

ОТЗЫВ
официального оппонента на диссертацию
Кулешова Александра Сергеевича
«Точные решения некоторых задач динамики твердого тела»,
представленную на соискание ученой степени
доктора физико – математических наук
по специальности 1.1.7. – Теоретическая механика, динамика машин

Диссертационная работа А.С. Кулешова посвящена вопросам явного интегрирования в классе лиувиллевых функций уравнений движения ряда классических задач динамики твердого тела, исследование движения которых приводится к нахождению общего решения одного линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Это задача о качении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости тяжелого тела вращения, задача о качении по абсолютно шероховатой поверхности вращения тяжелого однородного шара, задача о качении тела вращения по абсолютно шероховатой сфере в поле сил специального вида, а также известная задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в частном случае интегрируемости Гесса – Аппельрота. При помощи алгоритма Ковачича выписываются условия на параметры соответствующих задач, и доказывается, что при найденных условиях уравнения движения могут быть приведены к квадратурам. Нахождение новых интегрируемых случаев дифференциальных уравнений движения различных механических систем, а также нахождение решений в квадратурах для этих случаев является одной из главных задач теоретической механики. Поэтому тема диссертационной работы А.С. Кулешова, безусловно, является актуальной. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы.

Во введении дано обоснование актуальности и сформулированы цели исследования, проведенного в диссертации, также обоснована научная новизна работы, представлена общая характеристика работы и объявлены выносимые на защиту результаты. Проведен обзор литературы по теме диссертации.

В первой главе диссертации автор описывает алгоритм Ковачича, используемый для нахождения лиувиллевых решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, коэффициенты которого являются рациональными функциями независимой переменной. Эта глава не содержит авторских результатов, но она совершенно необходима для целостности изложения, поскольку последовательность шагов алгоритма, описанная в первой

главе, в каждой из последующих глав непосредственно переносится на каждую из исследуемых задач.

Во второй главе диссертации исследуется задача о качении без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости тяжелого динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, ось симметрии которой совпадает с осью динамической симметрии тела (тела вращения). Используя общие теоремы динамики, в результате некоторых преобразований уравнений движения, включая замену времени, показано, что задача описания движения тела вращения по горизонтальной плоскости сводится к нахождению общего решения системы двух линейных уравнений первого порядка относительно компонент угловой скорости тела в проекции на экваториальную плоскость и на ось динамической симметрии тела. Вторую главу работы можно условно разделить на две части. В первой части второй главы А.С. Кулешовым дано обобщение задачи о движении по горизонтальной плоскости тела вращения, поверхность которого удовлетворяет условию Х.М. Муштари. Найдены в явном виде два первых интеграла уравнений движения тела вращения, удовлетворяющего условию Х.М. Муштари, показано, что один из них выражается через элементарные функции. Получено общее уравнение поверхности, ограничивающей катящееся тело вращения, для которого справедливо условие Х.М. Муштари, и показано, как частные случаи, исследованные ранее Х.М. Муштари, следуют из этого общего уравнения. Во второй части второй главы диссертации система двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка, к решению которой сводится исследование движения тяжелого тела вращения на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости, приведена к одному линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка относительно компоненты угловой скорости тела в проекции на его ось динамической симметрии. В случаях движения по плоскости круглого тонкого диска и круглого диска со смещенным вдоль оси динамической симметрии центром масс находится замена независимой переменной, приводящая коэффициенты соответствующего линейного дифференциального уравнения второго порядка к виду рациональных функций. Используя описанный в первой главе алгоритм Ковачича, А.С. Кулешов доказывает, что в случае качения без проскальзывания по горизонтальной плоскости круглого диска и диска со смещенным центром масс лиувиллевых решений у соответствующего дифференциального уравнения второго порядка нет. Такой же результат получается при рассмотрении задачи о качении без проскальзывания по горизонтальной плоскости динамически симметричного тора. С другой стороны, А.С. Кулешовым показано, что в задаче о движении динамически симметричного параболоида вращения, центр масс которого расположен в фокусе образующей

параболы, общее решение соответствующего линейного дифференциального уравнения второго порядка всегда выражается через лиувиллевы функции. Таким образом, задача о качении динамически симметричного параболоида вращения приводится к квадратурам при любых значениях параметров задачи. В задаче о качении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости веретенообразного тела А.С. Кулешовым показано, что соответствующее линейное дифференциальное уравнение имеет лиувиллевы решения только при выполнении условия Х.М. Муштари. В случае качения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости динамически симметричного эллипсоида вращения, А.С. Кулешовым показано, что соответствующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка не имеет лиувиллевых решений для почти всех значений параметров задачи. Однако, указаны также несколько случаев, когда при дополнительных ограничениях на параметры эллипсоида (его массу, главные центральные моменты инерции и длины полуосей) общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка выражается через лиувиллевы функции.

