, что поверхностное возмущение затухает в случае модели Кельвина, но остается стабильным или усиливается в случае модели Максвелла при неравномерном профиле числа Маха в пограничном слое. Скорость усиления возмущений в случае модели Максвелла определялась как функция волнового числа для трех упомянутых выше профилей числа Маха в пограничном слое.

Таким образом, единственной характеристикой материала, оказывающей влияние на длину волны возмущений, является вязкость.

Было установлено, что для газовых потоков с турбулентным пограничным слоем и постоянными условиями на границе пограничного слоя (как, например, в случае обтекания острого конуса) длина волны рельефной сетки слабо зависит от координаты в направлении течения. Этот теоретический вывод находится в согласии с экспериментальными данными.

В работах [20, 21] с целью проверки справедливости деформационной модели были проведены испытания двух конусов из воска с полууглом при вершине

13° в потоке с $M = 5,3$ при одинаковых условиях торможения. Конусы были изготовлены из материалов с различными начальными температурами абляции (290 °К и 332 °К). Модель с более высокой температурой абляции предварительно нагревали в течение 15 мин до температуры, близкой к температуре плавления воска. Результаты испытаний показали, что на поверхности предварительно нагретой модели получается более крупный рельефный рисунок.

В работе [20] было установлено, что на образование рельефной сетки влияют, главным образом, вязкость и сопротивление сдвигу аблирующего материала, так как вязкость и модуль сдвига воска существенно изменяются в температурном диапазоне 290...332 °К, а характеристики пограничного слоя и плотность, удельная теплоемкость и теплопроводность материала в этом температурном диапазоне почти не меняются.

Таким образом, было сделано заключение, что проведенные опыты подтверждают гипотезу о том, что рельефная сетка на поверхности конуса возникает в результате неравномерной деформации вязкого неупругого материала [20].

1.5. Испытание модельных сопловых насадков с ромбическим рельефом

В работе [31, 35] были приведены расчетно-теоретический анализ и экспериментальное исследование обтекания сверхзвуковым потоком оболочек реактивного сопла с рельефными сетками. Экспериментальные данные испытаний модельных сопловых насадков с рельефной сеткой сравниваются с результатами расчетов по величине волнового сопротивления.

Для экспериментального изучения волнового сопротивления, возникающего при обтекании сверхзвуковым потоком стенки сопла с рельефной сеткой, были изготовлены цилиндрические насадки, имеющие поверхности с рядной, ромбической и шахматной рельефными сетками.

Цилиндрические насадки с ромбической рельефной сеткой были изготовлены в количестве 5 штук (рис. 1.13). Все насадки были рассчитаны на обтекание сверхзвуковым потоком газа, имеющим скорость $M = 2,5$. Ромбический

выступ был образован путем пересечения винтовых проточек с разными заходами под углом к оси насадка, равным $\beta = 25^\circ, 28^\circ, 32^\circ, 38^\circ, 42^\circ$. Причем, для каждого насадка было свое значение этого угла, так как токарный станок имеет строго определенный шаг винтового резания, то нельзя было заранее задавать угол ромба.

Длина одного ромбического волнового пакета составляла соответственно $\lambda_1 = 11, 10, 8, 6, 5, 5, 5$ мм, ширина – $\lambda_3 = 5$ мм, а высота – $2B = 1$ мм; $0,5$ мм. Из-за трудностей изготовления ромбический выступ имел острые кромки [35].

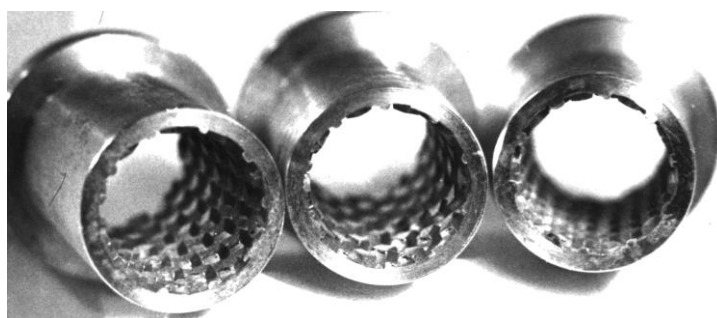


Рис. 1.13. Круглый насадок с ромбической рельефной сеткой

В связи с тем, что на токарном станке невозможно изготовить цилиндрические насадки с ромбической рельефной сеткой в широком диапазоне изменения угла ромба, а также для более полного изучения волнового сопротивления такой поверхности было принято решение изготовить плоские пластины, имеющие поверхность с ромбической рельефной сеткой (рис. 1.14).

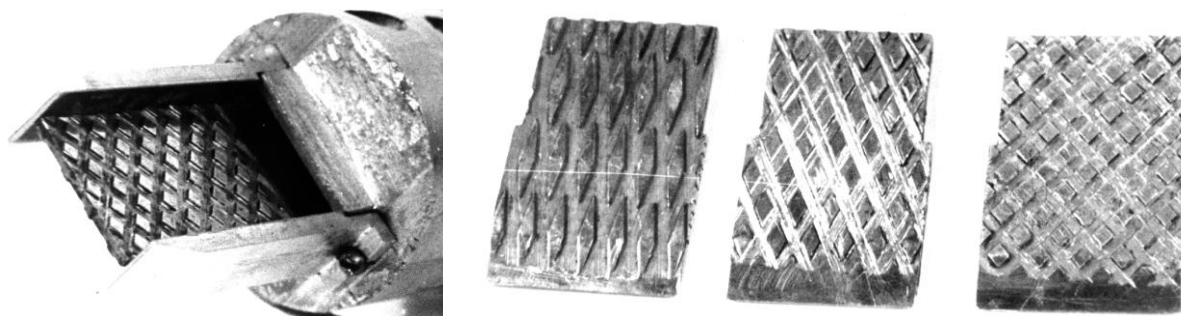


Рис. 1.14. Пластина с ромбической рельефной сеткой

Эти пластины имели боковые стенки, чтобы избежать краевых эффектов обтекания при ограниченном струйном обдуве. Всего было изготовлено 14 пластин (рис. 1.14). Длина пластины составляла $L = 50$ мм, ширина $S = 29$ мм, а толщина

$h = 3$ мм. С целью снижения потерь пластина со стороны обдува имела острую кромку под углом 7° [35].

Поверхность с ромбической рельефной сеткой была образована с обеих сторон пластины путем пересечения косых проточек шириной 2.4 мм. Каждая пластина имела свой угол ромба, который изменялся в пределах $\beta = 6 - 50^\circ$. Высота ромба – $2B = 0,5$ мм. Пластина обдувалась сверхзвуковой струей, истекающей из плоского сопла, со скоростью $M = 3,0$ [35].

На рис. 1.15 представлены результаты экспериментальных исследований цилиндрических насадков с ромбической рельефной сеткой. Видно, что потери тяги, возникающие из-за наличия ромбической рельефной сетки, составляют при высоте выступов $B = 1$ мм $\xi = 6,2 - 6,9\%$, а при $B = 0,5$ мм – $\xi = 4,8 - 6\%$, от идеальной тяги. Причем, критический режим обтекания потоком поверхности с ромбической рельефной структурой наступает при угле $\beta = 26^\circ$ [31].

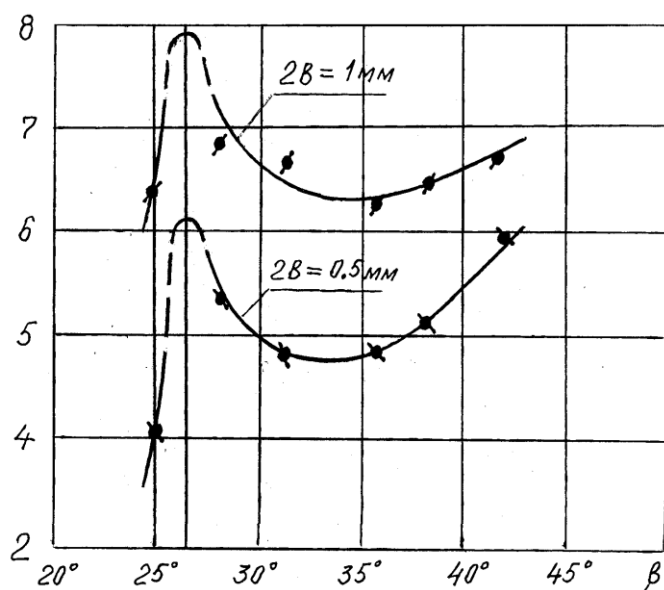


Рис. 1.15. Зависимость потерь тяги угла ромба

На рис. 1.16 [35] приведены опытные данные исследований обтекания газом пластин с ромбической рельефной сеткой. Из рис. 1.16 видно, что экспериментальные данные по потерям тяги, возникающим при обтекании потоком пластин с ромбической рельефной сеткой, расположены выше расчетных, примерно, на 0,5 %, хотя характер кривой остается без изменения.

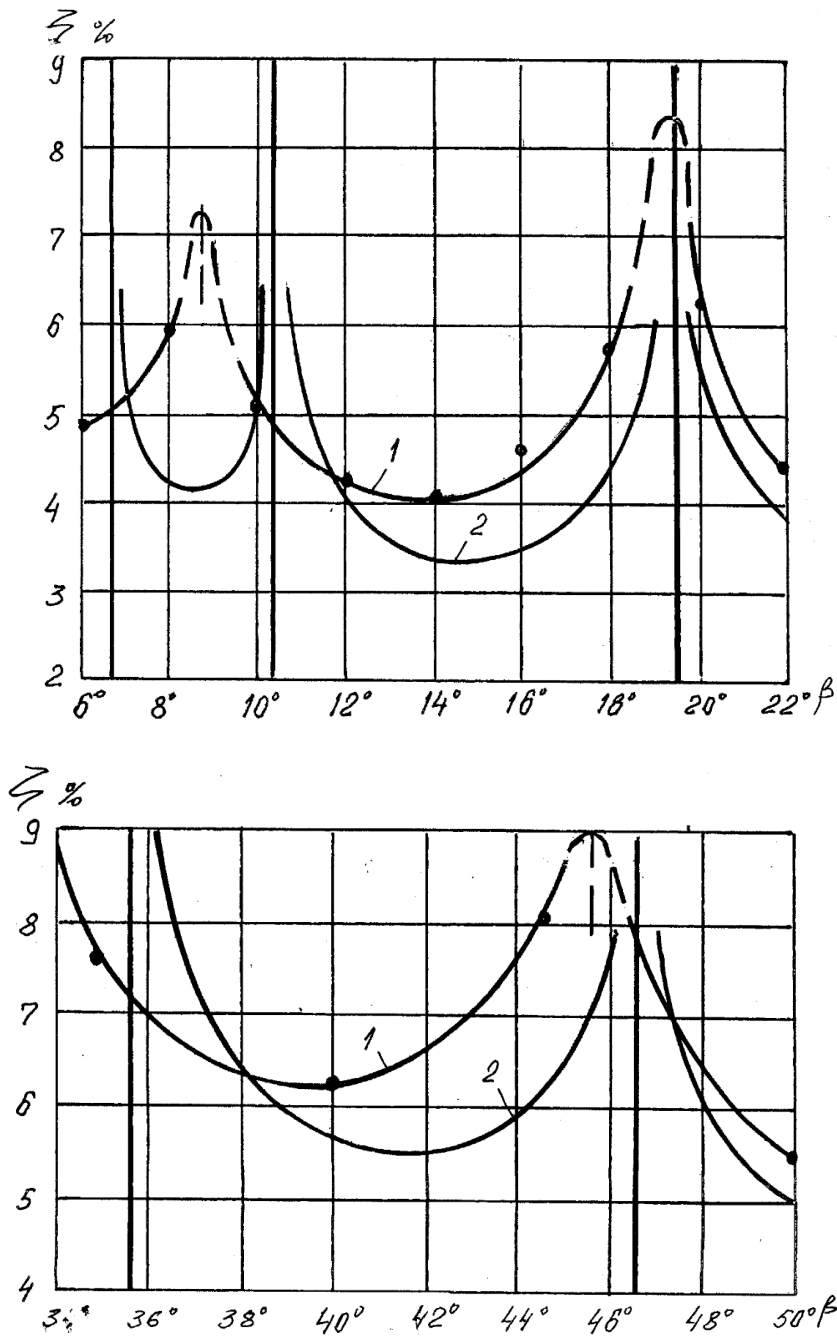


Рис. 1.16. Зависимость потерь тяги от угла ромба [35]

Это можно объяснить большой относительной высотой выступов ($2\pi b/\lambda_1$ и тем, что из-за острой кромки ромбических выступов возрастают общие потери. Высокий уровень потерь с увеличением угла ромба β при обтекании пластин с ромбической рельефной сеткой объясняется еще и тем, что при увеличении угла ромба также увеличивается количество выступов на поверхности пластины.

Появление нескольких максимумов потерь тяги объясняется тем, что при обтекании выступов потоком газа после наступления критического режима течения происходит перестроение течения газа на поверхности пластины.

При дальнейшем увеличении отношения длин волн смещения (а это достигается уменьшением угла ромба) волны возмущения газодинамических параметров объединяются в общий плоский фронт с новым углом следа $\beta_1 = \text{arcctg } \lambda_1/2\lambda_3$. Такие перестроения течения потока газа повторяются каждый раз, когда наступает кризис течения $\beta_i = \alpha$.

1.6. Турбулентное течение вдоль шероховатой стенки

Пограничный слой и безотрывное течение потока газа вдоль гладкой стенки хорошо описаны с использованием классической теории пограничного слоя [36, 37]. При наличии негладких поверхностей или элементов шероховатости значительные изменения свойств пограничного слоя наблюдались в зависимости от высоты и расположения элементов.

При рассмотрении влияния шероховатой стенки на турбулентный пограничный слой важно рассмотреть безразмерную высоту элементов шероховатости (число Рейнольдса) k^+ , где $k^+ = ku_\tau/\nu$, здесь k – характеристический размер, u_τ – скорость потока вдоль стенки, ν – кинематическая вязкость.

При $0 \leq k^+ \leq 5$ элементы шероховатости находятся в вязком подслое, вследствие чего они не оказывают никакого влияния на турбулентное течение.

При $k^+ > 5$ существует заметное влияние на величину коэффициента теплопередачи и ее распределение вдоль стенки.

Диапазон $5 \leq k^+ \leq 70$ из-за влияния вязкости называется переходным режимом, а при $k^+ > 70$ данный диапазон называется полностью грубым режимом [36 – 39].

Не существует прямого метода моделирования полностью турбулентных течений с усредненными граничными условиями, имитирующими шероховатость стенки с высокими k^+ . Для того чтобы быть достаточно свободными от влияния

эффектов шероховатости, нам нужно иметь $\delta/k \geq 50$, а чтобы иметь хорошо развитую шероховатую поверхность у нас должно быть $k^+ \geq 80$. Чтобы иметь четко определенный турбулентный поток вдоль шероховатой поверхности, а также режим течения не был переходным в смысле небольшого k^+ и он не зависел из-за недостаточной толщины пограничного слоя, нам нужно $\delta^+ \geq 4000$. Прямые методы моделирования, ограниченные стенками, газового потока имеют в настоящее время – $\delta^+ \approx 2000$.

Джиминез [40] предложил гипотезу, которая могла бы помочь прояснить динамику развития турбулентности вдоль шероховатой стенки.

Влияние шероховатой стенки на турбулентный пограничный слой контролируется двумя безразмерными параметрами: числом шероховатости Рейнольдса k_s^+ , которое определяет влияние шероховатости на буферный слой, и коэффициентом блокировки δ/k (отношение толщины пограничного слоя δ к высоте шероховатости k), который показывает не разрушится ли пограничный слой.

В тех случаях, когда высота элементов шероховатости пренебрежимо мала по толщине пограничного слоя, для описания потока газа достаточна модификация стандартной теории пограничного слоя. Для больших элементов необходимо моделировать поток по самому элементу.

Ходж [41] провел предварительное исследование модели шероховатости дискретного элемента для прогнозирования теплообмена в ракетных соплах с шероховатой поверхностью (рис. 1.17) [41].

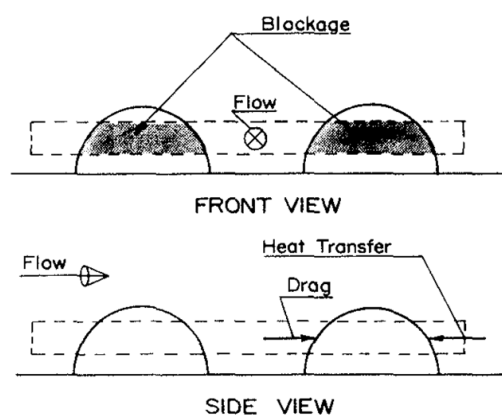


Рис. 1.17. Схема взаимодействия жидкости с шероховатой стенкой [41]

Джиминез отмечает, что переход от поведения пограничного слоя у шероховатой поверхности к отдельному поведению элементов происходит при $k/\delta > 0,2$ где k – высота шероховатости, δ – толщина пограничного слоя.

Пространственное распределение элементов шероховатости может быть случайным или периодическим. Неструктурированные материалы с шероховатой поверхностью будут увеличивать пограничный слой, так как высота шероховатости обычно мала. Газовый поток над структурированной шероховатостью, такие как, например, клепанная обшивка, все еще могут быть смоделированы распределением пограничного слоя, если элементы шероховатости достаточно малы относительно толщины пограничного слоя. Когда элементы шероховатости достаточно велики, а пики плотно упакованы вместе, может возникать кавитационное течение [42]. В этом случае между элементами шероховатости будет происходить область разделенного потока, а основной поток будет располагаться на вершине впадины. На рис. 1.18 [42] показаны как открытое, так и закрытое кавитационные течения гиперзвукового потока. Сопротивление давления доминирует в потоках открытого кавитационного течения, в то время как замкнутое кавитационное течение имеет большее сопротивление по сравнению с потоками в открытой полости.

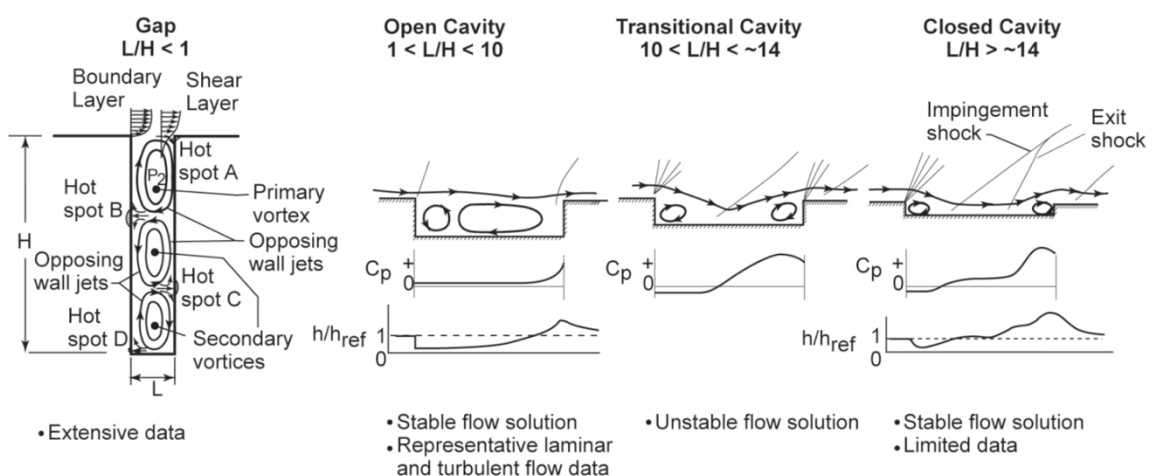


Рис. 1.18. Режимы кавитационного течения [42]

Пелт и другие [43] провели численные и экспериментальные исследования влияния сверхзвукового течения на большие элементы шероховатости, представляющие внутренний контур охлаждаемого сопла.

Было изучено сверхзвуковое однородное течение газового потока вдоль элементов шероховатости при числе Маха, равном 2. Для численного моделирования использовались усредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса (RANS). Сравнивались коэффициент сопротивления и плотность теплового потока для различных геометрий.

На рис. 1.19 [43] показана экспериментальная установка, а на рис. 1.20 [43] иллюстрируется внутренний контур сопла ракетного двигателя и три упрощенные его контура.

Экспериментальные данные показали, что основным источником сопротивления является выступ, обращенный вперед, а не впадина. На основании полученных результатов, три класса потока были определены на основе их пограничного слоя и поведения возмущений. Для больших высот шероховатости, с отношением большой длины к высоте (D/B), потоки прерываются вокруг ступеней, в то время как секции между элементами показывают обтекание плоской пластины.

Из рис. 1.20 видно, что для заданных элементов шероховатости имеет место рост сопротивления и теплопередачи. Можно также видеть, что для меньших высот шероховатости имеет место более плавное поведение потока, которое больше напоминает поведение пограничного слоя.

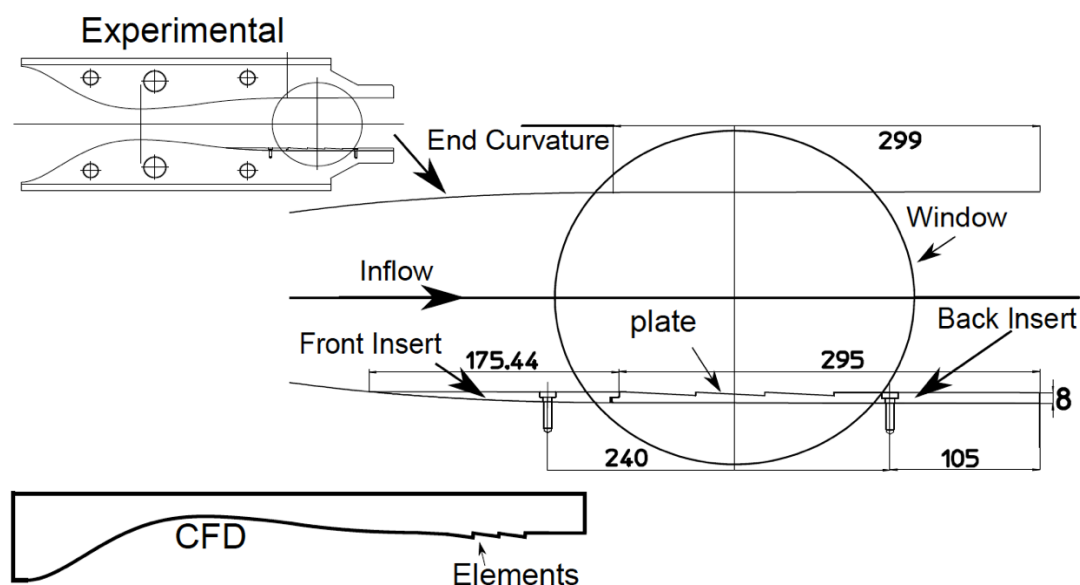


Рис. 1.19. Экспериментальная установка [43]

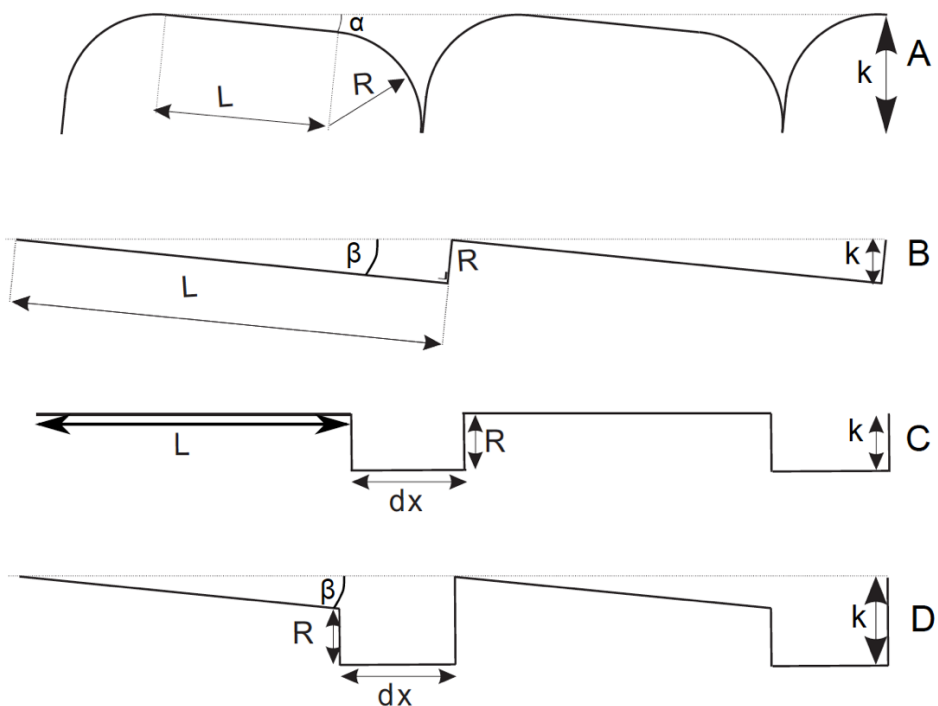


Рис. 1.20. (A) Базовый внутренний контур сопла, экстраполированный на плоской пластине. Упрощенная геометрия сопла для тестов: (B) выступ, обращенный вперед; (C) впадина; (D) выступ, обращенный вперед и впадина. Направление набегающего потока – слева направо [43]

Для случаев, когда отношение длины к высоте (D/B) элементов становится небольшим, можно определить третий класс потока. Здесь поток разделяется между элементами шероховатости, а зазор от верхней части элемента до вершины элемента перекрывается слоем сдвига.

Было обнаружено, что пограничный слой был сформирован поверх элементов. На основании этих наблюдений представлена система классификации, которая делит элементы шероховатости на разные категории, и для каждого типа категории рекомендуется отдельный подход к моделированию турбулентного течения вдоль шероховатой стенки.

Кочетков [44] экспериментальным путем установил развитие турбулентного течения на поверхности сверхзвуковых соплах. В работе [44], показано режимы течения вблизи стенки: после ламинарного потока, образуется поток в виде волн

Толмина-Шлихтинга, после чего градиентные вольные Кельвина-Гельмгольца, продольные вихри Тейлора-Гертлера, и наконец торсионные жгуты (рис. 1.21) [44].

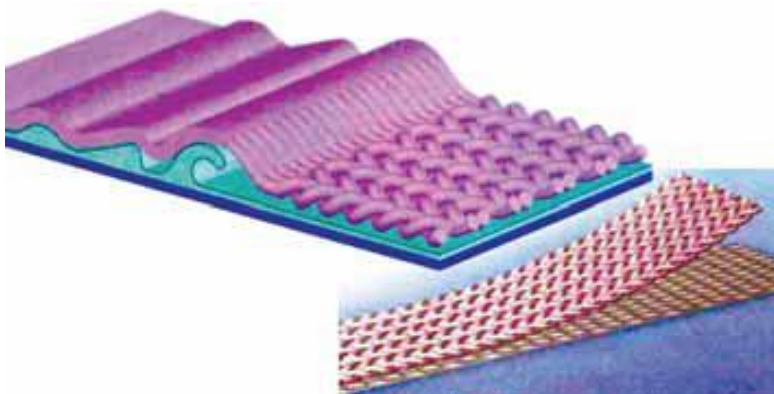


Рис. 1.20. Схема развития турбулентного течения [44]

1.7. Постановка задачи исследования

В ряде случаев реактивные сопла ракетного двигателя деформируются при изготовлении или испытаниях, разгораются и искажаются в процессе эксплуатации таким образом, что на оболочке образуются периодически повторяющиеся впадины и выступы [9 – 21]. В этом случае увеличивается «смоченная» поверхность сопла, что приводит к увеличению трения газа о стенку и росту потерь тяги из-за трения.

Однако при сверхзвуковом обтекании потоком газа поверхности сопла с рельефной структурой могут возникнуть еще и потери тяги из-за волнового сопротивления выступов рельефной поверхности.

Такой вид волнового сопротивления в литературе практически не рассматривается, и данных по нему нет. Только в работах [14 – 17, 23, 31, 32, 35] при анализе природы образования рельефной структуры поверхности у аблирующих материалов авторы подошли близко к теме настоящей работы, что позволяет продолжить и распространить анализ, сделанный в работе [9], на рассматриваемую здесь проблему.

Линеаризованная задача о волновом сопротивлении рельефных пластин, обтекаемых однородным сверхзвуковым потоком, рассматривалась в работе Семенова В.В. [31, 35]. При этом в этих работах ее решение было получено для частных случаев рельефа. Однако формулы, полученные в этих работах, нельзя

использовать для нахождения волнового сопротивления рельефных стенок канала из-за интерференции волн давления, генерируемых и отражаемых его стенками.

Таким образом, задачи настоящей работы являются:

1. Обосновать в рамках линейной теории формулу для аналитической зависимости полных коэффициентов волнового сопротивлений конечных плоских периодических рельефов стенки соплового насадка от их параметров подобия.
2. Строго решить краевую задачу обтекания однородным потоком трехмерных рельефов стенок сопловых насадков, заданных суммами плоских синусоидальных волн. Для нестрогих оценок полных коэффициентов волнового сопротивления конечных ромбических рельефов стенки соплового насадка применить строгие решения, найденные для бесконечных аналогов изучаемых ромбических рельефов.
3. Используя CFD-продукт ANSYS, численно смоделировать эксперименты, в которых путем обдува сжатым воздухом на дифференциальной установке соплового насадка измерена сила волнового сопротивления его стенки с ромбическим рельефом при различных углах ромба.

ГЛАВА II. ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПЛОСКИХ РЕЛЬЕФОВ

Волновые сопротивления рельефных стенок сопловых насадков определяют [25 – 28, 31, 32, 45] в рамках линейной теории путем решения задач их обтекания сверхзвуковым однородным потоком. Однако точные решения линейных задач обтекания плоских рельефов стенок сопловых насадков [25, 26, 28], имеющих конечную длину, но не имеющих боковых кромок, не допускают обобщений на трехмерные рельефы.

Линейные задачи трехмерного обтекания [27, 28] бесконечных рельефов, задаваемых в виде сумм плоских синусоидальных волн [31, 32], решают методом суперпозиции граничных условий и разделения переменных [28, 31, 32]. Однако в нем пренебрегают всеми краевыми эффектами, в связи с чем возникает вопрос, насколько отличаются полные коэффициенты волнового сопротивления бесконечного двоякопериодического рельефа и его конечной части.

Исчерпывающе полный ответ на заданный вопрос, но не в общем, а в частном случае периодических плоских рельефов стенок сопловых насадков обоснован теоретически ниже [49, 50, 52].

2.1. Волновое сопротивление конечных плоских рельефов

Рассмотрим стационарное плоское обтекание сверхзвуковым однородным потоком линейчатой поверхности [46], конечная полоса которой, имеющая длину L , изображена на рис. 2.1.

На нем скорость натекающего потока – \vec{U} параллельна оси x и перпендикулярна образующим линейчатой полосы, некоторые из которых, включая ее переднюю и заднюю кромки, изображены на рис. 2.1 [49, 50] в виде отрезков прямых линий, параллельных оси z . Введем обозначения, с помощью которых запишем все принятые допущения

$$\begin{aligned} p' &= p + \delta p, \quad \rho' = \rho + \delta \rho, \quad u' = U + \delta u, \quad v' = \delta v, \quad w' = \delta w, \quad \delta w = 0, \quad (2.1) \\ \{p, \rho, U, \kappa\} &= const, \quad \Psi = \delta p / \kappa \rho, \quad E = \delta \rho / \rho, \quad \Phi = \delta u / U, \quad \Theta = \delta v / U \end{aligned}$$

Здесь κ – показатель адиабаты газа. Изучаемое поле течения является плоским. В нем возмущения z компоненты скорости – δw равны нулю, а все ненулевые возмущения: давления – δp , плотности – $\delta \rho$ и x, y компонент скорости – $\delta u, \delta v$, созданные рельефом обтекаемой поверхности, не зависят от координаты z и поэтому являются функциями только двух координат x, y .

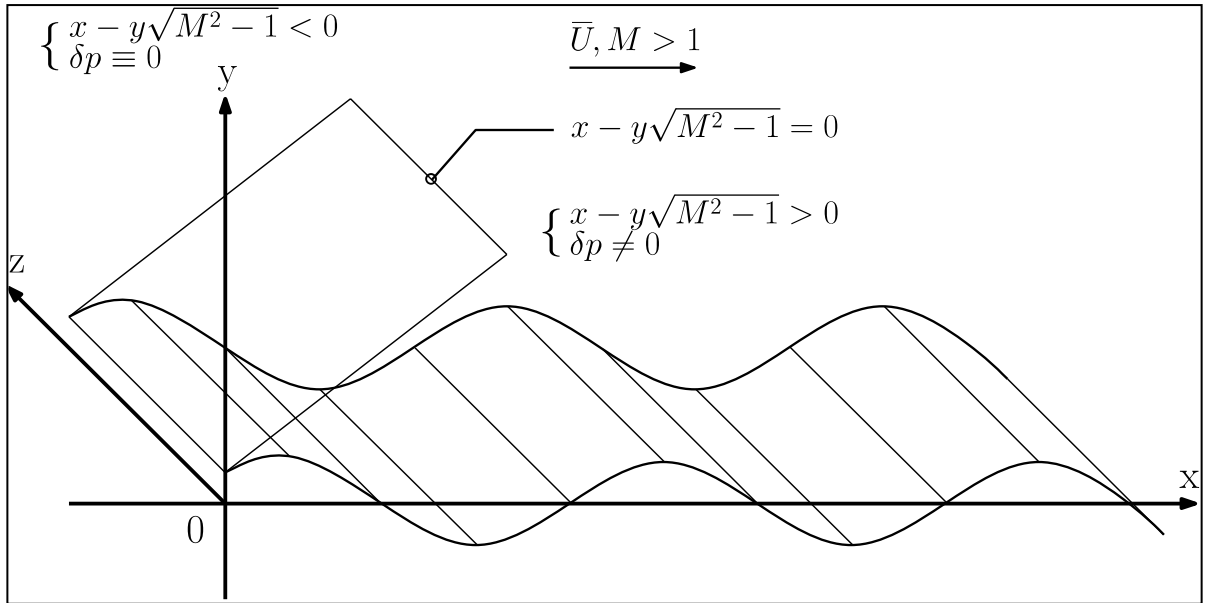


Рис. 2.1. Плоское сверхзвуковое обтекание конечной линейчатой поверхности [49, 50]

Общее уравнение семейства линейчатых поверхностей записывают в виде

$$y_w = \xi(x), \quad x \in [0, L] \quad (2.2)$$

На непрерывную функцию (2.2) и ее производные налагают ограничения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \xi(x + \varepsilon) = \xi(x), \quad |\xi(x)| \ll L, \quad |\xi'(x)| \ll 1, \quad x \in [0, L] \quad (2.3)$$

Если все допущения (2.1) и ограничения (2.3) выполнены, то безразмерные возмущения Ψ, E, Φ, Θ вида (2.1), как правило, являются одновременно малыми [25 – 28, 45]

$$|\Psi| \ll 1, \quad |E| \ll 1, \quad |\Phi| \ll 1, \quad |\Theta| \ll 1 \quad (2.4)$$

Если система неравенств (2.4) выполнена, то в системе уравнений идеальной газовой динамики все те члены, которые являются квадратичными или кубическими относительно возмущений, заведомо малы по сравнению с линейными членами.

Поэтому, оставив во всех уравнениях только линейные члены, получают линеаризованную систему.

Аналогичным способом получают линеаризованное граничное условие безотрывного обтекания поверхности (2.2), которое при этом задают его не на ней самой, а на плоскости $y = 0$ [25–28, 31, 32, 45]

$$\theta|_{y=0} = \xi'(x) \quad (2.5)$$

В работе [27] линеаризованную пару: – систему и граничное условие (2.5), свели к линейной краевой задаче для поля безразмерных возмущений давления $\Psi(x, y)$

$$(M^2 - 1) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{y=0} = -M^2 \xi''(x), \quad x \in [0, L], \quad y \geq 0 \quad (2.6)$$

Здесь M – число Маха натекающего потока $M^2 = \rho U^2 / \kappa p$. В работах [28, 45] ту же самую линеаризованную пару свели к краевой задаче для потенциала $\Pi(x, y)$ возмущений скорости, а поле $\Psi(x, y)$ определили с помощью линейного аналога интеграла Бернулли

$$(M^2 - 1) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} \Big|_{y=0} = U \xi'(x), \\ \Psi \equiv -\frac{M^2}{U} \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad x \in [0, L], \quad y \geq 0 \quad (2.7)$$

В работах [25, 26, 28], используя очевидное условие – отсутствие любых возмущений в натекающем однородном потоке, получили в случае $M > 1$ точные решения краевых задач (2.6) и (2.7), в которых оба поля $\Psi(x, y)$ имеют одинаковый вид

$$\Psi(x, y) = M^2 \xi'(x - y\sqrt{M^2 - 1}) / \sqrt{M^2 - 1}, \quad (2.8) \\ 0 < x - y\sqrt{M^2 - 1} < L, \quad y \geq 0$$

В работах [25 – 26] доказали, что если углы излома контура обтекаемого рельефа во всех точках разрыва его производной $\xi'(x)$ являются малыми, то формула (2.8) остается точной.

Коэффициенты давления – c_p , а также местных – c_{px} и полных – c_{pL} волновых сопротивлений выражают через значения $\Psi_w(x) = \Psi(x, 0)$ с помощью формул

$$\begin{aligned} c_p &= \delta p|_{y=0} / \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right) = 2 \Psi_w(x) / M^2, \\ c_{px} &= c_p \frac{\partial y_w}{\partial x} = 2 \Psi_w(x) \xi'(x) / M^2 \\ c_{pL} &= \frac{1}{L} \int_0^L c_{px} dx = \frac{2}{LM^2} \int_0^L \Psi_w(x) \xi'(x) dx \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подставив решение (2.8) в формулы (2.9), окончательно получают

$$\begin{aligned} c_p &= 2 \xi'(x) / \sqrt{M^2 - 1}, \quad c_{px} = c_p \xi'(x) \rightarrow c_{px} = 2 \xi'^2(x) / \sqrt{M^2 - 1}, \\ c_{pL} &= \frac{2}{L\sqrt{M^2-1}} \int_0^L \xi'^2(x) dx, \quad \overline{\xi'^2}_L = \frac{1}{L} \int_0^L \xi'^2(x) dx \rightarrow c_{pL} = \frac{2}{\sqrt{M^2-1}} \overline{\xi'^2}_L \end{aligned} \quad (2.10)$$

Первую формулу (2.10) получил Аккерет [28]. По аналогии с ней третью и шестую формулы (2.10) называют общей формулой Аккерета, и применяют ее, как для местных – c_{px} , так и для полных – c_{pL} коэффициентов волнового сопротивления всех тех рельефов, у которых имеются средние значения $\overline{\xi'^2}_L$, определенные согласно пятой формуле (2.10).

2.2. Средний квадрат углов наклона периодических плоских рельефов

Нижний индекс у среднего значения $\overline{\xi'^2}_L$ имеет физический смысл: – это длина, по которой усредняют. Поэтому, для того чтобы у бесконечного рельефа имелось конечное среднее значение $\overline{\xi'^2}_\infty$, достаточно существование предела

$$\overline{\xi'^2}_\infty = \lim_{L \rightarrow \infty} \overline{\xi'^2}_L \quad (2.11)$$

Согласно [46] предел (2.11) существует, если функция $\xi'^2(x)$ является периодической наименьшим периодом $\lambda > 0$, а также имеет непрерывную первообразную $E(x)$ вида

$$\xi'^2(x + \lambda) = \xi'^2(x), \quad L/2 > \lambda > 0, \quad \Xi(x) = \int_0^x \xi'^2(x) dx, \quad x \in [0, L] \quad (2.12)$$

Пусть прямоугольные скобки, в которые заключено число, обозначают его целую часть. По определению всякую положительную неправильную дробь можно представить в виде суммы ее целой части и дробной доли. Поэтому имеем

$$L/\lambda = [m] + m - [m], \quad k_m = m - [m] \rightarrow 0 \leq k_m < 1, \quad m = [m] + k_m \quad (2.13)$$

$$L = [m]\lambda + k_m\lambda \rightarrow \int_0^L \xi'^2(x) dx = \int_0^{[m]\lambda} \xi'^2(x) dx + \int_{[m]\lambda}^{[m]\lambda + k_m\lambda} \xi'^2(x) dx \quad (2.14)$$

Используя периодичность функции $\xi'^2(x)$, изменим пределы интегрирования в третьем интеграле (2.14), а первый и второй интегралы выразим через средние значения $\overline{\xi'^2}_L$ и $\overline{\xi'^2}_\lambda$, соответственно, после чего получим

$$\begin{aligned} L\overline{\xi'^2}_L &= [m]\lambda\overline{\xi'^2}_\lambda + \int_0^{k_m\lambda} \xi'^2(x) dx \rightarrow L\overline{\xi'^2}_L/\lambda\overline{\xi'^2}_\lambda = [m] + k_I, \\ 0 \leq k_I = \frac{\Xi(k_m\lambda)}{\Xi(\lambda)} < 1 &\rightarrow \overline{\xi'^2}_L = \frac{[m] + k_I}{m} \overline{\xi'^2}_\lambda = \overline{\xi'^2}_\lambda \left(1 + \frac{k_I - k_m}{m}\right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Переходя к пределу $m \rightarrow \infty$ в последней формуле (2.15), в итоге получим

$$\overline{\xi'^2}_\infty = \lim_{L \rightarrow \infty} \overline{\xi'^2}_L = \overline{\xi'^2}_\lambda \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k_I - k_m}{m}\right) \right] = \overline{\xi'^2}_\lambda \quad (2.16)$$

Из приведенных выше формул (2.10 – 2.16) и выкладок следует, что замкнутая цепочка формул для расчета полного коэффициента волнового сопротивления конечного периодического рельефа типа (2.2, 2.12) имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{\xi'^2}_\lambda &= \Xi(\lambda)/\lambda, \quad c_{p\infty} = 2\overline{\xi'^2}_\lambda/\sqrt{M^2 - 1}, \quad m = L/\lambda, \quad k_m = m - [m], \\ k_I &= \Xi(k_m\lambda)/\Xi(\lambda), \quad D = k_I - k_m, \quad c_{pL} = c_{p\infty}(1 + D/m) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Из формул (2.17) следует, что у всякого рельефа типа (2.2, 2.12) может реализоваться один из трех взаимоисключающих случаев:

$$\begin{aligned} &\text{либо} \{k_m = 0 \rightarrow k_I = 0 \rightarrow D = 0 \rightarrow c_{pL} = c_{p\infty}\}, \\ &\text{либо} \{k_m \neq 0, k_I = k_m \rightarrow D = 0 \rightarrow c_{pL} = c_{p\infty}\}, \\ &\text{либо} \{k_m \neq 0, k_I \neq k_m \rightarrow D \neq 0 \rightarrow c_{pL} \neq c_{p\infty}\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Согласно (2.18) равенство $D = 0$ имеет место, не только при любых целых, но и при некоторых дробных значениях числа m , а неравенство $D \neq 0$ – только при дробных m . Поэтому параметр D можно назвать дефектом «дробных» периодических рельефов [49, 50].

2.3. Особые плоские рельефы и их уникальные свойства

Рельефы (2.2, 2.12), у которых при любых значениях $m \in (0, \infty)$ дефект $D \equiv 0$, назовем особыми. Согласно (2.18) при любом $k_m \in [0,1]$ у периодических особых плоских рельефов должно выполняться равенство $k_I \equiv k_m \rightarrow \mathcal{E}(k_m\lambda)/\mathcal{E}(\lambda) \equiv k_m$. Дифференцируя его по параметру k_m и используя формулы (2.12) и (2.17), в итоге окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk_m} \frac{\mathcal{E}(k_m\lambda)}{\mathcal{E}(\lambda)} &\equiv \frac{\lambda \xi'^2(k_m\lambda)}{\mathcal{E}(\lambda)} \equiv \frac{\xi'^2(k_m\lambda)}{\overline{\xi'^2}_\lambda} \equiv 1 \rightarrow \\ \rightarrow \xi'^2(k_m\lambda) &\equiv \overline{\xi'^2}_\lambda, \quad k_m \in [0,1] \end{aligned} \quad (2.19)$$

Равенство (2.19) выполняется у тех периодических кусочно-гладких рельефов (2.2, 2.12), у которых их функция $\xi(x)$ и ее производная $\xi'(x)$ являются периодическими, а квадрат производной $\xi'^2(x)$ всюду, где она определена, равен общей константе $\xi'^2(x) \equiv \overline{\xi'^2}_\lambda$ всего рельефа. Рельефы, у которых свойство периодичности производной $\xi'(x)$ вырождается при возведении ее в квадрат, являются периодическими особыми рельефами (2.2, 2.12). Особыми рельефами общего вида являются такие кусочно-гладкие рельефы (2.2, 2.12), у которых квадрат их производной всюду, где он определен, равен константе $\xi'^2(x) \equiv \overline{\xi'^2}$.

Все особые рельефы имеют общие уникальные свойства, описанные ниже.

У всякого особого рельефа его кусочно-постоянная производная $\xi'(x)$ принимает пару значений, которые отличаются только знаком. Всякая такая функция $\xi'(x)$ меняет знак в каждой своей точке разрыва. Поэтому непрерывная функция $\xi(x)$ имеет в каждой такой точке локальный экстремум. При этом максимумы и минимумы функции $\xi(x)$, также как и знаки ее производной $\xi'(x)$, перемежаются. Поэтому график функции $\xi(x)$ является ломаной линией,

состоящей из отрезков прямых, соединяющих пары соседних экстремумов, в которых углы излома графика равны по модулю и отличаются знаком.

У всех особых рельефов их первообразная $E(x)$ типа (2.12) имеет вид

$$E(x) = \int_0^x \xi'^2(x) dx = x \overline{\xi'^2}, \quad x \in [0, L] \quad (2.20)$$

Для конечной части всякого бесконечного особого рельефа типа (2.2, 2.12), как периодического, так и общего вида, в любом случае согласно (2.20) всегда имеем

$$\overline{\xi'^2}_L = \overline{\xi'^2}, \quad L \in (0, \infty) \rightarrow \overline{\xi'^2}_\infty = \lim_{L \rightarrow \infty} \overline{\xi'^2}_L = \overline{\xi'^2} \rightarrow D = 0 \quad (2.21)$$

Вышеописанные свойства особых рельефов наглядно иллюстрирует рис. 2.2 [50, 52], где представлены графики функций $\xi(x)$ и $\xi'(x)$ трех особых рельефов, которые не являются геометрически подобными, но имеют одинаковые значения $\overline{\xi'^2} = 0,01$.

Всякий плоский рельеф является либо обычным, либо особым. У особых рельефов дефект $D = 0$ по определению. Ниже покажем, что у обычных периодических рельефов равенство $D = 0$ выполняется не только при любых целых, но еще и при некоторых дробных числах m , а неравенство $D \neq 0$ выполняется только при дробных волновых числах m .

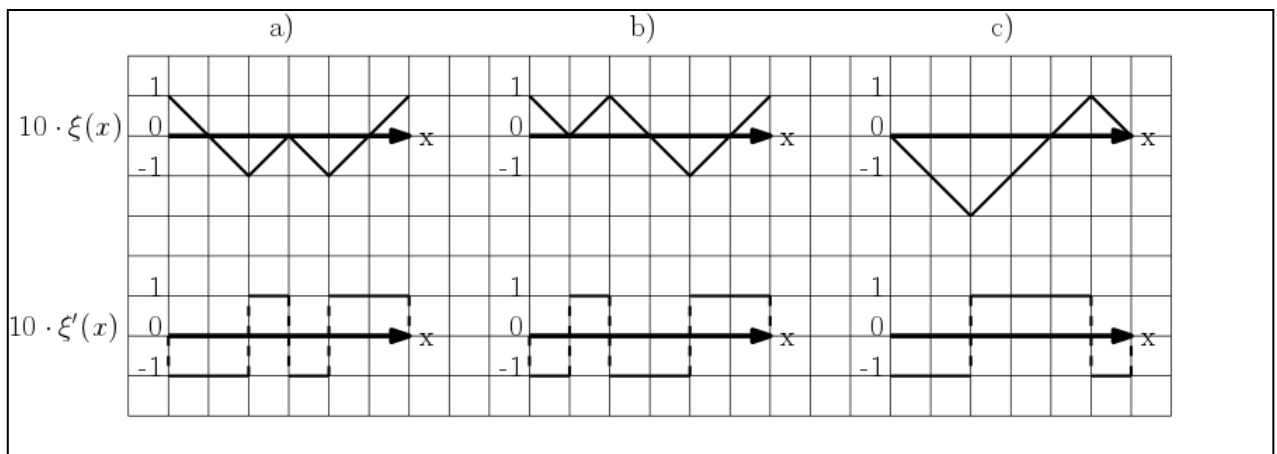


Рис. 2.2. Особые периодические плоские рельефы $\overline{\xi'^2} = 0,01, \lambda = 6l$ [50, 52]

2.4. Параметры подобия конечных периодических плоских рельефов

Общее уравнение семейства периодических плоских рельефов запишем в

виде

$$\begin{aligned} y_w = \xi(x) &= AF(\tilde{\varphi}(x)), \quad \tilde{\varphi}(x) = \tau x/\lambda + \varphi, \quad x \in [0, L] \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\tilde{\varphi} + \varepsilon) &= F(\tilde{\varphi}), \quad F'^2(\tilde{\varphi} + \tau) = F'^2(\tilde{\varphi}), \quad \tilde{\varphi} \in [-\infty, \infty] \end{aligned} \quad (2.22)$$

Здесь $F(\tilde{\varphi})$ – безразмерная периодическая функция, $\tilde{\varphi}$ – ее безразмерный аргумент, называемый фазой, A – размерный множитель, называемый амплитудой, τ – наименьший период квадрата производной $F'^2(\tilde{\varphi})$, λ – наименьшая длина волны функции $F'^2(\tilde{\varphi}(x))$, $\varphi \in [0, \tau)$ – начальная фаза, т. е. значение фазы $\tilde{\varphi}$ на передней кромке рельефа, где $x = 0$.

Два рельефа вида (2.22) являются геометрически подобными только в том случае, если выполняется система равенств

$$\begin{aligned} \alpha &= A_1/\lambda_1 = A_2/\lambda_2, \quad m = L_1/\lambda_1 = L_2/\lambda_2 \\ \varphi &= \varphi_1 = \varphi_2, \quad \tau = \tau_1 = \tau_2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Из общей теории подобия следует, что в случае рельефов (2.22) безразмерные параметры $\overline{\xi'^2}_L$ и D вида (2.17) зависят только от параметров подобия – α , τ , m , φ (2.23). Для того чтобы напрямую доказать это, подставим формулы (2.22) в определение первообразной (2.12) и, выполнив требуемые действия, получим

$$\xi'(x) = (A\tau/\lambda)F'(\tau x/\lambda + \varphi), \quad x \in [0, L] \quad (2.24)$$

$$\Xi(x) = \int_0^x \xi'^2(x)dx = (A\tau/\lambda)^2 \int_0^x F'^2(\tau x/\lambda + \varphi)dx, \quad \tau x/\lambda + \varphi = \tilde{\varphi},$$

$$\tau dx/\lambda = d\tilde{\varphi} \rightarrow \Xi(x) = (\tau A^2/\lambda) \int_{\varphi}^{\varphi+\tau x/\lambda} F'^2(\tilde{\varphi})d\tilde{\varphi}, \quad x \in [0, L] \quad (2.25)$$

Подставив последнее равенство (2.25) в формулы (2.17), в итоге получим

$$\overline{\xi'^2}_\lambda = \Xi(\lambda)/\lambda = \tau A^2/\lambda^2 \int_{\varphi}^{\varphi+\tau} F'^2(\tilde{\varphi})d\tilde{\varphi} = \tau^2 \alpha^2 \overline{F'^2}_\tau, \quad (2.26)$$

$$\overline{F'^2}_\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau F'^2(\tilde{\varphi})d\tilde{\varphi}$$

$$D = \frac{\Xi(k_m\lambda)}{\Xi(\lambda)} - k_m = \frac{1}{\tau \overline{F'^2}_\tau} \int_{\varphi}^{\varphi+\tau k_m} F'^2(\tilde{\varphi})d\tilde{\varphi} - k_m \quad (2.27)$$

Согласно (2.26) средний квадрат $\overline{F'_\tau{}^2}$ зависит только от значения τ . При этом согласно (2.26, 2.27) средний квадрат $\overline{\xi'^2}_\lambda$ всякого конечного рельефа вида (2.22) зависит только от значений α и τ , а его дефект D – только от значений τ, k_m, φ .

С помощью (2.26) преобразуем правую часть (2.27) к эквивалентному виду

$$D = \frac{1}{\tau \overline{F'_\tau{}^2}} \int_\varphi^{\varphi + \tau k_m} (F'^2(\tilde{\varphi}) - \overline{F'_\tau{}^2}) d\tilde{\varphi} = D_\tau(k_m, \varphi), \quad (k_m, \varphi) \in R_\tau$$

$$\{(k_m, \varphi) \in R_\tau\} \ni \{k_m \in [0, 1] \cap \varphi \in [0, \tau]\} \quad (2.28)$$

Согласно (2.28) рельеф (2.22) является особым, если всюду, где его производная $F'(\tilde{\varphi})$ определена, выполняется равенство, аналогичное (2.19) и имеющее вид

$$F'^2(\tilde{\varphi}) \equiv \overline{F'_\tau{}^2} \equiv \overline{F'^2} \quad (2.29)$$

Отображение (2.22) оси x на ось фазы $\tilde{\varphi}$ является линейным, и поэтому обратимым $x \leftrightarrow \tilde{\varphi}$. Следовательно, у особых рельефов (2.22) функции $F(\tilde{\varphi}), F'(\tilde{\varphi})$ обладают теми же уникальными свойствами, что и функции $\xi(x), \xi'(x)$ у особых рельефов (2.2, 2.12). Согласно (2.26) в случае особых периодических рельефов (2.22) имеем $\overline{\xi'^2} = (\tau\alpha)^2 \overline{F'^2}$. В случае особых непериодических, но конечных рельефов (2.22), их период τ и длина волны λ в отображении (2.22) не определены. Следовательно, для них нельзя напрямую применить формулу (2.26). Однако если в ней положить $\lambda = L, \tau = 1$, то это уже можно сделать.

2.5. Дефект периодических плоских рельефов

Согласно определениям (2.26 – 2.28) дефект периодического плоского рельефа (2.22) не зависит от целой части его волнового числа $[m]$. Так как у всех рельефов (2.22) с одинаковой функцией $F(\tilde{\varphi})$ значение τ фиксировано, то зависимость их дефектов от дробной части их волновых чисел – k_m и от их начальной фазы – φ описывается функцией $D_\tau(k_m, \varphi)$ вида (2.28), которая определена и непрерывна в замкнутой области $(k_m, \varphi) \in R_\tau$, в которой она достигает свои экстремальные значения.

Пусть $D_{\tau, \max}$ и $D_{\tau, \min}$ – максимальное и минимальное значения функции вида (2.28) $D_{\tau}(k_m, \varphi)$ в ее области определения $(k_m, \varphi) \in R_{\tau}$. Тогда согласно последней формуле (2.17) заведомо выполняются два двухсторонних неравенства вида

$$D_{\tau, \min} \leq D_{\tau}(k_m, \varphi) \leq D_{\tau, \max} \rightarrow$$

$$c_{p\infty}(1 + D_{\tau, \min}/m) \leq c_{pL} \leq c_{p\infty}(1 + D_{\tau, \max}/m) \quad (2.30)$$

Согласно последней формуле (2.17) в паре неравенств (2.30) нижнее является очевидным следствием верхнего. Поэтому сама пара неравенств (2.30) в свою очередь является исчерпывающе полным ответом на вопрос, заданный во введении.

Ниже для часто встречающихся гладких и кусочно-гладких периодических плоских рельефов (2.22) изучены именно те свойства функции $D_{\tau}(k_m, \varphi)$, используя которых, обычно, находят ее экстремальные значения $D_{\tau, \max}$ и $D_{\tau, \min}$.

В точках излома контура кусочно-гладкого рельефа (2.22) подынтегральная функция (2.28) имеет разрывы на интервале интегрирования (2.28). Несмотря на это, сам интеграл (2.28) является непрерывной функцией $D_{\tau}(k_m, \varphi)$ всех своих переменных, которая при любых значениях $\tau > 0$ и $\varphi \in [0, \tau)$ и при фиксированном $k_m = 1$ принимает значение 0

$$D_{\tau}(1, \varphi) = \lim_{k_m \rightarrow 1} D_{\tau}(k_m, \varphi) = \frac{1}{\tau \overline{F_{\tau}'^2}} \int_{\varphi}^{\varphi + \tau} (F'^2(\tilde{\varphi}) - \overline{F_{\tau}'^2}) d\tilde{\varphi} = 0 \quad (2.31)$$

Из равенства (2.31) следует, что при любых $\tau > 0$ и $\varphi \in [0, \tau)$ разность $F'^2(\tilde{\varphi}) - \overline{F_{\tau}'^2}$ неизбежно должна изменять знак на интервале $\tilde{\varphi} \in [\varphi, \varphi + \tau]$.

В случае гладких рельефов вида (2.22) согласно известной [46] теореме о среднем значении $\overline{F_{\tau}'^2}$ непрерывной функции $F'^2(\tilde{\varphi})$ существуют одно или более значений $\tilde{\varphi}_i \in (\varphi, \varphi + \tau)$, при которых разность $F'^2(\tilde{\varphi}) - \overline{F_{\tau}'^2}$ изменяет знак [46].

В случае кусочно-гладких рельефов типа (2.22) разность $F'^2(\tilde{\varphi}) - \overline{F_{\tau}'^2}$ изменяет знак либо в точках $\tilde{\varphi}_i$, где выполняются равенство и неравенство вида

$$F'^2(\tilde{\varphi}_i) = \overline{F_{\tau}'^2}, \quad F''(\tilde{\varphi}_i) \neq 0, \quad \tilde{\varphi}_i \in (\varphi, \varphi + \tau) \quad (2.32)$$

либо в тех точках $\tilde{\varphi}_{di}$ разрыва функции $F'^2(\tilde{\varphi})$, в которых один односторонний

предел функции $F'^2(\tilde{\varphi})$ больше, а другой меньше ее среднего значения $\overline{F'^2}$. Поэтому в точках разрыва $\tilde{\varphi}_{di}$ должен выполняться один из двух возможных вариантов

$$\overline{F'^2} \leq \lim_{\tilde{\varphi} \rightarrow \tilde{\varphi}_{di}+0} F'^2(\tilde{\varphi}) \neq \lim_{\tilde{\varphi} \rightarrow \tilde{\varphi}_{di}-0} F'^2(\tilde{\varphi}) \leq \overline{F'^2}, \quad \tilde{\varphi}_{di} \in (\varphi, \varphi + \tau) \quad (2.33)$$

В обоих случаях на интервале $k_m \in [0, 1)$ имеются значения $k_{mi} = (\tilde{\varphi}_i - \varphi)/\tau$, и/или $k_{mi} = (\tilde{\varphi}_{di} - \varphi)/\tau$ при которых разность $F'^2(\tilde{\varphi}) - \overline{F'^2}$ изменяет знак.

Продифференцировав равенство (2.28) по параметру k_m , в итоге получим

$$\frac{\partial}{\partial k_m} D_\tau(k_m, \varphi) = \frac{F'^2(\varphi + \tau k_m) - \overline{F'^2}}{F'^2} \quad (2.34)$$

Согласно (2.32) – (2.33) правая часть (2.34) изменяет знак в точках k_{mi} , из чего следует, что при фиксированных значениях τ, φ в точках $k_m = k_{mi}$ достигаются экстремальные значения дефекта $D_\tau(k_{mi}, \varphi)$.

Продифференцировав равенство (2.28) по параметру φ , в итоге получим

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} D_\tau(k_m, \varphi) = \frac{F'^2(\varphi + \tau k_m) - F'^2(\varphi)}{\tau \overline{F'^2}} \quad (2.35)$$

У обычных кусочно-гладких рельефов их правая часть (2.35), может быть, как разрывной, так и непрерывной функцией параметров τ, k_m , но в любом случае она не равна нулю всюду в своей области определения $(k_m, \varphi) \in R_\tau$.

Следовательно, у обычных периодических рельефов (2.22) дефект D_τ зависит, как от дробной части k_m их волнового числа m , так и от параметра подобия φ , т. е. от значения фазы, задаваемого на передней кромке обтекаемого рельефа (2.22). На рис. 2.3 – 2.4 [50, 52] представлены графики, которые на примере конкретных дробных рельефов типа (2.22) наглядно иллюстрируют двухпараметрическую зависимость дефекта $D_\tau(k_m, \varphi)$ от параметров k_m, φ при фиксированном значении τ .