В третьей главе диссертации рассматривается другая классическая задача динамики твердого тела – задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в частном случае интегрируемости Гесса – Аппельрота. Еще более ста лет назад П.А. Некрасовым было доказано, что задача описания движения тела с неподвижной точкой в этом случае сводится к нахождению общего решения некоторого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Однако найти общее решение соответствующего линейного дифференциального уравнения не удавалось никому. Благодаря переходу к специальным осям П.В. Харламова, А.С. Кулешову удалось представить соответствующее уравнение в виде линейного дифференциального уравнения с рациональными коэффициентами. Дальнейшее применение к этому дифференциальному уравнению алгоритма Ковачича показало, что его общее решение выражается через лиувиллевы функции в двух случаях: когда распределение масс в твердом теле соответствует случаю интегрируемости Лагранжа или когда постоянная интеграла площадей равна нулю.

В четвертой главе диссертации рассматривается классическая задача о качении тяжелого однородного шара по абсолютно шероховатой поверхности вращения. При этом заданной считается не та поверхность, по которой катится шар, а поверхность, которой принадлежит центр шара в процессе качения. Соответствующая поверхность получается из данной опорной поверхности смещением по нормали на расстояние, равное радиусу шара. Показано, что задача исследования движения шара по поверхности вращения приводится к нахождению общего решения некоторого линейного дифференциального уравнения второго

порядка, коэффициенты которого зависят от характеристик поверхности, которой в процессе движения принадлежит центр шара. А.С. Кулешову удалось показать, что если в процессе движения центр шара принадлежит невырожденной поверхности вращения второго порядка (параболоиду, эллипсоиду или гиперболоиду), то соответствующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка допускает общее решение, выраженное через лиувиллевы функции, при всех значениях параметров задачи. Аналогичные результат получается в задачах о качении шара по поверхности вращения такой, что его центр принадлежит поверхности Бельтрами, и циклоидальной поверхности, полученной вращением арки циклоиды вокруг её оси симметрии. Кроме того, А.С. Кулешовым показано, что если при качении шара по поверхности вращения центр шара принадлежит поверхности тора, то соответствующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка допускает общее решение, выраженное через функции Гойна, а если при качении шара по поверхности вращения его центр принадлежит поверхности катеноида, то общее решение соответствующего линейного дифференциального уравнения выражается через функции Лежандра.

В последней, пятой главе диссертации рассмотрена задача о качении тела вращения (динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, ось симметрии которой совпадает с осью динамической симметрии тела) по поверхности сферы. Предполагается, что приложенные к твердому телу силы имеют равнодействующую, приложенную к центру масс тела, направленную к центру опорной сферы, и зависящую только от расстояния между центром сферы и центром масс тела. Как показано в работе, в этом случае задача исследования движения тела приводится к нахождению общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка относительно компоненты угловой скорости тела в проекции на его ось динамической симметрии. Коэффициенты соответствующего уравнения зависят от радиуса опорной сферы, от формы поверхности, ограничивающей катящееся твердое тело, и от распределения масс в теле. Показано, что если катящееся по сфере тело вращения является неоднородным динамически симметричным шаром, то соответствующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка допускает общее решение, выраженное через лиувиллевы функции.

В заключении приведены результаты диссертационной работы, представленные на защиту.

Специального упоминания, на мой взгляд, заслуживают следующие новые результаты, полученные в диссертации.

1. Найдены в явном виде два дополнительных к интегралу энергии линейных по обобщенным скоростям первых интеграла в задаче о движении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости

тяжелого тела вращения, поверхность которого удовлетворяет условию Х.М. Муштари. Получено общее уравнение поверхности, ограничивающей катящееся тело вращения, для которого справедливо условие Х.М. Муштари.