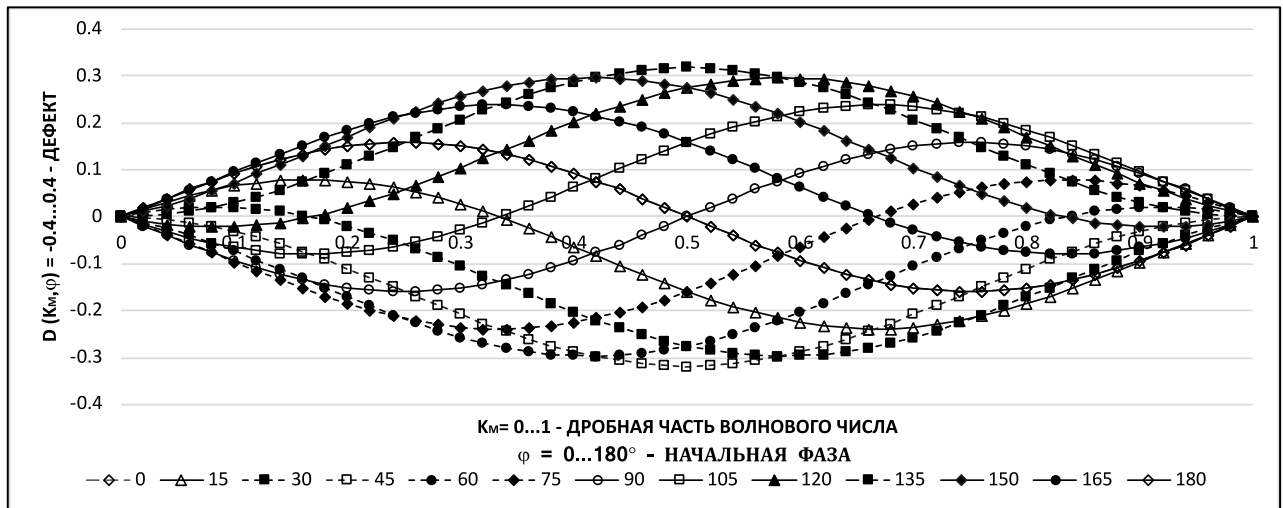


Рис. 2.3. Параметрическое семейство графиков $D = D_{\pi}(k_m, \varphi)$ [50, 52]

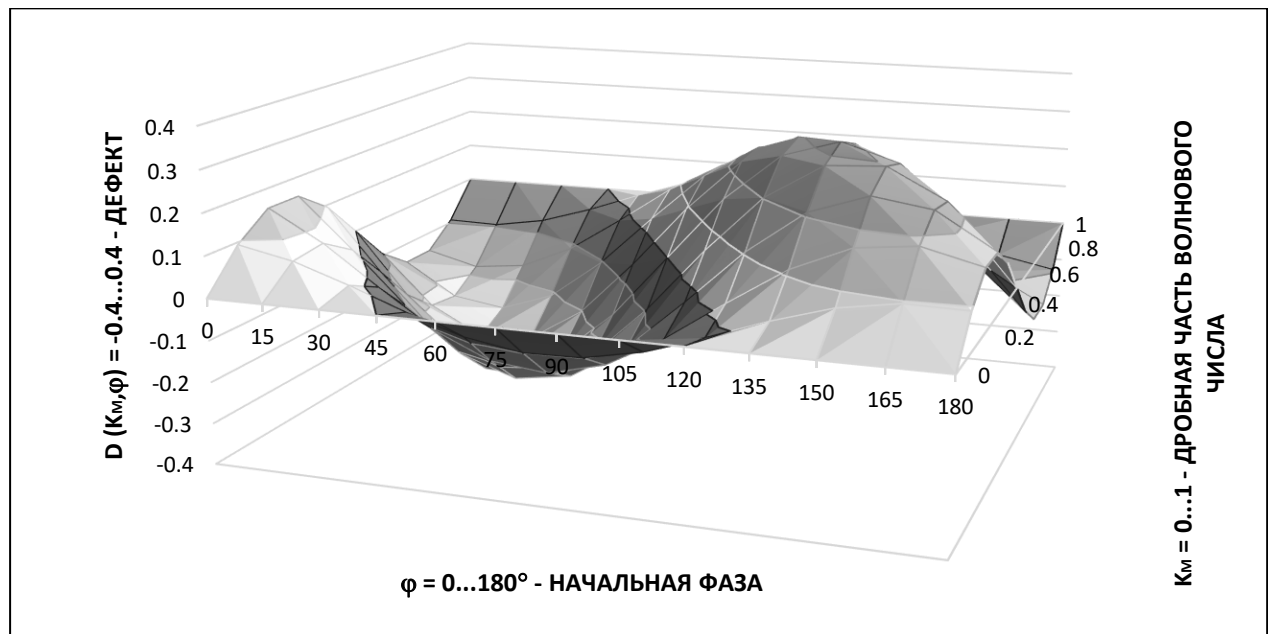


Рис. 2.4. Трехмерная поверхность двухпараметрической зависимости $D = D_{\pi}(k_m, \varphi)$ [50, 52]

2.6. Дефект синусоидальных плоских рельефов

Общее уравнение семейства синусоидальных плоских рельефов имеет вид

$$\xi(x) = A \sin \tilde{\varphi}(x), \quad \tilde{\varphi}(x) = \tau x / \lambda + \varphi, \quad x \in [0, L] \quad (2.36)$$

$$\xi'^2(x) = (A\tau/\lambda)^2 \cos^2 \tilde{\varphi}(x), \quad x \in [0, L] \quad (2.37)$$

Поскольку $\cos^2 \tilde{\varphi} = \cos^2(\tilde{\varphi} + \pi)$, то $\tau = \pi$, $\varphi \in [0, \pi]$ и в итоге получим

$$\begin{aligned}\Xi(x) &= \frac{\pi A^2}{\lambda} \int_{\varphi}^{\varphi+\pi x/\lambda} \cos^2 \tilde{\varphi} d\tilde{\varphi} = \\ &= \frac{\pi^2 A^2}{2\lambda} \left[\frac{x}{\lambda} + \frac{\sin(\pi x/\lambda) \cos(2\varphi+\pi x/\lambda)}{\pi} \right], \quad x \in [0, L]\end{aligned}\quad (2.38)$$

$$\overline{\xi'^2} \lambda = \frac{\Xi(\lambda)}{\lambda} = \frac{\pi^2 A^2}{2\lambda^2},$$

$$\Xi(k_m \lambda) = \frac{\pi^2 A^2}{2\lambda} \left[k_m + \frac{\sin(\pi k_m) \cos(2\varphi+\pi k_m)}{\pi} \right] \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned}D_{\pi}(k_m, \varphi) &= \frac{\Xi(k_m \lambda)}{\Xi(\lambda)} - k_m = \frac{\sin(2\varphi+2\pi k_m) - \sin(2\varphi)}{2\pi} = \\ &= \frac{\sin(\pi k_m) \cos(2\varphi+\pi k_m)}{\pi}\end{aligned}\quad (2.40)$$

Согласно (2.40) в области $(k_m, \varphi) \in R_{\pi}$ имеются три отрезка прямых $0 \leq 2\varphi + \pi k_m = \text{const} \leq 3\pi$, на которых выполняется равенство $D_{\pi}(k_m, \varphi) = 0$

$$D = 0 \rightarrow \cos(2\varphi + \pi k_m) = 0 \rightarrow 2\varphi + \pi k_m = \pi/2 + \pi n, \quad n = 0, 1, 2 \quad (2.41)$$

Согласно (2.40) в области $(k_m, \varphi) \in R_{\pi}$ одновременно выполняются два двухсторонних неравенства для функции $D_{\pi}(k_m, \varphi)$

$$D_{\pi, \min}(\varphi) = \frac{-1 - \sin(2\varphi)}{2\pi} \leq D_{\pi}(k_m, \varphi) \leq \frac{1 - \sin(2\varphi)}{2\pi} = D_{\pi, \max}(\varphi) \quad (2.42)$$

$$D_{\pi, \min}(k_m) = -\frac{\sin(\pi k_m)}{\pi} \leq D_{\pi}(k_m, \varphi) \leq \frac{\sin(\pi k_m)}{\pi} = D_{\pi, \max}(k_m) \quad (2.43)$$

Равенства (2.42) выполняются на четырех отрезках в области $(k_m, \varphi) \in R_{\pi}$

$$D = D_{\pi, \min}(\varphi) \rightarrow \sin 2(\varphi + \pi k_m) = -1 \rightarrow 2\varphi + 2\pi k_m = \pi/2 + \pi n,$$

$$n = 1, 3 \quad (2.44)$$

$$D = D_{\pi, \max}(\varphi) \rightarrow \sin 2(\varphi + \pi k_m) = 1 \rightarrow 2\varphi + 2\pi k_m = \pi/2 + \pi n,$$

$$n = 0, 2 \quad (2.45)$$

Равенства (2.43) выполняются на двух отрезках в области $(k_m, \varphi) \in R_{\pi}$

$$D = D_{\pi, \min}(k_m) \rightarrow \cos(2\varphi + \pi k_m) = -1 \rightarrow 2\varphi + \pi k_m = \pi \quad (2.46)$$

$$D = D_{\pi, \max}(k_m) \rightarrow \cos(2\varphi + \pi k_m) = 1 \rightarrow 2\varphi + \pi k_m = 2\pi \quad (2.47)$$

Продифференцировав третье равенство (2.40) по параметру k_m , получим

$$\frac{\partial}{\partial k_m} D_{\pi}(k_m, \varphi) = \cos(2\varphi + 2\pi k_m) \quad (2.48)$$

Согласно (2.40, 2.48) на всех отрезках (2.44, 2.45) выполняется условие $\partial D / \partial k_m = 0$.

Продифференцировав четвертое равенство (40) по параметру φ , получим

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} D_{\pi}(k_m, \varphi) = -\frac{2\sin(\pi k_m)}{\pi} \sin(2\varphi + \pi k_m) \quad (2.49)$$

Согласно (2.40, 2.49) на обоих отрезках (2.46, 2.47) выполняется условие $\partial D / \partial \varphi = 0$.

Для наглядной иллюстрации двухпараметрической зависимости $D_{\pi}(k_m, \varphi)$ в случае синусоидальных рельефов (2.36) на рис. 2.3 представлено параметрическое семейство графиков $D = D_{\pi}(k_m, \varphi_i)$ для 13-ти фиксированных значений начальной фазы $\varphi_i = 15^\circ i$, $i = 0, 1, \dots, 12$, образующих дискретную сетку с равномерным шагом 15° в области значений $\varphi \in [0^\circ, 180^\circ]$.

2.7. Выводы по главе

Конечный периодический плоский рельеф с дробным значением волнового числа имеет один неполный период. Его вклад в силу волнового сопротивления данного рельефа меньше, чем вклад полного периода. Однако, как показано в данной главе, вклад того же неполного периода в полный коэффициент волнового сопротивления рельефа может быть, как отрицательным, так и положительным.

Наиболее значимым приложением результатов данной главы являются аналитические формулы, которые описывают зависимость полных коэффициентов волнового сопротивления конечных периодических плоских рельефов стенок сопловых насадков от параметров их подобия. Данные формулы являются

теоретической основой для создания прецизионных эталонов волновых сопротивлений, которые можно применять для тарировки и градуировки методов измерения тяг малых сопел в ходе их испытаний на инновационных дифференциальных установках.

В данной главе использовали линейную теорию плоских течений, которую давно успешно применяют для решения многих важных задач прикладной аэродинамики [25 – 28, 31, 32, 45, 49, 50, 52]. Поэтому в настоящее время ее предсказательная способность уже не вызывает сомнений. Тем не менее, экспериментальная проверка результатов данной главе желательна для определения границ применимости указанной теории в рассмотренном классе задач.

ГЛАВА III. КРИТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ПОТОКОМ ГАЗА РОМБИЧЕСКИХ РЕЛЬЕФОВ

Использование в двигателях первых ступеней ракет-носителей двухконтурных сопел, состоящих из земного круглого сопла и высотного круглого насадка, открывает дополнительные возможности для улучшения тяговых характеристик ракет-носителей [1, 2].

При штатной работе ракетного двигателя с двухконтурным соплом неизбежно наступает режим обтекания высотного насадка сверхзвуковым потоком продуктов сгорания с высокой энтальпией торможения [1, 2]. При этом, если обтекаемые стенки насадка сделаны из композитного материала, то после превышения предела его термостойкости начинается абляция, при которой на композитных стенках образуются структуры перемежающихся выступов и впадин, похожие на ромбические рельефы [31, 32, 35].

После появления ромбического рельефа на изначально гладких стенках высотного соплового насадка, его вклад в тягу двигателя уменьшается на величину, равную величине силы волнового сопротивления его рельефных стенок. В ходе абляции высоты выступов и глубины впадин, а с ними и потери тяги за счет волнового сопротивления рельефных стенок продолжают возрастать. Из сказанного следует актуальность детального изучения сверхзвукового обтекания газовым потоком стенок соплового насадка с ромбическим рельефом [1, 2, 31, 32, 35].

Локальные максимумы на дискретной зависимости измеренных в работе [31, 35] сил волнового сопротивления ромбических рельефов стенки соплового насадка от угла ромба их рельефов автор объяснил наличием критических углов у бесконечных ромбических рельефов, которых отличались по своим геометрическим свойствам от испытанных в его экспериментах. Поэтому корреляция, предложенная в работе [31, 35], требует уточнений, которые обсуждаются в данной главе.

В работах [25, 26, 28] строго доказали, что точные решения линейных краевых задач [27] сверхзвукового обтекания всех плоских рельефов обязаны

удовлетворять спец-условию отсутствия возмущений в натекающем потоке. Однако в работах [31, 32, 35] решения частных краевых задач [27] сверхзвукового обтекания плоских синусоидальных волн находили с помощью стандартного метода разделения переменных [46], в котором указанное спец-условие никак не учитывали. Поэтому в данной работе математически строго доказали, что решения линейных краевых задач [27] сверхзвукового обтекания рельефов, заданных суммами плоских синусоидальных волн, являются суммами автомодельных частных решений, у которых, в отличие от частных решений [31, 32, 35], все сверхзвуковые ветви удовлетворяют спец-условию отсутствия возмущений в натекающем потоке [51, 53].

Другая цель данной главы – применение строгих решений для объяснения вида экспериментальной зависимости волновых сопротивлений ромбических рельефов стенки соплового насадка от их углов ромба, измеренной на прецизионной дифференциальной установке [31, 35].

3.1. Обозначения, допущения и краевые задачи линейной теории

Кратко изложим линейную теорию трехмерных стационарных задач обтекания однородным потоком рельефных поверхностей, общее уравнение которых имеет вид

$$y_w = \xi(x, z) \quad (3.1)$$

На непрерывную функцию (3.1) и ее частные производные налагают ограничения

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_z^2 \rightarrow 0} \xi(x + \varepsilon_x, z + \varepsilon_z) &= \xi(x, z), \\ |\xi(x, z)| &\ll h, \quad |\xi'_x(x, z)| \ll 1, \quad |\xi'_z(x, z)| \ll 1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь x, y, z – декартовы координаты. Их ось x параллельна натекающему потоку и совпадает с ним по направлению, а их ось y выбрана так, чтобы рельеф обтекаемой поверхности (3.1, 3.2) являлся малым возмущением ее базовой плоскости $y = 0$, на которой поэтому почти всюду одновременно выполняются все три неравенства (3.2).

Введем обозначения, с помощью которых запишем прочие принятые допущения

$$\{p, \rho, U, \kappa\} = \text{const}, \quad \tilde{p} = p + \delta p, \quad \tilde{\rho} = \rho + \delta \rho, \quad \tilde{u} = U + \delta u, \quad \tilde{v} = \delta v, \quad \tilde{w} = \delta w \quad (3.3)$$

Здесь p, ρ, U, κ – давление, плотность, модуль скорости и показатель адиабаты газа в натекающем однородном потоке; $\tilde{p}, \tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ – параметры поля обтекания рельефной поверхности (3.1, 3.2), которые удовлетворяют системе нелинейных уравнений идеальной газовой динамики; $\delta p, \delta \rho, \delta u, \delta v, \delta w$ – возмущения, которые обычно выражают через их безразмерные аналоги $\Psi, E, \Phi, \Theta, \Omega \rightarrow \delta p, \delta \rho, \delta u, \delta v, \delta w$ по формулам

$$\delta p = \Psi \kappa p, \quad \delta \rho = E \rho, \quad \delta u = \Phi U, \quad \delta v = \Theta U, \quad \delta w = \Omega U \quad (3.4)$$

В линейной теории предполагают [25 – 28, 45], что если ограничения (3.2) и допущения (3.3) выполнены, то безразмерные возмущения $\Psi, E, \Phi, \Theta, \Omega$ одновременно малы

$$|\Psi| \ll 1, \quad |E| \ll 1, \quad |\Phi| \ll 1, \quad |\Theta| \ll 1, \quad |\Omega| \ll 1 \quad (3.5)$$

Подставив возмущения (3.4) в левые части уравнений идеальной газовой динамики, получают в них суммы членов, являющихся кубическими, квадратичными или линейными относительно безразмерных возмущений. Если система неравенств (3.5) выполняется, то каждый нелинейный член много меньше любого линейного. Тогда, оставив во всех уравнениях только линейные члены, получают систему их линейных аналогов вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0, & \quad M^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \\ M^2 \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, & \quad M^2 \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Первый линейный аналог (3.6) – это баротропное уравнение неразрывности, а три последних – это проекции векторного уравнения движения на оси x, y, z .

Линейный аналог граничного условия безотрывного обтекания поверхности (3.1, 3.2) задают не на ней, а на ее базовой плоскости $y = 0$, на которой он имеет вид [25 – 28, 31, 32 35, 45]

$$\Theta|_{y=0} = \xi'_x(x, z) \quad (3.7)$$

В работе [27] систему (3.6) с граничным условием (3.7) свели к линейной краевой задаче Д.И. Блохинцева для поля безразмерных возмущений давления $\Psi(x, y, z)$

$$\Theta|_{y=0} = \frac{\partial \xi(x, z)}{\partial x}, \quad M^2 \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{y=0} = -M^2 \frac{\partial^2 \xi(x, z)}{\partial x^2}, \quad (3.8)$$

$$M^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (3.9)$$

В работах [28, 45] систему (3.6) с граничным условием (3.7) свели к линейной краевой задаче для потенциала вектора возмущений скорости $\Pi(x, y, z)$, а поле $\Psi(x, y, z)$ нашли, используя линейный аналог интеграла Бернулли $U\Psi + M^2 \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0$

$$\Theta|_{y=0} = \frac{\partial \xi(x, z)}{\partial x}, \quad \Theta U = \frac{\partial \Pi}{\partial y} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} \Big|_{y=0} = U \frac{\partial \xi(x, z)}{\partial x}, \quad (3.10)$$

$$M^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}, \quad \Psi = -M^2 / U \frac{\partial \Pi}{\partial x} \quad (3.11)$$

Здесь M – число Маха натекающего потока $M^2 = \rho U^2 / \kappa \rho$. Обе краевые задачи (3.8, 3.9) и (3.10, 3.11) являются эллиптическими при $M \leq 1$ и гиперболическими при $M > 1$. Поле стоячих волн возмущений давления Ψ образуется в результате интерференции возмущений, созданных обтекаемым рельефом. Если $M > 1$, то от каждого ребра излома кусочно-гладкого рельефа (3.1, 3.2), удовлетворяющего ограничениям (3.2), отходит вниз по потоку характеристический разрыв $[\Psi]$. Если ограничения (3.2) выполняются, то согласно формулам (3.3, 3.4) такие разрывы $[\Psi]$ корректно моделируют перепады давлений во всех реальных, стационарных и слабых скачках уплотнения и волнах расширения [25, 26].

3.2. Метод суперпозиции автомодельных частных решений

Заглавный метод является обобщением двух прототипов. Один из них – это метод суперпозиции частных решений [31, 32, 35] линейных краевых задач (3.8, 3.9) обтекания рельефов, заданных суммами плоских синусоидальных волн. В нем все частные решения находили стандартным [46] методом разделения переменных, который строго обоснован только для эллиптических краевых задач. Однако в

данном разделе доказано, что сверхзвуковые ветви математически строгих частных решений гиперболической краевой задачи (3.8, 3.9), рассмотренной в работах [31, 32, 35], удовлетворяют спец-условию отсутствия возмущений в натекающем однородном потоке, которое авторы метода [31, 32, 35] никак не учитывали.

Другой прототип – это математически строгий метод [28] решения линейной краевой задачи обтекания (3.10, 3.11) при любых числах Маха $0 < M < \infty$ бесконечных плоских рельефов, имеющих синусоидальные контуры.

Пусть функция $\xi(x, z)$ является суммой плоских синусоидальных волн.

$$\begin{aligned} \xi(x, z) &= \sum \xi_n(x, z), \quad \xi_n(x, z) = A_n \cos(f_n(x, z) + \delta_n), \\ f_n(x, z) &= k_{nx}x + k_{nz}z, \\ k_{nx} &= k_n \cos \alpha_n, \quad k_{nz} = k_n \sin \alpha_n \rightarrow \\ \rightarrow f_n(x, z) &= k_n(x \cos \alpha_n + z \sin \alpha_n), \quad k_n \geq 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Изолиния функции $f_n(x, z)$ – это фронт плоской волны $\xi_n(x, z)$, а значение f_n – это декартова координата этого фронта. Функция $\xi(x, z)$ задана суммой (3.12). Поэтому, применив аналогичное суммирование в граничном условии (3.8), в итоге получим

$$\Psi = \sum \Psi_n \rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{y=0} = \sum \frac{\partial \Psi_n}{\partial y} \Big|_{y=0} \rightarrow \frac{\partial \Psi_n(x, y, z)}{\partial y} \Big|_{y=0} = -M^2 \frac{\partial^2 \xi_n(x, z)}{\partial x^2} \quad (3.13)$$

Подставим функции $\xi_n(x, z)$ вида (3.12) в правые части граничных условий (3.13) и, выполнив в них требуемое дифференцирование, в итоге получим

$$\frac{\partial \Psi_n(x, y, z)}{\partial y} \Big|_{y=0} = A_n [k_n M \cos \alpha_n]^2 \cos(f_n(x, z) + \delta_n) \quad (3.14)$$

Согласно (3.12) плоскость x, z отображается на ось значений f_n на полуплоскости $f_n \in R, y \geq 0$. При этом согласно (3.14) решение частной краевой задачи (3.9, 3.14) можно искать в виде функции $\Psi_n(f_n, y)$ только двух аргументов f_n, y .

$$\Psi_n(x, y, z) = \Psi_n(f_n(x, z), y) \rightarrow \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \Psi_n(f_n, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = A_n [k_n M \cos \alpha_n]^2 \cos(f_n + \delta_n) \quad (3.16)$$

Подставим равенство (3.15) в уравнение (3.9), и затем выполним в нем все действия, требуемые правилами дифференцирования сложных функций. В итоге обнаружим,

что уравнение (3.9) выполняется только тогда, когда на всей полуплоскости $f_n \in R, y \geq 0$ функция $\Psi_n(f_n, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial f_n^2} \Lambda_n, \quad \Lambda_n = k_n^2 [M^2 \cos^2 \alpha_n - 1] \quad (3.17)$$

Краевые задачи (3.16, 3.17) и их решения $\Psi_n(f_n, y)$ называют автомодельными, так как если в двумерном поле $\Psi_n(f_n, y)$ заменить координату f_n функцией $f_n(x, z)$ вида (3.12), то согласно (3.15 – 3.17) получим решение $\Psi_n(f_n(x, z), y)$ трехмерной краевой задачи (3.9, 3.14).

3.3. Аналитические решения автомодельных частных краевых задач

Вместо параметра Λ_n определим $k_{ny} = \sqrt{|\Lambda_n|} \geq 0$. Тогда согласно (3.17) получим

$$k_{ny} = k_n \sqrt{|M^2 \cos^2 \alpha_n - 1|}, \quad \Lambda_n = \begin{cases} -k_{ny}^2 & \text{если } \cos^2 \alpha_n < 1/M^2 \\ k_{ny}^2 & \text{если } \cos^2 \alpha_n > 1/M^2 \end{cases} \quad (3.18)$$

Если $A_n k_n = 0$, то краевая задача (3.16, 3.17) имеет очевидное решение $\Psi_n(f_n, y) \equiv 0$. Поэтому всюду далее по умолчанию полагаем, что выполняется условие $A_n k_n \neq 0$.

Если $k_{ny} = 0$, то краевая задача (3.16, 3.17) не имеет решений, удовлетворяющих спец-условию отсутствия возмущений в натекающем однородном потоке.

ДОЗВУКОВАЯ СЛУЧАЙ $\boxed{\cos^2 \alpha_n < 1/M^2}$

В данном случае согласно (3.18) уравнение (3.17) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial y^2} + k_{ny}^2 \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial f_n^2} = 0, \quad f_n \in R, \quad y \geq 0 \quad (3.19)$$

Эллиптическая краевая задача (3.16, 3.19) имеет единственное ограниченное решение, которое находят стандартным методом разделения переменных [27, 28, 31, 32, 35, 45, 46].

Из граничного условия (3.16) следует, что поле $\Psi_n(f_n, y)$ можно искать в виде

$$\Psi_n = Y_n(y) \cos(f_n + \delta_n) \quad (3.20)$$

Подставив функцию (3.20) в граничное условие (3.16), получим

$$Y'_n(0) = A_n[k_n M \cos \alpha_n]^2 \quad (3.21)$$

Подставив функцию (3.20) в уравнение (3.19), вместо него получим уравнение вида

$$Y''_n / Y_n = k_{ny}^2 \quad (3.22)$$

Решение уравнения (3.22), ограниченное на интервале $y \in [0, \infty)$, имеет вид

$$Y_n(y) = -Y'_n(0) \exp(-yk_{ny}) / k_{ny} \quad (3.23)$$

Подставим выражение (3.21) в решение (3.23), а результат в (3.20), в итоге получим

$$\Psi_n(f_n, y) = -(A_n / k_{ny}) [k_n M \cos \alpha_n]^2 \exp(-yk_{ny}) \cos(f_n + \delta_n) \quad (3.24)$$

СВЕРХЗВУКОВАЯ СЛУЧАЙ $\boxed{\cos^2 \alpha_n > 1/M^2}$

В данном случае согласно (3.18) уравнение (3.17) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial y^2} - k_{ny}^2 \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial f_n^2} = 0, \quad f_n \in R, \quad y \geq 0 \quad (3.25)$$

Если натекающий поток однородный, то гиперболическая краевая задача (3.16, 3.25) имеет единственное решение [25, 26, 28]. Найдем его, используя формулу Даламбера [25 – 28, 45, 46] для общего решение уравнения (3.25) на полуплоскости

$$f_n \in R, y \geq 0$$

$$\Psi_n = \Psi_n^+(f_n + yk_{ny}) + \Psi_n^-(f_n - yk_{ny}) \quad (3.26)$$

Характеристиками уравнения (3.25) на полуплоскости $f_n \in R, y \geq 0$ называют два семейства прямых линий, вдоль которых выполняются равенства

$$f_n \pm yk_{ny} = C^\pm = \text{const} \rightarrow df_n \pm k_{ny} dy = 0 \quad (3.27)$$

В правой части (3.26) одно слагаемое, которое описывает возмущения, приносимые на ось f_n вдоль характеристик, приходящих на нее из натекающего потока, должно быть равным нулю. Ответ на вопрос: – характеристики какого семейства (3.27) приходят на ось f_n из натекающего потока, зависит от знака частной производной $\partial f_n / \partial x$

$$\partial f_n / \partial x = Uk_n \cos \alpha_n \quad (3.28)$$

Если $\cos \alpha_n \geq 0$, то координата f_n возрастает / убывает в направлении натекающего потока. При этом на приходящей характеристике выполняется

система $\{df_n \geq 0, dy < 0\}$, что возможно только на характеристике $d(f_n \pm yk_{ny}) = 0$. Поэтому условие отсутствия любых возмущений в натекающем однородном потоке имеет вид:

$$\text{если } \cos\alpha_n \geq 0, \text{ то } \Psi_n^\pm(f_n \pm yk_{ny}) \equiv 0 \quad (3.29)$$

Из равенств (3.26) и (3.29) следует, что решение уравнения (3.25), удовлетворяющее условию отсутствия возмущений в натекающем однородном потоке, имеет вид

$$\Psi_n = \Psi_n^\pm(f_n \pm yk_{ny}) \text{ если } \cos\alpha_n \leq 0 \quad (3.30)$$

Дифференцируя функцию (3.30) по координате y , получим

$$(\partial/\partial y)\Psi_n^\pm(f_n \pm yk_{ny}) = \pm k_{ny}\Psi_n^{\prime\pm}(f_n \pm yk_{ny}) \quad (3.31)$$

Подставив функцию (3.30) в условие (3.16) и, используя формулу (3.31), получим

$$\pm k_{ny}\Psi_n^{\prime\pm}(f_n) = A_n[k_n M \cos\alpha_n]^2 \cos(f_n + \delta_n) \text{ если } \cos\alpha_n \leq 0 \quad (3.32)$$

Из равенств (3.32) следует, что решение краевой задачи (3.16, 3.25), удовлетворяющее спец-условию отсутствия возмущений в натекающем потоке, имеет вид

$$\Psi_n(f_n, y) = \pm \frac{A_n k_n^2 M^2}{k_{ny}} \cos^2\alpha_n \sin(f_n \pm yk_{ny} + \delta_n) \text{ если } \cos\alpha_n \leq 0 \quad (3.33)$$

3.4. Сравнение результатов расчета с экспериментом

Аналитические решения, описанные в предыдущих разделах, применимы только для рельефов, сводимых к суммам плоских синусоидальных волн. Ромбические рельефы указанного типа, изученные в работе [31, 35], имеют вид

$$\begin{aligned} \xi(f^+, f^-) &= B(1 + \cos f^+)(1 + \cos f^-) = \\ &= B[1 + \cos f^+ + \cos f^- + \cos f^+ \cos f^-] = \\ &= B + B\cos f^+ + B\cos f^- + 0,5B\cos(f^+ + f^-) + 0,5B\cos(f^+ - f^-) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Здесь $f^\pm(x, z)$ – однородные линейные функции. Их градиенты – это волновые вектора k^\pm . Изолинии функций $f^\pm(x, z)$ – это фронты плоских волн,

поэтому их значения называют фронтальными координатами. Согласно указанным определениям имеем

$$k_x^\pm = \frac{\partial f^\pm(x, z)}{\partial x}, \quad k_z^\pm = \frac{\partial f^\pm(x, z)}{\partial z} \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathbf{k}^\pm = \nabla f^\pm(x, z) \rightarrow f^\pm(x, z) = xk_x^\pm + zk_z^\pm \quad (3.35)$$

Волновые векторы ромбического рельефа (3.34, 3.35) имеют одинаковый модуль k . Поэтому, выразив декартовы компоненты k_x^\pm, k_z^\pm плоских волновых векторов k^\pm через их же полярные компоненты k, α^\pm , в результате получим

$$k_x^\pm = k \cos \alpha^\pm, \quad k_z^\pm = k \sin \alpha^\pm, \quad \alpha^+ > \alpha^- \quad (3.36)$$

Пусть $\omega \in (0, \pi/2)$ – половина угла между волновыми векторами k^+, k^- типа (3.36) ромбического рельефа (3.34). И пусть α_s – полярный угол биссектрисы того же самого угла, которая должна быть параллельной одной из двух взаимно-перпендикулярных осей симметрии данного рельефа (3.34 – 3.36). Тогда согласно определению углов ω и α_s имеем

$$\alpha^+ - \alpha^- = 2\omega, \quad \alpha^+ + \alpha^- = 2\alpha_s \rightarrow \alpha^\pm = \alpha_s \pm \omega \quad (3.37)$$

Угол ромба β , используемый в работе [31, 35], связан с углом ω равенствами вида

$$\beta = \pi/2 - \omega, \quad \omega \in (0, \pi/2) \rightarrow \omega = \pi/2 - \beta, \quad \beta \in (0, \pi/2) \quad (3.38)$$

Подставив равенства (3.37) в формулы (3.36), а результат в (3.35), в итоге получим

$$f^\pm(x, z) = k[x \cos(\alpha_s \pm \omega) + z \sin(\alpha_s \pm \omega)], \quad \omega \in (0, \pi/2) \quad (3.39)$$

Ромбический рельеф (3.34 – 3.39) определен, если заданы все значения $-B, k, \omega, \alpha_s$.

Выбор значения $\alpha_{sa} = 0$ в работе [31, 35] обоснован тем, что в её экспериментальной части испытывали ромбически рельефы, которые обтекались потоком, параллельным их осям симметрии, а в её теоретической части предполагали, что этой осью симметрии была ось x . В случае $\alpha_{sa} = 0$ правая часть равенства (3.39) упрощается и принимает вид

$$\alpha_{sa} = 0 \rightarrow f_a^\pm(x, z) = k[x \cos \omega_a \pm z \sin \omega_a], \quad \omega_a \in (0, \pi/2) \quad (3.40a)$$

Однако имеется и другое значение $\alpha_{sb} = \pi/2$, которое удовлетворяет тем же самым условиям работы [31, 35]. В случае $\alpha_{sb} = \pi/2$ правая часть равенства (3.39) после подстановки в него равенств (3.38) и последующего упрощения принимает вид

$$\begin{aligned} \alpha_{sb} = \pi/2 \rightarrow f_b^{\pm}(x, z) &= k \left[x \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \left[\frac{\pi}{2} - \beta_b\right]\right) + z \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \left[\frac{\pi}{2} - \beta_b\right]\right) \right] \rightarrow \\ f_b^{\pm}(x, z) &= k [\mp x \cos \beta_b + z \sin \beta_b], \quad \beta_b \in (0, \pi/2). \end{aligned} \quad (3.40б)$$

В работе [31, 35] представлены данные измерений волновых сопротивлений сопловых насадков, имевших вид полых цилиндров, у которых на внутренних обтекаемых поверхностях имелись ромбические рельефы, симметричные относительно оси цилиндра (три из них представлены на рис. 3.2). Силу волнового сопротивления сопловых насадков измеряли в серии их испытаний на прецизионной дифференциальной установке. По ходу серии варьировали только угол ромба. В результате была получена дискретно-точечная экспериментальная зависимость силы волнового сопротивления сопловых насадков от углов ромба их ромбических рельефов (5 жирных черных точек на графике на рис. 3.1 [31, 35]).

Технология изготовления цилиндрических сопловых насадков, представленных на рис. 3.2 не обеспечивала гладкости их рельефов. Поэтому ромбические рельефы, испытанные в работе [31, 35], были ступенчатыми. Приведем формулу, которая аппроксимирует реально испытанные в работах [31, 35] ромбические рельефы

$$\begin{aligned} \xi(f^+, f^-) &= B(1 + \text{sign}[\cos f^+])(1 + \text{sign}[\cos f^-]) = \\ &= B + B \text{sign}[\cos f^+] + B \text{sign}[\cos f^-] + B \text{sign}[\cos f^+] \text{sign}[\cos f^-] \quad (3.41) \\ \text{sign}[C] &= \{-1, \text{если } C < -0, \text{ иначе } 1, \text{ если } C > 0, \text{ иначе } 0\} \end{aligned}$$

Здесь $\text{sign}[C]$, $C \in (-\infty, \infty)$ – универсальная ступенчатая функция [46].

Формулы (3.34) и (3.41) описывают два ромбических рельефа, имеющих одинаковый угол ромба, но при этом имеющих еще и очень важные отличия, перечисленные ниже.

Первый одинаковый член в суммах (3.34) и (3.41) – является вырожденной волной. Второй и третий члены в суммах (3.34) и (3.41) – это пары косых плоских

волн. Однако в сумме (3.34) обе косые волны синусоидальные, а в сумме (3.41) – ступенчатые.

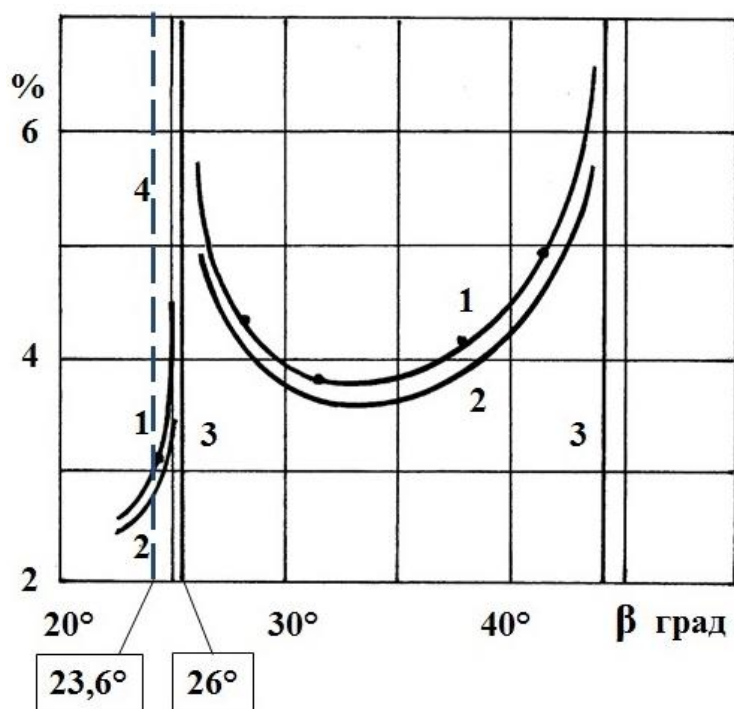


Рис. 3.1. Сравнение с экспериментальными данными работы [31, 35]
 1 – эксперимент
 2 – расчет
 3 – критический режим в эксперименте
 4 – критический режим в линейной теории

Последний член в сумме (3.34), имеющий вид произведения двух синусоидальных косых плоских волн, сводится согласно тригонометрическому тождеству [46] к сумме двух других синусоидальных плоских волн: – продольной и поперечной. Из сказанного следует, что теоретически изученные бесконечные ромбические рельефы (3.34) всегда можно записать в виде сумм 4-х плоских синусоидальных волн типа (3.12).

В случае бесконечных ромбических рельефов (3.41), как обе косые плоские волны, так и их произведение нельзя описать конечными суммами вида (3.12). По этой причине строгие решения линейных задач обтекания (3.8, 3.9) бесконечных рельефов типа (3.12), полученные в предыдущем разделе, нельзя применять в случае бесконечных ступенчатых ромбических рельефов (3.41).

Неотъемлемой частью линейной теории является линеаризованное граничное условие безотрывного обтекания (3.7), которое нарушается в случае любых ступенчатых рельефов, безотрывное обтекание которых в принципе невозможно. Поэтому другой запрет применения линейной теории

распространяется, как на бесконечные ступенчатые рельефы (3.41), так и на их конечные аналоги, которые изображены на рис. 3.2 и реально испытаны в работах [31, 35] на дифференциальных газодинамических установках [33].

Однако, прежде чем продолжить обсуждение данной проблемы, сначала детально опишем процедуру получения математически строгого решения задачи (3.8, 3.9) в случае гладких ромбических рельефов (3.34, 3.40а – б).



Рис. 3.2. Цилиндрические насадки с ромбической рельефной поверхностью

3.5. Строгое решение задачи Д.И. Блохинцева для ромбических рельефов

Поставив фронтальные координаты (3.40а – б) в сумму плоских синусоидальных волн, к которой сводится рельеф (3.34), и выполнив требуемые действия, в итоге получим

$$\xi_a(x, z) = B + B\cos(k[x\cos\omega_a + z\sin\omega_a]) + B\cos(k[x\cos\omega_a - z\sin\omega_a]) + 0,5B\cos(2kx\cos\omega_a) + 0,5B\cos(2kz\sin\omega_a), \quad \omega_a \in (0, \pi/2) \quad (3.42a)$$

$$\xi_b(x, z) = B + B\cos(k[x\cos\beta_b + z\sin\beta_b]) + B\cos(-k[x\cos\beta_b - z\sin\beta_b]) + 0,5B\cos(2kx\cos\beta_b) + 0,5B\cos(2kz\sin\beta_b), \quad \beta_b \in (0, \pi/2). \quad (3.42б)$$

Поскольку $\cos(-f) = \cos(f)$, то третьи слагаемые в суммах (3.42а – б), также как и сами суммы, отличаются только геометрическим смыслом углов ω_a и β_b . Поэтому уравнения (3.42а – б) можно записать в единообразном виде, если всюду ниже полагать, что параметры ω_a и β_b являются компонентами вектор-параметра α

$$\xi(x, z) = B + B\cos(k[x\cos\alpha + z\sin\alpha]) + B\cos(k[x\cos\alpha - z\sin\alpha]) + 0,5B\cos(2kx\cos\alpha) + 0,5B\cos(2kz\sin\alpha), \quad \alpha \in (0, \pi/2), \quad \alpha = \{\omega_a, \beta_b\} \quad (3.43)$$

Первое и последнее слагаемые в сумме (3.43) называют вырожденной и поперечной плоскими волнами. Правые части их частных граничных условий (3.16) равны нулю. По этой причине их частные краевые задачи (3.16, 3.17) имеют только очевидные решения, равные тождественно нулю. В связи с этим всюду ниже

первое и последнее слагаемые в сумме (3.43) уже не упоминаются. Остальные плоские волны (3.43) дают ненулевые вклады в возмущение давления. Вторую и третью волны (3.43) называют косыми или наклонными, а четвертую – продольной.

Для того чтобы привести их к стандартному виду (3.12), положим

$$A_1 = B, k_1 = k, \alpha_1 = \alpha, \delta_1 = 0 \rightarrow f_1(x, z) = k[x\cos\alpha + z\sin\alpha], \quad (3.44)$$

$$A_2 = B, k_2 = k, \alpha_2 = -\alpha, \delta_2 = 0 \rightarrow f_2(x, z) = k[x\cos\alpha - z\sin\alpha], \quad (3.45)$$

$$A_3 = B/2, k_3 = 2k\cos\alpha, \alpha_3 = 0, \delta_3 = 0 \rightarrow f_3(x) = 2kx\cos\alpha \quad (3.46)$$

Решения частных краевых задач (3.16, 3.17) для плоских волн (3.44 – 3.46) имеют вид.

КОСЫЕ (НАКЛОННЫЕ) ВОЛНЫ 1,2

Согласно (3.18) в дозвуковой и сверхзвуковой ветвях (3.24, 3.33) решения частной краевой задачи (3.16, 3.17) для косых волн (3.44, 3.45) присутствует общий знаменатель k_y вида

$$k_y = k\sqrt{|M^2\cos^2\alpha - 1|} \quad (3.47)$$

$$M^2\cos^2\alpha < 1, \Psi_n(f_n, y) = -(B/k_y)(kM\cos\alpha)^2 \exp(-yk_y)\cos(f_n),$$

$$n = \{1,2\} \quad (3.48)$$

$$M^2\cos^2\alpha > 1, \Psi_n(f_n, y) = -(B/k_y)(kM\cos\alpha)^2 \sin(f_n - yk_y),$$

$$n = \{1,2\} \quad (3.49)$$

Решение (3.48, 3.49) удовлетворяет условию отсутствия возмущений в натекающем однородном потоке, но оно не определено при $k_y = 0$ из-за деления на ноль.

ПРОДОЛЬНАЯ ВОЛНА 3

Согласно (3.18) в дозвуковой и сверхзвуковой ветвях (3.24, 3.33) решения частной краевой задачи (3.16, 3.17) для продольной волна (3.46) имеется знаменатель k_y вида

$$k_y = 2k\cos\alpha\sqrt{|M^2 - 1|} \quad (3.50)$$

$$M < 1, \Psi_3(f_3, y) = -(0.5B/k_y)(2k\cos\alpha M)^2 \exp(-yk_y)\cos(f_3) \quad (3.51)$$

$$M > 1, \Psi_3(f_3, y) = -(0.5B/k_y)(2k\cos\alpha M)^2 \sin(f_3 - yk_y) \quad (3.52)$$

Решение (3.51, 3.52) удовлетворяет условию отсутствия возмущений в натекающем однородном потоке, но оно не определено при $k_y = 0$ из-за деления на ноль.

Имеются три возможных режима обтекания ромбических рельефов изученного типа (3.12), (3.44 – 3.46). Согласно (3.44 – 3.52), безразмерное поле давления при обтекании однородным потоком рельефов вида (3.12), (3.44 – 3.46) имеют вид

СЛУЧАЙ $M^2 \cos^2 \alpha > 1$

$$k_y = k \sqrt{M^2 \cos^2 \alpha - 1},$$

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z) = & -Bk \cos \alpha M^2 / \sqrt{M^2 - 1} \sin[2k \cos \alpha (x - y \sqrt{M^2 - 1})] - \quad (3.53) \\ & - \frac{B(kM \cos \alpha)^2}{k_y} [\sin(xk \cos \alpha - yk_y + zk \sin \alpha) + \sin(xk \cos \alpha - yk_y - zk \sin \alpha)] \end{aligned}$$

СЛУЧАЙ $M^2 \cos^2 \alpha < 1 \cap M^2 > 1$

$$k_y = k \sqrt{1 - M^2 \cos^2 \alpha},$$

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z) = & -Bk \cos \alpha M^2 / \sqrt{M^2 - 1} \sin[2k \cos \alpha (x - y \sqrt{M^2 - 1})] \quad (3.54) \\ & - (B/k_y)(kM \cos \alpha)^2 \exp(-yk_y) [\cos(k(x \cos \alpha + z \sin \alpha)) + \cos(k(x \cos \alpha - z \sin \alpha))] \end{aligned}$$

СЛУЧАЙ $M^2 < 1$

$$k_y = k \sqrt{1 - M^2 \cos^2 \alpha},$$

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z) = & -Bk \cos \alpha M^2 / \sqrt{1 - M^2} \exp(-2yk \cos \alpha \sqrt{1 - M^2}) \cos(2kx \cos \alpha) \quad (3.55) \\ & - (B/k_y)(kM \cos \alpha)^2 \exp(-yk_y) [\cos(k(x \cos \alpha + z \sin \alpha)) + \cos(k(x \cos \alpha - z \sin \alpha))] \end{aligned}$$

Согласно (3.53), если выполняется условие $M^2 \cos^2 \alpha > 1$, то реализуется сверхзвуковое обтекание всех трех волн – продольной и двух косых. Если выполняется условие $M^2 \cos^2 \alpha < 1 \cap M^2 > 1$, то реализуется сверхзвуковое обтекание продольной и дозвуковое двух косых волн (3.53). Если же выполняется условие $M^2 < 1$, то реализуется дозвуковое обтекание всех трех волн – продольной и двух косых (3.55).

3.6. Критические значения углов α ромбических рельефов

Связь между полярными координатами M, ω и полууглом ромба β наглядно иллюстрирует рис. 3.3.

На плоскости годографа вектор скорости натекающего потока имеет длину M и параллелен оси x . На данной плоскости имеется также прямая, во всех точках которых знаменатель искомого решения равен нулю и которые поэтому являются множеством критических режимов сверхзвукового обтекания ромбических рельефов исследуемого типа.

Согласно (3.47) при обтекания частных рельефов (3.44, 3.45), здесь показано что если $M^2 \cos^2 \omega = 1$, то имеет место критический режим сверхзвукового обтекания косых волн, так как искомое решение отсутствует из-за деления на ноль.

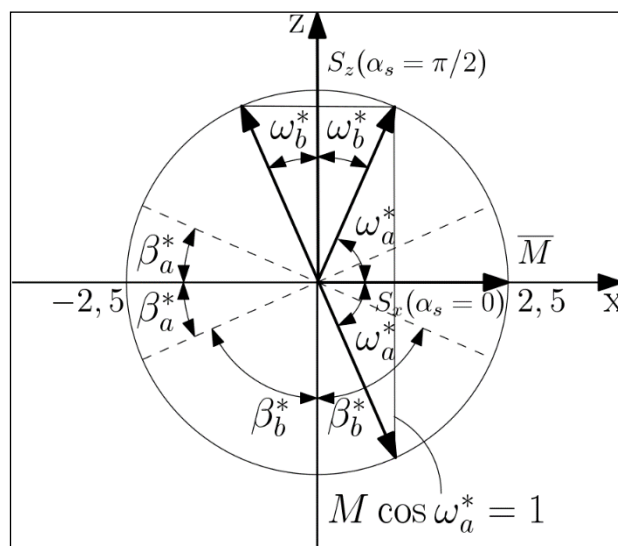


Рис. 3.3. Годограф критического угла α ромбического рельефа

3.7. Местные и полные коэффициенты волнового сопротивления трехмерных рельефов, представимых суммами плоских синусоидальных волн

Коэффициенты давления c_p , а также местных c_{px}, c_{pz} и полных c_{pLx}, c_{pLz} волновых сопротивлений выражают через значения функции $\Psi(x, y, z)_{y=0}$ согласно формулам:

$$\begin{aligned}\Psi(x, 0, z) &= \Psi_w(x, z), \quad c_p = \delta p|_{y=0} / \left(\frac{1}{2} \rho U^2\right) = 2 \Psi_w(x, z) / M^2, \\ c_{pq} &= c_p \frac{\partial y_w}{\partial q} = 2 / M^2 \Psi_w(x, z) \frac{\partial \xi(x, z)}{\partial q}, \quad q = \{x, z\}, \\ c_{pLq} &= \frac{2}{M^2} \iint_{0; -0,5L_z}^{L_x; 0,5L_z} \Psi_w(x, z) \frac{\partial \xi(x, z)}{\partial q} \frac{dx dz}{L_x L_z}, \quad q = \{x, z\}\end{aligned}\quad (3.56)$$

Записав функцию $\Psi(x, z)$ в виде суммы (3.13), получим

$$\Psi_w(x, z) = \sum_{n=1}^{n=N} \Psi_{wn}(x, z). \quad (3.57)$$

Подставив сумму (3.57) в формулы (3.56), в итоге получим

$$\begin{aligned}c_{pq} &= \sum_{n=1}^{n=N} c_{pqn}, \quad c_{pqn} = 2 / M^2 \Psi_{wn}(x, z) \frac{\partial \xi(x, z)}{\partial q}, \quad q = \{x, z\}, \\ c_{pLq} &= \sum_{n=1}^{n=N} c_{pLqn}, \quad c_{pLqn} = \frac{2}{M^2} \iint_{0; -0,5L_z}^{L_x; 0,5L_z} \Psi_{wn}(x, z) \frac{\partial \xi(x, z)}{\partial q} \frac{dx dz}{L_x L_z}, \quad q = \{x, z\}.\end{aligned}\quad (3.55)$$

Согласно (3.24, 3.33), стеночные значения дозвуковой (3.24) и сверхзвуковой (3.33) ветвей частных решений формулы (3.55), получим

$$\begin{aligned}\Psi_{wn}(f_n) &= -(A_n / k_{ny}) [k_n M \cos \alpha_n]^2 \cos(f_n + \delta_n), \quad \cos^2 \alpha_n < 1 / M^2 \\ \Psi_{wn}(f_n) &= \pm \frac{A_n k_n^2 M^2}{k_{ny}} \cos^2 \alpha_n \sin(f_n + \delta_n) \quad \text{если } \cos \alpha_n \leq 0, \cos^2 \alpha_n > 1 / M^2\end{aligned}\quad (3.56)$$

3.8. Выводы по главе

В рамках линейной теории точно решена стационарная краевая задача трехмерного обтекания однородным потоком бесконечной пластины, у которой ромбический рельеф ее обтекаемой поверхности задан в виде суммы плоских синусоидальных волн.

Доказано, что если вектор скорости сверхзвукового однородного потока параллелен диагоналям обтекаемых ромбических рельефов указанного типа, то среди них имеется такой, у которого угол ромба равен так называемому критическому значению, зависящему от числа Маха натекающего потока. Поле обтекания ромбического рельефа с критическим значением его угла ромба нельзя определить в рамках линейной теории из-за деления на ноль. В рамках линейной теории такую ситуацию называют кризисом сверхзвукового обтекания.

Показано, что при дозвуковом обтекании потоком газа ромбических рельефов вышеуказанного типа критические значения углов ромба отсутствуют.

Проведено сравнение критических значений углов ромба, полученных в данной главе с помощью линейной теории, с экспериментальными данными работы [31, 35]. В ней представлены данные прямых измерений волновых сопротивлений цилиндрических сопловых насадков, имевших ромбические рельефы, у которых в серии испытаний варьировали угол ромба и фиксировали нулевой угол их обтекания. На дискретно-точечной зависимости с насадок от их углов ромба, приведенной в работе [31, 35] на рис. 3.1, имеются максимумы, наличие которых автор связал с критическими режимами сверхзвукового обтекания.

Установлено, что первый максимум в работе [31, 35] (рис. 3.1) имеет место при числе Маха равно $2,5$ и угле ромба 26° , а согласно линейной теории, развиваемой в данной работе, при указанном числе Маха критическое значение угла ромба равно $23,6^\circ$. Такое отличие теоретических и экспериментальных критических значений угла ромба, а также наличие в работе [31, 35] второго максимума (см. рис. 3.1) и его отсутствие в линейной теории объясняются тем, что теоретически изученные и экспериментально испытанные рельефные поверхности качественно отличались. Действительно, в данной работе были изучены бесконечные пластины с гладкими ромбическими рельефами, а в работе [31, 35] были испытаны цилиндрические насадки, которые имели конечные размеры и ступенчатые ромбические рельефы (рис. 3.2).

В данной работе также объяснено, почему перечисленные выше отличия теоретически изученных и экспериментально испытанных рельефных поверхностей сравнительно слабо повлияли на положение первого максимума.

Все вышесказанное обосновывает актуальность детальных исследований критических режимов сверхзвукового обтекания конечных двоякопериодических рельефов.

ГЛАВА IV. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ СТЕНКИ СОПЛА С РОМБИЧЕСКИМ РЕЛЬЕФОМ. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ.

4.1. Численные методы трехмерного моделирования обтекания соплового насадка с ромбическим рельефом

В данной главе проведено численное исследование с помощью сертифицированного CFD-продукта ANSYS CFX полей обтекания потоком газа сопловых насадков, выполненных в виде пластин. Пластина представляет собой элемент стенки сопла и имела с обеих сторон одинаковые ромбические рельефы, наветренную острую кромку и боковые бортики. Она обтекалась сверхзвуковой газовой струей, вытекающей из плоского сопла с прямоугольным сечением.

Проведено сравнение результатов расчета величины силы волнового сопротивления сопловых плоских насадков, рассчитанных CFD-продуктом ANSYS, с экспериментальными данными измерения сил волнового сопротивления сопловых насадков с двоякопериодическими рельефами стенок, а также аналогичных пластин [31, 35], обдутых с на дифференциальной газодинамической установке [33].

Исследована зависимость силы волнового сопротивления одиночного ромбического рельефа от номера ряда на насадке, в котором он находится.

Проведена оценка возможных погрешностей, связанных с геометрическими отличиями реально испытанных насадков с ромбическим рельефом [31, 35] от моделей, использованных в ходе моделирования соответствующих струйных течений с помощью сертифицированного CFD-продукта ANSYS.

4.1.1. Обоснование выбора модели

В этом разделе рассмотрено обоснование выбора модели для расчета и параметров обтекания сверхзвуковым потоком насадков с ромбическим рельефом с

помощью программного комплекса ANSYS CFX на основе сопоставления экспериментальных данных, полученных в работе [31, 35].

В работе [31, 35] экспериментально исследовано явление волнового сопротивления, возникающего при обтекании сверхзвуковым потоком газа волнистой поверхности круглого сопла со сложной рельефной структурой. Была измерена величина силы волнового сопротивления насадков с ромбическим рельефом, у которых варьировались их углы ромба.

Рассматриваемое обтекаемое тело представляет собой поверхность, имеющую трехмерную ромбическую рельефную структуру с периодически повторяющимися выступами и впадинами (рис. 4.1).

Как известно, для большинства головных частей летательных аппаратов и реактивных сопел ракетных двигателей характерна осесимметричная геометрия. Однако, из-за ограничения технологии изготовления на токарном станке цилиндрических поверхностей с ромбическим рельефом были изготовлены плоские сопловые насадки с ромбическим рельефом. Поверхность насадка с обеих сторон имела ромбический рельеф, который образован путем пересечения косых проточек шириной $s = 2,4$ мм. При этом каждая насадка имела собственный угол ромба, равный, соответственно, $\beta = 6^\circ, 8^\circ, 10^\circ, 12^\circ, 14^\circ, 16^\circ, 18^\circ, 20^\circ, 22^\circ, 35^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 50^\circ$. Насадки с ромбическим рельефом, были обдuty сверхзвуковой струей со скоростью $M = 3$ [35].

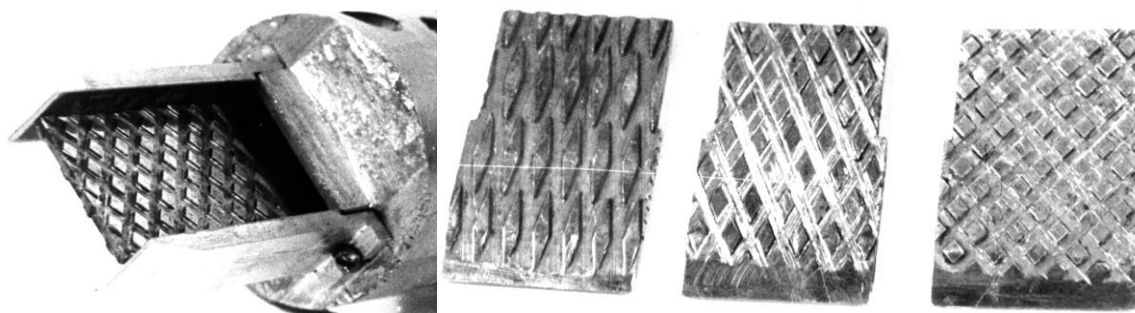


Рис. 4.1. Примеры испытанных плоских сопловых насадков

Предполагалось также, что ввиду большого диаметра сопла на его срезе плоский насадок с небольшими размерами может стать частью поверхности сопла.

С целью точного моделирования поле сверхзвукового обтекания насадков с ромбическим рельефом, испытанных на дифференциальной установке [33] и изучить в полном объеме волновое сопротивление ромбических рельефов для проведения численных расчетов, были использованы параметры насадков, использованных в эксперименте [31, 35].

Таким образом, было принято решение спроектировать плоский сопловый насадок с «идеальной» осесимметричной поверхностью, у которой нижняя часть поверхности идентична верхней части ее поверхности. При этом ромбические выступы на насадке начинались сразу после острой кромки. Кроме того, между ромбическими выступами образованы сходящиеся и расходящиеся канавки с шириной h . На рис. 4.2 представлен пример «идеальной» поверхности пластины, использованной в CFD моделировании.

Пластины имели следующие геометрические размеры: длина $L = 50$ мм, ширина $B = 29$ мм, толщина $s = 3$ мм. Высота ромба равно $\delta = 0,5$ мм. Кроме того, пластина со стороны обдува имела острую кромку под углом 7° и боковые стенки (рис. 4.2) [35].

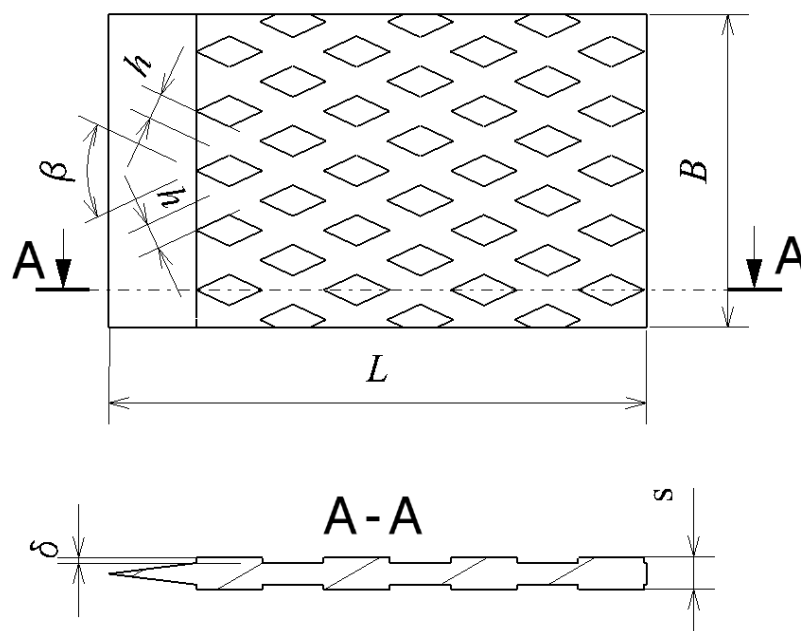


Рис. 4.2. Модель «идеальной» пластины с углом ромба $\beta=50^\circ$

Экспериментальные данные, полученные в работе [31, 35] были использованы для подтверждения правильности результатов расчета, полученных

при численном исследовании волнового сопротивления плоских сопловых насадков с ромбическим рельефом с помощью сертифицированного CFD-продукта ANSYS.

На рис. 4.3 приведена модель плоского сопла, используемая в трехмерном моделировании.