2. Доказана неинтегрируемость в лиувиллевых функциях задач о качении бесконечно тонкого круглого диска, диска со смещенным центром масс и динамически симметричного тора по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Доказана интегрируемость в лиувиллевых функциях задачи о качении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости динамически симметричного параболоида вращения, центр масс которого расположен в фокусе образующей параболы. Получены условия, при выполнении которых задача о движении динамически симметричного эллипсоида вращения интегрируется в лиувиллевых функциях.
3. Доказано, что задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в частном случае интегрируемости Гесса – Аппельрота может быть проинтегрирована в лиувиллевых функциях только в двух случаях: если распределение масс в твердом теле соответствует случаю интегрируемости Лагранжа или если постоянная первого интеграла площадей равна нулю.
4. Доказано, что задачи о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения такой, что в процессе качения центр шара принадлежит невырожденной поверхности вращения второго порядка, циклоидальной поверхности или поверхности Бельтрами интегрируются в лиувиллевых функциях.
5. Доказано, что задача о качении неоднородного динамически симметричного шара по сфере в поле сил специального вида интегрируется в лиувиллевых функциях.

Результаты диссертации являются достоверными и полностью обоснованными, так как при их получении использовались точные методы, принятые в теоретической механике, высшей алгебре и комплексном анализе. Все полученные в диссертации результаты являются новыми и представляющими значительный теоретический интерес.

Диссертация написана ясным и доступным языком, результаты исследования изложены понятно. Автореферат диссертации, имеющий объем в 46 страниц (не считая обложки) полностью отражает содержание диссертации.

По тексту диссертации имеются следующие замечания.

1. Поскольку данная диссертационная работа является работой по специальности 1.1.7. – Теоретическая механика, динамика машин, то в

тексте диссертации хотелось бы видеть больше механических интерпретаций полученных результатов. Что дает нам тот факт, что задача разрешима в лиувиллевых функциях? Как это отражается на особенностях движения рассматриваемой механической системы? Какая польза от разрешимости той или иной задачи в лиувиллевых функциях? К сожалению, текст диссертации не дает ответы на эти вопросы.

2. Следует отметить, что анонсируемое во второй главе работы требование выпуклости поверхности, ограничивающей твердое тело, несущественно, важным является только требование единственности точки контакта тела с горизонтальной плоскостью. Это подтверждается еще и тем, что во второй главе рассматриваются задачи о качении диска (тела с острым краем) и тора, поверхность которого не является выпуклой.
3. В тексте работы имеются опечатки и некоторые шероховатости изложения.
4. Формулировка некоторых теорем в диссертационной работе сформулированы как утверждения. Было бы лучше сформулировать вместе с условиями.
5. Оппоненту было бы интересно узнать из работы нет ли связи полученных автором решений с гипергеометрической функцией.

Однако указанные замечания являются лишь пожелания и не влияют на положительную оценку диссертационной работы А. С. Кулешова.

Указанные замечания не влияют на общую положительную оценку работы. Диссертация А.С. Кулешова представляет собой законченную научно – квалификационную работу, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение. В диссертации получен ряд новых результатов в задачах динамики тела, соприкасающегося с твердой поверхностью, и динамики твердого тела с неподвижной точкой – важнейших разделов теоретической механики.

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут применяться при проведении исследований в МГУ им. М.В. Ломоносова, Санкт – Петербургском государственном университете, Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете), Московском физико – техническом институте (национальном исследовательском университете) и других научно – исследовательских центрах, занимающихся исследованием классических задач динамики твердого тела.

Диссертация «Точные решения некоторых задач динамики твердого тела» Кулешова Александра Сергеевича соответствует требованиям ВАК России, предъявляемым к докторским диссертациям, установленным в Главе II

Постановления Правительства Российской Федерации № 842 от 24.09.2013 г. «О порядке присуждения ученых степеней», а её автор, Кулешов Александр Сергеевич, безусловно, заслуживает присвоения ученой степени доктора физико – математических наук по специальности 1.1.7 – Теоретическая механика, динамика машин.

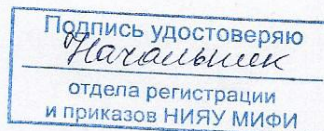
9 декабря 2025 г.

Официальный оппонент, заведующий кафедрой прикладной математики № 31
Института лазерных и плазменных технологий Федерального государственного
автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный
исследовательский ядерный университет МИФИ»
(115409, Российская Федерация, г. Москва, Каширское шоссе, д. 31, к. 5),
доктор физико – математических наук, профессор

Николай Алексеевич Кудряшов



Подпись Н.А. Кудряшова заверяю:



В. М. Самородов

С отрывом откопчен

19.01.2026

Кулешов (А.С. Кулешов)