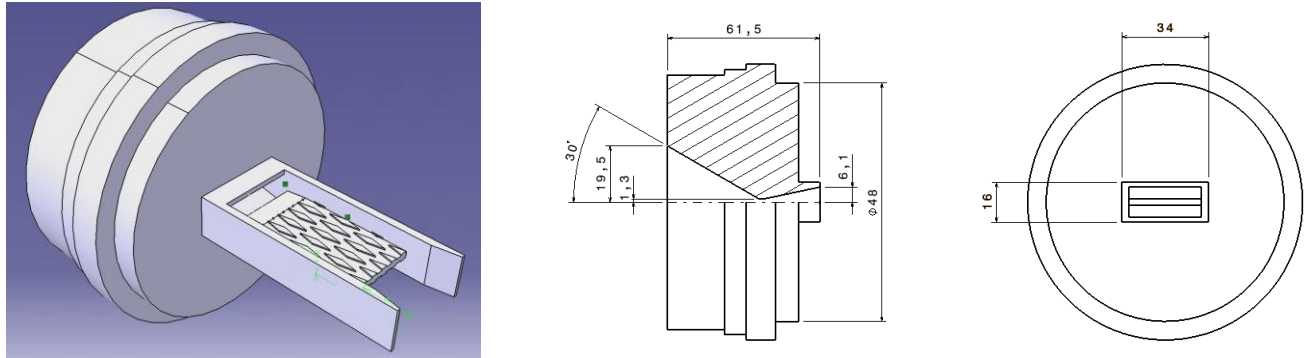


Рис. 4.3. Чертеж модельного плоского сопла

Для расчета профиля плоского сопла были заданы исходные данные, эквивалентные параметрам круглого сопла: диаметр критического сечения круглого сопла $d_{кр} = 10$ мм и давление на срезе сопла $p_a = 0,1$ МПа.

Для расчета сверхзвукового течения газа с непрерывным увеличением скорости были найдены газодинамические функции [47, 48, 57] для:

$$k = 1,4, \pi(\lambda) = 0,0249, \lambda = 1,978, \text{ и } M = 3.064:$$

$$q(\lambda) = 0,2209$$

Затем с помощью газодинамических функций были определены площадь выходного сечения сопла F_a и его диаметр D_a на срезе [56]:

$$q(\lambda) = F_{кр}/F_a, \quad \text{где } F_{кр} = \frac{\pi D^2}{4} = 78.5 \text{ мм}^2,$$

$$F_a = F_{кр}/q(\lambda) = 355.36 \text{ мм}^2, \quad D_a = \sqrt{\frac{4F_a}{\pi}} = 21.27 \text{ мм}$$

Далее находим высоту критического и выходного сечений сверхзвуковой части плоского сопла, задавшись его шириной $b = 29$ мм:

$$h_a = F_a/b = 12,25 \text{ мм}; \quad h_{кр} = F_{кр}/b = 2,7 \text{ мм}$$

4.1.2. Математическая модель

Для исследования сверхзвукового обтекания плоских сопловых насадков с ромбическим рельефом была использована система уравнений Навье–Стокса, осредненных по Рейнольдсу [54, 55, 58, 66 – 68]. Система уравнений в векторной форме имеет следующий вид:

1. Уравнение сохранения массы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U) = 0,$$

где ρ – плотность, t – время,

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right],$$

где $U = (U_x; U_y; U_z)$ – вектор скорости в декартовых координатах.

2. Уравнение сохранения импульса:

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U \otimes U) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau,$$

$$\tau = \mu \left(\nabla U + (\nabla U)^T - \frac{2}{3} \delta \nabla \cdot U \right)$$

где \otimes – тензорное умножение, p – давление, τ – тензор напряжений, μ – коэффициент динамической вязкости, T – температура, δ – единичная матрица.

3. Уравнение сохранения энергии:

$$\frac{\partial (\rho h_{tot})}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U_i h_{tot}) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \nabla \cdot (U \cdot \tau) + U \cdot S_M + S_E$$

где $h_{tot} = h + \frac{U^2}{2}$ – полная энтальпия смеси,

λ – коэффициент теплопроводности,

$(\nabla \cdot (U \cdot \tau))$ – функция, учитывающая работу вязкостных сил,

$(U \cdot S_M)$ – работа от внешних источников,

S_E – источниковый член,

$h = \sum_{\alpha} h_{\alpha} Y_{\alpha}$ – энтальпия смеси, $\frac{U^2}{2}$ – кинетическая составляющая,

$h_{\alpha} = h_{\alpha}^0 + \int_{T_0}^T c_{pa}(T) dT$ – энтальпия, h_{α}^0 – энтальпия образования, и

c_{pa} – теплоемкость при постоянном давлении компонента α .

4. Формула Сазерленда:

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + T_s}{T + T_s}$$

где μ – коэффициент динамической вязкости.

Для воздуха: $\mu_0 = 1.716 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$, $T_s = 122 \text{ К}$ при $T_0 = 273 \text{ К}$.

5. Уравнение состояния:

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

где R – газовая постоянная, T – температура.

4.1.3. Модель турбулентности

Большинство моделей турбулентности были получены из осредненных по Рейнольдсу уравнений, когда скорость жидкости u складывается из двух составляющих: средней скорости U и флуктуационной скорости u' [59, 60 – 63, 66 – 68].

$$u = U + u', \quad \text{где } U = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u dt.$$

В результате этого в системе уравнений Навье-Стокса и скалярного уравнения переноса при их осреднении появляются еще два новых неизвестных слагаемых: $\overline{\rho u' \otimes u'}$ – тензор напряжения Рейнольдса и $\overline{\rho u' \varphi'}$ – турбулентный тепловой поток. Линии над этими терминами показывают о том, что они усредняются с течением времени.

Предположение Буссинеска:

Для решения проблемы замыкания системы уравнений Навье-Стокса Джозефом Буссинеском была предложена гипотеза о градиентном механизме переноса плоского сдвигового движения. Так, он предположил, что турбулентный поток состоит из вихрей, где тензор напряжения Рейнольдса пропорционально среднему градиенту скорости:

$$-\overline{\rho u' \otimes u'} = -\frac{2}{3} \rho k \delta - \frac{2}{3} \mu_t \text{div} U \delta + \mu_t (\nabla U + (\nabla U)^T)$$

где $k = \frac{1}{2} \overline{U'^2}$ – кинетическая энергия турбулентных пульсаций.

Тогда турбулентный тепловой поток задается

$$-\rho \overline{u' \varphi'} = \Gamma_t \nabla \varphi$$

где $\Gamma_t = \frac{\mu_t}{Pr_t}$ – вихревая диффузия; μ_t – турбулентная вязкость и

Pr_t – турбулентное число Прандтля.

Различие моделей турбулентной вязкости заключается в методе определения турбулентной вязкости μ_t [66 – 68]:

1. Модель k-epsilon

В модели $k - \varepsilon$, μ_t определяется как: $\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}$

где C_μ является постоянной, k и ε – турбулентные вихревые диссипации, которые вычисляются по следующим двум уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho U k) &= \text{div} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \text{grad} k \right] + P_k - \rho \varepsilon \\ \frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \text{div}(\rho U \varepsilon) &= \text{div} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \text{grad} \varepsilon \right] + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon) \end{aligned}$$

где σ_k , σ_ε , $C_{\varepsilon 1}$, и $C_{\varepsilon 2}$ являются константами и P_k – члены производства энергии турбулентности.

2. Модель k-omega Вилкокса (1986)

В модели $k - \omega$ μ_t определяется как: $\mu_t = \rho \frac{k}{\omega}$

Здесь k и ω – удельные скорости диссипации турбулентной энергии получены из следующих двух уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho U k) &= \text{div} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \text{grad} k \right] + P_k - \beta' \rho k \omega \\ \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \text{div}(\rho U \omega) &= \text{div} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \text{grad} \omega \right] + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \rho \omega^2 \end{aligned}$$

где σ_k , σ_ω , α , β' и β являются константами.

3. Модель SST (Shear Stress Transportation)

У моделей $k - \varepsilon$ и $k - \omega$ есть свои преимущества и недостатки. Модель Shear Stress Transport (SST) сочетает в себе лучшие свойства этих двух моделей с использованием составной функции.

С одной стороны, модель $k - \omega$ обрабатывает потоки вблизи no-slip wall (условие прилипания или непротекания на стенке) лучше, чем модель $k - \varepsilon$. Однако измельчение расчётной сетки вблизи стенки не должно быть очень частым, так как скорость газового потока не так сильно зависит от размера ячейки сетки.

С другой стороны, модель $k - \omega$ гораздо более чувствительна к неточным граничным условиям по сравнению с моделью $k - \varepsilon$ при проведении расчёте скорости набегающего потока.

В связи с этим было решено в расчётах использовать модель SST (Shear Stress Transportation). Данная модель турбулентной вязкости с двумя уравнениями представлена в литературе как популярная из-за ее хорошего поведения при положительных градиентах давления и отрывных течениях [64, 66 – 68], т.к. обе области представляют большой интерес в данном исследовании.

4.1.4. Граничные условия

Для моделирования течения полей обтекания плоских сопловых насадков с ромбическим рельефом с различными углами ромба используются следующие граничные условия в расчетных областях:

Полное давление газа на входе: 4 МПа

Полная температура газа на входе: 300 К

На выходе были установлены два граничных условия: сначала дозвуковое граничное условие со статистическим давлением на выходе: 0,1 МПа. В случае, когда в расчетной области устанавливается сверхзвуковое течение потока газа, граничные условия также переключаются на сверхзвуковой режим.

Для внутренней поверхности сопла, поверхности пластины и боковых стенок были заданы адиабатические условия прилипания (no-slip wall).

Параметры потока для контрольного объема вычисляются с помощью дискретных уравнений, построенных на основе использования явной наветренной схемы второго порядка точности.

4.1.5. Расчетная сетка

В данной работе было рассмотрено обтекание плоского соплового насадка с ромбическим рельефом. С целью уменьшения вычислительного ресурса для расчета обтекания исследуемых насадков была построена расчетная сетка, состоящая из 1/4 части плоского сопла и пластины с ромбическим рельефом, которая была снабжена боковыми стенками. На рис. 4.4 изображена расчетной областью. Здесь видны контур плоского сопла, рельефная поверхность насадка и боковая стенка. Длина расчетной области составляет $11.4L$, ширина $4.2S$, где L и S характерная длина и ширина плоского соплового насадка соответственно. Расчетная область вблизи среза сопла, сдвинута от срезов чтобы избежать дополнительных возмущений на пластине.

Используется комбинация структурированной и неструктурированной сетки [65]. Общее количество ячеек составляет от 1700499 до 1823966 в зависимости от угла ромба рельефной поверхности. На рис. 4.5 изображена форма расчётной сетки.

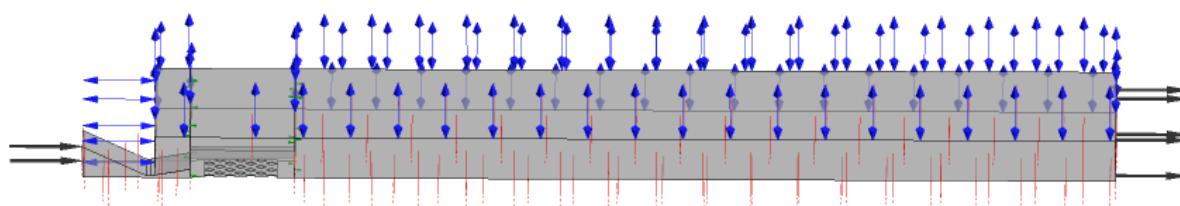


Рис. 4.4. Расчетная область и граничные условия

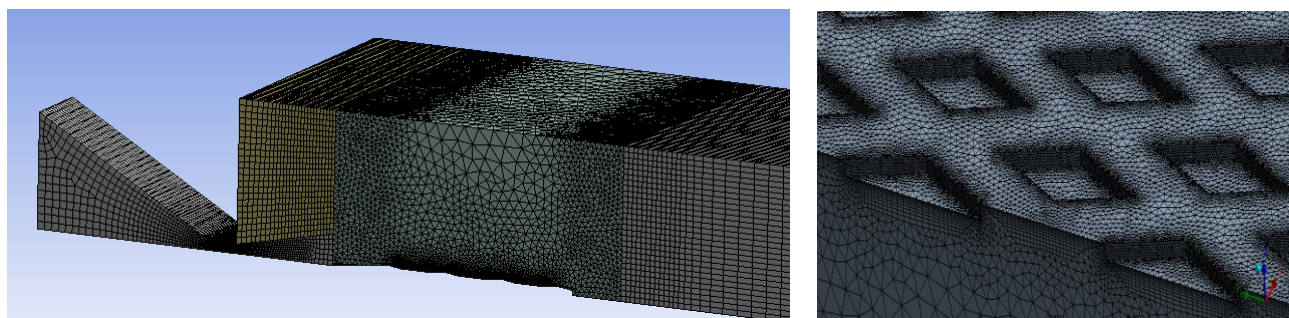


Рис. 4.5. Пример расчетной сетки

4.2. Расчет течения газа

В качестве примера, на рис. 4.6 приведены поля обтекания (изолинии чисел Маха) плоского соплового насадка, состоящего из пластины с одинаковым ромбическим рельефом на обеих сторонах, наветренную острую кромку и боковые стенки. Насадок обтекается сверхзвуковой струей, истекающей из плоского конического сопла с прямоугольным сечением с числом Маха $M = 3$.

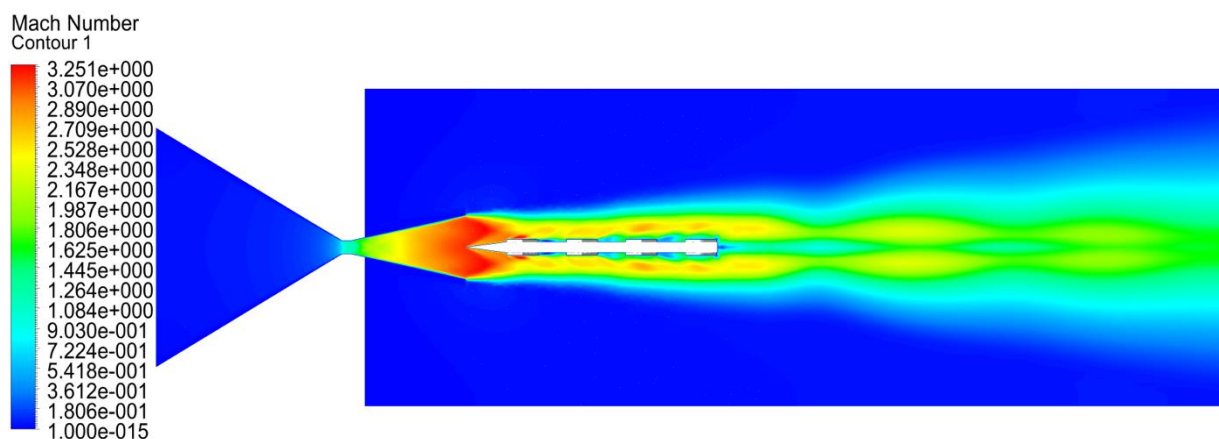


Рис. 4.6. Изолинии чисел Маха при обтекании насадка с ромбическим рельефом с углом ромба 50°

Результаты расчетов полей давления и изолинии чисел Маха вдоль плоского соплового насадка с ромбическим рельефом при разных углах ромба приведены в таблицах № 4.1 ÷ 4.3. Здесь результаты расчетов разделены на 3 группы.

В группе 1 приведены результаты расчетов, полученных при обтекании сверхзвуковым потоком газа плоских сопловых насадков с ромбическими выступами, имеющими малые углы ромба в диапазоне $6^\circ \div 14^\circ$; в группе 2 – результаты расчетов при обтекании плоских сопловых насадков со средними углами ромба в диапазоне $16^\circ \div 24^\circ$; в группе 3 – результаты при обтекании плоских сопловых насадков с ромбическими выступами с большими углами ромба в диапазоне: $35^\circ \div 50^\circ$.

Из таблицы 4.1 видно, что при малых углах ромба в диапазоне $6^\circ \div 8^\circ$ на длину плоского соплового насадка умещается 1 ряд выступов, выполненных в виде ромба, а в диапазоне $10^\circ \div 14^\circ$ – от 1,5 до 2 рядов ромбических выступов.

Из таблицы 4.1 видно, что при малых углах ромба в диапазоне $6^\circ \div 14^\circ$ при обтекании ромбических выступов сверхзвуковым потоком со скоростью $M=3$ перед острыми кромками 1-го ряда ромба происходит заметное понижение давления. Затем давление достигает максимального значения в сужающихся канавках, расположенных между ромбическими выступами первого ряда, а понижение давления наблюдается в расходящихся канавках.

Максимальное давление составило $0,35 \div 0,40$ МПа. Замечено, что давление увеличивается с увеличением угла ромба до 14° .

В случае обтекания сверхзвуковым потоком насадка с ромбическим рельефом с углом ромба 14° на 1-ом ряде ромбического выступа давление ведет себя как при обтекании пластины с рядом выступов на ее длину. Заметное понижение давления происходит в сужающихся канавках 2-го ромбического ряда, а в расходящихся канавках – некоторое повышение давления.

Из таблицы 4.1 видно, что при малых углах ромба в диапазоне $6^\circ \div 14^\circ$ при обтекании ромбических выступов сверхзвуковым потоком со скоростью $M = 3$ отрыв потока происходит перед острыми кромками ромба в конце ромбических выступов.

Можно также заметить, что посередине выступов, где имеет место быть самая широкая их часть, происходит некоторое замедление скорости потока.

Из таблицы 4.2 видно, что при средних углах ромба (группа 2) в диапазоне $16^\circ \div 24^\circ$ на длину плоского соплового насадка с ромбическим рельефом укладывается от 2-х до 3,5 рядов ромбических выступов.

Максимальное давление составило $0,43 \div 0,58$ МПа. Замечено, что давление увеличивается с увеличением угла ромба до 24° .

Из таблицы 4.2 также видно, что при угле ромба $16^\circ \div 18^\circ$ на длину плоского соплового насадка с ромбическим рельефом укладывается 2 ряда ромбических выступов. При обтекании соплового насадка с ромбическими выступами с углами ромба $16^\circ \div 18^\circ$ сверхзвуковым потоком со скоростью $M=3$ перед острыми кромками 1-го ряда ромба происходит заметное понижение давления.

Таблица 4.1. Поля давления и изолинии чисел Маха при сверхзвуковом обтекании сопловых насадков с ромбическим рельефом с углом ромба в диапазоне $6^\circ \div 14^\circ$ (начало)

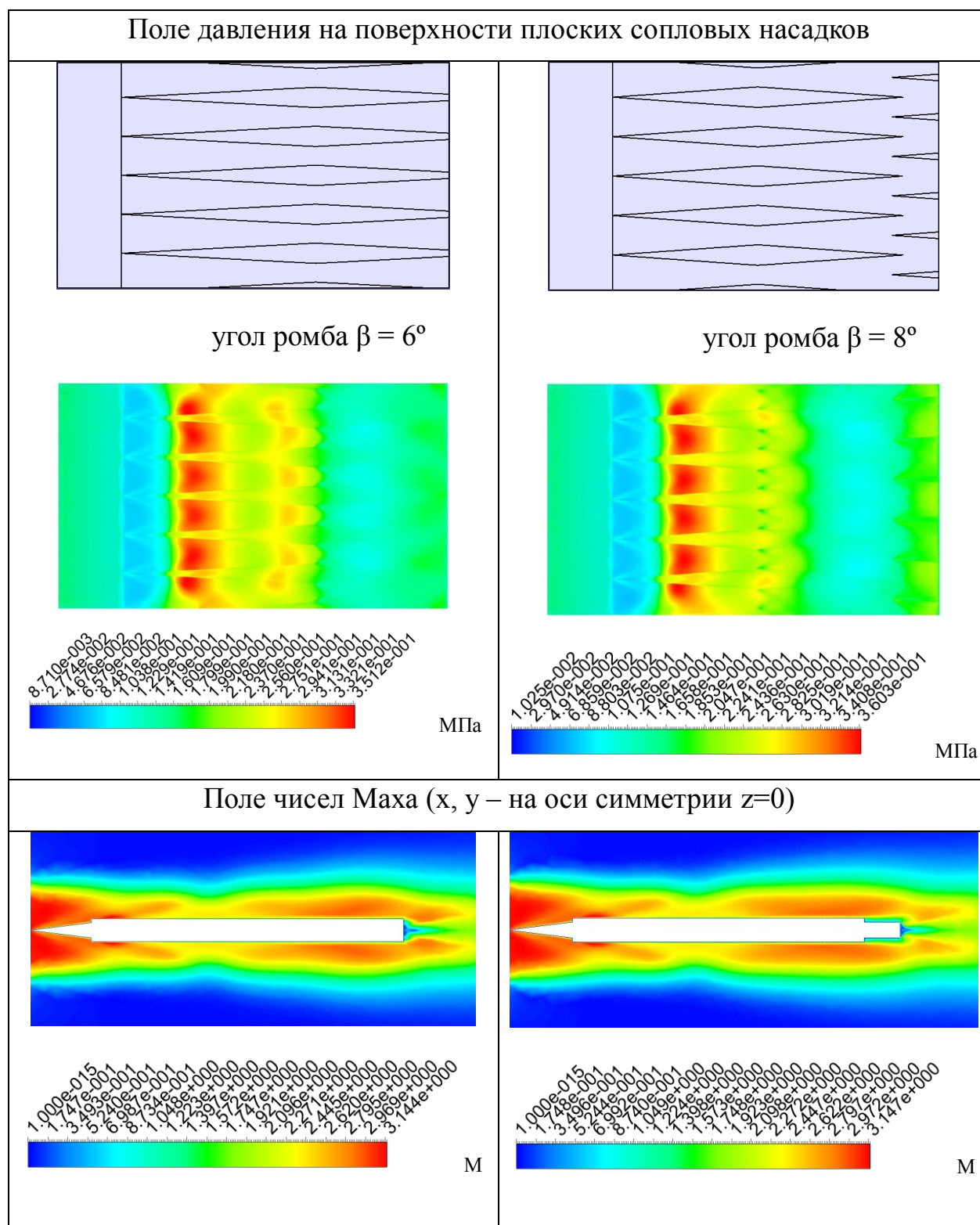


Таблица 4.1. Поле давления и изолинии чисел Маха при сверхзвуковом обтекании сопловых насадков с ромбическим рельефом с углом ромба в диапазоне $6^\circ \div 14^\circ$ (продолжение)

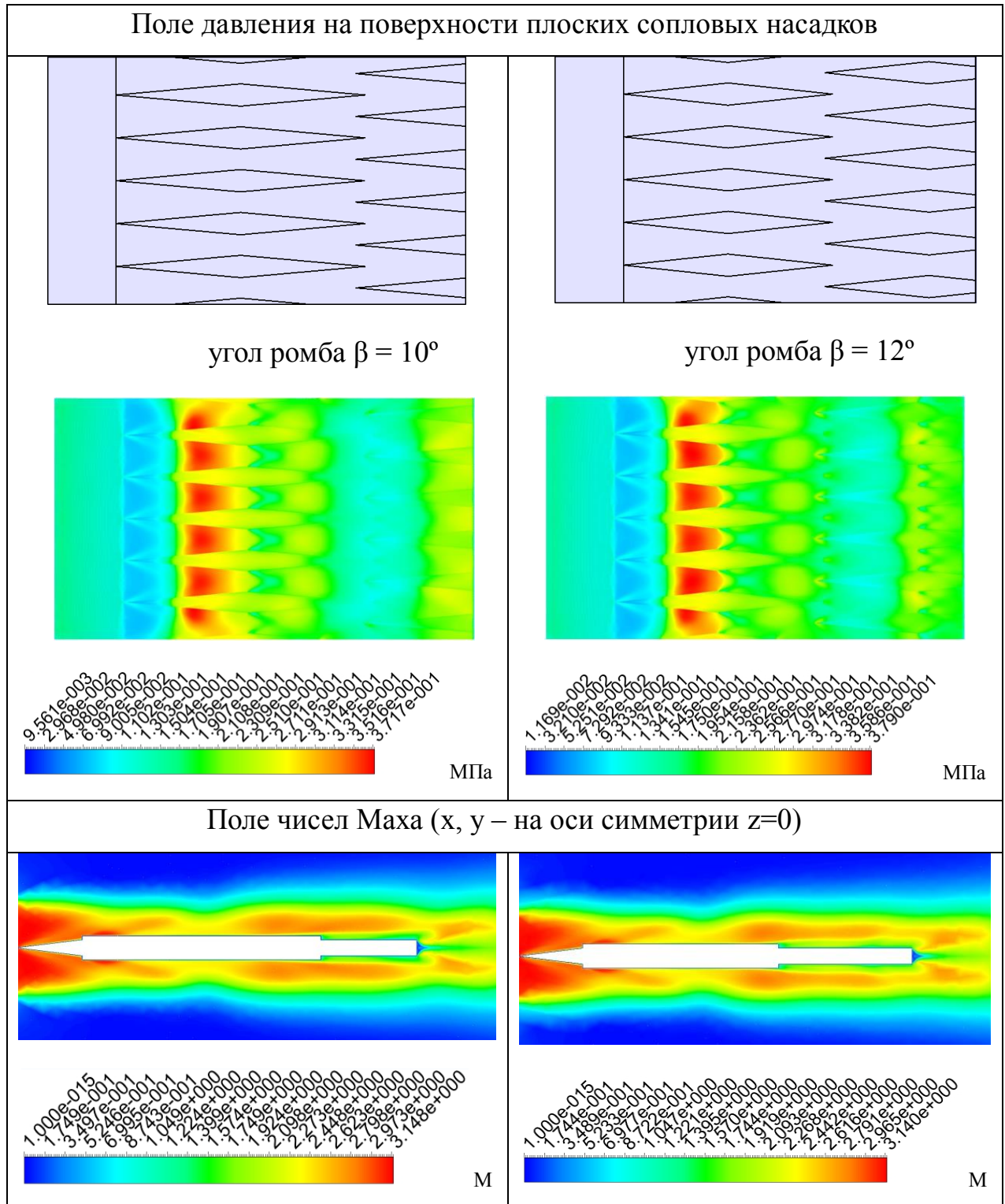
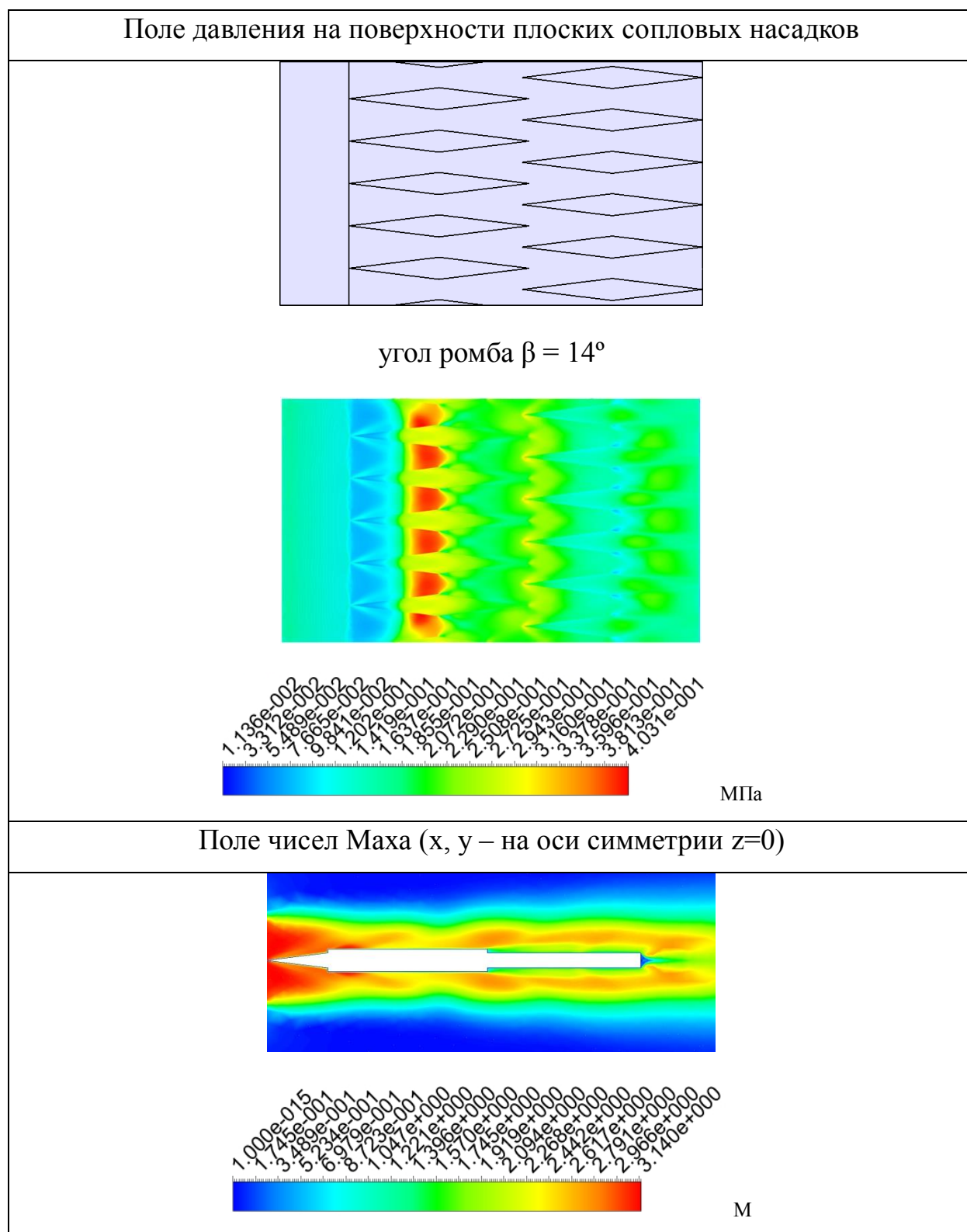


Таблица 41. Поля давления и изолинии чисел Маха при сверхзвуковом обтекании сопловых насадков с ромбическим рельефом с углом ромба в диапазоне $6^\circ \div 14^\circ$ (окончание).



Затем давление достигает максимального значения в самом узком сечении сужающихся и расширяющихся канавок, расположенных между ромбическими выступами 1-го ряда, а понижение давления наблюдается в зазоре, расположенном между 1-ым и 2-ым рядами ромбических выступов.

Можно также заметить, что повышение давления происходит в сужающихся канавках 2-го ряда, а в расширяющихся канавках – понижение давления.

При углах ромба $20^\circ \div 24^\circ$ на длину соплового насадка укладывается 3 ряда ромбических выступа. При обтекании сверхзвуковым потоком насадка с ромбическими выступами с углом ромба $20^\circ \div 24^\circ$ в сужающихся канавках 1-го ряда выступов происходит заметное понижение давления. Повышение давления достигает своего максимального значения в сужающихся канавках 1-го и 2-го рядов выступов, а некоторое понижение давления происходит в зазоре между 1-ым и 2-ым рядами ромбических выступов.

Из таблицы 4.2 также видно, что при обтекании сверхзвуковым потоком со скоростью $M = 3$ насадка с 3-мя рядами ромбических выступов с углом ромба 24° заметное снижение давления происходит в сужающихся канавках 1-го ряда выступов и в расширяющихся канавках 3-го ряда выступов.

Можно также заметить, что при обтекании 2-го ряда ромбических выступов не происходит как повышения, так и понижения давления.

Результаты расчетов, полученных при обтекании сверхзвуковым потоком газа со скоростью $M = 3$ сопловых насадков с ромбическими выступами с углами ромба $35^\circ \div 50^\circ$ (группа 3) представляют наибольший интерес, так как по сравнению с предыдущими двумя группами на длину насадков укладывается наибольшее количество рядов ромбических выступов ($5 \div 7$ рядов).

Таблица 42. Поля давления и изолинии чисел Маха при сверхзвуковом обтекании сопловых насадков с ромбическим рельефом с углом ромба в диапазоне $16^\circ \div 24^\circ$ (начало)

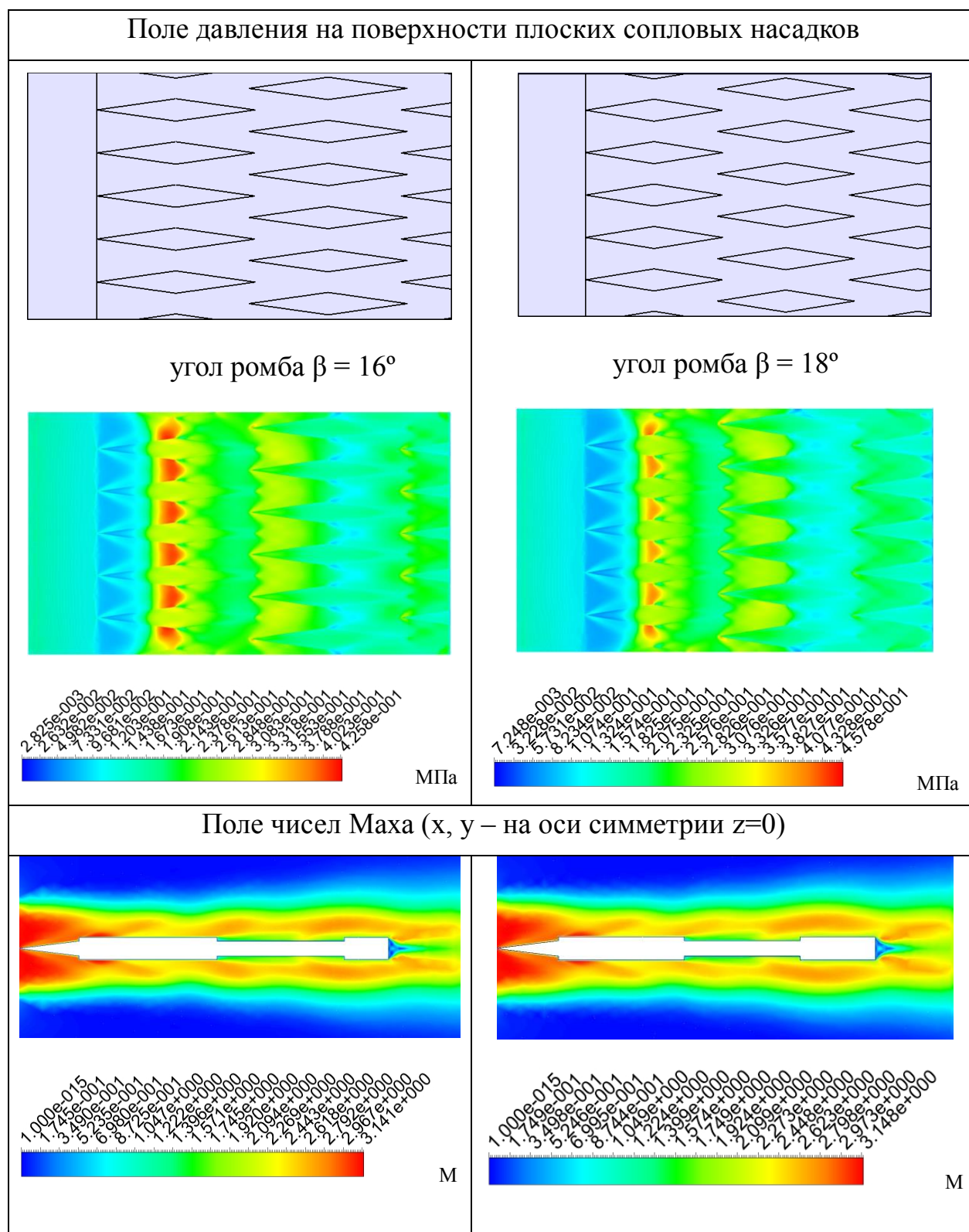


Таблица 4.2. Поля давления и изолинии чисел Маха при сверхзвуковом обтекании сопловых насадков с ромбическим рельефом с углом ромба в диапазоне $16^\circ \div 24^\circ$ (продолжение)

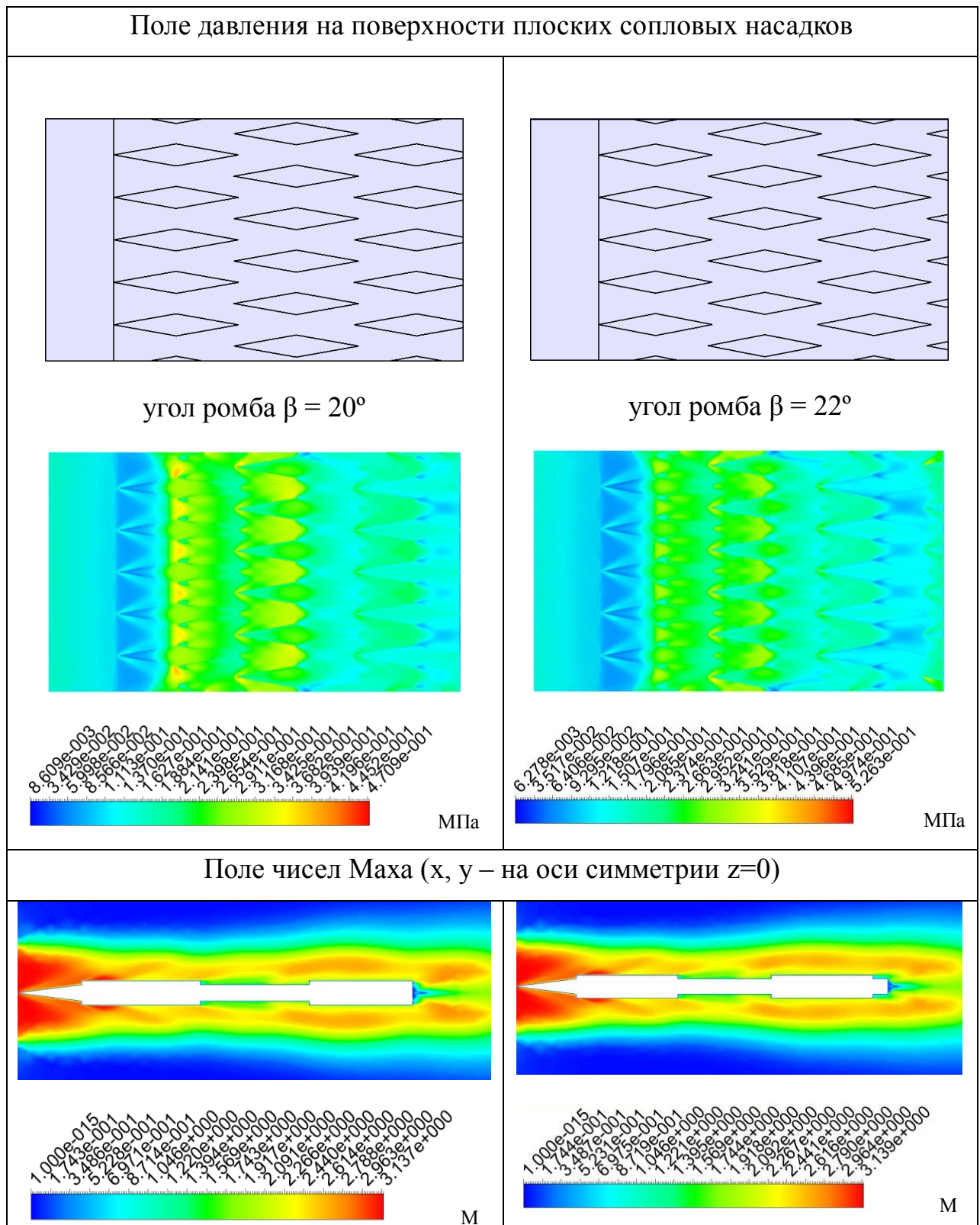
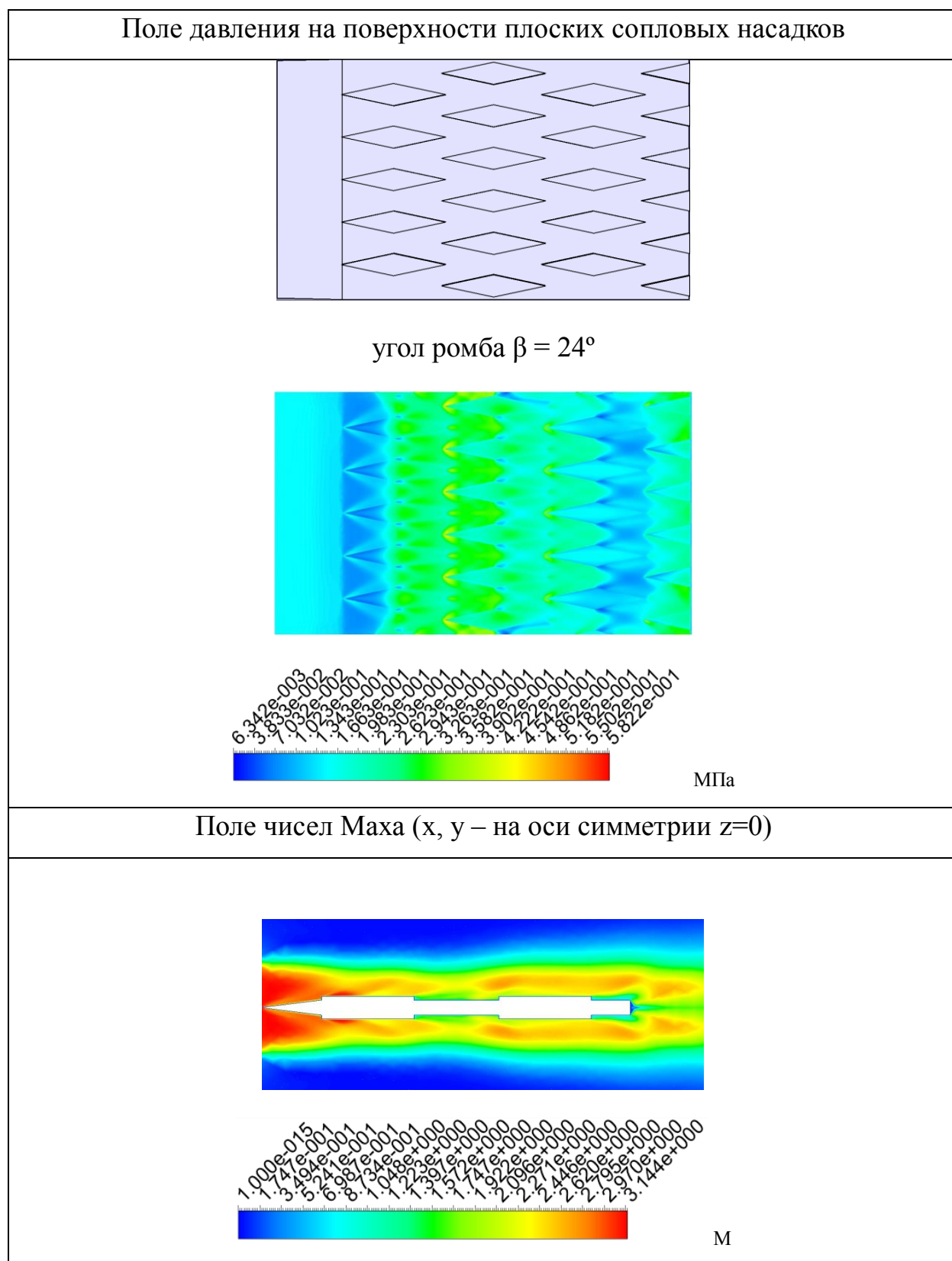


Таблица 4.2. Поля давления и изолинии чисел Маха при сверхзвуковом обтекании сопловых насадков с ромбическим рельефом с углом ромба в диапазоне $16^\circ \div 24^\circ$ (окончание)



Из таблицы 4.3 видно, что при обтекании соплового насадка с ромбическими выступами с углом ромба $35^\circ \div 50^\circ$ сверхзвуковым потоком газа со скоростью $M=3$ происходит существенное понижение давления при обтекании 1-го ряда выступов, а начиная со 2-го ряда наблюдается периодическое распределение давления: повышение давления происходит в сужающихся канавках, а понижение давления – в расширяющихся канавках.

Следует также отметить, что максимальное давление $p = 0,95 \text{ МПа}$ достигается в зонах, расположенных между рельефными выступами второго ряда и боковыми стенками, в результате чего, видимо, происходит несовпадение результатов расчетов с экспериментальными данными [31, 35].

При обтекании соплового насадка с ромбическими выступами с углом ромба 40° и 45° сверхзвуковым потоком газа более высокое распределение давления наблюдалось в сужающихся канавках второго, третьего и четвертого рядов ромбических выступов. При этом максимальное давление составило $1,13 \div 1,14 \text{ МПа}$.

Результаты расчетов показали, что при обтекании соплового насадка с углом ромба 50° достигалось гораздо более равномерное распределение давления в виде синусоиды: в сужающихся канавках – повышение давления, а в расширяющихся канавках – понижение давления.

В таблице 4.3 представлены также изолинии чисел Маха, возникающие при сверхзвуковом обтекании соплового насадка с ромбическими выступами с углами ромба в диапазоне $35^\circ \div 50^\circ$.

Видно, что на острых краях ромбических выступов возникают косые скачки уплотнения, а за выступами – отрыв потока, что замедляет течение потока вдоль плоского соплового насадка с ромбическими выступами.

Таблица 43. Поля давления и изолинии чисел Маха при сверхзвуковом обтекании сопловых насадков с ромбическим рельефом с углом ромба в диапазоне $35^\circ \div 50^\circ$ (начало)

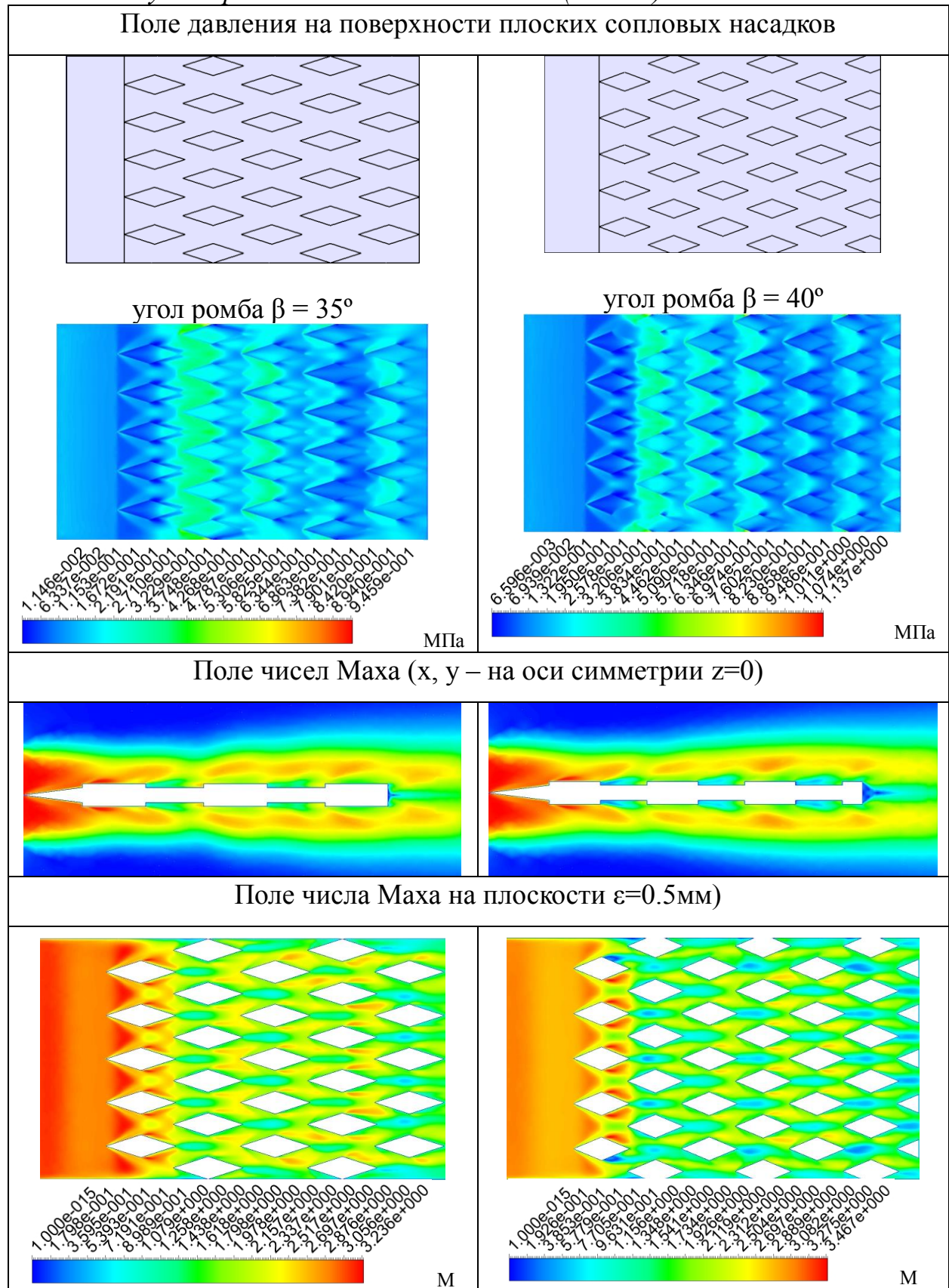
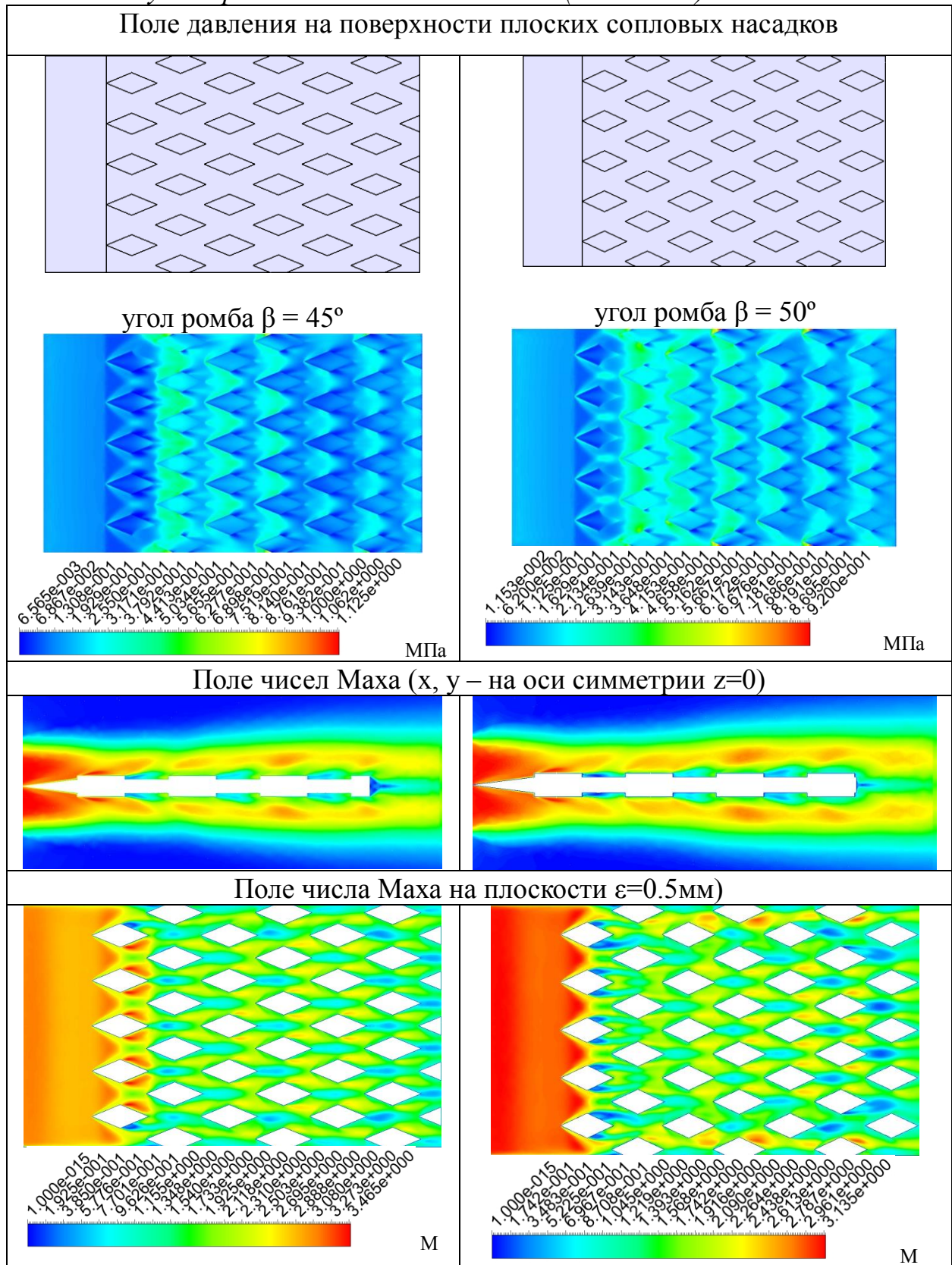


Таблица 4.3. Поля давления и изолинии чисел Маха при сверхзвуковом обтекании сопловых насадков с ромбическим рельефом с углом ромба в диапазоне $35^\circ \div 50^\circ$ (окончание)



4.3 Анализ результатов расчетов

С привлечением сертифицированной программы ANSYS были проведены расчеты потерь тяги в насадках с ромбической рельефной структурой поверхности. В качестве исходных данных для расчетов взяты геометрические размеры плоских насадков с ромбическим рельефом, которые были испытаны на дифференциальной установке [31, 35].

Обработанные результаты CFD моделирования обтекания сверхзвуковым потоком газа пластин, на поверхности которых с обеих сторон имеются ромбические выступы, сведены в таблицу 4.4 и построен график зависимости величины силы волнового сопротивления от изменения угла ромба β (рис. 4.7). С помощью метода наименьших квадратов получены линии тренда - линейная и полиномиальная.

Таблица 4.4. Сила волнового сопротивления (указаны в ньютонах), действующая на соплового насадка с ромбическим рельефом при разных углах ромба

Угол, [...°]	Сила сопротивления, [Н]	Угол, [...°]	Сила сопротивления, [Н]
6	13,09944	20	14,53264
8	12,57596	22	14,7192
10	13,63292	24	17,13872
12	12,75852	35	23,69896
14	12,65512	40	30,36928
16	14,91032	45	30,5124
18	15,97008	50	30,15516

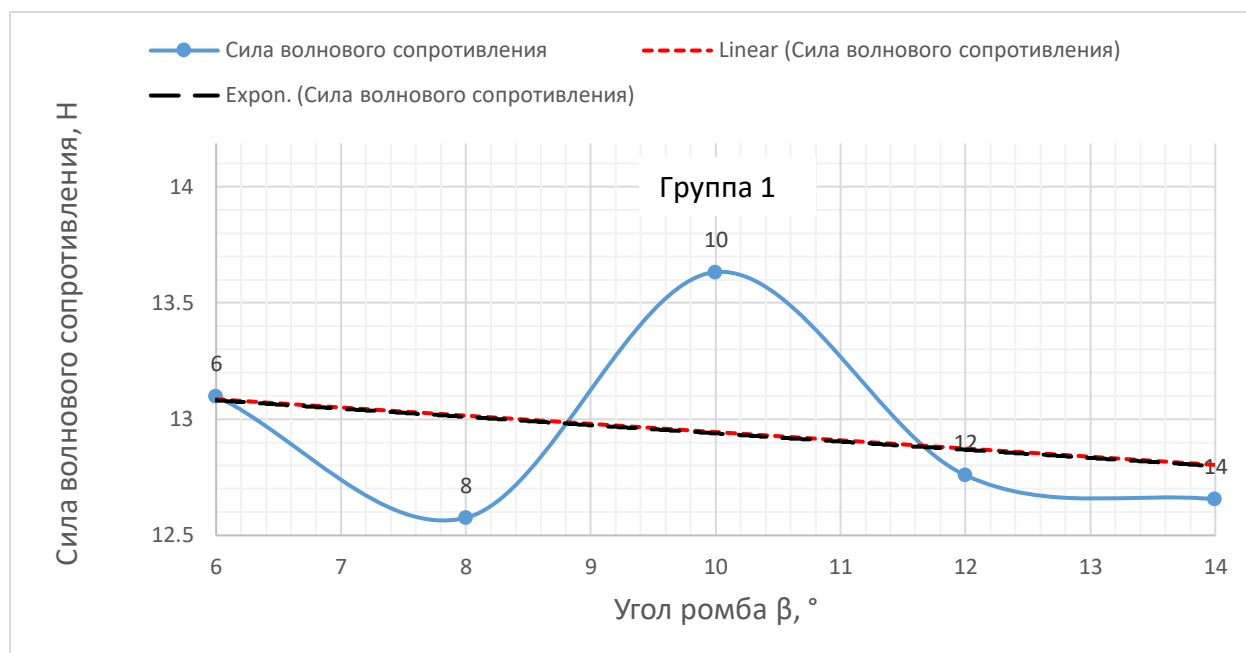
Результаты расчетов показали, что величина силы волнового сопротивления, возникающая при сверхзвуковом обтекании плоских сопловых насадков с ромбическим рельефом при разных углах ромба, составила от 12,58 до 30,5 Н (табл. 4.4).

Можно заметить, что с увеличением угла ромба величина силы волнового сопротивления возрастает.

Видно также, что характер кривой волнового сопротивления для каждой группы угла ромба обладает свойством периодичности (имеются максимумы и

минимумы). Так, сила волнового сопротивления, возникающая при сверхзвуковом обтекании плоских сопловых насадков с ромбическими выступами с малым углом ромба ($6^\circ \div 14^\circ$), составила от 12,58 до 13,51 Н (Рис. 4.7.). При этом наибольшая сила волнового сопротивления приходится при углах ромба $6^\circ - 13,09944$ Н и $10^\circ - 13,63292$ Н, а минимальное значение – при углах $8^\circ - 12,57596$ Н, $12^\circ - 12,75852$ Н и $14^\circ - 12,65512$ Н.

Рис. 4.7. Зависимость силы волнового сопротивления при обтекании насадка с ромбическим рельефом с углами ромба 1-ой группы



При обтекании насадков с ромбическими выступами со средним углом ромба ($16^\circ \div 24^\circ$) сила волнового сопротивления составила от 14,53Н до 17,14Н (Рис. 4.8), а при обтекании насадков с большими углами ромба ($35^\circ \div 50^\circ$) – от 23,70Н до 30,51Н (Рис. 4.9). При этом наибольшая сила волнового сопротивления приходится при обтекании насадков с углами ромба $18^\circ - 15,97008$ Н; $24^\circ - 17,13872$ Н, а минимальное значение силы волнового сопротивления при обтекании насадков с углами ромба 16° , 20° , и 22° . Для третьей группы максимальное значение силы волнового сопротивления достигается при углах и $45^\circ - 30,5124$ Н, а минимальное значение при угле ромба 35° .

Рис. 4.8. Зависимость силы волнового сопротивления при обтекании насадка с ромбическим рельефом с углами ромба 2-ой группы

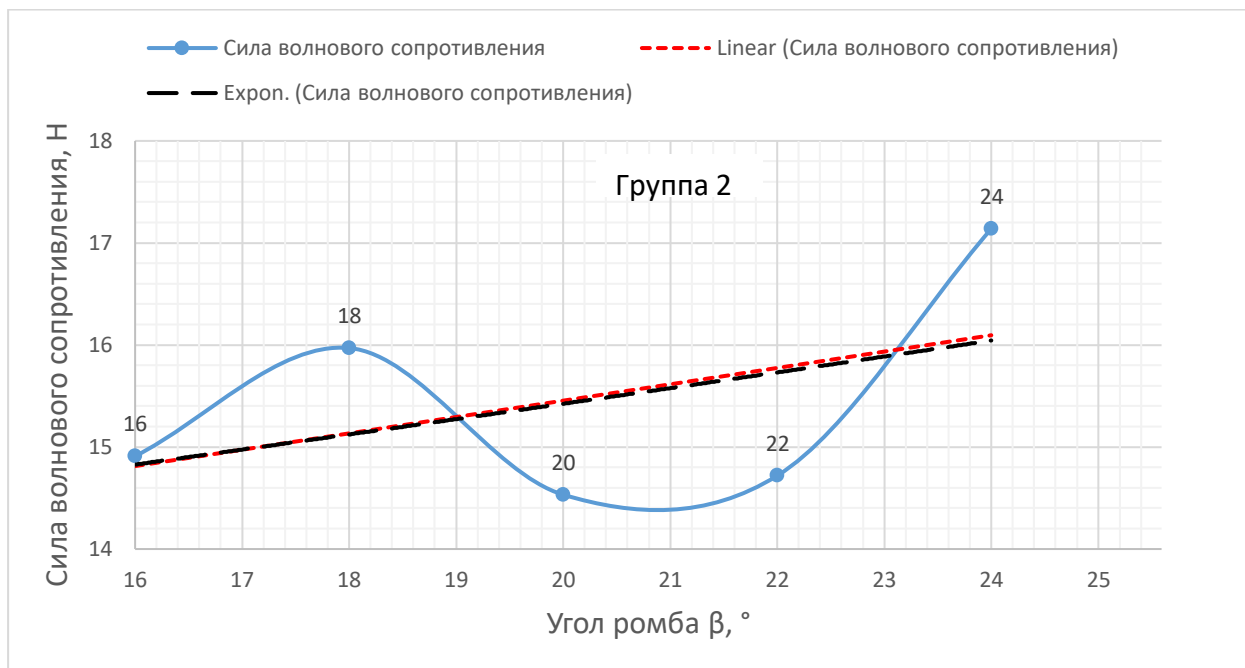
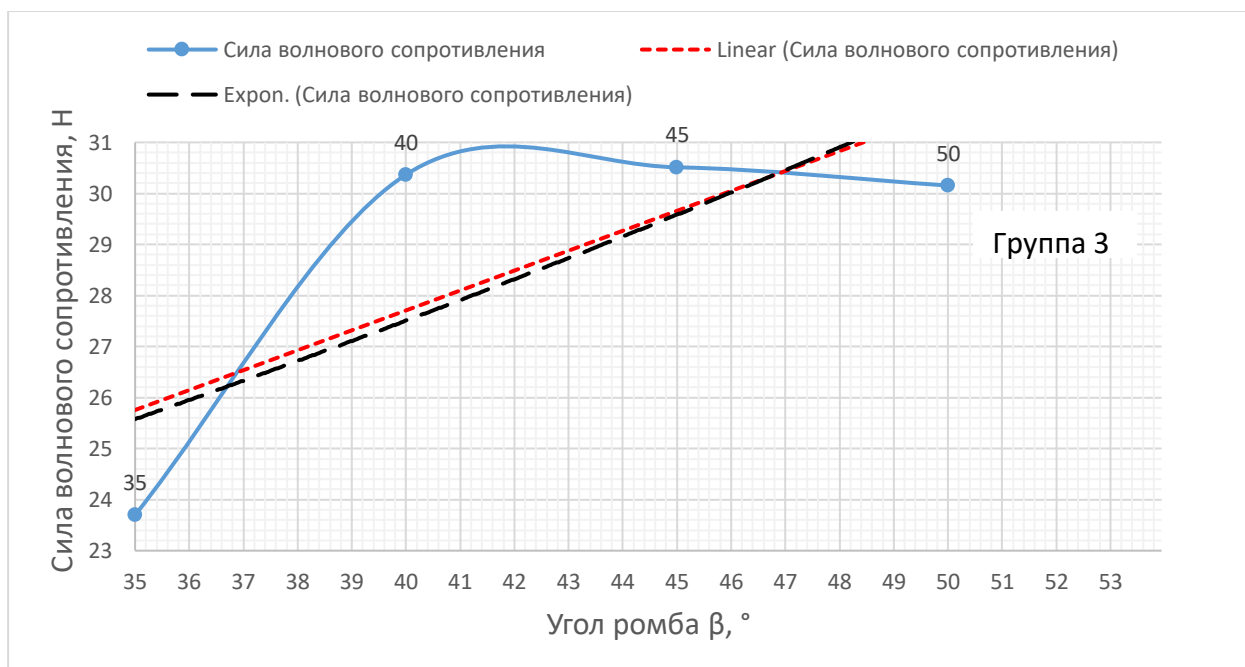


Рис. 4.9. Зависимость силы волнового сопротивления при обтекании насадка с ромбическим рельефом с углами ромба 3-ой группы



Из рис. 4.9 видно, что при обтекании плоского соплового насадка с ромбическими выступами с большим углом ромба в диапазоне $35^\circ \div 50^\circ$ сила

волнового сопротивления резко возрастает по сравнению с меньшими углами ромба более чем в два раза. Это объясняется тем, что с увеличением угла ромба увеличивается количество рядов ромбических выступов ($5 \div 7$ рядов), укладываемых на длину насадка, которые и приводят к повышению силы волнового сопротивления. Заметим, что для малых углов ($6^\circ \div 14^\circ$) количество рядов ромбических выступов, укладываемых на длину насадка, составляет от одного до двух рядов, а для средних углов ромба ($16^\circ \div 24^\circ$) от двух до трех рядов ромбических выступов (табл. 4.1 и 4.2).

На рис. 4.10 приведено сравнение результатов расчета волнового сопротивления с экспериментальными данными, приведенными в работе [31, 35] (построен график зависимости потери тяги ζ при сверхзвуковом обтекании плоского соплового насадка с ромбическим рельефом).

Следует отметить, что экспериментальные данные для насадка с ромбическими выступами с углом ромба 24° отсутствуют и, следовательно, результаты численных расчетов насадка с аналогичным углом были удалены из графика (рис. 4.9).

Из рис. 4.10 видно, что потери тяги, возникающие при сверхзвуковом обтекании насадка с ромбическими выступами с небольшими углами ромба ($6^\circ \div 22^\circ$), составили $\zeta = 6,2 \div 7,9 \%$. Как видно из рисунка, в целом, результаты расчетов совпадают по характеру кривой с экспериментальными данными [31, 35]. Видно, что имеет место некоторое расхождение в характере потерь при малых углах ромба (в эксперименте максимум потерь возникает при угле ромба 8° , а в расчетах – при угле ромба 10°). Это расхождение можно объяснить тем, что у экспериментальной модели была спилена под углом 7° начальная часть ромбических выступов (рис. 4.10 и 4.11). Из-за отсутствия начальной части ромбических выступов на насадке образуется гладкая поверхность по всей ширине насадка, в результате чего не наступает понижения давления на входе в сужающиеся впадины, образованные между ромбическими выступами, и кризис сверхзвукового обтекания потоком газа плоского соплового насадка с ромбическими выступами наступает раньше.

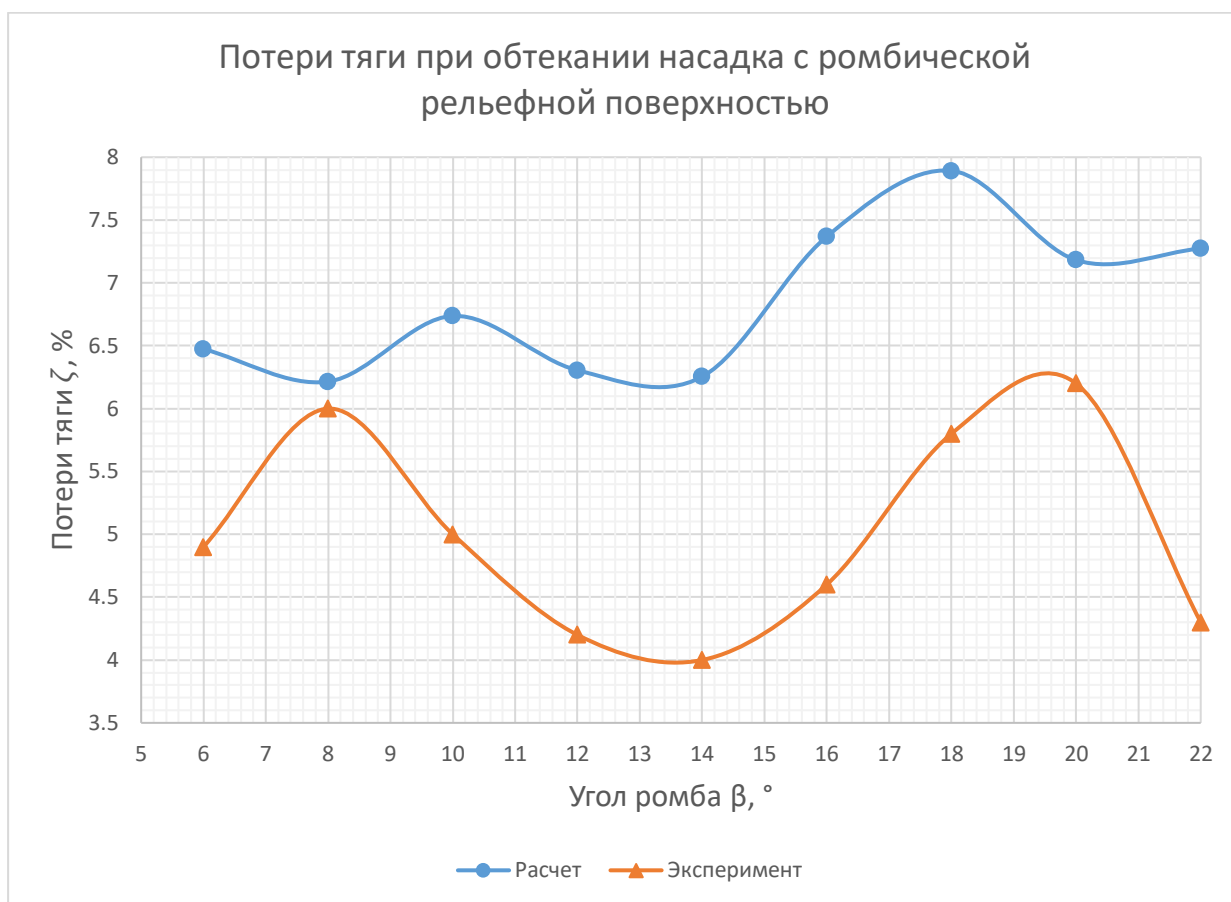


Рис. 4.10. Зависимость потери тяги ζ , % от угла ромба (Сравнение результатов расчета с экспериментальными данными)

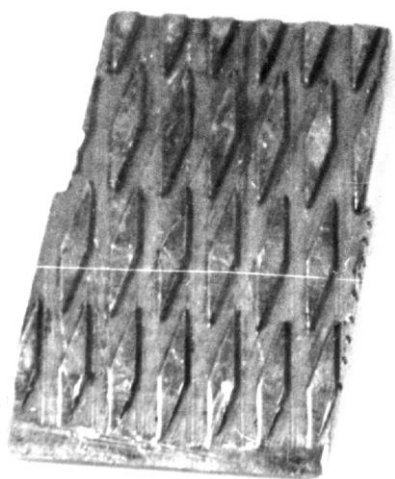


Рис. 4.11. Опытная модель

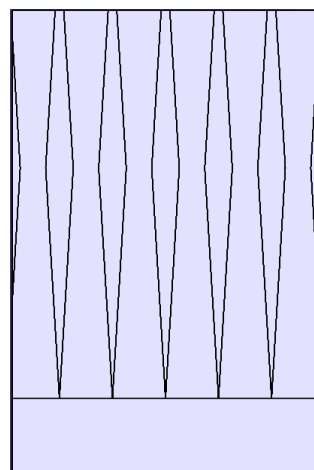
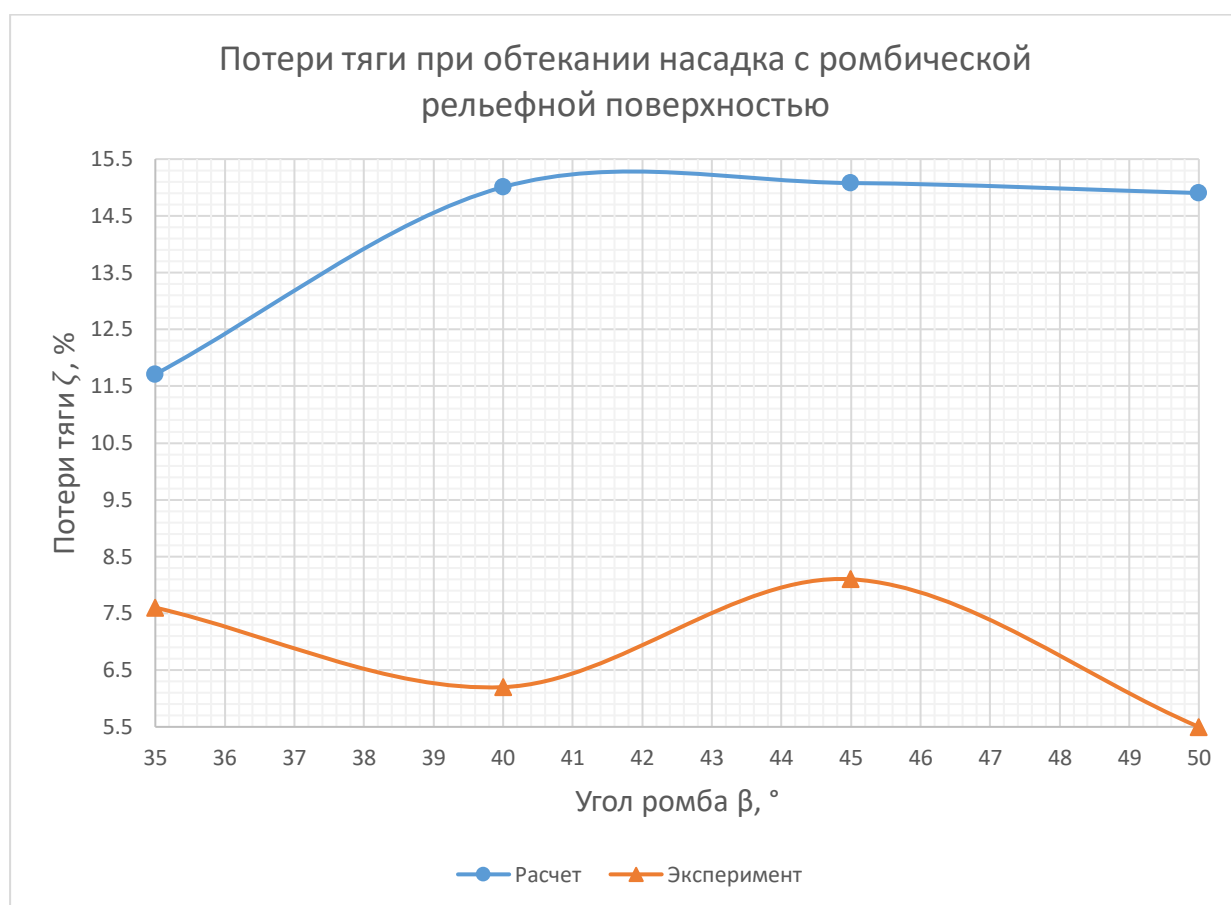


Рис. 4.12. Расчетная модель

При сверхзвуковом обтекании плоских сопловых насадков с ромбическими выступами с углом ромба в диапазоне $35^\circ \div 50^\circ$ имеет место некоторое расхождение результатов расчета с экспериментальными данными (рис. 4.13). Это можно объяснить тем, что, как показано в табл. 4.3, понижение давления происходит по всей поверхности 1-го ряда ромбических выступов и только со 2-го ряда выступов характер течения восстанавливается (становится периодической).



*Рис. 4.13. Зависимость потери тяги ζ , % от угла ромба
(Сравнение результатов расчета с экспериментальными данными)*

Кроме того, другой причиной несоответствия результатов численного моделирования с экспериментальными данными может явиться разная величина интенсивности турбулентности, используемая для моделирования. При установлении граничных условий для CFD моделирования сверхзвукового обтекания плоских сопловых насадков с ромбическими выступами часто бывает необходимо оценить интенсивность турбулентности на входе в плоское сопло.

Следует отметить, что при проведении экспериментов с насадками с ромбическими выступами на дифференциальной установке уровень турбулентности газового потока не измерялось [31, 35]. Более того, экспериментальный стенд – дифференциальная установка [33] не была оборудована пакетом сеток для снижения интенсивности турбулентности газового потока, истекающего через модельное плоское сопло.

В данной работе моделирование турбулентности сверхзвукового течения газового потока проводилось с использованием интенсивности турбулентности в 5%, предполагая случай средней турбулентности.

Для того, чтобы понять расхождение в величинах потерь тяги, возникающее между результатами расчетов и экспериментальными данными, а также оценить характер волнового сопротивления ромбической рельефной поверхности дополнительно варьировалось уровень интенсивности турбулентности течения газового потока на входе в плоское сопло. Уровень интенсивности турбулентности течения для всех расчетов моделирования варьировали от 3% до 7%, предполагая, что средний уровень турбулентности соответствует 3%, а высокий – 7%.

Результаты вычислительного эксперимента – зависимость силы волнового сопротивления (указаны в ньютонах) от изменения угла ромба β ромбических выступов, расположенных на поверхности насадка при разной интенсивности турбулентности потока 3%; 5%; 7% представлены на рис. 4.14.

Результаты расчетов показали, что уровень интенсивности турбулентности газового потока на входе в сопло слабо влияет на силу волнового сопротивления (рис. 4.14). Разница величин изменения силы волнового сопротивления, возникающего при обтекании сверхзвуковым потоком газа насадка с ромбическим рельефом, находится в пределах 3-х значимых цифр. Это можно объяснить тем, что из-за скорость рабочего тела (воздуха) на входе сопло составляет всего 11,02 м/с.

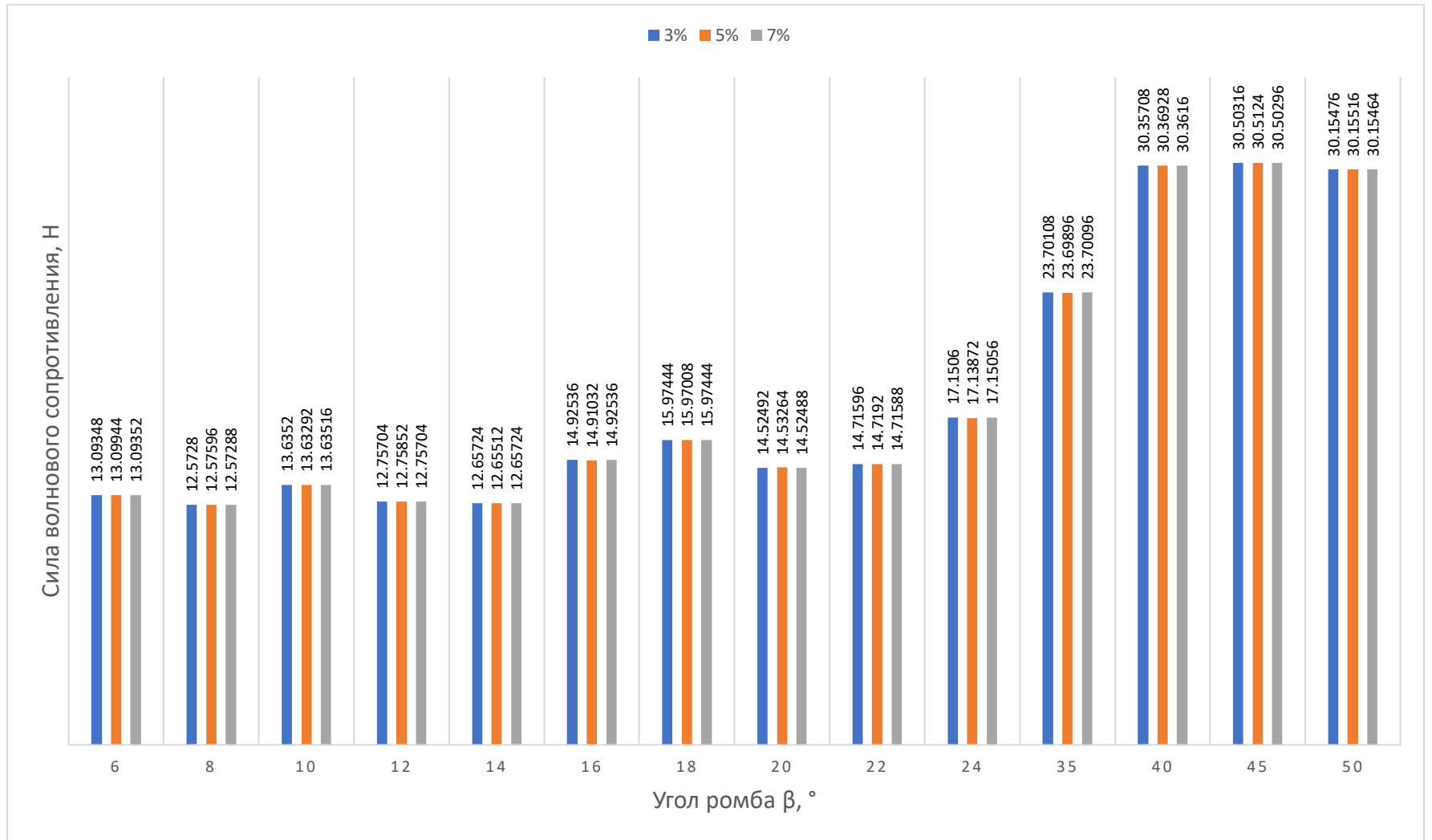


Рис. 4.14. Зависимость силы волнового сопротивления (указаны в ньютонах) от угла ромба β при разной интенсивности турбулентности потока 3%; 5%; 7%

Для одного насадка с ромбическим рельефом с углом ромба 22° варьировали также величину интенсивности турбулентности от 3% до 100%. Результаты расчетов сведены в таблицу 4.5 и построен график зависимости силы волнового сопротивления от интенсивности турбулентности (рис. 4.15).

Как видно из табл. 4.5, при изменении интенсивности турбулентности от 3% до 7% сила волнового сопротивления, возникающая при сверхзвуковом обтекании потоком газа насадка с ромбическим рельефом, практически остается на одном уровне и составляет $\approx 14,72\text{Н}$, а при изменении интенсивности от 7% до 30% происходит увеличение силы волнового сопротивления от $14,72\text{Н}$ до $14,95\text{Н}$. При дальнейшем повышении интенсивности от 30% до 100% сила волнового сопротивления практически остается постоянной, увеличиваясь в пределах $1,5\% \div 1,65\%$.

Результаты исследования зависимости силы волнового сопротивления одного ромбического выступа от номера ряда, в котором он находится сведены в таблицу № 4.6 и построены графики зависимости (рис 4.16 ÷ 4.19). Здесь обработке подвергнуты ромбические выступы, расположенные по центру насадка и на всей его длине, то есть ромбические выступы, расположенные на оси симметрии $z=0$.

Как видно из рис. 4.17, при сверхзвуковом обтекании потоком газа одного ромбического выступа с малым углом ромба в диапазоне $6^\circ \div 14^\circ$ (на насадке укладывается от 1-го до 2-х рядов ромбических выступов) сила волнового сопротивления с увеличением угла ромба (с появлением 2-го ряда) линейно уменьшается. Видно также, что неполный ромбический выступ с углом ромба 6° имеет самую высокую силу волнового сопротивления.

Из рис. 4.18 видно, что при сверхзвуковом обтекании потоком газа одного ромбического выступа со средним углом ромба в диапазоне $16^\circ \div 24^\circ$ (на насадке укладывается от 2-х до 4-х рядов ромбических выступов) наблюдается периодическое изменение силы волнового сопротивления с максимальной

амплитудой во втором ряду, а в последующих рядах амплитуда снижается, достигая минимального своего значения в последнем ряду.

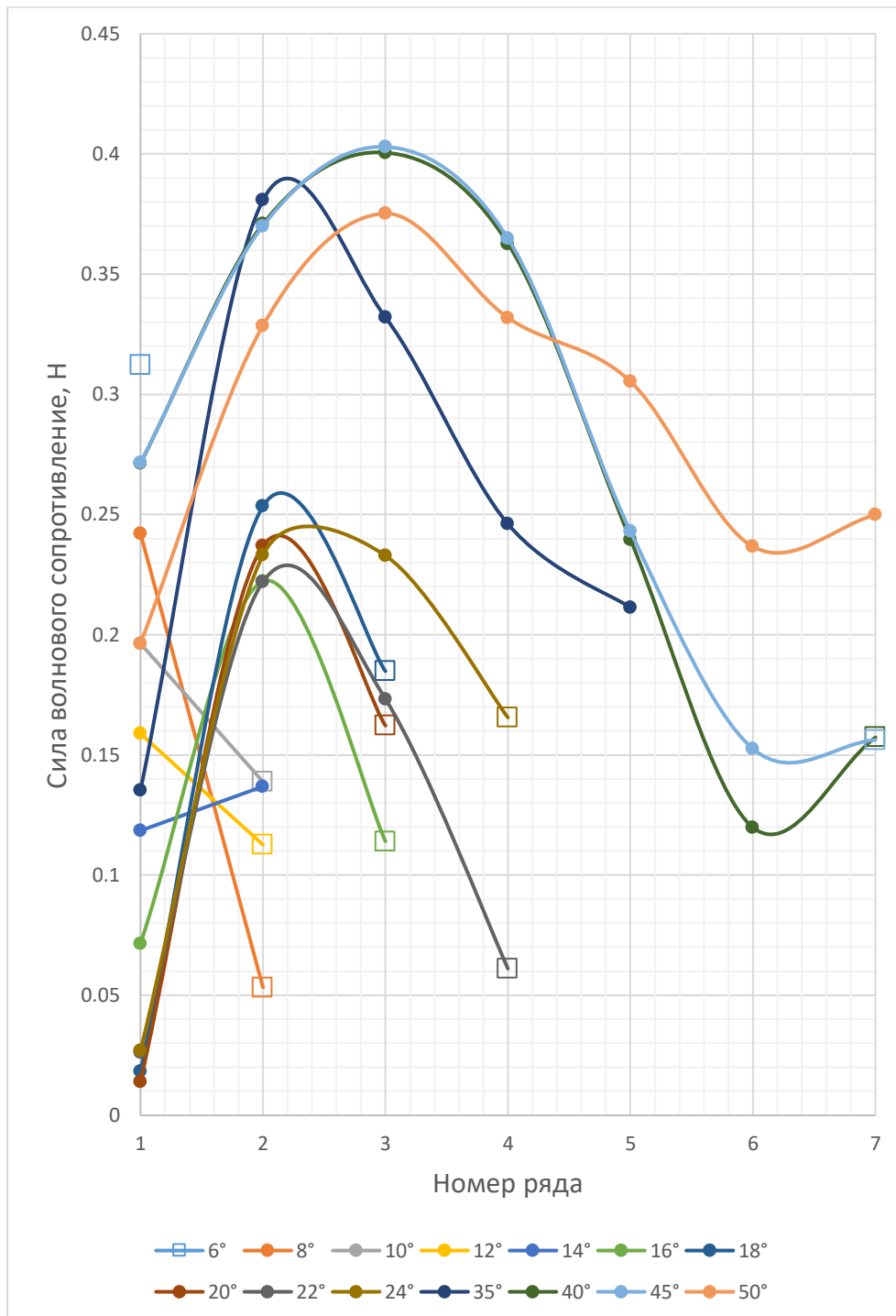


Рис 4.16. Сводный график зависимости силы волнового сопротивления, возникающей при обтекании одного ромбического выступа, расположенного по центру насадка, от номера ряда.

Открытые символы (квадраты) обозначают неполные ромбические выступы. Твердые символы (круги) обозначают полные ромбические выступы

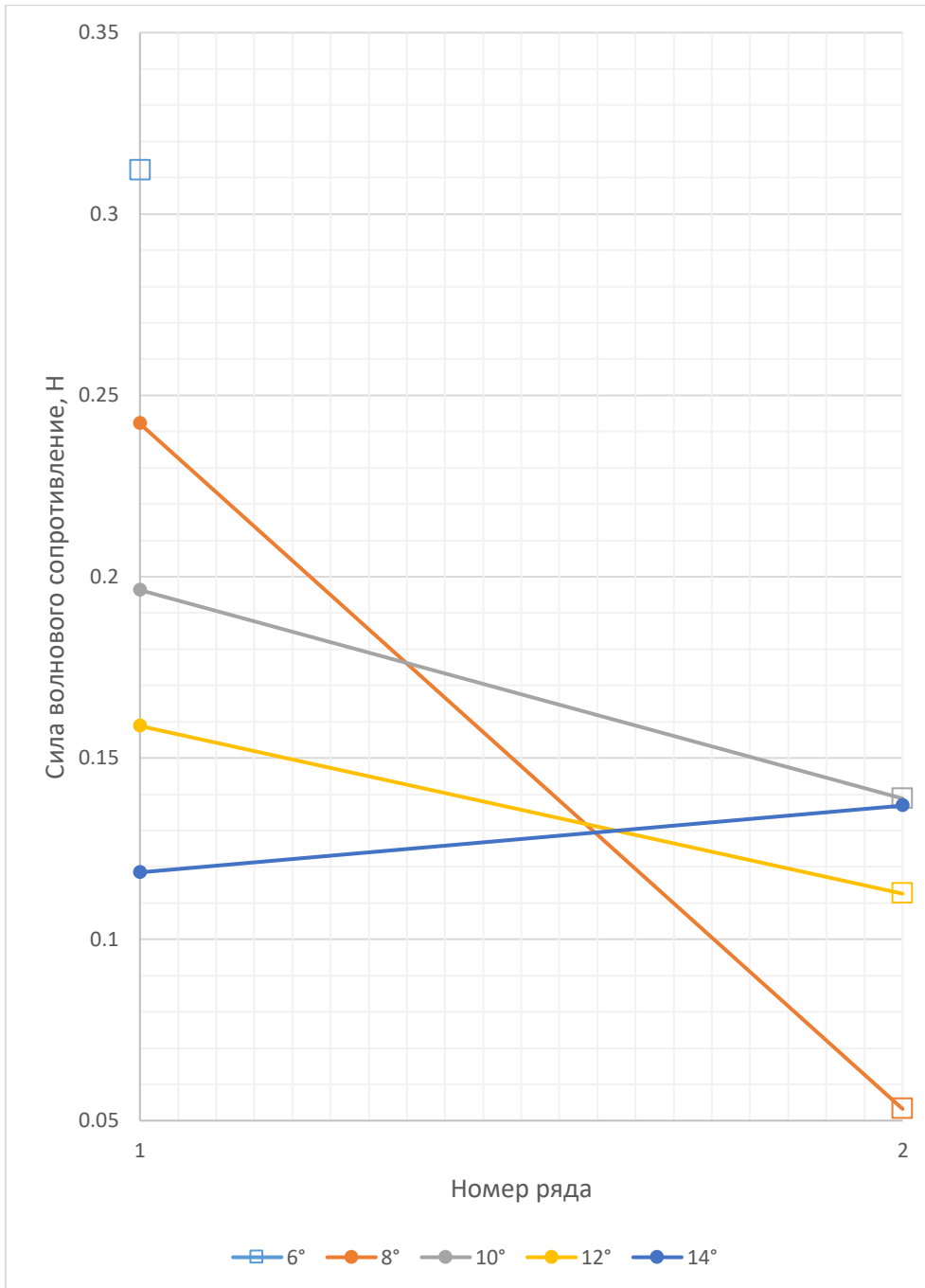


Рис 4.17. Зависимость силы волнового сопротивления одного ромбического выступа для 1-ой группы. Открытые символы (квадраты) обозначают неполные ромбические выступы. Твердые символы (круги) обозначают полные ромбические выступы.

Таблица 4.5. Сила волнового сопротивления, возникающая при обтекании насадка с ромбическим рельефом с углом ромба $\beta = 22^\circ$ при разном уровне интенсивности турбулентности потока

Интенсивность турбулентности, [%]	3	5	7	30	60	90	100
Сила волнового сопротивления, [Н]	14,71596	14,7192	14,71588	14,93712	14,9538	14,96104	14,9628

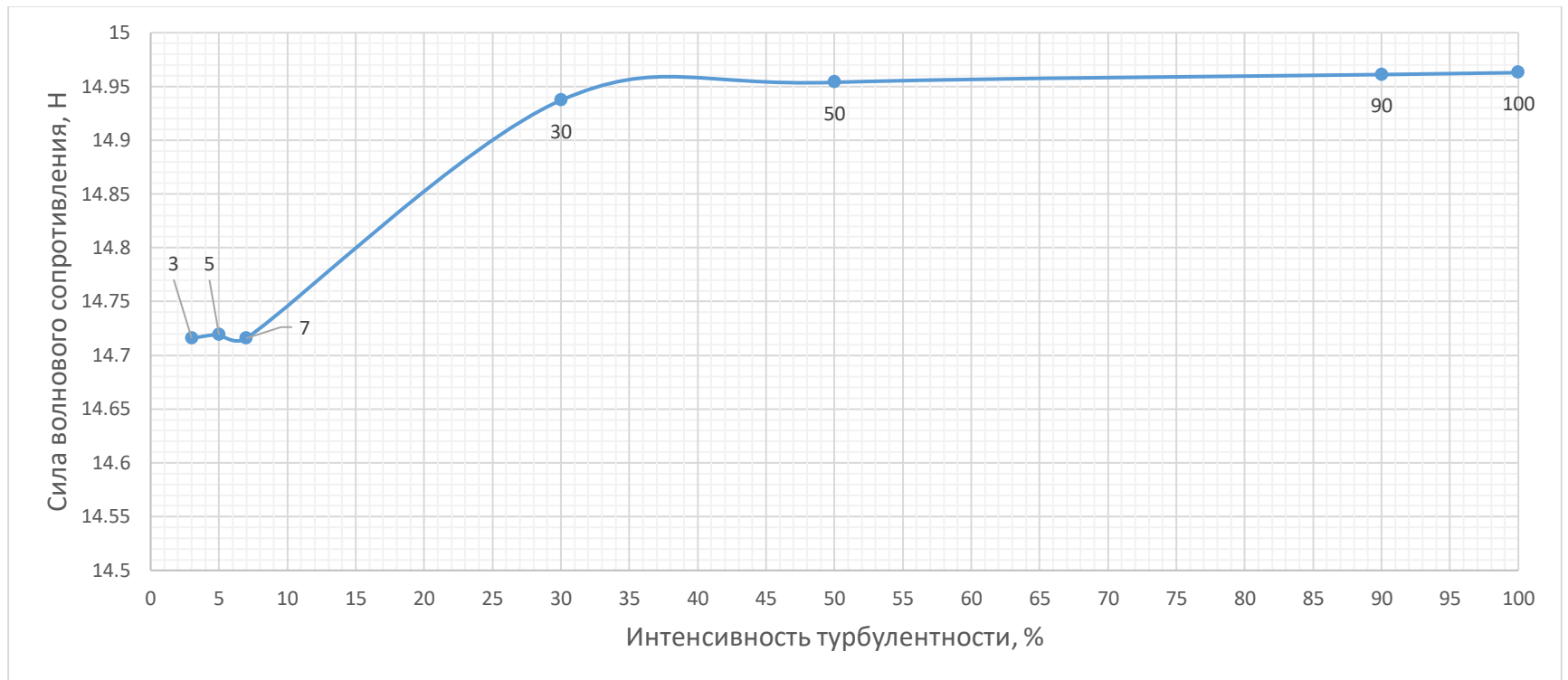


Рис. 4.15. Зависимость силы волнового сопротивления, возникающая при обтекании насадка с ромбическими выступами с углом ромба $\beta = 22^\circ$, от уровня интенсивности турбулентности потока

*Таблица 4.6. Зависимость силы волнового сопротивления, возникающая при обтекании одного ромбического выступа, расположенного по центру насадка, от номера ряда
Значение силы со знаком «*» - означает неполный ромбический выступ*

	1	2	3	4	5	6	7
6	0,312122*						
8	0,242172	0,0532491*					
10	0,1962992	0,138826*					
12	0,1588298	0,11259*					
14	0,1184638	0,136869					
16	0,0715276	0,222177	0,1140126*				
18	0,01825806	0,253403	0,184814*				
20	0,0140587	0,236879	0,1621656*				
22	0,0260994	0,221973	0,1731814	0,0610522*			
24	0,026902	0,233105	0,232904	0,165511*			
35	0,1352406	0,380797	0,332006	0,24605	0,211318		
40	0,271272	0,370887	0,400558	0,362704	0,239614	0,119807	0,1572656*
45	0,271582	0,370065	0,402938	0,364895	0,242998	0,15253	0,1561854*
50	0,1963448	0,328619	0,37521	0,331844	0,30535	0,2366	0,24986

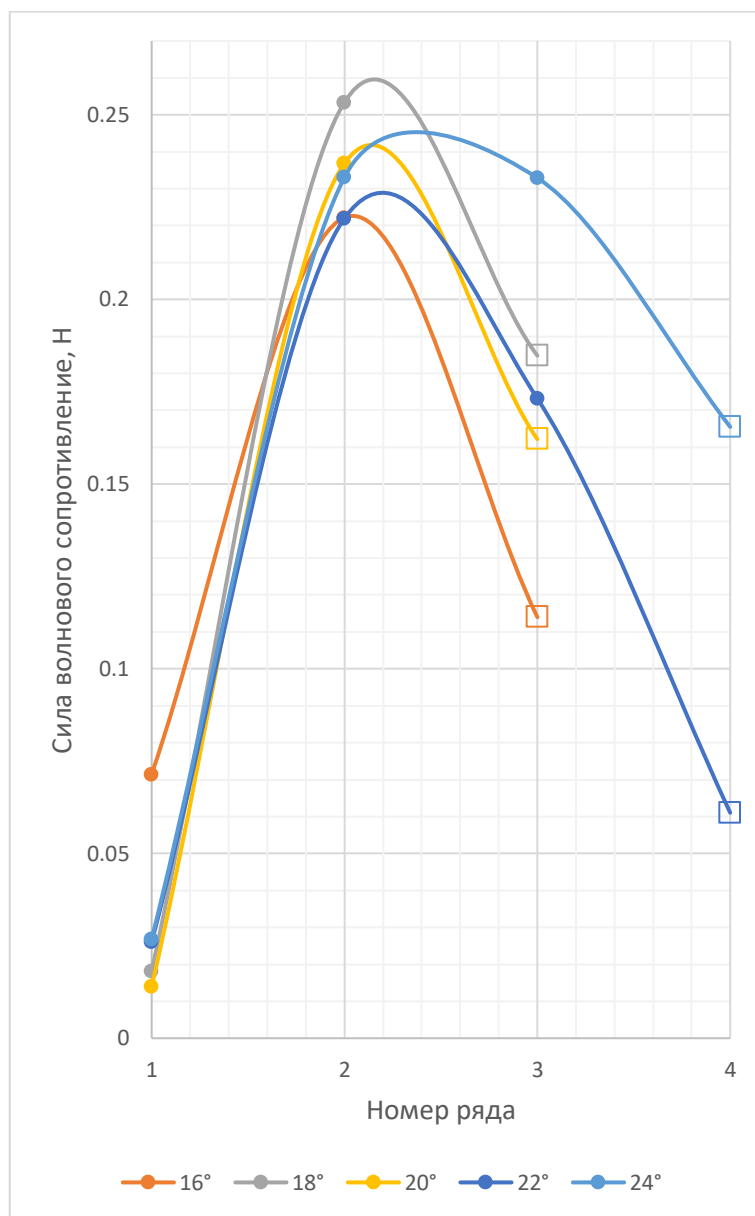


Рис 4.18. Зависимость силы волнового сопротивления одного ромбического выступа для 2-ой группы. Открытые символы (квадраты) обозначают неполные ромбические выступы. Твердые символы (круги) обозначают полные ромбические выступы

Из рис. 4.19 видно, что при сверхзвуковом обтекании потоком газа одного ромбического выступа с большим углом ромба в диапазоне $35^\circ \div 50^\circ$ (на насадке укладывается от 5-ти до 7-ми рядов ромбических выступов) наблюдается периодическое изменение силы волнового сопротивления с максимальной

амплитудой в третьем ряду. В последующих рядах амплитуда снижается, достигая минимального своего значения в шестом ряду, после чего амплитуда вновь начинается повышаться. Здесь исключение составило обтекание ромбического выступа с углом ромба 35° , у которого наибольшая сила волнового сопротивления достигается во втором ряду. Это объясняется тем, что при угле ромба 35° укладывается наименьшее количество ромбических выступов.

Из рис. 4.19 также видно, что при сверхзвуковом обтекании потоком газа ромбических выступов, расположенных на поверхности насадка, с увеличением углом ромба больше 50° или длины насадка (на насадке будет укладываться больше 7-ми рядов ромбических выступов) будет наблюдаться периодическое изменение силы волнового сопротивления с меньшей ее амплитудой колебаний.

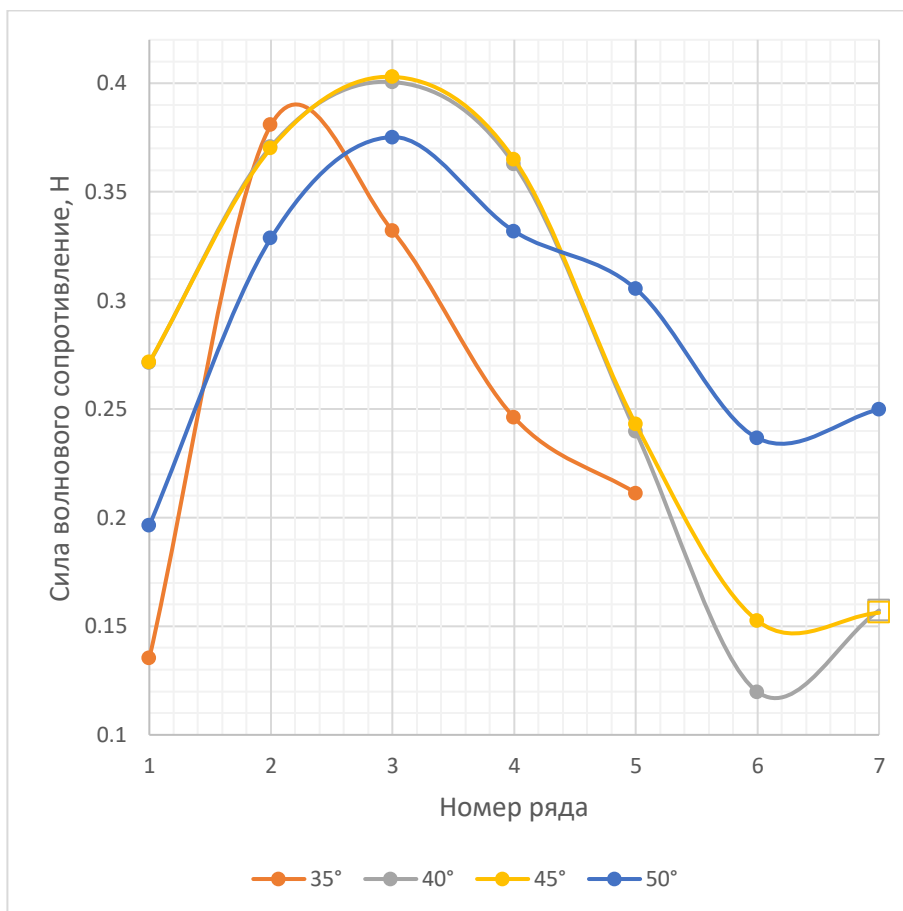


Рис 4.19. Зависимость силы волнового сопротивления одного ромбического выступа для 3-й группы

4.3.1 Исследование влияния расположения ромбических выступов на поверхности насадки на силу волнового сопротивления

Было также исследовано влияние расположения ромбических выступов на поверхности насадки на силу волнового сопротивления. В качестве модели была использована насадка с ромбическими выступами с углом ромба 24° , у которой количество ромбических выступов, расположенных на первом ряду, менялось, то есть первый и второй ряды были взаимозаменяемы друг с другом (рис. 4.20).

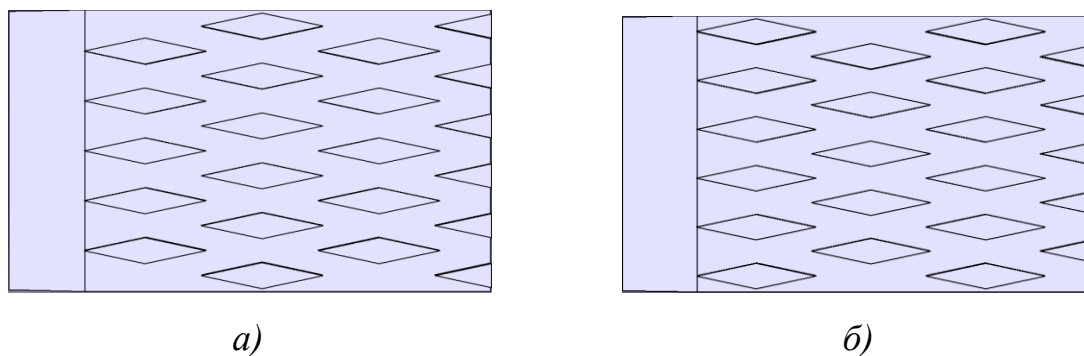
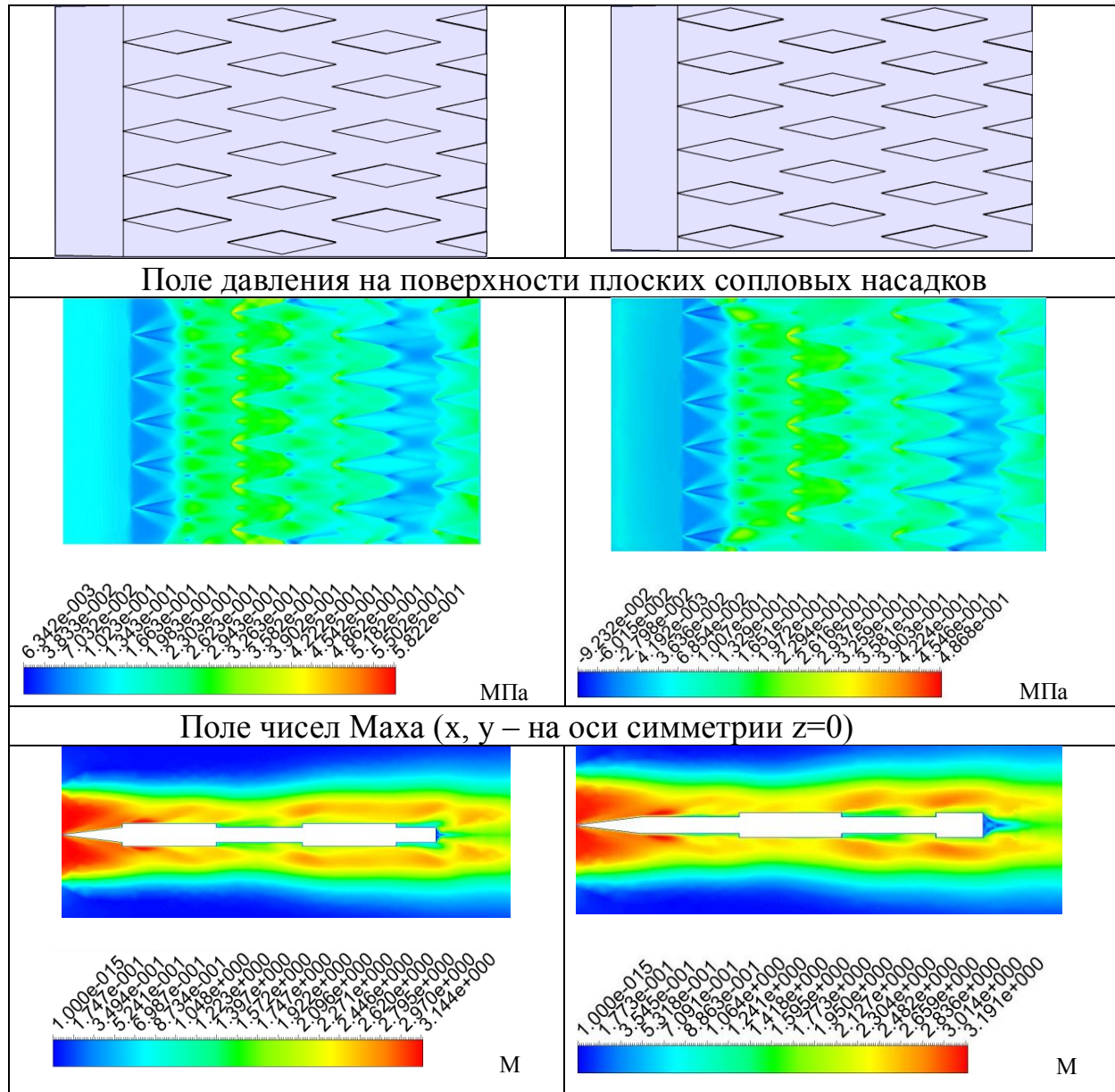


Рис. 4.20. Плоский сопловый насадок с ромбическими выступами с углом ромба 24° :
а) исходная «идеальная» структура поверхности,
б) структура поверхности насадка с перестановкой рядов

Результаты расчетов полей давления и изолиний чисел Маха вдоль насадка с ромбическими выступами с углом ромба 24° при разном количестве в первом ряду выступов приведены в таблице 4.7.

Результаты расчетов показали, что сила волнового сопротивления, возникающая при обтекании сверхзвуковым потоком газа насадка с максимальным количеством выступов в первом ряду (второй вариант рельефной поверхности), составляет 16.65672 Н, что сила волнового сопротивления по сравнению с исходным количеством ромбических выступов меньше на 2,8%.

Таблица 4.7. Поле давления и изолинии чисел Маха при сверхзвуковом обтекании сопловых насадок с ромбическим рельефом с углом ромба 24° с разным количеством выступов в первом ряду



4.4. Выводы по главе

Проведено вычислительное исследование с помощью сертифицированного CFD-продукта ANSYS CFX сверхзвукового обтекания плоских сопловых насадков, имеющих с обеих сторон ромбические выступы с различными углами ромба.

Установлено, что волновое сопротивление по длине соплового насадка с ромбическими выступами носит периодический характер. При этом наибольшая сила волнового сопротивления приходится при углах ромба 6° – 13,09944 Н и 10° – 13,63292Н, 18° – 15,97008Н 45° – 30,5124Н, а минимальное значение – при углах 8° – 12,57596 Н, 12° – 12,75852 Н и 14° – 12,65512 Н.

Показано, что результаты расчета волнового сопротивления, возникающего при обтекании сверхзвуковым потоком плоского соплового насадка с ромбическими выступами, удовлетворительно совпадают с экспериментальными данными, полученными при сверхзвуковом обдуве сопловых насадков с ромбическими выступами сжатым воздухом на дифференциальной установке [31, 35].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Аналитическим путем получены формулы, описывающие зависимость полных коэффициентов волнового сопротивления плоских периодических рельефов стенки соплового насадка от параметров их подобия. Показано, что полные коэффициенты волнового сопротивления бесконечного периодического рельефа и такого же рельефа конечной длины отличаются величиной дефекта. Доказано, что при дробном волновом числе вклад его неполного периода в полный коэффициент волнового сопротивления рельефа сопла может быть как отрицательным, так и положительным.

2. В рамках линейной теории точно решена стационарная краевая задача трехмерного обтекания потоком бесконечной пластины – элемента стенки сопла, у которой ромбический рельеф ее обтекаемой поверхности задан в виде суммы плоских синусоидальных волн. Проведено сравнение критических значений углов ромба, полученных автором с помощью линейной теории, с экспериментальными данными работ других авторов, в которых представлены результаты измерений волновых сопротивлений сопловых насадков, имевших ромбические рельефы с различными углами ромба. Некоторое расхождение теоретических и экспериментальных критических значений угла ромба, а также наличие в эксперименте второго максимума и его отсутствие в линейной теории объясняются тем, что в данной работе были изучены насадки бесконечной длины с рельефом в виде плоских синусоидальных волн, а в эксперименте были испытаны цилиндрические насадки, которые имели конечные размеры и ступенчатые ромбические рельефы с острыми кромками.

3. Проведено вычислительное исследование с использованием CFD-продукт ANSYS волнового сопротивления, возникающего при сверхзвуковом обтекании

ромбической рельефной поверхности стенки соплового насадка при различных углах ромба. Показано, что результаты расчетов удовлетворительно согласуются с данными экспериментов, в которых путем обдува сжатым воздухом на дифференциальной установке соплового насадка с ромбическим рельефом измерена сила его волнового сопротивления.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Семенов В. В., Иванов И. Э., Крюков И. А. Регулирование высотности сопла с большой степенью расширения // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника. 2015. № 40. С. 5–21.
2. Семенов В. В., Иванов И. Э., Крюков И. А., и др. Повышение эффективности ракетного двигателя второй ступени // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника. 2015. № 43. С. 5–18.
3. Stark R., Génin C., Schneider D., & Fromm C. Ariane 5 performance optimization using dual-bell nozzle extension // Journal of Spacecraft and Rockets. 2016. V. 53. № 4. P. 743–750.
4. Stark R., Génin C. Sea-level transitioning dual bell nozzles // CEAS Space Journal. 2017. V. 9, № 3. P. 279–287.
5. Choi J., Huh H. Technology review and development trends of dual-bell nozzle for altitude compensation // Journal of the Korean Society for Aeronautical & Space Sciences. 2015. V. 43, № 5, P. 456–465.
6. Davis K., Fortner E., Heard M., McCallum H., & Putzke H. Experimental and computational investigation of a dual-bell nozzle // 53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting, AIAA SciTech Forum, Kissimmee, Fl., (U.S.A.), 5–9 Jan., 2015. AIAA Paper № 0377.
7. Sutton G. P., Biblarz O. Rocket Propulsion Elements. N. Y.: Wiley, 2001. P. 75–85.
8. Stark R. H. Flow Separation in Rocket Nozzles - An Overview // 49th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, San Jose, Ca. (U.S.A.), 14–17 Jul., 2013. AIAA Paper № 3840.
9. Свигарт Р. Дж. Критический обзор исследований рельефной поверхностной структуры // Ракетная техника и космонавтика. 1974, № 10. С. 8–30.

10. Вильямс Е. П. Экспериментальное исследование структуры аблирующей поверхности и моментов по крену, возникающих при абляции // Ракетная техника и космонавтика. 1971, Т. 9, № 7. С. 127.
11. Canning T. N., Wilkins M. E., Tauber M. E. Boundary-layer phenomena observed on the ablated surfaces of cones recovered after flight at speeds up to 7 km/sec // AGARD Proceedings. 1967. № 19.
12. Canning T. N., Wilkins M. E., Tauber M. E. Ablation patterns on cones having laminar and turbulent flows // AIAA Journal. 1968, V. 6, № 1, P. 174–177.
13. Larson H. K., Mateer G. G. Cross hatching – a coupling of gas dynamics with the ablation process. // Los Angeles, Ca. (U.S.A.), 1968. AIAA Journal Paper № 670.
14. Лаганелли А. Л., Нестлер Д. Е. Рельефные узоры на поверхности аблирующих теплозащитных материалов // Ракетная техника и космонавтика. 1969. Т. 7 № 7. С. 128.
15. Laganelli A. L., Zempel R. E. Observation of surface ablation patterns in subliming materials // AIAA Journal. 1970. V. 8 № 9. P. 1709–1711.
16. Тобак М. Гипотеза о происхождении рельефной поверхностной структуры // Ракетная техника и космонавтика. 1970. Т. 8. № 2. С. 171.
17. Шток Х. У., Жину Дж. Дж. Результаты экспериментальных исследований ромбовидных рельефных узоров теплозащитных материалов // Ракетная техника и космонавтика. 1971. Т. 9 № 5. С. 248–249.
18. Ингер Г. Р. Трехмерные возмущения высокоскоростных потоков при тепло- и массообмене // Ракетная техника и космонавтика. 1972. № 12. С. 109–116.
19. Lees L., Kubota T., Ko, D.R.-S. Stability theory for cross hatching, part I, linear stability theory // SAMSO TR 72-34. California Institute of Technology. Pasadena, Ca. (U.S.A.), 1972, V. 1.
20. Голд Х., Пробстин Р. Ф. Неупругая деформация и рельефная поверхностная структура // Ракетная техника и космонавтика. 1971. № 10. С. 20–28.

21. Голд Х., Пробстин Р. Ф. Рельефные узоры – явление, связанное с деформацией материала // Ракетная техника и космонавтика. 1970. № 2. С. 246–248.
22. Грязнов В. П., Сергиенко А. А. Обтекание волнистой колеблющейся пластинки потоком газа с плоскими волнами // НТО № 641, НИИТП. 1986.
23. Квон Мин Чан. Исследование волнового сопротивления плоского канала с рельефной структурой поверхности: Дис. ... канд. техн. наук. Москва, 2009. 178 с.
24. Семенов В. В., Сергиенко А. А. Волновое сопротивление рельефной поверхности головной части летательного аппарата // Труды МАИ. 2000. № 1.
25. Семенов В. В., Волков В. А., Квон Мин Чан. Точное решение линеаризованной задачи сверхзвукового обтекания плоского рельефа // Вестник Московского авиационного института. 2006. Т.13. № 2. С. 36–40.
26. Семенов В. В., Волков В. А., Квон Мин Чан. Волновое сопротивление рельефных стенок при сверхзвуковом течении в плоском канале // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2007. № 2 С. 26–30.
27. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. – М.: Наука, 1981.
28. Черный Г. Г. Газовая динамика. – М.: Наука, Гл. ред. физ. – мат. лит., 1988. – 424с.
29. Диткин В. В., Орлов Б. А., Пшеничников Г. И., и др. О флаттере конических оболочек // Численные методы в механике твердого деформируемого тела. – М.: ВЦ АН СССР, 1987.
30. Сергиенко А. А. Колебания пологих оболочек в сверхзвуковом потоке идеального газа // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 1990. № 4.
31. Семенов В. В. Волновое сопротивление обтекаемых волнистых поверхностей реактивного сопла и летательного аппарата // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2000. № 4. С. 18– 22.

32. Сергиенко А. А., Семенов В. В. Силовое воздействие сверхзвукового потока на оболочку с рельефной периодической структурой. // Вестник Московского авиационного института. 2000 Т. 7. № 2. С. 20–24.
33. Семенов В. В., Талалаев А. А. Исследование волновых потерь тяги на дифференциальной установке // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 1993. № 3.
34. Сергиенко А. Теория панельного флаттера // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 1993. № 3.
35. Сергиенко А. А., Семенов В. В. Исследование волнового сопротивления ромбической рельефной поверхности стенки реактивного сопла // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2001. № 1, С. 30–33.
36. Schlichting H., Gersten K. Boundary-layer theory. – Berlin: Springer. 9th ed. 2017.
37. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974.
38. J. Nikurade. Laws of flow in rough pipes // NACA 1950.
39. White F. M. Viscous fluid flow. McGraw-Hill. 3rd ed. 2006.
40. Jimenez J. Turbulent Flows Over Rough Walls // Annual review of fluid mechanics, 2004. V. 36. P. 173–96.
41. Hodge B., Taylor R. Application of the discrete–element surface roughness model to rocket nozzle heat transfer computation // 27th Joint Propulsion Conference, Sacramento, Ca., (U.S.A.), 1991. AIAA Paper № 2435.
42. Everhart J., Alter S., Merski R., Wood W., & Prabhu R. Pressure gradient effects on hypersonic cavity flow heating // 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Aerospace Sciences Meetings. Reno, Ne., (U.S.A.), 2006.
43. Pelt H. V., Oudheusden B. W. V., Schrijer, F. F. J. Souverein L. J. & Seeliger K. Flow categorization in supersonic flows with large roughness heights // 19th Australasian Fluid Mechanics Conference Melbourne, Australia, 8–11 Dec. 2014.

44. Кочетков Ю. М. Турбулентность. Турбулентность и математическое доказательство её невозможности в сверхзвуковом потоке // Двигатель. № 3 (117) 2018.
45. Годунов С. К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, гл. ред. физ. – мат. лит., 1971.
46. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1977.
47. Седов А. И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 2 РФМЛ, Т. 1. 1973.
48. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика. – М.: Наука, 1969.
49. Семенов В. В., Волков В. А. Сидху Д. С. С. Дефект волнового сопротивления при плоском обтекании периодических рельефов // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2016. № 2. С. 51–56.
50. Волков В. А., Семенов В. В., Сидху Д. С. С. Волновое сопротивление периодических плоских рельефов // Труды МАИ. 2017. № 93. URL: http://trudymai.ru/upload/iblock/73e/volkov_semenov_sidkhu_rus.pdf (дата обращения: 20.09.2018)
51. Сидху Д. С. С. Критические режимы сверхзвукового обтекания ромбического рельефа // Гагаринские чтения - 2016. Тезисы докладов. 12–15 апреля, Москва. С. 701.
52. Сидху Д. С. С., Волков В. А., Семенов В. В. Волновое сопротивление рельефных поверхностей каналов сложных форм // XX Юбилейная Международная конференция по Вычислительная механика и современные прикладные программные системы – 2017. Тезисы докладов. 24–31 мая 2017, Алушта, Крым. С. 544.
53. Сидху Д. С. С., Волков В. А., Семенов В. В. Волновое сопротивление при сверхзвуковом обтекании ромбических рельефов // Авиация и космонавтика - 2017. Тезисы докладов. 20–24 ноября, Москва. С. 124.

54. Каторгин Б. И., Киселев А. С., Стернин Л. Е., и др. Прикладная газодинамика – М.: Вузовская книга, 2009.
55. Иров Ю. Д. и др. Газодинамические функции. – М.: Машиностроение, 1965.
56. Кудрявцев В. М., Курпатенков В. Д. и др. Основы теории и расчета жидкостных ракетных двигателей. М.: Высшая школа, 1993, Т. 1–2.
57. Пирумов У. Г., Росляков Г. С. Газовая динамика сопел. – М.: Наука, 1990.
58. Стернин Л. Е. Основы газовой динамики. – М.: МАИ, 1995.
59. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. – М.: Наука, 1984.
60. Davidson L. An introduction to turbulence models. Department of Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers University of Technology, Sweden. 2011. URL: https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/doc/2011_Davidson_An-introduction-to-turbulence-models.pdf (дата обращения: 23.02.2017)
61. Гарбарук А. В., Стрелец М. Х., Травин А. К., и др. Современные подходы к моделированию турбулентности: Учебное пособие. – СПб.: Политехн. ун-та, 2016. – 234 с.
62. Алексин В. А. Математические модели турбулентных течений: учеб. пособие. – М.: МГИУ, 2007.
63. Белов И. А., Исаев С. А.. Моделирование турбулентных течений: Учебное пособие. – СПб.: Балт. гос. техн. ун-т., 2001. – 108 с.
64. Menter F. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA Journal. 1994 V. 32 № 8. P. 1598–1605.
65. Tomita J., da Silva L., da Silva D. Comparison between unstructured and structured meshes with different turbulence models for a high pressure turbine application // ASME. Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air. V. 8.
66. ANSYS CFX-Solver Theory Guide. Ansys Inc. release 17.0. 2016.
67. ANSYS FLUENT Theory Guide. Ansys Inc. release 17.0. 2016.

68. ANSYS CFX Documentation. URL:
https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/17.0/en-us/help/ai_sinfo/cfx_intro.html (дата
обращения: 13.11.2016)